Posudek vedoucího diplomové práce

Aleš Horáček: **Diofantické rovnice**

Cílem diplomové práce Aleše Horáčka bylo shrnout základní poznatky o vybraných typech diofantických rovnic, diskutovat podmínky řešitelnosti, ukázat možné způsoby jejich řešení a vše ilustrovat vhodně zvolenými příklady.

Diplomovou práci si autor rozdělil na dvě části, teoretickou část a sbírku úloh.
Teoretická část práce má dvě kapitoly.První kapitola obsahuje základní pojmy z teorie dělitelnosti celých čísel a teorie řetězových zlomků.
Jádrem práce je druhá kapitola, ve které se autor věnuje vybraným typům diofantických rovnic - lineárním rovnicím o dvou a více neznámých, některým rovnicím vyšších řádů, pythagorejským trojúhelníkům a nakonec Pellovým rovnicím. Popisuje zde podmínky řešitelnosti, způsoby řešení těchto rovnic a případně uvádí ukázkové úlohy. Je zřejmé, že autora nejvíce zaujaly pythagorejské trojúhelníky a zajímavosti okolo nich.
Poslední kapitolu práce tvoří sbírka řešených příkladů, které ilustrují teorii uvedenou v prvních dvou kapitolách. Autor do své práce zařadil 23 příkladů. Řada příkladů je sice převzata i s řešením, ale ostatní úlohy řešil autor sám.

Práce je vysázena systémem LaTeXa má dobrou grafickou úroveň. Autor pravidelně konzultoval s vedoucí diplomové práce, s uvedenou odbornou literaturou pracoval iniciativně a samostatně.

V práci se objevují některé spíše formální či formulační nepřesnosti, které nemají na její kvalitu příliš velký vliv. Např. na straně:

$8_8, 31^6$	zřejmě by mělo být: pythagorejským trojúhelníkům, primitivní pythagorejský trojúhelník
9_8	má být: $a \mid b \Rightarrow \lvert a\rvert \leq \lvert b\rvert$
9_2	má být: $b,\ b \neq 0$, existuje ...
13_9	má být: $(\forall\, a, b \in \mathbb{N})\ p \mid ab \Rightarrow p \mid a\ \vee\ p \mid b$
14^8	asi by mělo být: kde $m \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}_0$, ...
14_6	asi vhodněji: Řetězový zlomek $r_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_n]$, resp. $r_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots]$, nazýváme zbytkem konečného, resp. nekonečného, řetězového zlomku
$16^{17}, 16_8$	má být: $a_1 = [x],\ x_1 = \frac{1}{\{x\}},\ x_2 = \frac{1}{\{x_1\}}$
17^{14}	zřejmě by mělo být: $a_1 \in \mathbb{Z}$
18^2	zřejmě by mělo pouze být: existují-li taková přirozená čísla $s, h, h \neq 0$, že pro ...
$18_3, 57^{12}$	má být: $\sqrt{N} = [a_1; \overline{a_2, a_3, \ldots, a_3, a_2, 2a_1}]$
18_1	má být: části $a_2, a_3, \ldots, a_3, a_2$, po které ...
19^3	zřejmě by mělo být: ... nazývají diofantické rovnice
19^9	možná by bylo vhodnější psát: $a, b, c \in \mathbb{Z},\ a \neq 0, b \neq 0$
20^9	asi přesněji: obě strany předcházející rovnosti vynásobíme ...
21_{11}	asi přesněji (podle Věty 2.2): ... jedno řešení (x_1, y_1) rovnice ...
$21_{9,8}$	zřejmě by mělo být: Euklidovým algoritmem určíme (a, b) a nalezneme celá čísla x_0, y_0 taková, že $ax_0 + by_0 = (a, b)$. Vyjdeme ...
22_{12}	má být: $y_1 = y_0 q$,
23_4	má být: rovnice (2.1)
25_{20}	má být: ..vyššího stupně ...
25_6	má být: ... $a \neq 0\ \vee\ c \neq 0\ \vee\ e \neq 0$ ...
26^{19}	zřejmě má být: ...jehož rozklad na celočíselné činitele známe
27_{18}	má být: ... demonstrující popsanou metodu
$30_{2,1}$	kvůli srozumitelnosti bylo možná vhodnější psát: Pythagorejský trojúhelník (x, y, z) se nazývá primitivní, právě když jsou čísla x, y, z nesoudělná.
$34, 35$	zřejmě by se mělo mluvit o Fibonacciho posloupnosti
35^{20}	má být: Tedy $O \mid 2S$ ...
$36^{2,3}$	má být: $x^2 - Ny^2 = -1$, kde ...

$36^{5,6}$	má být: $x^2 - Ny^2 = 1$. Pro libovolné ...
36^{16}	chybí odkaz na zdroj
36_6	má být: ... první y takové, že $1 + Ny_0$ je ...
37^{11}	mělo by např. být: Všechna řešení rovnice (2.30) v kladných celých číslech dostaneme ...
37^{13}	má být pouze: $k \in \mathbb{N}$, kde ...
38_{13}	má být: Na rozdíl od ...
$38_{18,1}$	má být: Dalšími přirozenými řešeními ... ...
$40^{13}, 40_2$	zřejmě by mělo být: ... kde k' je libovolné celé číslo
40_3	chybí vyjádření čísla y' ve tvaru $y' = 20 - 93k'$
$42_3, 43_{12}$	asi přesněji: ... v následující tabulce: ..., resp. ... následující schema: ...
43_9	má být: V prvním kroku ...
52	v Příkladu 3.18 má místo $q_1, \ldots, q_5$ být $a_1, \ldots, a_5$
$53_4, 57_7$	má být: ... je nejmenším přirozeným řešením ...
54_6	má být: Všechna další řešení rovnice ...
56_9	asi vhodněji: ... neexistuje žádný pythagorejský trojúhelník, jehož obsah ...
58	měl by být jednotný zápis jmen autorů.

Dále:

- Za Definicí 1.3 a Definicí 1.5 (str.11) by ještě mohla být uvedena tvrzení: *Největší společný dělitel celých čísel $a_1, \ldots, a_n$ je dělitelný všemi ostatními společnými děliteli čísel $a_1, \ldots, a_n$, resp. nejmenší společný násobek celých čísel $a_1, \ldots, a_n$ dělí všechny ostatní společné násobky celých čísel celých čísel $a_1, \ldots, a_n$* (viz důkaz tvrzení (1.3) na str. 12).

- Z uvedených úvah není zřejmé, zda lze rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ řešit také v celých číslech.

- V důkazu Věty 2.9 není zřejmé, proč jsou čísla x, y nesoudělná (str. 31_{21}).

- Poznámka 2.9 by měla být již za Větou 2.15 (str. 38).

- Ve Větě 2.16 by mělo být: Je-li n liché, pak čitatel a jmenovatel každého $(2k-1)n$-tého sblíženého zlomku ... (str. 38_6).

- Za Větou 2.16 by mohla následovat Poznámka: *Nejmenší přirozené řešení v případě lichého čísla n je dáno $2n$-tým sblíženým zlomkem (pro $k = 1$), tj. $(x_0, y_0) = (P_n, Q_n)$. Dalšími přirozenými řešeními jsou pak dvojice $(P_{3n}, Q_{3n}), (P_{5n}, Q_{5n}), \ldots$* (str.38).

- Na konci řešení příkladů 3.19 a 3.20 by mohl být uveden také odkaz na Větu 2.11. V zadání obou příkladů by mělo být uvedeno, v jakém oboru se dané rovnice mají řešit. V případě řešení v oboru celých čísel by mohl být na konci řešení uveden ještě odkaz na poznámku na str. $36^{8,9}$.

U obhajoby by autor mohl ukázat řešení některého z příkladů 3.15, 3.21 pomocí Věty 2.9.

Diplomová práce Aleše Hrdličky se mi i přes uvedené připomínky líbila a myslím si, že zadané cíle splnila. Svým rozsahem, úrovní a hloubkou zpracování odpovídá předložená práce požadavkům kladeným na diplomovou práci.

Práci doporučuji k obhajobě a hodnotím známkou ....

V Hradci Králové, 8.6.2023 RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.