PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

UNIVERZITY PALACKÉHO V OLOMOUCI

KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

BCI/BCK-algebry a jejich vnoření do semi-integrálních/integrálních reziduovaných po-monoidů

2016

Bc. Petr Sapák

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Kühra, Ph.D., a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Olomouci dne 23. 6. 2016 ....

Chtěl bych poděkovat doc. RNDr. Janu Kührovi, Ph.D. za cenné rady, připomínky a čas, který mi věnoval formou konzultací.

Obsah

Úvod

BCI-algebry zavedl jako zobecnění BCK-algeber v [6] roku 1966 japonský matematik Kiyoshi Iséki. Jedná se o třídu algeber, které lze chápat jako algebraickou formulaci množinového rozdílu nebo implikace v některých logických systémech. V 70. letech minulého století se Kiyoshi Iséki a Shotaro Tanaka věnovali vytváření základů teorie BCI-algeber. V práci BCI-algebru definujeme duálně k původní Isékiho definici, tzn. jako algebru $(B, \to, 1)$ typu $(2, 0)$ splňující pro každé $x, y, z \in B$ následující podmínky:

(B1) $$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1,$$

(B2) $$1 \to x = x,$$

(B3) $$x \to y = 1 \quad \& \quad y \to x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Jak název práce napovídá, BCI-algebry jsou úzce spjaty s uspořádanými komutativními monoidy, resp. reziduovanými svazy. Tyto struktury jsou zajímavé tím, že existuje spousta přirozených příkladů jejich použití. Například víme, že algebraickým modelem klasické dvouhodnotové logiky je Booleova algebra. To znamená, že pokud vezmeme formuli v klasické logice a přiřadíme jí algebraickou identitu v jazyce Booleových algeber, pak tato formule platí v klasické logice, právě když identita platí ve všech Booleových algebrách. V některých neklasických logikách se pak varieta Booleových algeber nahradí tak, že vezmeme interval $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ spolu s některou spojitou t-normou, tím dostáváme reziduovaný svaz, kterým generujeme varietu. Tato varieta je pak algebraickým modelem této neklasické logiky. Typickým příkladem jsou tzv. MV-algebry, které jsou algebraickým modelem tzv. Łukasiewiczovy logiky. Více o algebrách formalizujících výrokové logiky nalezne čtenář např. v [3].

Práce si klade dva hlavní cíle. Prvním z nich je popsat a dokázat vybrané vlastnosti BCI-algeber. Druhým úkolem je zpracovat konstrukci vnoření BCI-algebry do reziduovaného semi-integrálního uspořádaného monoidu, kterou předvedli roku 2000 James G. Raftery a Clint J. van Alten v článku [10]. A dále vnoření BCK-algebry do integrálního reziduovaného svazu, které publikovali roku 1983 Y. Komori a H. Ono [9]. Na základě těchto konstrukcí předvést nové vnoření BCI-algebry do reziduovaného semi-integrálního uspořádaného monoidu a provést srovnání Rafteryho a van Altenovy konstrukce s konstrukcí tohoto nového vnoření.

1 Uspořádané komutativní monoidy

Tato kapitola bude shrnutím několika základních algebraických pojmů potřebných v konstrukcích kapitoly 3.

Nechť $(M, \leq, \cdot, 1)$ je struktura, kde $(M, \cdot, 1)$ je komutativní monoid a $\leq$ je relace uspořádání na množině M. Dále předpokládejme, že uspořádání je kompatibilní s násobením, tzn. pro každé $x, y, z \in M$ platí

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z. \tag{1}$$

Pak $(M, \leq, \cdot, 1)$ nazveme *uspořádaný komutativní monoid* nebo krátce *po-monoid* (budeme pracovat pouze s komutativními monoidy a proto budeme „komutativní“ vynechávat).

Příklad 1.1 Mějme neprázdnou množinu X a vezměme její potenční množinu ozn. $P(X)$. K ní přidejme operaci množinového sjednocení $\cup$ (resp. průniku $\cap$) a jako jednotkový prvek prázdnou množinu (resp. celou množinu X). Struktura $(P(X), \cup, \emptyset)$ (resp. $(P(X), \cap, X)$) je monoid. Pokud dále přidáme relaci $\subseteq$ obvyklé množinové inkluze, dostáváme po-monoid $(P(X), \subseteq, \cup, \emptyset)$ (resp. $(P(X), \subseteq, \cap, X)$).

Definujme další potřebné pojmy týkající se po-monoidů. Jestliže je jednotkový prvek monoidu 1 současně největším prvkem $(M, \leq)$, řekneme, že se jedná o po-monoid *integrální*. Pokud je 1 maximálním prvkem, nazývá se po-monoid *semi-integrální*.

Pokud pro každé $x, y \in M$ existuje největší $z \in M$ takové, že $x \leq z \cdot y$, pak po-monoid $(M, \leq, \cdot, 1)$ nazveme *reziduovaný*. Toto z značíme $x \to y$ a binární operaci $\to$ nazýváme *reziduum*. Reziduovaný po-monoid se pak dá chápat jako struktura $(M, \leq, \cdot, \to, 1)$, kde

- $(M, \cdot, 1)$ je komutativní monoid,
- $\leq$ je relace uspořádání na M,
- pro každé $x, y, z \in M$ platí

$$x \leq y \to z \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y \leq z. \tag{2}$$

Z (2) plyne (1) a je tedy zřejmé, že $(M, \leq, \cdot, 1)$ je po-monoid.

Je-li $(M, \leq)$ svaz se svazovými operacemi $\wedge, \vee$, pak se algebra $(M, \wedge, \vee, \cdot, \to, 1)$ nazývá komutativní *reziduovaný l-monoid* nebo krátce *reziduovaný svaz*.

Příklad 1.2 Vezměme uzavřený interval $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ s obvyklým lineárním uspořádáním. Pak $([0,1], \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 1)$, kde

(i)

$$
\begin{aligned}
x \odot y &= x \cdot y, \\
x \rightarrow y &= \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \le y, \\ \frac{y}{x} & \text{jinak,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
x \odot y &= \min(x, y), \\
x \rightarrow y &= \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \le y, \\ y & \text{jinak,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
x \odot y &= \max(x + y - 1, 0), \\
x \rightarrow y &= \min(1 - x + y, 1),
\end{aligned}
$$

jsou integrální reziduované svazy.

Poznámky:

(a) Operace v minulém příkladě jsou tzv. *spojité t-normy*, viz definice níže. Obecně když $\odot$ je spojitá t-norma na $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, pak $\odot$ má reziduum

$$x \rightarrow y = \max\{z \mid z \odot x \le y\}.$$

Speciálně operace definovaná v (iii) je tzv. *Łukasiewiczova* t-norma.

(b) Spojitá t-norma $\odot$ je binární operace na intervalu $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, která pro každé $a, b, c, d \in [0,1]$ splňuje:

- $a \odot b = b \odot a$,
- $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$,
- $a \odot b \le c \odot d$ pokud $a \le c$ a $b \le d$,
- $a \odot 1 = a$.

A navíc je spojitá jako funkce dvou proměnných.

V (semi-)integrálním případě podle (2) platí

$$x \le y \quad \Leftrightarrow \quad x \to y = 1, \tag{3}$$

protože $1 \le x \to y$, právě když $1 \cdot x \le y$. Vidíme, že operace $\to$ jednoznačně určuje relaci $\le$ a (semi-)integrální reziduovaný po-monoid se tedy dá definovat také jako algebra $(M, \cdot, \to, 1)$ typu $(2, 2, 0)$. Třída takto definovaných algeber tvoří kvazi-varietu.

Tvrzení 1.3 Algebra $(M, \cdot, \to, 1)$ je integrální reziduovaný po-monoid, právě když splňuje následující identity a kvazi-identitu:

(M1) $\qquad (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1,$

(M2) $\qquad 1 \to x = x,$

(M3) $\qquad x \to 1 = 1,$

(M4) $\qquad x \to (y \to z) = (x \cdot y) \to z,$

(M5) $\qquad x \to y = 1 \ \& \ y \to x = 1 \ \Rightarrow \ x = y.$

$(M, \cdot, \to, 1)$ je semi-integrální reziduovaný po-monoid, právě když splňuje (M1), (M2), (M4) a (M5).

Důkaz: Dokažme, že každý integrální reziduovaný po-monoid $(M, \le, \cdot, \to, 1)$ splňuje (M1) – (M5).

(M1): Z (2) je zřejmé, že pro každé $x, y \in M$ platí

$$x \cdot (x \to y) = (x \to y) \cdot x \le y. \tag{4}$$

Použijeme-li (4) dvakrát, pak dostáváme

$$x \cdot (x \to y) \cdot (y \to z) \le z.$$

Z komutativity operace $\cdot$ a (2) dostáváme

$$(x \to y) \cdot (y \to z) \le x \to z.$$

Opětovným použitím (2)

$$x \to y \le (y \to z) \to (x \to z),$$

a tedy použitím (3) dostáváme $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$.

(M2): Dokažme nejprve $1 \to x \leq x$. Je zřejmé, že $1 \to x \leq 1 \to x$. Z (2) pak plyne $1 \to x = 1 \cdot (1 \to x) \leq x$. Obráceně je zřejmé, že $x = 1 \cdot x \leq x$, odtud plyne, že $x \leq 1 \to x$. Tedy $1 \to x = x$.

(M3): Plyne ihned z toho, jak je určena relace uspořádání na M, a faktu, že 1 je největším prvkem $(M \leq)$.

(M4): Ze (4) plyne $(x \cdot y) \cdot ((x \cdot y) \to z) \leq z$. Pak dle (2) platí $(x \cdot y) \to z \leq x \to (y \to z)$. Z druhé strany, dle (4) platí $y \cdot x \cdot (x \to (y \to z)) \leq y \cdot (y \to z) \leq z$, a tedy $x \to (y \to z) \leq (x \cdot y) \to z$.

(M5): Je zřejmá z (3).

Dokončení důkazu je zařazeno až do další kapitoly za lemma 2.1.6. □

V kapitole 3.3 budeme potřebovat tzv. *průsekově polosvazově* uspořádaný monoid, dále jen $\wedge$-monoid. Jedná se o uspořádanou strukturu $(M, \wedge, \cdot, e)$, kde $(M, \wedge)$ je průsekový polosvaz, $(M, \cdot, e)$ komutativní monoid a pro každé $x, y, z \in M$ platí

$$(x \wedge y) \cdot z = (x \cdot z) \wedge (y \cdot z).$$

2 BCI a BCK-algebry

V této kapitole popíšeme BCI a BCK-algebry. Dokážeme vlastnosti potřebné k pochopení použitých konstrukcí. Poznamenejme, že jsme v této práci BCI-algebru definovali duálně k notaci, kterou v roce 1966 zavedl Iséki. Jako konstantu jsme zvolili 1 na rozdíl od Isékiho 0 a binární operaci značíme $\to$ na rozdíl od $*$. Na konci této kapitoly jsou pak popsány důležité podalgebry BCI-algeber.

V celém následujícím textu označuje B nosič BCI-algebry (resp. BCK-algebry).

2.1 Základní vlastnosti BCI-algeber

Mějme algebru $(B, \to, 1)$ typu $(2, 0)$. Nechť splňuje následující identity a kvazi-identitu:

(B1) $$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1,$$

(B2) $$1 \to x = x,$$

(B3) $$x \to y = 1 \quad \& \quad y \to x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Pak $(B, \to, 1)$ nazveme *BCI-algebrou.*

Všimněme si, že (B1), (B2) a (B3) odpovídají po řadě (M1), (M2) a (M5) z předchozí kapitoly.

Poznámka: Pokud je $(M, \cdot, \to, 1)$ semi-integrální reziduovaný po-monoid, pak každá podalgebra $(M, \to, 1)$ je BCI-algebra. Dále je v této práci ukázáno, že všechny BCI-algebry jsou v tomto tvaru.

Příklad 2.1.1 Mějme množinu $B = \{1, a, b, c, d, e\}$, na ní zaveďme binární operaci $\to$ pomocí Cayleyho tabulky.

$\to$	1	a	b	c	d	e
1	1	a	b	c	d	e
a	1	1	c	d	b	d
b	1	a	1	c	d	d
c	d	d	d	1	c	c
d	c	c	c	d	1	a
e	c	c	c	d	1	1

Pak $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra. Důkaz se provede prostým ověřením identit (B1), (B2) a kvazi-indetity (B3).

Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra. Definujme na B binární relaci $\leq_B$ takto:

$$x \leq_B y \;\Leftrightarrow\; x \to y = 1.$$

Tvrzení 2.1.2 $(B, \leq_B)$ je uspořádaná množina, kde 1 je maximální prvek.

Důkaz: Nechť $x, y, z \in B$. Nejprve dokažme, že pro libovolné $x \in B$ platí $x \to x = 1$. Podle (B1) a (B2) platí

$$1 = (1 \to 1) \to ((1 \to x) \to (1 \to x)) = x \to x.$$

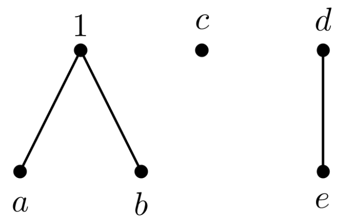
Pak pro každé $x \in B$ platí $x \leq_B x$. Relace $\leq_B$ je reflexivní. Dále nechť $x \leq_B y$ a $y \leq_B x$. Pak $x \to y = 1$ a $y \to x = 1$. Podle (B3) tedy platí $x = y$ a tím jsme dokázali antisymetrii relace $\leq_B$. Zbývá dokázat tranzitivitu. Předpokládejme, že $x \leq_B y$ a $y \leq_B z$, tj. $x \to y = 1 = y \to z$. Potom podle (B1) a (B2) platí

$$1 = (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1 \to (1 \to (x \to z)) = x \to z.$$

Odtud již plyne, že relace $\leq_B$ je relací uspořádání. Jestliže $1 \leq_B x$, pak $1 \to x = 1$, ale podle (B2) také $1 \to x = x$. Tedy $x = 1$. $\square$

Poznámka: Relaci $\leq_B$ nazveme *BCI uspořádání* a dále v textu ji budeme značit $\leq$.

Příklad 2.1.3 Hasseův diagram BCI-algebry z příkladu 2.1.1 vypadá následovně:



Lemma 2.1.4 Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra. Pak pro každé $x, y, z \in B$ platí

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad y \to z \leq x \to z \quad \& \quad z \to x \leq z \to y.$$

Důkaz: Předpokládejme, že $x, y, z \in B$ a $x \leq y$. Pak platí $x \to y = 1$.
Potom podle (B1) a (B2) platí

$$\begin{aligned} 1 &= (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \\ &= 1 \to ((y \to z) \to (x \to z)) \\ &= (y \to z) \to (x \to z). \end{aligned}$$

Odtud již plyne, že $y \to z \leq x \to z$.

Druhá implikace opět vyplývá z (B1) a (B2). Pokud $x \leq y$, tj. $x \to y = 1$, pak

$$1 = (z \to x) \to ((x \to y) \to (z \to y)) = (z \to x) \to (z \to y),$$

tedy $z \to x \leq z \to y$. □

Lemma 2.1.5 Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra. Pak pro každé $x, y \in B$ platí

$$x \leq (x \to y) \to y.$$

Důkaz: Podle (B1) a (B2) platí

$$1 \to x \leq (x \to y) \to (1 \to y),$$

tedy $x \leq (x \to y) \to y$. □

Lemma 2.1.6 Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra. Pak pro každé $x, y, z \in B$ platí

$$x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$$

Důkaz: Podle (B1) platí

$$x \to (y \to z) \leq ((y \to z) \to z) \to (x \to z).$$

Použitím lemmat 2.1.4 a 2.1.5 dostáváme

$$((y \to z) \to z) \to (x \to z) \leq y \to (x \to z),$$

tedy

$$x \to (y \to z) \leq y \to (x \to z).$$

Odtud výměnou pozic členů x, y dostáváme $y \to (x \to z) \leq x \to (y \to z)$.
Z antisymetrie relace $\leq$ pak plyne

$$y \to (x \to z) = x \to (y \to z).$$

□

Důsledek 2.1.7 Nechť $x, y, z \in B$ jsou prvky BCI-algebry $(B, \to, 1)$. Pak platí

(1) $\qquad x \leq y \to x \;\Leftrightarrow\; y \leq x \to z,$

(2) $\qquad x \to y \leq (z \to x) \to (z \to y).$

Opakovaným použitím lemmatu 2.1.6 dostaneme také následující důsledek.

Důsledek 2.1.8 Nechť $x \in B$ a $a_1, \dots, a_n \in B$. Pak pišme $a_1 \dots a_n \to x$ místo $a_1 \to (\dots \to (a_{n-1} \to (a_n \to x)) \dots)$. Potom

$$a_1 \dots a_n \to x = a_{i_1} \dots a_{i_n} \to x,$$

kde $i_1, \dots, i_n$ je libovolná permutace $1, 2, \dots, n$. Podle tvrzení 2.1.4 platí

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad a_1 \dots a_n \to x \leq a_1 \dots a_n \to y.$$

Nyní máme dokázáno vše potřebné pro dokončení důkazu tvrzení 2.3:
Mějme algebru $(M, \cdot, \to, 1)$ typu $(2, 2, 0)$, která splňuje (M1), (M2), (M4) a (M5). Potom redukt $(M, \to, 1)$ je BCI-algebra. Takže relace definovaná na M předpisem $x \leq y \Leftrightarrow x \to y = 1$ je uspořádání. Jednotka 1 je maximální prvek $(M, \leq)$, viz tvrzení 2.1.2.

Dokažme, že $(M, \cdot, 1)$ je komutativní monoid. Nechť $x, y, z \in M$ a předpokládejme, že $x \cdot y \leq z$. To z definice uspořádání na M platí právě tehdy, když $(x \cdot y) \to z = 1$. Opakovaným použitím identity (M4) a lemmatu 2.1.6 dostáváme

$$(x \cdot y) \to z = x \to (y \to z) = y \to (x \to z) = (y \cdot x) \to z.$$

Odtud pro každé $x, y, z \in M$ plyne

$$x \cdot y \leq z \;\Leftrightarrow\; (x \cdot y) \to z = 1 \;\Leftrightarrow\; (y \cdot x) \to z = 1 \;\Leftrightarrow\; y \cdot x \leq z,$$

a tedy $x \cdot y = y \cdot x$ pro každé $x, y \in M$.

Dokažme asociativitu. Pro $x, y, z, w \in M$ předpokládejme, že platí $(x \cdot y) \cdot z \leq w$. Použitím definice $\leq$ a identity (M4) dostáváme

$$(x \cdot y) \cdot z \leq w \;\Leftrightarrow\; x \leq y \to (z \to w) \;\Leftrightarrow\; x \leq (y \cdot z) \to w \;\Leftrightarrow\; x \cdot (y \cdot z) \leq w,$$

a tedy $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ pro každé $x, y, z \in M$.

Zbývá ukázat, že 1 je vzhledem k $\cdot$ neutrálním prvkem. Opět předpokládejme, že $1 \cdot x \leq y$, tzn.

$$1 \cdot x \leq y \;\Leftrightarrow\; (1 \cdot x) \to y = 1$$

Z (M4) a (M2) dostáváme, že $(1 \cdot x) \to y = x \to y$. Celkem platí

$$1 \cdot x \leq y \;\Leftrightarrow\; (1 \cdot x) \to y = 1 \;\Leftrightarrow\; x \to y = 1 \;\Leftrightarrow\; x \leq y.$$

A tedy $1 \cdot x = x$.

Z (M4) je zřejmé, že $x \leq y \to z \;\Leftrightarrow\; x \cdot y \leq z$ pro každé $x, y, z \in M$. Dokázali jsme, že $(M, \leq, \cdot, \to, 1)$ je semi-integrální reziduovaný po-monoid. Pokud $(M, \leq, \cdot, \to, 1)$ splňuje identitu (M3), pak je z definice $\leq$ zřejmé, že 1 je největším prvkem $(M, \leq)$, a tedy $(M, \leq, \cdot, \to, 1)$ je integrální. □

Lemma 2.1.9 Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra a $x, y \in B$. Pak platí

$$x \to y = ((x \to y) \to y) \to y.$$

Důkaz: Podle lemmatu 2.1.5 platí

$$x \to y \leq ((x \to y) \to y) \to y.$$

Naopak použitím lemmatu 2.1.4 pro $x \leq (x \to y) \to y$ dostáváme

$$x \to y \geq ((x \to y) \to y) \to y.$$

□

Lemma 2.1.10 Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra a $x, y \in B$. Pak platí

$$(x \to y) \to 1 = (x \to 1) \to (y \to 1).$$

Důkaz: Opakovaným použitím důsledku 2.1.8 dostaneme

$$\begin{aligned}
(x \to 1) \to (y \to 1) &= (x \to 1) \to (y \to ((x \to y) \to (x \to y))) \\
&= (x \to y) \to ((x \to 1) \to (x \to (y \to y))) \\
&= (x \to y) \to ((x \to 1) \to (x \to 1)) \\
&= (x \to y) \to 1.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.1.11 Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra a $b \in B$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(1) b je maximální prvek $(B, \leq)$,

(2) $b = (b \to 1) \to 1,$

(3) existuje takové $x \in B$, že $b = x \to 1$.

Důkaz: (1) $\Rightarrow$ (2): Dle (3) z lemmatu 2.1.5 je $b \leq (b \to 1) \to 1$. Protože b je maximální prvek $(B, \leq)$, platí $b = (b \to 1) \to 1$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Předpokládejme $b = (b \to 1) \to 1$. Položíme-li $x = b \to 1$, pak $b = x \to 1$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Nechť existují $x, y \in B$ taková, že $b = x \to 1$ a $b \leq y$. Potom podle 2.1.6 a 2.1.9 platí

$$\begin{aligned} y \to b &= y \to (x \to 1) \\ &= y \to (((x \to 1) \to 1) \to 1) \\ &= ((x \to 1) \to 1) \to (y \to 1) \\ &= ((x \to 1) \to y) \to 1 \\ &= (b \to y) \to 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Takže $y = b$. Prvek b je tedy maximálním prvkem $(B, \leq)$. $\square$

2.2 BCK-algebry

Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra a pro každé $x \in B$ platí

(B4) $\qquad x \to 1 = 1.$

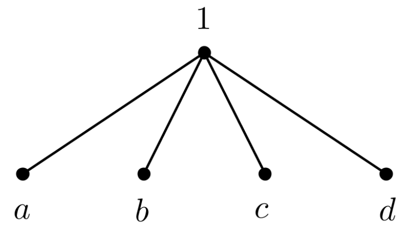
Pak algebru $(B, \to, 1)$ nazveme *BCK-algebrou.*

Tedy BCI-algebra je BCK-algebrou, právě když 1 je největší prvek uspořádané množiny $(B, \leq)$. Rozdíl mezi BCI a BCK-algebrami je tedy stejný jako mezi integrálními a semi-integrálními po-monoidy.

Příklad 2.2.1 Mějme množinu $B = \{1, a, b, c, d\}$, na ní zaveďme binární operaci $\to$ pomocí Cayleyho tabulky.

$\to$	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	1	1	b	c	d
b	1	a	1	c	d
c	1	a	b	1	d
d	1	a	b	c	1

Pak $(B, \to, 1)$ je BCK-algebra s Haaseovým diagramem:



Poznámky:

(a) Uspořádaná množina $(B, \leq)$ nemá žádné speciální vlastnosti, protože pokud $(P, \leq)$ je libovolná uspořádaná množina s největším prvkem 1, pak můžeme pro každé $x, y \in P$ definovat

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \leq y, \\ y & \text{jinak,} \end{cases}$$

a dostaneme BCK-algebru $(P, \to, 1)$. BCK-algebra z 2.2.1 je příkladem této obecné konstrukce.

(b) Když $(M, \cdot \to, 1)$ je integrální reziduovaný po-monoid, potom každá podalgebra reduktu $(M, \to, 1)$ je BCK-algebra.

Příklad 2.2.2 Nechť $(G, \vee, \wedge, \cdot, 1)$ je svazově uspořádaná komutativní grupa (tzv. *l-grupa*). Záporný kužel je množina $G^- = \{x \in G \mid x \leq 1\}$. Potom $(G^-, \to, 1)$, kde $x \to y = x^{-1}y \wedge 1$, je BCK-algebra. Jedná se o tzv. *kuželovou algebru*. Více o těchto algebrách se čtenář může dočíst v článku [2].

2.3 Grupová a integrální část BCI-algebry

Zaměřme se na významné podalgebry BCI-algeber, které budeme potřebovat pro konstrukce v následující kapitole.

Předpokládejme, že $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra. Uvažujme množinu

$$I_B = \{x \in B \mid x \leq 1\}.$$

Tuto množinu nazýváme *integrální částí* algebry $(B, \to, 1)$.

Tvrzení 2.3.1 $(I_B, \to, 1)$ je BCK-algebra. Jedná se o největší podalgebru $(B, \to, 1)$, která je BCK-algebrou.

Důkaz: To, že I_B je podalgebrou $(B, \to, 1)$ plyne z trvzení 2.1.10: když $x, y \in I_B$, potom

$$(x \to y) \to 1 = (x \to 1) \to (y \to 1) = 1 \to 1 = 1.$$

Z definice množiny I_B je evidentní, že $(I_B, \to, 1)$ je BCK-algebra. Zbývá dokázat, že je největší. Proto předpokládejme, že je $(A, \to, 1)$ BCK-algebra, která je podalgebrou $(B, \to, 1)$. Pak ale pro každé $x \in A$ platí $x \to 1 = 1$, takže $A \subseteq I_B$. $\square$

Následují tvrzení ukazuje, že každou komutativní grupu lze chápat jako BCI-algebru.

Tvrzení 2.3.2 Mějme komutativní grupu $(G, \cdot, 1)$. Položíme-li $g \to h = g^{-1}h$, pak je $(G, \to, 1)$ BCI-algebra, kde $(G, \leq)$ je antiřetězec.

Důkaz: Ověříme, že struktura $(G, \to, 1)$ je BCI-algebra, tzn. jsou splněny (B1), (B2), (B3). (B1) platí pro všechna $x, y, z \in G$, protože

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = xy^{-1}yz^{-1}x^{-1}z = 1.$$

(B2) je triviální. Pokračujme s (B3). Jestliže $x \to y = 1$, pak $x^{-1}y = 1$ a odtud již $y = x$. $(G, \to, 1)$ je tedy skutečně BCI-algebra. Zbývá dokázat, že $(G, \leq)$ je antiřetězec. V BCI-algebře jsme relaci $\leq$ zavedli pomocí operace $\to$ následovně: pro každé $x, y \in G$ platí $x \leq y$ právě tehdy, když $x \to y = 1$. Jestliže však $x \to y = 1$, pak $x^{-1}y = 1$, ale to nastane právě tehdy, když $y = x$. Odtud je vidět, že $(G, \leq)$ je antiřetězec. $\square$

Tvrzení 2.3.3 Pro každou BCI-algebru $(B, \to, 1)$ je

$$G_B = \{x \to 1 \mid x \in B\}$$

množinou maximálních prvků uspořádané množiny $(B, \leq)$. Pro každé $x \in B$ je prvek $g = (x \to 1) \to 1$ jediný z množiny G_B takový, že $x \leq g$. Tedy $x \in G_B \Leftrightarrow x = (x \to 1) \to 1$.

Důkaz: První a poslední část tvrzení dostáváme hned z tvrzení 2.1.11. Dokážeme platnost druhé části. Nechť $g = (x \to 1) \to 1$. Pak podle 2.1.5 platí $x \leq g$. Předpokládejme, že $h \in G_B$ je takové, že $x \leq h$. Pak ale $x \to 1 \geq h \to 1 \in G_B$. Odtud plyne: $x \to 1 = h \to 1$ a tedy $g = (x \to 1) \to 1 = (h \to 1) \to 1 = h$. $\square$

Množinu G_B nazýváme *grupovou částí* BCI-algebry $(B, \to, 1)$.

Tvrzení 2.3.4 Pro každou BCI-algebru $(B, \to, 1)$ je $(G_B, \to, 1)$ podalgebrou. Pokud definujeme $g \cdot h = (g \to 1) \to h$, pak $(G_B, \cdot, 1)$ je komutativní grupa.

Důkaz: Platnost tvrzení, že G_B je podalgebrou B plyne z trvzení 2.1.10. Předpokládejme $x \to 1, y \to 1 \ \in G_B$. Pak

$$(x \to 1) \to (y \to 1) = (x \to y) \to 1 \in G_B.$$

Nyní dokážeme, že $(G_B, \cdot, 1)$ je komutativní grupa. To, že 1 je vzhledem k $\cdot$ neutrální prvek, je triviální. Pro každé $g \in G_B$ musí existovat prvek ozn. $g^{-1} \in G_B$ takový, že $g \cdot g^{-1} = 1$. Vezmeme-li $g^{-1} = g \to 1$, je zřejmé, že $g^{-1} \in G_B$ a zároveň platí

$$g \cdot g^{-1} = (g \to 1) \to (g \to 1) = 1.$$

Nechť $g, h \in G_B$. Pak

$$\begin{aligned} g \cdot h &= (g \to 1) \to h = (g \to 1) \to ((h \to 1) \to 1) = (h \to 1) \to ((g \to 1) \to 1) = \\ &= (h \to 1) \to g = h \cdot g. \end{aligned}$$

Dále předpokládejme, že také $j \in G_B$, potom

$$\begin{aligned} (g \cdot h) \cdot j &= (((g \to 1) \to h) \to 1) \to j = (((g \to 1) \to h) \to 1) \to ((j \to 1) \to 1) = \\ &= (j \to 1) \to ((((g \to 1) \to h) \to 1) \to 1) = (j \to 1) \to ((g \to 1) \to h) = \\ &= (g \to 1) \to ((j \to 1) \to h) = g \cdot (j \cdot h) = g \cdot (h \cdot j). \end{aligned}$$

$\square$

Tvrzení 2.3.5 Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra. Pak $x \in I_B$ právě tehdy, když $x = ((x \to 1) \to 1) \to x$.

Důkaz: Předpokládejme, že $x = ((x \to 1) \to 1) \to x$. Pak platí

$$\begin{aligned}1 &= x \to (((x \to 1) \to 1) \to x) = ((x \to 1) \to 1) \to (x \to x) = \\ &= ((x \to 1) \to 1) \to 1 = x \to 1.\end{aligned}$$

Z $x \to 1 = 1$ plyne $x \leq 1$ a tedy $x \in I_B$. Z druhé strany nechť $x \in I_B$. Pak platí

$$((x \to 1) \to 1) \to x = (1 \to 1) \to x = 1 \to x = x.$$

□

Příklad 2.3.6 Ukažme grupovou a integrální část BCI-algebry z příkladu 2.1.1. Připomeňme, že $\to$ byla definována tabulkou

$\to$	1	a	b	c	d	e
1	1	a	b	c	d	e
a	1	1	c	d	b	d
b	1	a	1	c	d	d
c	d	d	d	1	c	c
d	c	c	c	d	1	a
e	c	c	c	d	1	1

Z tvrzení 2.3.3 plyne

$$\begin{aligned}1:&\quad (1 \to 1) \to 1 = 1 \to 1 = 1,\\ a:&\quad (a \to 1) \to 1 = 1 \to 1 = 1,\\ b:&\quad (b \to 1) \to 1 = 1 \to 1 = 1,\\ c:&\quad (c \to 1) \to 1 = d \to 1 = c,\\ d:&\quad (d \to 1) \to 1 = c \to 1 = d,\\ e:&\quad (e \to 1) \to 1 = c \to 1 = d,\end{aligned}$$

a tedy že $G_B = \{1, c, d\}$. Z tvrzení 2.3.5 pak za použití předcházejících výsledků platí

$$\begin{aligned}1:&\quad 1 \to 1 = 1,\\ a:&\quad 1 \to a = a,\\ b:&\quad 1 \to b = b,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c: &\quad c \to c = 1, \\
d: &\quad d \to d = 1, \\
e: &\quad d \to e = a,
\end{aligned}
$$

dostáváme $I_B = \{1, a, b\}$. Fakt, že $(\{1, a, b\}, \to, 1)$ je největší BCK-algebra, která je podalgebrou BCI-algebry z příkladu 2.1.1, lze snadno vidět vidět i z diagramu příkladu 2.1.3.

Poznámka: Pro libovolnou BCK-algebru $(A, \to, 1)$ a komutativní grupu $(G, \cdot, 1)$ existuje BCI-algebra $(B, \to, 1)$ taková, že její integrální část je izomorfní s $(A, \to, 1)$ a grupová část je izomorfní (jako grupa) s $(G, \cdot, 1)$. Stačí vzít direktní součin $(A, \to, 1)$ a BCI-algebry $(G, \to, 1)$ z tvrzení 2.3.2. BCI-algebry rozložitelné jako direktní součin BCK-algebry a komutativní grupy byly popsány v článku [10]. Jsou to právě ty BCI-algebry, ve kterých je násobení definované předpisem $x \cdot y = (x \to 1) \to y$ asociativní. Víme, že takto definované násobení je asociativní na množině G_B, na B ale obecně asociativní není.

3 Vnoření BCI a BCK-algebry do reziduovaného po-monoidu

V této kapitole popíšeme vnoření BCI a BCK-algebry do reziduovaného po-monoidu. Hlavní myšlenkou spojující následující konstrukce je přiřazení jistého po-monoidu BCI/BCK-algebře. Daná BCI/BCK-algebra se pak vnoří do reduktu reziduovaného po-monoidu (resp. reziduovaného svazu) jistých filtrů tohoto po-monoidu.

Konstrukce v podkapitole 3.2 je dílem J. G. Rafteryho a C. J. van Altena. Byla publikována roku 2000 v článku [10], kde je provedena duálně. BCI-algebra je zde definována jako algebraická struktura $(B, *, 0)$ typu $(2, 0)$, kde 0 je minimálním prvkem uspořádané množiny $(B, \leq)$. Zobecnění této konstrukce pro nekomutativní BCI-algebry tzv. *pseudo-BCI-algebry*, může čtenář nalézt v článku [4].

V kapitole 3.3 je zkonstruováno vnoření BCK-algebry do integrálního reziduovaného svazu, které publikovali v článku z roku 1985 [9] Y. Komori a H. Ono. Toto vnoření zachovává existující svazová spojení. Na základě idejí použitých v těchto konstrukcích bylo v kapitole 3.4 zkonstruováno zobecnění těchto vnoření, jak je ukázáno v kapitole 4.

Pokud je v této a následující kapitole m, n, r, s použito v dolním indexu nějakého prvku, jedná se o přirozené číslo.

3.1 Společná část konstrukcí

Po-monoid popsaný v této kapitole je využíván v konstrukcích 1 a 3. Monoid potřebný pro konstrukci 2 je popsán v úvodu kapitoly 3.3.

Nechť $(M, \leq, *, e)$ je po-monoid a $G_M \subseteq M$. Předpokládejme, že $(G_M, \cdot, e)$ je grupa, kde pro $g, h \in G_M$ platí $g \cdot h \leq g * h$. Dále předpokládejme, že pro každé $m \in M$ existuje právě jedno $g \in G_M$ takové, že $g \leq m$. Je zřejmé, že $(G_M, \leq)$ je antiřetězec a G_M je právě množina minimálních prvků $(M, \leq)$. Nevylučujeme, že e je nejmenším prvkem $(M, \leq)$, v tom případě $G_M = \{e\}$.

Označme $\mathfrak{F}_M$ množinu všech filtrů[1] X uspořádané množiny $(M, \leq)$ takových, že $X \subseteq [g) = \{x \in M \mid g \leq x\}$ pro některé $g \in G_M$. Pro $X, Y \in \mathfrak{F}_M$ definujme

$$X \odot Y = \{m \in M \mid m \geq x * y, \text{ kde } x \in X, y \in Y\}$$
$$X \to Y = \{m \in M \mid [m) \odot X \subseteq Y\}.$$

Tvrzení 3.1 Nechť $(M, \leq, *, e)$ je po-monoid splňující výše uvedené předpoklady. Pak struktura $(\mathfrak{F}_M, \subseteq, \odot, \to, [e))$ je semi-integrální reziduovaný po-monoid. Pokud

[1] Filtrem v uspořádané množině $(P, \leq)$ se zde rozumí podmnožina $X \subseteq P$ taková, že $[x) \subseteq X$ pro všechna $x \in X$.

e je nejmenší prvek uspořádané množiny $(M, \leq)$, potom je $(\mathfrak{F}_M, \subseteq, \odot, \rightarrow, [e))$ integrální reziduovaný po-monoid.

Důkaz: Nejdříve dokažme, že $\odot$ je asociativní operace na $\mathfrak{F}_M$. Předpokládejme, že $X, Y \in \mathfrak{F}_M$ a $X \subseteq [g), Y \subseteq [h)$, pro nějaká $g, h \in G_M$. Je evidentní, že $X \odot Y$ je filtr v $(M, \leq)$. Pak pro $x \in X,\ y \in Y$ platí

$$x * y \geq g * h \geq g \cdot h \in G_M.$$

Odtud již plyne, že $X \odot Y \in \mathfrak{F}_M$, protože $X \odot Y \subseteq [g \cdot h)$. Nyní ukažme, že $X \odot (Y \odot Z) = (X \odot Y) \odot Z$ pro $X, Y, Z \in \mathfrak{F}_M$. Platí

$$\begin{aligned} X \odot (Y \odot Z) &= X \odot \{m \in M \mid m \geq y * z,\ \text{kde } y \in Y, z \in Z\} = \\ &= \{n \in M \mid n \geq x * m,\ \text{kde } x \in X, m \in Y \odot Z\} = \\ &= \{n \in M \mid n \geq x * y * z,\ \text{kde } x \in X, y \in Y, z \in Z\}. \end{aligned}$$

Z druhé strany:

$$\begin{aligned} (X \odot Y) \odot Z &= \{m \in M \mid m \geq x * y,\ \text{kde } x \in X, y \in Y\} \odot Z = \\ &= \{n \in M \mid n \geq m * z,\ \text{kde } m \in X \odot Y, z \in Z\} = \\ &= \{n \in M \mid n \geq x * y * z,\ \text{kde } x \in X, y \in Y, z \in Z\}. \end{aligned}$$

Dále dokažme, že pokud $X, Y \in \mathfrak{F}_M$ jsou filtry v $\mathfrak{F}_M$, pak i $X \rightarrow Y$ je filtr v $\mathfrak{F}_M$. Opět předpokládejme, že $X \subseteq [g), Y \subseteq [h)$, pro nějaká $g, h \in G_M$. Vezměme $m \in X \rightarrow Y$ takové, že $m \geq f \in G_M$. Pak podle definice $[m) \odot X \subseteq Y$. Odtud plyne, že pro každé $x \in X$ platí $m * x \geq h$. Zároveň platí $m * x \geq f * g \geq f \cdot g$. Podle předpokladů je však pod prvkem $m * x$ právě jeden minimální prvek. To znamená, že platí $f \cdot g = h$ a odtud $m \geq f = h \cdot g^{-1} \in G_M$. Vidíme, že $X \rightarrow Y \subseteq [h \cdot g^{-1})$ a $X \rightarrow Y \in \mathfrak{F}_M$. Ještě dokažme, že se jedná o filtr. Nechť $a \in X \rightarrow Y$ a $a \leq b$ pro nějaká $a, b \in M$. Pak $[b) \odot X \subseteq [a) \odot X \subseteq Y$, odtud ale $b \in X \rightarrow Y$ a jedná se tedy o filtr.

Nechť $X \in \mathfrak{F}_M$. Pak $X \odot [e) = \{m \in M \mid m \geq x * e,\ \text{kde } x \in X\} = \{m \in M \mid m \geq x,\ \text{kde } x \in X\} = X$. Komutativita operace $\odot$ plyne z komutativity $*$ a není proto třeba ověřovat druhou stranu. Dokázali jsme, že $[e)$ je jednotkou vzhledem k $\odot$.

Dokažme, že $[e)$ je maximální prvek $(\mathfrak{F}_M, \subseteq)$. Předpokládejme, že $[e) \subseteq X$. Víme, že $X \subseteq [g)$ pro jediné $g \in G_B$. Pak ale $[e) = [g)$.

K dokončení důkazu zbývá ukázat, že pro každé $X, Y, Z \in \mathfrak{F}_M$ platí

$$X \odot Y \subseteq Z \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y \rightarrow Z.$$

Nechť $X \subseteq Y \to Z$. Vezměme $m \in X \odot Y$. Pak $m \geq x * y$, kde $x \in X$ a $y \in Y$. Je zřejmé, že $m \in [x) \odot Y$. Z předpokladu plyne $[x) \subseteq Y \to Z$. Pak $[x) \odot Y \subseteq Z$ a $m \in Z$. To znamená, že $X \odot Y \subseteq Z$. Opačně nechť $X \odot Y \subseteq Z$. Pak pro každé $x \in X$ platí $[x) \odot Y \subseteq Z$, tj. $x \in Y \to Z$. Odtud již plyne $X \subseteq Y \to Z$. □

Výše uvedený po-monoid je dostačující pro účely konstrukce 1. V konstrukci 3 však musíme postupovat obecněji. Opět předpokládejme, že $(M, \leq, *, e)$ je po-monoid, a $G_M \subseteq M$. Dále nechť $(G_M, \cdot, e)$ je grupa, kde pro $g, h \in G_M$ platí $g \cdot h \leq g * h$. A nyní, na rozdíl od předchozího, předpokládejme, že každý prvek $m \in M$ je nad nejvýše jedním prvkem $g \in G_{M'}$. Pak musíme z $(M, \leq, *, e)$ vybrat jistý podmonoid ozn. $(M', \leq, *, e)$.

Položme

$$M' = \{x \in M \mid g \leq x \text{ pro některé } g \in G_M\} = \bigcup\{[g) \mid g \in G_M\}.$$

Lze snadno nahlédnout, že $(M', \leq, *, e)$ je podmonoid $(M, \leq, *, e)$. Mějme $x, y \in M$ a $g, h \in G_M$ taková, že $g \leq x$ a $h \leq y$. Pak $g \cdot h \leq g * h \leq x * y$, a tedy $x * y \in M'$. Z předchozího je také zřejmé, že G_M je množina minimálních prvků $(M', \leq)$. Podobně jako v předešlém případě označme $\mathfrak{F}_{M'}$ množinu všech filtrů X uspořádané množiny $(M', \leq)$ takových, že $X \subseteq [g)$, pro některé $g \in G_M$. Pro $X, Y \in \mathfrak{F}_{M'}$ definujme

$$\begin{aligned} X \odot Y &= \{m \in M' \mid m \geq x * y, \text{ kde } x \in X, y \in Y\} \\ X \to Y &= \{m \in M' \mid [m) \odot X \subseteq Y\}. \end{aligned}$$

Tvrzení 3.2 Nechť $(M', \leq, *, e)$ je po-monoid splňující výše uvedené předpoklady. Pak struktura $(\mathfrak{F}_{M'}, \subseteq, \odot, \to, [e))$ je semi-integrální reziduovaný po-monoid, kde $[e)$ je maximální prvek $(\mathfrak{F}_{M'}, \subseteq)$.

Důkaz tohoto tvrzení je z totožný s důkazem tvrzení 3.1.

3.2 Konstrukce 1

Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra. Označme W_B množinu všech nenulových slov $\alpha = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ nad B, $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $\alpha \in W_B$ definujme

$$\alpha \to x = a_1 \to (a_2 \to (\dots \to (a_n \to x) \dots)) \text{ pro libovolné } x \in B,$$
$$J(\alpha) = \{x \in B \mid \alpha \to x = 1\}.$$

Poznámka: Pokud je $(B, \to, 1)$ redukt semi-integrálního reziduovaného po-monoidu $(B, \cdot, \to, 1)$, potom pro $\alpha = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ je

$$\alpha \to x = a_1 \to (a_2 \to (\dots \to (a_n \to x) \dots)) = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) \to x.$$

Tedy slovo α reprezentuje součin $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ a $J(\alpha)$ tak vlastně reprezentuje množinu prvků nad $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

Označme $J(B)$ množinu všech takových $J(\alpha)$. Definujme binární operaci $*$ na $J(B)$ takto:

$$J(\alpha) * J(\beta) = J(\alpha\beta).$$

Než ukážeme, že $(J(B), \subseteq, *, \{1\})$ je po-monoid, ověříme, že platí následující lemma:

Lemma 3.2.1 Nechť $\alpha, \beta \in W_B$ a $J(\alpha), J(\beta) \in J(B)$ jsou definovány výše. Pak platí

$$J(\alpha) \subseteq J(\beta) \;\Leftrightarrow\; \text{ pro každé } x \in B: \; \alpha \to x \leq \beta \to x.$$

Důkaz: Nechť $J(\alpha) \subseteq J(\beta)$. Protože $\alpha \to ((\alpha \to x) \to x) = (\alpha \to x) \to (\alpha \to x) = 1$, tj. $(\alpha \to x) \to x \in J(\alpha)$ pro každé $x \in B$, je $(\alpha \to x) \to x \in J(\beta)$, a tedy $1 = \beta \to ((\alpha \to x) \to x) = (\alpha \to x) \to (\beta \to x)$, tj. $\alpha \to x \leq \beta \to x$.

Z druhé strany nechť $\alpha \to x \leq \beta \to x$ pro každé $x \in B$. Pokud $x \in J(\alpha)$, pak $1 = \alpha \to x \leq \beta \to x$, tedy $x \in J(\beta)$. □

Poznámka: Všimněme si, že z definice $J(\alpha)$ plyne $J(a) = [a)$ pro každé $a \in B$ a speciálně pro každé $g \in G_B$ (množina G_B byla popsána v kapitole 2.3, jedná se o grupovou část BCI-algebry) platí $J(g) = \{g\}$. Navíc je zřejmé, že $J(\alpha)$ je filtr v uspořádané množině $(B, \leq)$, a proto $a \in J(\alpha) \Leftrightarrow J(a) = [a) \subseteq J(\alpha)$.

Lemma 3.2.2 Zobrazení $\varrho : B \to J(B)$ takové, že $\varrho(a) = J(a)$ je antitonní injekce.

Důkaz lemmatu je zřejmý z předcházející poznámky.

Tvrzení 3.2.3 Každé $J(\alpha)$ obsahuje právě jedno $g \in G_B$, a sice $g = (\alpha \to 1) \to 1$.

Důkaz: Označme $g = (\alpha \to 1) \to 1$. Pak $\alpha \to g = \alpha \to ((\alpha \to 1) \to 1) = (\alpha \to 1) \to (\alpha \to 1) = 1$, tj. $g \in J(\alpha)$. Je zřejmé, že $g \in G_B$. Předpokládejme, že $h \in J(\alpha)$. To znamená, že platí $\alpha \to h = 1$. Pak $1 = \alpha \to ((h \to 1) \to 1) = (h \to 1) \to (\alpha \to 1)$ a odtud $h \to 1 = \alpha \to 1$, protože $h \to 1, \alpha \to 1 \in G_B$ jsou maximální prvky B. Pak platí $h = (h \to 1) \to 1 = (\alpha \to 1) \to 1 = g$. □

Tvrzení 3.2.4 Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra. Pak $(J(B), \subseteq, *, \{1\})$ je po-monoid. Minimálními prvky $(J(B), \subseteq)$ jsou právě $J(g) = \{g\}$ pro $g \in G_B$.

Důkaz: Dle definice operace $*$ platí $J(\alpha) * J(\beta) = J(\alpha\beta)$. Pro každé $x \in B$ platí

$$1 = \alpha\beta \to x = \alpha \to (\beta \to x) = \beta \to (\alpha \to x) = \beta\alpha \to x,$$

a proto $J(\alpha\beta) = \{x \in B \mid \alpha\beta \to x = 1\} = \{x \in B \mid \beta\alpha \to x = 1\} = J(\beta\alpha)$. Asociativita $*$ je zřejmá. Jedná se tedy o komutativní pologrupu. Dokažme, že $J(B)$ je monoid s jednotkou $J(1) = \{1\}$, tzn. pro každé $J(\alpha) \in J(B)$ musí platit $J(\alpha) * J(1) = J(\alpha)$. Dle definice platí $J(\alpha) * J(1) = J(\alpha 1) = \{x \in B \mid \alpha 1 \to x = 1\}$. Protože

$$1 = \alpha 1 \to x = \alpha \to (1 \to x) = \alpha \to x,$$

máme $J(\alpha 1) = \{x \in B \mid \alpha 1 \to x = 1\} = \{x \in B \mid \alpha \to x = 1\} = J(\alpha)$. $J(B)$ tedy komutativní monoid.

Protože $\subseteq$ je množinová inkluze, je $(J(B), \subseteq)$ uspořádaná množina. Dokažme, že inkluze je s $*$ kompatibilní. Chceme dokázat, že pokud $J(\alpha) \subseteq J(\beta)$, pak

$$J(\alpha\gamma) = J(\alpha) * J(\gamma) \subseteq J(\beta) * J(\gamma) = J(\beta\gamma).$$

To platí, protože když $\alpha\gamma \to x = \alpha \to (\gamma \to x) = 1$, pak $\gamma \to x \in J(\alpha) \subseteq J(\beta)$, a tedy $\beta\gamma \to x = \beta \to (\gamma \to x) = 1$.

Množina G_B je dle definice množinou maximálních prvků BCI-algebry $(B, \to, 1)$. Je evidentní, že pro každé $g \in G_B$ je $J(g) = \{g\}$ minimální prvek $(J(B), \subseteq)$. Podle tvrzení 3.2.3, pro každé $\alpha \in W_B$ existuje $g \in G_B$ takové, že $J(g) \subseteq J(\alpha)$, takže minimální prvky $(J(B), \subseteq)$ jsou právě $J(g) = \{g\}$ pro $g \in G_B$. □

Tvrzení 3.2.5 Pro každé $\alpha, \beta \in W_B$ a $g, h \in G_B$ taková, že $g \in J(\alpha)$ a $h \in J(\beta)$, platí $g \cdot h \in J(\alpha) * J(\beta)$, kde $g \cdot h = (g \to 1) \to h$ počítáme v grupě $(G, \cdot, 1)$.

Důkaz: Jestliže $g \in J(\alpha)$ a $h \in J(\beta)$, pak

$$\begin{aligned}\alpha \to (\beta \to (g \cdot h)) &= \alpha \to (\beta \to ((g \to 1) \to h)) \\ &= \alpha \to ((g \to 1) \to (\beta \to h)) \\ &= \alpha \to ((g \to 1) \to 1) \\ &= \alpha \to g \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

$(G_B, \cdot, 1)$ je komutativní grupa, odtud je zřejmé, že $(G_{J(B)}, \cdot, \{1\})$, kde $G_{J(B)} = \{\{g\} \mid g \in G_B\}$ a $\{g\} \cdot \{h\} = \{g \cdot h\}$, je také komutativní grupa. Vezmeme-li dále po-monoid $(J(B), \subseteq, *, \{1\})$, pak z předcházejícího tvrzení vyplývá $\{g\} \cdot \{h\} \subseteq \{g\} * \{h\}$. Pak ale po-monoid $(J(B), \subseteq, *, \{1\})$ splňuje předpoklady tvrzení 3.1 a odtud plyne, že $(\mathfrak{F}_{J(B)}, \subseteq, \odot, \to, [\{1\}))$ je semi-integrální reziduovaný po-monoid.

Lemma 3.2.6 Zobrazení $\psi : J(B) \to \mathfrak{F}_{J(B)}$ definované pro $\alpha \in W_B$ předpisem $\psi(J(\alpha)) = [J(\alpha))$ je antitonní injekce.

Důkaz lemmatu je stejně jako v případě 3.2.2 zřejmý. Jedná se o přirozené vnoření, kdy každému prvku přiřadíme jeho hlavní filtr.

Věta 3.2.7 Pro libovolnou BCI-algebru $(B, \to, 1)$ je zobrazení $\varphi : B \to \mathfrak{F}_{J(B)}$ definované pro každé $x \in B$ předpisem

$$\varphi(x) = \{J(\alpha) \in J(B) \mid x \in J(\alpha)\}$$

vnořením do BCI-algebry $(\mathfrak{F}_{J(B)}, \to, [\{1\}))$.

Důkaz: Z lemmat 3.2.2 a 3.2.6 je zřejmé, že $\varphi = \varrho \circ \psi$ je injekce.

Dokažme, že pro každé $x, y \in B$ platí $\varphi(x \to y) = \varphi(x) \to \varphi(y)$. Nechť $J(\alpha) \in \varphi(x \to y)$ a $J(\beta) \in \varphi(x)$. Pak použitím lemmatu 2.1.5 dostáváme

$$1 = \beta \to x \leq \beta \to ((x \to y) \to y) = (x \to y) \to (\beta \to y).$$

A tedy $x \to y \leq \beta \to y$. Stejně tak z prvního předpokladu a z $x \to y \leq \beta \to y$ dostáváme

$$1 = \alpha \to (x \to y) \leq \alpha \to (\beta \to y) = \alpha\beta \to y.$$

Tedy $\alpha\beta \to y = 1$. To znamená, že $y \in J(\alpha\beta) = J(\alpha) * J(\beta)$. Odtud z definice φ dostáváme $J(\alpha) * J(\beta) \in \varphi(y)$. Pak ale $[J(\alpha)) \odot \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ a proto $J(\alpha) \in \varphi(x) \to \varphi(y)$.

Obráceně nechť $J(\alpha) \in \varphi(x) \to \varphi(y)$. Pak $[J(\alpha)) \odot \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$. Z definice φ je zřejmé, že $J(x) \in \varphi(x)$. Dále víme, že $J(\alpha x) = J(\alpha) * J(x) \in [J(\alpha)) \odot \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$. Odtud $y \in J(\alpha x)$ a platí tedy

$$1 = \alpha x \to y = \alpha \to (x \to y).$$

Pak ale $x \to y \in J(\alpha)$ a tedy $J(\alpha) \in \varphi(x \to y)$. $\square$

Poznámka: Nechť je $(B, \to, 1)$ BCK-algebrou. Pak $G_B = \{1\}$ a reziduovaný pomonoid $(\mathfrak{F}_{J(B)}, \subseteq, \odot, \to, [\{1\}))$ získaný touto konstrukcí je integrální.

3.3 Konstrukce 2

Pro účely této konstrukce budeme předpokládat, že struktura $(L, \wedge, *, e)$ je $\wedge$-monoid. Tedy algebra taková, že $(L, \wedge)$ je $\wedge$-polosvaz, $(L, *, e)$ je komutativní monoid a platí identita $(x \wedge y) * z = (x * z) \wedge (y * z)$. Je-li prvek e nejmenším prvkem L, nazýváme L *duálně integrální.*

Nechť $(L, \wedge, *, e)$ je tedy duálně integrální $\wedge$-monoid. Označme $\mathfrak{F}_L$ množinu všech filtrů X $\wedge$-polosvazu $(L, \wedge)$ a nechť $\emptyset \in \mathfrak{F}_L$. To znamená, že pro $X \in \mathfrak{F}_L$ platí

(i) $x \wedge y \in X$ pro každé $x, y \in X$,

(ii) pokud $x \in X$ a $x \leq y$, pak $y \in X$.

Pro každé $X, Y \in \mathfrak{F}_L$ definujme

$$\begin{aligned} X \vee Y &= \{a \in L \mid a \geq x \wedge y \text{ pro nějaké } x, y \in X \cup Y\}, \\ X \odot Y &= \{a \in L \mid a \geq x * y \text{ pro nějaké } x \in X \text{ a } y \in Y\}, \\ X \to Y &= \{a \in L \mid [a) \odot X \subseteq Y\}. \end{aligned}$$

Tvrzení 3.3.1 Struktura $(\mathfrak{F}_L, \vee, \cap, \odot, \to, \emptyset, L)$, kde $\cap$ je množinový průnik, je úplný integrální reziduovaný svaz.

Důkaz: Je zřejmé, že $(\mathfrak{F}_L, \vee, \cap, \emptyset, L)$ je úplný svaz, kde $\vee$ je spojení a $\cap$ průsek. Nechť $X, Y \in \mathfrak{F}_L$ a $a, b \in X \odot Y$. Pak platí $a \geq x_1 * y_1$ a $b \geq x_2 * y_2$ pro nějaká $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$. Odtud $a \wedge b \geq (x_1 * y_1) \wedge (x_2 * y_2) \geq (x_1 \wedge x_2) * (y_1 \wedge y_2)$, kde $x_1 \wedge x_2 \in X$ a $y_1 \wedge y_2 \in Y$, z čehož plyne $a \wedge b \in X \odot Y$. Ověření druhé podmínky je snadné. Předpokládejme, že $a \in X \odot Y, b \in L$ a $b \geq a$. Z definice $X \odot Y$ je zřejmé, že pak i $b \in X \odot Y$. Dokázali jsme, že $X \odot Y \in \mathfrak{F}_L$.

Nyní dokažme, že $X \to Y \in \mathfrak{F}_L$. Nechť $a, b \in X \to Y$. Pokud $c \in [a \wedge b) \odot X$, pak $c \geq (a \wedge b) * x = (a * x) \wedge (b * x)$ pro nějaké $x \in X$. Jelikož $a * x \in [a) \odot X \subseteq Y$ a $b * x \in [b) \odot X \subseteq Y$, platí $(a * x) \wedge (b * x) \in Y$, a tedy $c \in Y$. To ale znamená, že $[a \wedge b) \odot X \subseteq Y$, a tedy $a \wedge b \in X \to Y$, takže podmínka (i) je splněna. Dále pokud $a \leq b$, pak $[b) \odot X \subseteq [a) \odot X$, takže i druhá podmínka je splněna.

Nechť $a \in X \odot L$. Pak $a \geq x * b$ pro $x \in X$ a $b \in L$. Víme, že $e \in L$ je nejmenší prvek L. Platí proto $a \geq x * b \geq x * e = x$, odkud $a \in X$, a tedy $X \odot L \subseteq X$. Z druhé strany obdobně. L je jednotkový prvek a $(\mathfrak{F}_L, \odot, L)$ je monoid.

Důkaz asociativity operace $\odot$, stejně jako důkaz platnosti ekvivalence

$$X \odot Y \subseteq Z \;\Leftrightarrow\; X \subseteq Y \to Z,$$

lze nalézt v důkaze tvrzení 3.1. $\square$

Nechť $(B, \to, 1)$ je BCK-algebra. Stejně jako v předchozí konstrukci označme W_B množinu všech nenulových slov $\alpha = a_1a_2a_3 \dots a_n$ nad B, $n \in \mathbb{N}$. A pro každé $\alpha \in W_B$ a $x \in B$ pišme $\alpha \to x = a_1 \to (a_2 \to (\dots \to (a_m \to x) \dots))$.

Označme Q množinu všech konečných neprázdných množin $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq W_B$. Na Q definujme relaci $\sim$ takto

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \sim \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \;\Leftrightarrow\; \text{pro každé } w \in W_B \text{ a pro každé } x \in B :$$
$$\Big(w\alpha_i \to x = 1 \text{ pro každé } i \leq m \;\Leftrightarrow w\beta_j \to x = 1 \text{ pro každé } j \leq n\Big).$$

Je zřejmé, že takto definovaná relace je ekvivalence na Q. Položme $P = Q/_\sim$ a třídu ekvivalence obsahující množinu $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ značme $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$. Na P definujme binární operace $\sqcap$ (průsek) a $*$ (násobení) následovně:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle \sqcap \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \rangle,$$
$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle * \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle = \langle \{\alpha_i\beta_j \mid \ i \leq m, \ j \leq n\} \rangle.$$

Je zřejmé, že operace $\sqcap$ je definována korektně a že $(P, \sqcap)$ je polosvaz.

Tvrzení 3.3.2 Operace $*$ na P definovaná výše, je definována korektně.

Důkaz: Předpokládejme, že $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle$ a $\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle =$ $= \langle \delta_1, \dots, \delta_s \rangle$. Pro každé $w \in W_B$ a $x \in B$ je ekvivalentní:

- $w \to (\alpha_i \to (\beta_j \to x)) = w \to (\alpha_i\beta_j \to x) = 1$ pro $i \leq m, j \leq n$,
- $w\gamma_k \to (\beta_j \to x) = w \to (\gamma_k \to (\beta_j \to x)) = 1$ pro $j \leq n, k \leq r$,
- $w \to (\gamma_k\delta_l \to x) = w\gamma_k \to (\delta_l \to x) = 1$ pro $k \leq r, l \leq s$.

Takže $\langle \alpha_i\beta_j \mid i \leq m, j \leq n \rangle = \langle \gamma_k\delta_l \mid k \leq r, l \leq s \rangle$. □

Tvrzení 3.3.3 Pro každou BCK-algebru $(B, \to, 1)$ je struktura $(P, \sqcap, *, \langle 1 \rangle)$ duálně integrální $\wedge$-monoid.

Důkaz: Z definice $\sqcap$ je zřejmé, že $(P, \sqcap)$ je polosvaz s nejmenším prvkem $\langle 1 \rangle$, protože pro každé $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle \in P$ platí

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle \sqcap \langle 1 \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, 1 \rangle = \langle 1 \rangle.$$

Opravdu, jestliže $w \to (1 \to x) = w \to x = 1$ pro některé $w \in W_B$ a $x \in B$, pak $w \to (\alpha \to x) = 1$ pro každé $\alpha \in W_B$, protože $w \to (\alpha \to x) \geq w \to x$. Operace $*$ je asociativní a pro každé $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle \in P$ platí

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle * \langle 1 \rangle = \langle \alpha_i 1 \mid i \leq m \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle,$$

protože $w \to (\alpha_i 1 \to x) = w \to (\alpha_i \to (1 \to x)) = w \to (\alpha_i \to x)$ pro každé $w \in W_B$ a $x \in B$.

Všimněme si, že pro každé $\alpha_i, \beta_j \in W_B$ platí $\alpha_i\beta_j \to x = \alpha_i \to (\beta_j \to x) = \beta_j \to (\alpha_i \to x) = \beta_j\alpha_i \to x$. Odtud

$$w \to (\alpha_i\beta_j \to x) = 1 \text{ pro každé } i \text{ a } j \;\Leftrightarrow\; w \to (\beta_j\alpha_i \to x) = 1 \text{ pro každé } i \text{ a } j.$$

Operace $*$ je tedy komutativní a $\langle 1\rangle * \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle$ není třeba ověřovat. Dokázali jsme, že $(P, *, \langle 1\rangle)$ je komutativní monoid. Zbývá dokázat, že $*$ je distributivní přes $\sqcap$. Pro každé $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle, \langle \beta_1, \dots, \beta_n\rangle, \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r\rangle \in P$ platí

$$\begin{aligned}
&(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle \sqcap \langle \beta_1, \dots, \beta_n\rangle) * \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r\rangle = \\
&\qquad = (\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n\rangle) * \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r\rangle \\
&\qquad = \langle \{\alpha_i\gamma_k \mid i \le m, k \le r\} \cup \{\beta_j\gamma_k \mid j \le n, k \le r\}\rangle \\
&\qquad = (\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle * \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r\rangle) \sqcap (\langle \beta_1, \dots, \beta_n\rangle * \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r\rangle).
\end{aligned}$$

□

Poznámka: Indukované uspořádání $\sqsubseteq$ polosvazu $(P, \sqcap)$ je dáno následovně:

$$\begin{gathered}
\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle \sqsubseteq \langle \beta_1, \dots, \beta_n\rangle \;\Leftrightarrow\; \text{pro každé } w \in W_B \text{ a } x \in B: \\
\Big(w \to (\alpha_i \to x) = 1 \text{ pro každé } i \le m \;\Rightarrow w \to (\beta_j \to x) = 1 \text{ pro každé } j \le n\Big).
\end{gathered}$$

Nechť $(B, \to 1)$ je BCK-algebra a $(P, \sqcap, *, \langle 1\rangle)$ duálně integrální $\wedge$-monoid z tvrzení 3.3.3. Pak struktura $(\mathfrak{F}_P, \vee, \cap, \odot, \to, \emptyset, P)$ je úplný integrální reziduovaný svaz.

Poznámka: Podobně jako v podkapitole 3.2 je evidentní, že zobrazení $\varrho : B \to P$ takové, že pro $x \in B$ platí $\varrho : x \mapsto \langle x\rangle$, je antitonní injekce. Stejně tak zobrazení $\psi : P \to \mathfrak{F}_P$ takové, že pro $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle \in P$ platí $\psi : \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle \mapsto [\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle)$.

Pro každé $x \in B$ položme

$$\varphi(x) = \{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle \in P \mid \alpha_i \to x = 1 \text{ pro každé } i \le m\}. \tag{5}$$

Tvrzení 3.3.4 Nechť $(B, \to, 1)$ je BCK-algebra. Pak pro $x \in B$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W_B$ platí: $\langle x\rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle \Leftrightarrow \alpha_i \to x = 1$, pro každé $i \le m$.

Důkaz: Nechť $\langle x\rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle$. Pak dle definice relace $\sqsubseteq$ platí, že $1 \to (x \to x) = 1$ implikuje $1 \to (\alpha_i \to x) = 1$, a tedy $\alpha_i \to x = 1$.

Z druhé strany: $(x \to y) \to (\alpha_i \to y) = \alpha_i \to ((x \to y) \to y) \ge \alpha_i \to x = 1$, a tedy $x \to y \le \alpha_i \to y$. Odtud $w \to (x \to y) \le w \to (\alpha_i \to y)$ pro každé $w \in W_B$ a $y \in B$, což dle definice znamená, že $\langle x\rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m\rangle$. □

Poznámka: Pro $x \in B$ tedy platí $\varphi(x) = [\langle x \rangle)$.

Věta 3.3.5 Zobrazení $\varphi : B \to \mathfrak{F}_P$ definované (5) je vnoření BCK-algebry $(B, \to, 1)$ do BCK-algebry $(\mathfrak{F}_P, \to, P)$ zachovávající existující spojení, tzn. pokud existuje $x \vee y$ v $(B, \leq)$, pak $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$.

Důkaz: Je zřejmé, že $\varphi = \varrho \circ \psi$, kde ϱ a ψ jsou popsány v poznámce před tvrzením 3.3.4. To jsou ale injekce, a proto je φ injekce. Dále platí $\varphi(1) = P$, protože $\alpha \to 1 = 1$ pro každé $\alpha \in W_B$.

Nyní dokažme, že zachovává $\to$. Nechť $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in \varphi(x \to y)$ a $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle \in \varphi(x)$. Z druhého předpokladu, za použití definice φ a tvrzení 3.3.4, dostáváme $\beta_j \to x = 1$. Použitím lemmatu 2.1.5 dostáváme $1 = \beta_j \to x \leq \beta_j \to ((x \to y) \to y) = (x \to y) \to (\beta_j \to y)$, a tedy $x \to y \leq \beta_j \to y$ pro každé $j \leq n$. Použitím stejného postupu na předpoklad $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in \varphi(x \to y)$ dostáváme $1 = \alpha_i \to (x \to y) \leq \alpha_i \to (\beta_j \to y) = \alpha_i \beta_j \to y$ pro každé $i \leq m$ a $j \leq n$. To ale znamená, že $\langle y \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle * \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, tj. $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle * \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle \in \varphi(y)$. Odtud plyne $[\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle) \odot \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$, a tedy $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in \varphi(x) \to \varphi(y)$.

Naopak nechť $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in \varphi(x) \to \varphi(y)$ a tedy $[\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle) \odot \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$. Protože $\langle x \rangle \in \varphi(x)$, máme $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle * \langle x \rangle = \langle \alpha_1 x, \ldots, \alpha_m x \rangle \in \varphi(y)$, a tedy $\langle y \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1 x, \ldots, \alpha_m x \rangle$. Odtud pro každé $i \leq m$ platí $1 = \alpha_i x \to y = \alpha_i \to (x \to y)$. To znamená, že $\langle x \to y \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle$, tedy $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in \varphi(x \to y)$. Dokázali jsme, že pro každé $x, y \in B$ platí $\varphi(x \to y) = \varphi(x) \to \varphi(y)$.

Nyní dokažme druhou část tvrzení. Nechť v $(B, \leq)$ existuje $x \vee y$. Platí $\langle x, y \rangle = \langle x \vee y \rangle$, protože pro každé $w \in W_B$ a $z \in B$ platí: $w \to (x \to z) = 1 = w \to (y \to z) \Leftrightarrow x, y \leq w \to z \Leftrightarrow x \vee y \leq w \to z \Leftrightarrow w \to ((x \vee y) \to z) = 1$. Proto $\varphi(x \vee y) = [\langle x \vee y \rangle) = [\langle x, y \rangle) = [\langle x \rangle \sqcap \langle y \rangle) = [\langle x \rangle) \vee [\langle y \rangle) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$. $\square$

3.4 Konstrukce 3

Část z úvah a tvrzení je totožná s úvahami z předchozích kapitol. Proto je zde některé uvedeme pouze pro připomenutí a bez důkazů.

Nechť $(M, \leq, *, e)$ je semi-integrální reziduovaný po-monoid, který splňuje podmínky na straně 22, tj. předpokládáme, že $G_M \subseteq M$ a $(G_M, \cdot, 1)$ je komutativní grupa taková, že $g \cdot h \leq g * h$ pro $g, h \in G_M$. Dále předpokládejme, že pro každé $x \in M$ existuje nejvýše jeden prvek $g \in G_M$ takový, že $g \leq x$. Položme-li

$$M' = \{x \in M \mid g \leq x \text{ pro některé } g \in G_M\},$$

je G_M množina minimálních prvků v po-monoidu $(M', \leq, *, e)$. Dále předpokládejme, že $(M, \leq)$ je $\wedge$-polosvaz, kde pro každé $x, y, z \in M$ platí

$$(x \wedge y) * z = (x * z) \wedge (y * z).$$

Pokud má G_M alespoň dva prvky, pak $(M', \leq)$ není $\wedge$-polosvaz, ale každý hlavní filtr $[g)$, kde $g \in G_M$, je $\wedge$-polosvaz. Všimněme si, že $(x \wedge y) * z = (x * z) \wedge (y * z)$ platí i v M' za předpokladu, že $x \wedge y \in M'$. Skutečně, když $x, y, z \in M'$ a $x \wedge y \in M'$, pak $x, y \geq g$ a $z \geq h$ pro některé $g, h \in G_M$. Odtud ale $x * z, y * z \geq g * h \geq g \cdot h$, takže $(x * z) \wedge (y * z) \in M'$. Všimněme si, že když $x, y \in X \subseteq [g)$, pak $x \wedge y \in M'$. $\mathfrak{F}_{M'}$ je tedy vlastně množinou filtrů v $\wedge$-polosvazech $[g)$ pro $g \in G_M$.

Pro $X, Y \in \mathfrak{F}_{M'}$ definujme

$$\begin{aligned} X \odot Y &= \{a \in M' \mid a \geq x * y \text{ pro nějaké } x \in X \text{ a } y \in Y\}, \\ X \to Y &= \{a \in M' \mid [a) \odot X \subseteq Y\}. \end{aligned}$$

A pro $X, Y \in \mathfrak{F}_{M'}$ takové, že $X, Y \subseteq [g)$ pro nějaké $g \in G_M$ definujme

$$X \vee_g Y = \{a \in M' \mid a \geq x \wedge y \text{ pro některá } x, y \in X \cup Y\}.$$

Opět $x \wedge y \in M'$, protože $x, y \in [g)$. Je zřejmé, že $X \vee_g Y \subseteq [g)$ a tedy $X \vee_g Y \in \mathfrak{F}_{M'}$.

Tvrzení 3.4.1 $(\mathfrak{F}_{M'}, \subseteq, \odot, \to, [e))$ je semi-integrální reziduovaný po-monoid. Navíc pokud $X, Y \in \mathfrak{F}_{M'}$ jsou filtry takové, že $X, Y \subseteq [g)$ pro nějaké $g \in G_M$, pak je $X \vee_g Y$ spojením filtrů X, Y v $(\mathfrak{F}_{M'}, \subseteq)$.

Důkaz: Nechť $X, Y \in \mathfrak{F}_{M'}$. Je zřejmé, že $X \cup Y \subseteq X \vee_g Y$. Jestliže $X \cup Y \subseteq Z$ pro některé $Z \in \mathfrak{F}_{M'}$, potom $Z \subseteq [g)$. Takže pokud $a \geq x \wedge y$ pro některá $x, y \in Y \cup Y \subseteq Z$. Potom $x \wedge y \in Z$, a proto $a \in Z$, tj. $X \wedge_g Y \subseteq Z$.

Nechť $X \subseteq [g)$ a $Y \subseteq [h)$ pro nějaká $g, h \in G_M$. Dokažme, že $X \odot Y \in \mathfrak{F}_{M'}$. Víme, že $X \odot Y \subseteq [g \cdot h)$. Nechť $a, b \in X \odot Y$, tj. $a \geq x_1 * y_1$ a $b \geq x_2 * y_2$

pro nějaká $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$. Potom $x_1 \wedge x_2 \in X$, $y_1 \wedge y_2 \in Y$. Platí $(x_1 \wedge x_2) * (y_1 \wedge y_2) = (x_1 * y_1) \wedge (x_1 * y_2) \wedge (x_2 * y_1) \wedge (x_2 * y_2) \leq (x_1 * y_1) \wedge (x_2 * y_2) \leq a \wedge b$. A protože $x_i * y_j \geq g * h \geq g \cdot h$, je výše uvedený výpočet korektní. Platí tedy $a \wedge b \in X \odot Y$.

Nyní ukažme, že $X \to Y \in \mathfrak{F}_{M'}$. Víme, že $X \to Y$ je filtr a že $X \to Y \subseteq [h \cdot g^{-1})$. Nechť $a, b \in X \to Y$, tj. $[a) \odot X \subseteq Y$ a $[b) \odot X \subseteq Y$. Potřebujeme ověřit, že $[a \wedge b) \odot X \subseteq Y$. Nechť $c \in [a \wedge b) \odot X$, tj. $c \geq (a \wedge b) * x$ pro nějaké $x \in X$. Platí $c \geq (a \wedge b) * x = (a * x) \wedge (b * x)$. Z předpokladů však víme, že $a * x \in [a) \odot X \subseteq Y$ a $b * x \in [b) \odot X \subseteq Y$ a tedy $c \in Y$.

Zbývající část důkazu je totožná s důkazem tvrzení 3.1. $\square$

Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra. Množina W_B nechť je opět množina nenulových slov nad B. Označme Q množinu všech konečných neprázdných množin $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq W_B$ a definujme na ní ekvivalenci $\sim$ takto:

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \sim \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \iff \text{pro každé } w \in W_B \text{ a } x \in B:$$
$$\Big(w \to (\alpha_i \to x) = 1 \text{ pro každé } i \leq m \iff w \to (\beta_j \to x) = 1 \text{ pro každé } j \leq n\Big).$$

Položme $P = Q/_\sim$ a třídu ekvivalence obsahující množinu $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ budeme značit $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$. V předchozí konstrukci bylo dokázáno, že P spolu s binárními operacemi

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle \sqcap \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \rangle,$$
$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle * \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle = \langle \alpha_i \beta_j \mid i \leq m,\ j \leq n \rangle,$$

tzn. $(P, \sqcap, *, \langle 1 \rangle)$ je $\wedge$-monoid. Množinu maximálních prvků $(B, \leq)$ označme G_B. Dle tvrzení 2.3.2 je $(G_B, \leq)$ antiřetězec. Položme $G = \{\langle g \rangle \mid g \in G_B\}$. Je zřejmé, že se, vzhledem k uspořádání $\sqsubseteq$, jedná opět o antiřetězec. Z kapitoly 2 víme, že $(G_B, \cdot, 1)$ je komutativní grupa. Z G udělejme komutativní grupu takto:

$$\langle g \rangle \boxdot \langle h \rangle = \langle g \cdot h \rangle \text{ pro } g, h \in G_B.$$

Poznámka: Pro připomenutí je uspořádání dáno následovně:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle \sqsubseteq \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle \iff \text{pro každé } w \in W_B \text{ a } x \in B:$$
$$\Big(w \to (\alpha_i \to x) = 1 \text{ pro každé } i \leq m \Rightarrow w \to (\beta_j \to x) = 1 \text{ pro každé } j \leq n\Big).$$

Poznámka: Symbolem gh v následujícím tvrzení značíme zřetězení prvků g, h.

Tvrzení 3.4.2 Pro $g, h \in G_B$ platí $\langle g \rangle \boxdot \langle h \rangle \sqsubseteq \langle g \rangle * \langle h \rangle = \langle gh \rangle$.

Důkaz: Víme, že platí $g \cdot h = (g \to 1) \to h$ a chceme dokázat, že $(g \cdot h) \to x \leq gh \to x$, tzn. $((g \cdot h) \to x) \to (gh \to x) = 1$. Platí $((g \cdot h) \to x) \to (gh \to x) = ((g \cdot h) \to x) \to (g \to (h \to x)) = g \to (h \to (((g \cdot h) \to x) \to x)) \geq g \to (h \to (g \cdot h)) = g \to (h \to ((g \to 1) \to h)) = g \to ((g \to 1) \to (h \to h)) = g \to ((g \to 1) \to 1) = g \to g = 1$. Dokázali jsme, že pro každé $x \in B$ platí $(g \cdot h) \to x \leq gh \to x$. Odtud ale pro každé $w \in W_B$ plyne, že $w \to ((g \cdot h) \to x) \leq w \to (gh \to x)$, a tedy $\langle g \cdot h \rangle \sqsubseteq \langle gh \rangle$. □

Tvrzení 3.4.3 Pro každé $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in P$ existuje nejvýše jedno $g \in G_B$ takové, že $\langle g \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle$.

Důkaz: Zvolme libovolné $\alpha \in W_B$ a položme $g = (\alpha \to 1) \to 1$. Dle definice platí $g \in G_B$. Dále pro každé $x \in B$: $(g \to x) \to (\alpha \to x) = \alpha \to ((g \to x) \to x) \geq \alpha \to g = \alpha \to ((\alpha \to 1) \to 1) = 1$. Odtud plyne: $g \to x \leq \alpha \to x$, což implikuje $\langle g \rangle \sqsubseteq \langle \alpha \rangle$.

Dokažme, že g je nejvýše jedno. Nechť $h \in G_B$ a $\langle h \rangle \sqsubseteq \langle \alpha \rangle$. Pak $1 \to (h \to h) = 1 \Rightarrow 1 \to (\alpha \to h) = 1$ a tedy $\alpha \to h = 1$. Pak $1 = \alpha \to h = \alpha \to ((h \to 1) \to 1) = (h \to 1) \to (\alpha \to 1)$, tj. $h \to 1 \leq \alpha \to 1$. Víme, že $h \to 1 \in G_B$ a proto $h \to 1 = \alpha \to 1$. Pak ale $h = (h \to 1) \to 1 = (\alpha \to 1) \to 1 = g$.

Pokud $\langle g \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle$, pak $\langle g \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_i \rangle$ pro každé $i \leq m$, protože

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle = \langle \alpha_1 \rangle \sqcap \ldots \sqcap \langle \alpha_m \rangle.$$

Takže takové $g \in G_B$ je jediné a platí $g = (\alpha_i \to 1) \to 1$ pro každé $i \leq m$. □

Z dvou předchozích tvrzení vyplývá, že $(P, \sqsubseteq, *, \langle 1 \rangle)$ splňuje předpoklady výše uvedené konstrukce a můžeme tedy položit

$$P' = \{\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in P \mid \langle g \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \text{ pro některá } g \in G_B\}.$$

Pak stejně jako v obecném úvodu této konstrukce označme $\mathfrak{F}_{P'}$ množinu všech filtrů $(P', \sqsubseteq)$ takových, že $X \subseteq [\langle g \rangle)$ pro některé $g \in G_B$ a X je uzavřeno na $\sqcap$.

V tvrzení 3.4.1 jsme dokázali, že $(\mathfrak{F}_{P'}, \subseteq, \odot, \to, [\langle 1 \rangle))$ je semi-integrální reziduovaný po-monoid.

Poznámka: Podobně jako v předchozích dvou podkapitolách je evidentní, že zobrazení $\varrho : B \to P'$ takové, že pro $x \in B$ platí $\varrho : x \mapsto \langle x \rangle$, je antitonní injekce. Stejně tak zobrazení $\psi : P' \to \mathfrak{F}_{P'}$ takové, že pro $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in P'$ platí $\psi : \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \mapsto [\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle)$.

Definujme zobrazení $\varphi : B \to \mathfrak{F}_{P'}$ takto:

$$\varphi(x) = [\langle x \rangle) = \{\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \in P' \mid \langle x \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle\}. \tag{6}$$

Věta 3.4.4 Zobrazení $\varphi : x \mapsto [\langle x \rangle)$, definované formulí (6), je vnoření BCI-algebry $(B, \to, 1)$ do BCI-algebry $(\mathfrak{F}_{P'}, \to, [\langle 1 \rangle))$, které zachovává existující spojení, tj. pokud v $(B, \leq)$ existuje $x \vee y$, pak $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee_g \varphi(y)$ ve $(\mathfrak{F}_{P'}, \subseteq)$.

Důkaz: Zobrazení φ je stejně jako v předchozích konstrukcích, složením výše definovaných vnoření ϱ a ψ, a je tedy samo vnořením.

Důkaz toho, že φ zachovává $\to$, je identický s touto částí důkazu věty 3.3.5. Dokažme, že zachovává existující spojení. Nechť existuje $x \wedge y$ v $(B, \leq)$. Pak $x, y \leq g \in G_B$, a tedy $\langle g \rangle \sqsubseteq \langle x \rangle, \langle y \rangle$ v $(P', \leq)$. Platí $\langle x, y \rangle = \langle x \vee y \rangle$, protože pro každé $w \in W_B$ a $z \in B$ platí: $w \to (x \to z) = 1 = w \to (y \to z) \ \Leftrightarrow \ x, y \leq w \to z \ \Leftrightarrow \ x \vee y \leq w \to z \ \Leftrightarrow \ w \to ((x \vee y) \to z) = 1$. Proto $\varphi(x \vee y) = [\langle x \vee y \rangle) = [\langle x, y \rangle) = [\langle x \rangle \sqcap \langle y \rangle) = [\langle x \rangle) \vee_g [\langle y \rangle) = \varphi(x) \vee_g \varphi(y)$. $\square$

4 Srovnání konstrukcí

V této podkapitole provedeme srovnání první a třetí konstrukce. V obou případech přiřazujeme BCI-algebře $(B, \to, 1)$ po-monoid. V první konstrukci $(J(B), \subseteq, *, \{1\})$ a ve třetí pak $(P, \sqsubseteq, *, \langle 1 \rangle)$.

Podíváme-li se na tyto dva monoidy pouze jako na uspořádané struktury, pak přirozeně vzniká otázka, jaký je vztah mezi $J(B)$ a P. Respektive jaký je vztah mezi $J(\alpha)$ a $\langle \alpha \rangle$ pro $\alpha \in W_B$. Odpověď dává následující věta.

Tvrzení 4.1 Nechť $\alpha, \beta \in W_B$. Pak platí

$$J(\alpha) \subseteq J(\beta) \;\Leftrightarrow\; \langle \alpha \rangle \sqsubseteq \langle \beta \rangle.$$

Důkaz: Víme, že $\langle \alpha \rangle \sqsubseteq \langle \beta \rangle \;\Leftrightarrow\;$ pro každé $x \in B, w \in W_B$:

$$\Big(w \to (\alpha \to x) = 1 \;\Rightarrow\; w \to (\beta \to x) = 1 \Big).$$

Pro důkaz implikace $J(\alpha) \subseteq J(\beta) \;\Leftarrow\; \langle \alpha \rangle \sqsubseteq \langle \beta \rangle$ stačí v definici uspořádání vzít $w = 1$. Pak $\alpha \to x = 1 \;\Rightarrow\; \beta \to x = 1$, a tedy $J(\alpha) \subseteq J(\beta)$.

Z druhé strany v implikaci $\alpha \to x = 1 \;\Rightarrow\; \beta \to x = 1$ za x vezměme $w \to x$. Pak $1 = \alpha \to (w \to x) = w \to (\alpha \to x) \;\Rightarrow\; 1 = \beta \to (w \to x) = w \to (\beta \to x)$. Odtud již plyne $\langle \alpha \rangle \sqsubseteq \langle \beta \rangle$. □

Položme $P_1 = \{\langle \alpha \rangle \mid \alpha \in W_B\}$. Pak je zřejmé, že $(P_1, *, \langle 1 \rangle)$ (operace $*$ je zde restringovaná na P_1) je podmonoidem $(P, *, \langle 1 \rangle)$. Z tvrzení 4.1 vidíme, že $(P_1, \sqsubseteq, *, \langle 1 \rangle)$ je izomorfní kopií $(J(B), \subseteq, *, \{1\})$. Vzniká tak další přirozená otázka, a sice jestli lze nějakým způsobem $(J(B), \subseteq, *, \{1\})$ rozšířit na $(P, \sqsubseteq, *, \langle 1 \rangle)$. Pokusme se toto rozšíření sestrojit.

Nechť $(B, \to, 1)$ je BCI-algebra a $(J(B), \subseteq, *, \{1\})$ je po-monoid sestrojený v konstrukci 1. Pro $\alpha_i \in W_B$ definujme

$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \{x \in B \mid \alpha_i \to x = 1 \text{ pro každé } i \leq m\}.$$

Množinu těchto $J(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ označme $J(B)^*$. Zaveďme na $J(B)^*$ binární operace $*, \sqcap$ následovně

$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) * J(\beta_1, \ldots, \beta_n) = J(\{\alpha_i \beta_j \mid i \leq m,\ j \leq n\}),$$
$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \sqcap J(\beta_1, \ldots, \beta_n) = J(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n\}).$$

Tvrzení 4.2 Nechť $\alpha_i, \beta_j \in W_B$ pro $i \leq m$ a $j \leq n$. Pak platí

$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \subseteq J(\beta_1, \ldots, \beta_n) \;\Leftrightarrow\; \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \sqsubseteq \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle.$$

Důkaz: Víme, že $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \sqsubseteq \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle \;\Leftrightarrow\;$ pro každé $x \in B, w \in W_B$:

$$\Big(w \to (\alpha_i \to x) = 1 \text{ pro každé } i \leq m \;\Rightarrow\; w \to (\beta_j \to x) = 1 \text{ pro každé } j \leq n \Big).$$

Pro důkaz implikace $J(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \subseteq J(\beta_1, \ldots, \beta_n) \Leftarrow \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \sqsubseteq \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$ stačí v definici uspořádání vzít $w = 1$. Pak

$$\alpha_i \to x = 1 \text{ pro každé } i \leq m \;\Rightarrow\; \beta_j \to x = 1 \text{ pro každé } j \leq n, \tag{7}$$

a tedy $J(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \subseteq J(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Z druhé strany v implikaci (7) za x vezměme $w \to x$. Pak $1 = \alpha_i \to (w \to x) = w \to (\alpha_i \to x) \;\Rightarrow\; 1 = \beta_j \to (w \to x) = w \to (\beta_j \to x)$. Odtud již plyne $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \sqsubseteq \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$. $\square$

Je zřejmé, že struktura $(J(B)^*, \subseteq, *, \{1\})$ je po-monoid izomorfní s po-monoidem $(P, \sqsubseteq, *, \langle 1 \rangle)$. To znamená, že kdybychom v konstrukci 3 použili po-monoid $(J(B)^*, \subseteq, *, \{1\})$ dostaneme stejný výsledek, jako jsme dostali za použití po-monoidu $(P, \sqsubseteq, *, \langle 1 \rangle)$. Z tohoto pohledu se tedy dá vnoření konstrukce 3 chápat nejen jako zobecnění druhé konstrukce na BCI-algebry, ale i jako zobecnění vnoření konstrukce 1 tak, že zachovává existující spojení.

Závěr

Hlavním úkolem této práce bylo popsat konstrukci vnoření BCI-algebry do semi-integrálního reziduovaného po-monoidu, která nezachovává existující spojení (konstrukce 1) a konstrukci vnoření BCK-algebry do integrálního reziduovaného po-monoidu, která existující spojení zachovává (konstrukce 2). Na jejich základě pak zkonstruovat nové vnoření BCI-algebry do semi-integrálního reziduovaného po-monoidu, které existující spojení zachovává (konstrukce 3).

V první kapitole jsme se věnovali semi-integrálním (resp. integrálním) reziduovaným po-monoidům. Byla zde uvedena definice a také několik příkladů spolu s důkazem, že třída semi-integrálních (resp. integrálních) reziduovaných po-monoidů tvoří kvazi-varietu.

Druhá kapitola byla rozdělena do tří částí. V první a druhé jsme dokázali vlastnosti BCI-algeber a BCK-algeber, které byly použity v dalších kapitolách. Třetí podkapitola se věnuje významným podalgebrám BCI-algebry, kterými jsou tzv. grupová a integrální část.

Třetí kapitola byla věnována výše uvedeným konstrukcím. V její první podkapitole jsme se věnovali vytváření jistého po-monoidu, který byl nezbytný pro konstrukce 1 a 3. Ve druhé byla předvedena Rafteryho a van Altenova konstrukce vnoření BCI-algebry do semi-integrálního reziduovaného po-monoidu. V této práci je předvedena duálně k originálu publikovaném v [10]. V úvodu podkapitoly 3.3 je předveden $\wedge$-monoid potřebný pro popsání Komoriho a Onovi [9] konstrukce vnoření BCK-algebry do integrálního reziduovaného po-monoidu, následovaný samotnou konstrukcí. Ve čtvrté podkapitole se nachází hlavní výsledek této práce, a sice konstrukce vnoření BCI-algebry do semi-integrálního reziduovaného po-monoidu zachovávající existující spojení založená na myšlenkách prvních dvou konstrukcí.

Kapitola čtyři pak obsahuje srovnání konstrukcí. Je zde ukázán vzájemný vztah po-monoidů použitých v jednotlivých konstrukcích a předvedeno rozšíření jednoho z po-monoidů tak, že se konstrukce 3 dá chápat jako zobecnění obou konstrukcí, i když každé v jiném smyslu.

Reference

[1] W. J. Blok, I. M. A. Ferreirim: *On the structure od hoops*, Algebra Universalis **43** (2000), 233–257.

[2] B. Bosbach: *Concerning cone algebras*, Algebra Universalis **15** (1982), 58–66.

[3] I. Chajda: *Algebry formalizující výrokové logiky*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2013.

[4] P. Emanovský, J. Kühr: *Some properties of pseudo-BCI-algebras*, V recenzním řízení.

[5] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono: *Residuated lattices: An algebraic glimpse at substructural logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. **151**, Elsevier, Amsterdam, 2007.

[6] K. Iséki: *An algebra related with a propositional calculus*, Proc. Japan Acad. **42** (1966), 26–29.

[7] P. Jipsen, C. Tsinakis: *A survey of residuated lattices, in: Ordered Algebraic Structures* (J. Martinez, ed.), Developments in Mathematics, vol. **7**, Springer, Dordrecht, 2002, pp. 19–56.

[8] Y. B. Jun, J. Meng: *BCK-algebras*, Kyung Moon, Seoul, 1994.

[9] Y. Komori, H. Ono: *Logics without the contraction rule*, J. Symb. Logic. **50** (1985), 169–201.

[10] J. G. Raftery, C. J. van Alten: *Residuation in commutative ordered monoids with minimal zero*, Reports on Math. Logic **34** (2000), 23–57.

[11] C. J. van Alten: *On varieties of biresiduation algebras*, Studia Logica **83** (2006), 425–445.

[12] H. Yisheng: *BCI-algebra*, Science Press, Beijing, 2006.