

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Dynamické systémy a jejich aplikace



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.**

Vypracoval(a): **Bc. Lucie Zemánková**

Studijní program: N1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor: Aplikace matematiky v ekonomii

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Bc. Lucie Zemánková

Název práce: Dynamické systémy a jejich aplikace

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt: Dynamické systémy slouží k popisu vývoje systémů v čase. V práci si kromě teoretické části zabývající se soustavou nelineárních diferenciálních rovnic v rovině představíme Goodwinův model. Richard Goodwin se inspiroval známým modelem Lotka–Volterra a následně jej aplikoval do oblasti ekonomie. Jeho model modeluje závislost mezi mírou zaměstnanosti a podílem mezd pracovníků na národním důchodu. V diplomové práci aplikuji tento model na situaci v České republice.

Klíčová slova: Goodwinův model, model dravec a kořist, soustava nelineárních diferenciálních rovnic, fázový portrét, stabilita kritických bodů

Počet stran: 60

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Lucie Zemánková

Title: Dynamical systems and their applications

Type of thesis: Master's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

The year of presentation: 2017

Abstract: Dynamical systems are used to describe the development of systems in time. In addition to a theoretical part dealing with a system of nonlinear differential equations in the plane we introduce Goodwin model. Richard Goodwin was inspired by the famous Lotka–Volterra model and applied this model in economics. His model describes the relationships between the employment rate and the share of wages in national income workers. In my thesis I apply this model to the situation in the Czech Republic.

Key words: Goodwin's model, Predator-prey model, system of nonlinear differential equations, phase portrait, stability of critical points

Number of pages: 60

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Pavly Kouřilové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne

.....

podpis

Obsah

Úvod	7
1 Dynamické systémy v rovině \mathbb{R}^2	8
1.1 Základní teorie	8
1.2 Druhy kritických bodů	18
1.3 Stabilita kritických bodů	22
1.4 Prvý integrál soustavy diferenciálních rovnic	24
2 Goodwinův model rozdělení příjmů	32
2.1 Richard M. Goodwin	32
2.2 Model Lotka–Volterra	33
2.3 Goodwinův model	35
2.4 Řešení soustavy diferenciálních rovnic pro Goodwinův model (2.21)	44
2.5 Příklad ČR	47
Závěr	58
Literatura	59

Poděkování

Ráda bych poděkovala paní Mgr. Pavle Kouřilové, Ph.D. za vstřícnost při konzultacích a za odbornou pomoc při vedení diplomové práce.

Úvod

Cílem diplomové práce je navázat na bakalářskou práci, kde jsme se zabývali soustavou lineárních diferenciálních rovnic v rovině. Nyní se seznámíme se soustavou nelineárních diferenciálních rovnic v rovině, kterou se pokusíme převést na soustavu lineární, kterou již umíme řešit. Následně si ukážeme její využití v ekonomii. Práce je rozdělena na dvě části, a to na část teoretickou a část praktickou. V první části se zaměříme především na rozlišení kritických bodů nelineárních soustav na hyperbolické a nehyperbolické a následně na možnosti určení jejich typu k sestavení fázového portréту.

Druhá část práce se zaměřuje na aplikaci nelineárních diferenciálních rovnic v rovině, konkrétně na tzv. Goodwinův model. Tento model vychází ze známého modelu Lotka–Volterra o dravci a kořisti, proto je v práci nastíněn i tento model. Goodwin aplikoval model o dravci a kořisti do ekonomie, kdy se zabýval závislostí míry zaměstnanosti a míry podílu mezd pracovníků na národním důchodu. V práci k sestavení modelu použijeme data z Českého statistického úřadu, která zaznamenávají situaci v České republice, abychom zjistili, zda je model na reálná data využitelný.

Kapitola 1

Dynamické systémy v rovině \mathbb{R}^2

Ve své bakalářské práci jsem se zabývala soustavou lineárních diferenciálních rovnic v rovině. Nyní se zaměřím na systémy rovnic nelineárních a popíšu mimo jiné vztah mezi nelineární soustavou diferenciálních rovnic a speciální lineární soustavou. Děje, které jsou popsány pomocí soustavy nelineárních rovnic, se budu snažit popsat jednodušší soustavou lineárních diferenciálních rovnic, kterou již umím řešit (viz [9]). Soustavy nelineárních rovnic oproti soustavám lineárních rovnic mohou mít více rovnovážných stavů, proto sestavení fázového portréту je složitější. Fázový portrét (globální) se obvykle skládá z lokálních fázových portrétů v okolí jednotlivých kritických bodů.

Ve své práci se budu zabývat soustavou rovnic v \mathbb{R}^2 , ale obdobné výsledky lze odvodit i pro n -rozměrné soustavy, kde $n > 2$.

1.1. Základní teorie

Uvažujme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^2$ a interval $J \subset \mathbb{R}$. Symbolem $C^1(G)$ označme množinu všech funkcí definovaných na G , které mají na G spojitě obě parciální derivace prvního řádu.

Uvažujme vektorovou funkci $\mathbf{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, tzn. $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, kde x_1 a x_2 jsou reálné funkce proměnné t definované na intervalu J .

Dále uvažujme vektorovou funkci $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$. Složením vektorových funkcí \mathbf{f}

a \mathbf{x} dostáváme vektorovou funkci $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(x_1(t), x_2(t))$, kde $t \in J$.

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

kterou si podrobněji můžeme rozepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ x'_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)), \end{aligned} \quad (1.2)$$

kde $t \in J$.

Řešení úlohy (1.1) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, kde $\mathbf{x}_0 \in G$ a \mathbf{f} je spojitá funkce, je ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds$, $t \in \mathbb{R}$.

Definice 1 [Kritický bod] Bod $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$ se nazývá *kritický bod* (nebo také *rovnovážný bod*) soustavy (1.1), jestliže platí

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= 0 \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= 0. \end{aligned}$$

Bod, který není kritický, se nazývá *regulární*.

Rozlišujeme dva typy kritických (rovnovážných) bodů, a to kritické body *hyperbolické* a kritické body *nehypobolické*. Pro určení, zda je kritický bod hyperbolický, je nutné nadefinovat Jacobiho matici, pomocí níž můžeme o druhu kritického bodu rozhodnout.

Definice 2 Funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se nazývá *diferencovatelná v $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$* , jestliže existuje lineární transformace $J(\bar{\mathbf{x}}) \in L(\mathbb{R}^2)$, která splňuje

$$\lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0,$$

kde $|\bullet|$ značí normu v \mathbb{R}^2 .

Jinými slovy můžeme říct, jestliže je $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferencovatelná v bodě $\bar{\mathbf{x}}$, potom existují parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2$ v $\bar{\mathbf{x}}$, sestavené do matice $J(\bar{\mathbf{x}})$, která se nazývá *Jacobiho matice*

$$J(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x},$$

kde $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \right)$, $j = 1, 2$. Lineární transformace $J(\bar{\mathbf{x}})$ je také nazývána *derivace funkce \mathbf{f} v bodě $\bar{\mathbf{x}}$* .

Definice 3 Uvažujme kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ soustavy (1.1) a příslušnou Jacobiho matici $J(\bar{\mathbf{x}})$. Kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ se nazývá *hyperbolický*, jestliže všechna vlastní čísla Jacobiho matice mají nenulové reálné složky. Jestliže alespoň jedno vlastní číslo Jacobiho matice má nulovou reálnou složku, pak nazveme kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ *nehyperbolický*.

Příklad 1 Určíme hyperbolické a nehyperbolické kritické body následující soustavy

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1^2 + x_2 \\ x_2' &= x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2. \end{aligned}$$

Pro určení hyperbolických či nehyperbolických kritických bodů je nejprve nutné určit kritické body soustavy nelineárních rovnic. Ty určíme tak, že pravé strany diferenciálních rovnic položíme rovny nule, tj.

$$\begin{aligned} 3x_1^2 + x_2 &= 0 \\ x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy rovnic dostáváme tři kritické body $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$, $\bar{\mathbf{x}}_2 = (1, -3)$ a $\bar{\mathbf{x}}_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. V dalším kroku spočteme Jacobiho matici $J(\mathbf{x})$. Matici $J(\mathbf{x})$ určíme postupným derivováním funkcí f_1 a f_2 dle proměnných x_1 a x_2 , tj.

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(3x_1^2+x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(3x_1^2+x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(x_2^2+2x_1x_2+x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_2^2+2x_1x_2+x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 & 1 \\ 2x_2 & 2x_2 + 2x_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Abychom mohli určit vlastní čísla Jacobiho matice $J(\bar{\mathbf{x}})$, pomocí nichž umíme určit body hyperbolické a nehyperbolické, musíme dosadit kritické body $\bar{\mathbf{x}}_1$, $\bar{\mathbf{x}}_2$ a $\bar{\mathbf{x}}_3$ do Jacobiho matice $J(\mathbf{x})$, tj.

$$J(\bar{\mathbf{x}}_1) = J(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 0 & 1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J(\bar{\mathbf{x}}_2) = J(1, -3) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 & 1 \\ 2 \cdot (-3) & 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$J(\bar{\mathbf{x}}_3) = J(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 6 \cdot (-\frac{1}{3}) & 1 \\ 2 \cdot (-\frac{1}{3}) & 2 \cdot (-\frac{1}{3}) + 2 \cdot (-\frac{1}{3}) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Nyní už můžeme spočítat vlastní čísla λ_1 a λ_2 Jacobiho matic $J(\bar{\mathbf{x}}_1)$, $J(\bar{\mathbf{x}}_2)$ a $J(\bar{\mathbf{x}}_3)$. Pro první kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ určíme vlastní čísla pomocí charakteristické rovnice matice $J(\bar{\mathbf{x}}_1)$

$$\det(J(\bar{\mathbf{x}}_1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = 0,$$

tj. vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ je nehyperbolický bod, neboť $\lambda_2 = 0$, tudíž alespoň jedno vlastní číslo má nulovou reálnou část.

Vlastní čísla pro druhý kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_2 = (1, -3)$ získáme z následující charakteristické rovnice

$$\det(J(\bar{\mathbf{x}}_2) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 1 \\ -6 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 12 = 0$$

a jsou rovna vlastním číslům $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{57}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{57}}{2}$. Druhý kritický bod

$\bar{\mathbf{x}}_2 = (1, -3)$ je bod hyperbolický, neboť obě vlastní čísla mají reálné části různé od nuly.

Pro třetí kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ určíme vlastní čísla pomocí charakteristické rovnice matice $J(\bar{\mathbf{x}}_3)$

$$\det(J(\bar{\mathbf{x}}_3) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{7}{3}\lambda + \frac{4}{3} = 0,$$

tj. vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$. Třetí bod je opět hyperbolický, protože obě vlastní čísla mají reálné části různé od nuly.

o

Jak jsme uvedli v úvodu práce, naší snahou je převést soustavu nelineárních diferenciálních rovnic na soustavu lineárních diferenciálních rovnic, kterou již umíme řešit. Tzn. chceme soustavu (1.1) převést na naši známou soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ (viz [9], str. 12).

Definice 4 [Lineární variační rovnice] Nechť $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ je kritický bod rovnice (1.1), potom rovnici $\mathbf{y}' = J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$ nazveme *lineární variační rovnici* k rovnici $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ v okolí kritického bodu $\bar{\mathbf{x}}$.

Z předchozí definice je patrné, že nahrazení nelineární rovnice lineární variační rovnicí provádíme pouze na okolí kritického bodu. Znamená to, že fázový portrét soustavy (1.1) bude podobný fázovému portrétu soustavy $\mathbf{y}' = J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$ pouze na okolí tohoto kritického bodu. Zhruba lze říct, že čím menší okolí kritického bodu budeme mít, tím více se bude fázový portrét soustavy (1.1) podobat fázovému portrétu $\mathbf{y}' = J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$ v kritickém bodu.

Nyní si ukážeme, na jakém principu tato linearizace funguje. Uvažujme soustavu

$$x'_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t))$$

$$x'_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t))$$

a necht' existuje okolí hyperbolického bodu $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$, ve kterém leží jediný rovnovážný stav $\bar{\mathbf{x}}$. Na okolí bodu $\bar{\mathbf{x}}$ rozvineme funkce f_1 a f_2 pomocí Taylorovy formule v bodě $\bar{\mathbf{x}}$

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + R_1(x_1, x_2)$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + R_2(x_1, x_2),$$

kde R_1 a R_2 jsou zbytky v Taylorově vzorci. Jestliže se omezíme na *dostatečně malé okolí* rovnovážného bodu $\bar{\mathbf{x}}$, budou zbytky R_1, R_2 velmi malé, proto můžeme nadále zbytky R_1 a R_2 zanedbat.

Jednotlivé parciální derivace (tj. prvky Jacobiho matice $J(\mathbf{x})$) označme pro zjednodušení zápisu jako $\frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1} = a_{11}$, $\frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1} = a_{21}$, $\frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2} = a_{12}$, $\frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2} = a_{22}$.

Provedeme substituci

$$y_1 = x_1 - \bar{x}_1$$

$$y_2 = x_2 - \bar{x}_2,$$

čímž převedeme rovnovážný stav $\bar{\mathbf{x}}$ do počátku soustavy souřadnic $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0)$.

V těchto nových souřadnicích bude mít soustava tvar

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2.$$

Dostali jsme tedy soustavu lineárních rovnic $\mathbf{y}' = J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$.

Příklad 2 Určeme variační lineární rovnici k soustavě z příkladu 1.

Abychom určili variační lineární rovnici, je nutné spočítat Jacobiho matici $J(\bar{\mathbf{x}})$, kterou již máme spočtenou v příkladu 1. Pro první kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$

dosadíme Jacobiho matici $J(\bar{\mathbf{x}}_1) = J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ do rovnice $\mathbf{y}' = J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$, čímž

získáme na okolí bodu $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0)$ soustavu

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Stejně pro druhý kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_2 = (1, -3)$ dosadíme Jacobiho matici

$J(\bar{\mathbf{x}}_2) = J(1, -3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ do rovnice $\mathbf{y}' = J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$ a získáme na okolí bodu $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0)$ lineární variační rovnici

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Pro třetí kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ získáme na okolí bodu $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0)$ lineární variační rovnici ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

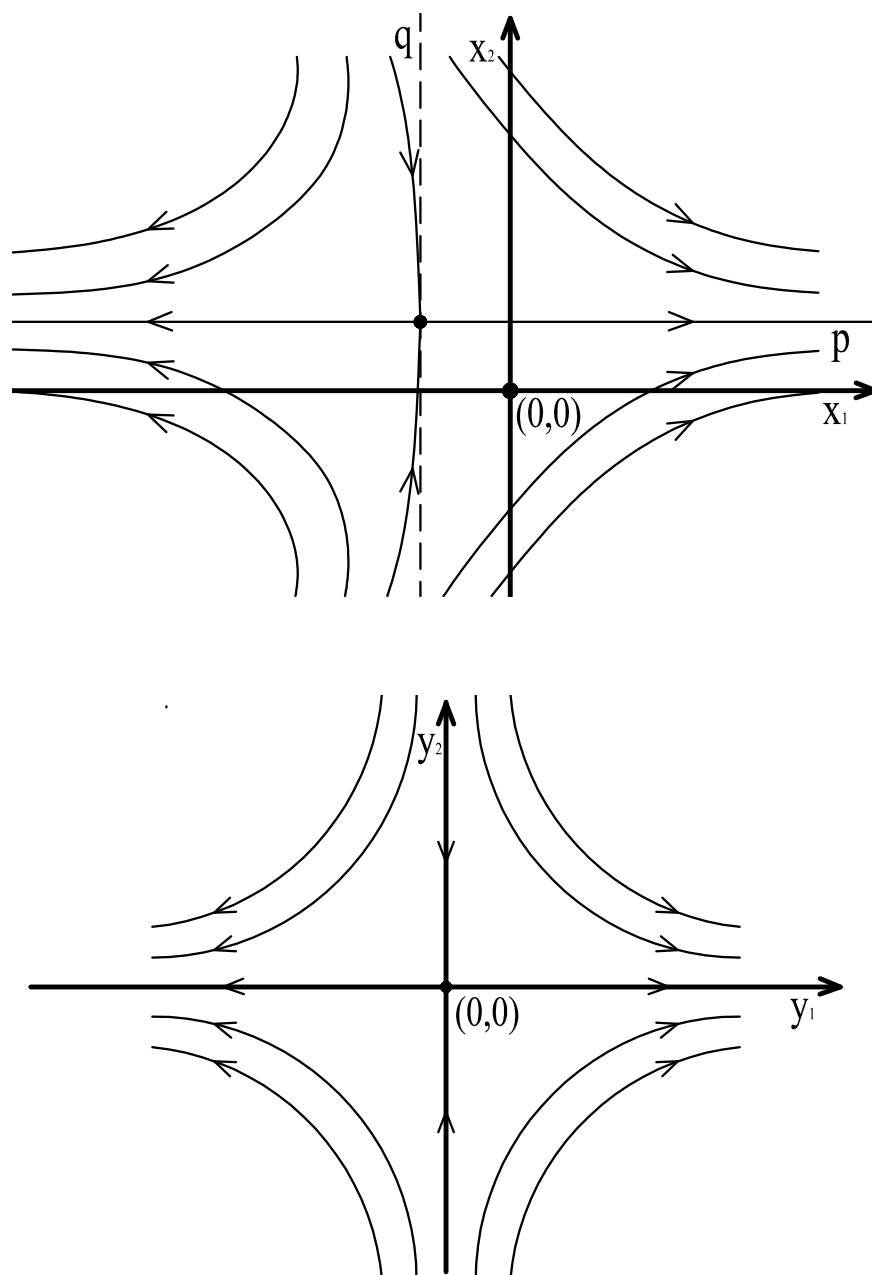
o

Princip linearizace spočívá v nahrazení nelineární rovnice $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ s kritickým bodem $\bar{\mathbf{x}}$ lineární rovnicí $\mathbf{y}' = J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$.

Lze ukázat, že fázové portréty nelineární soustavy rovnic a linearizované soustavy rovnic jsou tzv. kvalitativně stejné (neboli topologicky ekvivalentní), např. jestliže linearizovaná soustava má kritický bod typu sedlo, nelinearizovaná soustava bude mít odpovídající kritický bod také typu sedlo a trajektorie budou mít stejné chování jako v případě linearizované soustavy, jen budou trochu „zdeformované“. Změnu fázového portréty můžeme vidět na obrázku 1.1.

Definice 5 [Topologická ekvivalence] Fázové portréty soustav $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{y}' = \mathbf{u}(\mathbf{y})$ nazýváme *topologicky ekvivalentní*, jestliže existuje homeomorfní zobrazení $\mathbf{h} : M_1 \rightarrow M_2$, $M_1 \subset \mathbb{R}^2$, $M_2 \subset \mathbb{R}^2$, které zobrazuje trajektorie první soustavy na trajektorie druhé soustavy při zachování směru jejich probíhání (orientace). Přesněji vyjádřeno, pro fázové toky soustav platí vztah $\mathbf{h}(\varphi(t, \mathbf{x})) = \phi(t, \mathbf{h}(\mathbf{x}))$, kde $\varphi(t, \mathbf{x}) \subset M_1$ je fázový tok soustavy $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\phi(t, \mathbf{y}) \subset M_2$ je fázový tok soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{u}(\mathbf{y})$.

Připomeňme, že homeomorfní zobrazení \mathbf{h} je prosté, spojitě zobrazení, které má spojitě inverzní zobrazení \mathbf{h}^{-1} .



Obrázek 1.1: Změna tvaru trajektorií při nahrazení nelineární soustavy soustavou linearizovanou. Na prvním obrázku máme vyznačen fázový portrét nelineární soustavy rovnic $x'_1 = e^{x_1+x_2} - x_2$, $x'_2 = -x_1 + x_1x_2$. Na druhém obrázku máme fázový portrét linearizované soustavy. Oba kritické body jsou typu sedlo, avšak u linearizované soustavy došlo ke změně trajektorie na přímku, která u nelinearizované soustavy byla „zdeformovaná“ a k posunu kritického bodu do počátku souřadnic.

Dále si uvedeme Grobman-Hartmanovu větu, která říká, že blízko hyperbolického kritického bodu $\bar{\mathbf{x}}$ má fázový portrét nelineárního systému (1.1) stejnou kvalitativní strukturu jako fázový portrét lineárního systému $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, kde $A = J(\bar{\mathbf{x}})$.

Věta 1 (Grobman-Hartmanova věta) *Nechť soustava $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ má izolovaný (v jeho okolí se nenachází žádný jiný kritický bod) hyperbolický kritický bod $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Pak existuje okolí $M_1 \subset \mathbb{R}^2$ bodu $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ takové, že na tomto okolí je fázový portrét soustavy (1.1) topologicky ekvivalentní s fázovým portrétem lineární soustavy $\mathbf{y}' = J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$, kde $J(\bar{\mathbf{x}})$ je Jacobiho matice funkce \mathbf{f} v bodě $\bar{\mathbf{x}}$.*

Topologickou ekvivalenci nelineární soustavy a jisté lineární soustavy můžeme využít pro vytvoření fázového portréту i v okolí regulárního bodu. Uvažujme systém (1.1) s regulárním bodem $\hat{\mathbf{x}}$. Pak existuje okolí O bodu $\hat{\mathbf{x}}$ a okolí V bodu $(0, 0)$ tak, že systém (1.1) je na O topologicky ekvivalentní se systémem

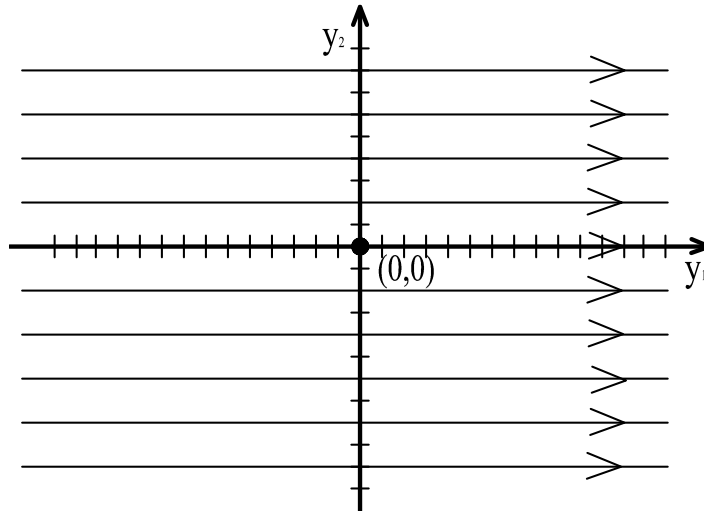
$$y'_1 = 1 \tag{1.3}$$

$$y'_2 = 0$$

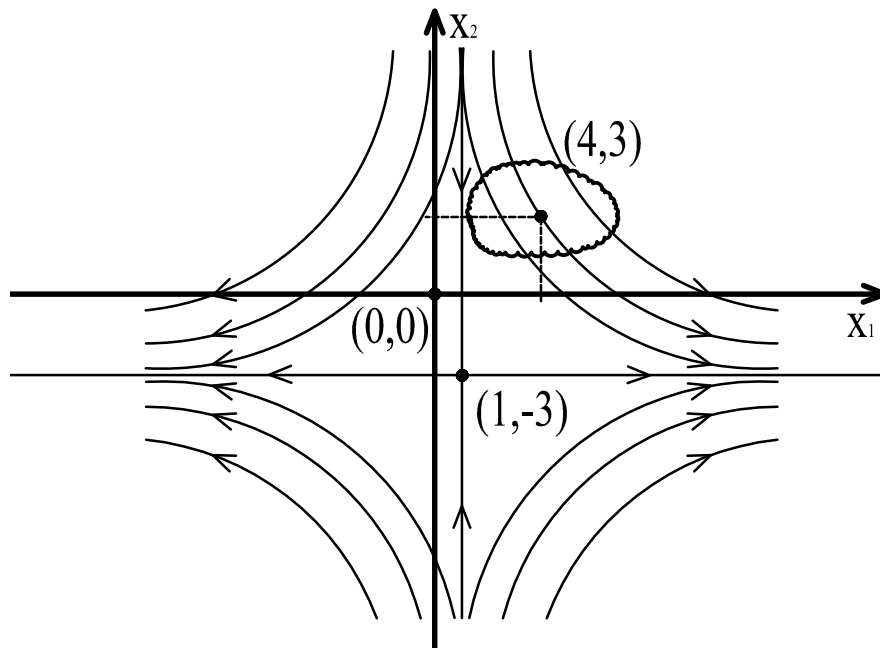
na V . Systém (1.3) nemá kritický bod, trajektorie systému jsou přímky rovnoběžné s osou y_1 . Fázový portrét systému (1.3) je znázorněn na obrázku 1.2.

Příklad 3 Uvažujme systém s jediným kritickým bodem $\bar{\mathbf{x}} = (1, -3)$ typu sedlo a regulárním bodem $\hat{\mathbf{x}} = (4, 3)$. Pak existuje okolí O bodu $\hat{\mathbf{x}} = (4, 3)$ a okolí V bodu $(0, 0)$ tak, že je tento systém na okolí bodu $\hat{\mathbf{x}} = (4, 3)$ topologicky ekvivalentní se systémem $y'_1 = 1$, $y'_2 = 0$ na V , viz obrázek 1.3.

◦



Obrázek 1.2: Fázový portrét systému $y_1' = 1, y_2' = 0$.



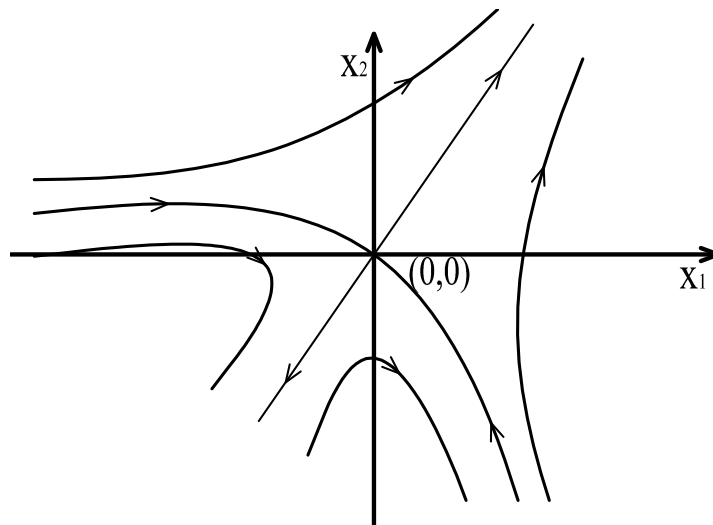
Obrázek 1.3: Fázový portrét: soustava s regulárním bodem $\hat{x} = (4, 3)$, soustava je na jeho okolí topologicky ekvivalentní se systémem (1.3) na okolí bodu $(0, 0)$.

1.2. Druhy kritických bodů

Stejně jako u soustavy lineárních diferenciálních rovnic, tak i u nelineárních rovnic rozlišujeme několik typů kritických bodů (sedlo, ohnisko, uzel, střed). Představíme si nejen jednotlivé typy kritických bodů, ale i možnosti, jak typ kritického bodu určit pomocí vlastních čísel Jacobiho matice.

Definice 6 [Kritický bod typu sedlo] Kritický bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ soustavy (1.1) se nazývá *sedlo*, pokud existují body $\bar{x}_0 \neq \bar{x}$ a $\bar{x}_1 \neq \bar{x}$ takové, že $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \bar{x}_0) = \bar{x}$ a $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \bar{x}_1) = \bar{x}$.

Věta 2 Nechť $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ je kritický bod soustavy (1.1) a $J(\bar{x})$ je příslušná Jacobiho matice s vlastními čísly λ_1, λ_2 , kde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Je-li $\text{sgn}(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = -1$, je kritický bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ sedlem.

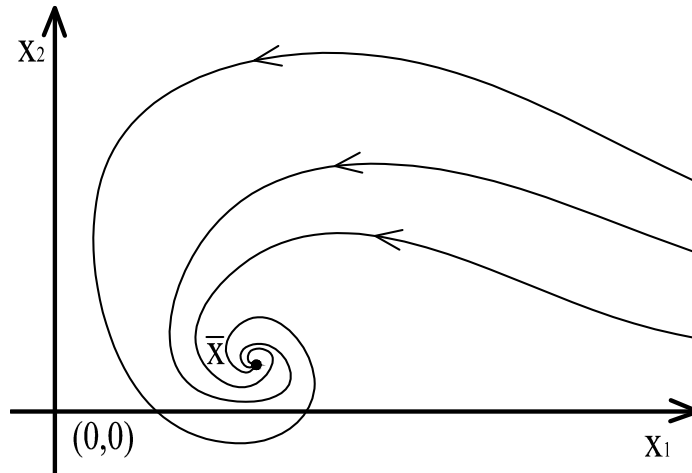


Obrázek 1.4: Příklad fázového portréту nelineární soustavy s kritickým bodem $(0,0)$ typu sedlo.

Definice 7 [Kritický bod typu ohnisko] Kritický bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ soustavy (1.1) se nazývá *ohnisko*, pokud existuje okolí M_1 kritického bodu \bar{x} takové, že pro každý

bod \bar{x}_0 z tohoto okolí M_1 oběhne orbita konvergující k \bar{x} nekonečněkrát bod \bar{x} pro $t \rightarrow \infty$ nebo pro $t \rightarrow -\infty$.

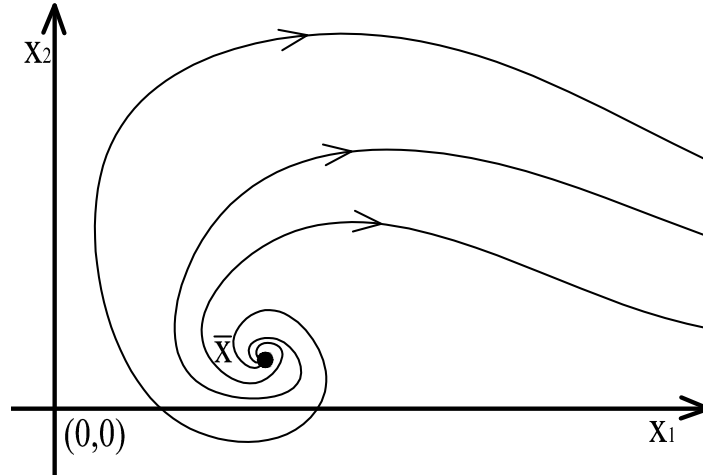
Věta 3 *Nechť $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ je kritický bod soustavy (1.1) a $J(\bar{x})$ je příslušná Jacobiho matice s vlastními čísly λ_1 a λ_2 a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \neq 0$. Jestliže $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, je kritický bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ ohniskem.*



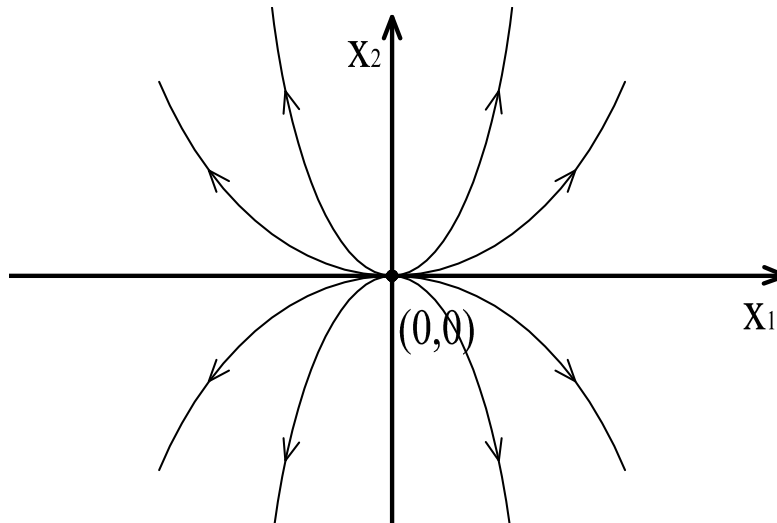
Obrázek 1.5: Příklad fázového portréту nelineární soustavy s kritickým bodem \bar{x} typu ohnisko.

Definice 8 [Kritický bod typu uzel] Kritický bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ soustavy (1.1) se nazývá *uzel*, pokud existuje okolí M_1 kritického bodu \bar{x} takové, že pro každý bod \bar{x}_0 z tohoto okolí M_1 orbita konvergující k \bar{x} má konečný počet oběhnutí bodu \bar{x} pro $t \rightarrow -\infty$ nebo pro $t \rightarrow \infty$.

Věta 4 *Nechť $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ je kritický bod soustavy (1.1) a $J(\bar{x})$ je příslušná Jacobiho matice s vlastními čísly λ_1 a λ_2 , $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Je-li $\text{sgn}(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = 1$, je kritický bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ uzlem.*



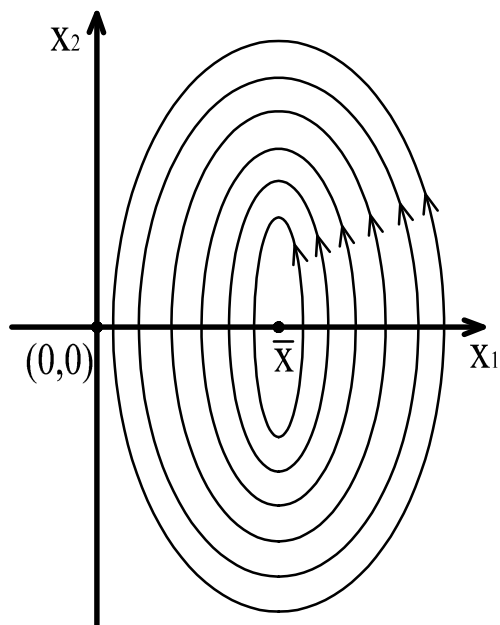
Obrázek 1.6: Příklad fázového portréту nelineární soustavy s kritickým bodem \bar{x} typu ohnisko.



Obrázek 1.7: Příklad fázového portréту nelineární soustavy s kritickým bodem $(0,0)$ typu uzel.

Definice 9 [Kritický bod typu střed] Kritický bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ soustavy (1.1) je *středem*, jestliže existuje okolí tohoto bodu takové, že obsahuje uzavřené orbity obsahující ve svém středu kritický bod \bar{x} .

Věta 5 *Nechť $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ je kritický bod soustavy (1.1) a $J(\bar{x})$ je příslušná Jacobiho matice s vlastními čísly λ_1 a λ_2 a nechť $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Jestliže $\lambda_1 = \beta i$, $\lambda_2 = -\beta i$, je kritický bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ středem.*



Obrázek 1.8: Příklad fázového portréту nelineární soustavy s kritickým bodem \bar{x} typu střed.

1.3. Stabilita kritických bodů

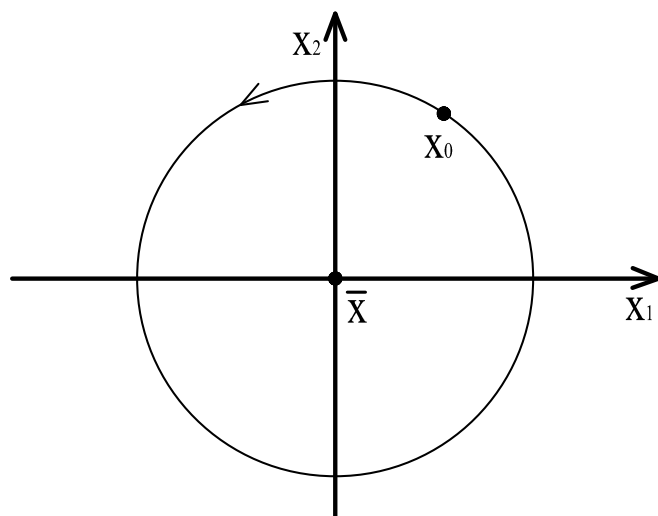
Stabilita kritických bodů slouží k určení chování trajektorií blízko kritických bodů v čase. Mezi základní typy stability patří Ljapunovská stabilita, asymptotická stabilita a nestabilita. Pro stabilní kritický bod existuje takové okolí tohoto kritického bodu, které trajektorie vstupující do tohoto okolí při rostoucím čase neopustí. Pokud je kritický bod asymptoticky stabilní, znamená to, že při rostoucím čase se trajektorie navíc blíží k tomuto kritickému bodu. Jestliže je kritický bod nestabilní, pak trajektorie při rostoucím čase nezůstávají v okolí kritického bodu, do kterého vstoupily. Představme si definice jednotlivých druhů stability kritických bodů a možnosti, jak určit typ stability kritického bodu opět pomocí vlastních čísel Jacobiho matice.

Definice 10 [stabilita a nestabilita hyperbolických kritických bodů] Nechť je dán fázový tok φ soustavy (1.1) definovaný pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Hyperbolický kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ této diferenciální rovnice se nazývá *Ljapunovsky stabilní*, jestliže pro všechna $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna \mathbf{x}_0 splňující podmínku $|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0| < \delta$ platí $|\varphi(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}| < \epsilon$, pro všechna $t \geq 0$, kde $|\bullet|$ značí normu v \mathbb{R}^2 . Jestliže kritický bod není stabilní, nazývá se *nestabilní*.

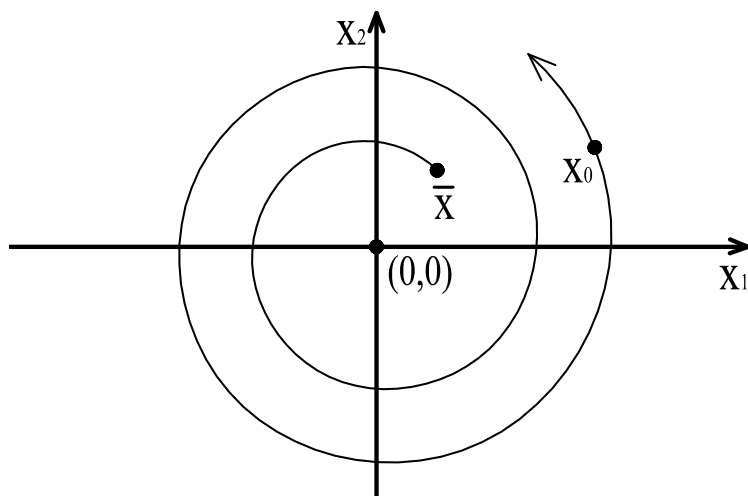
Věta 6 Nechť $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ je hyperbolický kritický bod soustavy (1.1). Jestliže reálné části všech vlastních čísel Jacobiho matice $J(\bar{\mathbf{x}})$ jsou záporné nebo rovny nule, je kritický bod $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ stabilní.

Věta 7 Nechť $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ je hyperbolický kritický bod soustavy (1.1). Jestliže alespoň jedno vlastní číslo Jacobiho matice má kladnou reálnou část, je kritický bod $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ nestabilní.

Definice 11 [asymptotická stabilita hyperbolických kritických bodů] Řekneme, že hyperbolický kritický bod $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ je *asymptoticky stabilní*, jestliže je Ljapunovsky stabilní a jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna \mathbf{x}_0 splňující podmínku $|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0| < \delta$ platí $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}| = 0$.

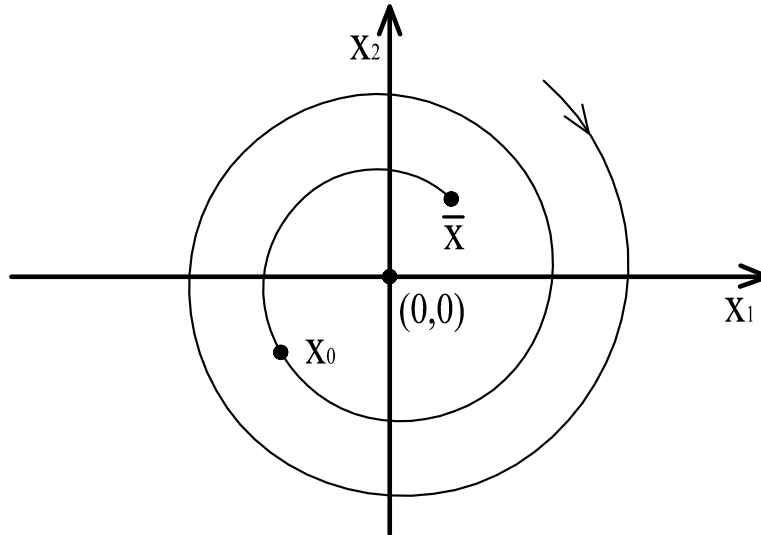


Obrázek 1.9: Stabilní kritický bod \bar{x} je Ljapunovsky ale ne asymptoticky stabilní kritický bod.



Obrázek 1.10: Nestabilní kritický bod \bar{x} .

Věta 8 *Nechť $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ je hyperbolický kritický bod soustavy (1.1). Jestliže reálné části všech vlastních čísel Jacobiho matice $J(\bar{x})$ jsou záporné, je kritický bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ asymptoticky stabilní.*



Obrázek 1.11: Asymptoticky stabilní kritický bod \bar{x} .

Příklad 4 Určíme stabilitu a nestabilitu kritických bodů soustavy z příkladu 1. Zaměříme se pouze na druhý bod $\bar{x}_2 = (1, -3)$ a třetí kritický bod $\bar{x}_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, neboť jen tyto body jsou hyperbolické. Protože jedno vlastní číslo Jacobiho matice kritického bodu $\bar{x}_2 = (1, -3)$ má reálnou část větší než nula a druhé číslo Jacobiho matice má reálnou část menší než nula, jedná se o nestabilní hyperbolický kritický bod. Kritický bod $\bar{x}_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ je asymptoticky stabilní, jelikož reálné části vlastních čísel jsou záporné.

o

1.4. Prvý integrál soustavy diferenciálních rovnic

Dosud jsme se při sestavení fázového portréту soustavy (1.1) zabývali způsobem sestavení trajektorií v okolí hyperbolického kritického bodu. V případě nehyperbolického kritického bodu nemůžeme využít dosud uvažovaný způsob s využitím Grobman-Hartmanovy věty a k sestavení fázového portréту musíme použít jiné metody. Chování trajektorií v okolí nehyperbolických kritických bodů můžeme

určit pomocí tzv. prvního integrálu dané soustavy diferenciálních rovnic. Prvým integrálem soustavy (1.1) bude jistá funkce H dvou proměnných x_1 a x_2 . Lokální extrémy, resp. sedla funkce H , odpovídají kritickým bodům a vrstevnice funkce H pak odpovídají trajektoriím fázového portréту této soustavy diferenciálních rovnic.

Definice 12 Necht' $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a funkce $H(x_1, x_2) \in C^2(G)$. Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(x_1, x_2) \\x'_2 &= f_2(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{1.4}$$

tj. naši známou soustavu (1.1). Funkce H se nazývá *prvým integrálem soustavy* (1.4), jestliže

$$\mathbf{f} \cdot \text{grad } H = (f_1, f_2) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) = 0$$

pro všechna $(x_1, x_2) \in G$.

Věta 9 *Je-li funkce H prvním integrálem soustavy (1.4), pak je H konstantní na každé trajektorii této soustavy.*

Vrstevnicí funkce H o úrovni $c \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu všech bodů $(x_1, x_2) \in G$ takových, kde $H(x_1, x_2) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Globální fázový portrét systému (1.4) se tedy skládá ze všech vrstevnic funkce H .

Ukažme si jednotlivé kroky vedoucí k určení fázového portrétu v okolí nehyperbolického bodu systému (1.4). Uvažujme systém (1.4)

$$x'_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t))$$

$$x'_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t))$$

a necht' $\bar{\mathbf{x}}$ je nehyperbolickým kritickým bodem tohoto systému.

Nejprve hledáme funkci H tak, aby byla prvním integrálem soustavy (1.4). To lze formálně provést „eliminací“ proměnné t ze soustavy a následnou snahou získat pouze vztah mezi proměnnými x_1 a x_2 . Pokud vydělíme x'_1/x'_2 , dostaneme

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)},$$

tj. diferenciální rovnice pro neznámou funkci $x_2 = x_2(x_1)$. Jejím vyřešením dostaneme řešení soustavy (1.4) a z něho pak odvodíme předpis pro funkci $H(x_1, x_2)$. Stacionární body funkce H , tj. body podezřelé z extrému, představují kritické body \bar{x} .

Vrstevnice procházející kritickým bodem \bar{x} vyjádříme rovnicí $H(x_1, x_2) = H(\bar{x})$. Vykreslením vrstevnic funkce H o úrovních c , které jsou blízké hodnotě $H(\bar{x})$, získáme fázový portrét systému (1.4) v okolí kritického bodu \bar{x} .

Ke klasifikaci kritických bodů (tj. k určení, zda se jedná o typ sedlo nebo střed), které jsou nehyperbolické a jsou kritickými body systému (1.4), je nutné vypočítat parciální derivace druhého řádu funkce H a ty sestavit do matice $M(x_1, x_2)$:

$$M(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial^2 x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 H}{\partial^2 x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Na základě determinantu matice $M(x_1, x_2)$ v kritickém bodě \bar{x} můžeme rozlišovat kritický bod \bar{x} systému (1.4) na typ sedlo a střed. Pro nehyperbolické kritické body soustavy (1.4) platí následující věty:

Věta 10 *Nechť $\bar{x} \in G$ je nehyperbolický kritický bod systému (1.4). Jestliže je $\det(M(\bar{x})) < 0$, je kritický bod \bar{x} typu sedlo.*

Kritický bod \bar{x} , který je sedlem systému (1.4), je také sedlem funkce H .

Věta 11 *Nechť $\bar{x} \in G$ je nehyperbolický kritický bod systému (1.4). Jestliže je $\det(M(\bar{x})) > 0$, je kritický bod \bar{x} střed systému.*

V kritickém bodě $\bar{\mathbf{x}}$, který je středem systému (1.4), se nachází lokální extrém funkce H .

Kritické body systému odpovídající lokálnímu maximu funkce H jsou nestabilní a kritické body odpovídající lokálnímu minimu funkce H jsou Ljapunovsky stabilní.

Příklad 5 Uvažujme systém

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 - x_2^3 \\x'_2 &= 2x_1 + x_1^2.\end{aligned}$$

Rozhodneme o typech kritických bodů.

Nejprve je nutné určit, zda soustava obsahuje hyperbolické nebo nehyperbolické kritické body. Kritické body získáme vyřešením následující soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_2 - x_2^3 &= 0 \\2x_1 + x_1^2 &= 0.\end{aligned}$$

Vyřešením soustavy rovnic dostáváme celkem šest kritických bodů, a to

$\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$, $\bar{\mathbf{x}}_2 = (-2, 0)$, $\bar{\mathbf{x}}_3 = (0, 1)$, $\bar{\mathbf{x}}_4 = (0, -1)$, $\bar{\mathbf{x}}_5 = (-2, 1)$, $\bar{\mathbf{x}}_6 = (-2, -1)$.

V dalším kroku spočteme Jacobiho matici postupným derivováním funkcí f_1 a f_2 dle proměnných x_1 a x_2 , tedy

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x_2 - x_2^3)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_2 - x_2^3)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(2x_1 + x_1^2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(2x_1 + x_1^2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 3x_2^2 \\ 2 + 2x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro určení vlastních čísel Jacobiho matice $J(\bar{\mathbf{x}})$, pomocí nichž umíme rozlišit body hyperbolické a nehyperbolické, dosadíme postupně všechny kritické body do Jacobiho matice $J(\mathbf{x})$, tj.

$$J(\bar{\mathbf{x}}_1) = J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J(\bar{\mathbf{x}}_2) = J(-2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J(\bar{\mathbf{x}}_3) = J(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J(\bar{\mathbf{x}}_4) = J(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J(\bar{\mathbf{x}}_5) = J(-2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J(\bar{\mathbf{x}}_6) = J(-2, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní už můžeme spočítat vlastní čísla jednotlivých Jacobiho matic. Pro první kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ určíme vlastní čísla pomocí charakteristické rovnice matice $J(\bar{\mathbf{x}}_1)$

$$\det(J(\bar{\mathbf{x}}_1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0,$$

která budou rovna číslům $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ je hyperbolický bod, neboť ani jedno vlastní číslo nemá nulovou reálnou část.

Pro druhý kritický bod vytvoříme charakteristickou rovnici a následně spočítáme vlastní čísla

$$\det(J(\bar{\mathbf{x}}_2) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 = 0,$$

která budou rovna číslům $\lambda_1 = \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}i$. Kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_2 = (-2, 0)$ je nehyperbolický, proto nemůžeme k určení jeho typu využít Grobman-Hartmanovu větu.

Analogicky bychom postupovali i pro zbylé kritické body. Pro kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_3 = (0, 1)$ bychom získali vlastní čísla $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, pro kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_4 = (0, -1)$ vlastní čísla $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, pro kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_5 = (-2, 1)$

vlastní čísla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ a pro kritický bod $\bar{\mathbf{x}}_6 = (-2, -1)$ vlastní čísla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$.

Dle vlastních čísel vidíme, že kritické body $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$, $\bar{\mathbf{x}}_5 = (-2, 1)$ a $\bar{\mathbf{x}}_6 = (-2, -1)$ jsou hyperbolické kritické body a kritické body $\bar{\mathbf{x}}_2 = (-2, 0)$, $\bar{\mathbf{x}}_3 = (0, 1)$, $\bar{\mathbf{x}}_4 = (0, -1)$ jsou body nehyperbolické. Typ kritických bodů $\bar{\mathbf{x}}_1$, $\bar{\mathbf{x}}_5$, $\bar{\mathbf{x}}_6$ by šel určit pomocí Grobman-Hartmanovy věty. Ukážeme si ale, že je možno je vyšetřit i pomocí prvního integrálu dané soustavy. Vyšetříme tak zároveň body hyperbolické i nehyperbolické.

Nejprve musíme najít funkci $H(x_1, x_2)$, jež bude prvním integrálem soustavy

$$x'_1(t) = x_2 - x_2^3$$

$$x'_2(t) = 2x_1 + x_1^2.$$

Dle výše uvedeného návodu tedy postupujeme následujícím způsobem:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2x_1 + x_1^2}{x_2 - x_2^3}$$

$$\int (x_2 - x_2^3) dx_2 = \int (2x_1 + x_1^2) dx_1$$

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^4}{4} = x_1^2 + \frac{x_1^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Vrstevnice funkce H o úrovní $c \in \mathbb{R}$ je tedy křivka daná rovnicí

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^4}{4} - x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} = c,$$

tj. prvním integrálem naší soustavy diferenciálních rovnic je funkce

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^4}{4} - x_1^2 - \frac{x_1^3}{3}.$$

Část fázového portréту získáme z hladin funkce H . Dosazením kritických bodů do funkce H získáme úrovně jednotlivých vrstevnic procházejících těmito body

$$H(0, 0) = 0$$

$$H(-2, 0) = -\frac{4}{3}$$

$$H(0, 1) = \frac{1}{4}$$

$$H(0, -1) = \frac{1}{4}$$

$$H(-2, 1) = -\frac{13}{12}$$

$$H(-2, -1) = -\frac{13}{12}$$

Protože v bodech $(0, 1)$ a $(0, -1)$ a dále v bodech $(-2, 1)$ a $(-2, -1)$ má funkce H stejné funkční hodnoty, budou tyto body ležet na stejné vrstevnici, neboli na jedné trajektorii. Jednotlivé vrstevnice procházející kritickými body jsou křivky dané rovnicemi

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^4}{4} - x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} = 0$$

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^4}{4} - x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^4}{4} - x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^4}{4} - x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} = -\frac{13}{12}$$

Vykreslením jednotlivých křivek získáme několik trajektorií z globálního fázového portréту (viz obrázek 1.12).

Pro určení typu kritických bodů systému nyní sestrojíme matici $M(x_1, x_2)$ s druhými parciálními derivacemi funkce $H(x_1, x_2)$:

$$M(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2 - 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 - 3x_2^2 \end{pmatrix}.$$

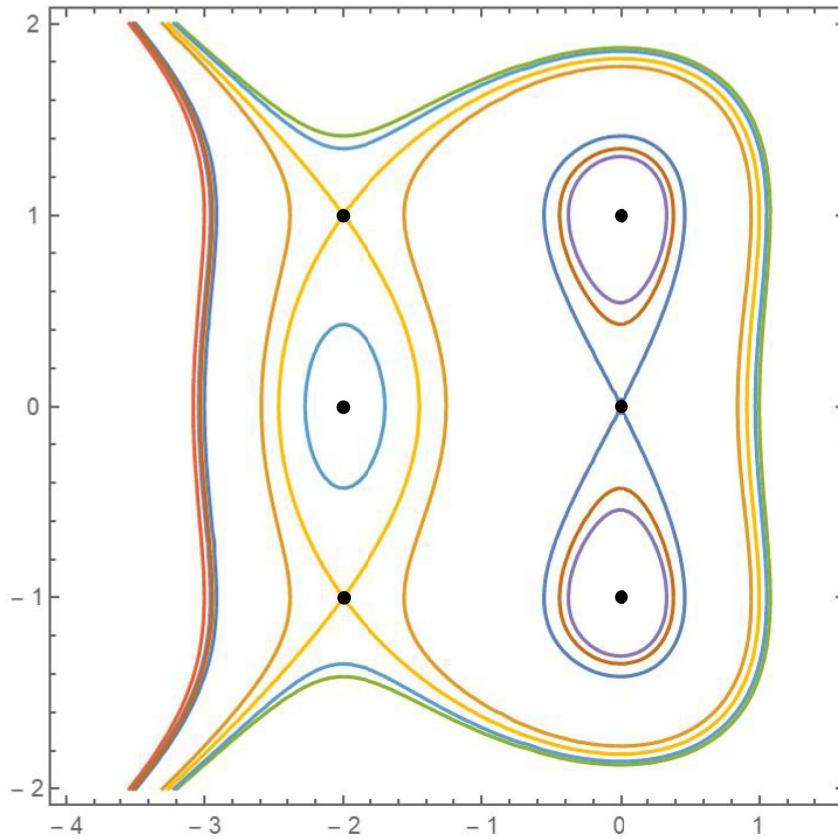
O lokálním minimu nebo maximu v těchto kritických bodech rozhodneme pomocí determinantu matice $M(x_1, x_2)$ v jednotlivých kritických bodech, tj.

$$\det(M(\bar{\mathbf{x}}_1)) = \det(M(0, 0)) = -2 < 0 \dots \text{kritický bod typu sedlo}$$

$$\det(M(\bar{\mathbf{x}}_2)) = \det(M(-2, 0)) = 2 > 0 \dots \text{kritický bod typu střed}$$

$$\det(M(\bar{\mathbf{x}}_3)) = \det(M(0, 1)) = 4 > 0 \dots \text{kritický bod typu střed}$$

$$\det(M(\bar{\mathbf{x}}_4)) = \det(M(0, -1)) = 4 > 0 \dots \text{kritický bod typu střed}$$



Obrázek 1.12: Část fázového portréту soustavy nelineárních diferenciálních rovnic v rovině z Příkladu 5.

$$\det(M(\bar{x}_5)) = \det(M(-2, 1)) = -4 < 0 \dots \text{kritický bod typu sedlo}$$

$$\det(M(\bar{x}_6)) = \det(M(-2, -1)) = -4 < 0 \dots \text{kritický bod typu sedlo}$$

Na obrázku 1.12 můžeme vidět kritické body $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, které ve svém okolí obsahují periodické trajektorie, jež tyto kritické body obíhají. Dle determinantu matice $M(x_1, x_2)$ jsme se přesvědčili, že se jedná o kritické body typu střed, tj. o lokální extrémy funkce H . Přitom v bodě $(-2, 0)$ nastává lokální minimum funkce H a v bodech $(0, 1)$ a $(0, -1)$ jsou lokální maxima funkce H . Ostatní kritické body jsou kritické body typu sedlo.

o

Kapitola 2

Goodwinův model rozdělení příjmů

2.1. Richard M. Goodwin

V této kapitole vycházíme především z [7], [8].

Americký ekonom a matematik Richard M. Goodwin se nechal inspirovat modelem o dravci a kořisti (tzv. Lotka–Volterra model) a aplikoval ho do ekonomie. Goodwin představil svůj model v roce 1967. Hlavním záměrem bylo ukázat konflikt mezi pracovníky a vlastníky kapitálu, který by mohl vytvářet cykly v ekonomice. Proto je Goodwinův model též nazýván jako model třídního boje, který vychází z tzv. Marxistické teorie, kdy dochází k boji mezi vykořisťovateli a vykořisťovanými.

Kapitalisté představují vykořisťovatele, kteří se snaží vytvořit co nejvyšší zisky a tím i investice do kapitálu, vykořisťování jsou pak pracovníci. Ekonomika střídá fáze, kdy nejprve vysoká míra zaměstnanosti může zvýšit podíl mezd pracovníků na výstupu, což má v další fázi důsledek snížení zisku kapitalistů a tím i poptávky po práci, zaměstnanosti a podílu mezd pracovníků na výstupu.

2.2. Model Lotka–Volterra

Jak jsme uvedli výše, Goodwin vycházel z modelu Lotka–Volterra, proto si na začátek představíme tento model. V modelu o dravci a kořisti uvažujeme uzavřený systém se dvěma populacemi, a to populaci kořisti a populaci dravců. Předpokládáme, že populace kořisti slouží jako potrava pro dravce a má vždy dostatek potravy, kterou tvoří např. rostliny, plankton. Populace kořisti je snižována setkáváním s populací dravců. Naopak populace dravců má omezené množství potravy, kterou tvoří kořist, a přibývání populace dravců je opět závislé na setkání s kořistí. V modelu nás pak zajímá závislost mezi množstvím kořisti a množstvím dravců v čase.

Změna velikosti populace kořisti závisí lineárně na velikosti populace kořisti a zároveň také lineárně závisí na počtu setkání mezi kořistí a dravci. Stejně tak změna velikosti populace dravců závisí lineárně na velikosti této populace a zároveň také lineárně závisí na počtu setkání mezi kořistí a dravci. Pro množství kořisti v čase t používáme značení $x(t)$ a velikost populace dravců v čase t značíme $y(t)$.

Zaměříme se nejprve na situaci, kdy v modelu uvažujeme pouze populaci kořisti. Růst populace kořisti bez zásahu dravců vyjadřuje diferenciální rovnice

$$x'(t) = ax(t), \tag{2.1}$$

kde kladná konstanta a představuje střední rychlost růstu populace kořisti.

Nyní se zaměříme na situaci, kdy uvažujeme pouze existenci populace dravců. V takovém případě by docházelo k vymírání dravců z důvodu absence potravy. Pokles množství dravců pak vyjádříme diferenciální rovnicí

$$y'(t) = -dy(t), \tag{2.2}$$

kde kladná konstanta d je nazývána koeficientem úmrtnosti.

Protože ale neuvažujeme jednodruhovou populaci, musíme zavést matematické

vyjádření pro setkání dravců a kořisti. Počet všech možných setkání v čase t je vyjádřen členem $x(t)y(t)$. Vyjádření změn velikostí obou populací, kdy uvažujeme i jejich vzájemné ovlivňování, můžeme vyjádřit pomocí soustavy nelineárních diferenciálních rovnic v rovině:

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \quad (2.3)$$

$$y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t).$$

Z první rovnice vidíme, že růst populace kořisti už bude omezen zahrnutím predátorů. Kladný koeficient b , který se nazývá koeficient predace, značí „intenzitu“, s jakou dochází k úbytku kořisti v důsledku interakce s populací predátora. V případě velkého množství dravců $y(t)$ může být přírůstek kořisti záporný, což by mělo za následek zmenšení velikosti populace kořisti.

Druhá rovnice vyjadřuje situaci, kdy se díky setkávání obou populací stává kořist potravou pro dravce a tím dochází k nárůstu počtu dravců. Kladný koeficient c , nazývaný koeficient porodnosti, značí „intenzitu“ nárůstu velikosti populace predátorů, ke kterému dochází v důsledku stětavání s kořistí, která slouží jako potrava pro dravce.

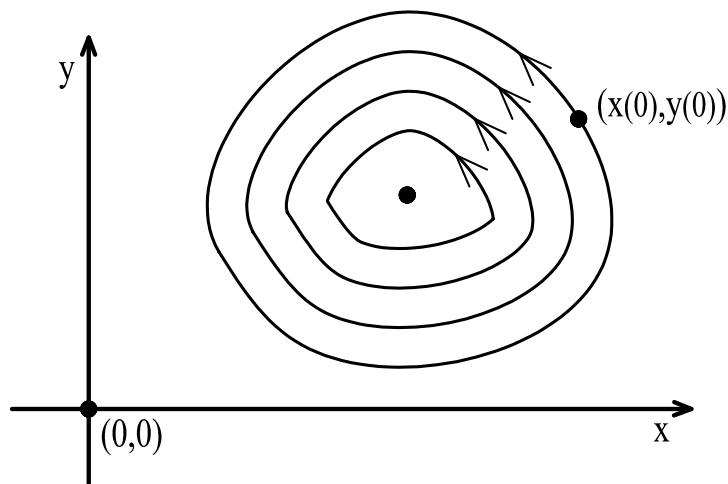
Část fázového portréту soustavy (2.3) máme znázorněnou na obrázku 2.1. Z něho vidíme, že soustava má dva rovnovážné stavy, které získáme vyřešením soustavy

$$ax(t) - bx(t)y(t) = 0 \quad (2.4)$$

$$cx(t)y(t) - dy(t) = 0.$$

Následně získáme první rovnovážný stav $(0, 0)$ a druhý rovnovážný stav $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$.

Nyní se zaměříme na popis fázového portrétu na obr. 2.1 a na vývoj množství dravců $y(t)$ a kořisti $x(t)$. Uvažujme počáteční stav kořisti $x(0)$ a počáteční stav u dravců $y(0)$, viz obr. 2.1. Od tohoto okamžiku by s rostoucím časem dravci lovili kořist, která by postupně vymírala a přibývalo by dravců v závislosti na setkání těchto dvou populací. Tato situace by pokračovala až do doby, kdy by dravci měli dostatek potravy. Poté by začalo ubývat nejen kořisti, ale i dravců, protože by neměli dostatek potravy. V důsledku menší populace predátorů by



Obrázek 2.1: Fázový portrét: model Lotka-Volterra.

docházelo k růstu populace kořisti. S jejich rostoucím množstvím se tak zvětšuje množství potravy pro dravce a tím i růst populace dravců až do doby, kdy bychom se dostali do našeho počátečního bodu a celá situace by se opakovala.

2.3. Goodwinův model

Nyní aplikujme model dravec a kořist do ekonomie. Goodwinův model se snaží vysvětlit závislost kolísání zaměstnanosti a podílu mezd všech pracujících osob na národním důchodu. Neznámé proměnné, se kterými budeme v Goodwinově modelu pracovat, představují podíl mezd všech pracujících osob na národním důchodu y a míru zaměstnanosti x . Základní princip vyplývá z myšlenky Volterra, kdy nadbytek jedné strany má za následek úbytek druhé strany. V našem případě by vysoká míra zaměstnanosti měla za následek tendenci snižovat mzdy pracovníků ze stran zaměstnavatelů a naopak, při vysokých mzdách by zaměstnavatelé snižovali počet pracovníků.

Pro určení závislosti mezi podílem mezd pracujících na národním důchodu a mírou zaměstnanosti použil Goodwin výše představený model dravec a kořist. Populaci dravců nám nyní představuje podíl mezd pracovníků na národním důchodu a populaci kořisti míra zaměstnanosti. Kdybychom uvažovali počáteční podmínku opět v bodě $(x(0), y(0))$, nejprve by nám klesala míra zaměstnanosti a podíl mezd pracovníků na národním důchodu by rostl. Až by podíl mezd pracovníků na národním důchodu dosahoval maxima, začali by zaměstnavatelé snižovat jak počet zaměstnanců, tak výši mezd. Při velké nezaměstnanosti však zaměstnavatelé budou potřebovat zvyšovat počet zaměstnanců a zaměstnanost začne růst. S rostoucí zaměstnaností se začne zvyšovat i podíl mezd pracovníků na národním důchodu. S rostoucí mzdou však zaměstnavatelé budou mít tendenci snižovat počet pracovníků.

Před odvozením modelu si uvedeme přehled veličin, se kterými budeme nadále pracovat. V následující kapitole budeme všechny proměnné uvažovat v časovém okamžiku t , tj. budeme na ně pohlížet jako na funkce závislé na čase. V některých odvozeních pro lepší přehlednost a srozumitelnost nebudeme závislost těchto veličin na čase zdůrazňovat, tj. například pro nabídku pracovní síly budeme psát pouze N (místo $N(t)$). Pro výchozí stav zvolíme $t = 0$. V našem modelu budeme pracovat s následujícími funkcemi (veličinami):

$N(t)$... nabídka pracovní síly (počet osob schopných práce), $N(t) > 0$.

$L(t)$... počet pracujících osob, $L(t) > 0$.

$w(t)$... průměrná roční mzda, neboli roční mzda vyjádřená na jednoho pracovníka v Kč, $w(t) > 0$.

$Q(t)$... národní důchod, tj. hodnota veškeré vykonané práce, neboli oceněné výstupy vyjádřené v Kč, $Q(t) > 0$.

$a(t)$... produktivita práce, neboli hodnota práce vykonaná jedním pracovní-

kem, kterou lze vypočítat vztahem

$$a = \frac{Q}{L}. \quad (2.5)$$

$K(t)$... hodnota kapitálu v Kč, neboli vstupy sloužící k dosažení produkce.

$S(t)$... úspory, neboli zisk vyjádřen v Kč, který je použitý na růst kapitálu, $S(t) \geq 0$.

$x(t)$... míra zaměstnanosti, kterou spočteme následujícím podílem

$$x = \frac{L}{N}, \quad (2.6)$$

obor hodnot je interval $\langle 0, 1 \rangle$.

$x'(t)$... rychlost změny míry zaměstnanosti v čase t .

$y(t)$... podíl mezd všech pracujících osob na národním důchodu, neboli jednotkové mzdové náklady, které říkají, kolik z toho, co pracující vytvoří, je mu vyplaceno na mzdách. Podíl mezd spočteme pomocí vztahu

$$y = \frac{wL}{Q} = \frac{w}{a}, \quad (2.7)$$

obor hodnot je interval $\langle 0, 1 \rangle$.

$y'(t)$... rychlost změny podílu pracovníků na národním důchodu, tj. rychlost změny jednotkových mzdových nákladů.

Před odvozením Goodwinova modelu musíme uvést několik předpokladů pro jeho model:

1. *Uzavřená ekonomika.*

Ekonomika je uzavřená a bez zásahů státu. Při použití Goodwinova modelu na modelování dat v České republice je tento předpoklad porušen, protože

jako většina vyspělých států má i ČR otevřenou smíšenou ekonomiku, která se vyznačuje státními regulacemi.

2. *Dva výrobní faktory.*

V ekonomice uvažujeme pouze dva výrobní faktory, a to pracovní sílu a kapitál. Tyto výrobní faktory produkují pouze jedno zboží, které může být použito pro spotřebu nebo použito pro růst kapitálu. I tento předpoklad je však velmi striktní a ve skutečnosti nikdy nebude dodržen.

3. *Úspory nepoužité na výplaty zaměstnancům se vloží do růstu kapitálu.*

Zaměstnanci veškeré příjmy spotřebují, zatímco zaměstnavatelé část, kterou nevěnují na výplaty zaměstnanců (tzn. úspory S), vloží do růstu kapitálu, tzn.

$$S = K'. \quad (2.8)$$

4. *Konstantní míra růstu produktivity práce.*

Vlivem neustálého technického pokroku roste produktivita práce konstantní rychlostí. Díky tomuto předpokladu máme zaručeno, že růst produktivity nemůže být záporný. Nechť pro produktivitu práce a platí, že je rostoucí konstantní rychlostí α , $\alpha > 0$, tj.

$$\alpha = \frac{a'}{a}. \quad (2.9)$$

Produktivitu práce v čase t lze uvažovat ve tvaru $a(t) = a_0 e^{\alpha t}$, kde a_0 je počáteční úroveň produktivity práce. Tento vztah odvodíme s využitím logaritmické derivace

$$(\ln(a(t)))' = \frac{a(t)'}{a(t)} = \alpha$$

$$\ln(a(t)) = \alpha t + c, c \in \mathbb{R}$$

$$a(t) = e^{\alpha t + c} = e^{c + \alpha t} = a_0 e^{\alpha t}.$$

5. *Míra změny mezd závisí na míře zaměstnanosti.*

Vztah změny reálných mezd a míry zaměstnanosti je modelován modifikovanou Phillipsovou křivkou. Goodwin tuto změnu mezd modeluje pomocí přímkou ve tvaru

$$\frac{w'}{w} = -u + cx, u > 0, c > 0, u, c \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Její přesnější odvození bude uvedené dále.

6. *Konstantní míra růstu nabídky pracovní síly.*

Nabídka pracovní síly stejně jako produktivita práce trvale konstantně roste. Nechť $N(t)$ značí nabídku pracovní síly v čase t a β , $\beta > 0$ značí míru růstu nabídky pracovní síly, tj.

$$\beta = \frac{N'}{N}. \quad (2.11)$$

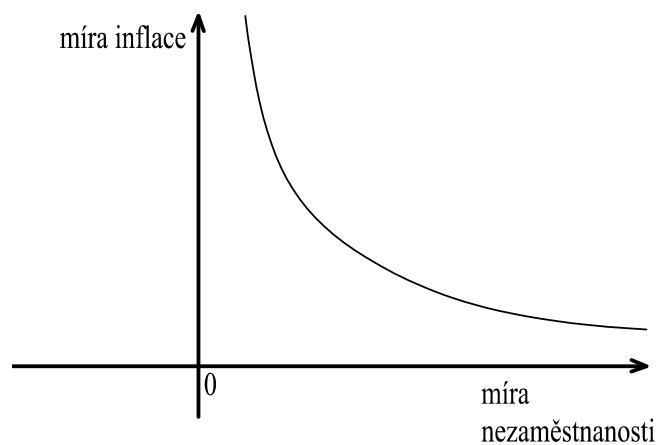
Odvození nabídky pracovní síly $N(t)$ je stejné jako v případě míry růstu produktivity práce:

$$(\ln(N(t)))' = \frac{N(t)'}{N(t)} = \beta$$

$$\ln(N(t)) = \beta t + c, c \in \mathbb{R}$$

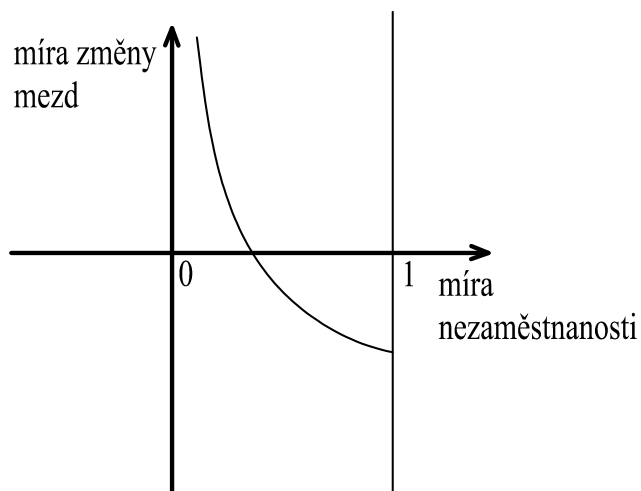
$$N(t) = e^{\beta t + c} = e^{c + \beta t} = N_0 e^{\beta t}.$$

Nyní se blíže podívejme na odvození vztahu mezi změnou reálných mezd a mírou zaměstnanosti. Míra změny mezd $\frac{w'}{w}$ je dle předpokladu 5 ovlivněna mírou zaměstnanosti. Goodwin předpokládal, že se míra změny mezd řídí podle Phillipsovy křivky. Phillipsova křivka (obr. 2.2) vyjadřuje vztah mezi mírou nezaměstnanosti a mírou inflace, která má klesající tvar, neboť snižující se míra nezaměstnanosti má za následek růst inflace. Míru nezaměstnanosti $z(t)$ získáme jako rozdíl $z(t) = 1 - x(t)$.



Obrázek 2.2: Phillipsova křivka.

Nyní nahradíme míru inflace mírou změny mezd a aplikujeme Phillipsovu křivku na modelování závislosti míry změny mezd a míry nezaměstnanosti (viz obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Vztah mezi mírou změny mezd a mírou nezaměstnanosti.

Vzhledem ke tvaru Phillipsovy křivky Goodwin předpokládal, že míra růstu mezd roste s rostoucí mírou zaměstnanosti a že jsou splněny následující podmínky:

$$1. \frac{w'(t)}{w(t)} = f(x(t))$$

Míra změny mezd je modelována pomocí funkce $f(x(t))$, která závisí na míře zaměstnanosti $x(t)$.

$$2. \lim_{x(t) \rightarrow 1} f(x(t)) = \infty$$

Druhá podmínka nám říká, že s rostoucí mírou zaměstnanosti roste i podíl mezd na výstupu.

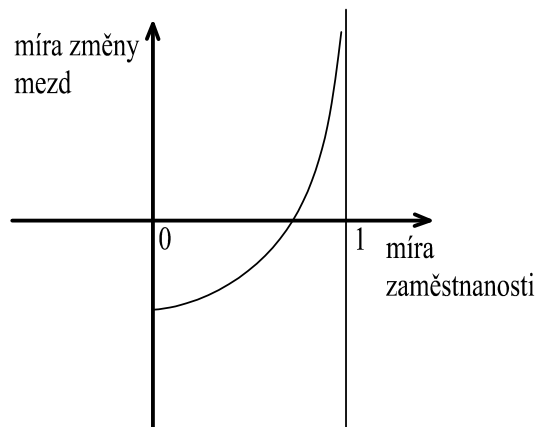
$$3. \lim_{x(t) \rightarrow 0} f(x(t)) < 0$$

Tato podmínka nám naopak udává, že s klesající mírou zaměstnanosti podíl mezd na výstupu klesá.

$$4. \frac{df(x(t))}{dx} > 0$$

Poslední podmínka vyjadřuje, že s rostoucí mírou zaměstnanosti $x(t)$ roste i míra růstu mezd.

Pokud přejdeme od míry nezaměstnanosti k míře zaměstnanosti, dojde k transformaci Phillipsovy křivky, viz obr. 2.4.

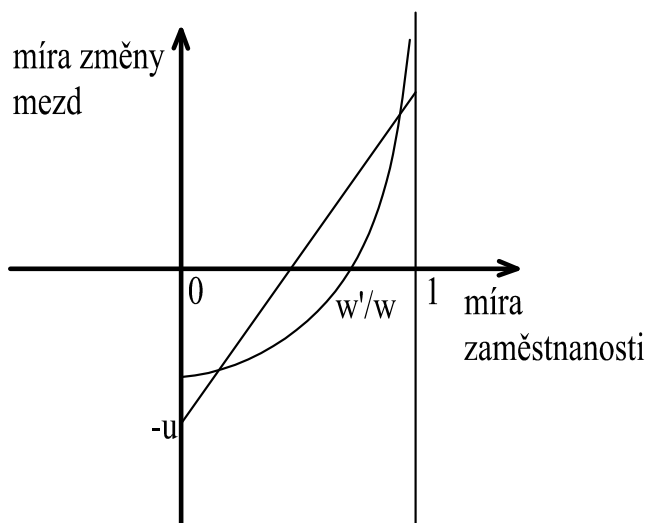


Obrázek 2.4: Vztah mezi mírou změny mezd a mírou zaměstnanosti.

Z důvodu zjednodušení modelu tuto křivku linearizujeme (viz obr. 2.5) a dostaneme ji tedy ve tvaru

$$\frac{w'}{w} = -u + cx, u > 0, c > 0, u, c \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

kde u a c jsou kladné reálné konstanty.



Obrázek 2.5: Vztah mezi mírou změny mezd a mírou zaměstnanosti proložen přímkou.

S použitím výše uvedených předpokladů již můžeme přistoupit k samotnému odvození Goodwinova modelu. Podíl celkových mezd ve vztahu k celkové produkci je definován vztahem (2.7). Jinými slovy, podíl celkových mezd vyjadřuje tzv. jednotkové mzdové náklady, které říkají, kolik z toho, co pracující vytvoří, je mu vyplaceno na mzdách. Pokud vztah (2.7) logaritmičtě zderivujeme a použijeme vztahy (2.12) a (2.9), pak získáme dynamickou funkci míry změny jednotkových mzdových nákladů:

$$\frac{y'}{y} = \frac{w'}{w} - \frac{a'}{a}$$

$$\frac{y'}{y} = (-u + cx) - \alpha$$

$$\frac{y'}{y} = -(u + \alpha) + cx$$

$$y' = -(u + \alpha) + cx)y. \quad (2.13)$$

Dle předpokladů 2 a 3 je národní příjem 100% rozdělen. Platí, že produkce nepoužitá na výplatu zaměstnanců (tedy úspory S) se celá investuje do růstu kapitálu, tj. platí

$$Q = S + wL.$$

Z této rovnice vyplývá

$$S = Q - wL = \left(1 - \frac{wL}{Q}\right)Q = (1 - y)Q. \quad (2.14)$$

Protože dle předpokladu 3 úspory S vyjadřují růst kapitálu K' , platí následující rovnost:

$$S = K' = \left(1 - \frac{wL}{Q}\right)Q = (1 - y)Q. \quad (2.15)$$

Rovnici (2.15) vydělíme kapitálem K

$$\frac{K'}{K} = \frac{(1 - y)Q}{K} = \frac{1 - y}{k}, \quad (2.16)$$

kde $k = \frac{K}{Q}$ je kapitálový koeficient, který je konstantní. Kapitál se zvyšuje v závislosti na růstu národního důchodu, neboť koeficient k vyjadřuje kapitálovou náročnost jednotky produkce a platí $K = kQ$.

Míra růstu národního důchodu $\frac{Q'}{Q}$ je stejná jako míra růstu kapitálu, jestliže je kapitálový koeficient k konstantní. Proto můžeme napsat

$$\frac{K'}{K} = \frac{Q'}{Q} = \frac{(1 - y)Q}{K} = \frac{1 - y}{k}. \quad (2.17)$$

Růst zaměstnanosti je dán vztahem

$$\frac{x'}{x} = \frac{L'}{L} - \beta, \quad (2.18)$$

kde rychlost růstu poptávky po pracovní síle L je dána jako

$$\frac{L'}{L} = \frac{Q'}{Q} - \alpha. \quad (2.19)$$

Tempo růstu míry zaměstnanosti lze po dosažení vztahů (2.19) a (2.17) do rovnice (2.18) zapsat ve tvaru

$$\frac{x'}{x} = \frac{1-y}{k} - \alpha - \beta. \quad (2.20)$$

Nyní již máme odvozenou soustavu nelineárních diferenciálních rovnic pro Goodwinův model

$$\begin{aligned} x' &= \left(\frac{1}{k} - (\beta + \alpha) - \frac{1}{k}y \right) x \\ y' &= -(u + \alpha) + cx)y. \end{aligned}$$

Jestliže položíme $(u + \alpha) = l$, $\frac{1}{k} - (\beta + \alpha) = m$, $\frac{1}{k} = n$, můžeme soustavu rovnic přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} x' &= (m - ny)x \\ y' &= (cx - l)y. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Srovnáním tvaru soustavy se soustavou (2.3) je tedy zřejmé, že jde skutečně o analogii modelu Lotka-Volterra.

2.4. Řešení soustavy diferenciálních rovnic pro Goodwinův model (2.21)

Nejprve si shrňme znaménka u koeficientů ze vztahů $(u + \alpha) = l$, $\frac{1}{k} - (\beta + \alpha) = m$ a $\frac{1}{k} = n$. Z odvozování modelu víme, že koeficient k je kladný, tudíž i n je kladné. Míry růstu α a β jsou dle předpokladu 4 a 6 konstantní, tudíž tyto koeficienty jsou také kladná čísla. Dostáváme rozdíl dvou kladných hodnot $\frac{1}{k} - (\beta + \alpha) = m$, proto m může být kladné i záporné. Z tvaru modifikované Phillipsovy křivky (viz

obr. 2.2) vidíme, že u je kladné, proto l je kladné.

Nyní si ukážeme, jaké situace můžou nastat. Uvažujme nejprve možnost, kdy je m kladné.

Prvním krokem je určení kritických bodů soustavy rovnic, tj. položíme pravé strany rovnic rovny nule:

$$(m - ny)x = 0$$

$$(cx - l)y = 0.$$

Získáme dva rovnovážné stavy, a to $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ a $\bar{\mathbf{x}}_2 = (\frac{l}{c}, \frac{m}{n})$.

Pro výpočet vlastních čísel vypočítáme Jacobiho matici pravých stran soustavy (2.21).

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} m - ny & -nx \\ cy & cx - l \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Nyní už můžeme dosadit rovnovážné body do Jacobiho matice (2.22) a spočítat vlastní čísla. Pro první kritický bod bude Jacobiho matice mít tvar

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -l \end{pmatrix}$$

a pro druhý kritický bod získáme Jacobiho matici ve tvaru

$$J\left(\frac{l}{c}, \frac{m}{n}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{nl}{c} \\ \frac{cm}{n} & 0 \end{pmatrix}.$$

V dalším kroku již můžeme spočítat vlastní čísla Jacobiho matice. Nejprve pro první rovnovážný stav $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ určíme charakteristickou rovnici

$$\begin{vmatrix} m - \lambda & 0 \\ 0 & -l - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (-m + l)\lambda - ml = 0.$$

Z charakteristické rovnice získáme dvě vlastní čísla $\lambda_1 = m$, $\lambda_2 = -l$.

Pro druhý rovnovážný stav $\bar{\mathbf{x}}_2 = (\frac{l}{c}, \frac{m}{n})$ vyřešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & -\frac{nl}{c} \\ \frac{cm}{n} & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + lm = 0$$

získáme dvě vlastní čísla $\lambda_1 = i\sqrt{lm}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{lm}$.

První rovnovážný stav $(0, 0)$ je hyperbolický a je typu sedlo, neboť $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\text{sgn}(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = -1$ (viz [9], str. 19).

Druhý rovnovážný stav je nehyperbolický, neboť obě vlastní čísla λ_1 a λ_2 mají nulové reálné části. Z toho důvodu nemůžeme využít Grobman-Hartmanovu větu a chování trajektorií v okolí tohoto bodu budeme zkoumat pomocí prvního integrálu soustavy (2.21).

K nalezení prvního integrálu druhou rovnicí ze soustavy

$$(m - ny)x = x'$$

$$(cx - l)y = y'$$

vydělíme první, čímž dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ly + cxy}{mx - nyx} = \frac{y(-l + cx)}{x(m - yn)} = \frac{y}{(m - yn)} \frac{(-l + cx)}{x}.$$

Pomocí metody separace proměnných postupně (pro $y > 0, x > 0$) dostaneme

$$\int \frac{m - yn}{y} dy = \int \frac{-l + cx}{x} dx,$$

$$m(\ln(y)) - ny = -l(\ln(x)) + cx,$$

$$H = cx + ny - l(\ln(x)) - m(\ln(y)),$$

kde funkce $H(x, y) = cx + ny - l(\ln(x)) - m(\ln(y))$ je prvním integrálem soustavy (2.21) pro první kvadrant (pro $x > 0, y > 0$). Nyní rozhodneme o ne/existenci extrému funkce H v bodě $\bar{\mathbf{x}}_2 = (\frac{l}{c}, \frac{m}{n})$. Druhé parciální derivace funkce H

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{l}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{m}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = 0$$

sestavíme do matice M a dosadíme bod $\bar{\mathbf{x}}_2 = (\frac{l}{c}, \frac{m}{n})$:

$$M(\bar{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} \frac{c^2}{l} & 0 \\ 0 & \frac{n^2}{m} \end{pmatrix}.$$

Protože $\det(M(\bar{\mathbf{x}}_2)) = \begin{vmatrix} \frac{c^2}{l} & 0 \\ 0 & \frac{n^2}{m} \end{vmatrix} = \frac{c^2 n^2}{lm} > 0$ a $\frac{c^2}{l} > 0$, má funkce H v bodě $\bar{\mathbf{x}}_2 = (\frac{l}{c}, \frac{m}{n})$ lokální minimum a druhý kritický bod je kritickým bodem typu střed.

V případě, že by m bylo záporné, vyšla by nám pro první rovnovážný bod $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ dvě vlastní čísla $\lambda_1 = -m$, $\lambda_2 = -l$ (tj. λ_1 je kladné). Pro druhý rovnovážný bod $\bar{\mathbf{x}}_2 = (\frac{l}{c}, \frac{m}{n})$ by vyšla vlastní čísla $\lambda_1 = \sqrt{l(-m)}$, $\lambda_2 = -\sqrt{l(-m)}$. Pro m záporné by nám dle věty 2 vyšly oba kritické body typu sedlo.

2.5. Příklad ČR

Pro ilustraci uvažujme data v České republice za roky 1996 až 2009, která jsme získali z Českého statistického úřadu (viz [11]). Model vytvořený s použitím těchto dat bude pouze ilustrativní, protože nejsou splněny všechny předpoklady pro Goodwinův model.

Předpoklady, o kterých můžeme s určitostí na úvod příkladu říci, že nejsou dodrženy, jsou následující: Předpoklad 1 o uzavřené ekonomice je pro Českou republiku porušen, neboť ČR má jako většina států ekonomiku otevřenou. Otevřená ekonomika se vyznačuje obchodováním s ostatními státy, a to jak importem, tak i exportem zboží. S jistotou nebude dodržen ani předpoklad 2 o použití pouze dvou výrobních faktorů a výrobě jednoho zboží. Zaměstnavatelé stejně tak zisky nepoužité na výplaty zaměstnancům investují nejen do růstu kapitálu, ale i do provozních nákladů (např. nájmu budov, energií, nákupu materiálu), do poplatků za vedení účtu a ostatních finančních operací, k plnění daňových povinností, atd. Tudíž ani předpoklad 3 není dodržen.

O předpokladech 4,5,6 nemůžeme jednoznačně na úvod rozhodnout, zda jsou nebo nejsou splněny.

Jak jsme v úvodu zmínili, budeme uvažovat situaci v České republice za roky 1996 až 2009. Pro jednotlivé roky budeme uvažovat značení od časového okamžiku 0, tzn. první rok 1996 bude odpovídat hodnotě $t = 0$, rok 1997 hodnotě $t = 1$, atd. K výpočtu některých proměnných budou potřebná data i z roku 1995, který odpovídá hodnotě $t = -1$.

Na úvod si představme data, která můžeme získat z Českého statistického úřadu a se kterými budeme nadále pracovat.

1. *Hrubý domácí produkt*

Pro sestavení modelu potřebujeme znát hodnoty hrubého domácího produktu v jednotlivých letech. Hrubý domácí produkt Q je peněžním vyjádřením celkové finální hodnoty statků a služeb nově vytvořených za jeden rok na území České republiky. Používá se pro stanovení výkonnosti ekonomiky a může být spočten například následujícími třemi metodami:

1. produkční metodou
2. výdajovou metodou
3. důchodovou metodou

Naše data hrubého domácího produktu jsou počítána důchodovou metodou a jsou vyjádřena v Kč. HDP počítaný důchodovou metodou se určí jako součet důchodů, které získají osoby za poskytnutí výrobních faktorů, je tedy tvořen souhrnem všech náhrad zaměstnancům (neboli mezd za poskytnutí pracovní síly), úroků a zisků za poskytnutí kapitálu a rent za poskytnutí přírodních zdrojů. K tomuto součtu musíme ještě přičíst nepřímé daně (daně, které jsou součástí ceny statků, např. daň z přidané hodnoty, spotřební daně) a amortizaci. Hrubý domácí produkt v roce 1996 činil 1 812 622 mil. Kč a postupně se zvyšoval, kdy v roce 2009 činil 3 921 827 mil. Kč.

2. Průměrná hrubá roční mzda

Průměrná hrubá roční mzda w představuje výši mezd jednoho zaměstnance vyjádřenou v korunách za rok. Do mezd se dle Českého statistického úřadu zahrnují základní mzdy a platy, příplatky a doplatky ke mzdě nebo platu (např. příplatek za práci přesčas, příplatek za práci o víkendu, atd.), odměny, náhrady mezd a platů, odměny za pracovní pohotovost a jiné složky mzdy nebo platu, které byly v daném období zaměstnancům vyplaceny. Do hrubých ročních mezd se nezahrnují náhrady mzdy nebo platu za dobu trvání dočasné pracovní neschopnosti nebo karantény placené zaměstnavatelem.

V našem modelu se jedná o hrubé mzdy, tj. o mzdy před snížením o pojistné na veřejné zdravotní pojištění a sociální zabezpečení, zálohové splátky daně z příjmů fyzických osob a další zákonné nebo se zaměstnancem dohodnuté srážky.

3. Nabídka pracovní síly a počet pracujících

K určení míry zaměstnanosti $x(t)$, zavedenou dle vztahu (2.6) jako podíl $x(t) = \frac{L(t)}{N(t)}$, jsou potřebné údaje o nabídce pracovní síly a počtu pracujících.

Za pracujícího člověka, jinými slovy za zaměstnaného člověka, považujeme osobu starší patnácti let, která vykonává aktivitu, za kterou je odměněna. Počet všech těchto osob tvoří celkový počet pracujících L .

Míra zaměstnanosti je měřena metodou VŠPS (Výběrové šetření pracovních sil) a zachycuje pouze registrovanou nezaměstnanost. V této metodě se vybere vzorek respondentů, který se následně přepočte na celkovou populaci v ČR. Výběrový soubor musí splňovat určité podmínky, např. pokrýt veškeré věkové skupiny, obě pohlaví, celé území ČR, atd. Za nezaměstnaného člověka považujeme dle Českého statistického úřadu takového člověka staršího patnácti let, který musí současně splňovat následující tři podmínky:

- nebýt v pracovním poměru,

- být schopen nastoupit během krátkého časového úseku do práce nebo samopráce, obvykle do dvou týdnů,
- práci si aktivně hledá, např. je nahlášen na úřadu práce.

Dále do této skupiny řadíme i ty, kteří si již práci našli a nastoupí do ní do dvou týdnů.

Pracovní silou N pak rozumíme součet počtu zaměstnaných a nezaměstnaných osob.

Počet pracujících, nabídka pracovní síly, HDP v mil. Kč a hrubé roční mzdy v Kč v letech 1996 až 2009 si můžeme shrnout do tabulky, která je znázorněna na obrázku 2.6. Z těchto dat nyní odvodíme další potřebné hodnoty, které potřebujeme v Goodwinově modelu. Podrobné výpočty lze nalézt v excelovském souboru VÝPOČET na přiloženém CD. Všechny výpočty budeme zaokrouhlovat na čtyři desetinná místa.

Pomocí dat znázorněných v tabulce na obrázku 2.6 nejprve určíme míru nezaměstnanosti. Dle vztahu (2.6) se míra zaměstnanosti $x(t)$ spočte jako podíl zaměstnaných na pracovní síle, tj. $x(t) = \frac{L(t)}{N(t)}$, $\forall t = 0, \dots, 13$. Míra nezaměstnanosti $z(t)$ se pak spočte jako rozdíl $z(t) = 1 - x(t)$.

Dle vztahů (2.5) určíme produktivitu práce $a(t)$ pro jednotlivé roky 1996 až 2009 jako $a(t) = \frac{Q(t)}{L(t)}$, $\forall t = 0, \dots, 13$. Dále dle vztahu (2.7) spočítáme podíl pracovníka na výstupu $y(t) = \frac{w(t)}{a(t)}$, $\forall t = 0, \dots, 13$, v jednotlivých letech. Zisk $S(t)$ spočteme dle (2.14), tj. $S(t) = Q(t) - w(t)L(t) = (1 - y(t))Q(t)$, $\forall t = -1, \dots, 13$.

Hodnotu kapitálu, který vstupuje do roku 1996, představuje zisk z roku 1995, který dosáhl hodnoty 1 085 423 181 600 Kč. Hodnota kapitálu je důležitá pro výpočet kapitálového koeficientu, který získáme dle vztahu (2.17). Kapitálový koeficient k je pak dán vztahem $k(t) = \frac{K(t)}{Q(t)}$.

Pro každý rok máme k dispozici vypočtenou hodnotu koeficientu k , který se v jednotlivých letech lehce liší. Model předpokládá tento koeficient konstantní,

t	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
t	0	1	2	3	4	5	6
L	4 972 000	4 936 500	4 865 700	4 764 100	4 731 600	4 727 700	4 764 900
N	5 173 500	5 184 800	5 201 500	5 218 200	5 186 100	5 146 000	5 139 100
w	117 900	129 624	141 612	153 564	163 128	177 000	190 932
Q	1 812 622	1 953 311	2 142 587	2 237 300	2 372 630	2 562 679	2 674 634
t	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
t	7	8	9	10	11	12	13
L	4 733 200	4 706 600	4 764 000	4 828 100	4 922 000	5 002 500	4 934 300
N	5 132 300	5 132 500	5 174 200	5 199 400	5 198 300	5 232 300	5 286 500
w	202 860	216 300	227 280	241 896	259 452	281 160	290 904
Q	2 801 163	3 057 660	3 257 972	3 507 131	3 831 819	4 015 346	3 921 827

Obrázek 2.6: Tabulka shrnující data z Českého statistického úřadu, která máme k dispozici pro sestavení Goodwinova modelu.

tj. je nutno tyto proměnlivé hodnoty aproximovat jedinou konstantou. Za hodnotu kapitálového koeficientu budeme uvažovat jeho průměrnou hodnotu, která je rovna $k = 0,6274$, přestože z grafického znázornění na obr. 2.7 vidíme, že by bylo vhodnější považovat koeficient k za lineárně rostoucí.

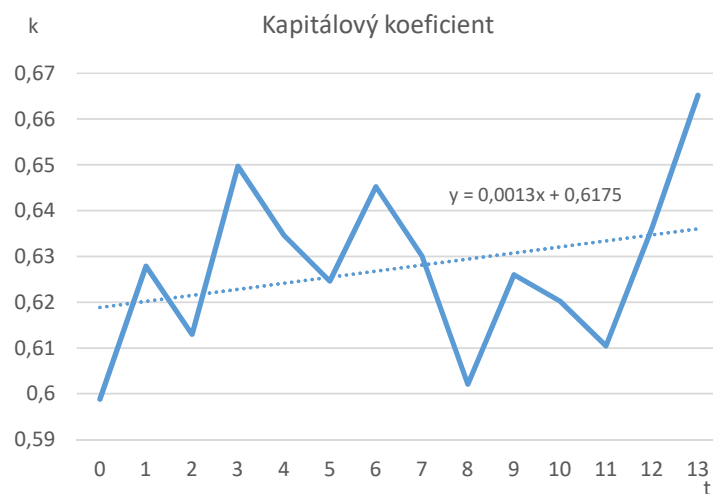
Pro sestavení modelu potřebujeme dále určit konstantní míru růstu produktivity práce dle vztahu (2.9). Míru růstu zjistíme s využitím exponenciálního trendu, kterým proložíme produktivitu práce v jednotlivých letech. Rovnice trendu je tvaru

$$a(t) = 360981e^{0,0621t},$$

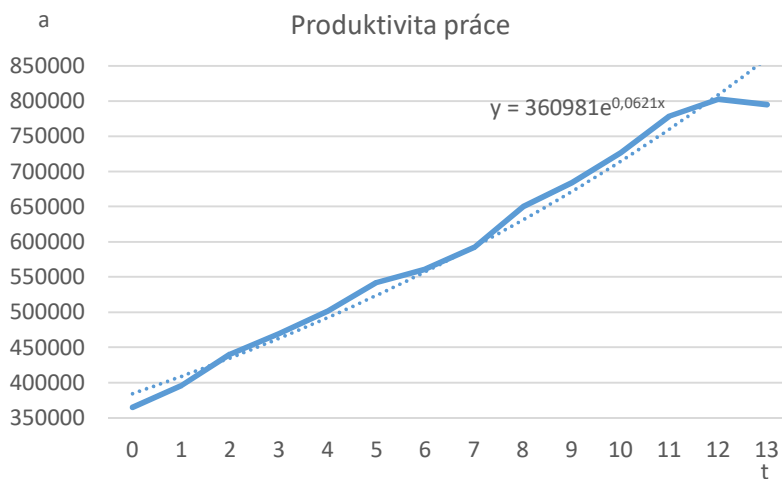
ze které získáme míru růstu $\alpha = 0,0621$.

Graficky znázorněný růst produktivity práce vidíme na obrázku 2.8.

Stejným způsobem určíme míru růstu nabídky pracovní síly. Jednotlivé hod-



Obrázek 2.7: Hodnoty kapitálového koeficientu proloženy lineárním trendem.



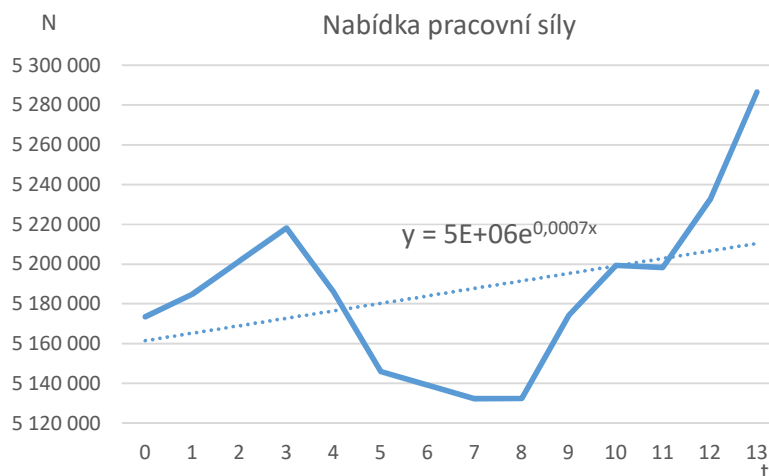
Obrázek 2.8: Produktivita práce proložena exponenciálním trendem.

noty nabídky práce proložíme exponenciálním trendem, z jehož rovnice určíme koeficient β . Rovnice exponenciálního trendu má tvar

$$N(t) = 5000000e^{0,0007t},$$

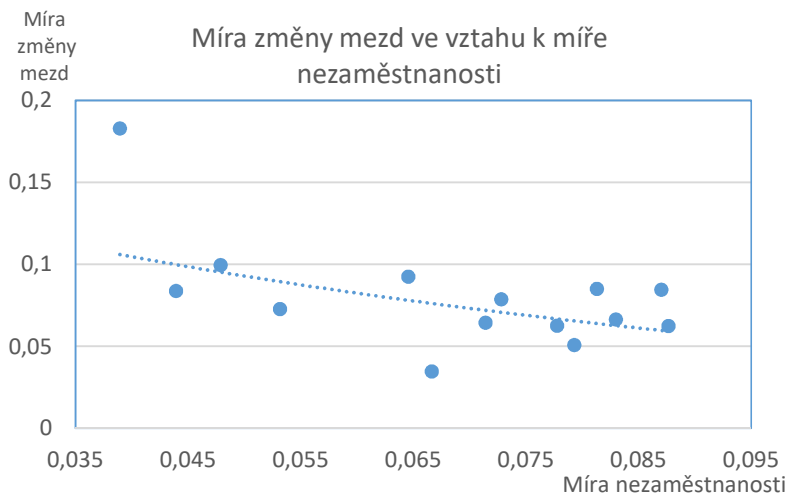
odtud $\beta = 0,0007$. Míra růstu je velmi nízká, což může být způsobeno minimálním přírůstkem obyvatelstva. Na obr. 2.9 vidíme, že k výraznějšímu nárůstu nabídky pracovní síly dochází od okamžiku $t = 8$, který nám značí rok 2004, což může

být zapříčiněno vstupem České republiky do Evropské unie a možným příchodem zaměstnanců z ostatních států Evropy.



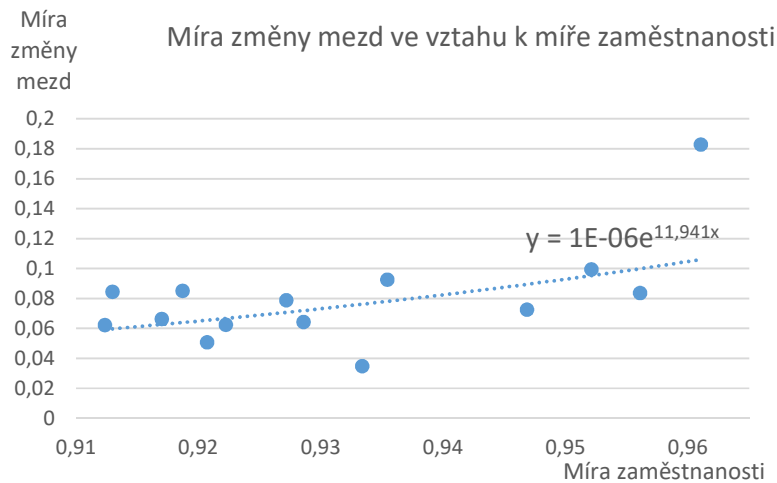
Obrázek 2.9: Nabídky práce proložena exponenciálním trendem.

Pro sestavení modelu zbývá ještě namodelovat míru změny mezd. Tu namodelujeme nejprve vzhledem k nezaměstnanosti, jak je znázorněno na obrázku 2.10.



Obrázek 2.10: Vztah mezi mírou změny mezd a změnou nezaměstnanosti.

Dále nahradíme míru nezaměstnanosti mírou zaměstnanosti, viz obrázek 2.11, aby byly splněny podmínky modifikované Phillipsovy křivky, čímž dojde k transformaci křivky.



Obrázek 2.11: Vztah mezi mírou změny mezd a změnou zaměstnanosti.

Aby se nám s křivkou lépe pracovalo, budeme ji linearizovat. Linearizaci křivky provedeme metodou nejmenších čtverců (viz obrázek 2.12):

Vztah mezi změnou mezd a mírou zaměstnanosti je ve tvaru

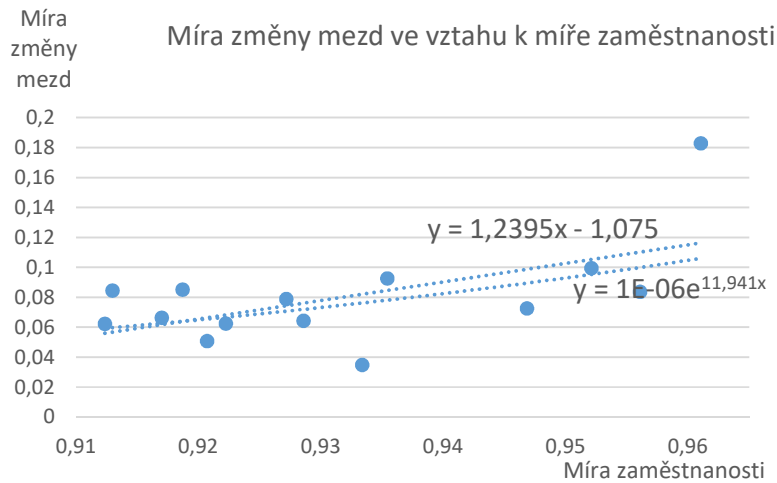
$$\frac{w'(t)}{w(t)} = -1,075 + 1,2395x(t), \forall t > 0.$$

Z obrázku 2.12 vidíme, že se přímka, kterou jsme linearizovali, příliš neliší od původní nelinearizované.

Nyní už máme všechny hodnoty, ze kterých můžeme sestavit Goodwinův model. Dosadíme do soustavy

$$\begin{aligned} x' &= (m - ny)x \\ y' &= (cx - l)y, \end{aligned} \tag{2.23}$$

kde dopočítáme m, n, c, l pomocí získaných hodnot $\beta = 0,0007$, $c = 1,2395$, $u = 1,075$, $\alpha = 0,0621$, $k = 0,6274$:



Obrázek 2.12: Vztah mezi mírou změny mezd a změnou zaměstnanosti proložen lineárním trendem.

$$(u + \alpha) = l = 1,1371,$$

$$\frac{1}{k} - (\beta + \alpha) = m = 1,5311,$$

$$\frac{1}{k} = n = 1,5939.$$

Po dosazení do soustavy (2.23) získáme soustavu nelineárních diferenciálních rovnic ve tvaru

$$x' = (1,5311 - 1,5939y)x$$

$$y' = (1,2395x - 1,1371)y. \quad (2.24)$$

Nejprve určíme rovnovážné body soustavy (2.24) vyřešením následujících rovnic

$$(1,5311 - 1,5939y)x = 0$$

$$(1,2395x - 1,1371)y = 0.$$

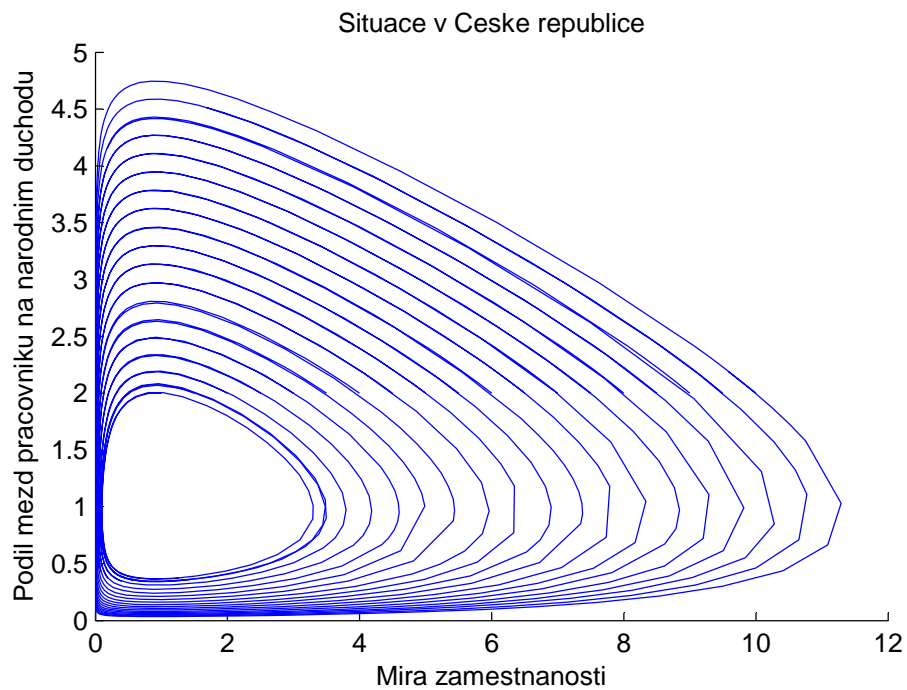
Vyřešením soustavy získáme dva rovnovážné body, a to bod $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ a $\mathbf{x}_2 = (0,9174; 0,9606)$. Při odvození Goodwinova modelu jsme si ukázali, jak můžeme určit vlastní čísla Jacobiho matice, pomocí nichž lze rozhodnout o typu kritického bodu. Pro první hyperbolický kritický bod $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ jsou vlastní

čísla rovna hodnotám $\lambda_1 = m$, $\lambda_2 = -l$. Pro druhý nehyperbolický kritický bod $\mathbf{x}_2 = (\frac{l}{c}; \frac{m}{n})$ jsme si odvodili, že jsou vlastní čísla rovna $\lambda_1 = i\sqrt{lm}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{lm}$.

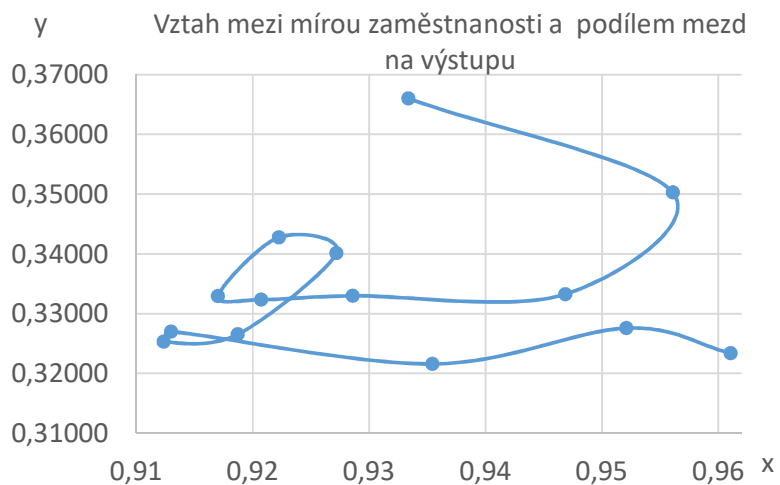
Pro první kritický bod $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ jsou vlastní čísla Jacobiho matice po dosazení vypočtených koeficientů rovna hodnotám $\lambda_1 = 1,5311$, $\lambda_2 = -1,1371$. První rovnovážný stav je hyperbolický, protože vlastní čísla jsou reálná a různá od nuly. Jelikož je jedno vlastní číslo kladné a druhé záporné, jedná se o kritický bod typu sedlo. Dle vlastních čísel můžeme rozhodnout i o stabilitě kritického bodu, neboť je tento bod hyperbolický a umíme tedy o stabilitě rozhodnout. Kritický bod $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ je nestabilní, neboť reálné vlastní číslo $\lambda_1 = 1,5311$ je kladné.

Pro druhý kritický bod $\mathbf{x}_2 = (0,9174; 0,9606)$ soustavy (2.24) získáme dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 1,3195i$, $\lambda_2 = -1,3195i$. Druhý rovnovážný stav je nehyperbolický, jelikož má vlastní čísla ryze imaginární a jedná se o typ střed. O stabilitě druhého kritického bodu nemůžeme dle vlastních čísel rozhodnout, neboť se jedná o nehyperbolický kritický bod.

Fázový portrét soustavy (2.24) pro kladné hodnoty x a y máme vykreslen na obrázku 2.13. Na obrázku 2.14 je pak znázorněn vztah mezi mírou zaměstnanosti a podílem mezd pracovníků na výstupu mezi roky 1996 až 2009, tj. jsou zde zachycena vstupní (reálná) data. Propojením těchto dvou grafů vidíme, že se mezi roky 1996 až 2009 pohybujeme na malém kousku trajektorie. K tomu, abychom zjistili, zda model odpovídá skutečnosti, bychom potřebovali mít k dispozici více pozorování. Pomocí nich by pak bylo možno i model případně zpřesnit.



Obrázek 2.13: Fázový portrét.



Obrázek 2.14: Vztah mezi mírou zamestnanosti a podílem mezd pracovníku na výstupu mezi roky 1996 až 2009.

Závěr

Cílem diplomové práce bylo v návaznosti na bakalářskou práci pokračovat v teorii dynamických systémů a ukázat jejich možná využití. V práci jsem se v teoretické části zaměřila na soustavu nelineárních diferenciálních rovnic v rovině a ukázala, jak lze tyto soustavy převést na lineární soustavy diferenciálních rovnic v rovině, kterými jsem se zabývala v bakalářské práci. Soustředila jsem se především na využití Grobman-Hartmanovy věty, která ale nelze využít pro všechny soustavy. Z tohoto důvodu jsem ještě popsala způsob, jak lze chování trajektorií určit pomocí prvního integrálu soustavy diferenciálních rovnic.

V druhé části práce jsem představila aplikaci dynamických systémů v ekonomii a popsala tzv. Goodwinův model. Goodwin zkoumal závislost míry zaměstnanosti a podílu mezd pracovníků na národním důchodu. Model jsem aplikovala na situaci v České republice. Česká republika nespĺňuje všechny podmínky nutné pro Goodwinův model, proto můžeme příklad považovat pouze za ilustrativní.

V práci jsem se chtěla zaměřit především na využití dynamických systémů v ekonomii. Goodwinův model mě zaujal tím, že vycházel z velmi známého modelu dravec a kořist, kterým se Goodwin nechal inspirovat a aplikoval ho v oblasti ekonomie. Stěžejní částí pak byla aplikace na reálná data. V dalším studiu se nabízí modifikace modelu tak, aby lépe popisoval reálnou ekonomiku.

Literatura

- [1] Klíč, A., Dubcová, M., Buřič, L.: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic—kvalitativní teorie, dynamické systémy (1. vydání)*. Vysoká škola chemicko—technologická v Praze, Praha, 2009.
- [2] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice (2. vydání)*. Masarykova univerzita, Brno, 2001.
- [3] Perko, L.: *Differential Equations and Dynamical Systems (3. vydání)*. Springer, New York, 2001.
- [4] Hubbard, H. J., West, H. B.: *Differential Equations: A Dynamical System Approach, Ordinary Differential Equations*. Springer, New York, 2001.
- [5] Tu, P.: *Dynamical Systems: An Introduction with Applications in Economics and Biology*, Springer, New York 1992.
- [6] Hale, J., Koçak H.: *Dynamics and Bifurcations*. Springer, New York, 1991.
- [7] Weber, L.: *A Contribution To Goodwin's Growth Cycle Model From A System Dynamics Perspective*, [cit. 25. 10. 2015], dostupné z: <http://www.systemdynamics.org/conferences/2005/proceed/papers/WEBER196.pdf>
- [8] Tavani, D.: *Heterodox Approaches Notes on the Goodwin Model*, [cit. 20. 2. 2016], dostupné z: http://www.danieletavani.com/wp-content/uploads/2014/05/ECON705_Goodwin.pdf.

- [9] Zemánková, L.: *Dynamické systémy a jejich využití*, Olomouc, 2014. bakalářská práce (Bc.). UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI.
- [10] Rachůnková, I., Fišer, J.: *Dynamické systémy 1*, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014.
- [11] Český statistický úřad [online]. [cit. 22. 11. 2016]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/csu/czso/ceska-republika-od-roku-1989-v-cislech-vy42dggohg>