

Aleš Horáček: **Diofantické rovnice**

Cílem diplomové práce Aleše Horáčka bylo shrnout základní poznatky o vybraných typech diofantických rovnic, diskutovat podmínky řešitelnosti, ukázat možné způsoby jejich řešení a vše ilustrovat vhodně zvolenými příklady.

Diplomovou práci si autor rozdělil na dvě části, teoretickou část a sbírku úloh.

Teoretická část práce má dvě kapitoly. První kapitola obsahuje základní pojmy z teorie dělitelnosti celých čísel a teorie řetězových zlomků.

Jádrem práce je druhá kapitola, ve které se autor věnuje vybraným typům diofantických rovnic - lineárním rovnicím o dvou a více neznámých, některým rovnicím vyšších řádů, pythagorejským trojúhelníkům a nakonec Pellovým rovnicím. Popisuje zde podmínky řešitelnosti, způsoby řešení těchto rovnic a případně uvádí ukázkové úlohy. Je zřejmé, že autora nejvíce zaujaly pythagorejské trojúhelníky a zajímavosti okolo nich. Poslední kapitolu práce tvoří sbírka řešených příkladů, které ilustrují teorii uvedenou v prvních dvou kapitolách. Autor do své práce zařadil 23 příkladů. Řada příkladů je sice převzata i s řešením, ale ostatní úlohy řešil autor sám.

Práce je vysázena systémem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X a má dobrou grafickou úroveň. Autor pravidelně konzultoval s vedoucí diplomové práce, s uvedenou odbornou literaturou pracoval iniciativně a samostatně.

V práci se objevují některé spíše formální či formulační nepřesnosti, které nemají na její kvalitu příliš velký vliv. Např. na straně:

- 8<sub>8</sub>, 31<sup>6</sup> zřejmě by mělo být: pythagorejským trojúhelníkům, primitivní pythagorejský trojúhelník
- 9<sub>8</sub> má být:  $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$
- 9<sub>2</sub> má být:  $b, b \neq 0$ , existuje ...
- 13<sub>9</sub> má být:  $(\forall a, b \in \mathbb{N}) p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$
- 14<sup>8</sup> asi by mělo být: kde  $m \in \mathbb{N}$  a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}_0, \dots$
- 14<sub>6</sub> asi vhodněji: Řetězový zlomek  $r_k = [a_k; a_{k+1}, \dots, a_n]$ , resp.  $r_k = [a_k; a_{k+1}, \dots]$ , nazýváme zbytkem konečného, resp. nekonečného, řetězového zlomku
- 16<sup>17</sup>, 16<sub>8</sub> má být:  $a_1 = [x], x_1 = \frac{1}{\{x\}}, x_2 = \frac{1}{\{x_1\}}$
- 17<sup>14</sup> zřejmě by mělo být:  $a_1 \in \mathbb{Z}$
- 18<sup>2</sup> zřejmě by mělo pouze být: existují-li taková přirozená čísla  $s, h, h \neq 0$ , že pro ...
- 18<sub>3</sub>, 57<sup>12</sup> má být:  $\sqrt{N} = [a_1; \overline{a_2, a_3, \dots, a_3, a_2, 2a_1}]$
- 18<sub>1</sub> má být: části  $a_2, a_3, \dots, a_3, a_2$ , po které ...
- 19<sup>3</sup> zřejmě by mělo být: ... nazývají diofantické rovnice
- 19<sup>9</sup> možná by bylo vhodnější psát:  $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$
- 20<sup>9</sup> asi přesněji: obě strany předcházející rovnosti vynásobíme ...
- 21<sub>11</sub> asi přesněji (podle Věty 2.2): ... jedno řešení  $(x_1, y_1)$  rovnice ...
- 21<sub>9,8</sub> zřejmě by mělo být: Euklidovým algoritmem určíme  $(a, b)$  a nalezneme celá čísla  $x_0, y_0$  taková, že  $ax_0 + by_0 = (a, b)$ . Vyjdeme ...
- 22<sub>12</sub> má být:  $y_1 = y_0q$ ,
- 23<sub>4</sub> má být: rovnice (2.1)
- 25<sub>20</sub> má být: ..vyššího stupně ...
- 25<sub>6</sub> má být: ...  $a \neq 0 \vee c \neq 0 \vee e \neq 0$  ...
- 26<sup>19</sup> zřejmě má být: ...jehož rozklad na celočíselné činitele známe
- 27<sub>18</sub> má být: ... demonstrující popsanou metodu
- 30<sub>2,1</sub> kvůli srozumitelnosti bylo možná vhodnější psát: Pythagorejský trojúhelník  $(x, y, z)$  se nazývá primitivní, právě když jsou čísla  $x, y, z$  nesoudělná.
- 34, 35 zřejmě by se mělo mluvit o Fibonacciho posloupnosti
- 35<sup>20</sup> má být: Tedy  $O \mid 2S$  ...
- 36<sup>2,3</sup> má být:  $x^2 - Ny^2 = -1$ , kde ...

36 <sup>5,6</sup>	má být: $x^2 - Ny^2 = 1$ . Pro libovolné ...
36 <sup>16</sup>	chybí odkaz na zdroj
36 <sub>6</sub>	má být: ... první $y$ takové, že $1 + Ny_0$ je ...
37 <sup>11</sup>	mělo by např. být: Všechna řešení rovnice (2.30) v kladných celých číslech dostaneme ...
37 <sup>13</sup>	má být pouze: $k \in \mathbb{N}$ , kde ...
38 <sub>13</sub>	má být: Na rozdíl od ...
38 <sub>18,1</sub>	má být: Dalšími přirozenými řešeními ... ..
40 <sup>13</sup> , 40 <sub>2</sub>	zřejmě by mělo být: ... kde $k'$ je libovolné celé číslo
40 <sub>3</sub>	chybí vyjádření čísla $y'$ ve tvaru $y' = 20 - 93k'$
42 <sub>3</sub> , 43 <sub>12</sub>	asi přesněji: ... v následující tabulce: ..., resp. ... následující schema: ...
43 <sub>9</sub>	má být: V prvním kroku ...
52	v Příkladu 3.18 má místo $q_1, \dots, q_5$ být $a_1, \dots, a_5$
53 <sub>4</sub> , 57 <sub>7</sub>	má být: ... je nejmenším přirozeným řešením ...
54 <sub>6</sub>	má být: Všechna další řešení rovnice ...
56 <sub>9</sub>	asi vhodněji: ... neexistuje žádný pythagorejský trojúhelník, jehož obsah ...
58	měl by být jednotný zápis jmen autorů.

Dále:

- Za Definicí 1.3 a Definicí 1.5 (str.11) by ještě mohla být uvedena tvrzení: *Největší společný dělitel celých čísel  $a_1, \dots, a_n$  je dělitelný všemi ostatními společnými děliteli čísel  $a_1, \dots, a_n$ , resp. nejmenší společný násobek celých čísel  $a_1, \dots, a_n$  dělí všechny ostatní společné násobky celých čísel celých čísel  $a_1, \dots, a_n$*  (viz důkaz tvrzení (1.3) na str. 12).
- Z uvedených úvah není zřejmé, zda lze rovnici  $x^2 + y^2 = z^2$  řešit také v celých číslech.
- V důkazu Věty 2.9 není zřejmé, proč jsou čísla  $x, y$  nesoudělná (str. 31<sub>21</sub>).
- Poznámka 2.9 by měla být již za Větou 2.15 (str. 38).
- Ve Větě 2.16 by mělo být: Je-li  $n$  liché, pak čísel a jmenovatel každého  $(2k - 1)n$ -tého sblíženého zlomku ... (str. 38<sub>6</sub>).
- Za Větou 2.16 by mohla následovat Poznámka: *Nejmenší přirozené řešení v případě licheho čísla  $n$  je dáno  $2n$ -tým sblíženým zlomkem (pro  $k = 1$ ), tj.  $(x_0, y_0) = (P_n, Q_n)$ . Dalšími přirozenými řešeními jsou pak dvojice  $(P_{3n}, Q_{3n}), (P_{5n}, Q_{5n}), \dots$*  (str.38).
- Na konci řešení příkladů 3.19 a 3.20 by mohl být uveden také odkaz na Větu 2.11. V zadání obou příkladů by mělo být uvedeno, v jakém oboru se dané rovnice mají řešit. V případě řešení v oboru celých čísel by mohl být na konci řešení uveden ještě odkaz na poznámku na str. 36<sup>8,9</sup>.

U obhajoby by autor mohl ukázat řešení některého z příkladů 3.15, 3.21 pomocí Věty 2.9.

Diplomová práce Aleše Hrdličky se mi i přes uvedené připomínky líbila a myslím si, že zadané cíle splnila. Svým rozsahem, úrovní a hloubkou zpracování odpovídá předložená práce požadavkům kladeným na diplomovou práci.

Práci doporučuji k obhajobě a hodnotím známkou .....

V Hradci Králové, 8.6.2023

RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.