Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Množiny bodů dané vlastnosti na ZŠ

Vypracovala: Tereza Harazimová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2013

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma množiny bodů dané vlastnosti jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 26. 4. 2013 ………………………….

Děkuji, vedoucímu své bakalářské práce prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za jeho odborné vedení a poskytování cenných rad a připomínek.

Anotace

Hlavním cílem této práce je vytvořit ucelený přehled matematických úloh zabývajících se množinami bodů daných vlastností. Uvedené příklady jsou řešené a rozdělené do sedmi podkapitol podle jejich zaměření. Práce by měla sloužit především jako inspirace pro učitele základních škol. Měla by být návodem, jak pomocí počítačových programů udělat výuku matematiky hravou a pro děti jistě zajímavější.

Annotation

The main aim of this thesis is to create a comprehensive overview of mathematical tasks dealing with a set of points with given properties. The examples are designed and divided into seven subchapters according to their specialization. This paper should be primarily an inspiration for primary school teachers; They find here instructions on how to use computer programmes to make teaching of mathematics more playful and interesting for children.

Obsah

1. Úvod

Geometrie je velmi důležitá část osnov matematiky již na prvním stupni základních škol. Ne bezdůvodně. Svět, ve kterém žijeme, nám denně nabízí množství zajímavých praktických úloh, které právě geometrii využívají. Proto si myslím, že je důležité zabývat se jí a snažit se pochopit její souvislosti. Je také na místě, pracovat s dětmi tak, aby si vytvořily k tématu kladný vztah.

Proč jsem si vybrala právě množiny bodů dané vlastnosti? Ze svých skromných zkušeností se vzděláváním žáků vím, že se jedná o téma, které dětem všech úrovní a věku dělá problémy. Je to téma obtížné a pro děti především špatně představitelné. A i z tohoto důvodu jsem se ve své práci zaměřila nejen na výuku geometrie klasickou formou, ale především na možnosti, které nám přinášejí počítačové softwary. Konkrétně jsem zvolila dynamický matematický program GeoGebra. Tento program jsem vybrala kvůli jeho jednoduché ovladatelnosti a dostupnosti. Nemusí ho používat pouze učitelé, je skvělý i pro žáky, a to jak k procvičování ve škole, tak například k domácí přípravě.

V práci je u všech zařazených příkladů uveden podrobný postup a obrázek jejich konstrukce. Zároveň je možné, otevřít si jejich konstrukci právě v programu GeoGebra. Zde je dobré, zobrazit si krokovou konstrukci pro lepší demonstraci postupu řešení příkladu. Největší výhodou je ale možnost měnit velikosti určitých parametrů úloh (poloměry kružnic, velikosti úseček, atd.) a pohybovat zvolenými body. Máme tak možnost objevovat souvislosti a ověřovat vztahy mezi jednotlivými geometrickými útvary. Myslím, že využití tohoto programu by mělo učitelům výuku usnadnit, žákům zpříjemnit a zpestřit.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. První a druhá, nám blíže představí program GeoGebra, definuje a vysvětlí pojem množina bodů dané vlastnosti. Další kapitola je rozdělena do sedmi podkapitol, z nichž každá popisuje jednu z množin bodů dané vlastnosti. Každá z nich začíná shrnutím důležitých poznatků o dané množině, bez kterých by nebylo možné pochopit a vyřešit následující příklady. Poslední kapitola se zaměřuje na obtížnější příklady pro nadanější nebo aktivnější žáky, kteří si chtějí více zapřemýšlet.

Práce je určena především učitelům druhého stupně základních škol. A jejím cílem by mělo být ukázat jim, jiný než klasický způsob výuky, který může žáky více bavit a motivovat k dalšímu studiu.

2. Program GeoGebra

2.1. Základní informace

Program GeoGebra je dynamický matematický software, který se používá jako pomůcka při výuce matematiky na základních, středních i vysokých školách. Program spojuje geometrii, algebru i analýzu. A proto je ideálním prostředkem, jak ke kvalitnímu znázorňování konstrukcí, tak i k ověřování jejich předpokládaných vlastností (například velikosti znázorněných úhlů, úseček, kružnic atd.). Největší předností tohoto programu je, dle mého názoru, možnost interaktivně měnit velikosti parametrů úlohy pomocí posuvníků.

Velkou výhodou programu je také fakt, že se řadí do Open Source programů. Což v překladu znamená, že program je nabízen zdarma ke stažení na internetu, případně je možné ho spustit online. Z toho plyne, že program může využívat opravdu každý. Učitelé ve školách, i žáci při domácí přípravě. Program GeoGebra lze zdarma stáhnout na webových stránkách - www.GeoGebra.org.

Nápověda programu GeoGebra definuje software takto [16]:

GeoGebra je dynamický matematický software spojující geometrii, algebru a matematickou analýzu. Byl vytvořen pro účely vyučování a učení se matematiky Markusem Hohenwarterem na Univerzitě Florida Atlantic.

Na jedné straně je GeoGebra interaktivní geometrický systém, se kterým je možno konstruovat: body, přímky, úsečky, vektory, kružnice, kuželosečky, ale třeba i grafy funkcí, které lze následně interaktivně měnit.

Na druhé straně je také možné přímé zadávání rovnic a souřadnic. GeoGebra též umožňuje počítat s čísly, vektory, souřadnicemi bodů, určovat derivace, integrály, nulové body a extrémy funkcí.

GeoGebra poskytuje dva úhly pohledu na jednotlivé objekty: výraz v algebraickém okně odpovídá objektu v geometrickém okně a naopak.

3. Množiny bodů dané vlastnosti

„Geometrická množina bodů dané vlastnosti je název pro množinu všech bodů dané vlastnosti, tj. geometrický útvar *U*, jehož body splňují tyto dva požadavky:

a. Každý bod útvaru *U* má předepsanou vlastnost (čili: žádný bod, který nemá předepsanou vlastnost, není bodem útvaru *U*).

b. Každý bod, který má předepsanou vlastnost, je bodem útvaru *U* (čili: žádný bod, který není bodem útvaru *U*, nemá předepsanou vlastnost).“ ([14], s. 3)

Výše uvedené dvě podmínky vyjadřují rovnost dvou množin: Množiny *M* bodů dané vlastnosti a množiny bodů útvaru *U*. Důkaz toho, že jde opravdu o množinu všech bodů dané vlastnosti, spočívá v tom, ukázat, že platí rovnost $M = U$. ([14], s. 3)

S množinami bodů dané vlastnosti se nejčastěji setkáme při řešení konstrukčních úloh.

3.1. Konstrukční úlohy v rovině

Konstrukční úloha je příklad, jehož řešením je geometrický útvar se zadanými vlastnostmi sestrojený pomocí pravítka, kružítka a případně i úhloměru. Přitom používáme tzv. základní Eukleidovské konstrukce, založené na sestrojování bodů, přímek a kružnic. ([14], s. 22)

Základní Eukleidovské konstrukce spočívají v tomto:

- Bod považujeme za sestrojený, když je známá jeho poloha, je určen průsečíkem dvou přímek, dvou kružnic nebo přímky a kružnice.
- Přímku považujeme za sestrojenou, jestliže jsou dané její dva různé body.
- Kružnici $k(S; r)$ považujeme za sestrojenou, jestliže je daný bod S a úsečka r.

Konstrukční úlohy, které budeme řešit, jsou dvojího typu:

a. *Polohové úlohy* – v nich je určené umístění daných prvků (úsečka, úhel apod.), tj. jejich poloha.

b. *Nepolohové úlohy* – poloha alespoň jednoho prvku je volitelná. Tyto úlohy je vždy možno převést na úlohy polohové, a to umístěním některého z prvků.

Části postupu řešení konstrukční úlohy:

1. **Rozbor:** předpokládáme, že úloha je vyřešená, načrtneme ilustrační obrázek a snažíme se najít vztahy mezi danými a hledanými útvary
2. **Konstrukce:** na základě rozboru sestavíme postup konstrukce a podle něj provedeme konstrukci graficky
3. **Zkouška:** kontrola správnosti konstrukce
4. **Diskuze:** v této části se stanovují podmínky řešitelnosti úlohy a počet řešení podle vzájemné polohy zadaných prvků, přitom postupujeme tak, že procházíme jednotlivé kroky konstrukčního postupu a zkoumáme počet možných řešení těchto jednotlivých kroků

Toto jsou klasické části řešení konstrukčních úloh. V této práci si je ale trochu pozměníme. Řešené příklady budou mít pouze tři části:

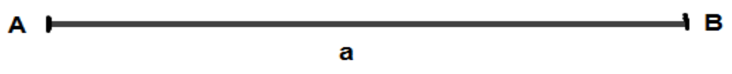
1. **Rozbor** - budeme na něj nazírat tak, jako by ho řešil sám žák. Ten si nakreslí situaci určenou zadáním. Známé geometrické útvary si na obrázku vyznačí barevně. Jinou barvou pak do obrázku zanese ostatní útvary a své hypotetické řešení úlohy. Žák se snaží výslednou množinu odhadnout, odvodit na základě již získaných poznatků. V této části bude zahrnut i postup konstrukce tak, jak si myslím, že by příklad mohlo řešit samo dítě.
2. **Konstrukce** – bude zahrnovat obrázek výsledné konstrukce příkladu v programu GeoGebra se zvýrazněnými vztahy mezi jednotlivými geometrickými útvary.
3. **Zkouška** – se bude zabývat tím, jestli zvolený postup konstrukce byl správný. Pomocí programu GeoGebra budeme ověřovat platnost vztahů mezi jednotlivými geometrickými útvary.

4. Přehled nejužívanějších množin bodů dané vlastnosti v rovině

4.1. Osa úsečky

4.1.1. Úsečka

Úsečka je část přímky mezi dvěma body. Určující body úsečky se nazývají krajní body úsečky. Znázorňuje se rovnou čarou mezi těmito body. A zapisuje se pomocí krajních bodů, případně malým písmenem $\Rightarrow$ úsečka AB nebo úsečka a.

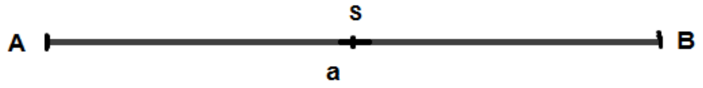


Obr. 1

Velikost neboli délku úsečky, většinou zapisujeme pomocí dvou svislých čar (rovné závorky) $\Rightarrow$ $a = |AB|$.

Střed úsečky

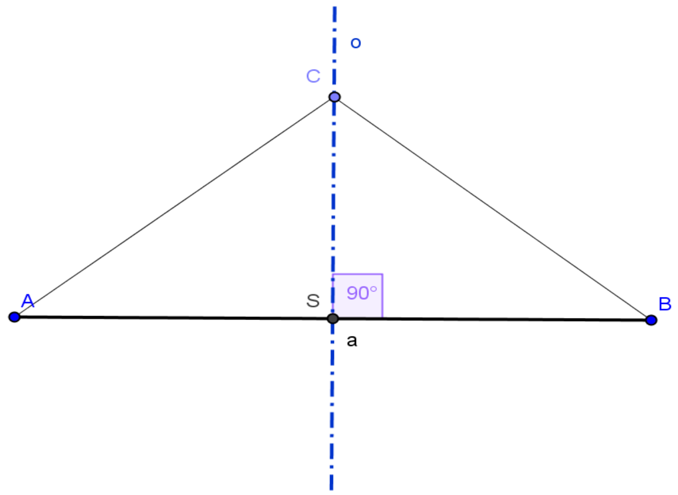
Střed úsečky je bod náležící dané úsečce, který ji dělí na dvě stejně dlouhé části. Obvykle ho značíme písmenem *S*. *S* je středem úsečky $\mathrm{AB}: |\mathrm{AS}| = |\mathrm{SB}| = \frac{1}{2}|\mathrm{AB}|$.



Obr. 2

4.1.2. Osa úsečky

Osa úsečky je přímka kolmá k úsečce a procházející jejím středem. Všechny body na ose úsečky mají od obou krajních bodů stejnou vzdálenost. Tuto osu obvykle značíme písmenem *o* a do obrázku ji zanášíme čerchovanou čárou. ([12], s. 52)



Obr. 3

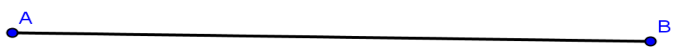
Pro bod C, který leží na ose úsečky o, platí: $|AC| = |CB|$. Tento fakt je možné zobecnit, protože osu úsečky lze také definovat jako množinu všech bodů roviny, které mají od dvou různých bodů A, B stejnou vzdálenost. Symbolicky lze tuto skutečnost zapsat takto:

$$M = \{X \in E_2; |AX| = |BX|\}; tj. M = o, kde\, o \perp AB \wedge S \in o$$

Množina M všech bodů X v rovině pro které platí, že jejich vzdálenost od obou krajních bodů je stejná. Tuto množinu nazveme osou úsečky. Osa je kolmá na úsečku AB a prochází jejím středem S.

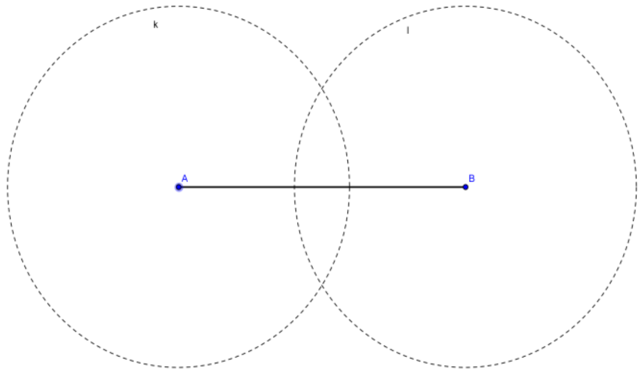
Konstrukce osy úsečky:

I. Sestrojíme úsečku AB.



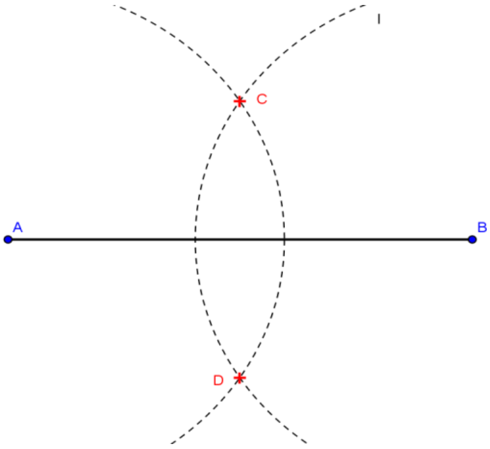
Obr. 4

II. Sestrojíme kružnici $k(A; \tfrac{1}{2}|AB| < r < |AB|)$ a kružnici $l(B; \tfrac{1}{2}|AB| < r < |AB|)$.



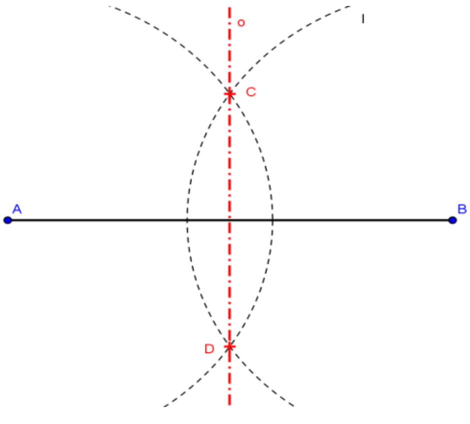
Obr. 5

III. Jako průnik těchto dvou kružnic nám vzniknou dva body – C, D.



Obr. 6

IV. Posledním krokem je sestrojení samotné osy úsečky o, která odpovídá přímce CD.



Obr. 7

4.1.3. *Osová souměrnost*

Ve spojení s osou úsečky je důležité zmínit i pojem osová souměrnost. Je to geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu X roviny přiřazuje obraz X' tak, že platí ([4], s. 93):

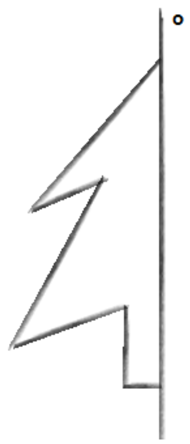
1) bod $X = X'$, právě když bod X leží na ose souměrnosti o
2) bod X' leží na kolmici k ose o vedené bodem X a to v opačné polorovině určené osou o než bod X
3) $|oX'| = |oX|$

Základní vlastnosti osové souměrnosti:

- osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti o
- každý bod osy je samodružný, jiné samodružné body neexistují
- přímka p a její obraz p' mají stejnou odchylku od osy souměrnosti o

Příklad:

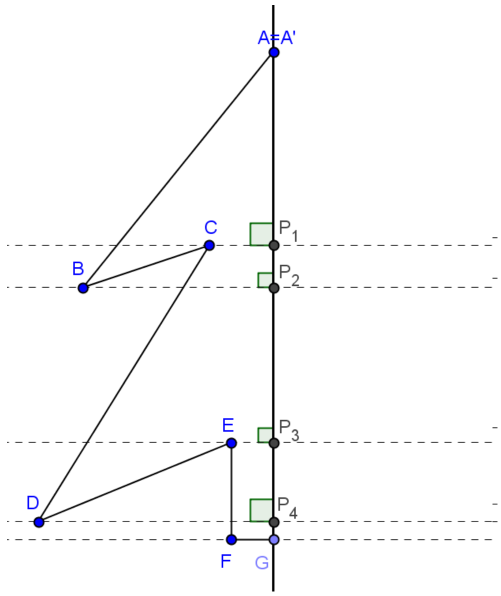
Sestrojte osově souměrný obrazec podle dané osy.



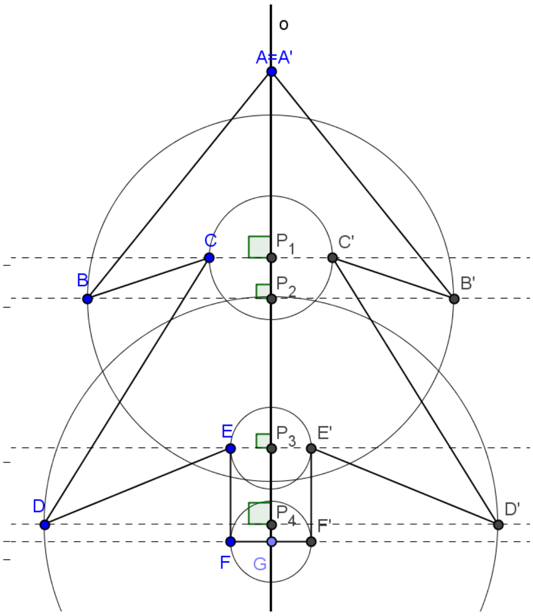
Obr. 8

Nejprve si označíme body, kde dochází ke zlomu křivky. Poté všemi takovými body vedeme kolmice k ose souměrnosti o. Jejich průsečíky s osou označíme P_1, P_2, P_3, P_4. Tyto body následně použijeme jako středy kružnic, kterými přeneseme vzdálenost odpovídajícího bodu do opačné poloroviny. Posledním krokem je propojení nově vzniklých bodů ve stejném pořadí, jako v původním obrazci.

Konstrukce:



Obr. 9



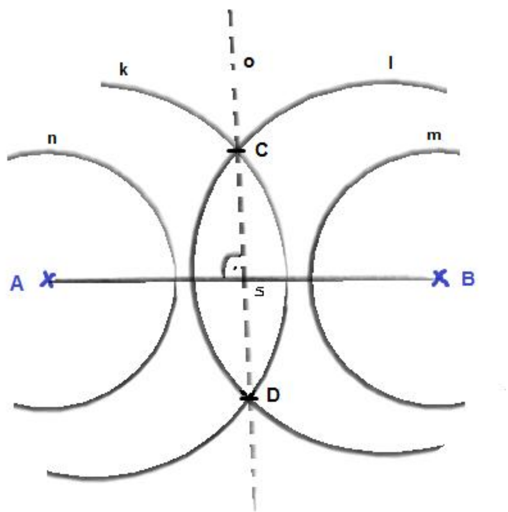
Obr. 10

4.1.4. Řešené příklady na osu úsečky

<u>Příklad č. 1:</u>

Určete množinu bodů, jejichž vzdálenost od bodu A i B je stejná.

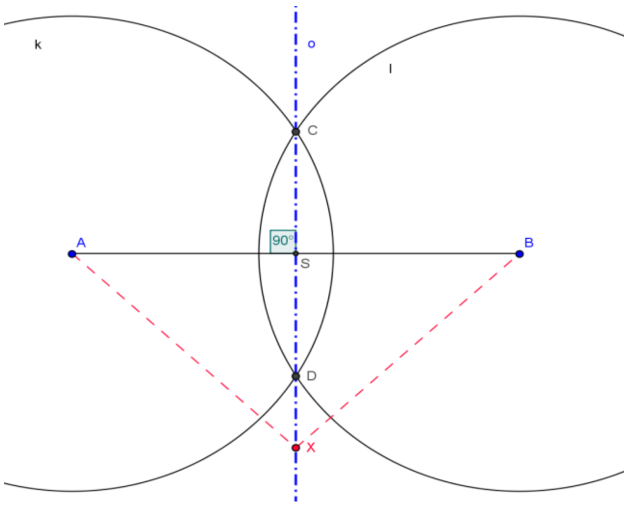
Rozbor:



Obr. 11

Žák má dané dva body, v náčrtku barevně vyznačené a potřebuje nalézt množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodu A i B. Využije proto výše definovanou osu úsečky. Nejprve si oba známé body spojí, tak získá úsečku, se kterou bude dále pracovat. Žák si nejspíš zvolí libovolné kružnice m, n, které mají středy v daných bodech a mají stejný poloměr. Jak je ale vidět z náčrtku, tyto kružnice nebyly zvoleny správně, jejich poloměr je příliš malý na to, aby se protnuly v určitém bodě. Žák tedy musí poloměr kružnic nějak omezit. Vrátí se zpět k definici osy úsečky a sestrojí kružnice k a l, pro které platí, $k(A; \frac{1}{2}|AB| < r < |AB|)$ a $l(B; \frac{1}{2}|AB| < r < |AB|)$. Nyní už je vše v pořádku, body C a D vzniknou jako průniky obou kružnic. Osu o, sestrojí žák jednoduše, odpovídá totiž přímce CD. Hypotézou je tedy, že výslednou množinou je osa úsečky AB.

Konstrukce:



Obr. 12

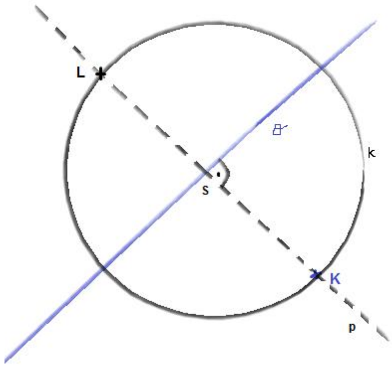
Zkouška:

Pomocí konstrukce úlohy v dynamickém matematickém programu GeoGebra jsme ověřili, že žákův postup je správný. Výslednou množinou bodů je přímka procházející středem úsečky AB a zároveň na ni kolmá = osa úsečky AB. Pro ověření faktu, že opravdu všechny body osy jsou od bodů A i B stejně vzdáleny, jsme libovolně zvolili bod X, který na ose leží, a porovnali jsme velikosti úseček $|AX|$ a $|BX|$. Opět pomocí programu GeoGebra jsme zjistili, že velikosti úseček se opravdu rovnají, $|AX| = |BX|$.

<u>Příklad č. 2:</u>

Nakresli libovolnou přímku o, a mimo ní bod K. Narýsuj bod L tak, aby přímka o byla osou úsečky KL.

Rozbor:

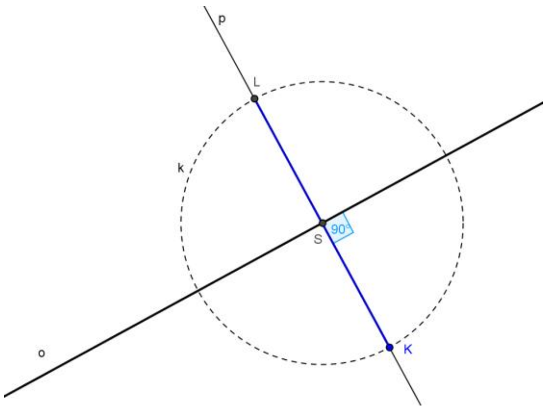


Obr. 13

Už při vytváření náčrtku by si měl žák uvědomit, že postup tohoto příkladu nebude odpovídat klasické konstrukci osy úsečky. Protože má zadanou osu o a jeden bod úsečky, je jeho úkolem postupovat „opačně“ a zkonstruovat úsečku, která bude náležet dané ose. Žák by si měl zopakovat všechny vlastnosti osy úsečky, kterými jsme se zabývali v této podkapitole. A to především kolmost osy na úsečku a fakt, že prochází jejím středem. Od toho se bude odvíjet celá konstrukce.

Nejprve žák sestrojí přímku p, kolmou na osu o a procházející daným bodem K. Poté žák využije druhé vlastnosti a to, že osa prochází středem úsečky. Proto sestrojí kružnici $k(S; r = |SK|)$. Hledaný bod L dostane jako průsečík přímky p a kružnice k. Konečným řešením úlohy bude úsečka LK.

Konstrukce:



Obr. 14

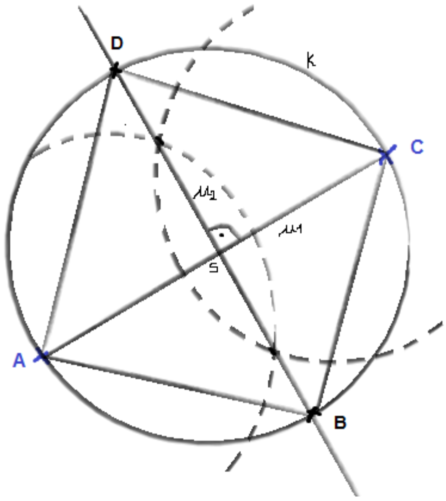
Zkouška:

Konstrukce potvrdila, že žákův postup byl správný a že všechny vlastnosti osy úsečky, kterých jsme využili, jsou opravdu platné. Pro jeden zvolený bod K má úloha jedno řešení.

<u>Příklad č. 3:</u>

Narýsujte čtverec ABCD, znáte-li pouze vrcholy A, C. Načrtněte obrázek. ([5], s. 26):

Rozbor:

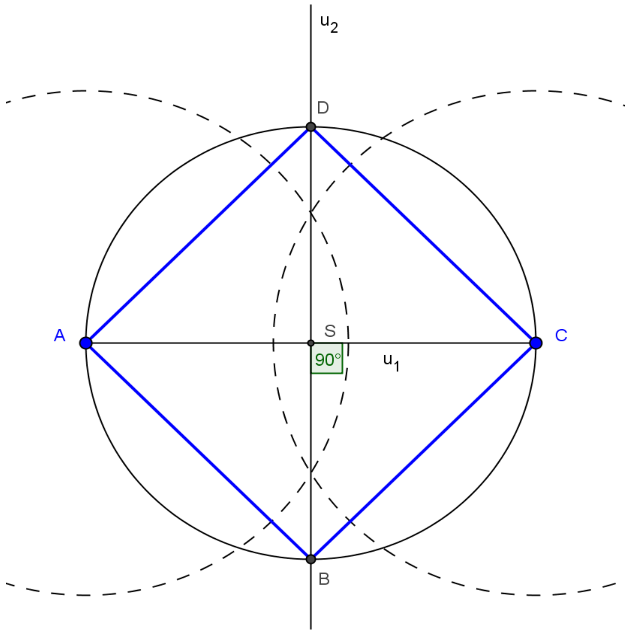


Obr. 15

Po vytvoření náčrtku tohoto příkladu si žák určitě všimne, že se jedná opět o úlohu na využití osy úsečky. Proto stejně jako v předchozím příkladě, využije všechny znalosti o jejích vlastnostech. To by ale pro úspěšné řešení nestačilo. Musíme si se žáky zopakovat i několik běžně známých vlastností čtverce, kterých při řešení budeme také využívat. Například fakt, že úhlopříčky ve čtverci mají stejnou velikost, že se navzájem půlí a že spolu svírají úhel o velikosti $90°$. V této chvíli už by žáci měli být schopni úlohu bez problémů vyřešit sami.

Zadány jsou body *A* a *C*. *Z* náčrtku žák vidí, že jejich spojením vznikne úhlopříčka u_1. To je důležitý fakt, protože z tohoto důvodu může pokračovat následovně. Žák sestrojí osu této úhlopříčky, která bude na u_1 kolmá a procházející středem úsečky *S*. Tuto osu pojmenuje u_2. Dalším krokem je využití výše zmíněné vlastnosti a to, že úhlopříčky čtverce se navzájem půlí. Proto žák sestrojí kružnici $k(S; r = |AS|)$. Zbývající vrcholy čtverce žák nalezne jako průsečíky osy úsečky u_2 a kružnice k. Posledním krokem je propojení bodů $\Rightarrow$ *čtverec* $ABCD$.

Konstrukce:



Obr. 16

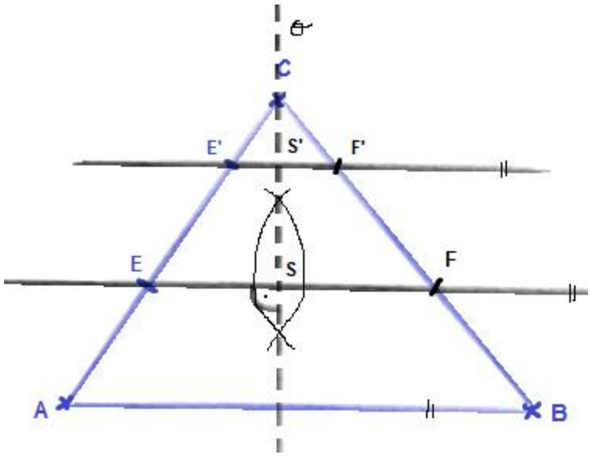
Zkouška:

Zkouška potvrdila správnost původních předpokladů. Tento příklad lze ale samozřejmě řešit i jinak. Například přes konstrukci dvou rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly u základny AC mají velikosti $45°$. Spojením trojúhelníků ABC a ACD vznikne hledaný čtverec $ABCD$.

<u>Příklad č. 4:</u>

Je zadán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou c a rameny AC, BC***. Co je množinou středů všech úseček*** EF***, kde*** $E \in AC, F \in BC$ ***a přitom platí*** $EF \| AB$***. ([8], s. 67)***

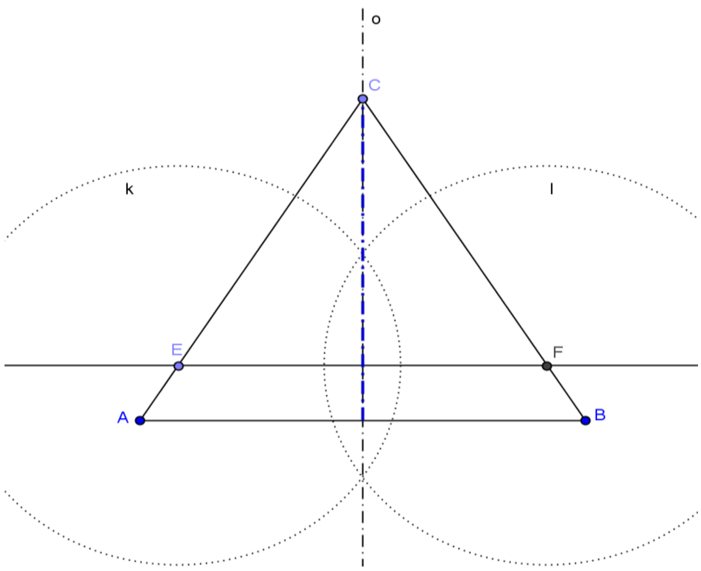
Rozbor:



Obr. 17

Žák si načrtne obrázek, kde si barevně vyznačí ze zadání známé geometrické útvary. Nejprve si zvolí libovolný bod *E*, který leží na úsečce AC. Druhým krokem je sestrojit bod *F*, pro který platí dvě podmínky. Bod *F* žák získá jako průsečík úsečky BC a přímky, která je rovnoběžná s úsečkou AB a prochází bodem *E*. Tím je sestrojena hledaná úsečka EF. Úkolem úlohy bylo ale najít množinu všech středů této úsečky, takže žák ho musí nejprve najít. Pro jednodušší vyšetření hledané množiny si žák může zvolit bod E', sestrojit úsečku $E'F'$ a její střed. Tím si lépe představí, kde množinu hledat. Spojením středů úseček EF a $E'F'$ žák hledanou množinu získá, ta odpovídá ose úsečky EF.

Konstrukce:



Obr. 18

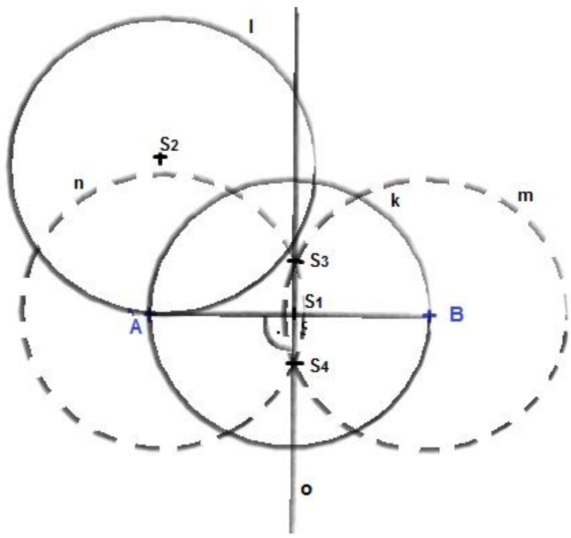
Zkouška:

Hledanou množinou je dle původního předpokladu osa o úsečky EF, která je na ni kolmá a prochází jejím středem. Z konstrukce je ale zřejmé i několik specifických vlastností. Například to, že tato osa prochází i vrcholem C daného trojúhelníku a středem jeho základny AB.

Příklad č. 5:

Najděte množinu středů všech kružnic, které procházejí dvěma zadanými body A a B.

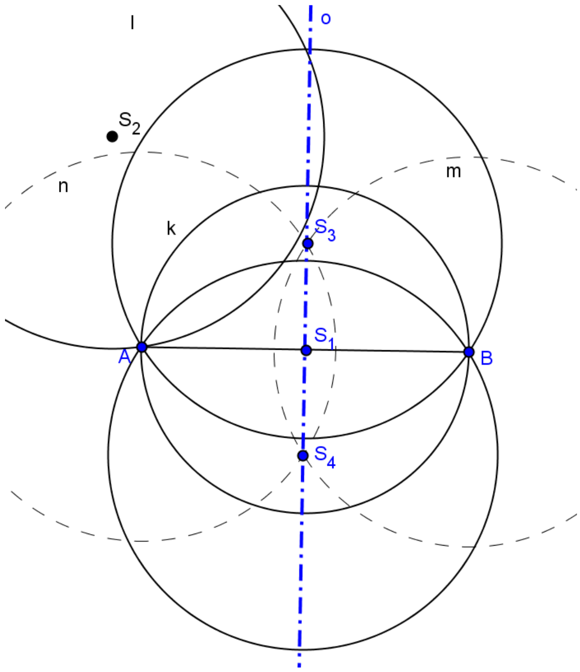
Rozbor:



Obr. 19

Zadány jsou dva body A, B. Žákovým úkolem je sestrojit množinu středů kružnic, které těmito body prochází. Žák se pokusí několik takových kružnic sestrojit. První volbou nejspíš bude Thaletova kružnice, která má střed v polovině úsečky AB a její poloměr odpovídá velikosti $|AS_1|$. Ta nám udá první bod S_1 hledané množiny. Kde se ale budou nacházet další body? Žák si sestrojí libovolnou kružnici l se středem S_2. Ta ale, jak je vidět z náčrtku, nesplňuje dané požadavky, prochází jen bodem A. Žák se musí zamyslet nad tím, kde se středy hledaných kružnic budou nacházet. Pomůže nám definice kružnice, střed kružnice musí mít od všech bodů na ní ležících stejnou vzdálenost. Proto žák sestrojí dvě stejně velké kružnice m, n se středy v bodech A, B a poloměrem $r \geq \frac{1}{2}|AB|$. Průsečíky těchto kružnic určí dva body – S_3, S_4. Tyto body jsou stejně vzdáleny od bodů A i B a jsou tak prvky hledané množiny. Výslednou množinu žák dostane sestrojením přímky S_1S_2 – přímka kolmá na úsečku AB a procházející jejím středem. Žákova hypotéza zní: řešením je osa (o) úsečky AB.

Konstrukce:



Obr. 20

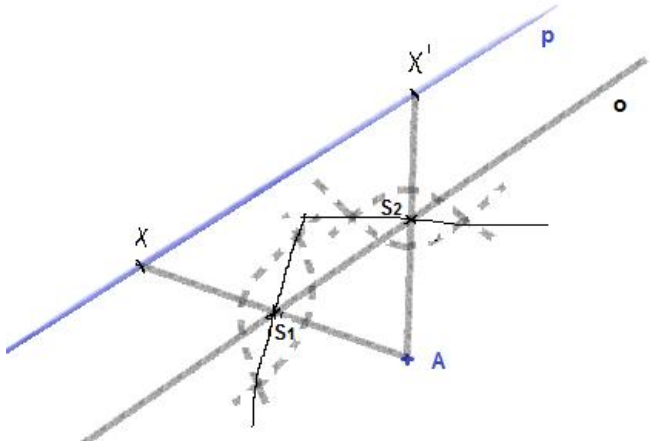
Zkouška:

Konstrukcí této úlohy v dynamickém matematickém softwaru jsme ověřili, že množina středů všech kružnic procházejícími dvěma body, existuje vždy jedna ke každé dvojici daných bodů a představuje osu odpovídající úsečky. Všechny takové kružnice můžeme také označit jako svazek kružnic.

<u>Příklad č. 6:</u>

Máme zadanou přímku p a bod A, který na přímce neleží. Po přímce p „pohybujeme" bodem X. (Některý si při řešení zvolte). Určete množinu středů všech úseček AX. Výsledek barevně zvýrazněte. ([8], s. 67)

Rozbor:

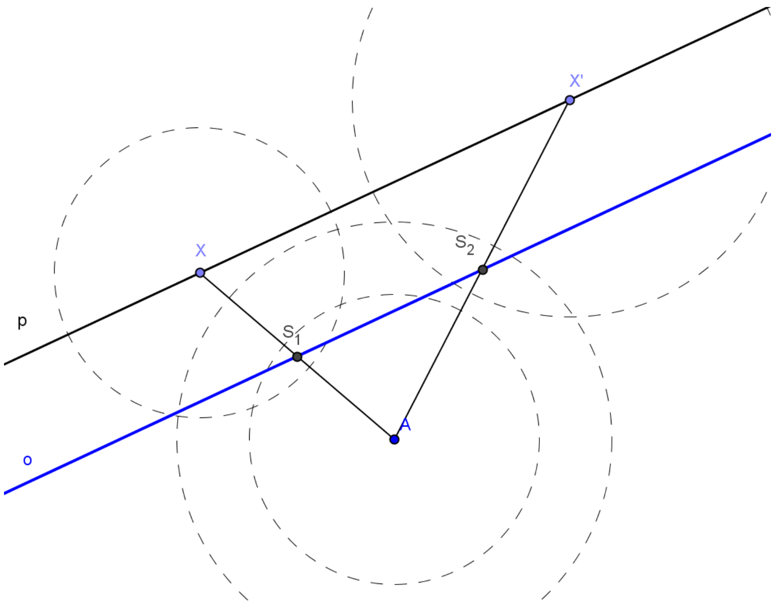


Obr. 21

Žák si opět udělá náčrtek pro přehlednost. Dle zadání si zvolí libovolný bod X ležící na přímce p. Pro lepší představu a určení výsledné množiny si žák zvolí ještě bod X', který také leží na přímce p, ale není totožný s bodem X. Body X a X' propojí s bodem A. Vzniknou dvě úsečky. Žák sestrojí středy těchto úseček a následně přemýšlí, jaký geometrický útvar bude představovat hledanou množinu.

Výslednou množinu bodů žák dostane propojením středů úseček S_1 a S_2 - přímku si označí písmenem o.

Konstrukce:



Obr. 22

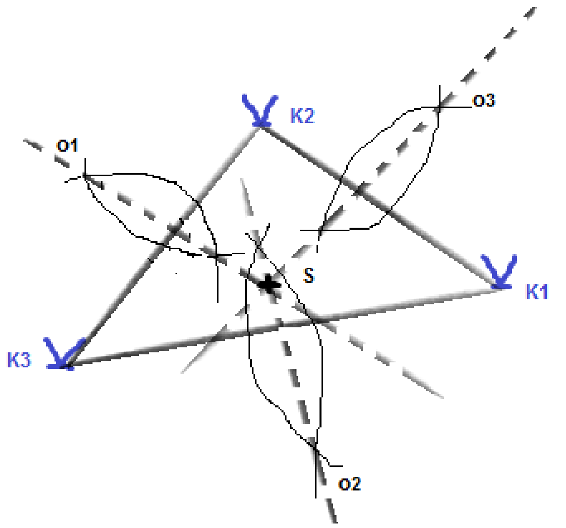
Zkouška:

Úlohu si namodelujeme v dynamickém matematickém programu. V tomto programu můžeme neomezeně pohybovat jak bodem X po přímce p, tak bodem A. Tímto způsobem žákům názorně ukážeme, že řešením bude vždy přímka, kterou tvoří středy úseček AX. Přímka má i jednu speciální vlastnost, je rovnoběžná s přímkou p.

<u>Příklad č. 7:</u>

Lesník Pešek má ve svém revíru tři krmelce. Chce postavit sklad krmiva tak, aby ke všem třem krmelcům měl stejně daleko. Nakresli plánek a poraď mu, kde má sklad stavět. ([2], s. 34)

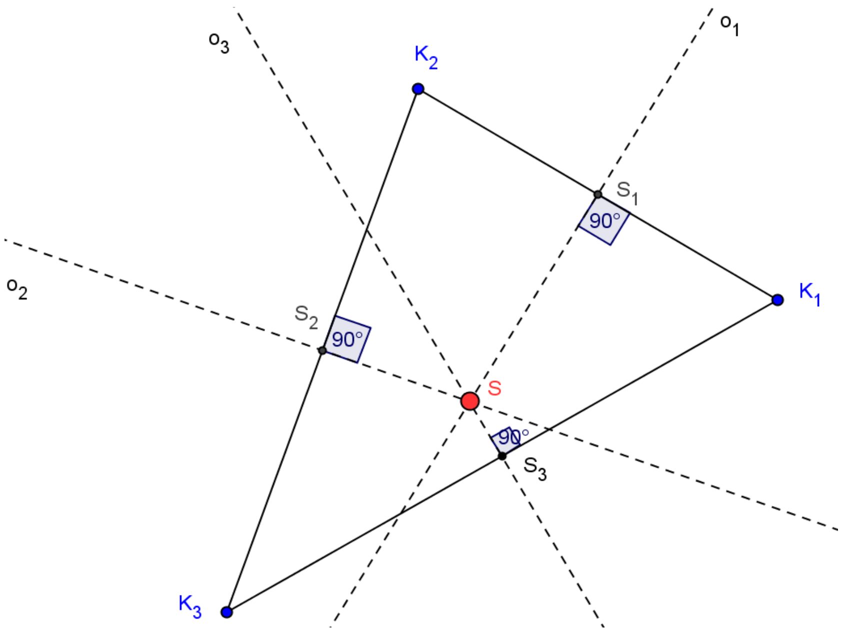
Rozbor:



Obr. 23

V této úloze žák hledá bod, který je stejně vzdálený od tří krmelců. Jelikož žák nejspíš nebude vědět, jak tento bod nalézt, úlohu si zjednoduší tím, že ji rozdělí na tři části. Nejprve bude hledat množiny bodů, jejichž vzdálenost je od obou vybraných bodů stejná - tomu odpovídají osy úseček. Takto sestrojí osy všech tří úseček - o_1, o_2, o_3. Výslednou množinou bude jeden bod S, v našem případě seník, který žák sestrojí jako průnik tří již nalezených množin.

Konstrukce:



Obr. 24

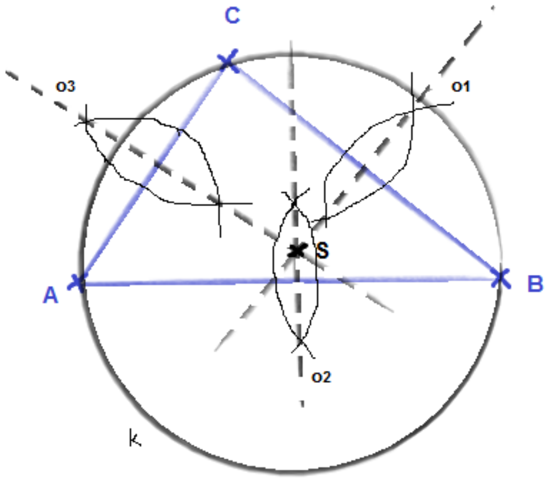
Zkouška:

Konstrukce nám potvrdila, že žákův postup byl správný. Výslednou množinou je bod, který je průsečíkem všech tří os stran. Jeho poloha závisí na rozmístění krmelců, může být uvnitř ale i vně trojúhelníku.

<u>Příklad č. 8:</u>

Narýsuj libovolný ostroúhlý trojúhelník ABC. Sestroj osy jeho stran. Průsečík os stran označ písmenem S ***a narýsuj kružnici*** k ***se středem v bodě*** S ***a poloměrem*** $|SA|$***. Napiš jakou vlastnost má narýsovaná kružnice. ([2], s. 34)***

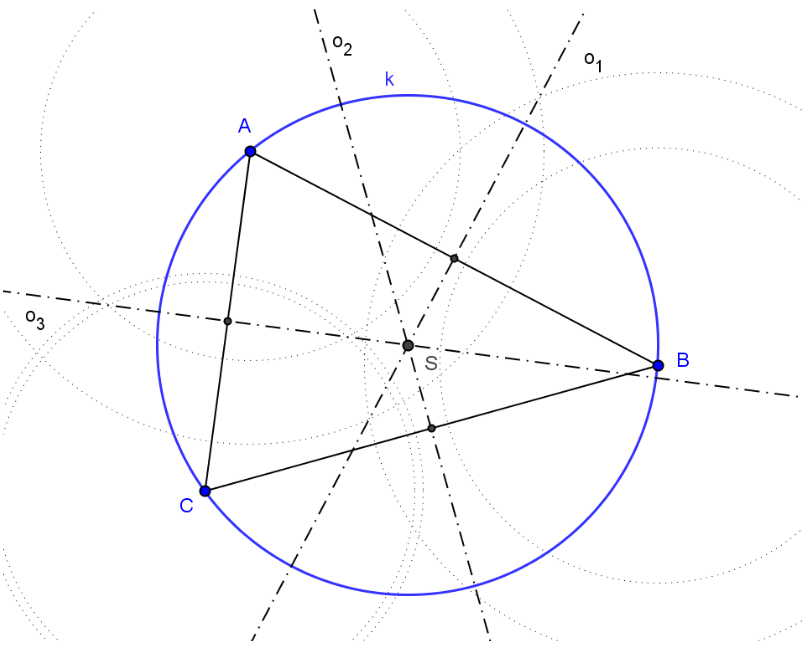
Rozbor:



Obr. 25

Postup konstrukce u tohoto příkladu bude obdobný jako u předcházející úlohy. Žák sestrojí osy stran trojúhelníka. Bod S vznikne jako jejich průsečík. Posledním úkolem je sestrojení kružnice $k(S; r = |AS|)$. Následně by se měl žák zamyslet a sepsat si, alespoň několik vlastností této kružnice, které je schopen z obrázku vyčíst.

Konstrukce:



Obr. 26

Zkouška:

Konstrukce potvrdila, že postup je v pořádku. Bod S vznikl jako průsečík os stran trojúhelníku. Ten jsme následně použili jako střed kružnice o poloměru $|AS|$. Tato kružnice je zajímavá tím, že prochází všemi vrcholy zadaného trojúhelníka. Nazýváme jí kružnicí opsanou.

Tímto jsme se dostali k několika dalším důležitým pojmům z teorie, které budeme dále využívat. Jsou to ([3], s. 64-66):

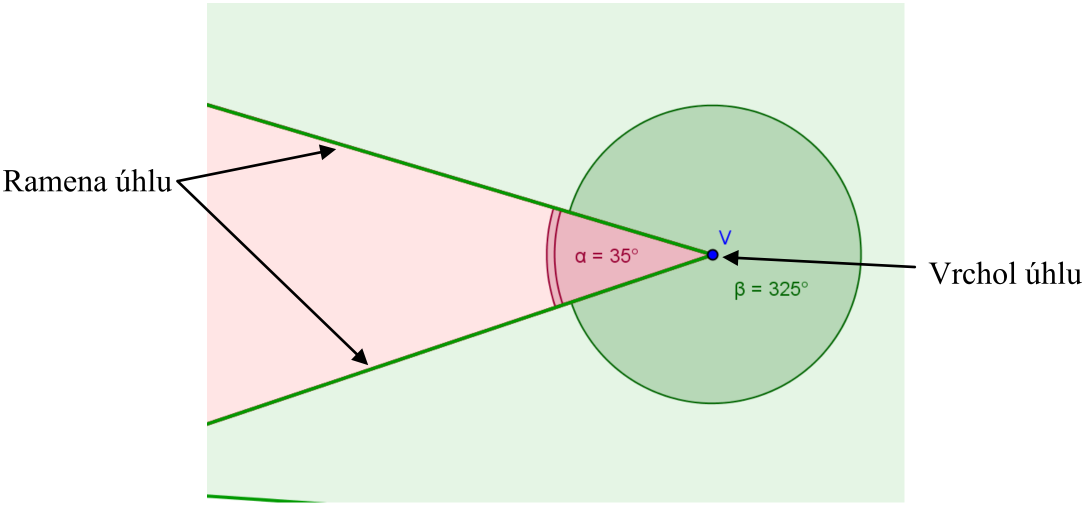
- ***Kružnice opsaná trojúhelníku*** **-** kružnice, která prochází všemi třemi vrcholy trojúhelníku. Její střed sestrojíme jako průsečík os všech jeho stran. A její poloměr r odpovídá délce $|AS|$.

- ***Kružnice vepsaná trojúhelníku*** – kružnice, která leží uvnitř trojúhelníku a dotýká se všech jeho stran. Její střed tvoří průsečík všech os úhlů trojúhelníku. Její poloměr ρ získáme, když k libovolné straně zpustíme kolmici, která bude procházet právě bodem S. Patu této kolmice označíme P_1. Délka úsečky SP_1 pak odpovídá velikosti poloměru kružnice vepsané.

4.2. Osa úhlu

4.2.1. Úhel – konvexní a nekonvexní

Úhel je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami, které mají společný počátek. Polopřímkám říkáme ramena úhlu. Jejich společný počátek nazýváme vrchol úhlu V. Úhel nepředstavuje pouze dvě ramena, nýbrž celou plochu, rovinu, kterou dvě ramena svírají. Viz následující obrázek:



Obr. 27

Můžeme rozlišit dva základní typy úhlů ([9], s. 56-57):

- ***konvexní úhel*** - je takový úhel, pro který platí, že spojíme-li kterékoliv dva různé vnitřní body, tak jejich spojnice bude celá uvnitř úhlu. Velikost takového úhlu je menší než 180° a symbolicky ho značíme ∢. (viz obr. 27 – úhel α, vyznačen růžově)

- ***nekonvexní úhel*** - je takový úhel, v němž existují alespoň dva body, jejichž spojnice není podmnožinou tohoto úhlu. Nekonvexnímu úhlu můžeme také říkat úhel konkávní. Jeho velikost je větší než 180° a symbolicky ho značíme ⋟. (viz obr. 27 – úhel β, vyznačen zeleně)

4.2.2. Velikost úhlu

Stejně jako můžeme měřit velikost úsečky, můžeme také změřit velikost úhlu. Tu určujeme buďto v klasické stupňové míře nebo v míře obloukové.

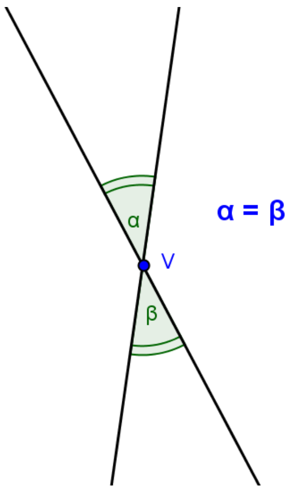
Nejčastěji je používána stupňová míra. Její značení je jednoduché a jasné. $90°$ je označení a velikost pravého úhlu (například vnitřní úhly čtverce), $180°$ je přímý úhel (svírají ho třeba opačné polopřímky) a $360°$ je úhel plný (svírají ho polopřímky, které leží na sobě). Stupeň je možné rozdělit na ještě menší jednotky, na minuty $(')$ a vteřiny $('')$. Platí vztah $1° = 60'$ a $1' = 60''$.

Podle velikosti můžeme úhly ještě rozdělit na úhel ostrý, jehož velikost je menší než $90°$ a na tupý úhel, jehož velikost je $90° - 180°$.

4.2.3. Dvojice úhlů

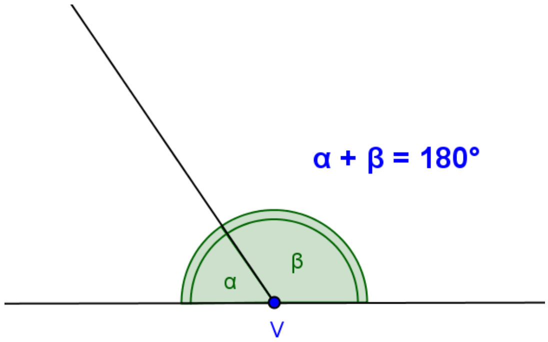
Některé specifické dvojice úhlů mají vlastnosti, které je možné využít při řešení příkladů, a proto bychom je měli znát. Pojďme si ukázat alespoň ty nejdůležitější. ([13], s. 38-41)

- ***Vrcholové úhly*** jsou takové úhly, které mají společný vrchol a jejich ramena tvoří opačné polopřímky. Vrcholové úhly jsou vždy shodné, mají stejnou velikost.



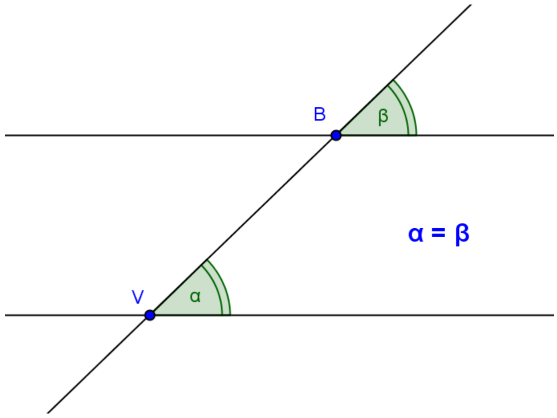
Obr. 28

- *Vedlejší úhly* jsou takové úhly, které mají jedno rameno společné a druhá ramena jsou opačné polopřímky. Součet vedlejších úhlů je vždy roven $180°$, přímému úhlu.



Obr. 29

- *Souhlasné úhly* jsou úhly, jejichž první ramena jsou rovnoběžná a druhá leží na jedné přímce. Musí také platit, že úhly mají stejnou orientaci. Souhlasné úhly jsou shodné.



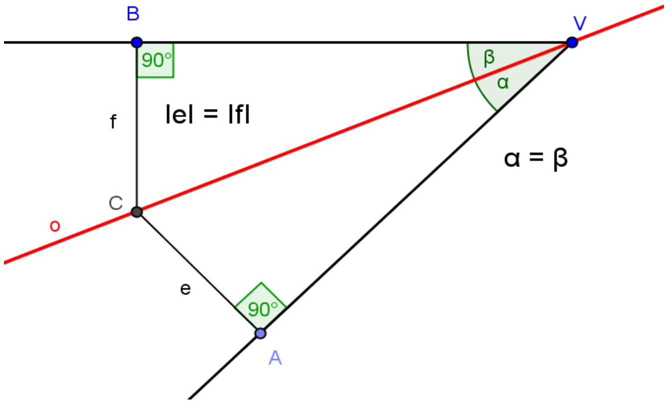
Obr. 30

4.2.4. Osa úhlu

Každý úhel má svou osu. Je to přímka, která prochází vrcholem úhlu a daný úhel půlí. Z této definice vyplývá, že každý bod této osy je stejně vzdálen od prvního a druhého ramene. Osu obvykle značíme malým písmenem o. Symbolicky osu úhlu můžeme zapsat takto ([9], s. 84):

$M = \{X \in \angle AVB; |X, \mapsto VA| = |X, \mapsto VB|\}$

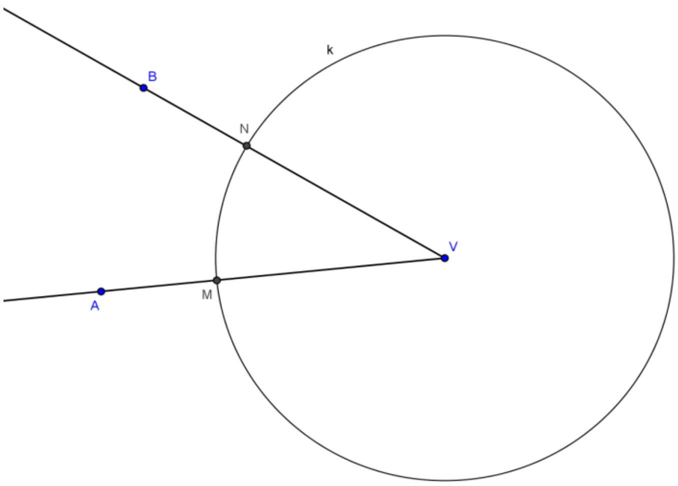
Množina M všech bodů X v rovině pro které platí, že jejich vzdálenost od polopřímek VA a VB (neboli ramen úhlu) je stejná. Tuto množinu nazveme osou úhlu.



Obr. 31

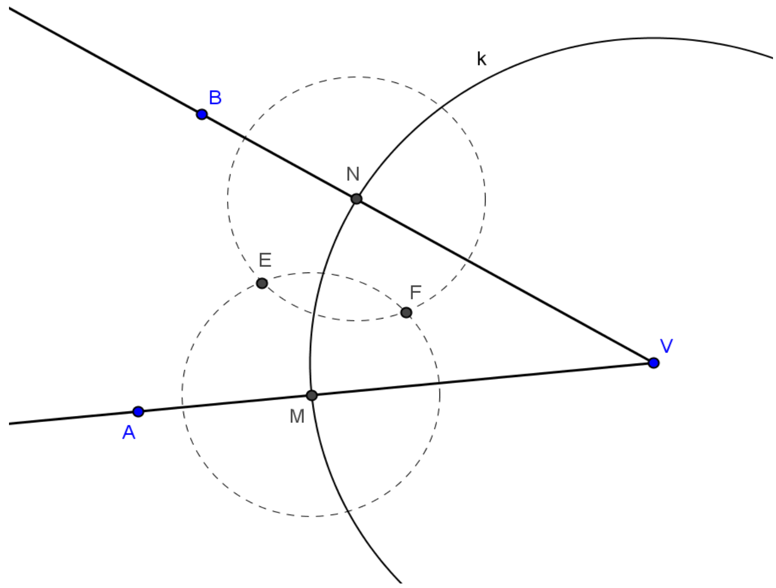
Konstrukce osy úhlu:

I. Ke konstrukci budeme potřebovat pouze kružítko, pravítko a tužku. Máme zadaný úhel AVB. Nejprve narýsujeme libovolně velkou kružnici se středem ve vrcholu úhlu, u nás bod V. Tato kružnice protne ramena úhlu, každé v jednom bodě. Body si označíme například M, N.



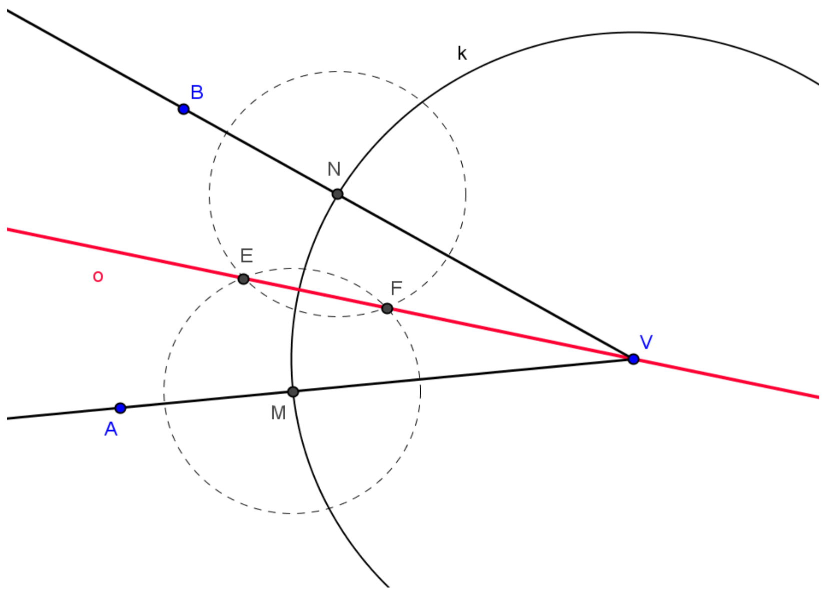
Obr. 32

II. Druhý krok konstrukce bude spočívat opět v konstrukci kružnic. Sestrojíme dvě kružnice stejného poloměru. Jednu se středem v bodě M a druhou v bodě N. Kružnice musí mít tak velký poloměr, aby se protnuly. Tam, kde se tyto kružnice protnou, vzniknou body E, F, které náleží hledané ose.



Obr. 33

III. Dalším bodem osy je vrchol našeho úhlu. Propojíme tyto body a dostaneme přímku. Ta je totožná s hledanou osou úhlu o.



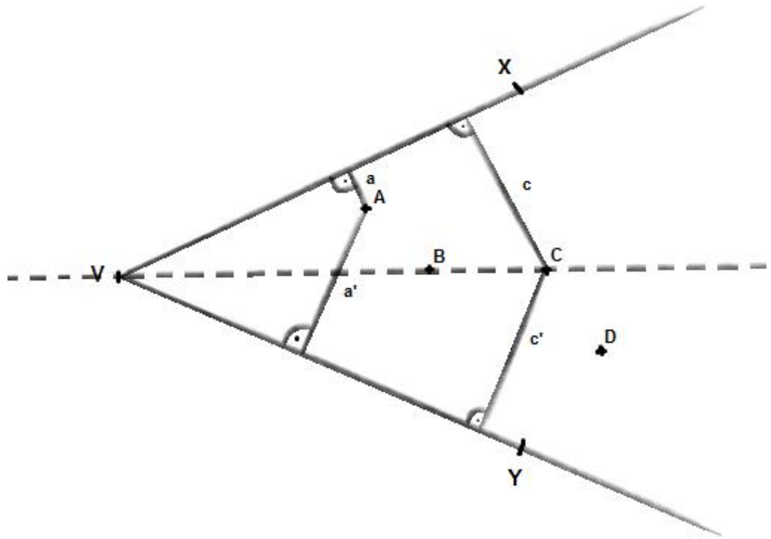
Obr. 34

4.2.5. Řešené příklady na osu úhlu

<u>Příklad č. 1:</u>

Které z bodů A, B, C a D jsou stejně vzdáleny od obou ramen úhlu XVY ? Změř a zdůvodni, Kde leží všechny body, které mají od obou ramen stejnou vzdálenost? ([2], s. 36)

Rozbor:

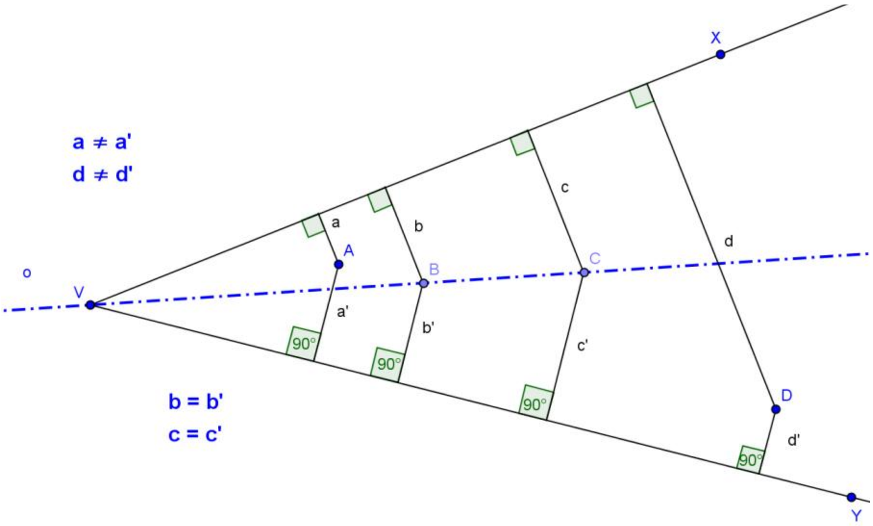


Obr. 35

Žák má zadaný ostrý úhel XVY a body A, B, C, D ležící uvnitř tohoto úhlu. Jeho úkolem je zjistit a porovnat vzdálenosti těchto bodů od obou ramen úhlu. Proto žák začne s konstrukcí kolmic k ramenům VX a VY a procházející jednotlivými body. Tento postup zopakuje pro každý z bodů A, B, C, D a porovná získané vzdálenosti. Například pro bod A platí, že vzdálenosti od ramen a a a' nejsou stejné $(a \neq a')$. Naopak pro bod C platí: $c = c'$. Protože i pro bod B jsou tyto vzdálenosti totožné, žák už může vyslovit hypotézu.

Množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od obou ramen, bude přímka procházející body B a C. Když tyto body žák spojí, zjistí, že výslednou množinou je osa úhlu, která prochází body B, C a vrcholem úhlu XVY .

Konstrukce:



Obr. 36

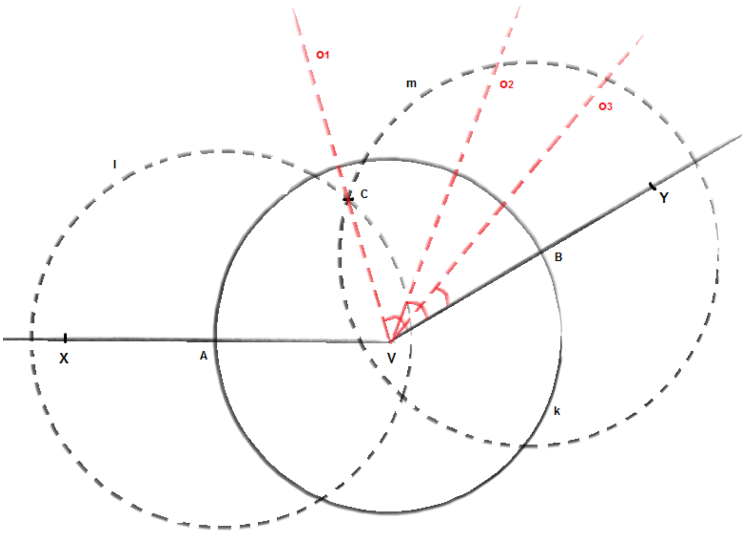
Zkouška:

Konstrukcí jsme potvrdili základní vlastnost osy úhlu a to, že každý bod této osy je stejně vzdálen od prvního i druhého ramene.

<u>Příklad č. 2:</u>

Sestrojte úhel δ = 160˚. Do jednoho obrázku sestrojte jeho polovinu (ε), čtvrtinu (ω) a osminu (ϕ). ([6], s. 154)

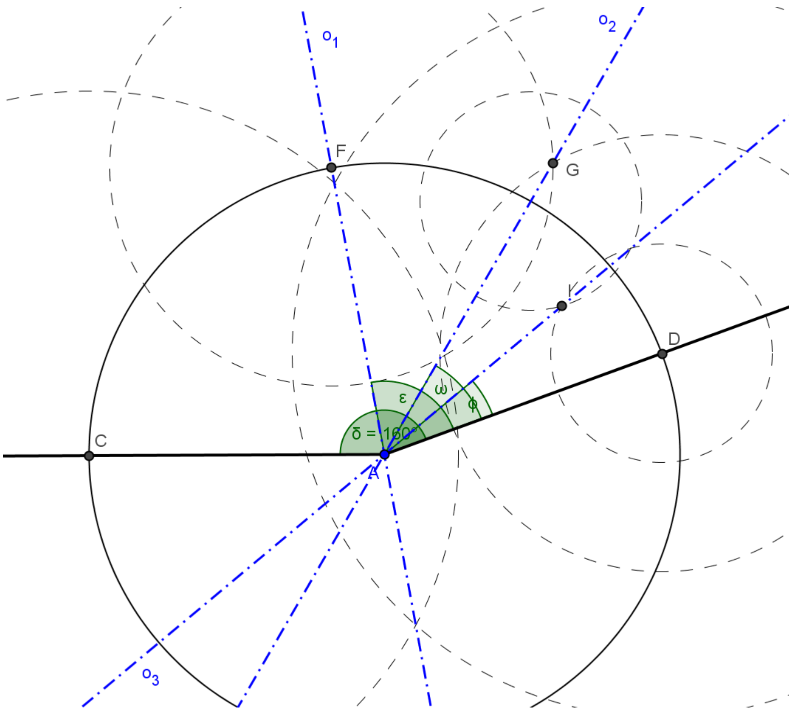
Rozbor:



Obr. 37

Ze zadání žák zná základní úhel δ, který má velikost $160°$. Jeho úkolem je rozdělit tento úhel na polovinu, čtvrtinu a osminu. Je jasné, že žák pro tento úkol využije vlastnost osy úhlu, kterou jsme si v této podkapitole popsali – osa úhlu daný úhel půlí. Když si žák uvědomí tento fakt, má už téměř vyhráno. Při konstrukci žák postupuje dle výše uvedené konstrukce osy. Sestrojí kružnici k se středem v bodě V a libovolným poloměrem. Kružnice protne úhel ve dvou bodech, označí si je A, B. V těchto bodech následně sestrojí další kružnice $l(A;r)$ a $m(B;r)$, kdy poloměr r může mít například stejnou velikost jako poloměr kružnice k. Bod C bude průsečík kružnic l, m. Spojením bodů V a C dostane žák osu o_1, která zadaný úhel δ rozdělí na dvě poloviny (úhel ε). Dál postupuje žák úplně stejným postupem, pracuje ale pouze s polovičním a čtvrtečním úhlem. Sestrojí tak osy o_2, o_3 a hledané úhly ω, ϕ.

Konstrukce:



Obr. 38

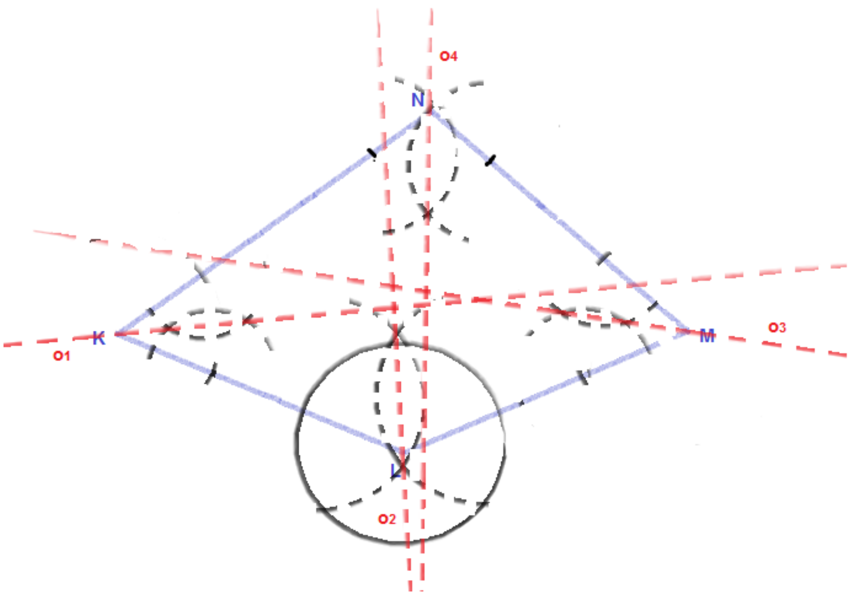
Zkouška:

Modelace tohoto příkladu v dynamickém matematickém softwaru nám ověřila správnost konstrukce. A také jsme tímto příkladem dokázali platnost další vlastnosti osy úhlu, a to, že osa úhlu daný úhel půlí.

Příklad č. 3:

Sestrojte osy vnitřních úhlů libovolného čtyřúhelníku $KLMN$ ***. ([5], s. 124)***

Rozbor:

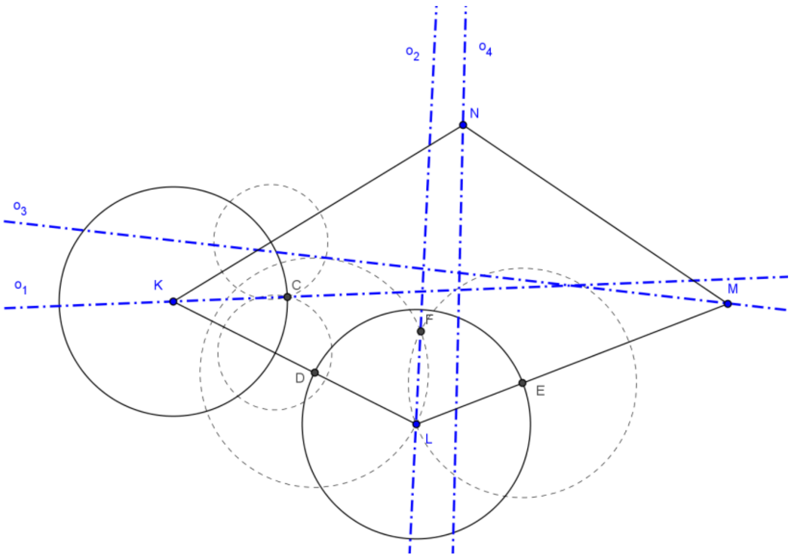


Obr. 39

Žák si nakreslí libovolný čtyřúhelník $KLMN$. Protože čtyřúhelník má právě čtyři vrcholy, výsledkem musí být čtyři osy ostrých úhlů. Při konstrukci bude žák postupovat podle výše uvedeného návodu pro konstrukci takových os.

Žák si zvolí jeden vrchol. Narýsuje libovolně velkou kružnici se středem právě v tomto vrcholu. Tím dostane dva body, průsečíky čtyřúhelníku a této kružnice. Právě tyto body budou středy dalších dvou kružnic, které budou mít stejně velký poloměr. Jejich průnikem dostane žák hledaný bod. Propojením tohoto budu a původně zvoleného vrcholu získá osu jednoho z úhlů. Tento postup žák zopakuje u všech vnitřních úhlů. Tím je úloha vyřešena.

Konstrukce:



Obr. 40

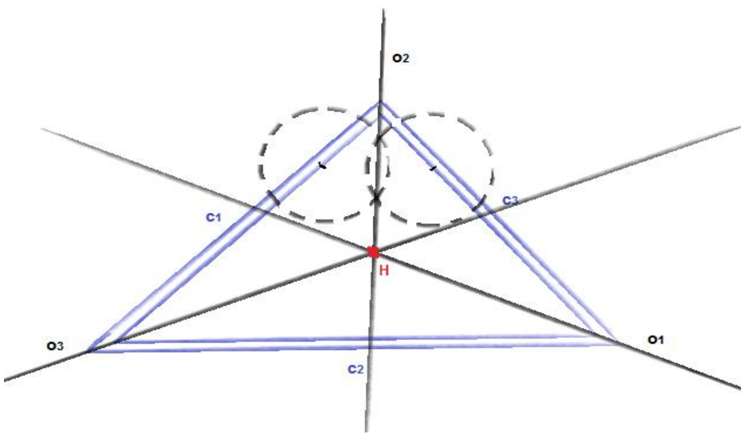
Zkouška:

Konstrukce potvrdila, že žákův postup byl správný. Tato úloha byla zvolena především k zopakování a procvičení konstrukce osy úhlu.

Příklad č. 4:

Loupeživý rytíř Chamťa okrádá kupce. Má hrádek uprostřed lesů přesně stejně daleko od tří kupeckých cest. Narýsuj přesný plánek, 1 km zobraz jako 1 cm. V plánku vyznač pro královské zbrojnoše místo, kde stojí hrádek. Ať je už od Chamti pokoj. ([11], s. 50)

Rozbor:

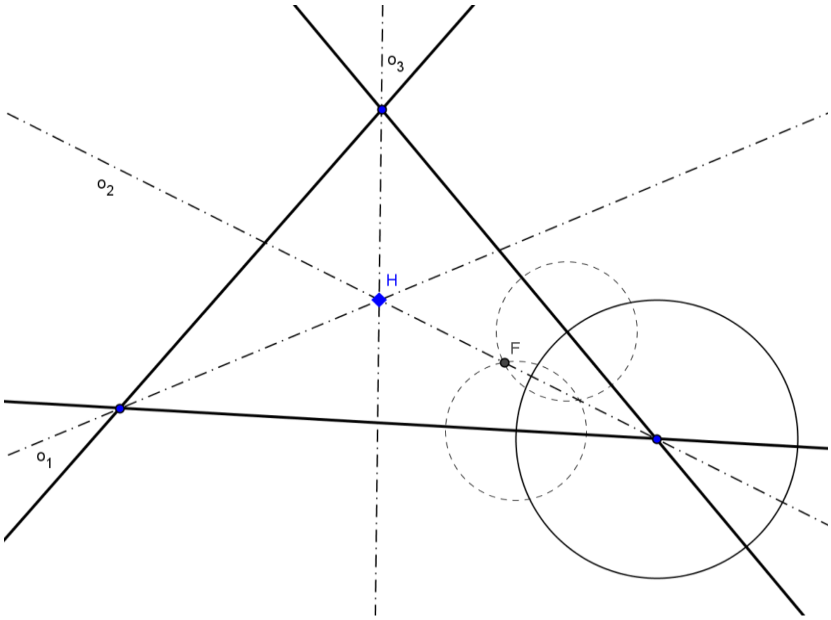


Obr. 41

Žák si nejprve udělá náčrtek příkladu. Modře si vyznačí známé geometrické útvary. V našem případě jsou to tři cesty, které si označil c_1, c_2, c_3. Žákovo úkolem je najít bod, který je stejně vzdálený od těchto tří cest.

Žák si úlohu rozdělí na tři části. V každé bude hledat množinu bodů, které jsou stejně vzdáleny od dvou cest. Touto množinou bude podle žákových zkušeností a znalostí osa úhlu těchto cest. Po konstrukci os všech dvojic cest, žák tato řešení propojí. Protože úkolem úlohy bylo nalézt bod stejně vzdálený od tří cest, řešením bude průsečík všech sestrojených os úhlů. Žák dostane bod H, který bude představovat místo, kde se nachází loupežníkův hrádek.

Konstrukce:



Obr. 42

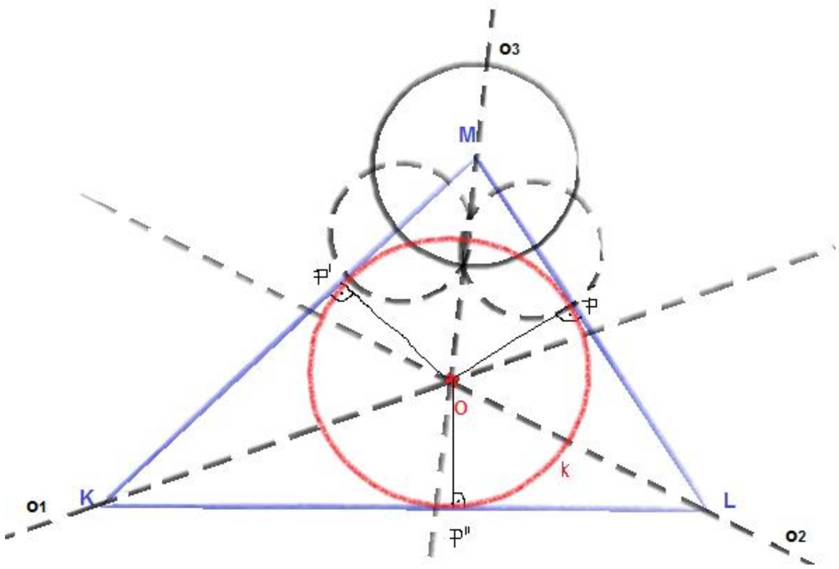
Zkouška:

Tato úloha by měla především žáka donutit přemýšlet o tom, jak je možné osu úhlu využít v praxi. Pomocí programu GeoGebra můžeme se žáky ověřit platnost této konstrukce a například i ukázat, že hledaný bod musí vždy ležet uvnitř trojúhelníku, který určují zadané cesty.

Příklad č. 5:

Narýsuj libovolný trojúhelník KLM. Sestroj osy jeho úhlů. Průsečík os úhlů označ písmenem O. V bodě O sestroj kolmice ke stranám trojúhelníku a paty kolmic označ P, P', P''. Narýsuj kružnici se středem v bodě O a poloměrem $|OP|$.Jakou vlastnost má narýsovaná kružnice? ([2], s. 37)

Rozbor:

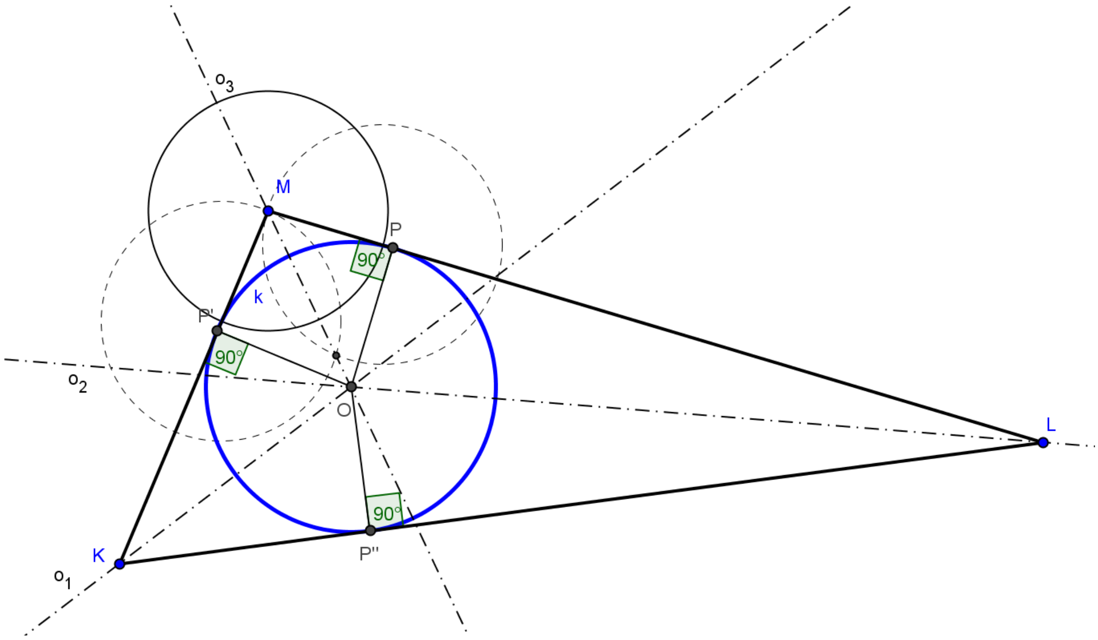


Obr. 43

Tato úloha není obtížná. Žák jen postupuje podle instrukcí v zadání. Zvolí si libovolný trojúhelník KLM. Sestrojí osy jeho vnitřních úhlů. Jejich průsečík označí písmenem O. Spustí kolmice z bodu O ke stranám trojúhelníku, jejichž paty označí P, P', P''. Posledním krokem je sestrojení kružnici $k(O; r = |OP|)$.

Žák už by měl vědět, z kapitoly Osa úsečky, že kružnice k, kterou sestrojil, se nazývá kružnice vepsaná. Leží uvnitř trojúhelníku, dotýká se všech jeho stran a jejím středem je průsečík os úhlů trojúhelníku.

Konstrukce:



Obr. 44

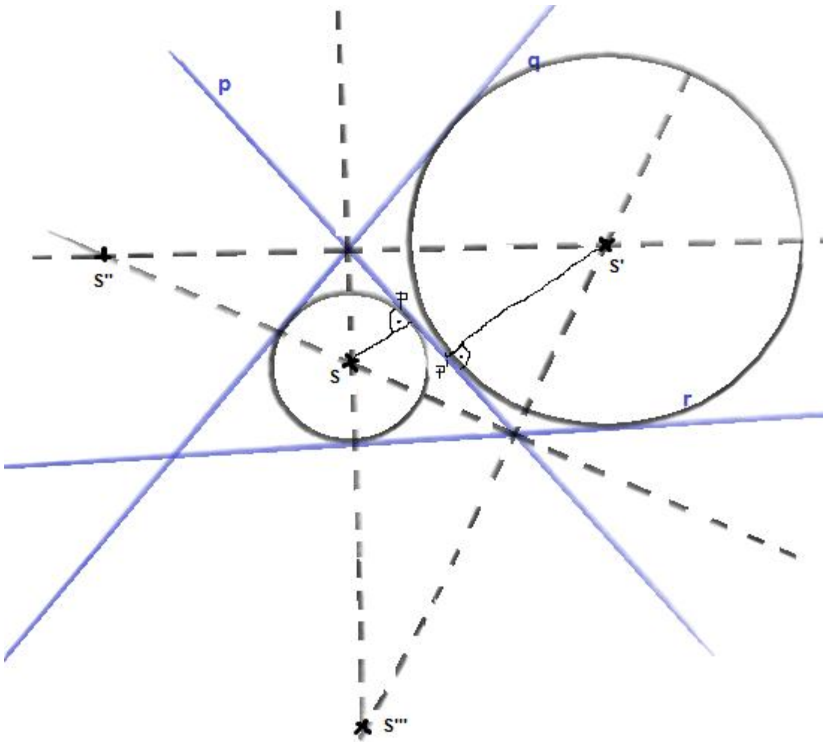
Zkouška:

Žák při konstrukci postupoval správně dle zadání. Výsledek jsme opět ověřili v dynamickém matematickém programu GeoGebra a tím potvrdili, že středem kružnice vepsané je průsečík os úhlů trojúhelníka. Že se tato kružnice dotýká všech jeho stěn a že její poloměr odpovídá velikosti úsečky spojující střed kružnice a patu kolmice ke straně trojúhelníku.

Příklad č. 6:

Sestrojte všechny kružnice, které mají společný dotyk s přímkami p, q, r. Kolik má úloha řešení? ([7], s. 198)

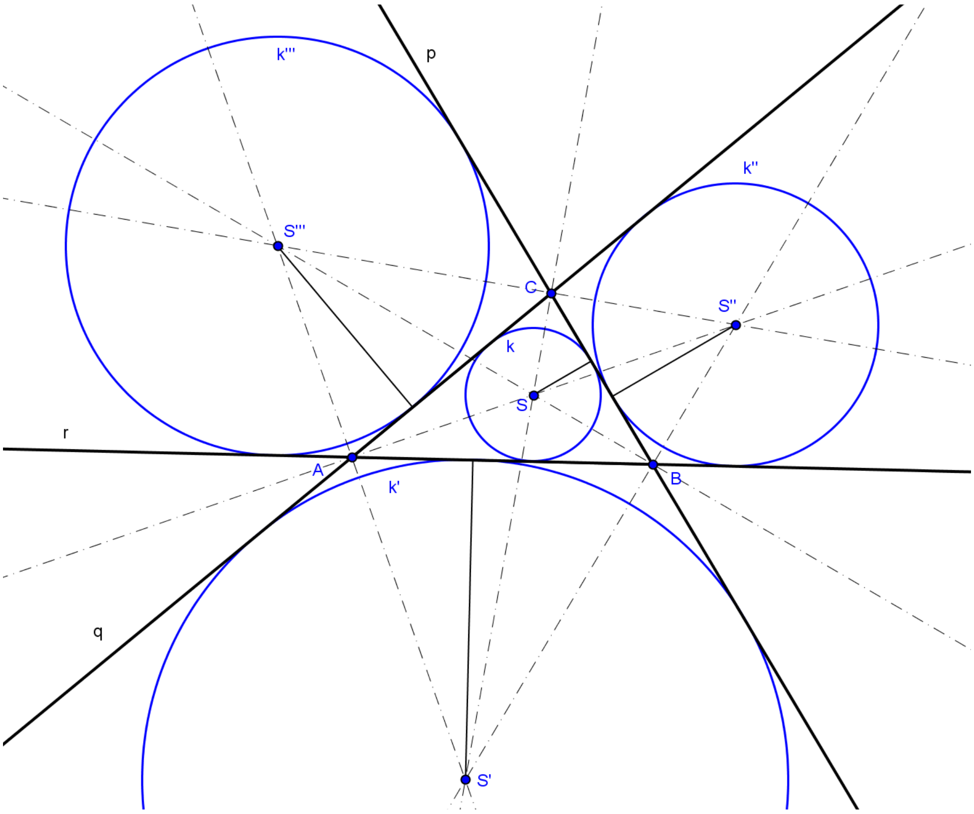
Rozbor:



Obr. 45

Tuto úlohu uvádím jen pro zpestření. Žák by si měl uvědomit, že tato úloha je kombinací dvou předchozích úloh, loupežníka Chamti a vepsané kružnice. Hledáme totiž body – středy kružnic, které jsou stejně vzdáleny od všech tří přímek. Proto musíme zkonstruovat osy všech úhlů. Osy se protnou v určitých bodech, ty označíme S, S', S'', S'''. Z těchto bodů spustíme komice k některé z přímek p, q, r a jejich průsečíky označíme P, P', P'', P'''. Samotná konstrukce kružnic už není obtížná. Například první kružnice bude $k_1(S; r = |SP|)$. Ostatní kružnice sestrojíme obdobně, dosazením odpovídajících bodů. Řešením budou čtyři kružnice.

Konstrukce:



Obr. 46

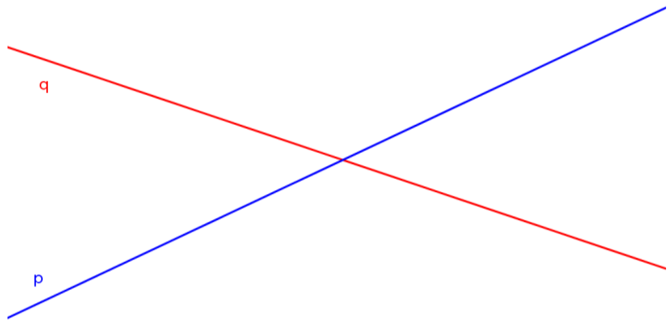
Zkouška:

Konstrukce nám potvrdila, že výsledkem jsou opravdu čtyři kružnice. Dokonce je můžeme i pojmenovat. Kružnice *k* je kružnice vepsaná, kterou jsme zmínili už v předchozím příkladu. Další tři kružnice jsou pro nás nové. Nazývají se kružnice připsané trojúhelníku (v našem případě trojúhelníku *ABC* vytýčenému zadanými různoběžkami). Tyto kružnice se dotýkají jedné strany a přímek, na nichž leží zbývající strany trojúhelníku. Jejich střed je určen průsečíkem osy jednoho vnitřního úhlu a dvou os úhlů vnějších.

4.3. Osy dvou různoběžek

4.3.1. Různoběžné přímky

Jestliže dvě přímky v rovině mají společný právě jeden bod, pak se nazývají různoběžné přímky. Společný bod se nazývá průsečík přímek. ([10], s. 40)



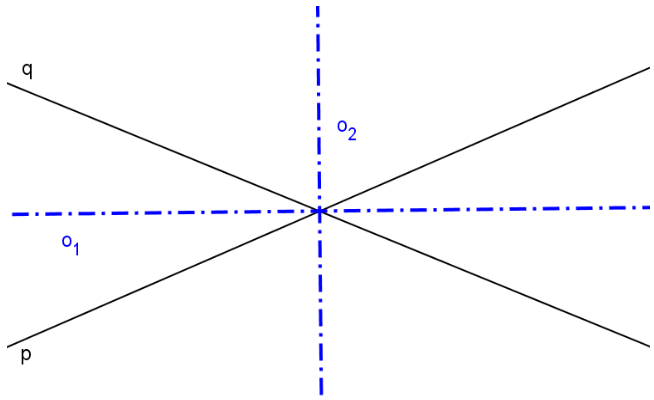
Obr. 47

4.3.2. Osa různoběžek

Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek p, q jsou přímky o_1, o_2, které určují osy úhlů sevřených různoběžkami. Tyto osy jsou na sebe kolmé. ([12], s. 53) Symbolicky lze tuto množinu zapsat takto:

$$M = \{X \in E_2; |X, p| = |X, q|\}$$

Množinou M jsou všechny body X v rovině, pro které platí, že jejich vzdálenost od přímek p a q je stejná. Tuto množinu nazveme osa různoběžek.



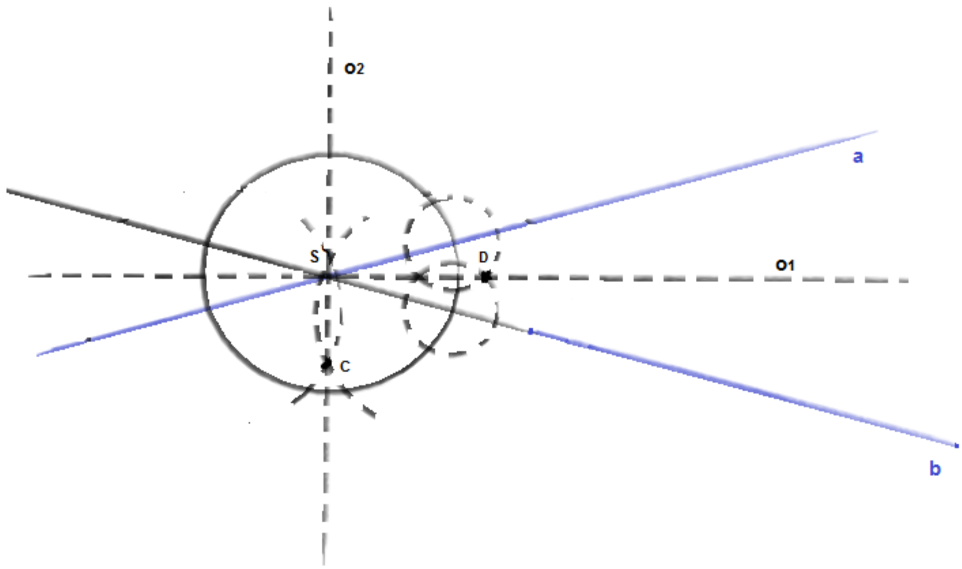
Obr. 48

4.3.3. *Řešené příklady na osy různoběžek*

<u>Příklad č. 1:</u>

Určete množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od různoběžek a, b. ([8], s. 64)

Rozbor:

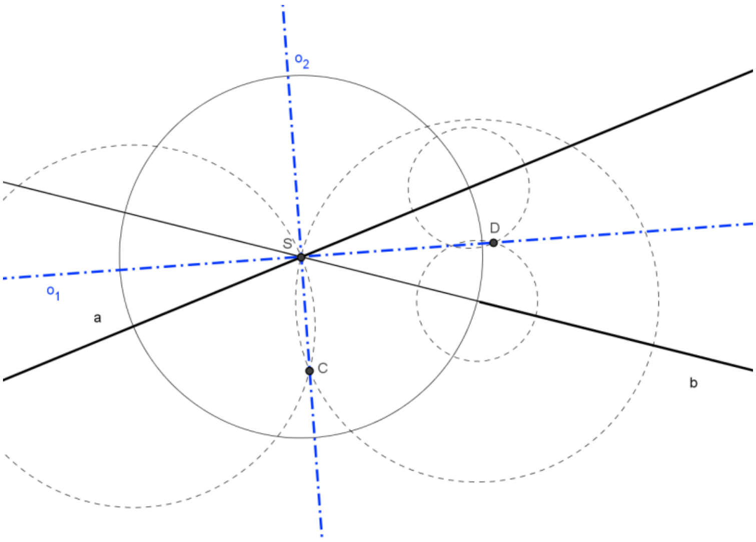


Obr. 49

Žák si udělá náčrtek a v něm si barevně zvýrazní vše, co zná ze zadání. V našem případě jsou to různoběžky a, b. Žákovým úkolem je sestrojit množinu bodů, které mají od těchto různoběžek stejnou vzdálenost. Pozorný žák si všimne shody našeho úkolu s definicí osy různoběžek. Z toho plyne, že žák bude konstruovat osy různoběžek a, b. Postup této konstrukce bude totožná s konstrukcí os jednotlivých úhlů, které tyto různoběžky svírají.

Nejprve si žák protáhne přímku b tak, aby získal průsečík přímek a, b, který si označí písmenem S. Nyní už pokračuje stejně jako při konstrukci osy úhlu. Pro úplný výsledek stačí sestrojit jednu osu pro každé dva vrcholové úhly. Řešením je sjednocení těchto dvou os úhlů - o_1, o_2.

Konstrukce:



Obr. 50

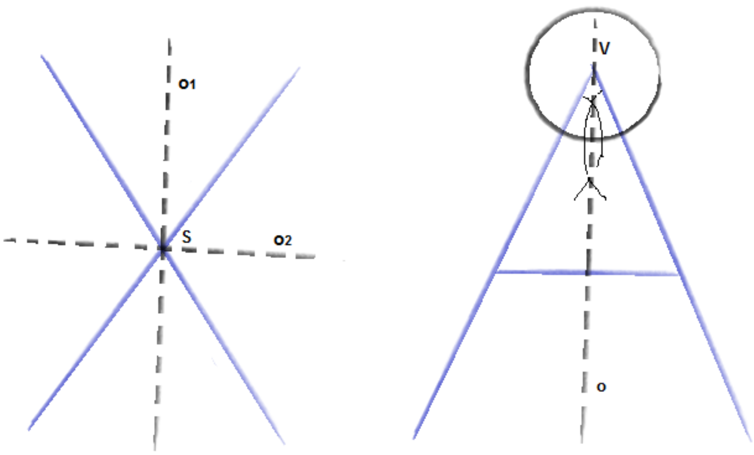
Zkouška:

Konstrukce potvrdila, že osy dvou různoběžek jsou i osami všech úhlů, které svírají. Zároveň jsme ověřili další vlastnost os různoběžek, a to, že jsou na sebe navzájem kolmé.

<u>Příklad č. 2:</u>

Sestrojte všechny osy úhlů písmen X ***a*** A***. ([5], s. 126)***

Rozbor:

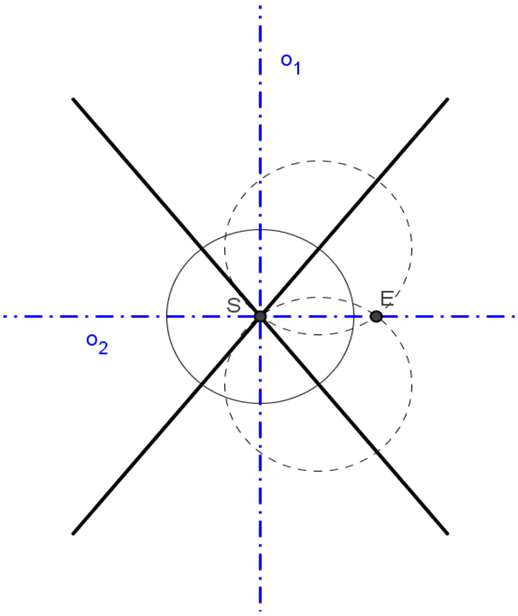


Obr. 51

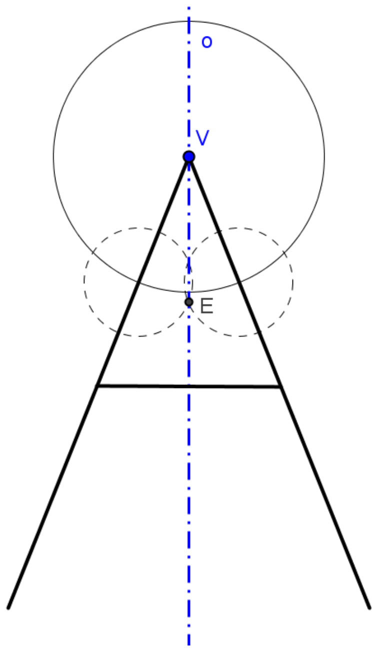
V této úloze žák musí sestrojit osy uhlů písmen X a A. S největší pravděpodobností by tuto úlohu řešil přes konstrukci os různoběžek, respektive os úhlů. Žák začne například s písmenem X. Jeho střed si žák označí písmenem S, ten představuje průsečík dvou různoběžek. Následně žák sestrojí, dle již osvojeného postupu, osy všech úhlů těchto různoběžek. Výsledkem budou dvě navzájem kolmé osy různoběžek - o_1, o_2.

S písmenem A je to podobné. Rozdíl je jen v tom, že se nejedná o dvě různoběžky, ale pouze o jeden konvexní úhel a jemu doplňkový úhel nekonvexní. Žák si označí vrchol písmene jako V a s ním bude dále pracovat. Bod V představuje vrchol úhlu, jehož osu žák hledá. Výslednou množinu bodů žák sestrojí pomocí klasické konstrukce osy úhlu – bude odpovídat ose o.

Konstrukce:



Obr. 52



Obr. 53

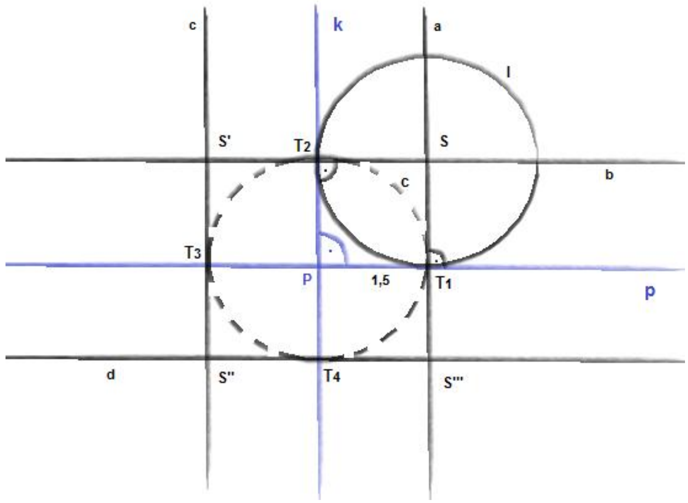
Zkouška:

Pomocí konstrukce jsme ověřili platnost původních předpokladů. Žák tuto úlohu řešil správně, ale mohl využít i jiných znalostí. Úlohu lze řešit i pomocí osové souměrnosti, o které jsme se již zmínili v podkapitole Osa úsečky.

Příklad č. 3:

Najděte množinu všech středů kružnic s poloměrem $r = 1{,}5\,cm$, které se dotýkají přímky p a kolmice k. ([8], s. 66)

Rozbor:

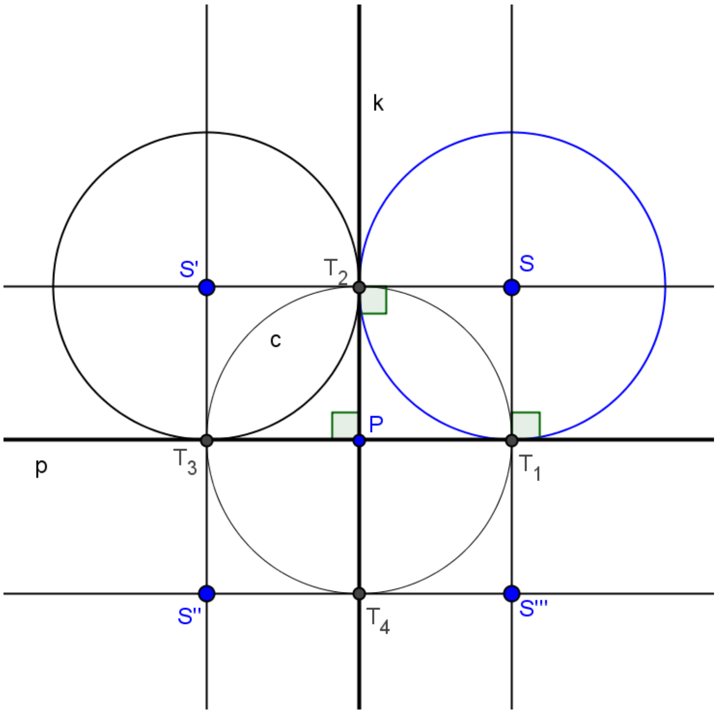


Obr. 54

Než necháme žáka samostatně řešit tuto úlohu, měli bychom si s ním zopakovat několik vlastností tečen kružnice. Protože naším úkolem je sestrojit středy kružnic, které se dotýkají dvou kolmic, zadané přímky, na sebe kolmé, jsou pro naši kružnici právě tečnami. První vlastnost je ta, že kružnice má s každou svou tečnou právě jeden společný bod - bod dotyku. Další důležitou vlastností je fakt, že spojnice středu kružnice a bodu dotyku je na tečnu kolmá.

Při samotné konstrukci žák využije obě zmíněné vlastnosti. Nejprve si ale udělá náčrtek, kde si barevně zvýrazní známé přímky k, p. Jejich průsečík si označí jako P. Žák pokračuje konstrukcí kružnice $k(P; r = 1{,}5\,cm)$. Tato kružnice protne přímky p, k ve čtyřech bodech, ale žák nejdříve pracuje pouze se dvěma z nich - T_1, T_2. V těchto bodech žák sestrojí kolmice k původním přímkám. Tyto přímky a, b se protnou v jednom bodě, který si žák označí písmenem S. Bod S je jedním z hledaných středů kružnic, které se dotýkají kolmých přímek p, k a mají poloměr 1,5 cm. Analogicky žák pokračuje s konstrukcí pro body T_3, T_4. Hledané středy kružnic jsou celkově čtyři - S, S', S'', S'''.

Konstrukce:



Obr. 55

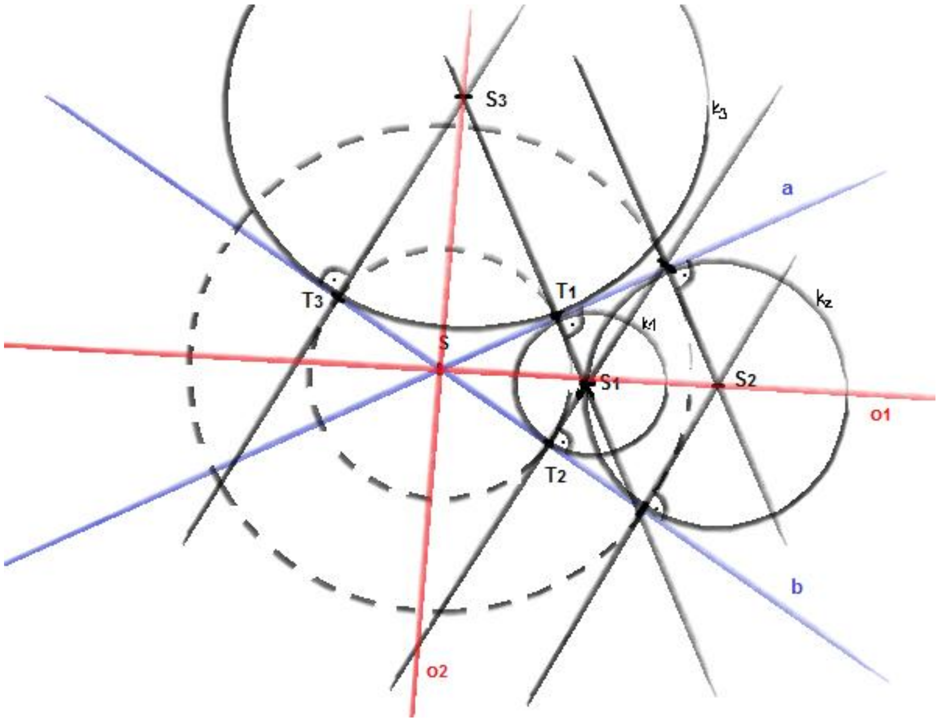
Zkouška:

Pomocí konstrukce jsme ověřili, že postup byl správný a že vlastnosti tečen, kterých jsme využili, jsou opravdu platné. Zjednodušeně lze říci, že středy kružnic leží na přímkách, které jsou s původními přímkami rovnoběžné a ve vzdálenosti velikosti poloměru hledané kružnice.

<u>Příklad č. 4:</u>

Určete a barevně zvýrazněte množinu středů všech kružnic, které mají společný dotyk s oběma různoběžkami a, b***. ([8], s. 65)***

Rozbor:



Obr. 56

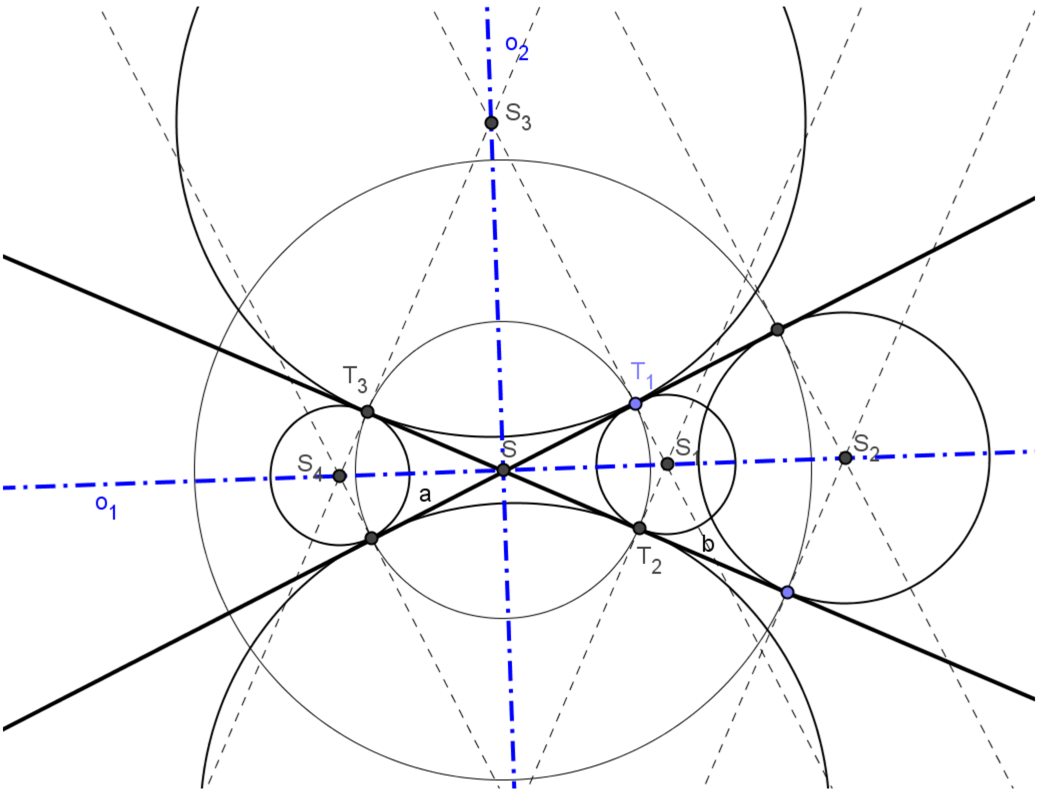
Žák si udělá náčrtek a hledá v něm vztahy, kterých by mohl využít. Tato úloha je velmi podobná té předchozí. Úkolem je sestrojit množinu středů všech kružnic, které se dotýkají obou různoběžek. To znamená, že různoběžky pro nás opět představují tečny kružnic, proto bude žák opět využívat vlastností těchto tečen.

Žák začne konstrukcí kružnice se středem v průsečíku různoběžek a libovolným poloměrem. Ta protne zadané různoběžky v čtyřech bodech. Žák si vybere dva z nich, označí je T_1, T_2 a s těmi dále pracuje. Opět využijeme vlastnosti, že spojnice středu a bodu dotyku je kolmá na tečnu této kružnice. Proto body T_1, T_2 povede kolmice na různoběžky a a b. Průsečík těchto dvou kolmic představuje první bod hledané množiny – S_1. Jako zkoušku, jestli se kružnice se středem v bodě S_1 opravdu dotýká obou různoběžek, provede žák konstrukci kružnice $k_1(S_1; r = |S_1T_1|)$. Stejný postup žák zopakuje ještě jednou, jen s rozdílem, že u první kružnice se středem v bodě S zvolí jiný poloměr než poprvé. Dostane tak druhý bod hledané množiny, a to S_2. Propojením bodů S_1 a S_2 žák získá první půlku řešení – osu o_1.

Druhou část získá opět stejným postupem, jen bude konstruovat kolmice v bodech dotyku T_1 a T_3. Průsečík těchto kolmic si označí S_3. Žák si již z náhledu nejspíš uvědomí, že řešením je osa různoběžek, a tak bod S_3 spojí s průsečíkem různoběžek S. Tím nalezne druhou půlku konečného řešení – osu o_2.

Žákova hypotéza je, že výsledkem této úlohy budou osy zadaných různoběžek o_1, o_2. Které prochází bodem S a jsou na sebe navzájem kolmé.

Konstrukce:



Obr. 57

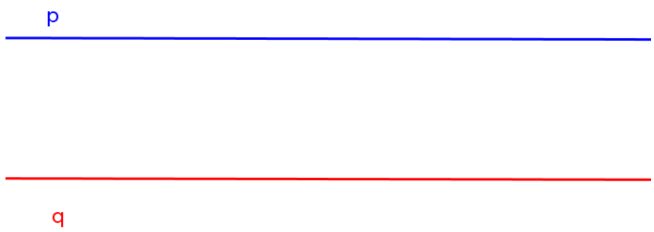
Zkouška:

Konstrukce potvrdila správnost postupu. Pro žáky může být přínosná modelace tohoto příkladu v dynamickém matematickém softwaru, kde je možné se zadanými různoběžkami neomezeně pohybovat a tak i měnit polohu výsledné množiny bodů. Když si žáci tuto modelaci sami vyzkoušejí, vlastnosti tečen si mnohem lépe zapamatují.

4.4. Osa pásu

4.4.1. Rovnoběžné přímky

Jestliže dvě přímky v rovině nemají žádný společný bod, pak se nazývají rovnoběžné přímky. Že je přímka p rovnoběžná s přímkou q symbolicky zapisujeme $p \parallel q$. ([10], s. 41)



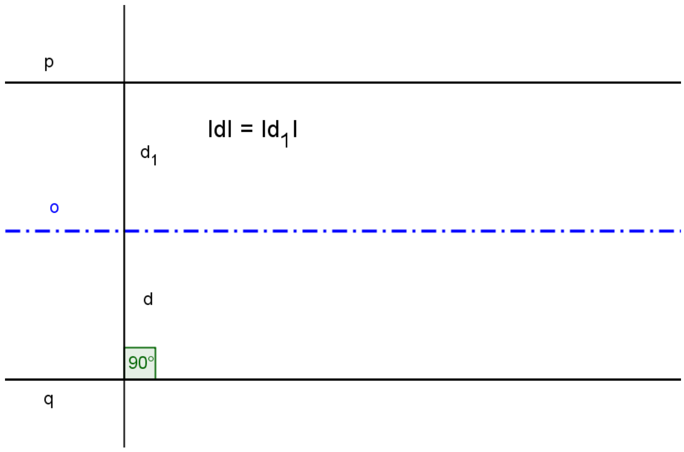
Obr. 58

4.4.2. Osa pásu

I pro rovnoběžné přímky existuje množina bodů, které jsou od nich stejně vzdáleny. Takovou množinou je přímka, takzvaná osa pásu, která je s oběma rovnoběžná a leží "mezi nimi".

Osa pásu rovnoběžných přímek p, q je množina M bodů X v rovině ρ takových, že:

- X je od přímek p a q stejně vzdálen, $M = \{X \in \rho; d(X, p) = d(X, p)\}$
- X je středem kružnice, pro niž jsou přímky p a q tečnami. ([9], s. 84)



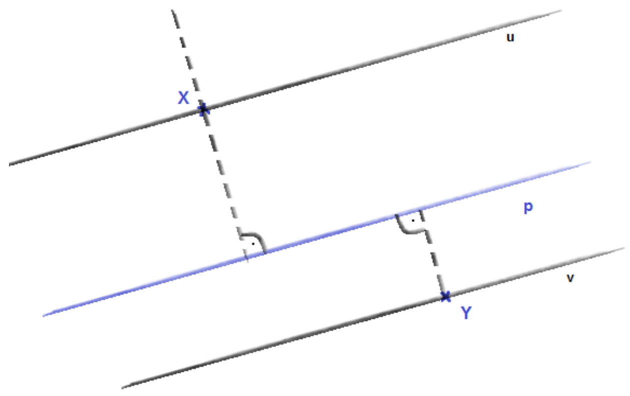
Obr. 59

4.4.3. *Řešené příklady na osu pásu*

<u>Příklad č. 1:</u>

Sestrojte přímky u, v procházející body X, Y rovnoběžné s přímkou p. ([8], s. 65)

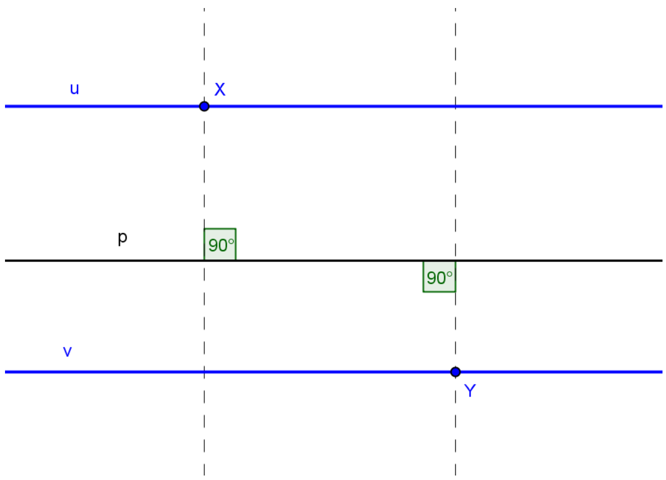
Rozbor:



Obr. 60

V tomto příkladu si žák vyzkouší, jak sestrojit rovnoběžku s nějakou přímkou v určité vzdálenosti. Jediné, co žák k řešení tohoto příkladu potřebuje, je znalost toho, že vzdálenost se nanáší na kolmici k původní přímce. Z toho plyne, že žák začne s konstrukcí kolmic z bodů X, Y k přímce p. K těmto kolmicím následně sestrojí opět kolmice procházející body X, Y. Žák dostane přímky u, v, které jsou rovnoběžné s původní přímkou p a tak jsou i konečným řešením této úlohy.

Konstrukce:



Obr. 61

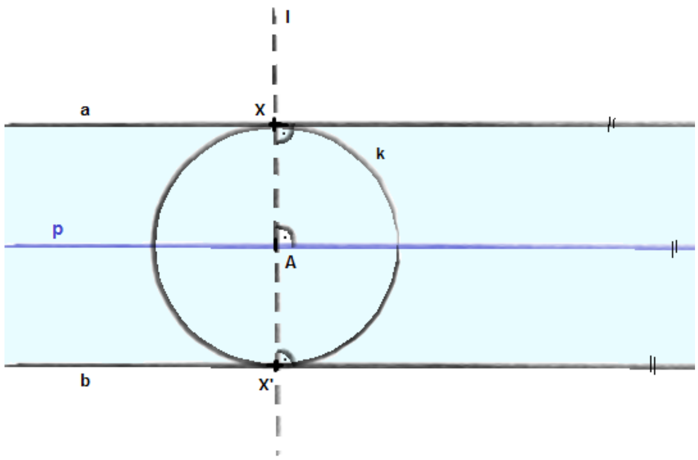
Zkouška:

Pomocí konstrukce jsme ověřili správný postup. Tuto úlohu lze řešit i jednodušeji, a to přímým sestrojením rovnoběžek s přímkou p v bodech X, Y pomocí dvou pravítek.

Příklad č. 2:

Najděte množinu všech bodů roviny, z nichž každý má od přímky p vzdálenost stejnou nebo menší než 2 cm.

Rozbor:

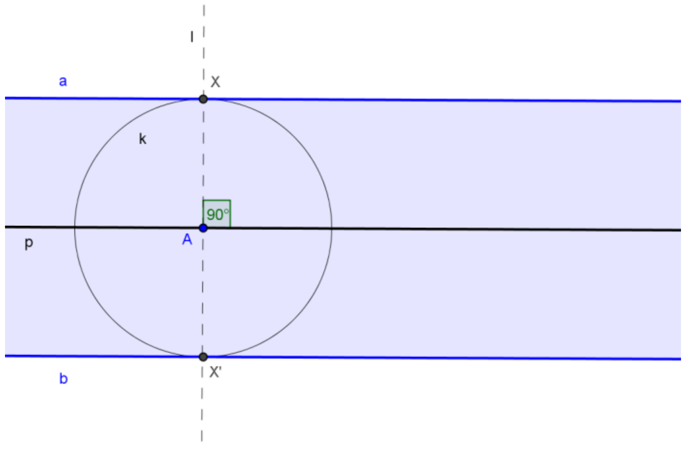


Obr. 62

Tento příklad je velmi podobný předchozímu. Žák opět využije poznatku, že vzdálenost se nanáší na kolmici. Proto si zvolí libovolný bod A na zadané přímce p. V tomto bodě sestrojí kolmici l k zadané přímce p. Na přímce l žák naměří z každé strany požadovanou vzdálenost, a to konstrukcí kružnice $k(A; r = 2cm)$. Průsečíky kružnice k a přímky l označí X, X'. V těchto bodech žák sestrojí kolmice na přímku l. Získá dvě přímky a, b, které leží ve vzdálenosti $2cm$ od přímky p a jsou tak jednou částí hledané množiny bodů. Ze zadání ale víme, že žák musí najít i množinu bodů, jejichž vzdálenost je menší než $2cm$. To znamená, že druhou částí řešení jsou všechny body mezi přímkami a a b.

Žákovo hypotézou je, že výslednou množinou bodů je celý pás mezi přímkami a, b, včetně těchto dvou přímek.

Konstrukce:



Obr. 63

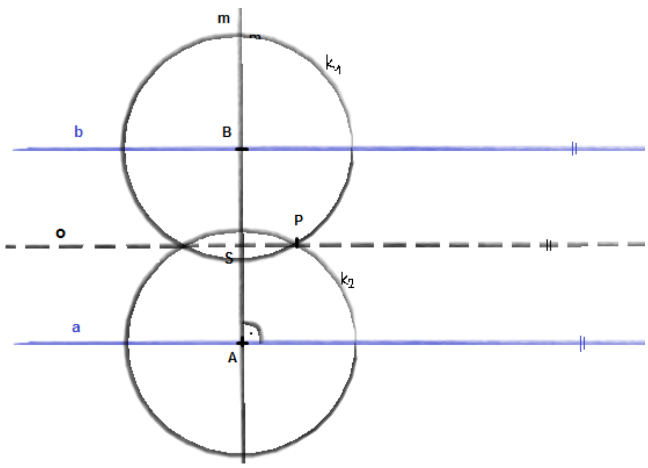
Zkouška:

Modelací této úlohy v dynamickém matematickém programu GeoGebra jsme dokázali správnost žákovo konstrukce. V tomto programu můžeme žákům ukázat i řešení různých zajímavých variant této úlohy. Například úloha, kde se hledané body nacházejí ve vzdálenosti $0\,cm$ od přímky p. Řešením by byla pouze sama zadaná přímka p.

<u>Příklad č. 3:</u>

Najděte a barevně zvýrazněte množinu všech bodů mající stejnou vzdálenost od dvou rovnoběžek a, b***. ([8], s. 64)***

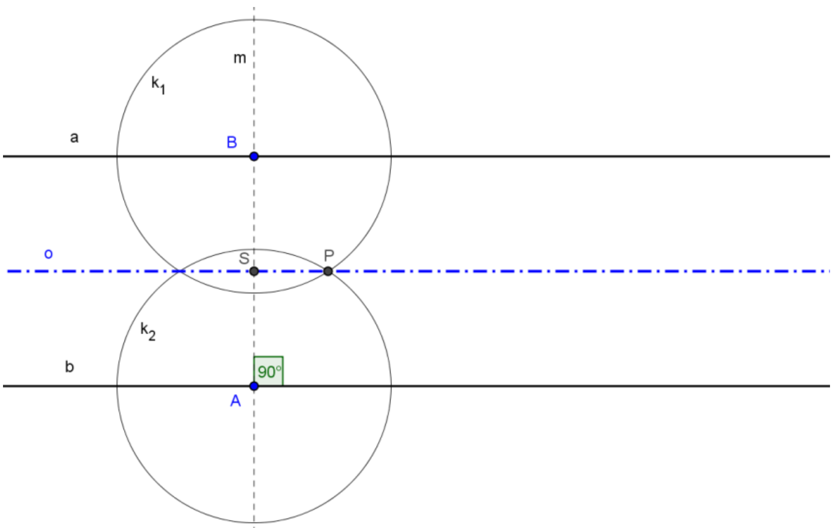
Rozbor:



Obr. 64

Žák si udělá náčrtek úlohy. Barevně si zvýrazní známé geometrické útvary, v našem případě rovnoběžné přímky a, b. Při konstrukci začne s libovolně zvoleným bodem A na přímce a. V tom sestrojí kolmici m k přímce p ,tím získá bod B, průsečík přímky m a a. Tímto žák sestrojil úsečku AB, která představuje vzdálenost zadaných rovnoběžek. Jelikož úkolem je najít množinu bodů mající stejnou vzdálenost od dvou rovnoběžek a, b, sestrojí žák střed a osu úsečky AB. Ta tvoří množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost jak od bodů A, B, tak od zadaných rovnoběžek. Žák může odhadnout výslednou množinu už podle zadání, protože to představuje definici osy pásu.

Konstrukce:



Obr. 65

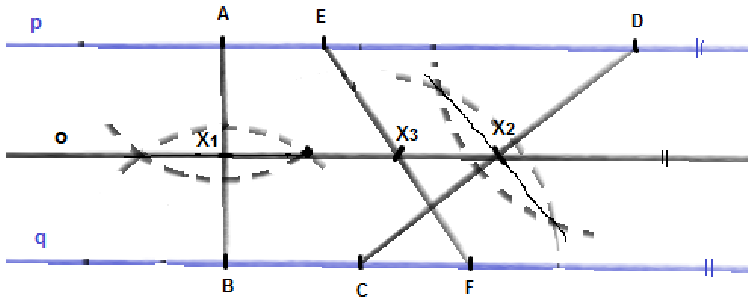
Zkouška:

Konstrukce nám všechny použité předpoklady potvrdila. Množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou rovnoběžek, je přímka s nimi rovnoběžná a ležící „mezi nimi“ – tzv. osa pásu.

<u>Příklad č. 4:</u>

Určete množinu středů všech úseček, které mají krajní body na dvou různých rovnoběžkách p, q.

Rozbor:

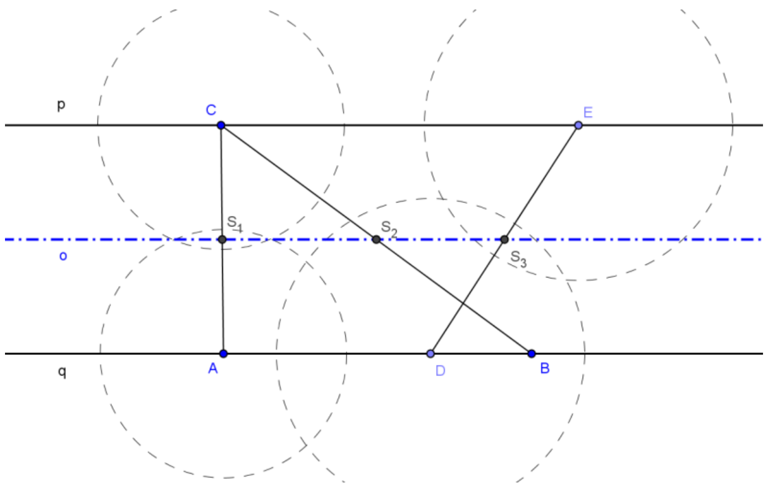


Obr. 66

Žák opět začne náčrtkem. Jeho úkolem je najít středy všech úseček, jejichž krajní body leží na dvou různých rovnoběžkách. Proto začne volbou libovolných bodů A, D na přímce p a bodů B, C na přímce q. Tyto body propojí tak, aby dostal dvě úsečky AB a CD.Pomocí dvou kružnic sestrojí středy obou z nich, ty označí X_1, X_2. Protože oba tyto body patří do hledané množiny, žáka nejspíš napadne, že propojením zmíněných bodů získá množinu celou. Pro kontrolu toho, jestli opravdu všechny středy úseček leží na této přímce, může žák sestrojit ještě jednu libovolnou úsečku, která bude splňovat úvodní podmínky, například EF. Sestrojí její střed a zjistí, že opravdu náleží přímce o.

Žákova hypotéza je, že výslednou množinou bude osa pásu.

Konstrukce:



Obr. 67

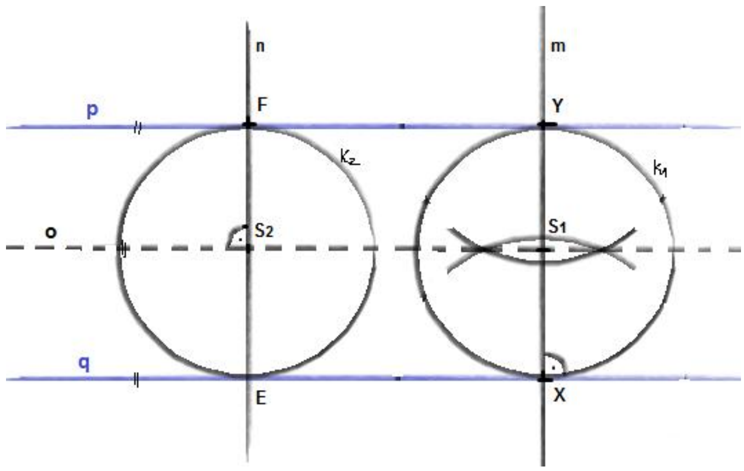
Zkouška:

Konstrukce v programu GeoGebra potvrdila, že žákův postup byl správný. Opravdu platí, že středy všech úseček, které mají své krajní body na různých rovnoběžkách, leží na ose pásu ohraničeném těmito rovnoběžkami.

<u>Příklad č. 5:</u>

Sestrojte množinu všech středů kružnic, které se dotýkají zároveň dvou rovnoběžek p, q.***([1], s. 164)***

Rozbor:

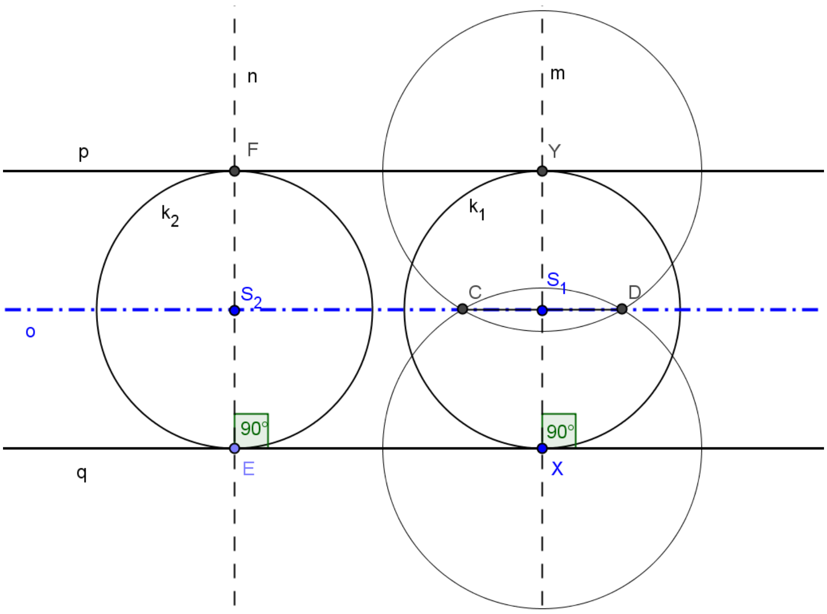


Obr. 68

Opět jsou zadány dvě rovnoběžky. Žákovým úkolem je najít středy všech kružnic, které se těchto rovnoběžek dotýkají. Protože se hledané kružnice mají rovnoběžek dotýkat, představují tyto přímky tečny kružnic. Další poznatek, který žáci využijí ke konstrukci středů kružnic je fakt, že tečna kružnice je kolmá na její průměr. Proto si žák zvolí libovolný bod X (bod dotyku) na přímce q. Tím povede kolmici k téže přímce. Vznikne tak bod Y, průsečík této kolmice m a druhé rovnoběžky p. Dalším krokem je sestrojení středu úsečky XY. Žák si může pro kontrolu sestrojit kružnici $k_1(S_1; r = |XS_1|)$ - to je jedna ze všech možných kružnic, které se dotýkají daných rovnoběžek. Poté si zvolí jiný bod na ose q, například bod E. A stejný postup opakuje i pro tento bod. Dostaneme střed S_2 kružnice k_2. Propojením bodů S_1S_2 žák získá výslednou množinu bodů.

Žákova hypotéza je tedy taková, že řešením úlohy je přímka, osa pásu o.

Konstrukce:



Obr. 69

Zkouška:

Hledanou množinou středů všech kružnic, které se dotýkají dvou různých rovnoběžek je opravdu osa pásu, neboli přímka o. Ta je rovnoběžná s danými přímkami a leží ve stejné vzdálenosti od obou z nich.

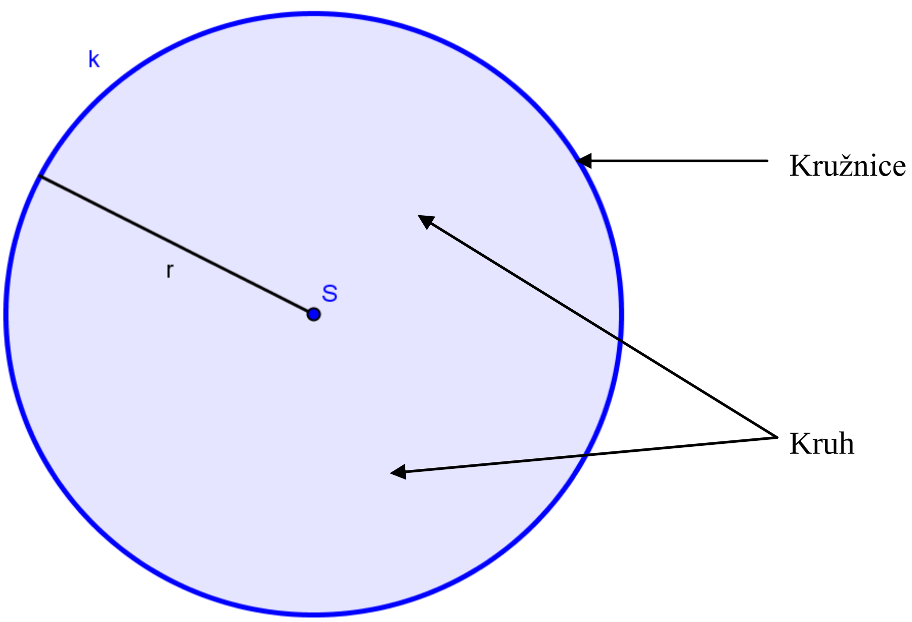
4.5.Kruh, kružnice

Kružnice

Množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu *S* vzdálenost rovnou danému kladnému číslu *r* je kružnice. Bod S je středem kružnice a číslo r jejím poloměrem. Existuje pro ni symbolický zápis $k(S;r)$. Kružnice je také množinou všech středů kružnic, jež mají daný poloměr *r* a procházejí daným bodem *S*. ([3], s. 53)

Kruh

Je to rovinný geometrický útvar, omezený kružnicí. Je určen svým středem *S* a poloměrem r. Představuje množinu všech bodů roviny, které mají od středu vzdálenost menší nebo rovnou poloměru kružnice. Tvoří tzv. vnitřní oblast dané kružnice. ([3], s. 53)



Obr. 70

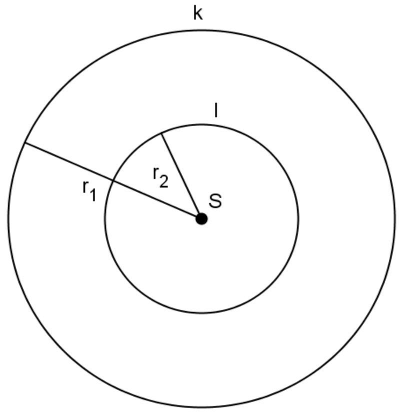
4.5.1. *Vzájemná poloha dvou kružnic*

1) *Kružnice nemají žádný společný bod*

- Společný střed

  Žádný společný bod

  $r_1 > r_2$



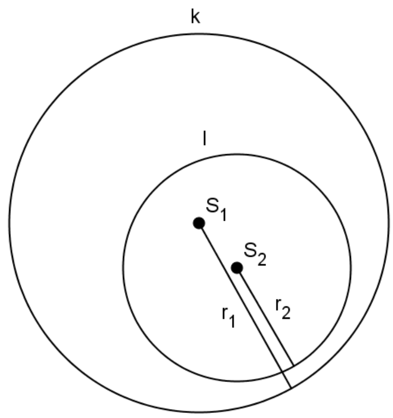
Obr. 71

Dvě různé kružnice, které mají společný střed, se nazývají **soustředné kružnice**. Část roviny omezená dvěma soustřednými kružnicemi se nazývá **mezikruží**.

- Žádný společný bod

  $r_1 > r_2$

  $|S_1S_2| = r_1 - r_2$



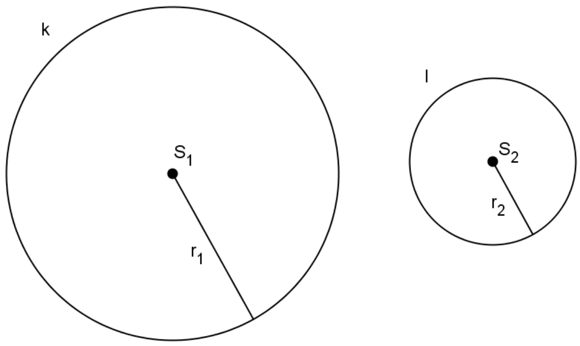
Obr. 72

Takové kružnice se nazývají nesoustředné.

- Žádný společný bod

  $r_1 > r_2$

  $r_1 - r_2 < r_1 + r_2 < |S_1S_2|$



Obr. 73

Takové kružnice se nazývají nesoustředné.

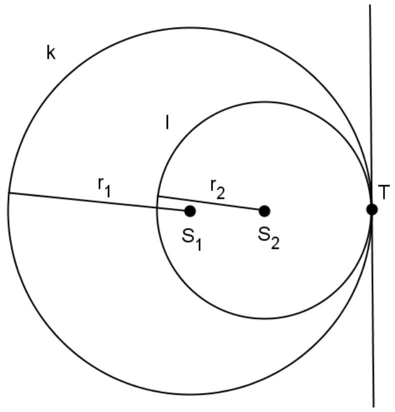
2) *Kružnice mají jeden společný bod*

- Jeden společný bod T

  Společná tečna

  $r_1 > r_2$

  $|S_1S_2| = r_1 - r_2$



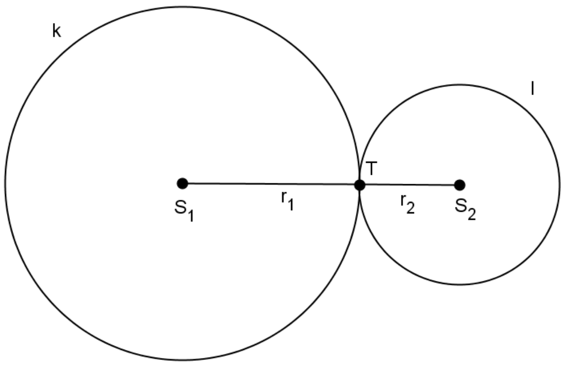
Obr. 74

Kružnice mají vnitřní dotyk

- Jeden společný bod T

  $r_1 > r_2$

  $|S_1S_2| = r_1 + r_2$



Obr. 75

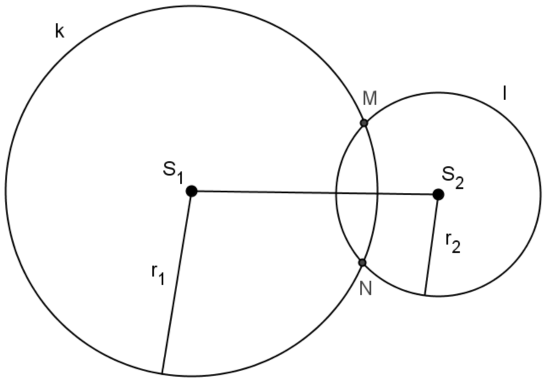
Kružnice mají vnější dotyk

3) *Kružnice mají dva společné body*

- Dva společné body

  $r_1 > r_2$

  $r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2$



Obr. 76

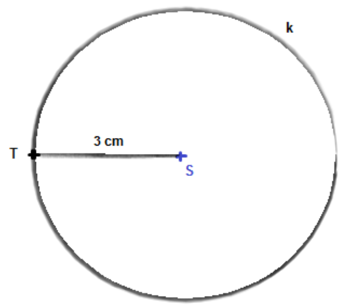
Kružnice se protínají ve dvou bodech – průsečíky M, N. ([9], s. 65-66)

4.5.2. Řešené příklady na kružnice

<u>Příklad č. 1:</u>

Sestroj libovolný bod S ***a vyznač množinu všech bodů, které mají od bodu*** S ***vzdálenost 3 cm. ([1], s. 148)***

Rozbor:

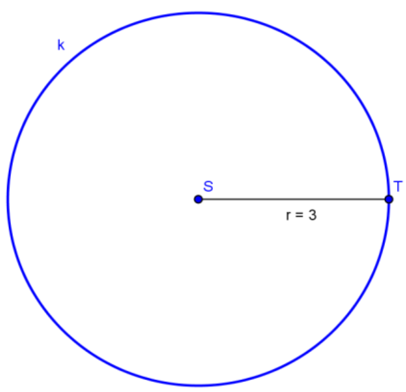


Obr. 77

Tato úloha není obtížná. Zařazena je proto, aby si žáci zopakovali a správně pochopili definici kružnice. Protože právě tu představuje zadání této úlohy. Žák začne konstrukci tím, že si zvolí libovolný bod T ve vzdálenosti $3cm$ od daného bodu S. Spojením těchto bodů, získá úsečku ST. Poté si vezme kružítko a narýsuje kružnici $k(S; r = |ST|)$.

Tímto žák stanoví hypotézu, že hledanou množinou bodů je kružnice k o poloměru $3cm$.

Konstrukce:



Obr. 78

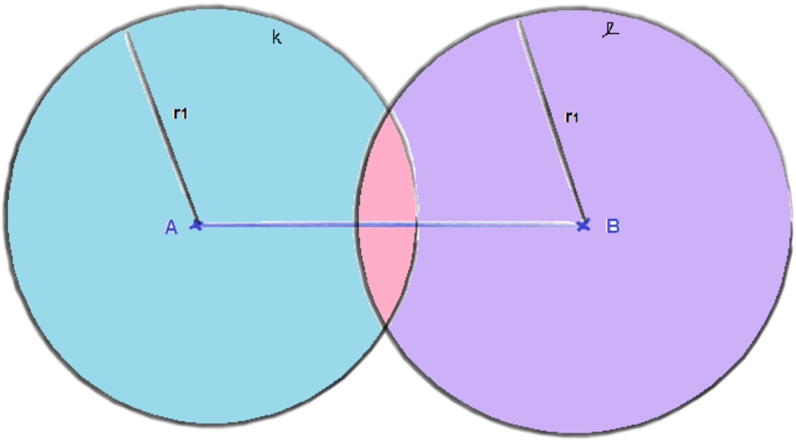
Zkouška:

Konstrukce ověřila, že hledanou množinou je opravdu kružnice k.

<u>Příklad č. 2:</u>

Je dána úsečka AB. Barevně vyznačte množinu bodů X, jejíž vzdálenost je od bodů A i B menší než r_1. ([8], s. 66)

Rozbor:

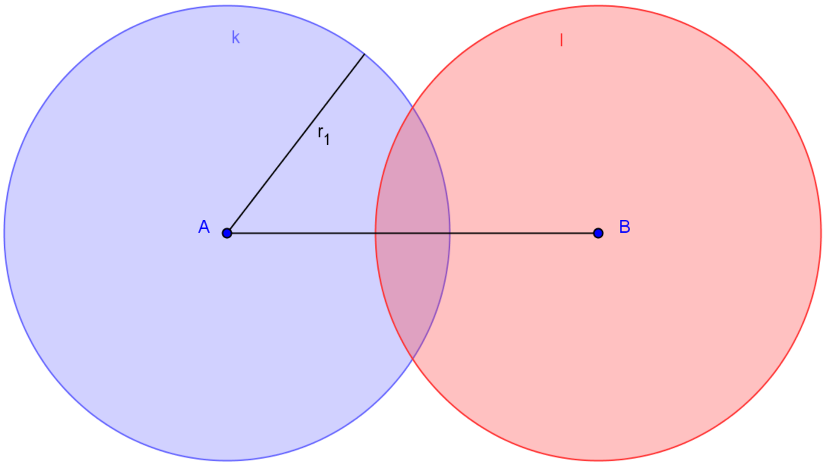


Obr. 79

Zadána je přímka s dvěma krajními body A a B. Žák si úlohu rozdělí na dvě části. Nejprve bude řešit úlohu pouze pro bod A a následně pro bod B. Teprve poté žák obě řešení propojí a sestrojí výslednou množinu bodů.

Žák určitě ví, že množina všech bodů, které mají od daného bodu stejnou vzdálenost, je kružnice. V této úloze ale nechceme jen body, které jsou od A a B ve vzdálenosti r_1, zajímají nás i všechny body ve vzdálenosti menší. Proto, řešením každého samostatného bodu, musí být kruh. Když žák spojí řešení jednotlivých bodů, zjistí, že výslednou množinou bodů není jen kružnice, je to plocha, kde se oba kruhy překrývají.

Konstrukce:



Obr. 80

Zkouška:

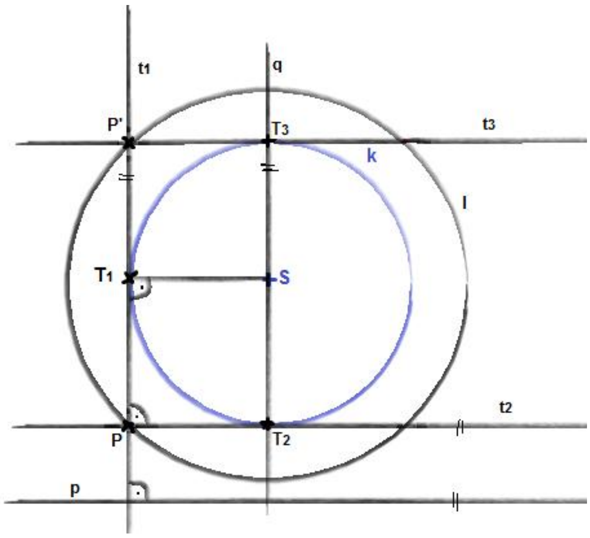
Výsledek opět ověříme v programu GeoGebra. Pro tento příklad je ideálním pomocníkem. Můžeme zde totiž měnit parametry úlohy a tak modelovat možná řešení. S žáky si tak vyzkoušíme možnosti, že: $0 < r_1 < \frac{1}{2}|AB|, r_1 = \frac{1}{2}|AB|, r_1 > \frac{1}{2}|AB|$. Na obrázku 80 je zobrazeno řešení úlohy v případě, že platí $r_1 > \frac{1}{2}|AB|$.

Pokud chceme určit počet řešení, musíme úlohu rozdělit na části podle velikosti parametru r_1. Pokud platí, že $0 < r_1 < \frac{1}{2}|AB|$, řešením je prázdná množina. Pokud platí $r_1 = \frac{1}{2}|AB|$, pak je řešením jen jeden bod a to střed úsečky AB. A pro $r_1 > \frac{1}{2}|AB|$ je řešením plocha, kde se oba kruhy překrývají.

<u>Příklad č. 3:</u>

Najděte množinu průsečíků všech dvojic navzájem kolmých tečen ke kružnici k. Výsledek barevně zvýrazněte. ([8], s. 65)

Rozbor:

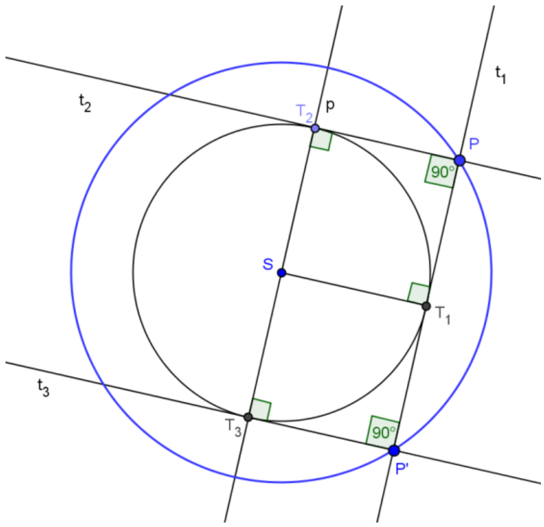


Obr. 81

Je dána kružnice k, v náčrtku vyznačena modrou barvou. Cílem úlohy je najít množinu průsečíků všech dvojic navzájem kolmých tečen této kružnice. Žák si nejprve zvolí libovolný bod T_1 na kružnici k. Tento bod spojí se středem S, dostane tak úsečku T_1S. Protože úkolem je sestrojit tečny, využije žák známé vlastnosti, že tečna je kolmá na spojnici středu a bodu náležícího této kružnici. První tečnu t_1 představuje přímka kolmá na úsečku T_1S a procházející bodem T_1. Následně žák musí sestrojit druhou tečnu, která je na t_1 kolmá. Začne s konstrukcí bodů dotyku hledaných tečen. Proto sestrojí přímku q, rovnoběžnou s t_1 a procházející bodem S. Ta protne danou kružnici ve dvou bodech – T_2, T_3. To jsou body dotyku tečen, které jsou dle požadavků kolmé na tečnu t_1. Žáka ale zajímají především body P a P', průsečíky dvou navzájem kolmých tečen. Tyto dva body jsou prvky hledané množiny a žák podle jejich polohy může zkusit odhadnout, co bude výslednou množinou.

Žák předpokládá, že řešením této úlohy bude kružnice l.

Konstrukce:



Obr. 82

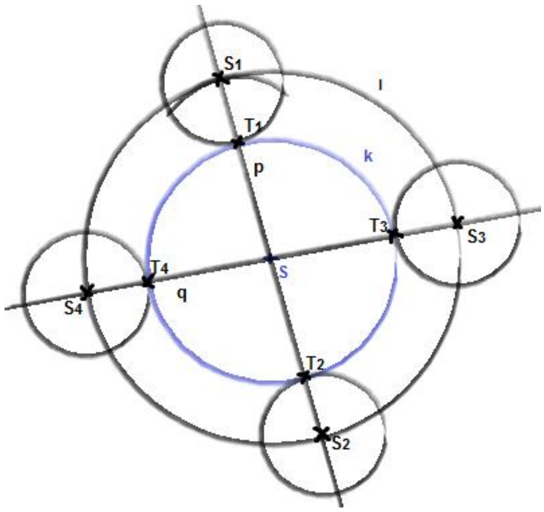
Zkouška:

Pro ověření správnosti konstrukce této úlohy je ideální využít dynamického matematického softwaru. Umožní nám pohybovat s bodem dotyku tečny po kružnici tak, že nám program sám určí výslednou množinu bodů.

<u>Příklad č. 4:</u>

Najděte množinu všech středů kružnic, z nichž každá má poloměr $r = 1cm$ ***a dotýká se vně kružnice*** k***.([8], s. 64)***

Rozbor:

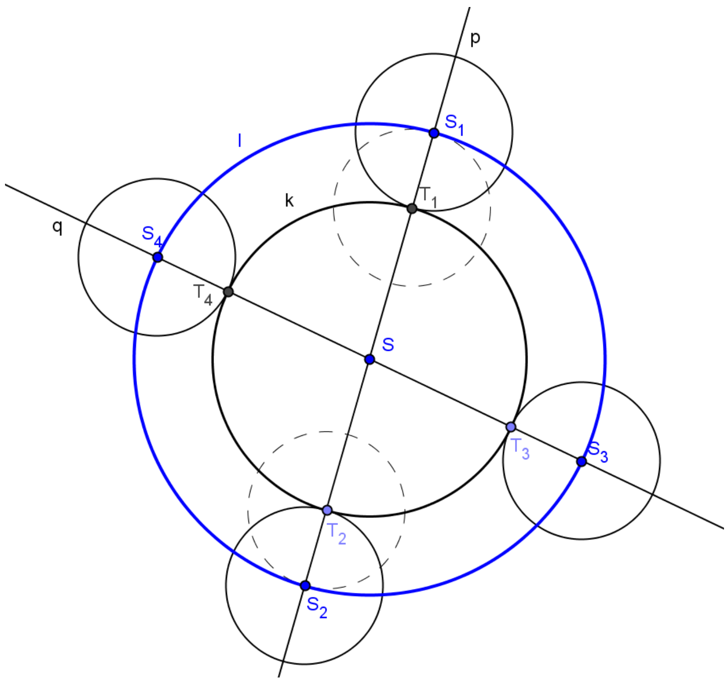


Obr. 83

Zadaná je kružnice k. Žák by měl sestrojit množinu všech středů kružnic, které mají daný poloměr a dotýkají se vně této kružnice. Žák začne konstrukcí přímky p, ta je libovolná, ale musí procházet středem kružnice S. Tato přímka protne kružnici ve dvou bodech - T_1, T_2. Každý z těchto bodů představuje bod dotyku zadané a hledané kružnice. Protože žák ze zadání zná poloměr hledaných kružnic, nanese tuto velikost na přímku p a to od bodu T_1. Tím vznikne bod S_1. První bod výsledné množiny, střed jedné z hledaných kružnic. Na opačné straně přímky p vznikne bod S_2, a to ve vzdálenosti $1cm$ od bodu T_2. Bude to další bod hledané množiny. Žák nejspíš nebude schopný určit výslednou množinu pouze pomocí dvou bodů, proto celý postup zopakuje ještě jednou. Sestrojí přímku q, dva body dotyku T_3, T_4 a dva středy hledaných kružnic S_3, S_4. Z těchto čtyř bodů už žák musí odhadnout výslednou množinu.

Řešením, by dle žáka, měla být kružnice l.

Konstrukce:



Obr. 84

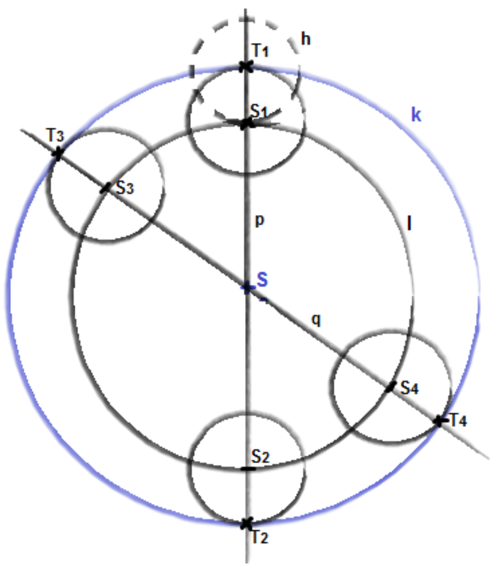
Zkouška:

Opět si příklad namodelujeme v dynamickém matematickém programu GeoGebra. Pomocí krokové konstrukce si žák může projít jednotlivé kroky tak, aby vše pochopil. Konstrukcí jsme potvrdili, řešením je opravdu kružnice $l(S; r_l = r_k + 1)$, kde r_k je poloměr zadané kružnice k.

Příklad č. 5:

Najděte množinu středů všech kružnic, z nichž každá má poloměr $r = 1\,cm$ a vnitřní dotyk s kružnicí k. ([8], s. 64)

Rozbor:

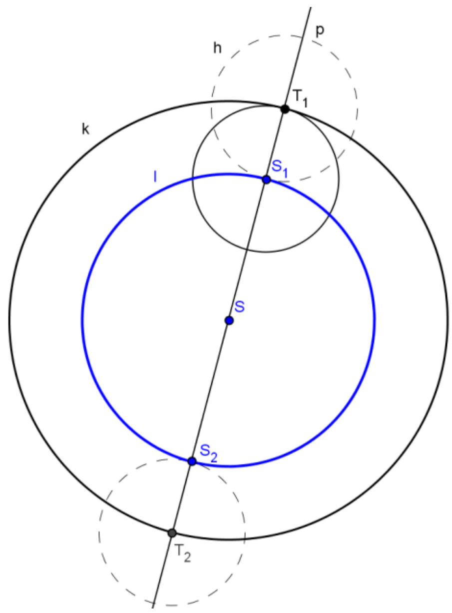


Obr. 85

Postup této konstrukce je velmi podobný předchozímu příkladu. Rozdíl je v tom, že zatímco v předchozí úloze jsme hledali množinu středů kružnic s vnějším dotykem, nyní hledáme kružnice stejného poloměru s dotykem vnitřním.

Žák začne náčrtkem – barevně si zvýrazní známé geometrické útvary. Sestrojí libovolnou přímku p, procházející středem zadané kružnice k. Tato přímka se s danou kružnicí protne ve dvou bodech – T_1, T_2. Ty představují požadovaný vnitřní dotyk, neboli společný bod kružnice k a hledané kružnice. Nyní žák využije zadaného poloměru hledaných kružnic a sestrojí kružnici $h(T_1; r = 1cm)$. Průsečík přímky p a kružnice h si označí S_1. Tento bod je středem jedné z hledaných kružnic, je tedy prvním prvkem výsledné množiny. Stejně žák postupuje i u bodu T_2, dostane druhý střed kružnice S_2. Pokud žák není schopen pomocí těchto dvou bodů odhadnout výslednou množinu, sestrojí další libovolnou přímku q, procházející bodem S. Vniknou opět dva body - T_3, T_4, pro které zopakuje celý postup ještě jednou. Získá tím další dva body hledané množiny – S_3, S_4. Nyní už je žákova hypotéza zřejmá – řešením bude kružnice l.

Konstrukce:



Obr. 86

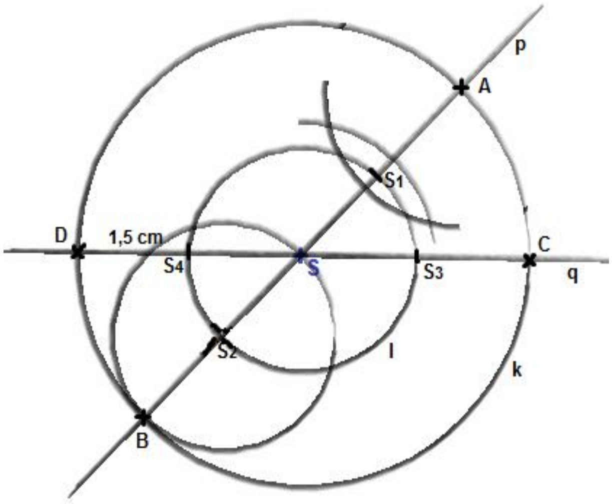
Zkouška:

Konstrukce v dynamickém matematickém softwaru potvrdila, že výslednou množinou bodů je kružnice l. Tato kružnice leží uvnitř zadané kružnice k a spolu ohraničují jeden centimetr široké mezikruží. Pro kružnici l platí: $l(S; r_l = (r_k - 1)\, cm)$, kde r_k, r_l jsou poloměry kružnic k a l.

<u>Příklad č. 6:</u>

Určete a barevně zvýrazněte množinu středů všech kružnic, které mají poloměr $r = 1{,}5\,cm$ a prochází bodem S. ([8], s. 65)

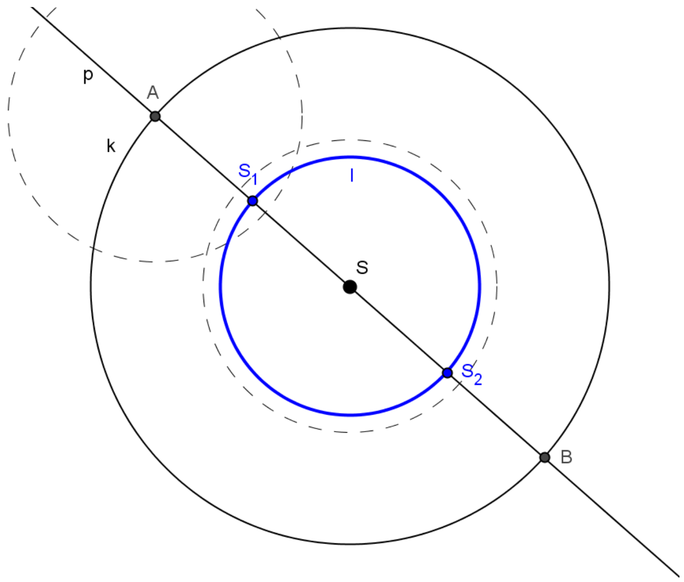
Rozbor:



Obr. 87

Je dán bod S. Úkolem je nalézt středy všech kružnic, které tímto bodem procházejí. Při konstrukci žák začne sestrojením přímky p, která bude obsahovat bod S. Aby kružnice procházela daným bodem, musí bod A, bod hledané kružnice, ležet na přímce p ve vzdálenosti velikosti průměru hledané kružnice. To znamená, že žák si narýsuje kružnici $k(S; r = 3cm)$. Body A, B dostane jako průsečíky této kružnice a přímky p. Úsečky AS, BS představují průměr hledaných kružnic, z toho důvodu žák sestrojí středy těchto úseček, body S_1, S_2. Ty představují dva prvky hledané množiny. Je možné, že žák už zvládne odhadnout řešení této úlohy, pokud ale ne, sestrojí přímku q obsahující bod S a zopakuje výše uvedený postup. Tím získá další dva body hledané množiny - S_3, S_4. Z toho vyplývá žákova hypotéza, výslednou množinou bodů bude kružnice l.

Konstrukce:



Obr. 88

Zkouška:

Konstrukce potvrdila, že množinou středů všech kružnic, které mají poloměr $r = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ a procházejí daným bodem S je kružnice $l(S; r = 1{,}5\,cm)$.

4.6. Thaletova kružnice

4.6.1. Původ a její podoba

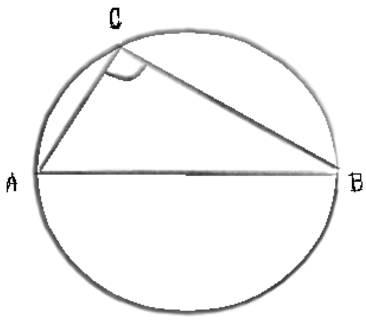
THÁLES Z MILÉTU (624 př. n. l. - 543 př. n. l.)

- Řecký matematik, astronom a filozof
- Jako první použil kružítko a úhloměr
- Úspěšně předpověděl zatmění Slunce
- Vypočítal výšku egyptských pyramid pomocí délky jejich stínu
- V geometrii kromě TV zjistil, že úhly při základně rovnoramenného trojúhelníků jsou shodné
- Průměr dělí kruh na dvě poloviny
- Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a úhlech k ní přilehlých. [15]

Obr. 89

Než odvodíme Thaletovu větu, vyzkoušíme si příklad:

1. Narýsujte kružnici k se středem S a libovolným poloměrem r
2. Vyznačte její průměr AB .
3. Vyznačte na kružnici bod C (libovolný)
4. Sestrojte trojúhelník ABC
5. Nejprve odhadněte a následně změřte velikost úhlu při vrcholu C



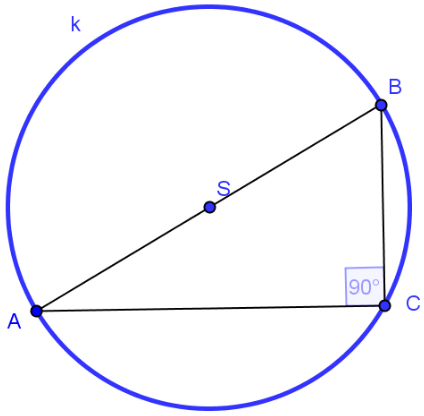
Obr. 90

Thaletova věta

Jestliže vrchol C trojúhelníku ABC leží na kružnici sestrojené nad průměrem AB, je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. ([3], s. 55)

(*Pokud jste měřili přesně, vyšlo vám u cvičného příkladu* 90° *a to potvrzuje výše zmíněnou větu.)*

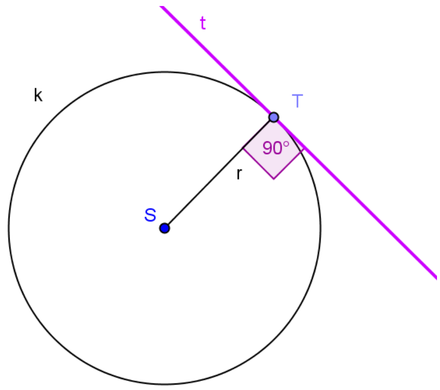
„Množinou vrcholů všech bodů v rovině, ze kterých je úsečku AB vidět pod pravým úhlem, je tzv. **Thaletova kružnice** s průměrem AB, tj. kružnice s průměrem AB s výjimkou bodů A a B." ([9], s. 85)



Obr. 91

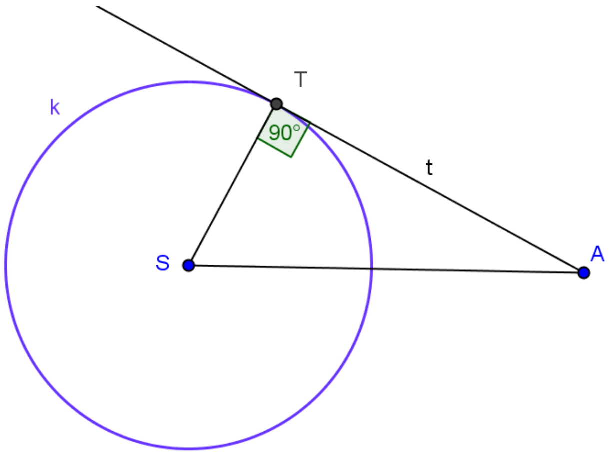
4.6.2. Tečna ke kružnici

Pro následné řešení příkadů si připomeneme pojem tečna a některé její vlastnosti. Tečna t je přímka**,** která má s kružnicí společný právě jeden bod *T*, který se nazývá bod dotyku. Tečna je kolmá na poloměr r kružnice v bodě dotyku *T*. [15]



Obr. 92

Na tečně t si zvolíme libovolný bod A, který bude zároveň vnějším bodem kružnice a názorně si ukážeme vlastnosti tečny.



Obr. 93

Jakou velikost má úhel** STA **u vrcholu T?

Velikost je $90°$, protože tečna je vždy kolmá na poloměr, resp. průměr kružnice.

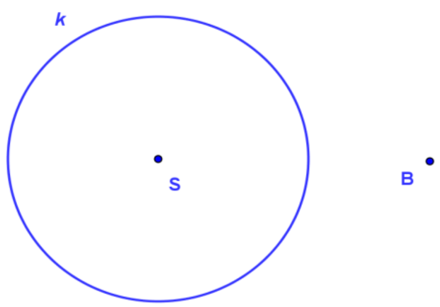
Na které množině bodů, kromě kružnice k, bod T ještě leží?

Musí ležet na Thaletově kružnici s průměrem SA.

$\Rightarrow$ ***bod** T **získáme jako průnik dvou množin bodů – kružnice** k **a Thaletovy kružnice***

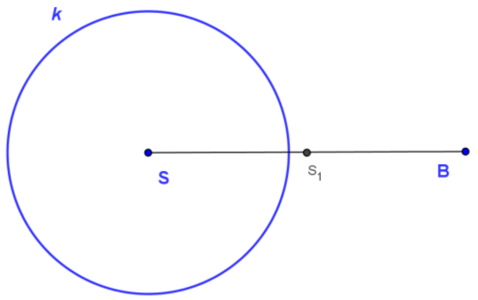
Konstrukce tečny:

I. Máme zadanou kružnici k a bod B, který je vnější bodem této kružnice. Jak sestrojíme body dotyku T a tečny kružnice k?



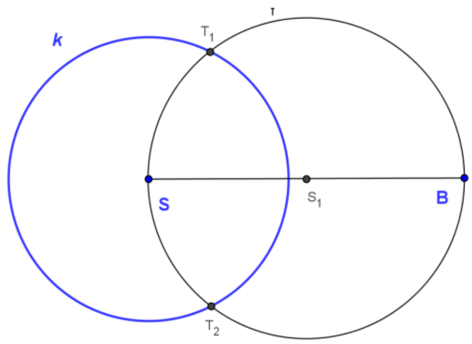
Obr. 94

II. Prvním krokem je konstrukce úsečky SB a následné vytvoření jejího středu S_1.



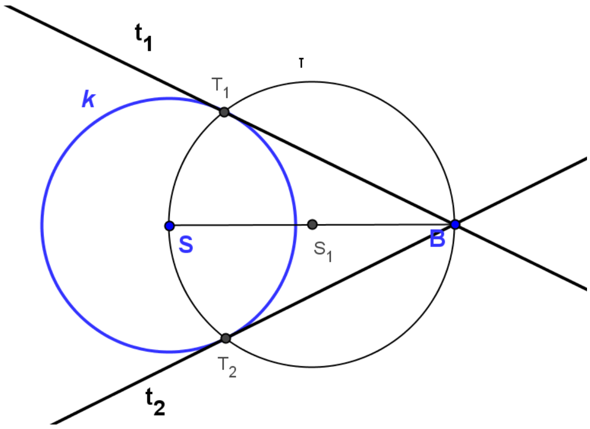
Obr. 95

III. Poté sestrojíme Thaletovu kružnici τ se středem S_1 a poloměrem $|SS_1|$. Dostaneme dva průsečíky kružnic k a τ, které nazveme body dotyku T_1, T_2.



Obr. 96

IV. Sestrojením přímek BT_1 a BT_2, dostaneme dvě tečny kružnice k – t_1, t_2. Tím je naše úloha vyřešena.



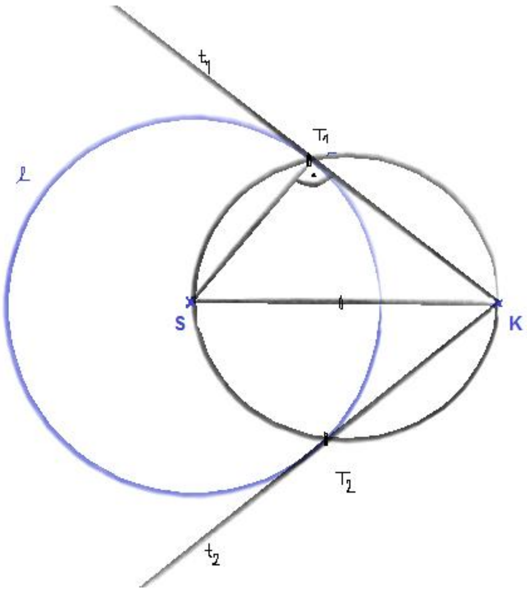
Obr. 97

Příklady na procvičení konstrukce tečny:

Příklad č. 1:

Narýsujte kružnici $l(S; r = 3{,}5cm)$, bod K tak, že $|SK| = 6cm$. Sestrojte z bodu K tečny ke kružnici l. Body dotyku označte T_1, T_2. ([8], s. 70)

Rozbor:

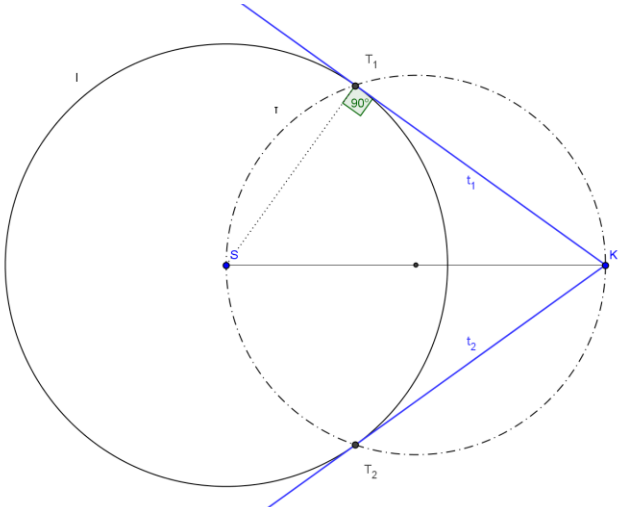


Obr. 98

Žák si vzpomene na teorii a vlastnosti tečen. Při konstrukci postupuje dle předchozího názorného postupu, jak sestrojit tečnu ke kružnici.

I když se může tento příklad zdát příliš jednoduchý, jeho zařazení má svůj důvod. Snažíme se o to, aby si žák novou látku zopakoval a vyzkoušel si ji v praxi. Dítě si mnohem lépe zapamatuje nová fakta, když si je ihned propojí s praxí. Při uvádění praktických příkladů se vždy snažíme postupovat od jednodušších ke složitějším úlohám.

Konstrukce:



Obr. 99

Zkouška:

Konstrukcí se potvrdilo, že velikost úhlu ST_1K je opravdu $90°$. A proto bylo využití Thaletovy kružnice v této úloze oprávněné a správné.

<u>Příklad č. 2:</u>

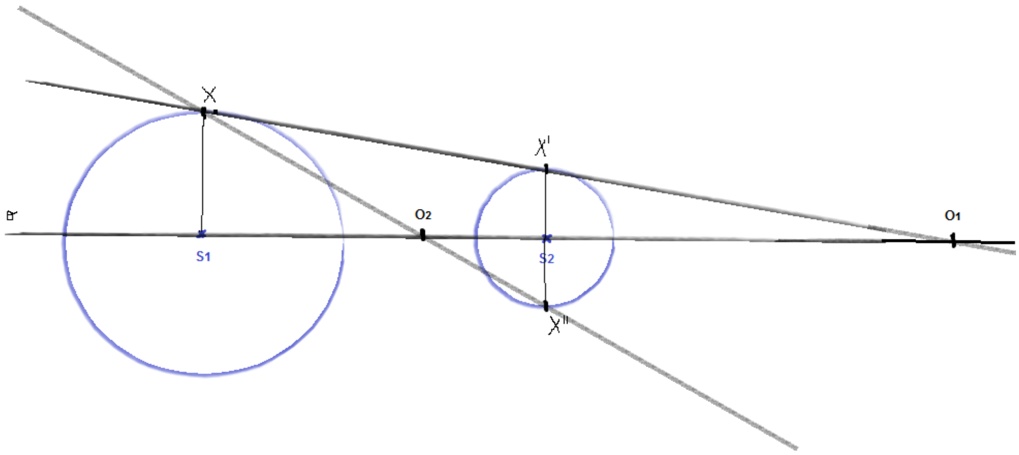
Sestrojte všechny tečny dvou zadaných kružnic $k_1(S_1; r_1 = 3cm)$ ***a*** $k_2(S_2; r_2 = 1{,}5cm)$***,***
kde $|S_1S_2| = 6{,}5cm$***.***

Před tím, než necháme žáka úlohu samostatně řešit, zopakujeme si s ním, podmínky pro existenci společných tečen dvou kružnic:

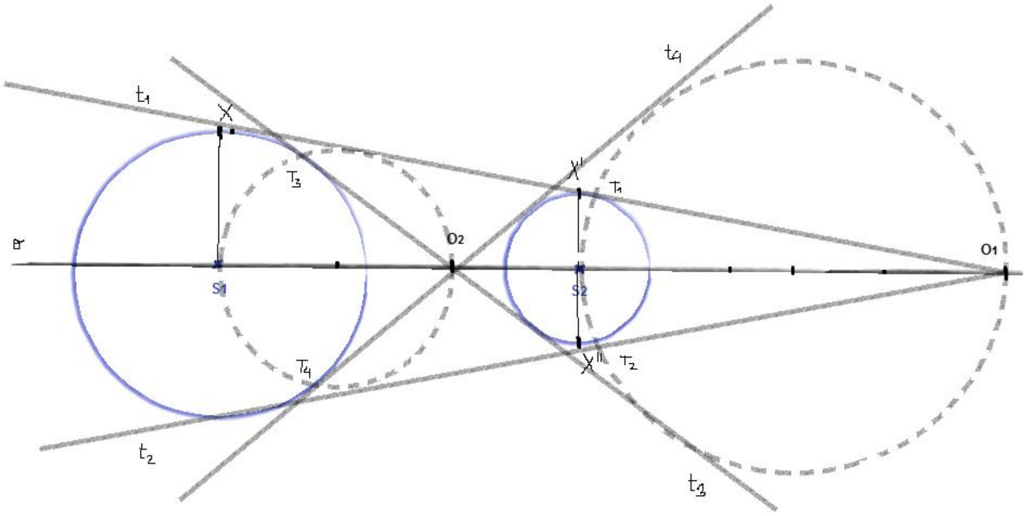
- pokud existují společné tečny dvou kružnic s různými poloměry, pak tyto tečny procházejí středy stejnolehlostí, ve kterých je jedna kružnice obrazem druhé
- společné tečny dvou kružnic s různými poloměry existují tehdy, když vzdálenost středů kružnic je větší nebo rovna rozdílu poloměrů těchto kružnic

Rozbor:

U tohoto příkladu je konstrukce značně náročná, proto, pro dostatečnou přehlednost, rozbor provedeme na dvou, navazujících obrázcích.



Obr. 100



Obr. 101

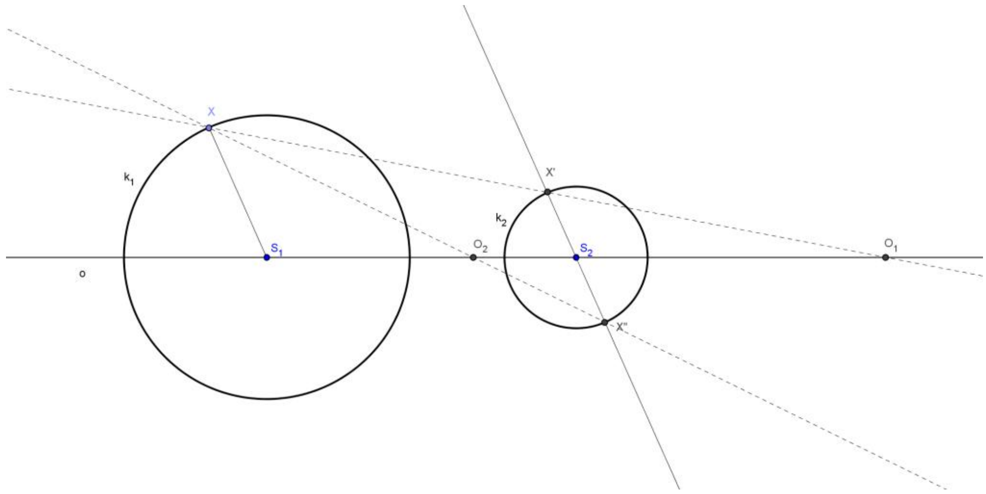
Máme zadané dvě kružnice - $k_1(S_1;r_1)$ a $k_2(S_2;r_2)$. Jako první, žák sestrojí přímku o, která je spojnicí středů obou kružnic. Na kružnici k_1 zvolí libovolný bod X a sestrojí úsečku XS_1. Následně vede bodem S_2 rovnoběžku s úsečkou XS_1 a její průsečíky s k_2 označíme X' a X''.

Dále žák pokračuje sestrojením středů stejnolehlosti a to konstrukcí přímek XX' a XX''. Jejich průsečíky s osou o, si žák označí O_1 a O_2. Tyto body jsou středy stejnolehlostí, ve kterých je jedna kružnice obrazem druhé (viz obrázek 100).

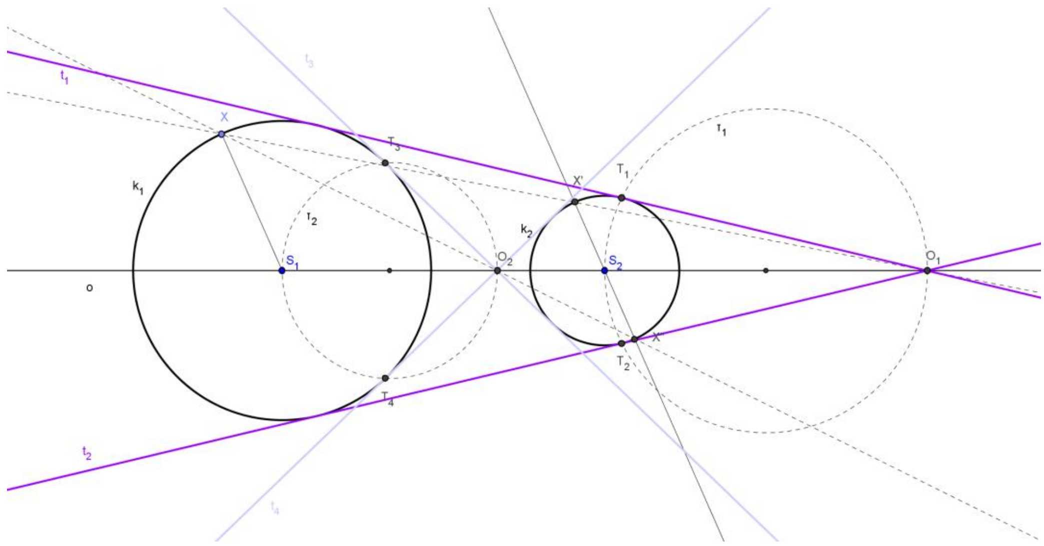
Nyní už žák může začít s konstrukcí vnějších tečen. Postup bude stejný jako v předchozím příkladě. Žák začne s Thaletovou kružnicí o průměru O_1S_2. Její průsečíky s kružnicí k_2 jsou body dotyku T_1 a T_2. Hledané vnější tečny t_1 a t_2 jsou přímky O_1T_1 a O_1T_2.

Nesmíme ale zapomenout na vnitřní tečny. Postup konstrukce bude totožný s předchozím jen u druhé kružnice. Žák sestrojí Thaletovu kružnici o průměru O_2S_1. Průsečíky s kružnicí k_1 jsou body dotyku, které označí T_3 a T_4. Společné vnitřní tečny t_3 a t_4 jsou pak přímky O_2T_3 a O_2T_4 (viz obrázek 101).

Konstrukce:

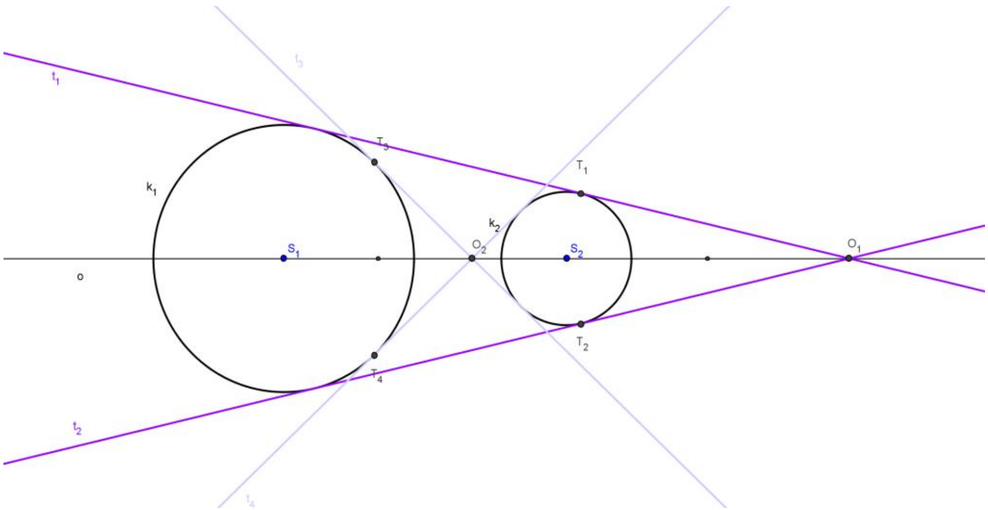


Obr. 102



Obr. 103

Přehledný výsledek konstrukce (pomocné konstrukce schováme):



Obr. 104

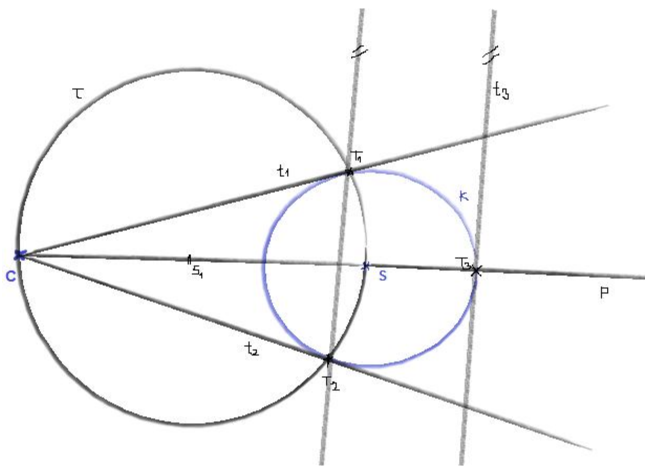
Zkouška:

Z obrázku konstrukce jasně vidíme, že žákův postup by správný. Ke konstrukci jsme použili středy stejnolehlosti a Thaletovy kružnice a opravdu nám vyšli čtyři tečny, z toho dvě vnitřní t_3, t_4 a dvě vnější t_1, t_2.

<u>Příklad č. 3:</u>

Je dána kružnice k a její vnější bod C. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny AC, BC a hlavním vrcholem C tak, aby mu kružnice k byla vepsaná. ([8], s. 72)

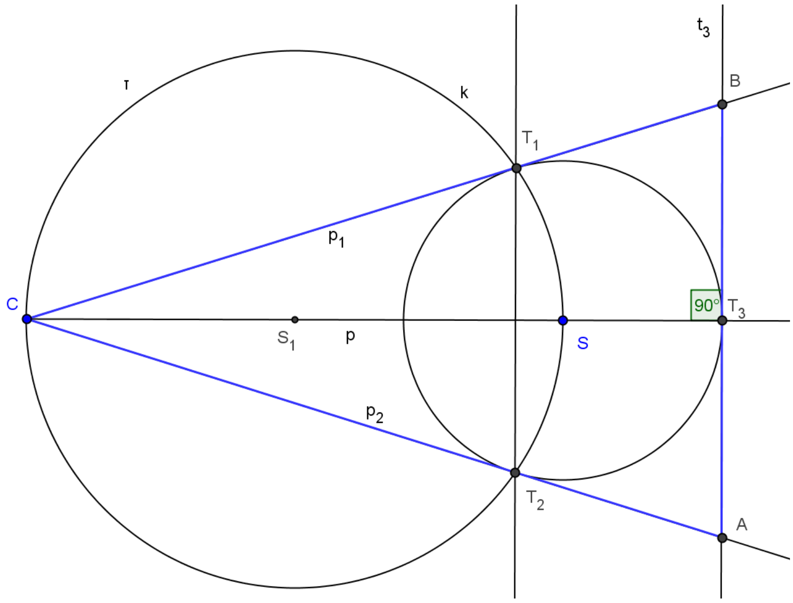
Rozbor:



Obr. 105

Žák už z předchozích příkladů dobře ví, že k sestrojení bodu dotyku T na kružnici používáme Thaletovu kružnici. A ani u tohoto příkadu to nebude jinak. Prvním krokem je tedy sestrojení Thaletovy kružnice o průměru CS. Tím žák dostane dva body dotyku na kružnici k – T_1 a T_2. Spojením bodů CT_1 a CT_2 získá dvě těčny ke kružnici t_1, t_2, což v našem případě odpovídá i stranám hledaného trojúhelníka, konkrétně straně a a b. Pro sestrojení strany c žák potřebuje najít třetí bod dotyku. Ten sestrojí jako průnik polopřímky CS a kružnice $k \rightarrow T_3$. Konstrukce strany c už není obtížná, odpovídá totiž třetí tečně, která je rovnoběžná s přímkou T_1T_2 a prochází bodem T_3.

Konstrukce:



Obr. 106

Zkouška:

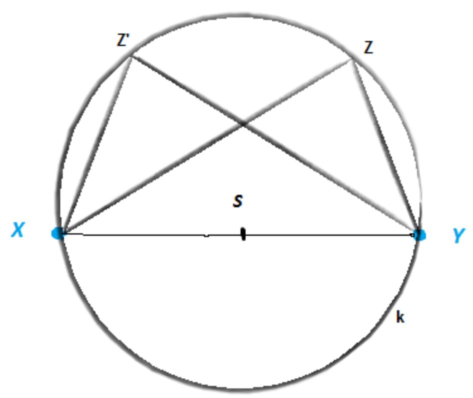
V úloze vlastně konstruujeme rovnoramenný trojúhelník, kterému je vepsaná zadaná kružnice k. Ke konstrukci ramen trojúhelníku využíváme Thaletovu kružnici a při konstrukci základny hledaného trojúhelníku ABC využíváme kolmost tečny na jeho výšku. Výsledkem je tak rovnoramenný trojúhelník ABC.

4.6.3. *Řešené příklady na Thaletovu kružnici*

<u>Příklad č. 1:</u>

Body X a Y mají vzdálenost 8 cm. Urči množinu všech vrcholů pravoúhlých trojúhelníků s přeponou XY.

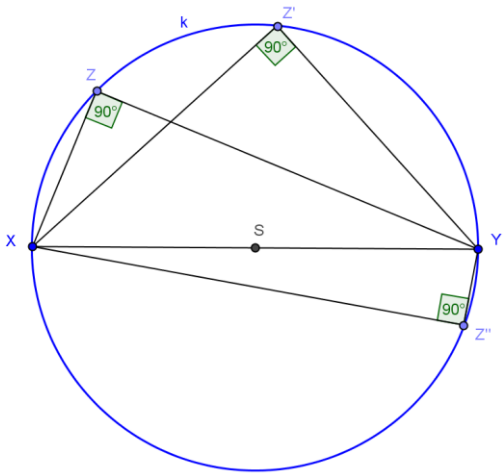
Rozbor:



Obr. 107

Žák si udělá náčrtek a snaží se výslednou množinu odhadnout. V tomto případě řešení není příliš obtížné. Zadání je totiž velmi podobné výše uvedené a vysvětlené definici Thaletovy věty. Z toho důvodu bude žák konstruovat kružnici k nad úsečkou XY. Žákova hypotéza zní, že výslednou množinou bodů je Thaletova kružnice sestrojená nad úsečkou XY.

Konstrukce:



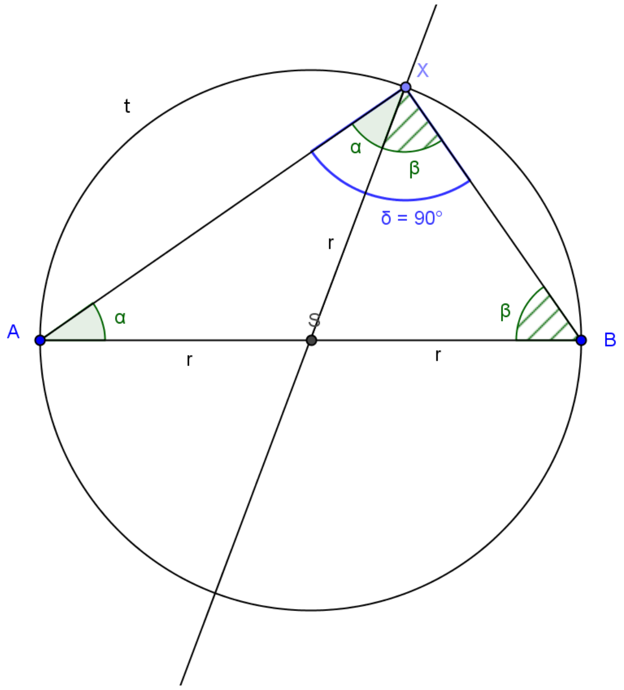
Obr. 108

Zkouška:

Pro ověření žákova tvrzení využijeme program GeoGebra. V tomto dynamickém programu můžeme snadno potvrdit nebo vyvrátit žákovu myšlenku tím, že bodem Z, ležícím na Thaletově kružnici, můžeme po dané kružnici neomezeně pohybovat. Tímto způsobem žáci názorně pochopí, že ať třetí bod trojúhelníku XYZ umístíme kamkoliv na Thaletovu kružnici, úhel u vrcholu Z zůstane vždy $90°$.

Tím jsme ověřili a potvrdili žákovu myšlenku, že správným řešením úlohy je Thaletova kružnice.

Důkaz:



Obr. 109

Z obrázku je důkaz toho, proč má úhel při vrcholu X, ležícím na Thaletově kružnici vždy velikost $90°$, dostatečně zřejmý.

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

$$2(\alpha + \beta) = 180°$$

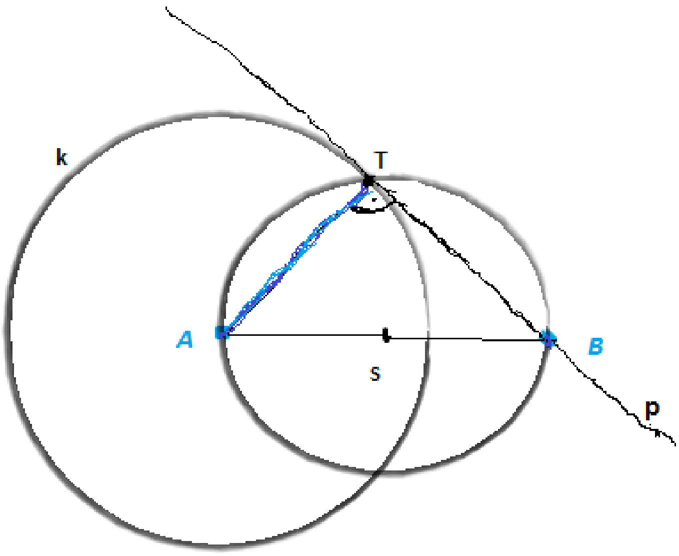
$$\alpha + \beta = 180°/2$$

$$\underline{\underline{\alpha + \beta = 90°}}$$

Příklad č. 2:

Délka úsečky AB je 8 cm. Narýsuj přímku p, která prochází bodem B a od bodu A je vzdálena 5 cm.

Rozbor:

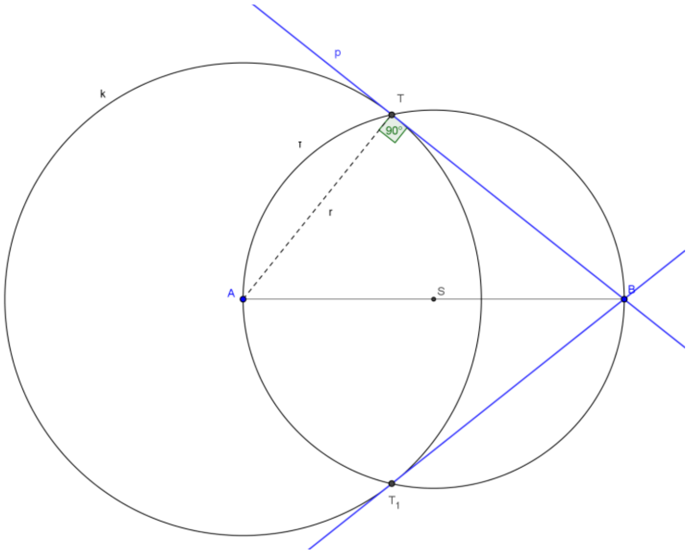


Obr. 110

Žák si do náčrtku zanese známé objekty barevně a snaží se vymyslet postup pro následující konstrukci. V tomto případě by si žák nejspíš uvědomil, že pro konstrukci hledané přímky p zná jen jeden bod a proto musí najít druhý. O tom ví, že je ve vzdálenosti 5cm od bodu A, což určuje první množinu bodů, které musí hledaný bod náležet – kružnici $k(A; r = 5cm)$. Druhou množinu pak představuje Thaletova kružnice sestrojena nad přeponou AB. Bod, který žák potřebujeme, je průnikem obou zmíněných množin – označí si ho písmenem T. Nyní zbývá jen sestrojit přímku p, která odpovídá přímce BT.

Z toho plyne, že řešením zadané úlohy je přímka p, která je tečnou ke kružnici k. Řešení žák získá spojením bodů B a T, přičemž bod T dostane jako průnik kružnice $k(A; r = 5\,cm)$ a Thaletovy kružnice sestrojené nad přeponou AB.

Konstrukce:



Obr. 111

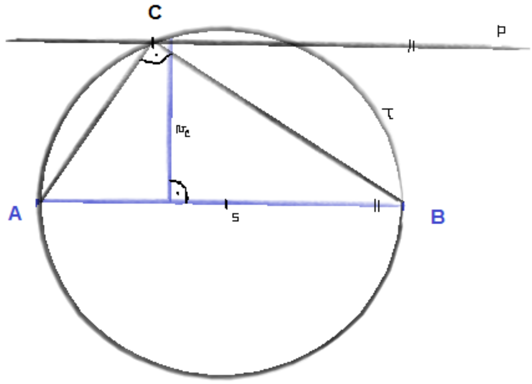
Zkouška:

Z konstrukce jasně vidíme, že úhel hledané přímky a spojnice bodu dotyku s bodem A, má velikost $90°$. Z toho vyplývá, že hledaná přímka musí být tečnou kružnice.

<u>Příklad č. 3:</u>

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC ***s pravým úhlem při vrcholu*** C**, kde** $c = 7\ cm$**,** $v_c = 3\ cm$**.**

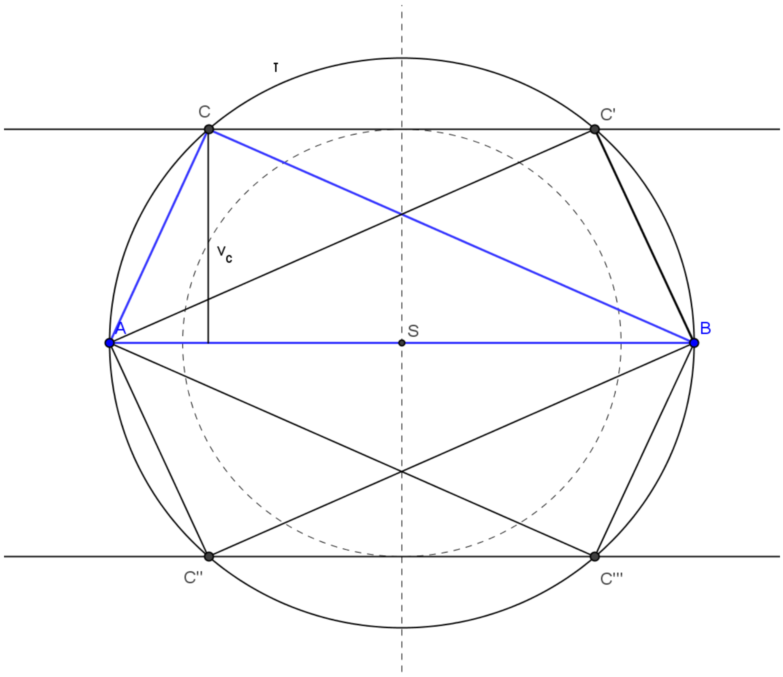
Rozbor:



Obr. 112

Žák si opět v náčrtku barevně vyznačí známé útvary. Ze zadání je jasné, že pro úplnou konstrukci hledaného trojúhelníku ABC musíme najít bod C. Žák má zadáno, že se u bodu C nachází úhel o velikosti $90°$, to mu v postupu velmi pomůže. Protože tedy hledáme bod, který je vidět pod úhlem $90°$, využijeme opět Thaletovu kružnici, kterou sestrojíme nad přeponou AB. Tím žák sestrojil první potřebnou množinu. Pro druhou množinu využije znalost velikosti výšky v_c. Ta určuje vzdálenost bodu C od úsečky AB. Proto žák sestrojí přímku rovnoběžnou s úsečkou AB ve vzdálenosti v_c (3 cm). Bod C vznikne jakou průnik obou množin – Thaletovy kružnice a rovnoběžky s AB.

Konstrukce:



Obr. 113

Zkouška:

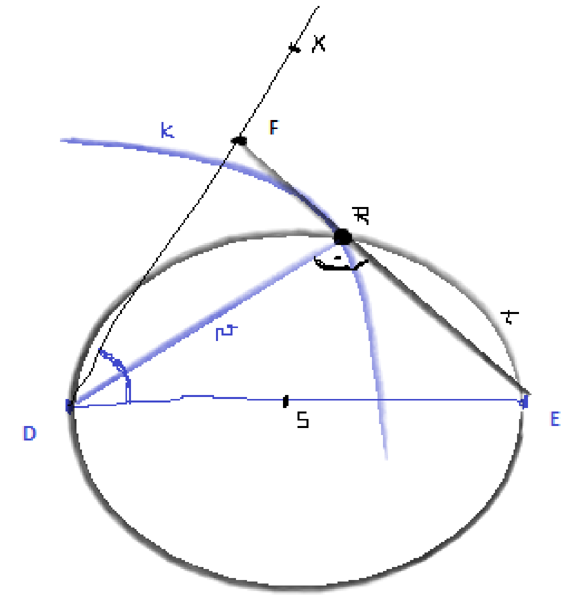
Modelace v dynamickém matematickém softwaru nám potvrdila správný postup. Můžeme v něm žákům názorně ukázat, jak se mění výsledný trojúhelník ABC v závislosti na velikosti výšky v_c. Tato úloha je opět klasickou ukázkou využití Thaletovy kružnice v praxi.

Úloha má čtyři řešení.

Příklad č. 4:

Sestrojte $\triangle DEF$, znáte-li délku jeho strany f, velikost vnitřního úhlu δ při vrcholu D a délku výšky v_d na stranu d.

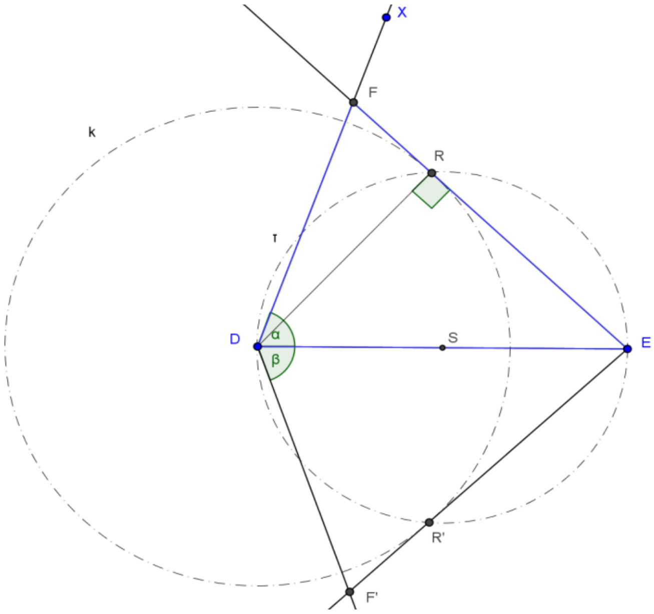
Rozbor:



Obr. 114

U tohoto příkladu je velmi důležité správně si úlohu zakreslit. Žák si udělá náčrtek a vyčte z něj souvislosti, které použije při řešení úlohy. K sestrojení trojúhelníku DEF potřebuje sestrojit vrchol F. Nejdříve, však musí sestrojit bod R. Ten, vznikne, jako průnik Thaletovy kružnice τ nad přeponou DE a kružnice k, která má střed v bodě D a jejíž poloměr odpovídá velikosti výšky na stranu d. Konstrukcí bodu R je žák téměř u cíle. Žák už jen sestrojí hledaný bod F. Ten vznikne jako průnik dvou množin, a to polopřímky ER a úhlu EDX (jeho velikost známe ze zadání). Posledním krokem je propojení bodů DEF => trojúhelník DEF.

Konstrukce:



Obr. 115

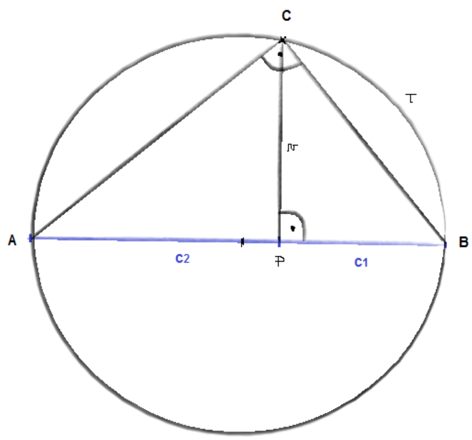
Zkouška:

Z konstrukce je jasně vidět, že Thaletovu větu žák použil oprávněně, protože výška na stranu d a polopřímka ER svírá úhel $90°$. Řešením je ostroúhlý trojúhelník DEF.

<u>Příklad č. 5:</u>

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, v němž výška k přeponě dělí přeponu na dva úseky $c_1 = 3{,}2\ cm$ ***a*** $c_2 = 4{,}1\ cm$***.([1], s. 60)***

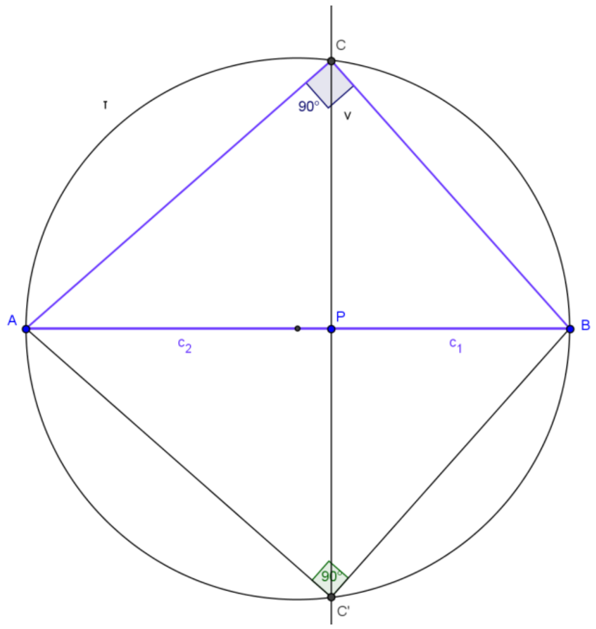
Rozbor:



Obr. 116

Žák si do náčrtku zanese známou přeponu modrou barvou. Rozdělí ji na dva úseky dle zadání. Žák ví, že hledá pravoúhlý trojúhelník s touto přeponou. Z toho plyne, že množina všech vrcholů C, u nichž je pravý úhel, odpovídá Thaletově kružnici τ. Tuto kružnici žák sestrojí a hledá druhou množinu, které bod C také náleží. Tou je v našem případě výška trojúhelníku v, která je kolmá na přeponu a zároveň prochází patou výšky P. Hledaný bod C, žák získá jako průsečík Thaletovy kružnice τ a výšky v.

Konstrukce:



Obr. 117

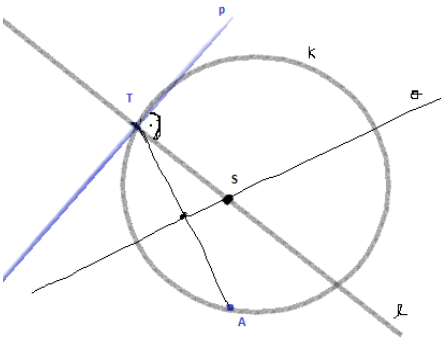
Zkouška:

Konstrukce ověřila žákovy předpoklady. Vrcholu C náleží opravdu pravý úhel a délka přepony odpovídá zadání. Tím je úloha vyřešena.

<u>Příklad č. 6:</u>

Je dána přímka t ***a body*** A,T***, kde bod*** T ***leží na přímce*** t***. Sestrojte kružnici*** k ***tak, aby se dotýkala přímky*** t ***v bodě*** T ***a procházela bodem*** A***.***

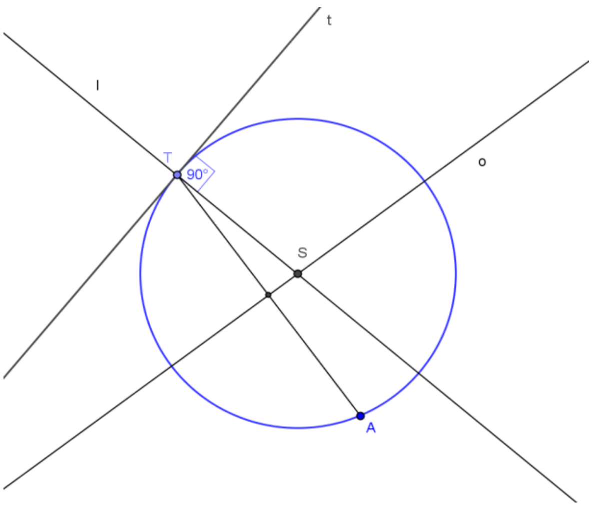
Rozbor:



Obr. 118

Žák si opět načrtne řešenou situaci příkladu. U této úlohy žák musí propojit znalosti o množinách bodů daných vlastností z předchozích podkapitol. K sestrojejí jakékoliv kružnice potřebujeme znát její střed a poloměr. Žák se zamyslí, jaké vlastnosti platí pro střed kružnice když známe její dva body. Žák, který dával pozor ví, že střed takové kružnice leží na ose spojnice těchto dvou bodů – v našem případě přímka o. A jelikož také ví, že k sestrojení jakéhokoliv bodu potřebuje alespoň dvě přímky nebo jiné objekty, musí ještě nalézt množinu druhou. K tomu využije jiné znalosti, a to, že tečna je vždy komá na poloměr kružnice (za tečnu považuje přímku p, známou ze zadání). Zkonstruuje tak přímku l kolmou na přímku p a zároveň procházející bodem T. Tím žák získá dvě potřebné množiny. Bod S, střed kružnice k, sestrojí jako průnik přímek o a l. Poloměr r je dán vzdáleností středu kružnice a jednoho z bodů T nebo A.

Konstrukce:



Obr. 119

Zkouška:

Z konstrukce vidíme, že přímka p je opravdu tečnou hledané kružnice a střed S má stejnou vzdálenost od bodu T i A. Dokázat to můžeme pomocí dynamického programu GeoGebra, kde lze libovolně pohybovat oběma zadanými body. To nám umožní namodelovat a představit si i méně obvyklé varianty zadání této úlohy.

Úloha má jedno řešení a jeho podoba závisí na umístění bodu A.

4.7. Středové a obvodové úhly v kružnici

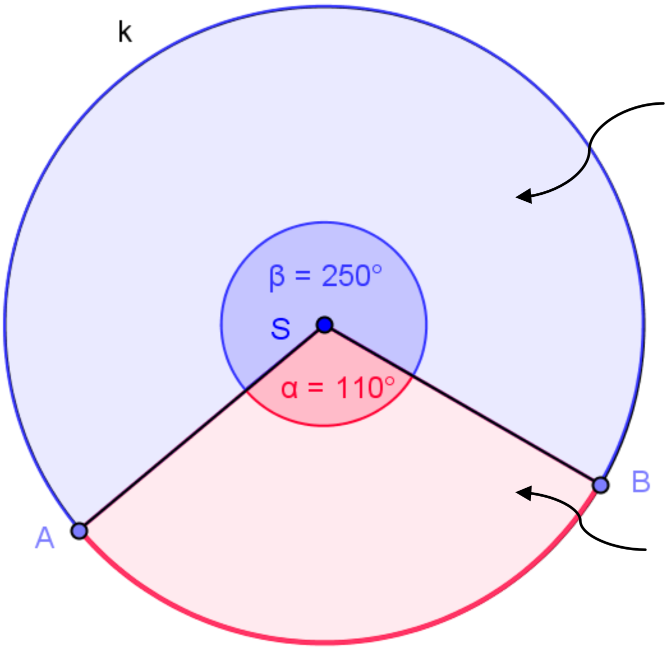
4.7.1. Úhly v kružnici

V této kapitole si zopakujeme vše, co víme o úhlech v kružnici. Pomocí nich odvodíme, jak sestrojit množinu všech bodů, z nichž je úsečka vidět pod daným úhlem.

Úhly v kružnici jsou vždy příslušné k oblouku kružnice, který je omezen hraničními body A, B. Můžeme rozlišit dva základní typy těchto úhlů:

I. ***Středové úhly*** - úhly s vrcholem ve středu kružnice a rameny procházejícími krajními body oblouku AB. Tyto úhly můžeme ještě dále rozdělit na středové konvexní (menší než $180°$) a středové nekonvexní (větší než $180°$). Středový úhel je vždy jen jeden, protože existuje jen jeden střed kružnice. ([9], s. 67)

II. ***Obvodové úhly*** - úhel s vrcholem na obvodu kružnice a rameny procházejícími krajními body oblouku AB. K danému oblouku existuje nekonečně mnoho obvodových úhlů, protože existuje nekonečně mnoho bodů dané kružnice, které si k jejich sestrojení můžeme zvolit. Všechny obvodové úhly k danému oblouku mají stejnou velikost. ([9], s. 67)

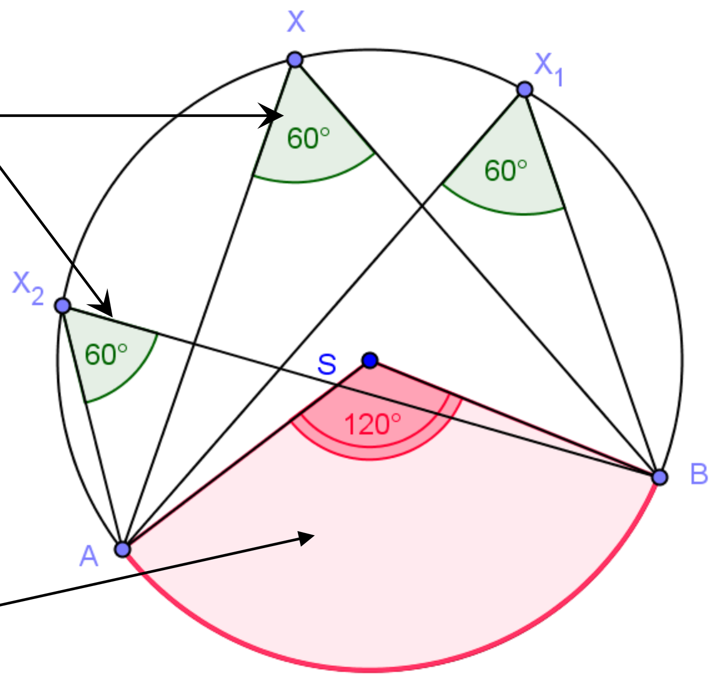


Středový nekonvexní, konkávní úhel (větší než $180°$). Jeho velikost je rovna $360° - \alpha$.

Středový konvexní úhel (menší než $180°$). Jeho velikost je rovna $360° - \beta$.

Obr. 120

Obvodový úhel oblouku AB kružnice k. Je jich nekonečně mnoho a všechny mají stejnou velikost.



Středový úhel oblouku AB. Je pouze jeden.

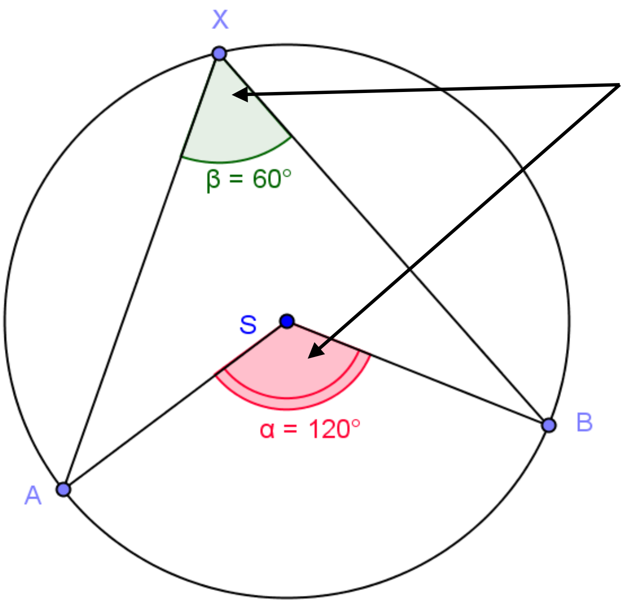
Obr. 121

Vztah mezi středovým a obvodovým úhlem

Z předchozího obrázku víme, že velikost všech obvodových úhlů oblouku je stejná. Nyní by nás zajímalo, jestli existuje nějaký matematický vztah mezi středovým a obvodovým úhlem příslušného oblouku?

Žák si udělá názorný obrázek, ve kterém se pokusí nalézt souvislosti a vlastnosti daných objektů (může použít i úhloměr). Také si můžeme se žáky zopakovat vztahy mezi úhly v trojúhelníku pro lepší pochopení výsledku.

Žák navrhne matematický vztah, který považuje za správné řešení. Zdůvodní, jak k tomuto výsledku dospěl a za jakých podmínek bude jeho tvrzení platné. Tento vztah učitel potvrdí či vyvrátí. K tomu použije geometrický program Geogebra, který učiteli umožní žákům názorně ukázat, že vztah platí a to ve všech možných modifikacích.



Z obrázku je již na první pohled zřejmé, že mezi středovým a obvodovým úhlem je určitý vztah. => **Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku. ([9], s. 67)**

Obr. 122

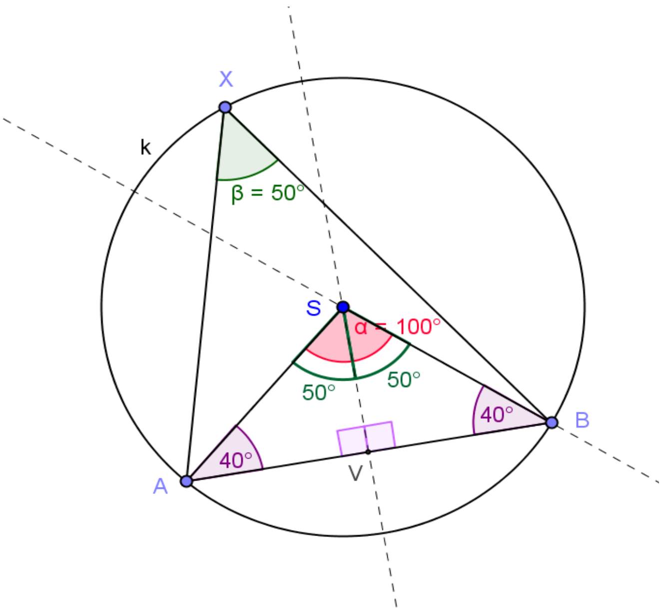
Nyní si tyto nově nabyté vědomosti vyzkoušíme v praxi. Tím se žáci ujistí, že látce rozumí, jsou ji schopni aplikovat na konkrétní příklady a upevní si nově získané znalosti.

4.7.2. *Řešené příklady na úhly v kružnici*

Příklad č. 1:

Jak narýsovat kružnici (oblouk kružnice), z níž je úsečka AB vidět pod úhlem 50°?

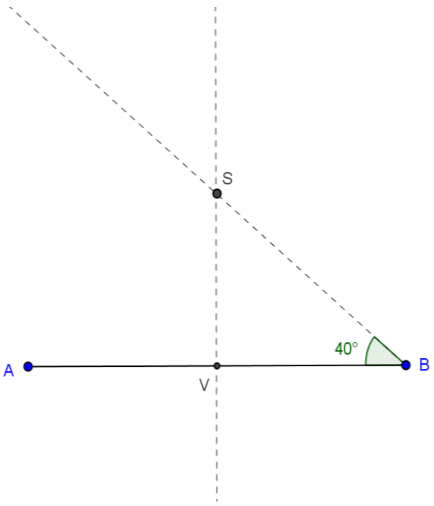
Rozbor:



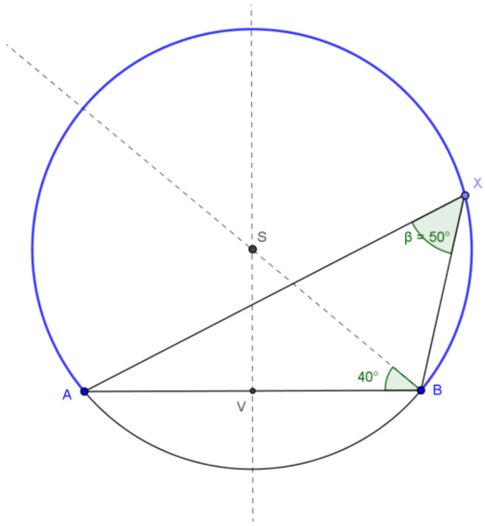
Obr. 123

Abychom sestrojili oblouk kružnice, musíme sestrojit celou kružnici k, na které leží. Pro sestrojení hledané kružnice potřebujeme střed kružnice S a poloměr r. Z náčrtku lze vyčíst, že střed kružnice S sestrojíme jako průnik dvou množin bodů dané vlastnosti. První množinou je osa úsečky AB, protože víme, že střed kružnice má stejnou vzdálenost jak od bodu A, tak od bodu B. Druhou podmínkou je to, že střed kružnice leží na rameni úhlu ABS, tedy rameni BS. Pro konstrukci této polopřímky potřebujeme znát velikost úhlu trojúhelníku VBS u vrcholu B. Tu jednoduše vypočítáme na základě znalosti úhlů a součtu velikostí úhlů v trojúhelníku. V našem případě má úhel u vrcholu B velikost $40°$ ($180° - 90° - 50°$ nebo jen $90° - 50°$). Tím jsme získali střed S kružnice k, ze které je vidět úsečka AB pod úhlem $50°$. Poloměr r je dán vzdáleností středu kružnice a kteréhokoliv z krajních bodů úsečky AB.

Konstrukce:



Obr. 124



Obr. 125

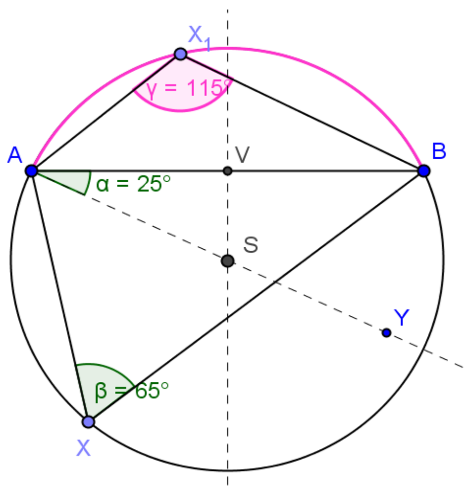
Zkouška:

Jak je zřejmé z konstrukce, oblouk se nám podařilo sestrojit. Pro ověření našeho postupu jsme úlohu sestrojili v dynamickém matematickém programu GeoGebra. Výslednou množinou je modře zvýrazněná část kružnice.

<u>Příklad č. 2:</u>

Sestrojte množinu všech bodů, z nichž je úsečka AB o délce 4 cm vidět pod úhlem 115°.

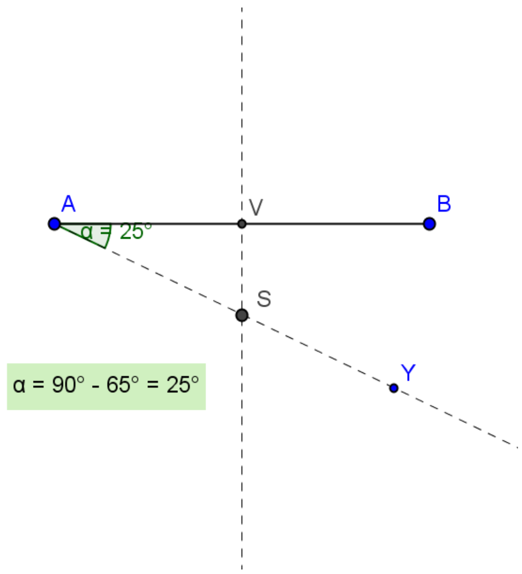
Rozbor:



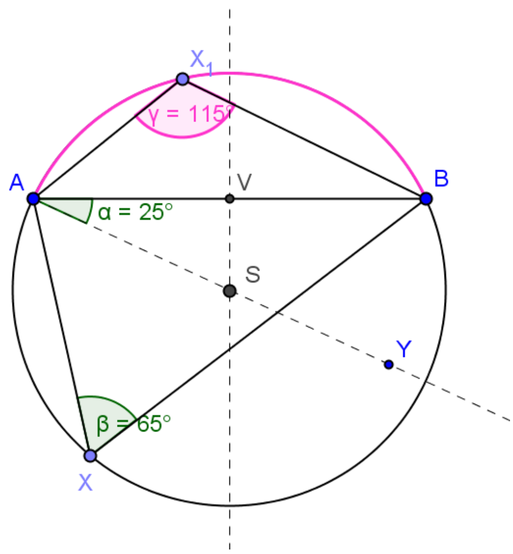
Obr. 126

U tohoto příkladu může žáky zarazit fakt, že mají sestrojit množinu bodů, která je vidět pod úhlem větším než $90°$. Ale ve skutečnosti to na postupu příliš věcí nemění. Postupujeme stejně, jako bychom chtěli sestrojit množinu bodů, z nichž je úsečka vidět pod úhlem $180° - \alpha$ (v našem případě $180° - 115° = 65°$). Následná konstrukce je totožná s tou v předchozím příkladu. Jediný rozdíl je v závěrečné části, kdy si musíme dát pozor na to, jaký oblouk vyznačíme jako výslednou množinu bodů. Jak je vidět z rozboru, když je úsečka vidět pod úhlem větším než $90°$, výslednou množinou je oblouk opačný tomu v předchozí úloze.

Konstrukce:



Obr. 127



Obr. 128

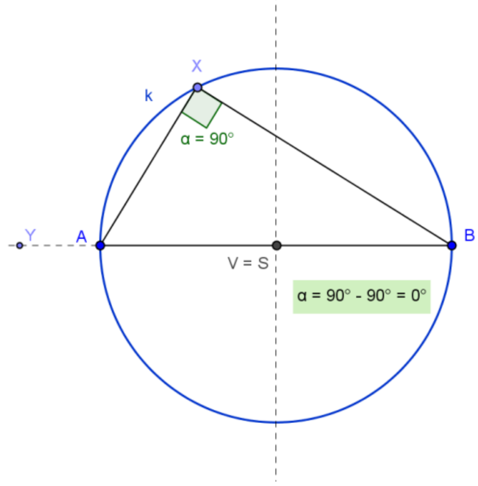
Zkouška:

Modelací příkladu v programu GeoGebra jsme potvrdili správnost našeho postupu konstrukce. Výslednou množinou je menší z oblouků kružnice, který je omezen hraničními body A, B.

<u>Příklad č. 3:</u>

Sestrojte množinu bodů, z nichž je úsečka vidět pod úhlem 90°?

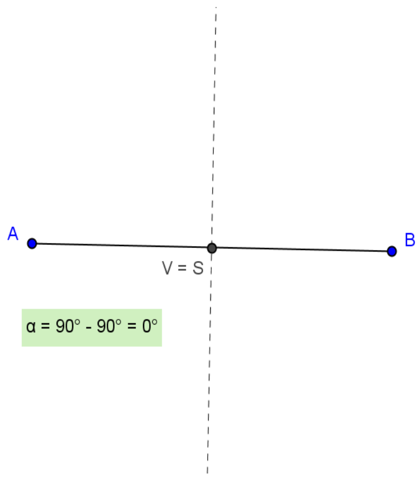
Rozbor:



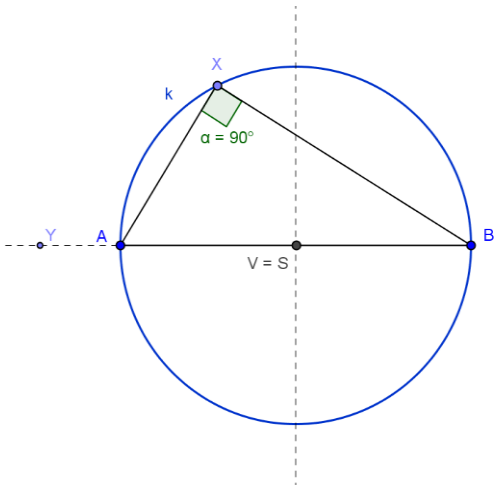
Obr. 129

Postup konstrukce odpovídá předchozím příkladům. Specifický je tento příklad pouze tím, že úhel α trojúhelníku ABY má velikost $0°$ a tak je polopřímka BY totožná s přímkou AB. Tento jev způsobí to, že se střed S kružnice k, zobrazí na střed úsečky AB. Výslednou množinou bodů, z nichž je úsečka vidět pod úhlem 90° je tzv. Thaletova kružnice, kterou jsme si přiblížili v předchozí kapitole.

Konstrukce:



Obr. 130



Obr. 131

Zkouška:

Z konstrukce je zřejmé, že ať bod X umístíme na kružnici kamkoliv, úhel AXB bude vždy $90°$ (viz definice Thaletovy kružnice). Úloha má tedy jedno řešení, a to Thaletovu kružnici $\tau(S; r = |AS|)$.

5. Nadstandartní úlohy na množiny bodů daných vlastností

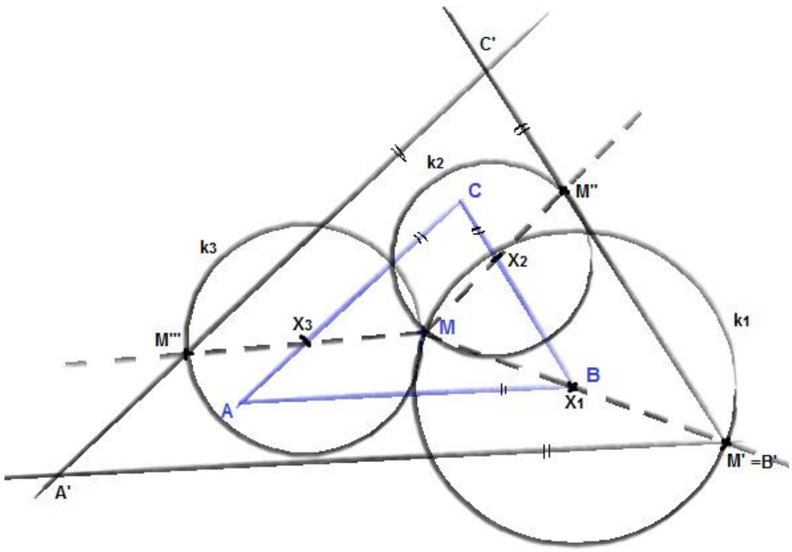
Doufám, že se v každé třídě najdou žáci, kterým budou výše popsané příklady připadat příliš jednoduché a budou si chtít nad geometrií více zapřemýšlet. Pro tyto, ale i pro ostatní žáky, například jako inspiraci k dalšímu vzdělávání se, zařazuji tuto kapitolu. Pojmenování nadstandardní je příznačné, jsou zde totiž uvedeny ne příliš tradiční příklady, které často obtížností přesahují až do střední školy. Jsou ale samozřejmě stále zaměřeny na řešení množin bodů daných vlastností.

5.1.Řešené příklady

<u>Příklad č. 1:</u>

Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Po obvodu trojúhelníku ABC se „pohybuje“ bod X. Určete množinu všech bodů M', které jsou středově souměrné s bodem M podle středu X. ([8], s. 67)

Rozbor:



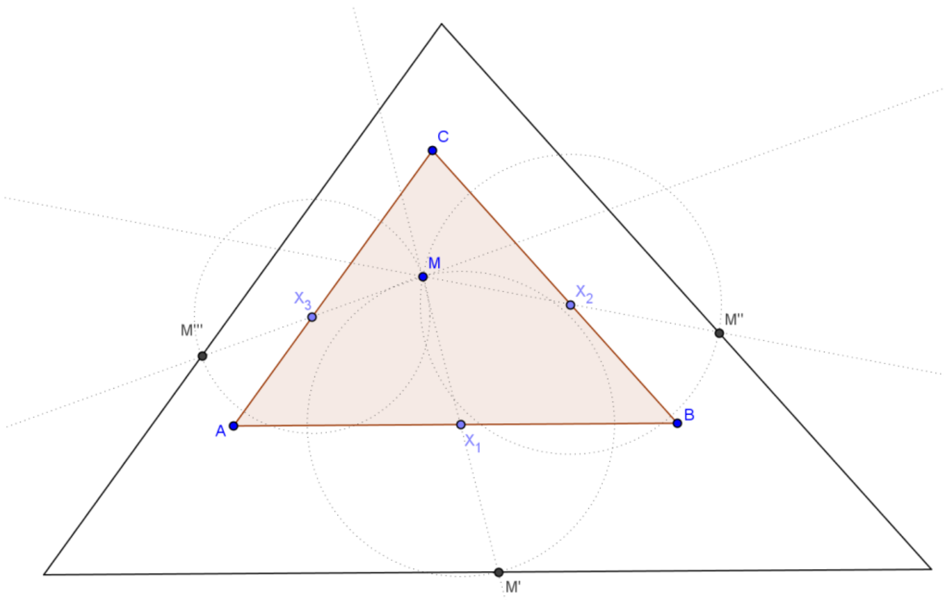
Obr. 132

Žák si udělá náčrtek příkladu. Než začne řešit samotnou úlohu, měli bychom si s ním zopakovat pojem středová souměrnost a její vlastnosti. Především fakt, že odpovídající body X, X' leží na přímce procházející středem souměrnosti a jsou od něj stejně vzdáleny. Na základě těchto informací už je žák schopen úlohu bez problémů vyřešit.

Dle zadání si žák zvolí libovolný bod X_1 na trojúhelníku ABC. Aby lépe zkonstruoval výslednou množinu, zvolí si ještě dva další body X_2, X_3, splňující počáteční podmínku (viz obr. č.). Následně sestrojí přímky X_1M, X_2M a X_3M. Protože hledané body M' mají být středově souměrné podle bodu X_1, sestrojí žák kružnici $k_1(X_1; r = |MX_1|)$. Jako průsečík kružnice k_1 a přímky X_1M vznikne hledaný bod M'. Stejně žák sestrojí kružnice k_2, k_3 pro body X_2, X_3. Získá tím další dva body výsledné množiny. Nyní už by žák měl být schopný odhadnout řešení. Z náčrtku je zřejmé, že žák sestrojí rovnoběžky se stranami původního trojúhelníka, které prochází nalezenými body M', M'', M'''.

Žák předpokládá, že výslednou množinou bodů je trojúhelník $A'B'C'$.

Konstrukce:



Obr. 133

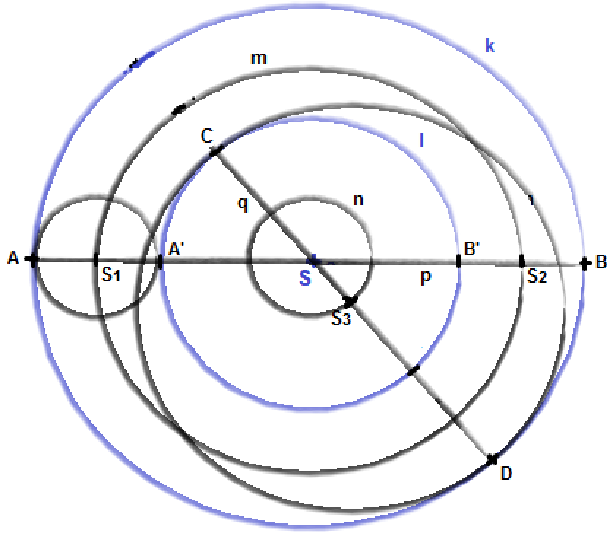
Zkouška:

Žákův postup konstrukce je správný. Je ale opravdu zajímavé namodelovat si tuto úlohu v dynamické matematickém programu GeoGebra. Je zde názorně vidět, jak se mění poloha výsledné množiny v závislosti na poloze bodu M. Žáci si například mohou vyzkoušet, jak by úloha vypadala, kdyby tento bod ležel vně trojúhelníku ABC.

Příklad č. 2:

Najděte množinu všech středů kružnic, které mají společný dotyk se soustřednými kružnicemi k a l. Proveďte náčrtek. ([8], s. 66)

Rozbor:



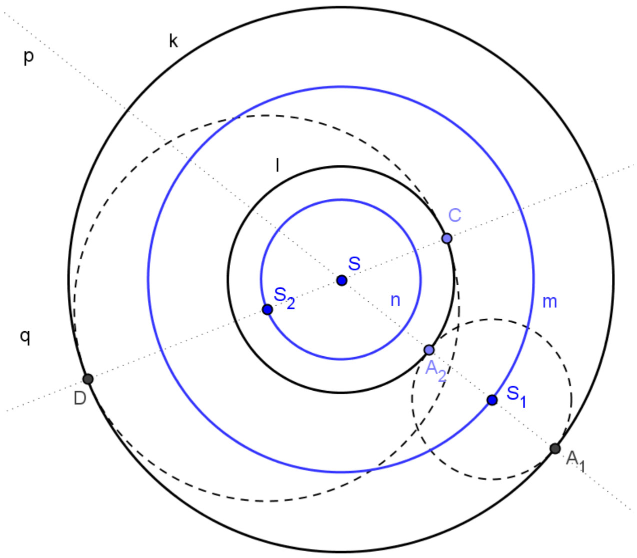
Obr. 134

Jsou dány dvě soustředné kružnice k,l. Úkolem je najít množinu všech středů kružnic, které mají společný dotyk s těmito kružnicemi. Žák si udělá náčrtek a zjistí, že výsledkem bude sjednocení dvou množin bodů.

První množinu bodů budou představovat středy kružnic, ležících v mezikruží zadaných kružnic. Žák začne konstrukcí přímky p, procházející bodem S, která protne dané kružnice ve čtyřech bodech A, A', B, B'. Velikost úsečky A, A' odpovídá šířce mezikruží. A právě tady se budou nacházet hledané kružnice. Proto žák zkonstruuje středy úseček A, A' a BB'. S_1, S_2 jsou prvky hledané množiny a podle nich už je žák schopný narýsovat první množinu – kružnici $m(S; r = |SS_1|)$.

Toto je ale jen polovina řešení. Kružnici, která má společný dotyk se dvěma zadanými kružnicemi k,l, lze umístit i jinam. Proto žák sestrojí přímku q, která prochází středem S. Ta protne kružnice ve dvou bodech – C, D. Tyto body představují krajní body hledané kružnice. Proto sestrojí střed úsečky CD – bod S_3. Druhou množinou je kružnice $n(S; r = |SS_3|)$

Konstrukce:



Obr. 135

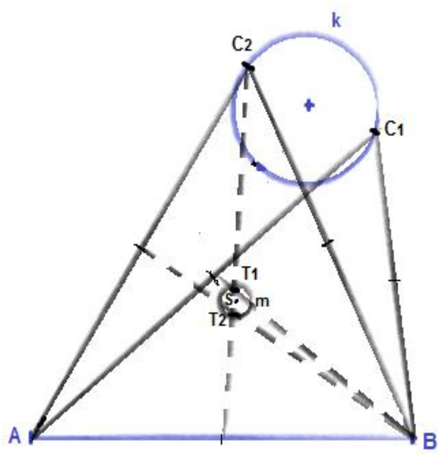
Zkouška:

Konstrukce ověřila, že řešením jsou dvě kružnice m,n. Jejich poloha je závislá na poloměrech daných kružnic k,l. Pro děti je nejlepší modelace v dynamickém matematickém softwaru, kde si s parametry úlohy mohou libovolně hrát a vyzkoušet tak různé polohy výsledné možiny.

<u>Příklad č. 3:</u>

Určete množinu všech těžišť trojúhelníku ABC, ve kterém jsou dány body A,B a bodem C pohybujeme po kružnici k.

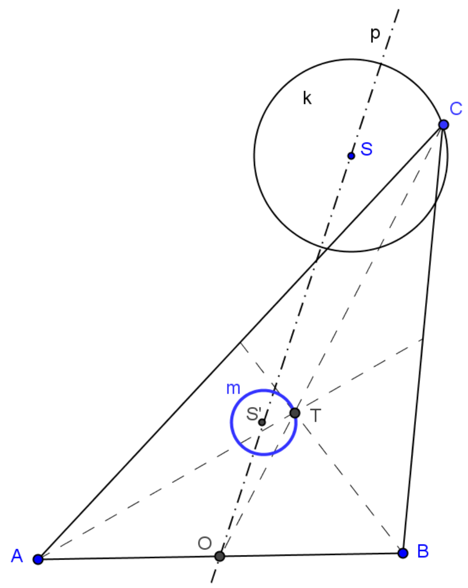
Rozbor:



Obr. 136

Žák opět začne náčrtkem. Načrtne si známou úsečku AB a kružnici k. Protože ze zadání ví, že třetí bod trojúhelníku náleží kružnici k, zvolí si libovolně bod, který tuto podmínku splňuje. Nyní je schopný sestrojit trojúhelník ABC_1. Následně sestrojí jeho těžnice, jejichž průsečíkem je hledaný bod T_1. Z jednoho bodu by žák nejspíš výslednou množinu neodhadl, proto si zvolí ještě druhý bod C_2. Tento bod je nejlepší umístit tak, aby úsečka C_1C_2 byla průměrem kružnice k. Tím žák získá trojúhelník ABC_2. Opět zkonstruuje jeho těžnice a výsedkem bude druhé těžiště – T_2. Nyní žák zná dva body hledané množiny. A mohl by už odhadnout, že řešením bude kružnice. Tuto kružnici žák sestrojí tím, že narýsuje úsečku T_1T_2, její střed a nakonec i samotnou kružnici $m\left(S; r = \frac{1}{2}\left|T_1T_2\right|\right)$.

Konstrukce:



Obr. 137

Zkouška:

Pro tento příklad je úplně ideální využít program GeoGebra, protože zvoleným bodem C lze po kružnici k neomezeně hýbat. Program je natolik chytrý, že nám sám určí hledanou množinu těžišť. Zajímavé je také to že zadaná a hledaná kružnice jsou stejnolehlé, se středem stejnolehlosti v bodě O, který spolu se středy S, S' těchto kružnic leží na přímce p.

Pozn.: Pomocí experimentální fáze v programu GeoGebra vytvoříme úvahu , jak sestrojit střed získané množiny bodů m. Nejprve sestrojíme střed stejnolehlosti O, který představuje průsečík úsečky AB a přímky CT. Pro středy dané, hledané kružnice a střed stejnolehlosti platí, že leží na jedné přímce p. Druhá podmínka vyplývá z definice stejnolehlosti a to: $CS \| TS'$, tím dostaneme hledaný střed S'.

Důkaz:

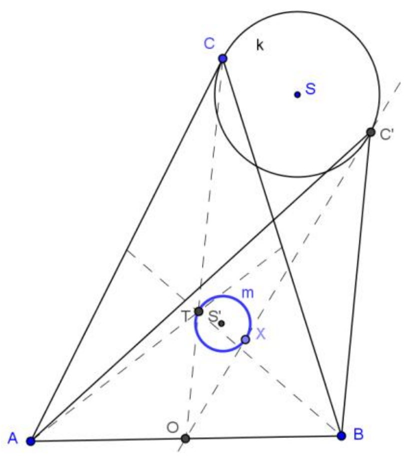
V důkazu musíme ověřit, že pro množinu M bodů dané vlastnosti a množinu bodů útvaru U, platí rovnost $M = U$.

1) Musíme zjistit, jestli je každý bod kružnice m, těžištěm některého z uvažovaných trojúhelníků ABC.

Zvolíme libovolný bod X na kružnici m. Sestrojíme přímku OX, protože těžnice t_c musí procházet středem úsečky AB. Tato přímka protne zadanou kružnici k, tím dostaneme bod C' hledaného trojúhelníku ABC'. Pro bod X platí: $|CX| = 2|OX|$, což potvrzuje, že bod X, ležící na kružnici m je těžištěm trojúhelníku ABC'. To znamená, že každý bod kružnice m je prvkem hledané množiny bodů.

2) Druhá podmínka zní, že pokud je T těžištěm trojúhelníku ABC, potom leží na kružnici m.

Zvolíme libovolný bod C na kružnici m. Sestrojíme jemu odpovídající trojúhelník ABC. Jeho těžiště T leží v $\frac{1}{3}$ těžnice, proto je prvkem hledané množiny bodů m.

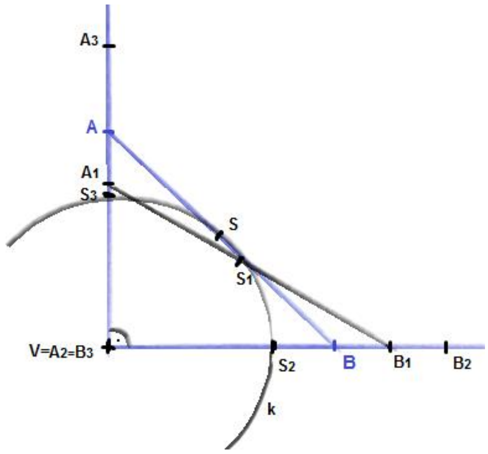


Obr. 138

<u>Příklad č. 4:</u>

Dveře autobusu, úsečka AB, se pohybují po dvou k sobě kolmých přímkách. Určete množinu středů všech úseček AB.

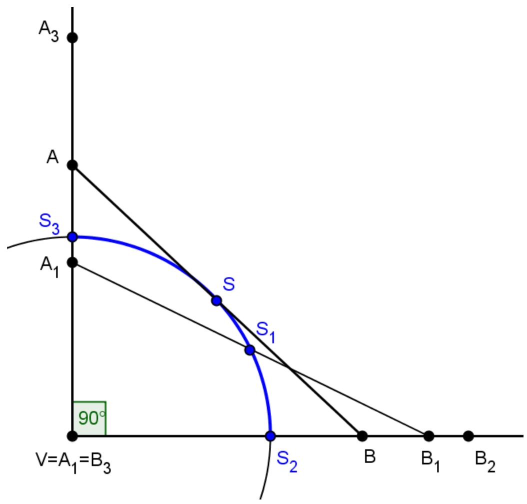
Rozbor:



Obr. 139

Žák začne náčrtkem. Barevně si v něm vyznačí známé geometrické útvary. Konstrukci začne tím, že si postupně vyznačí několik bodů hledané množiny. Jedním z nich bude samozřejmě střed zadané úsečky AB. Posunutím úsečky do krajních poloh (splynutí s jednou nebo druhou zadanou přímkou), žák dostane dva další středy S_2, S_3. Podle těchto bodů by už mohl odhadnout výslednou množinu, pokud ne, posune úsečku AB ještě do jiné polohy a sestrojí bod S_1. Nyní už je řešení zřejmé, je jím část kružnice $k\left(V; r = \frac{1}{2}|AB|\right)$, přesněji jedna čtvrtina této kružnice.

Konstrukce:



Obr. 140

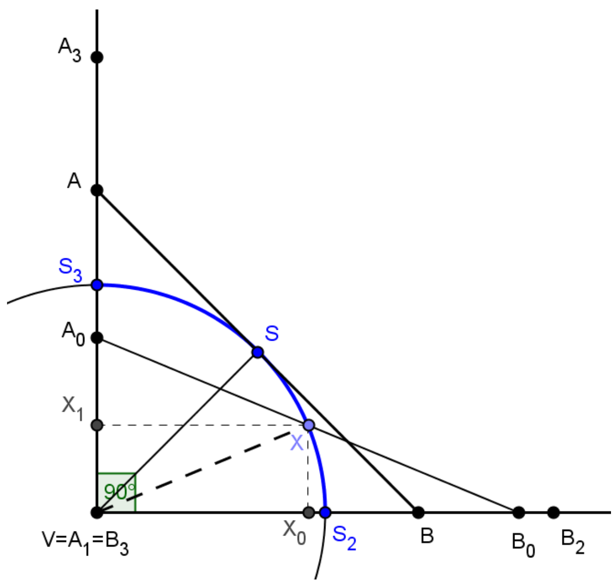
Zkouška:

Opět jsme úlohu namodelovali v dynamickém matematickém programu GeoGebra, tím jsme ověřili správný postup konstrukce. Nejlepší je ale, nechat děti, aby si konstrukci úlohy v programu vyzkoušely samy. Mohou tak měnit velikost dané úsečky AB a pozorovat, jak se výsledná množina bodů mění.

Důkaz:

1) „Musíme zjistit, jestli je každý bod oblouku S_2S_3 středem některé z uvažovaných úseček AB, které představují dveře autobusu.

Zvolíme si libovolný bod X, odlišný od bodů S_2, S_3 na oblouku na S_2S_3. Patu kolmice z bodu X na polopřímku VB označíme X_0 a patu z X na VA označíme X_1. Úsečka XB_0 souměrně sdružená s XV podle osy XX_0 a úsečka XA_0 souměrně sdružená s úsečkou XV podle osy XX_1 jsou navzájem souměrně sdružené podle středu X a platí tedy: $|XB_0| + |XA_0| = 2|XV| = |AB|$ a body X, A_0, B_0 leží na jedné přímce. Bod X je středem úsečky $A_0B_0 = AB$. To znamená, že každý bod oblouku S_2S_3 je prvkem hledané množiny bodů.“ ([4], s. 48,49)



Obr. 141

2) „Ještě musíme dokázat druhou podmínku a to, že pokud je S středem úsečky AB, potom leží na oblouku S_2S_3.

Pokud úsečka AB leží na rameni VA nebo VB, potom středy S_3, S_2 leží na již zmíněném oblouku. Jestliže AB je jedna ze zmíněných úseček a neleží ani na jednom rameni VA, VB, potom vytváří pravoúhlý trojúhelník AVB. Bod V leží na kružnici nad průměrem AB, a proto $|SV| = |SA| = |SB| = \frac{1}{2}|AB|$. Bod S tedy leží na kružnici $k\left(V; r = \frac{1}{2}|AB|\right)$. Úsečka AB náleží úhlu AVB, proto bod S leží na oblouku S_2S_3.

Tímto jsme ověřili, že hledanou množinou M středů S úseček AB je oblouk S_2S_3 kružnice $k\left(V; r = \frac{1}{2}|AB|\right)$.“ ([4], s. 49)

6. Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit pomocný materiál pro učitele na 2. stupni ZŠ, ve kterém by byly shrnuty zajímavé úlohy na množiny bodů dané vlastnosti. Zároveň jsem chtěla učitelům představit geometrický program GeoGebra a s ním spojené možnosti jiné, zábavnější formy výuky. Proto jsou všechny úlohy řešené jak klasickou formou pomocí pravítka a kružítka, tak použitím právě tohoto počítačového programu.

Pracovala jsem s učebnicemi a pracovními sešity základních škol a gymnázií (viz literatura). Snažila jsem se z nich vybrat úlohy, o kterých si myslím, že budou dětem přínosné a pomohou jim poznat možnosti využití znalostí geometrie v reálném životě.

Těžiště své práce vidím ale ve zpracování všech vybraných úloh v programu GeoGebra. Osobně si myslím, že učitelé, i přesto, že přístup k počítačům mají, je málo využívají. Nevím, jestli je to omezenou dostupností matematických programů ve školách nebo jen tím, že většina učitelů zůstává věrná osvědčené klasické formě výuky, ale myslím, že by se to mělo změnit. A právě k tomu jsem se snažila učitele touto prací inspirovat. Mohou se sami přesvědčit o tom, jak velký rozdíl je mezi řešením úloh klasicky a pomocí geometrického programu. Důvod, proč jsem vybrala právě program GeoGebra je ten, že je volně stažitelný a tak škola nemusí do této výuky nic investovat.

Za úspěch bych považovala to, kdyby si alespoň jeden učitel mou práci přečetl a ta by ho natolik zaujala a motivovala, aby opravdu změnil svůj přístup a zařadil do výuky i práci s počítačem. Myslím, že to může být přínosné jak pro učitele, tak především pro žáky, kteří když si vytvoří kladný vztah k matematice a vzdělávání obecně, bude pro ně mnohem jednoduší jak následné studium, tak i uplatnění se v budoucím životě.

7. Literatura

[1] Běloun, F. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu,* Praha: Prométheus, 8. vydání 1998, ISBN: 80-7196-104-3

[2] Binterová, H. a kol.: *Matematika 7. Ročník Geometrie PS,* Praha: Fraus 2008, ISBN: 978-80-7238-682-6

[3] Boček, L.: *Základy planimetrie,* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1. vydání 1986

[4] Cuninka, A., Križalkovič, K., Šedivý O.: *500 Riešených úloh z geometrie,* Bratislava: Alfa, 2. vydání 1972

[5] Kočí, L., Kočí, S.: *Matematika 6. ročník - 2. díl – Pracovní sešit (podle nových osnov),* Nový Malín: TV Graphics

[6] Kočí, L., Kočí, S.: *Matematika 6. ročník - 3. díl – Pracovní sešit (podle nových osnov),* Nový Malín: TV Graphics

[7] Kočí, L., Kočí, S.: *Matematika 8. Ročník - 3. díl – Pracovní sešit (podle nových osnov),* Nový Malín: TV Graphics

[8] Kočí, L., Kočí, S.: *Matematika 9. ročník - 1. díl – Pracovní sešit (podle nových osnov),* Nový Malín: TV Graphics

[9] Lávička, M.: *Geometrie 1 - Základy geometrie v rovině,* Plzeň: Západočeská univerzita 2002, ISBN: 80-7082-861-7

[10] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Matematika 1 pro 6. ročník základní školy – Opakování z aritmetiky a geometrie,* Praha: Prométheus, 2. vydání 1997. ISBN: 80-7196-142-6

[11] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Matematika 3 pro 6. ročník základní školy – Úhel, trojúhelník, osová souměrnost, krychle a kvádr,* Praha: Prométheus, 2. vydání 1997. ISBN : 807196-144-2

[12] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Matematika 3 pro 8. ročník základní školy - Kruh, kružnice, válec, konstrukční úlohy,* Praha: Prométheus, 1. vydání 1997. ISBN 80-7196-183-3.

[13] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Základní geometrické útvary,* Praha: Prométheus, 1. vydání 1996, ISBN: 80-7196-018-7

[14] Šedivý, O.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky – Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia,* Nitra: Garmond 2001, ISBN: 80-8050-417-2

[15] [online]. [cit. 2013-03-10]. Dostupné z WWW: <http://www.londynska.cz/iphoto/thaletovka/Thaletova_veta_a_tecna.doc/>

[16] *GeoGebra 3.0 – Czech.* [online]. [cit. 2013-03-08]. Dostupné z WWW: <http://www.geogebra.org/help/docucz/index.html/>

.