TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Využití hlavolamů při výuce matematiky na 1. stupni ZŠ

Diplomová práce

Studijní program: M7503 – Učitelství pro základní školy
Studijní obor: 7503T047 – Učitelství pro 1. stupeň základní školy

Autor práce: **Adéla Landová**
Vedoucí práce: doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.

Liberec 2019

Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2016/2017**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Adéla Krásná**
Osobní číslo:	**P13000620**
Studijní program:	**M7503 Učitelství pro základní školy**
Studijní obor:	**Učitelství pro 1. stupeň základní školy**
Název tématu:	**Využití hlavolamů při výuce matematiky na 1. stupni ZŠ**
Zadávající katedra:	**Katedra primárního vzdělávání**

Zásady pro vypracování:

Cíl: Teoreticky zpracovat problematiku hlavolamů, jejich klasifikaci a využití k rozvoji logického myšlení při výuce matematiky. Vytvořit soubor pracovních listů se zaměřením na využití hlavolamů ve vybraném učivu matematiky pro žáky a doplnit je metodickými poznámkami pro učitele. Tyto otestovat ve škole a vyhodnotit dle předem stanovených kritérií jejich úspěšnost.
Požadavky: Znalost Rámcového vzdělávacího programu a obsahu učiva na 1. stupni základní školy.
Metody: Didaktické zpracování souboru hlavolamů z hlediska využití ve výuce. Praktická realizace ve škole. Pozorování a případná diskuze se žáky. Dotazníkové šetření.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

DUBENEY HENRY E.: Matematické hlavolamy a hříčky, Nakladatelství Olympia a.s., Praha, 1995
HARALD H. a spol.: Lexikon inteligence. Rychlá cesta k vyššímu IQ. Bratislava, Aktuell 2004
HRABAL, V. ml. MAN, F. PAVELKOVÁ, I.: Psychologické otázky motivaci ve škole. SPN, Praha 1984
LOKŠOVÁ, I. - LOKŠA, J.: Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole. Portál, Praha 1999
LOUKOTA, J.: Veselá matematika aneb kouzla, hříčky, hádanky, rébusy, lamohlavy. Votobia, 1998
PAVELKA, R: Hrátky s matematikou. MC nakladatelství, 1999
PŘÍHONSKÁ, J.: Matematické hry a hlavolamy jako prostředek k rozvoji prostorové představivosti. In: Sborník z mezinárodní konference Experience in Further Education of Teachers in Mathematics, Ostravská univerzita, Ostrava 2008.
ROUGIER, R.: Rozvíjíme logické myšlení. Portál, Praha 2002.
WEINLICH, R.: Hry se zápalkami, Olomouc, ALDA 1997
POSPÍŠILOVÁ, Z.: Hádanky a hříčky nejen se slovíčky, Portál, Praha 2006
VEJMOLA, S.: Jak vyrobit a vyřešit hlavolamy, Grada Publishing a. s., Praha 2007
GARLOCK, D. C. : The Greatest Brainteasers of All Time, Mill City Press, Inc., The United States of America 2015
GARDNER, M. : My Best Mathematical and Logic Puzzles, Dover Publications, Inc., The United States od America 1994
Rámcový vzdělávací program Učebnice matematiky pro ZŠ

Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání diplomové práce: **29. listopadu 2016**
Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2018**

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

L.S.

doc. PaedDr. Jaroslav Perný, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 1. prosince 2016

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že texty tištěné verze práce a elektronické verze práce vložené do IS STAG se shodují.

29. 5. 2019 Adéla Landová

Poděkování

Touto cestou bych ráda poděkovala doc. RNDr. Janě Příhonské, Ph.D. za její komentáře, cenné rady, pomoc a trpělivost při tvorbě diplomové práce. Dále pak děkuji své rodině, která mě po celou dobu studia podporovala a umožnila se mu plně věnovat.

Anotace

Hlavním cílem mé diplomové práce je teoreticky zpracovat problematiku hlavolamů, jejich klasifikaci a využití k rozvoji logického myšlení v matematice se zaměřením na rozvoj orientace v rovině a kombinatorického myšlení. Dále vytvořím pracovní listy obsahující hlavolamy pro žáky a metodické poznámky pro učitele.

Práce se skládá z části teoretické, praktické a výzkumné. V teoretické části se zmíním o Rámcovém vzdělávacím programu pro ZV a vyberu z něj cíle zaměřené na rozvoj logického myšlení, dále pak uvedu několik dělení hlavolamů dle různých autorů a přiblížím pojmy spojené s kombinatorikou a orientací v rovině. Uvedu zde i hlavolamy zaměřené na rozvoj orientace v rovině s prvky kombinatoriky.

Část praktická pak bude obsahovat dotazník pro učitele, vstupní a výstupní test zahrnující hlavolamy zaměřené na orientaci v rovině a kombinatorické myšlení a jejich vzorové řešení. Pracovní listy poslouží k procvičování řešení hlavolamů s žáky ve výuce.

Výzkumná část pak bude zaměřena na testování dovedností žáků před procvičováním a po procvičování a k analýze získaných dat z dotazníku a obou testů. Data následně zpracuji a potvrdím nebo vyvrátím předem stanovené výzkumné předpoklady.

Klíčová slova: Rámcový vzdělávací program pro ZV, hlavolam, logické myšlení, kombinatorika, orientace v rovině, test, dotazník

Summary

The main goal of the thesis is to theoretically process brain teasers, their classification and use to develop logical thinking in Mathematics with a focus on developing plane orientation and combinatorial thinking. I will create worksheets covering brain teasers for pupils and methodological notes for teachers.

The thesis consists of a theoretical, practical and research part. In the theoretical part I will mention the Framework Educational Program for ZV and I will choose from it aims aimed at the development of logical thinking. Then I will introduce several types of brain teasers according to different authors and I will introduce the concepts associated with combinatorics and orientation in the plane. I will also mention brain teasers aimed at developing orientation in the plane with elements of combinatorics.

The practical part will include a questionnaire for teachers, an input and output test containing brain teasers focused on plane orientation and combinatorial thinking and their sample solution. Worksheets will be used to practice solving brainteasers with pupils in lessons.

The research part is focused on testing pupils' skills before and after practicing and analyzing the data obtained from the questionnaire and both tests. Then I will process the data and confirm it or refute the predetermined research assumptions.

Keywords: Framework educational program for ZV, a brain teaser, logical thinking, combinatorics, plane orientation, test, questionnaire

Obsah

Seznam ilustrací

Seznam grafů

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek a symbolů

A, B	konečné ,množiny
apod.	a podobně
atd.	a tak dále
cv.	cvičení
č.	číslo
DP	diplomová práce
k	proměnná
K (K´)	kombinace (s opakováním)
max.	maximálně
např.	na příklad
n	proměnné
P (P´)	permutace (s opakováním)
P1, P1a, P2	označení předpokladů
PET	polyetylentereftalát
popř.	popřípadě
RVP	Rámcový vzdělávací progrm
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
SŠ	střední škola
str.	Strana
TUL	Technická univerzita v Liberci
tzv.	tak zvaný
V (V´)	variace (s opakováním)
x	proměnná
ZŠ	základní škola
$\leq$	menší a zároveň se rovná
$>$	větší
$=$	rovná se
$\neq$	nerovná se

%	procento
!	faktoriál
+	plus
-	minus
.	krát
→	z toho vyplývá
3.A, 3.B	označení tříd

ÚVOD

Myšlení je jeden z nejtajemnějších a nejdůležitějších procesů, který se odehrává v lidském mozku. Nikdo z nás nedokáže přesně popsat, odkud se bere, nikdo ho nikdy neviděl, nikdo nemůže myšlenkové procesy a jejich průběhy dokázat a určit. Každý z nás je originál a každý z nás má jiné myšlenkové pochody založené na zkušenostech, dovednostech, výchově, zájmech a společnosti, ve které se pohybuje, a myslím si, že nejsou na světě žádní dva lidé, kteří by mysleli naprosto totožně ve všech aspektech svého bytí. Dle Milana Nakonenčného je myšlení *„vývojově vyšší psychická funkce, umožňující dokonalejší poznávání životního prostředí, a tím i dokonalejší adaptaci na životní podmínky"* (Nakonečný 1997, str. 115).

Právě proto jsem se rozhodla pokusit se dětem pomoci rozvíjet jejich logické myšlení, které jim bude v budoucnosti pomáhat řešit problémy v každodenním životě, ale i situace neočekávané a různé úkoly, se kterými se při cestě životem setkají. Jako učitelka na prvním stupni moc dobře vím, že už ti nejmladší žáci se rádi zabývají různými záhadami a zapeklitostmi, které je motivují k dalšímu objevování a bádání. Proto bych chtěla použít při výuce především hlavolamy a různé hříčky. Je však důležité ukázat žákům jak na to, abychom je neodradili tím, že je to pro ně moc těžké. Je tak nutné rozebírat s nimi zadání úloh a pokoušet se vymýšlet různé postupy řešení. I pro učitele by mohlo být inspirací vložit do běžné hodiny plné počítání v pracovním sešitě jeden z hlavolamů, osvěžit tak průběh celé hodiny a získat pozornost žáků. Sama vím, že probírané látky je velké množství a mnozí učitelé, ale i rodiče, berou jako úkol vyplnit všechna cvičení v učebnici do jednoho. Jsem přesvědčena, že to ale není hlavním úkolem vzdělávání.

Hlavolamy mohou sloužit k rozvoji různých dovedností a schopností dětí jako je sociální interakce a komunikace, slovní zásoba, verbální dovednost, paměť nebo motorika, logické a kombinační myšlení, pozornost, postřeh, vnímání, orientace v prostoru, představivost a vědomosti z různých oblastí poznání.

K tomu slouží nejrůznější typy hlavolamů a to např. manipulační, které dále můžeme dělit na sestavovací, rozkládací, ale patří sem i hlavolamy se zápalkami nebo nejrůznější geometrické objekty složené z navzájem se prostupujících dílků, určitě všichni známe tzv. rozplétací hlavolamy jako je ježek v kleci nebo nejrůznější provázkové a drátové hlavolamy. Do hlavolamů ale počítáme i bludiště a labyrinty, šifry, počítací úlohy jako jsou řady číslic, kde hledáme chybějící číslice a musíme přijít na systém zápisu řady, kombinatorické hlavolamy, sudoku, rébusy apod. Dělení hlavolamů je samozřejmě mnohem složitější viz kapitola 1.3.2.

Ráda bych se zabývala především rozvojem prostorového vidění, neboť sama jsem s ním měla vždycky velké problémy i u nejjednodušších úkolů, ale později i v praktických dovednostech v běžném životě. Myslím tím např. orientaci v prostoru - les, město, neznámá budova nebo představu o vztahu různých předmětů v určitých polohách nebo o pohybu v prostoru - odhad vzdálenosti při parkování nebo při jízdě na snowboardu apod.

Stejně tak bych se ráda pokusila rozvíjet užitím hlavolamů u žáků kombinatorické myšlení. I to je v životě člověka nepostradatelné. Může se nám hodit v dětství při sestavování slov, vět, psaní básniček nebo při poznávání značek automobilů, ale i v obchodě při nákupu běžných surovin. Později pak např. v zemědělství, když si budeme chtít osadit záhonky rostlinami a budeme chtít využít malý prostor na co nejvíce rostlin apod. A v mnoha dalších potřebných a každodenních činnostech, se kterými se setkáváme.

Cílem mojí diplomové práce je tedy popsat teoreticky problematiku hlavolamů a jejich využití k rozvoji logického myšlení v matematice. V praktické části se pak budu zabývat především procvičováním orientace v rovině a procvičováním různých strategií řešení, logického uvažování a systematického postupu při hledání řešení pomocí různých hlavolamů s žáky třetího ročníku základní školy. Vypracuji také pracovní listy pro žáky s hlavolamy a dále pak metodické listy pro učitele jako nápovědu k užití úloh v pracovních listech.

Cílem výzkumné části bude ověření, zda systematické působení na žáky může pomoci zlepšit jejich schopnosti a dovednosti řešit zadané úlohy a využívat různé strategie řešení úloh. K tomu mi dopomůžou hlavolamy rozvíjející kombinační schopnosti žáků v úlohách s prvky kombinatoriky, užitím kombinatorického pravidla součtu a součinu a orientace v prostoru spojené s různými možnostmi řešení nebo větším počtem možných řešení.

Ověřit toto zlepšení bych chtěla zadáním nejprve vstupního testu, kde budou žákům předloženy hlavolamy s výše uvedenou tematikou. Po vyhodnocení testu bude následovat procvičování úloh, které ve vstupním testu budou mít nejnižší úspěšnost a následně zhodnotíme nově nabyté dovednosti ve výstupním testu, kde by se mělo projevit zlepšení v úspěšnosti nalezení strategie a řešení úloh.

1. TEORETICKÁ ČÁST

1.1 Logické myšlení

„Logika je axiomatika rozumu“, napsal Jean Piaget (1970, str. 29) ve svém díle Psychologie inteligence. Rozumím tomu tedy tak, že logika jsou naše nevyvratitelné pravdy, kterých nabýváme během našeho života učením a zkušeností. Je tedy jasné, že každý má zkušenosti jiné a tím pádem i jeho logické myšlení je odlišné od kohokoliv jiného. To, jak dokážeme logicky uvažovat, máme zčásti i zděděné po svých předcích. Zajímavé je, že pokud chceme zjistit, co to vlastně logické myšlení je, na internetu např. se žádnou konkrétní informaci nedozvíme. Pouze různá cvičení, jak ho rozvíjet a mnoho testů inteligence.

Logické myšlení je dle mého názoru jakýmsi opakem myšlení instinktivního, tedy musíme mít mnoho dovedností, abychom ho mohli uplatňovat. Musíme umět analyzovat situaci, musíme si zapamatovat údaje, spojovat si různé dílčí části do celku, ale i správně zformulovat závěr a předat ho okolí. Nejen to je součástí logického myšlení. A k čemu nám je vlastně dobré ho rozvíjet? Může se nám hodit nejen ve škole při učení a plnění svých povinností, ale samozřejmě při jakékoliv praktické činnosti nebo při řešení různých běžných životních situací a interakcí. Jeho užití by nám mělo usnadňovat rozhodování a mělo by pomoc při dělání závěrů a řešení jakéhokoliv problému.

Dle psychologů je logické myšlení závislé na kognitivním vývoji člověka, tedy na vývoji poznávacích funkcí. Tím jsou myšleny např. paměť, vnímání, pozornost, myšlení, koncentrace, usuzování, schopnosti, fantazie a inteligence.

Jean Piaget rozdělil vývoj člověka do čtyř stádií, kde věkové hranice jsou pouze orientační a označují věk, kdy je vývoj nejdominantnější ve většině případů. Odchylky jsou běžné:

1. Senzomotorické stádium (0 - 2 roky)
2. Předoperační stádium (2 – 7 let)
3. Stádium konkrétních operací (7 – 12 let)
4. Stádium formálních operací (12 a více)

Pro rozvoj logického myšlení je důležité stádium třetí a čtvrté. Ve třetím se rozvíjí konkrétní myšlení a ve čtvrtém myšlení abstraktní. Zabývat se budu pouze třetím obdobím, neboť zahrnuje věk dítěte na prvním stupni základní školy.

1.1.1 Stádium konkrétních operací

Dle teorie Jeana Piageta napsali L. Langmeier a D. Krejčířová (2006, str. 124), že přestože je dítě schopno již v předškolním věku chápat vztahy mezi různými ději, je tomu tak pouze na názorné rovině, kde vychází ze své vlastní činnosti. Je také schopno řešit některé problémy pouze v jeho mysli, pokud je schopno si je představit, tedy vyvolat je z paměti. Změna přichází s příchodem do školy, ve věku kolem 7 let, kdy je dítě schopno prvních logických operací a úsudků bez závislosti na viděném. Stále je to ale pouze usuzování na základě konkrétních věcí a jevů, které si může názorně představit.

V díle L. Langmeier a D. Krejčířová (2006, str. 125) je uveden pokus s přesypáváním korálků dítěte předškolního věku a dítěte věku kolem 7 let. Pokud budou dětem dány k dispozici nádoby naplněné korálky a jedna z nich bude mít užší dno, po přesypání z širší nádoby do tenčí si budou děti myslet, že v užší nádobě je korálků více, neboť jejich hladina končí v nádobě výš. Oproti tomu dítě věku sedmi let již ví, že korálků je stále stejně, i když v nádobách hladiny končí v různé úrovni.

Schopnosti získané na začátku mladšího školního školního věku:

- identita (nic jsme nepřidali, nic jsme neubrali)
- reverzibilita (můžeme korálky přesypat zpátky a ověříme si množství)
- spojení různých myšlenkových procesů (posouzení výšky a šířky nádoby)

Takové myšlení nebylo v minulých letech možno. Nyní je dítě také schopno pochopit inkluzi prvků do třídy a odlišit třídu a jednotlivé prvky v ní. Dítě školního věku již také lépe chápe příčinné vztahy a snaží se je pochopit. Nestačí mu již jednoduché odpovědi jako dítěti předškolního věku.

Bylo dokázáno, že mnohé z uvedených myšlenkových schopností odpovídající logickému myšlení nepřichází najednou s určitým věkem, ale mohou být také ovlivněny učením. Tím pádem k němu může docházet u odlišně starých dětí dle působení jeho okolí. Výkony se mohou lišit také v závislosti na motivaci. Je však zřejmé, že rodina, mateřská i základní škola na počátku vzdělávání může mít velký vliv na rozvoj myšlení založeném na logických operacích. Proto je nutné logické myšlení systematicky rozvíjet u žáků mladšího školního věku. Hlavolamy mi připadají jako velice vhodný prostředek k rozvíjení, neboť žáky motivují a jejich výkonnost a chuť se učit je tedy podstatně vyšší než při běžné výuce pouze podle učebnice.

1.1.2 Konkrétní operace

Konkrétní operace nezahrnují slovně vyjádřené hypotézy, ale vztahují se pouze k předmětům. *„Tvoří přechod mezi činností a obecnějšími logickými strukturami, které předpokládají kombinatoriku a strukturu grupy, koordinující obě možné formy vratnosti. Tyto rodící se operace se koordinují v celostní struktury, ale jsou chudší a pro nedostatek zobecněných kombinací postupují malými krůčky.“*(J. Piaget, 1966, str. 92)

Strukturami jsou dle Piageta např. řazení, třídění, vzájemně jednoznačné nebo až mnohoznačné korespondence, matrice nebo dvojvýchodné tabulky, jejichž vlastností je grupování ze sjednocování přímých operací.

Rozvíjí se také pohled na prostor nebo vnímání rychlosti a času a pochopení samotného pojmu číslo a práce s ním.

1.2 Vymezení logického myšlení v kontextu vzdělávacích oblastí RVP (RVP ZV, 2017)

Rámcový vzdělávací plán neboli RVP je dokumentem zpracovaným a schváleným Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy a pro každý obor vzdělávání je vydán samostatný plán.

RVP vychází z koncepce celoživotního vzdělávání a formuluje očekávanou úroveň vzdělání pro všechny absolventy jednotlivých etap vzdělávání a to stanovením klíčových kompetencí, kterých by měli žáci dosáhnout. Poté určuje vzdělávací oblasti, do kterých jsou ještě vměstnána průřezová témata, která by měla prostupovat určenými vzdělávacími oblastmi a měla by být zařazována do výuky.

Klíčové kompetence:

- Kompetence k učení

- Kompetence k řešení problémů
- Kompetence komunikativní
- Kompetence sociální a personální
- Kompetence občanské
- Kompetence pracovní

Vzdělávací oblasti:

- Jazyk a jazyková komunikace (Český jazyk a literatura, Cizí jazyk, Další cizí jazyk)
- Matematika a její aplikace (Matematika a její aplikace)
- Informační a komunikační technologie (Informační a komunikační technologie)
- Člověk a jeho svět
- Člověk a společnost (Dějepis, Výchova k občanství)
- Člověk a příroda (Fyzika, Chemie, Přírodopis, Zeměpis)
- Umění a kultura (Hudební výchova, Výtvarná výchova)
- Člověk a zdraví (Výchova ke zdraví, Tělesná výchova)
- Člověk a svět práce

Průřezová témata:

- Osobnostní a sociální výchova
- Výchova demokratického občana
- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Multikulturní výchova
- Environmentální výchova
- Mediální výchova

Vzhledem k tématu diplomové práce budu rozebírat vzdělávací oblast Matematika a její aplikace ve spojení s rozvojem logického myšlení.

1.2.1 Matematika a její aplikace

Tato vzdělávací oblast by stejně jako ostatní měla připravovat žáky především aktivní činností na praktický život a reálné situace stejně jako na další studium. Dělí se do několika okruhů. Zde uvedu pouze ty, které se týkají prvního stupně ZŠ.

Číslo a početní operace

V tomto okruhu jsou důležité tři dílčí složky a to dovednost provádět operace, algoritmické porozumění a významové porozumění. V RVP jsou uvedeny očekávané výstupy pro každý ročník. Pokud budeme posuzovat očekávané výstupy týkající se rozvoje logického myšlení, určitě musíme uvést to, že žák by měl používat přirozená čísla k modelování reálných situací – musí logicky uvažovat, aby přiřadil správné číslo k situaci, dále pak je důležitá dovednost porovnávat čísla do 1000, je to schopnost řadit informace dle kapitoly 1.1.2. Dalším očekávaným výstupem, kde se rozvíjí logické myšlení je řešení a tvorba úloh, ve kterých se aplikují a modelují osvojené početní operace, pokud má žák cokoliv tvořit a má to mít smysl, musí použít logické myšlení. Dále pak odhadování a určování a modelování části celku.

Závislosti, vztahy a práce s daty

Okruh dává za úkol žákům pochopit čas a orientaci v něm, ale očekávaným výstupem je i orientace v prostoru se správným užitím výrazů nad, pod, za, vpravo, vlevo... Pochopení každé závislost, ať už časové, prostorové atd. je závislé na logickém myšlení a procvičováním je rozvíjeno.

Geometrie v rovině a v prostoru

Zde bych vyzdvihla v souvislosti s užitím logického myšlením především porovnávání velikosti útvarů a modelování útvarů prostorových i rovinných, porovnávání úseček a uvědomění vzájemných poloh.

Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Okruh, který přímo koresponduje s rozvojem logického myšlení. V tomto okruhu je očekávaným výstupem řešení jednoduchých praktických úloh a problémů, jejichž řešení do značené míry není závislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky. Jako učivo jsou pak doporučeny číselné a obrázkové řady, magické čtverce a prostorová představivost.

V RVP je pak přímo řečeno kromě jiného, že cílem je rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci, prostřednictvím řešení matematických problémů.

Jako prostředek pro naplnění tohoto očekávaného výstupu jsem zvolila hlavolamy, které mohou rozvíjet mnoho dovedností potřebných pro řešení reálných situací v životě.

1.3 Hlavolamy

Dle slovníku spisovného jazyka českého je hlavolam druh obtížné hádanky, těžce rozluštitelná úloha, záhada. Není od věci, že toto slovo je složeno ze dvou slov hlava a lámat. Za hlavolamy tedy můžeme považovat cokoliv nad čím si lámeme hlavu. Každý den se tak setkáváme s nejrůznějšími hlavolamy a pro každého může být hlavolamem něco jiného.

1.3.1 Historie hlavolamů

Historie hlavolamů sahá až do starověkého Egypta, neboť první z nich byly objeveny již na stěnách pyramid, ve starověkém Řecku na svitcích, v Číně, Japonsku nebo na Arabském poloostrově. Rozkvět hlavolamů ve středověku pak nastal v 9. století, kdy došlo k rozšíření všeobecné vzdělanosti a zájmu o logické hádanky. V této době byla napsána první kniha, která byla souborem hlavolamů v Evropě a to Úlohy pro rozvoj mladé mysli od autora Alcuina.

V moderní historii pak musím zmínit století 19. a 20. století, kdy byly hlavolamy rozšířeny po celém světě i díky některým autorům jako je např. Henry Dudeney, Samuel Loyd nebo Martin Gardner. Neznámějšími hlavolamy se pak stala především Patnáctka Samuela Loyda, jejíž obměny známe určitě i z dětských let, kdy jsme neřadili správně pouze čísla, ale museli jsme seřadit správně nějaký obrázek a to pouze posouváním jednotlivých polí. Dalším hlavolamem, který je celosvětově známý je Rubikova kostka, kterou navrhl v sedmdesátých letech 20. století Ernő Rubik. (HISTORIE HLAVOLAMŮ | GeniusLogicus).

V minulosti i v dnešní době existuje mnoho publikací s nejrůznějšími typy hlavolamů. Každý hlavolam dokáže rozvíjet jinou dovednost.

1.3.2 Typy hlavolamů

V dílech o hlavolamech existuje rozličné dělení podle různých specifik. Může to být podle dovedností, které rozvíjejí, podle systému jejich řešení nebo konstrukce, pokud se jedná o hlavolamy manipulační. Uvedu několik možností dělení hlavolamů a příklady. U různých autorů se setkáváme se specifickým dělením. Pro ilustraci vybírám některá dělení, protože mi vyhovují z hlediska cíle DP a to je rozvoj kombinatorického myšlení a orientace v rovině.

Dělení dle S. Vejmoly (2007, str. 14 - 129)**:**

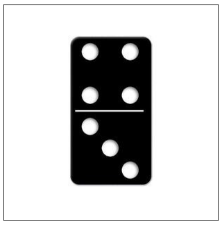
a) Skládání obrazců

Hlavolamy tohoto typu většinou obsahují různé geometrické tvary, které musíme rozdělit a následně složit do jiného útvaru. Jedná se např. o obdélník, který musíme rozdělit na tři části tak, aby vznikl čtverec apod. Tyto hlavolamy mohou u žáků rozvíjet prostorové vidění.

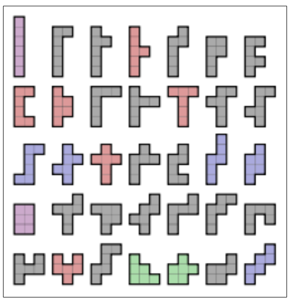
b) Domino a polymina

Domino je hra, která obsahuje soubor kostek obdélníkového tvaru rozděleného na dva čtverce. Na každém čtverci je pak obrázek nebo určitý počet teček. Cílem hry je stavět dílky do řetězu za sebou tak, že na sebe budou vždy navazovat stejné obrázky, či stejný počet teček.

Polymino jsou pak kostky různých tvarů, ze kterých máme složit např. obdélník nebo čtverec, ale i obrazce zcela nepravidelné a to bez mezer mezi dílky. Dílky se přikládají k sobě vždy stejnou délkou hrany.



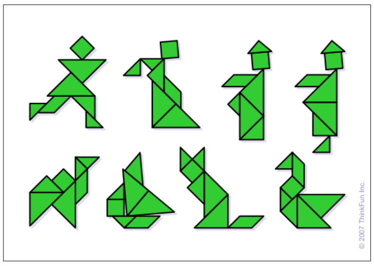
Ilustrace 1: Domino (Single Black Domino - Game Dominoes -Metal Lapel Hat Pin Tie Tack Pinback, 1995)



Ilustrace 2: Polymino (Polyomino)

c) Tangramy

Tato hra je také skládáním dílků k sobě, ale většinou vznikají obrázky hezké i s použitím mezer mezi nimi a nemusí se shodovat délky přikládaných částí. Výsledné obrazce jsou tak většinou zcela překvapivé, mohou být i figurální.



Ilustrace 3: Tangramy (Táborová inspirace)

d) Hry pro dva a více hráčů

Her, které mají něco společného s hlavolamy, je určitě nepřeberné množství, uvedu zde jednu z nich dle S. Vejmoly. Je to např. Hra na sousedy. V této hře se rozdají hráčů kartičky, které se dle určených parametrů pokládají na desku, kdo na konci hry má všechny kartičky položené, vyhrál.

e) Přemísťovací hlavolamy

Pravidlem těchto hlavolamů je, že se hrají s figurkami, které během hry neubývají ani nepřibývají. Pouze mění svoje pozice v hracím poli podle určených pravidel pohybů.

f) Plošné rotační hlavolamy

Jsou známé především ve Francii a USA. Tvoří je dílky sestavené do dvou kruhových těles, která se prolínají. Mechanismus je podobný jako u Rubikovy kostky. Tělesy se otáčí i s dílky a ty se mohou sami promíchat. Cílem je vrátit je na původní místo.

g) Přesouvací hlavolamy

I tento typ hlavolamů obsahuje větší množství různých druhů, všechny však vycházejí z Patnáctky, jejímž populizátorem byl Sam Loyd. Jde o krabičku pravidelného tvaru, který obsahuje dílky s čísly nebo obrázky, které se musí seřadit. Jedno místečko je vždy volné, aby se dílky mohly přemisťovat. Jak jsem již zmínila, je mnoho typů, např. patnáctka obsahuje dílky s číslicemi od jedničky do patnáctky, ale pro nejmenší děti může být hlavolam tvořen i dílky s liniemi, které po složení vytvoří obrázek.

Ilustrace 4: Přesouvací hlavolam (Přesouvací hlavolam, Knihy Dobrovský, 2001)

h) Hlavolamy z drátů

Jsou vyráběny z různých materiálů, z drátů, hřebíků, ale i s kroužky nebo kuličkami. Často se zdají být velice podobné, ale rozdělují se dvou kategorií. Jednou kategorií jsou hlavolamy, u kterých musíme najít způsob, jak je spojit nebo rozdělit na dvě části. Tyto patří z hlediska matematiky do tzv. topologie a rozvíjejí prostorovou představivost. Jedinou smůlou u těchto hlavolamů je, že pokud je již jednou vyřešíme, jejich další řešení je vždy stejné a brzy nás tak přestane bavit.

Další skupinou jsou hlavolamy, u kterých se musí často opakovaně až nesmyslně navlékat nebo vyvlékat jehly nebo smyčky z drátěných ok apod. Ty patří k odlišným hlavolamům, říká se jim čínské kroužky.

Do prvního typu hlavolamů patří i Osmička nebo Srdce.

Ilustrace 5: Hlavolam srdce (Simira - Hlavolam drátovaný srdcový, 2011)

i) Plošná a prostorové bludiště

Přestože mnoho typů bludišť je pouhým tréninkem pevné ruky a trpělivosti, najdou se i taková, která rozvíjejí logické myšlení. Jedním z nich je např. Oboustranné bludiště. To je nakresleno na dřevěné destičce z obou stran a přechází ze s jedné plochy na druhou předem určenými cestami nebo se dá projít skrz náměstí. Dalším typem je Skryté bludiště. To je uzavřeno v neprůhledné krabičce a bloudí se v něm kuličkou.

j) Hanojská věž

Je to starobylý hlavolam tvořený prkénkem, ve kterém jsou zasazeny tři dřevěné kulaté tyčky, na jedné krajní jsou navlečeny čtyři nebo více kotoučů různých velikostí a vždy musí být větší kotouče pod menšími. Cílem je přemístit je všechny na poslední tyčku s využitím prostřední tyčky jako odkladiště. Stále musí být zachováno pravidlo, že velké kotouče jsou pod menšími a v každém kroku lze přemístit pouze jeden kotouč a to ten, který je nahoře. Čím více kotoučů budeme používat, tím těžší je hlavolam vyřešit.

Jednu z nejdiskutovanějších Hanojských věží navrhl T. Akanuma a nazývá se Panex Puzzle. Vědci z Bellových laboratoří v USA se shodli na tom, že minimálně počet kroků k jeho vyřešení je 27 564 a maximálně 33 537.

Ilustrace 6: Hanojská věž (Možná řešení Hanojské věže)

l) Ukládací hlavolamy

Obsahuje trojrozměrné dílky, které se mají poskládat do předem určeného prostoru. Patří se hlavolam jménem Conwayova krychle, která se skládá ze čtyř různých dílků sestavených z krychliček o rozdílném počtu. Patří sem i prostorové pentamino, zde jsou dílky od sebe odlišné.

Prostorové ukládací hlavolamy – obtížnější prostorové hlavolamy, dílky se zde navzájem prostupují nebo vypadávají. Patří sem nejznámější hlavolam Burr, tedy prostorový kříž neboli růžice.

Variace na Rubikovu krychli – variace jsou tvořeny z původní Rubikovy krychle, ale můžeme některé dílky např. slepit k sobě a nalepit na ně stejnobarevnou fólii nebo můžeme nastavit hrany. Je možné i spojit více Rubikových krychlí k sobě.

k) Čínské kroužky

Je to typ prastarého drátového hlavolamu a opět existuje mnoho podob. Může být velice obtížným, i když již známe jeho řešení. Nemusí se nám dokonce ani povést ho vyřešit. Klasická podoba hlavolamu je tvořena lichým počtem kroužků na smyčkách, které jsou navlečené na jehlu s držátkem.

Ilustrace 7: Čínské kroužky (Originální hlavolam Čínské kroužky. Zažeň nudu, 2015)

Matematické hlavolamy dle H. E. Dudeneye (1995, str. 7 - 91):

a) Aritmetické a algebraické úlohy

Jsou zde různé slovní úlohy rozdělené do tématických celků, např. Hlavolamy s penězi, Číslicové hádanky, Věk a příbuzenské vztahy. Všechny úkoly mají společné, že se dají vyřešit výpočtem nebo se pracuje s čísly a jejich vlastnostmi.

```
      SEDM
    x SEDM
  --------
     ....M
    ....D
   ....E
   ...S
  --------
   .......
```

Ilustrace 8: Aritmetický rébus (P. Močalov, str. 7)

b) Geometrické problémy

Autor opět kapitolu dělí na podkapitoly, např. Rozdělovací úlohy, kde je úkolem rozdělit různé obrazce dle určených parametrů, dále je zde podkapitola Různé geometrické úlohy. Můžeme se zde setkat např. se zajímavým způsobem, jak nakreslit spirálu nebo se zápalkovými hlavolamy.

c) Hlavolamy s body a přímkami

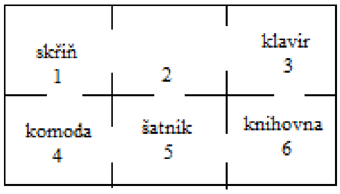
V úlohách jde o rozestavování bodů v ploše tak, aby vznikly předem definované obrazce.

d) Cestovatelské hlavolamy

Jde o hlavolamy, kde jde o určování nejrůznějších cest. Nejkratší, nejdelší nebo jinak definované, např. cestu, kde zatočíš pouze patnáctkrát apod.

e) Přemisťování žetonů

Nejedná se pouze o žetony jako ve hře Mlýn, která je velice známá po celém světě, ale i o přemisťování žab, nábytku, vlakových vagónů apod. podle zadání.



Ilustrace 9: Přemisťování žetonů - stěhování nábytku dle zadání

(H. E. Dudeney 1995, str. 44)

f) Kombinatorické hlavolamy

Jsou zde nejrůznější úkoly, kde je zapotřebí uvažovat o různých kombinacích prvků, ať už jde o karty nebo musíme vyřešit zasedací pořádek kolem klatého stolu, ale i sestavování obrazců ze zápalek atd.

g) Problémy měření, vážení a balení

V této kapitole se setkáváme s úlohami, kde např. mícháme dvě různé kapaliny a zjišťujeme jaký je jejich poměr nebo řešíme loupež pokladu a přesouvání zlodějů z místnosti pomocí lana a závaží, když víme podmínky pro přesuny nebo řešíme počet kuliček, které chceme zabalit do krabice o určitých rozměrech.

h) Hlavolamy s přeplouváním řeky

Jsou to hádanky ze středověku, které jsou obměňovány a ztěžovány autorem dalšími parametry. Úkolem je převézt přes řeku určité předměty nebo lidi o různých hmotnostech za stanovených podmínek.

ch) Hlavolamy odvozené z her

Jsou zde hry s dominem, stavění z karet, triky s hracími kostkami apod.

i) Hry a hříčky

Předmětem her jsou různá hrací pole a pohyb figurkami tak, aby došlo k vyřešení zadání úloh. Např. hráči přesouvají každý svou věž tak, aby některý z nich zajal věž druhého.

j) Záhady magických čtverců

Jde o úlohy, kde jsou podstatou čtverce rozdělené na 16 menších čtverečků, kde jsou vepsány číslice, které mají předem určený vzájemný vztah. Také jsou zde magické proužky, které mají po rozstříhání složit magický čtverec. Procvičit si můžeme ale i rozdílové, podílové, součinové nebo prvočíselné magické čtverce.

l) Nezařazené úlohy

Tuto kapitolu nelze jednoduše charakterizovat, neboť jsou zde úlohy s dominem, hracími kartami a kostkami, zápalkami, ale i slovní úlohy, úlohy obsahující přesuny prvků apod.

k) Bludiště a jak v nich hledat cestu

Autor zde uvádí skutečná bludiště a návod, jak v nich hledat cestu. Dále pak bludiště vymyšlená např. kruhového tvaru, kde je více vstupů, mnoho slepých i průchodných cest a úkolem je najít nejkratší cestu do středu.

1.3.3 Hlavolamy ve výuce

Je nutné zmínit, že existuje mnoho zdrojů a autorů, kteří se zabývají využitím hlavolamů ve výuce. Je to např. Prof. Hejný - přední český a slovenský odborník v didaktice matematiky (M. Hejný 2014), RNDr. Jaroslav Flejberk - zakladatel Mensy v bývalém Československu nebo doc. Jana Příhonská - autorka mnoha domácích i zahraničních prací o využívání hlavolamů a rozvoji logického myšlení ve výuce (J. Příhonská 2008).

Existují i projekty zaměřené na využití hlavolamů ve výuce jako je program Hlavolamy nás baví, který si může každá škola objednat na webu hryahlavolamy.cz nebo může každý učitel využít webové stránky Mensy. Známý je také Matematický klokan, pro mladší žáky Cvrček, což jsou logické úlohy, které každoročně testují dovednosti žáků.

Každý učitel by měl dle RVP hlavolamy využívat a pokud chce sám vybrat takové, které se mu hodí do výuky, může se inspirovat v dílech mnoha autorů. Čeští autoři jako Zuzana Pospíšilová, Antonín Vrba nebo Stanislav Vejmola se inspirují v mnohých úlohách u autorů zahraničních jako je Adam Hart Davis (Hart Davis 2006), Roger Rougier (R. Rougier 1997), ale i H. E. Dudeney, jejichž díla byla již přeložena do češtiny. Stejně tak my se můžeme inspirovat v dílech českých i zahraničních autorů. Velice zajímavé jsou např. doposud nepřeložené publikace o hlavolamech od Davida G. Garlocka (Garlock 2015) nebo Martina Gardnera (M. Gardner 1994).

Protože chci v diplomové práci rozvíjet logické myšlení pomocí kombinatorických hlavolamů a hlavolamů zaměřených na orientaci v rovině s prvky kombinatoriky, uvedu zde podrobněji úlohy tohoto zaměření. Nejprve je však nutné vysvětlit základní kombinatorické pojmy a pojmy spojené s orientací v rovině.

1.4 Kombinatorika

Kombinatorika je část matematiky, kde se objevují úlohy charakteristické hledáním různých variant a kombinací všeho možného. Může to být různě barevné oblečení, družstva ve sportovních hrách, ale i číselné kombinace apod.

Kombinatorika není žádné nové odvětví matematiky, ale je zaznamenáváno již od konce 16. století. Je spojována především s Blaisem Pascalem a jeho kombinatorickým pravidlem součtu v Pascalově trojúhelníku. Její vývoj však probíhal po celé tisíciletí a první záznamy pochází z Indie. Její počátky jsou spojeny s řešením běžných problémů v životě člověka jako např. kolik různých vůní může vzniknout užitím několika přísad apod. (K. Mačák 1999, str. 237)

Známe mnoho jmen, která se v průběhu 16. a 17. století touto problematikou zabývala a zasadila se o její rozvoj. Byl to např. Christopher Clavius, Sebastian Izquierdo, Blaise Pascal, Gottfried Wilhelm Leibniz nebo Jakob Bernoulli. (K. Mačák 1999, str. 241, 245, 251, 253, 255)

Ti začínali řešit problémy spojené s hazardními hrami, ale aplikovali kombinatoriku i na různé společenské a stolní hry.

Nejprve bylo běžné řešit takové úlohy výčtem prvků, teprve později byly vymyšleny vzorce pro variace, permutace a kombinace a to vždy buď s opakováním nebo bez opakování prvků.

V dnešní době je kombinatorika předmětem studia na středních školách. Na základní škole se s ní může setkat žák okrajově až na druhém stupni a úlohy jsou řešeny intuitivně nebo dosazováním různých hodnot. Je však možné představit je i žákům prvního stupně, neboť k jejich řešení můžou využít intuici a dosazování stejně jako žáci druhého stupně. Úlohy však zvolíme s nižší obtížností.

V úvodu kombinatoriky je nutné ukázat si kombinatorické pravidlo součtu, které bude využito k řešení úloh v praktické části DP a to v kapitole 2.3.3, ve cvičení č. 3 a č. 5 , ukázka řešení úloh pak v Příloze č. 2, dále pak v kapitole 2.2 a 2.4, kde je pravidlo použito jako jedna z možností řešení úloh č. 3.

Dále je nutné vysvětlit pravidlo součinu, které je využito ve vzorovém řešení úloh č. 2 v kapitole 2.2 a 2.4 a v kapitole 2.3.1, kde se pravidlo využívá k řešení cvičení 4. Ukázka řešení je v Příloze č. 1.

Pojem faktoriál je pak důležitý k pochopení výpočtů kombinací, variací a permutací opět v kapitole 2.2, 2.4 a 2.3.1 včetně Přílohy č. 1. Výpočty pomocí vzorce zde slouží k ověření správného výsledku. Vzorec obsahuje faktoriály.

Kombinační číslo je pak nutné k pochopení Pascalova trojúhelníku, jehož vlastnosti jsou využity při řešení úloh č. 3 a č. 4 v kapitole 2.2.3 a v kapitole 2.3.3 ve cvičení č. 3 a následně ve vzorovém řešení v Příloze č. 2.

Faktoriál (N. J. Vilenkin 1977, str. 33)**:**

Faktoriál čísla x je roven součinu všech přirozených čísel, která jsou rovna nebo menší než číslo x. Značíme ho pomocí vykřičníku x!. Využíváme ho při výpočtech variací, permutací i kombinací. Důležité je zmínit, že 0! = 1, vychází z definice:

1! = 1 n! = n . (n-1)! pro n > 1

0! = 1 n! = n . (n-1)! pro n > 0

Př. 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 – využijeme při výpočtech kombinací a variací vzorcem viz kapitola 2.2.3, 2.4.2 a v Příloze č. 1.

Kombinační číslo (A. Vrba 1980, str. 15-22)**:**

Kombinační číslo je symbol, který označuje počet k-členných kombinací z x prvků. Jeho zápis je:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ platí pro všechna nezáporná a celá čísla n a k, kdy $k \leq n$.

Příklady:

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8.7.6.5!}{3!5!}=\frac{8.7.6}{3.2.1}=56$$

Vlastnosti kombinačních čísel:

- Pro všechna celá nezáporná čísla *n*, *k*, $k \leq n$, platí $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

Chceme-li vybrat *k*-prvkovou podmnožinu *n*-prvkové množiny, zbyde vždy $n - k$ nevybraných prvků. Rozhodneme-li se tedy vybrat $n - k$ prvků, které do hledané podmnožiny nezařadíme, počet možností, jak je vybrat, bude stejný jako při přímém výběru *k* prvků.

- Pro všechna celá nezáporná čísla *n*, *k*, $k < n$, platí $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

  – využijeme v Pascalově trojúhelníku v úlohách v kapitole 2.2.3, 2.4.2 a v Příloze č. 2.

Kombinatorické pravidlo součtu (Kombinatorika — Matematika.cz, 2006)**:**

Říká nám, že pokud máme dvě množiny A a B obsahující různé prvky, pak počet všech možných možností výběru jednoho prvku ze sjednocení těchto množin, je roven součtu velikostí obou množin.

Jako příklad poslouží např. ponožky, kterých máme 5 modré barvy, 3 červené barvy a 2 zelené barvy a chceme vědět, kolik je možností vzít si jednu ponožku. Máme tedy 3 množiny. Modré ponožky, zelené ponožky a červené ponožky. Nyní sečteme velikosti množin, tj. 5 + 3 + 2 = 10. Je tedy 10 možností, jak si vytáhnout 1 ponožku.

Ve spojení s kombinatorickým pravidlem součtu je nutné vysvětlit, co je to Pascalův trojúhelník.

1.4.1 Pascalův trojúhelník (Z. Vošický, V. Lank, M. Vondra 2007, str. 106) **:**

Je známý již od roku 1303, ale teprve Blaise Pascal rozšířil povědomí o jeho vlastnostech do Evropy. Jsou to prvky binomického rozdělení pravděpodobnosti a každý řádek trojúhelníku je tvořen kombinačními čísly:

- $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$
- obecně vyjádřeno $\binom{n}{k}$, kde n a k jsou přirozená čísla.

Využití Pascalova trojúhelníku v praxi viz kapitola 2.2.3, úloha č. 3, 4, kapitola 2.4.2, úloha č. 3 a Příloha č. 2, úlohy č. 3 a č. 5. Souvislosti mezi přirozenými a kombinačními čísly viz ilustrace č. 10.

1. řádek	**1**	$\binom{0}{0}$
2. řádek	**1 1**	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
3. řádek	**1 + 2 1**	$\binom{2}{0} + \binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
4. řádek	**1 3 3 1**	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

Ilustrace 1: Pascalův trojúhelník přirozených a kombinačních čísel

Typická úloha: Kolika způsoby lze přečíst slovo KUPA níže, když směr čtení je pouze vpravo a dolů?

K U P A převedeme na Pascalův trojúhelník 1 1 1 **1**, sečteme 1 + 3 + 3 + 1 = 8
U P A 1 2 **3**
P A 1 **3**
A **1**

Kombinatorické pravidlo součinu (Kombinatorika — Matematika.cz, 2006)**:**

Máme opět dvě množiny, A a B. Množina A obsahuje tři dívky a množina B čtyři chlapce. Nyní se ptáme, kolik různých dvojic (dívka a chlapec můžeme z těchto množin vytvořit).

Počet všech párů spočítáme takto: vezmeme jednu dívku, a postupně k ní přiřadíme všechny chlapce. Dostaneme tak 4 různé páry, protože k první dívce můžeme přiřadit právě čtyři chlapce. Pokračujeme takto se zbývajícími dívkami.

1.4.2 Variace (Z. Vošický, V. Lank, M. Vondra 2007, str. 104):

Variace využijeme, pokud z nějaké množiny objektů vybíráme určitý počet objektů, přičemž záleží na pořadí, v jakém tyto objekty vybíráme. Při výpočtech můžeme využívat kombinatorické pravidlo součinu, pokud budeme chtít znát celkový počet všech možností ze všech prvků. Pokud budeme však vybírat pouze některé z prvků a počítat možnosti řešení, je výhodnější využít vzorec níže.

V (k,n) znamená počet *k* členných variací bez opakování z *n* prvků.

$$V(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Tento vzorec využijeme v úlohách typu: Máme 20 kandidátů na vedení obce. Vybírá se starosta, místostarosta a tajemník. Kolik máme celkem možností?

$$V(3,20)=\frac{20!}{17!}=\frac{20.19.18.17!}{17!}=6840$$

Další vzorec pro počítání s variacemi využijeme, pokud budeme mít úlohu, kde je nutné počítat s prvky, které se opakují, tedy budeme chtít získat počet *k* členných variací s opakováním z *n* prvků.

$$V'(k,n)=n^k$$

Typická úloha: Kolik existuje trojciferných čísel složených z číslic 6, 3 a 8.

$$V'(3,3)=3^3=27$$

1.4.3 Permutace (Z. Vošický, V. Lank, M. Vondra 2007, str. 104):

Je speciálním případem variace, kdy máme počet prvků *n* a chceme zjistit počet všech *n*-tic.

$$P(n)=n!$$

Typická úloha: Máš pět obrázků a chceš je pověsit na zeď. Kolika různými způsoby je můžeš pověsit?

$$P(5)=5!=120$$

Nesetkáváme se často s permutacemi s opakováním, ale přesto je nutné si uvést příklad. Permutace s opakováním z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak,že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

Počet P'(k_1, k_2, …, k_n) permutací z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují k_1, k_2, …, k_n-krát, je:

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}$$

Typická úloha: Určete, kolika způsoby je možné srovnat do řady 2 modré, 2 červené a 2 zelené kostky.

$$P'(2,2,2) = \frac{(2+2+2)!}{2!2!2!} = \frac{6!}{2.2.2} = \frac{6.5.4.3.2.1}{8} = 90$$

1.4.4 Kombinace (Z. Vošický, V. Lank, M. Vondra 2007, str. 104)

Kombinace se od variací liší tím, že zde není důležité pořadí prvků. Je to tedy *k* členná kombinace z *n* prvků - neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. (A. Vrba 1980)

Opět zde rozlišujeme kombinace bez opakování prvků a s opakováním. Ty bez opakování se počítají pomocí kombinačních čísel viz výše a vzorec pro výpočet je:

$$K(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Typická úloha: Ve třídě máme 24 žáků. Kolik různých dvojic můžou utvořit?

$$K(2,24) = \frac{24!}{(24-2)!\,2!} = \binom{24}{2} = 190$$

Pro kombinace s opakováním pak platí vzorec:

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Typická úloha: V obchodě mají pět druhů jablek. Kolika způsoby můžeme koupit 10 jablek?

$$K'(10,5) = \binom{5+10-1}{1} = 3003$$

1.5 Orientace v rovině

Orientace v rovině je jednou z možností, jak rozvíjet orientaci v prostoru. Je to jednodušší forma, která by se měla procvičovat již u žáků předškolního věku. Nesystematicky je samozřejmě rozvíjena u dětí již od narození. Nejmladší děti se nejdříve snaží pochopit výrazy jako nahoře, dole, pod, nad, okolo, u apod., poté se přidávají výrazy vlevo, vpravo. Zjednodušeně jsou to příslovečná určení místa nebo příslovce místní.

V předškolním i školním věku se tak žáci nejčastěji setkávají se cvičeními natisknutými na papíře, tedy v rovině.

Nejjednodušší úkoly jsou např. takové, kdy vidíme nakreslený pouze stín nějaké věci a úkolem je uhodnout, co je to za věc. Nebo máme nakreslenou půlku domu a druhou máme souměrně překreslit, tedy když chybí část obrázku.

Pro procvičování orientace v rovině může sloužit papír přeložený tak, že po rozložení vytvoří čtvercovou síť nebo čtvercovou síť natiskneme a žáci dle diktátu učitele kreslí obrázky do určených čtverců.

Stejně tak může být úkolem i hledat cestu čtvercovou sítí, když je zadán stejný začátek pro všechny a navigujeme již pouze povely vpravo, vlevo, nahoru, dolů apod.

Další možností je kreslení obrázků ve čtvercové síti dle zadání, tentokrát s tím rozdílem, že nekreslíme do čtverců, ale dle pokynů zakreslujeme po liniích čtverců až je vytvořen obrázek. Můžeme ale chtít po žácích i aby kreslili reálné věci dle diktátu. Např. doprostřed papíru stůl, pod něj míč, vpravo od něj židli atd.

Orientaci v rovině je ale také možné spojit s kombinatorikou a procvičovat tak u žáků mladšího školního věku dovednost kombinatorického myšlení a orientace v rovině zároveň a to pomocí nejrůznějších hlavolamů viz kapitola 1.6.

1.6 Hlavolamy využité v praktické části DP

Protože cílem diplomové práce je rozvíjet kombinatorické myšlení a orientaci v rovině, vybrala jsem typy hlavolamů k tomu určené. Sama jsem se inspirovala v publikacích různých autorů, zadání jsem však vždy upravila podle svých potřeb. V testech i v pracovních listech se objevují čtyři typy úloh a) úlohy na rozvoj orientace v rovině, b) úlohy s využitím variací, permutací a kombinací, c) algebrogramy a d) úlohy na rozvoj orientace v rovině s kombinatorickým myšlením.

a) Hlavolamy na rozvoj orientace v rovině

Všechny tyto úlohy jsou velice jednoduché a jejich úkolem je procvičit znalost pokynů vlevo, vpravo a orientaci v textu tak, aby nebyl žádný pokyn přehlédnutý. Pokyny jsou zadávány jak slovně, tak směrovými šipkami. Takové úlohy jsou obsaženy v pracovním listu v kapitole 2.3.3, cv. 1a a cv. 4 a ve výstupním testu v kapitole 2.4, cv. 4. U dvou z těchto úloh využívám čtvercovou síť. Odlišnou úlohou na rozvoj orientace v rovině je cv. 1 v kapitole 2.2, kde mají žáci zvolit z vybraných možností správnou křivku jako jim vznikla po spojení výsledků dle pokynů. Inspiraci k sestavení úloh jsem našla v přednášce Mgr. Jiřiny Palkovičové během studia na TUL.

b) Hlavolamy s využitím variací, permutací a kombinací

Pro žáky třetího ročníku jsem připravila úlohy s tematikou jim blízkou jako např. výběr zvířat do ZOO (kapitola 2.4, cv. 2), tvoření tanečních dvojic ve výuce (kapitola 2.3.1, cv. 4), počet hokejových zápasů při školním turnaji (kapitola 2.2, cv. 2), číselné kombinace (kapitola 2.2 cv. 5, 2.3.1. cv. 6 a 2.4 cv. 5) Ve vstupním testu jsou dvě úlohy tohoto typu stejně jako ve výstupním testu a to jedna na úlohy s využitím variací a jedna s využitím kombinací. V testových úlohách jsem dávala pozor na nízký počet řešení, aby je bylo možné vyřešit experimentem. V pracovním listu jsou pak i obtížnější úlohy s větším počtem řešení.

Inspiraci jsem čerpala v učebnici Matematiky pro SŠ (E. Calda 2010), v publikaci The greatest brainteasers of All time od Martina Gardnera nebo v díle od N. J. Vilenkina, Kombinatorika.

c) Algebrogramy

Tyto příklady jsou výborným způsobem jak se žáky procvičit pravidla komutativnosti, asociativnosti a celkově algebru a logický úsudek. Vždy jde o doplnění číslic místo písmen tak, aby zadaný příklad dával smysl. Je možné najít jedno, více či dokonce žádné řešení. Díky tomu se procvičuje i kombinatorické myšlení. V literatuře jsem nalezla i varianty, kde můžou být místo písmen různé znaky a obrázky. (P. Močalov 1980)

Pro žáky třetího ročníku jsem vybrala příklady jednoduché viz vstupní test, kapitola 2.2 cv. 6, výstupní test, kapitola 2.4 cv. 6 a pracovní list, kapitola 2.3.2, kde jsou ve všech cvičení pouze algebrogramy. Poslední z algebrogramů je složitější, neboť všechny zadané příklady spolu souvisejí. Metodiku nácviku počítání algebrogramů jsem nastudovala v díle od Milana Hejného – Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.

d) Hlavolamy na rozvoj orientace v rovině s kombinatorickým myšlením

Jedním typem úloh, který jsem vybrala, jsou bludiště. Objevují se po jednom ve vstupním i výstupním testu a v pracovním listu v kapitole 2.3.3 jsou tři takové úlohy. V pracovním listu jsem využila nápad Z. Pospíšilové z publikace Záhady a hříčky nejen se slovíčky a nakreslila jsem mapu města, ve kterém žáci musí dle pokynů hledat cesty. Dále mě inspirovala i bludištěm se slabikami, kde žáci hledají cestu dle pokynů a na závěr musí sestavit ze slabik slova. Jedna podobná úloha se objevuje i ve výstupním testu (kapitola 2.4. cv. 1), kde je jednoduchý nákres města a žáci hledají co nejvíce cest dle pokynů.

Jiným typem je bludiště obrázkové, které vypadá jednoduše, ale má pravidelný tvar a musí se v něm hledat větší počet cest. Tato bludiště slouží k využití kombinatorického pravidla součtu v Pascalově trojúhelníku viz kapitola 2.4.2. Tato bludiště jsem viděla během přednášky doc. Jany Příhonská na TUL a v její prezentaci, která je dostupná i na internetu viz zdroje diplomové práce.

Dalším bludištěm, které využívám v DP, a k řešení je možné využít kombinatorické pravidlo součtu v Pascalově trojúhelníku, jsou slovní hříčky. Inspiroval mě P. Močalov, který uvádí takový hlavolam v publikaci Hlavolamy na str. 72, využívá zde slova trojúhelník. Já jsem pro žáky volila slova kratší, aby byli schopni najít všechna řešení pouhým experimentem. Úlohy tohoto typu jsou v kapitole 2.2 cv. 3, 2.3.3 cv. 3 a 2.4 cv. 3.

2. PRAKTICKÁ ČÁST

V praktické části diplomové práce se zaměřím na tvorbu dotazníku pro učitele a vstupního a výstupního testu pro žáky. Dále pak na tvorbu pracovních listů a metodiku výuky cvičení z pracovních listů pro učitele.

Dotazník bude sloužit k získání informací o četnosti užívání hlavolamů na prvním stupni základní školy a úloh s hlavolamy spojenými a to tematicky zaměřenými stejně jako vstupní a výstupní test a pracovní listy.

Úlohy budou v testech zaměřené na vnímání rozdílu v uspořádání či neuspořádání prvků s ohledem na možnost opakování prvků, algebrogramy a úlohy zaměřené na orientaci v rovině s využitím kombinatorického pravidla součtu a součinu. Všechny úlohy jsou pro žáky klasifikovány jako hlavolamy, neboť jejich řešení není jednoduché a v běžné výuce typické.

Testy jsou určeny pro žáky třetího ročníku základní školy a posléze budou sloužit i k ověření předpokladů stanovených v kapitole 4.2 a jako podklad pro tvorbu pracovních listů.

V pracovních listech budou zařazeny úlohy k procvičení pro žáky, dále pak budou vytvořeny metodické listy s charakteristikou úloh a tipy do hodiny. Obsahově zde budou tematicky podobné hlavolamy jako v testech, aby žáci mohli rozvíjet strategie při řešení úloh. Sama se ve výuce zaměřím na hlavolamy, které žákům v testech dělaly největší problémy.

2.1 Tvorba dotazníku

Zajímalo mě, zda učitelé prvního stupně ve výuce využívají hlavolamy a vedou žáky k rozvoji kombinatorického myšlení a orientace v rovině. Proto jsem vytvořila dotazník, který jsem posléze učitelům doručila buď osobně nebo elektronicky dle předchozí domluvy s řediteli škol.

Otázky byly koncipovány tak, aby byly pro všechny učitele jednoznačné, a aby sami dotazovaní mohli v některých odpovědích uvést příklady ze své praxe. Jinde byla i možnost vybrat odpověď z předem určené nabídky a to ze čtyř možností. Nebyly možné pouze odpovědi ano a ne, ale mohlo se vybírat z - určitě ne, spíš ne, spíš ano, určitě ano. Tyto odpovědi mi přiblíží více četnost používání daných úloh, pomůcek atd. Také jsem se snažila, aby vyplnění dotazníku bylo rychlé a jednoduché a tím pádem přijatelnější pro dotazované.

První otázky dotazníku jsou směřovány k zjištění obecných informací o tom, v jakém ročníku nyní učitelé učí, jakou učebnici používají, zda v hodinách využívají další zdroje kromě učebnice a netradiční pomůcky.

Další otázky již zjišťují informace potřebné k ověření, zda se učitelé zabývají úlohami zaměřenými na orientaci v rovině na prvním stupni, a zda vůbec takové úlohy znají. Táži se přímo na užívání algebrogramů v hodinách, sama jsem se s nimi v průběhu plnění povinné školní docházky nesetkala a ani během praxe na ZŠ u jiných kolegů a kolegyň ne. Pouze u jedné paní učitelky, která vyučovala podle metody pana profesora Hejného. Proto mě zajímalo, zda jiní učitelé algebrogramy znají.

Dále pak zmiňuji šifry, které mohou být obsaženy v různých vyučovacích předmětech, ne pouze v matematice. Mám tím na mysli i český jazyk, kde mohou žáci pomocí šifer rozluštit např. název nové knihy, kterou budou číst, nebo v prvouce, kde mohou odhalit téma další hodiny, ale např. i v hudební výchově před učením se nové písně nebo v tělocviku, kdy žáci díky šifrám odhalí hru, kterou budou na konci hodiny za odměnu hrát.

Zařazeny jsou i otázky týkající se prostorové orientace, tedy, zda učitelé používají modely těles, jak s žáky modelují tělesa nebo zda používají čtvercovou síť a k čemu. Čtvercovou síť lze použít k mnoha činnostem, např. při výuce osové souměrnosti, sítí těles nebo k procvičování orientace v rovině, kdy můžeme např. žákům zadávat směry, kterými mají po síti jít apod. Sama ji využiji v pracovních listech pro procvičování orientace v rovině.

Nejdůležitější otázka je cílena na hlavolamy obecně. Byla jsem zvědavá, zda učitelé vědí, že je více druhů úloh, kterým se dá říkat hlavolamy a ne pouze ty typické prostorové jako ježek v kleci. Možná hlavolamy zadávají žákům ve výuce a sami o tom ani nevědí. Dále jsem se ptala i na užívání her v hodinách a to ať stolních her nebo různých skupinových.

Všichni dotazovaní mají i možnost vyjádřit se k některým otázkám více. Můžeme si tak lépe představit, jak v hodinách s žáky pracují. Dotazník je anonymní, předpokládám tak, že učitelé budou odpovídat podle pravdy, i když dané úlohy nebudou znát a nebudou používat pomůcky dle dotazníků. Myslím si také, že mnoho učitelů nezná algebrogramy a často si ani neuvědomují, že je žákům zadávají, ale nepojmenovávají je tak.

Po dlouhém přemýšlení a konzultaci s vedoucí práce jsem se snažila doručit dotazníky do rukou co nejvíce učitelům nejprve v Jablonci nad Nisou a jeho okolí, posléze i v Liberci a jeho okolí. Nejprve jsem vždy kontaktovala ředitele školy mailem, poté telefonicky a zeptala se ho, zda by mohl být dotazník předán učitelům prvního stupně a to buď elektronickou nebo písemnou formou. Ne všichni ředitelé měli o dotazník zájem a vždy mi bylo sděleno, že nikdo nemůže učitele donutit dotazníky vyplnit. Nemohla jsem tak počítat se stoprocentní účasní všech učitelů a škol. Proto jsem později musela dotazníky rozšířit i do Liberce, neboť z Jablonce a okolí se mi vrátilo pouhých čtyřicet odpovědí.

Dotazník byl tedy zaslán či dopraven do základních škol v Jablonci nad Nisou dle výpisu z internetových stránek města Jablonec nad Nisou, poté do Železného Brodu, Tanvaldu, Lučan nad Nisou, Nové Vsi nad Nisou, Zásady, Velkých Hamrů, Janova nad Nisou, Smržovky, Desné, Huntířova a Kořenova. Odpovědi jsem obdržela pouze z některých škol v Jablonci nad Nisou a to především díky vlastním kontaktům s místními učiteli, poté z Nové Vsi nad Nisou a Tanvaldu. Z Libereckých škol (vyhledány opět pomocí internetových stránek města Liberec) odpověděla pak menšina v podobě asi dvou škol.

Samotný dotazník je vložen v další kapitole 2.1.1 a ukázka vyplněného dotazníku učiteli je v elektronické příloze č. 7.

2.1.1 Dotazník pro učitele 1. stupně ZŠ

Vážení kolegové a kolegyně,

ráda bych Vás požádala o vyplnění krátkého dotazníku, který bude sloužit jako podklad k výzkumu v mojí diplomové práci, která se zabývá rozvojem logického myšlení žáků prvního stupně ZŠ. Účast ve výzkumu je zcela anonymní, dobrovolná a zabere 2 - 4 minut.

Předem děkuji za spolupráci, Váš čas a poskytnuté informace,

Adéla Landová

Studentka oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

Technická univerzita v Liberci

1. Jaký ročník nyní učíte?________________

2. Jakou učebnici matematiky používáte?

3. Využíváte v hodinách matematiky i jiné zdroje (publikace, internet…) než je učebnice?

- Vůbec ne
- Spíš ne
- Spíš ano
- Určitě ano

Které?_________________________________

4. Používáte v hodinách netradiční pomůcky?

- Vůbec ne
- Spíš ne
- Spíš ano
- Určitě ano

Pokud ano, jaké:________________________

5. Řešíte v hodinách matematiky algebrogramy?

- Vůbec ne
- Spíš ne
- Spíš ano
- Určitě ano

6. Zadáváte žákům k řešení šifry?

- Vůbec ne
- Spíš ne
- Spíš ano
- Určitě ano

7. Jaké typy zajímavých úloh v hodinách matematiky využíváte?_______________

8. Využíváte v hodinách modely těles?

- Vůbec ne
- Spíš ne
- Spíš ano
- Určitě ano

9. Jaké pomůcky využíváte pro modelování obrazců a sítí těles? ________________

10. Využíváte čtverečkovaný papír?

- Vůbec ne
- Spíš ne
- Spíš ano
- Určitě ano

Uveďte při jakých činnostech:______________________

11. Využíváte ve výuce (nějaké) hlavolamy?

- Vůbec ne
- Spíš ne
- Spíš ano
- Určitě ano

Jaké?____________________

12. Využíváte hry?

- Vůbec ne
- Spíš ne
- Spíš ano
- Určitě ano

Jaké:____________________

Jakým způsobem:_________

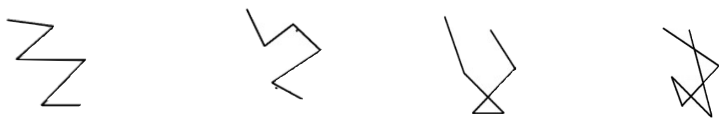
2.2 Vstupní test

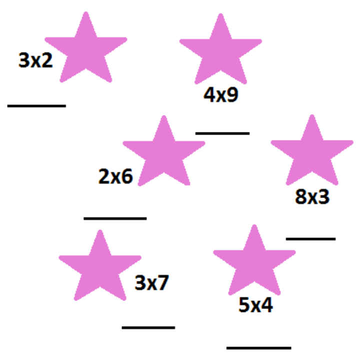
Tvorba vstupního testu byla nutná kvůli ověření schopnosti řešit kombinatorické úlohy a úlohy týkající se orientace v rovině spojených s kombinatorikou žáků třetího ročníku ZŠ. Zadání jsem si domluvila se zástupcem ředitele Mgr. Michalem Polmanem ze základní školy Jablonec nad Nisou-Mšeno, Mozartova 24. Ten mě seznámil s paní učitelkou třetího ročníku Mgr. Hanou Houškovou a s ní jsem domlouvala termín zadání vstupního testu. Test měl být zadán v její třídě a i v druhé paralelní třetí třídě a to ve stejný den, akorát další vyučovací hodinu, aby žáci neměli příliš času rozebírat úlohy se svými spolužáky.

Samotnému vypracování úloh však předcházela úvaha, jaké jsou dovednosti a znalosti žáků ve třetím ročníku základní školy a jaké úlohy jim tedy mohou být zadané ve vstupním testu, aby je mohli zvládnout alespoň částečně bez předchozího procvičování. Samozřejmě jsem musela zvolit jednodušší varianty různých typů úloh týkající se kombinatorických hlavolamů a hlavolamů kombinatorických s prvky orientace v rovině (kapitola 1.6). Během vypracování testu jsem se inspirovala v mnoha publikacích uvedených ve zdrojích diplomové práce, nakonec jsem je však vždy obměnila a vymyslela zadání vlastní. Test obsahuje šest úloh viz. kapitola 2.2.1, kde je i jejich charakteristika. Ukázka řešení žáků bude přiložena k DP jako elektronické příloha č. 5.

1. Zapiš výsledky příkladů na linku pod nimi a výsledky spoj od nejmenšího po největší. Rozhodni, která čára vznikne spojením všech výsledků.

A) B) C) D)





Charakteristika úlohy:

Úloha je zaměřena na orientaci v rovině a hledání správné cesty od výsledku k výsledku. Žáci musí být po vypočítání příkladů schopni poznat výslednou čáru a označit ji v nabídce nad obrázkem.

Předpokladem úspěšného vyřešení úlohy je, že žáci umí malou násobilku a příklady dobře vypočítají. Mohla by nastat situace, kdy příklady sice dobře vypočítají, ale nepřečtou si správně zadání, tedy neporozumí textu a spojí výsledky špatně. Například spojí hvězdy a ne linky pod správnými výsledky. Následkem bude, že nevznikne správná výsledná čára, přesto se však můžou trefit do správné odpovědi. Horší případ nastane, pokud žáci vypočítají příklady špatně, poté jim vznikne špatná výsledná čára a úloha tak nebude vyřešena dle zadání. Nejzásadnější pro splnění požadavků úlohy je tedy znát malou násobilku a udělat úspěšný rozbor textu a podle něj správně postupovat v řešení.

Po obdržení zpracovaných testů od žáků budu u této úlohy sledovat především jejich schopnost vypočítat správně příklady (budu kontrolovat dílčí výsledky), spojit výsledky dle zadání a následně vybrat odpověď.

Úloha bude hodnocena 3 body. 1 bod žák získá za správně vypočítané příklady, 1 bod za bezchybné spojení výsledků a 1 bod za vybrání správné odpovědi.

2. Ve škole se konal hokejový turnaj. Účastnilo se 5 družstev a všechna družstva musela hrát se všemi z protivníků, vždy pouze jeden zápas. Kolik zápasů se odehrálo celkem?

Charakteristika úlohy:

Cílem úlohy je ověřit schopnost žáků uvažovat o různých kombinacích družstev v soutěži a schopnost vymyslet systém pro zapsání úlohy tak, aby byly objeveny všechny správné možnosti.

Předpokladem úspěšného vyřešení úlohy je, že žáci budou systematicky zapisovat nebo zakreslovat týmy hrající proti sobě a eliminují tak opakování některých dvojic, což se může zdát pro někoho, kdo takovou úlohu nikdy neřešil, těžké. Chyby, které mohou nastat při řešení úlohy, by mohly být ve špatném porozumění zadání a nepochopení požadavku, dále pak v opakování dvojic nebo nenalezení všech možných kvůli výběru špatného systému zápisu.

Zajímá mě, jak budou žáci úlohu řešit, jak si družstva označí a na kolik řešení přijdou. Jde pouze o logické uvažování a o strategii řešení. Úlohu tedy můžou řešit i žáci, kteří mají problémy s násobilkou a jinými matematickými operacemi.

Úloha je na využití kombinací bez opakování, žáky vzorec učit nebudeme, ale snadno si ověříme, že výsledek je 10 možností. Je tedy možné získat za úlohu 10 bodů, za každou nalezenou možnost 1 bod. Při hodnocení budu sledovat celkový postup řešení, ne pouze slovní odpověď, která je u všech slovních úloh vyžadována (zmíním během zadávání testu ve třídě), protože žáci mohou správně najít výsledek, poté si možnosti špatně spočítají a špatně odpoví. Pokud některou z dvojic budou opakovat, budu jim počítat pouze tu jednu správnou. V celkovém hodnocení celé třídy se pak zaměřím i na problém s opakováním stejných možností.

3. Kolika způsoby můžeš přečíst slovo KRUH napsané níže? Pohybovat se můžeš pouze doprava a dolů:

K R U H

R U H

U H

H

Charakteristika úlohy:

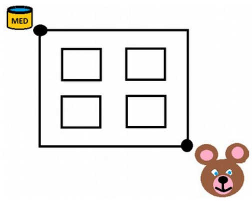
Cílem úlohy je opět ověřit u žáků schopnosti orientace v rovině, úvahy nad kombinacemi různých cest a hledání co nejvíce řešení.

Předpokladem úspěšného řešení je zvolení strategie takové, aby se žákům nepopletly čáry, které budou označovat cestu skrz slovní hlavolam. Chyby, které mohou nastat, jsou tedy v označení nalezeného slova kruh nebo nepozornost v hledání a nalezení nízkého počtu řešení.

Zajímá mě postup řešení, jak budou žáci vyznačovat možnosti jak slovo přečíst a na kolik možností přijdou.

Úloha je zaměřena na využití Pascalova trojúhelníku v praxi, opět nemá smysl na tuto skutečnost žáky upozorňovat. Pro žáky to znamená především objevování různých variant cest v rovině zadaného slova a orientaci ve schématu. My si můžeme ověřit počet řešení právě Pascalovým trojúhelníkem. Protože je 8 možností, jak slovo přečíst, je možné získat 8 bodů za každou možnost.

4. Kolika různými cestičkami se může dostat medvídek (z dolního pravého rohu) chodbičkami ke sklenici s medem (horní levý roh) pokud může běžet jen nahoru a doleva?



Charakteristika úlohy:

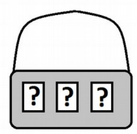
Cílem úlohy je ověřit schopnost žáků orientovat se v rovině bludiště a nalézt všechny možné kombinace cestiček systematicky bez vynechání jediné z nich.

Předpokladem úspěšného vyřešení úlohy je zvolení systému označení možných cest a porozumění zadání. Chyby, ke kterým by mohlo dojít, jsou hledání cest, které nevedou pouze doleva a nahoru, ale i cest jiných, také špatné označení nalezené cesty a její pozdější opakování nebo zmatek v řešení způsobený mnoha čarami označující různé cesty např. z důvodu použití jen jedné barvy.

V úloze budu sledovat, zda jsou žáci schopni nalézt správnou cestu, a zda v jejich zápisu je nějaký systém.

Úloha má 6 řešení. Za každé žák může získat 1 bod, tedy celkem bodů 6. Řešení snadno zobrazíme pomocí uzlového grafu.

5. Jsi pirát a našel jsi zlatou truhlu. Abys ji otevřel, musíš zadat správný kód. Kód zámku je trojmístný. Můžeš doplnit vždy jednu z číslic 1, 2, 3. Kolik trojmístných kódů je možno nastavit?



Charakteristika úlohy:

Cílem úlohy je vyzkoušet, zda žáci dokážou uvažovat všechna řešení číselných kombinací, a zda si dokážou uvědomit, že číslice se v kódu nesmí opakovat. Jde tedy i o správné porozumění zadání. Úloha je jednoduchá, neboť lze použít pouze 3 číslice a musí tvořit trojciferné číslo.

Sledovat budu opět, jak žáci úlohu budou řešit, zda dokážou zvolit systematický zápis kódů nebo budou pouze experimentovat. Předpokladem úspěšného vyřešení je, že žáci porozumí zadání a nebudou opakovat číslice v kódu, nemůže jim tedy vzniknout např. kód 111 apod., další důležitou části je systém řešení úlohy a označení míst s číslicemi. Důležitá je i slovní odpověď, která musí odpovídat nalezenému řešení.

Úloha je na využití variací bez opakování, ověřit si tedy můžeme vzorcem, že řešení je 6. Žáky vzorcem nezatěžujeme. Bod přidělím za každou správnou možnost.

6. Doplň místo písmen číslice 0-9 tak, aby příklady níže byly správně vypočítané.

Příklad: 25 + 5 = 30

AB + B = 30 → A = 2

B = 5

a) 40 + F = FF   F =______________

b) GG + G = 12   G =______________

c) XY + X = 30   X =______________ Y =________________

d) 55 = CC + DD   C =______________ D =________________

e) SM + M = 46   S =______________ M =________________

Charakteristika úlohy:

Poslední úloha využívá logický úsudek. Jde především o to, aby se žáci zamýšleli, které číslice jsou vhodné dosadit za neznámé podle výsledků příkladů. Lze tak mnoho variant bez zkoušení vyřadit a neztrácet s nimi čas. Pokud je např. výsledek menší než

50, je jasné, že sčítanci nemůžou mít desítky větší než je pět apod. Také je nutné zamyslet se, zda u některých příkladů není možnost více řešení. Pro některé žáky bude úloha jednoduchá, pro některé složitější. První příklady jsou jednodušší, další jsou již náročnější, neboť je zadáno více neznámých. U některých úloh je možné najít i více řešení.

Budu sledovat, zda žáci dokážou řešení najít, a zda si budou nějak zapisovat, či budou pouze experimentovat a dosazovat číslice 0-9 nebo žádný zápis nebudou mít a jejich rozhodnutí bude pramenit z pamětného počítání. Chyby, kterých se mohou dopustit jsou především početní.

Hodnotit úlohu budu tak, že za každý správně vypočítaný příklad dostanou žáci po jednom bodu. Celkem tedy mohou získat bodů 10, neboť v příklad d) je možné najít pět různých řešení a v e) řešení dvě. Sledovat budu výsledky zapsané v testu, ale i výpočty žáků, neboť je možné, že příklad správně vypočítají, ale nezapíšou již do zadání.

2.2.1 Hodnocení testu:

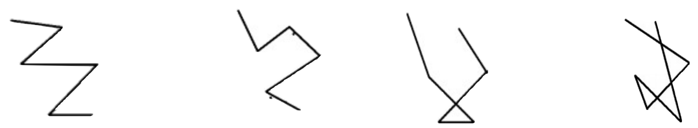
Každá úloha má své bodové hodnocení. Celkem žák může získat 43 bodů, pokud bude mít vše správně. Nakonec ze získaných bodů vypočítáme procentuální úspěšnost a tu zaznamenáme do tabulky a grafu. Procentuálně budeme vyhodnocovat i úspěšnost jednotlivých úloh v rámci celé třídy, abychom zjistili, která z nich byla pro žáky nejproblematičtější. U úlohy č. 2 a č. 5 pak zhodnotím i to, zda žáci pozorně četli zadání a opravdu neopakovali jednu možnost vícekrát.

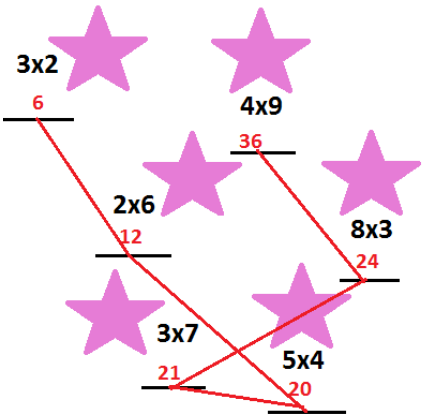
Vyhodnocení testu bude sloužit především pro tvorbu pracovních listů, ve kterých se zaměřím na procvičování problematických úloh. Později je s žáky sama procvičím a navrhnu i další možné úlohy k procvičování pro odstranění chybných představ.

2.2.2 Vzorové řešení vstupního testu

1. Zapiš výsledky příkladů na linku pod nimi a výsledky spoj od nejmenšího po největší. Rozhodni, která čára vznikne spojením všech výsledků.

A) B) C) D)



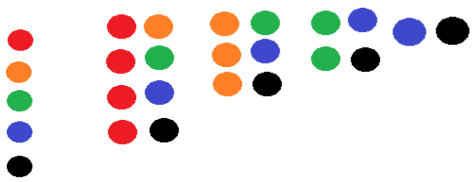


2. Ve škole se konal hokejový turnaj. Účastnilo se 5 družstev a všechna družstva musela hrát se všemi z protivníků, vždy pouze jeden zápas. Kolik zápasů se odehrálo celkem?

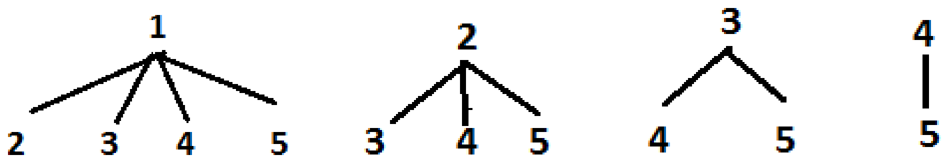
a)

Družstva:	Zápasy:				
A	A + B	B + C	C + D	D + E	E
B	A + C	B + D	C + E		
C	A + D	B + E			
D	A + E				

b)



c)



d) Kombinace bez opakování:

$$K(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$K(2,5)=\frac{5!}{(5-2)!.2!}=\frac{5!}{3!.2!}=\frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1}=10$$

Celkem se odehrálo 10 zápasů.

3. Kolika způsoby můžeš přečíst slovo KRUH napsané níže? Pohybovat se můžeš pouze doprava a dolů:

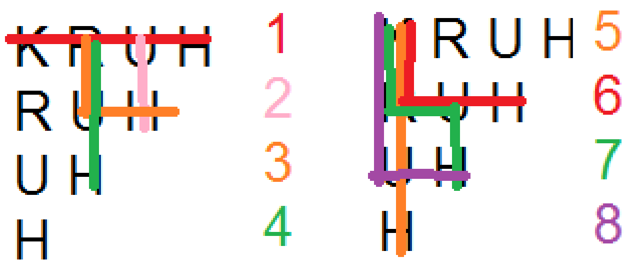
K R U H

R U H

U H

H

a)



b) Pascalův trojúhelník – kombinatorické pravidlo součtu (viz. Kapitola 1.4.1 v teoretické části)

●1 ●1 ●1● 1 → 1 + 3 + 3 + 1 = 8

●1 ●2 ●3

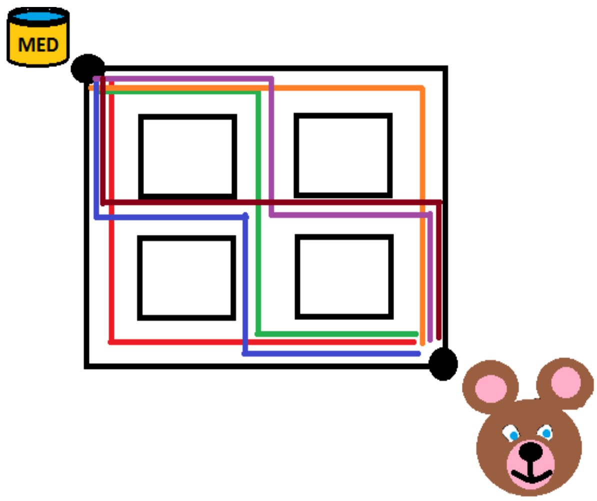
●1 ●3

●1

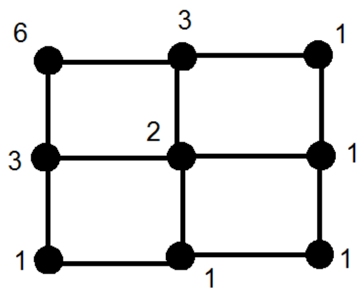
Celkem je 8 způsobů, jak lze přečíst slovo kruh.

4. Kolika různými cestičkami se může dostat medvídek (z dolního pravého rohu) chodbičkami ke sklenici s medem (horní levý roh) pokud může běžet jen nahoru a doleva?

a)

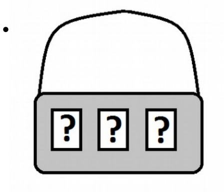


b) Pascalův trojúhelník – kombinatorické pravidlo součtu



Medvídek se může dostat k medu 6 různými cestičkami.

5. Jsi pirát a našel jsi zlatou truhlu. Abys ji otevřel, musíš zadat správný kód. Kód zámku je trojmístný. Můžeš doplnit vždy jednu z číslic 1, 2, 3. Kolik trojmístných kódů je možno nastavit?



a) 1 2 3 2 1 3 3 1 2

1 3 2 2 3 1 3 2 1

b)

c) Variace bez opakování

$$V(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!} \qquad V(3,3)=\frac{3!}{(3-3)!}=6$$

Úloha má šest řešení.

6. Doplň místo písmen číslice 0-9 tak, aby příklady níže byly správně vypočítané.

Příklad: 25 + 5 = 30

AB + B = 30 → A = 2

B = 5

a) 40 + F = FF F = 4

b) GG + G = 12 G = 1

c) XY + X = 30 X = 2 Y = 8

d) 55 = CC + DD C_1 = 1, 2, 5 D_1 = 4, 3, 0

C_2 = 4, 3, 0 D_2 = 1, 2, 5

e) SM + M = 46 S = 3, 4 M = 8, 3

Postup:

Dosazujeme postupně od 0 do 9 místo neznámé nebo pokusem dle intuice.

a) F = 1 → 40 + 1 = 11

F = 2 → 40 + 2 = 22

F = 3 → 40 + 3 = 33

F = 4 → 40 + 4 = 44

b) G = 1 → 11 + 1 = 12

c) X = 1, Y = 0 → 10 + 1 = 30

X = 2, Y = 3 → 23 + 2 = 30

Nyní je potřeba zamyslet se a logicky uvážit, zda by nebylo lepší hledat již pouze Y. X nemůže být větší než 2, výsledek by byl vyšší než 30. Pokud tedy X = 2, vznikne rovnice 2Y + 2 = 30 → 28 + 2 = 30 → Y = 8

d) $C = 1 \rightarrow 55 = 11 + DD \rightarrow 55 - 11 = 44 \rightarrow D = 4$

$C = 2 \rightarrow 55 = 22 + DD \rightarrow 55 - 22 = 33 \rightarrow D = 3$

$C = 3 \rightarrow 55 = 33 + DD \rightarrow 55 - 33 = 22 \rightarrow D = 2$

$C = 4 \rightarrow 55 = 44 + DD \rightarrow 55 - 44 = 11 \rightarrow D = 1$

$C = 5 \rightarrow 55 = 55 + DD \rightarrow 55 - 55 = 0 \rightarrow D = 0$

Nyní logicky zauvažujeme, pokud $C > 5$, příklad by již nemohl mít smysl.

e) Nejprve zvážíme, jak velké číslo musí být SM, aby se výsledek rovnal 46.
Určitě $S \neq 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 0$. Zbývá tedy dosadit zbývající číslice.

$S = 3 \rightarrow 3M + M = 46 \rightarrow 46 - 30 = 16 \rightarrow M = 8$

$S = 4 \rightarrow 4M + M = 46 \rightarrow 46 - 40 = 6 \rightarrow M = 3$

2.3 Pracovní listy

V této kapitole budou zpracovány tři různé pracovní listy s obdobnými úlohami, jako jsou ve vstupním testu. To proto, abych s žáky v hodině mohla procvičit úlohy, které budou ve vstupním testu většinově řešit špatně. Tři listy jsou zvoleny proto, že i v testu jsou obsažena tři různá témata, která nakonec ústí v jedno a to orientaci v rovině s prvky kombinatoriky. Právě proto je první list zaměřen na využití kombinatorického pravidla součtu a součinu a variace s opakováním i bez opakování. Druhý list se zabývá procvičováním algebrogramů. Jedná se o rozvoj řešitelské strategie – pokus-omyl, resp. systematické experimentování a logické uvažování zároveň. Poslední list se zabývá úlohami na rozvoj orientace v rovině s prvky kombinatoriky.

Vzorové řešení úloh bude vloženo k DP jako příloha č. 1, 2, 3 a jako elektronická příloha s totožným číslováním.

2.3.1 Variace, kombinace, permutace, 3. ročník

Charakteristika pracovního listu:

Cílem diplomové práce je představit žákům hlavolamy a dokázat, že jejich užitím bude rozvíjeno jejich logické myšlení. Tento list s hlavolamy obsahuje úlohy s prvky kombinatoriky, která je zapotřebí k řešení úloh rozvíjející orientaci v rovině s prvky kombinatoriky, což jsem si vybrala jako dovednost, kterou bych s žáky chtěla procvičovat. Považuji však za důležité seznámit žáky nejprve s úlohami řešenými variacemi, kombinacemi a permutacemi. S žáky budu procvičovat v hodině takové úlohy, které budou třeba viz výsledky vstupního testu. Pokud pro ně jednoduché úlohy nebudou zajímavé, přejdeme ihned k úlohám složitějším.

1. Máš tři kostky. Jednu modrou, jednu červenou a jednu zelenou. Jakými způsoby můžeš na sebe kostky postavit do komínu?

Charakteristika úlohy:

Úloha je zařazena v pracovním listu z důvodu motivace a rozvíjení systematického řešení jako jedné z vhodných metod, která je celkem jednoduchá, praktická a hlavně pro žáky zábavná. Jde o experimentování s kostkami, které budou mít sami žáci k dispozici a budou tak mít výsledek na dosah. Jedná se o nalezení systému řešení úloh tohoto typu. Žáci nesmí zapomenou na žádnou z možností. Metoda je využitelná i ostatních úloh s jinou tématikou.

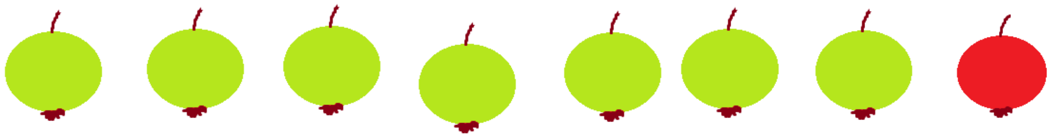
Příprava:

Tato úloha může být řešena individuálně, ale lepší je posadit žáky po čtyřech a nechat je spolupracovat. Určitě tak přijdou na více způsobů a na práci nebude třeba tolik času. Silnější žáci pomohou slabším.

Pokud učitel má k dispozici kostky různých barev, rozdá vždy tři s odlišnou barvou do skupinky. Pokud nemá, stačí vyrobit barevné čtverce nebo si žáci vymodelují z modelíny barevné kostky. Je možnost také použít víčka od PET lahví, je však nutné, aby všichni měli stejné barvy kvůli snadné kontrole řešení.

Nejprve je žákům rozdáno zadání úlohy a poté mohou začít pracovat. Upozorníme je, ať si pečlivě zapíšou každé řešení, na které přijdou. Řešení si mohou zakreslovat pastelkami nebo zapisovat počáteční písmena barev, pokud mají dostatek barevných víček, řešení jednoduše nechávají na stole. Možná přijdou žáci sami na jiný způsob, jak zahrnout všechna řešení např. tabulkou atd. Nakonec se zeptáme, kdo našel kolik řešení. Skupina, která jich má nejvíce, třídě řešení ukáže na tabuli nebo víčka rozloží na lavici před celou třídu.

2. Na stole leží 7 zelených a 1 červené jablko. Všechna vložíme do jedné tašky. Chceme vytáhnout jablko červené. Kolik jablek musíme z tašky vyndat, abychom si byli jistí, že budeme mít právě to červené?



Charakteristika úlohy:

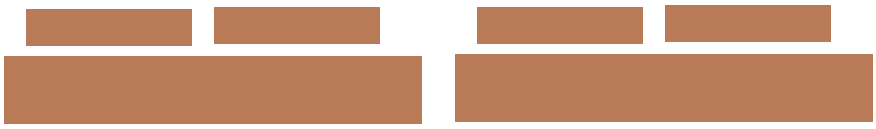
Tato úloha slouží v pracovním listu k procvičování kombinatorického myšlení a navazuje na testovou úlohu č. 2 viz kapitola 2.2, stejně jako ostatní cvičení v tomto pracovním listu. Zařadila jsem ji proto, aby žáci pochopili nejprve problém kombinací a variací odděleně a chápali a zpracovávali poté úlohy s prvky kombinatoriky a orientace v prostoru snadněji.

Tato úloha je jednoduchá, proto s ní budou žáci při procvičování začínat. Uvědomí si zde, že si můžeme být jisti červeným jablkem, opravdu pouze když vyndáme z tašky všechna jablka. Sami si prakticky vyzkouší, že se jim jednou může povést červené jablko vyndat hned na první pokus, ale také až na sedmý nebo osmý.

Příprava:

Přineseme si tašku a jablka. Úlohu žákům zadáme. Můžeme jim i poradit, že si můžou sami udělat pokus, akorát místo jablek použijí pastelky nebo PET víčka. Opět bych nechala žáky pracovat po čtyřech ve skupině a po chvíli se zeptala na jejich výsledky. Nakonec si společně ukážeme praktickou ukázkou s donesenými jablky a taškou. Za odměnu jablka umyjeme, rozkrájíme a podělíme se s žáky.

3. V družině zbyli odpoledne 4 poslední žáci. Tomáš, Petr, Mařenka a Lenka. Jakými způsoby si mohou spolu sednout do lavic? Kdo s kým bude sedět?



Charakteristika úlohy:

Úloha je k procvičení variací bez opakování, uvědomění si principu uspořádání, bez možnosti opakování prvků. Dále by si žáci měli uvědomit, že existuje více možností správného řešení. To chci v rámci diplomové práce procvičit tak, aby žáci hledali více možností různých řešení a nalezli systém v řešení úloh z důvodu bezchybného nalezení všech možností i bez znalosti vzorce.

Příprava:

O této úloze budeme s žáky nejprve hovořit a dojdeme k výsledku, že si děti můžou pouze vyměnit místo v lavici a i to bude jiný způsob sezení. Stejně tak se mohou vyměnit v lavici vpravo nebo vlevo. Poté necháme žáky samostatně pracovat, necháme je zapisovat a zakreslovat jakýmkoliv způsobem. Opět využijeme čtveřice, popř. dvojice. Pokud chce někdo pracovat sám, může. Chodíme kolem skupinek a snažíme se je jednoduchými poznámkami či otázkami navést ještě k dalším možnostem. Když vidíme, že je většina skupin hotova, ptáme se opět na počet možných řešení. Nyní necháme žáky sednout do půl kruhu a doprostřed dáme dvě lavice a vyzveme čtyři žáky, aby se na chvíli stali těmi z úlohy. A společně ověřujeme všechny možnosti systematicky dle zápisu níže. Zapisujeme však vše stále i na tabuli, aby žáci viděli opravdu všechny varianty zapsané. Používáme zkratky jmen, celá jména, můžeme žákům přiřadit barvy nebo čísla.

Možností je mnoho, proto by praktické zkoušení mohlo trvat velice dlouho. Je nutné zvážit, zda máme dostatek času na tuto možnost.

4. Při hudební výchově se učili žáci tančit mazurku. Ve třídě jich bylo celkem 6. Z toho 3 holky a 3 kluci. Kolik různých dvojic (vždy holka s klukem) mohou vytvořit?

Charakteristika úlohy:

Úloha je na procvičení kombinatorického myšlení, tentokrát se jedná o kombinatorické pravidlo součinu. Pro žáky to znamená přemýšlení nad vytvořením dvojic při tanci, tedy jde o úlohu ze života. Je velice snadné si také úlohu prakticky ukázat se samotnými žáky.

Příprava:

Připravíme si obrázky tří dívek, např. v jiných šatech, stačí jednoduché jako jsou v zadání a stejně tak chlapce, musíme však mít od každé postavy 3. Žákům přečteme a vyzveme je, ať zkusí ve dvojicích přijít na počet správných řešení.

Po chvilce práce, kdy máme pocit, že většina dvojic je hotova, přistoupíme k řešení. Na tabuli vyvěsíme všechny postavy vedle sebe a žáci dle vyvolání chodí a lepí páry k sobě. Nakonec vidíme, že máme 9 různých řešení. Samozřejmě můžeme značit i jinak. Např. dívky si označíme D1, D2 a D3, chlapce CH1, CH2, CH3.

5. Kolik trojciferných čísel můžeš vytvořit z číslic 1, 2, 3? Číslice se nesmí opakovat.

Charakteristika úlohy:

V této úloze žáci musí využít variace bez opakování, resp. permutace bez opakování viz cvičení 3. Je to nejjednodušší typ úlohy z kombinatoriky, žáky by tedy měl být vyřešen jen díky logickému uvažování a systematickému zápisu.

Příprava:

Na tuto úlohu bych se nijak speciálně nepřipravovala. Pokud však budeme chtít, můžeme žákům zadat nějaký tajemný úkol, abychom je motivovali a požádat je třeba o pomoc při hledání správné stránky v knížce, kde je napsané kouzlo na vyčarování čokolády. Nápověda je, že číslo stránky je vytvořeno z číslic 1, 2, 3. Hledáme tedy kombinaci těchto čísel. Které stránky to mohou být? Připravíme si pak knihu, která má více než 321 stran a na jednu ze stran, které jsou kombinací těchto čísel nalepíme nebo vložíme stránku s kouzlem. Když ho potom s dětmi přečteme, vykouzlíme klobouk s čokoládovým bonbónem pro každého. Žáci budou ověřovat pomocí experimentu a dosazováním čísel.

6. Kolik trojciferných čísel můžeš vytvořit z číslic 6, 8, 2, 3? Číslice se můžou v čísle opakovat.

Charakteristika úlohy:

Vrcholem všech úloh a nejtěžší variantou pro nalezení všech možností bez vzorce je právě tato šestá úloha. Úloha je na procvičení variací s opakováním, tzn. že možností je opravdu mnoho. Žáci by již měli chápat, jaký zvolit systém zápisu, aby na žádnou z možností nezapomněli.

Příprava:

Připravíme si papírové kartičky se zadanými číslicemi a připravíme na stůl hromádky s číslicemi. Zadáme žákům úkol a necháme je chvilku pracovat. Poté společně na tabuli lepíme kartičky a ukazujeme si, jak systematiky najít všechny varianty. Pokud se nám nechce stříhat tak velké množství číslic, pouze je píšeme nebo si připravíme na interaktivní tabuli. Úlohy bych žáky nechala řešit samostatně, tentokrát ne ve skupinách, neboť by to bylo velice chaotické. Upozornila bych je na velký počet možností a poradila bych jim systém zápisu tabulkou s tím, že všechny kombinace s dvojkou na začátku budou mít v jednom sloupci, abychom si mohli konečné řešení snadněji kontrolovat.

2.3.2 Algebrogramy, 3. ročník ZŠ

Charakteristika pracovního listu:

Ve druhém pracovním listu se budu věnovat dalšímu tématu a to jsou algebrogramy.

Tyto hlavolamy jsou užitečné k rozvoji kombinatorického myšlení, ale je zapotřebí i jiných dovedností jako je dobrá znalost sčítání, odčítání a násobení přirozených čísel. Žáci musí ovládat pravidla komutativnosti i asociativnosti, aby pro ně bylo jednoduché úlohy řešit. Je pravda, že algebrogramy nemají nic společného s orientací v rovině, avšak pomohou žákům získat jistotu v práci s čísly a s přemýšlením o více možnostech řešení, což je zapotřebí právě i u úloh na rozvoj orientace v rovině s prvky kombinatorického myšlení.

Úlohy jsou v pracovním listu seřazeny od nejjednodušší po nejtěžší a jejich charakteristika platí pro všechny příklady stejná. Vzorové řešení bude přiloženo k DP.

1. Zjisti, které číslo může být dosazeno za písmeno, aby byla rovnice pravdivá. Můžeš použít číslice 0-9.

Příprava:

Učitel si připraví kartičky s písmeny z algebrogramů a s číslicemi od 0-9. Číslic musí mít větší množství. Dobré je, připravit si číslice na barevné kartičky, kdy jedna barva bude představovat konkrétní číslici.

Žákům ukážeme na tabuli připravené algebrogramy - nalepené kartičky s neznámými číslicemi a zbytky příkladů dopsané. Žáky požádáme, zda by se pokusili ve skupině sami vymyslet řešení příkladů. Dáme jim nějaký čas na práci a poté společně odlepujeme z tabule neznámé, doplňujeme číslice a vysvětlujeme si, jak jsme na to přišli. Nejlepší je, když vysvětlují sami žáci ostatním.

a) X + 5 = 10

b) A + A = 18

c) DD + D = 72

d) 50 + J = JJ

e) PP + P + P = 52

f) L . L = L + L

g) C . C = C + C + C + C

2. Vyřeš algebrogramy. Najdi všechna řešení.

Příprava:

Nejprve s žáky řešíme jednoduchý algebrogram, který má více řešení, aby pochopili, že musí hledat dál, i když už jeden výsledek našli. Můžeme i soutěžit o to, kdo najde nejvíce řešení během dvou minut. Práci zadáme do skupin. Poté zapisuje vítězné družstvo na tabuli a třída s učitelem kontroluje, zda byly nalezeny všechny možnosti. Pokud ne, doplní další skupina.

a) Q + P = 10

b) AB + B = 68

c) SM + M = 46

d) E . E = F

e) C . C = D + D

3. Vyřeš algebrogramy, najdi všechna řešení.

a) AB	b) DD	c) DG	d) AC
+ BA	+ C	+ DG	+ ACC
AAC	CCG	GH	CBB

4. PRO CHYTRÉ HLAVIČKY:

Pro každé písmeno zvol číslici od 0 do 9. Každé písmeno je ve všech příkladech stejnou číslicí.

Charakteristika úlohy:

Jde opět o algebrogramy, ale s tím rozdílem, že je nutné řešit příklady komplexně a hodnotu stejného písmena použít ve všech příkladech. Pokud je zvolen správný systém řešení, není příklad obtížný. Musíme žáky upozornit na počet jednotlivých písmen a poradit jim, ať začnou hledat hodnotu toho písmena, které se vyskytuje v příkladech nejčastěji.

2T + TA = GT

T2 + TB = FT

FT – GT = BA

2T + T2 = GG

FT – TA = TT

2.3.3 Orientace v rovině s prvky kombinatoriky, 3. ročník

Charakteristika pracovního listu:

Tento pracovní list slouží k procvičení dvou dovedností a to orientace v rovině a kombinatorického myšlení.

V každé úloze je nutné pracovat s různými směry a povely jako je doprava, doleva apod., ale zároveň je nutné i uvažovat o různých možnostech cest a směrů. Hlavolamy tak cílí přesně na záměr diplomové práce a to rozvoj logického myšlení zaměřený na orientaci v rovině s prvky kombinatoriky.

Hlavolamy níže jdou tedy finální variantou, kde je nutné využít doposud naučené strategie a je nutné využít více dovedností. Vzorové řešení úloh bude k DP vloženo formou přílohy.

1a) Kamarádka ti napsala návod, jak se k ní dostaneš od vás z domu. Nikdy jsi u ní ještě nebyl. Ty bydlíš v Poštovní ulici. (vyznačena červeným puntíkem) Na konci ulice se můžeš dát třemi směry. Ty půjdeš vlevo, poté se dáš druhou odbočkou vpravo, poté zahneš ihned doleva na konci ulice opět doleva. Nyní odboč vpravo a ihned vlevo a opět vlevo. Kamarádka bydlí ve třetím domě od křižovatky. Udělej červený puntík v domečku, kde bydlí.

Charakteristika úlohy:

V této úloze jde o orientaci v rovině a schopnost číst v textu postupně pokyny. Je nutné, aby si žáci představili, že ulicemi opravdu procházejí a podle toho správně odbočovali a určovali strany.

Úloha je jednoduchá, znalost stran je procvičována již v předškolním věku, proto by žákům mohlo dělat problém pouze čtení a orientace v zadání.

Příprava:

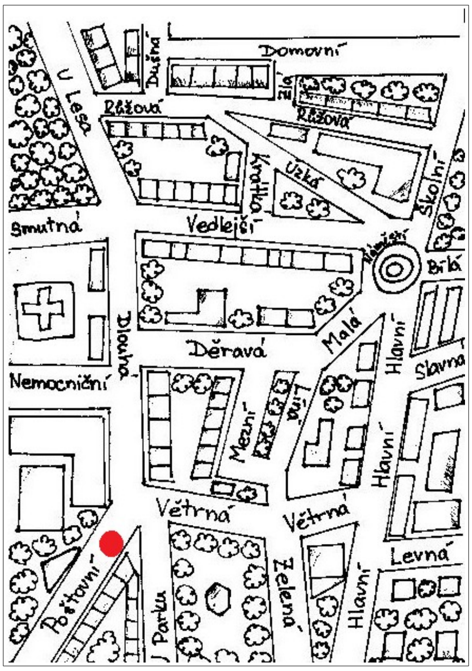
Tuto úlohu je nejlepší mít zobrazenou na interaktivní tabuli. Nejprve rozdáme žákům kopie se zadáním úlohy a mapky (vhodné ve velikosti A5), necháme je chvilku pracovat a poté si cestu z varianty a) přečteme nahlas. Žáci tak mohou ještě kontrolovat cestu bez čtení dle diktátu. Poté vyznačíme na tabuli.

Dále rozdáme kopie nové, s dalšími mapkami, a opět se žáci pokouší sami vyřešit dle zadání. Třídu však stále obcházíme a dáváme tipy na další cesty. Poté opět mapku zobrazíme a žáci chodí k tabuli a zakreslují cesty, které našli. Společně zhodnotíme.

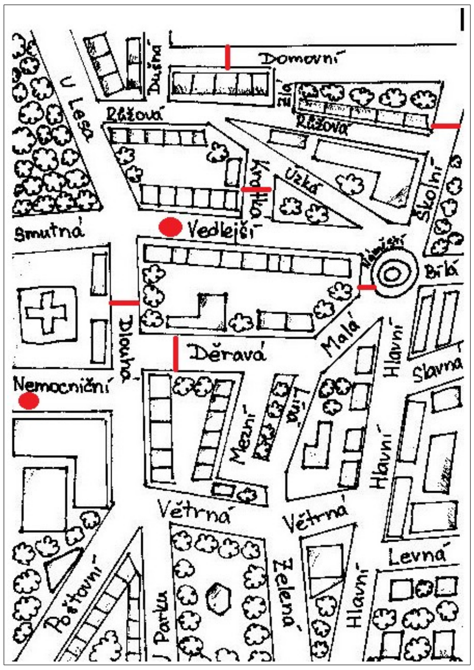
Pokud však nemáme k dispozici interaktivní tabuli, máme možnost alespoň projektoru, zobrazíme žákům nejprve mapku prázdnou, jako mají oni na stole, a když sami vyřeší, zobrazíme mapku s již vyřešenou úlohou a ukážeme si cesty.

Pokud ani projektor k dispozici není, zbývá nám už jen cesty vypisovat dle názvů ulic na běžnou tabuli.

1b) Zakresli do mapky různými barvami cesty, kterými se můžeš z Nemocniční ulice dostat do ulice Vedlejší. Červené čáry jsou příkopy, přes které se nedá přejít.



Ilustrace 11: Obrázek k úloze 1a



Ilustrace 12: Obrázek k úloze 1b

2. Jdi bludištěm podle návodu, zapiš si všechny slabiky, které cestou potkáš a nakonec se z nich pokus vytvořit co nejvíce slov. Začínáš v levém dolním rohu slabikou KO, poté odbočíš vlevo, jdeš rovně a druhou odbočko zabočíš vpravo a

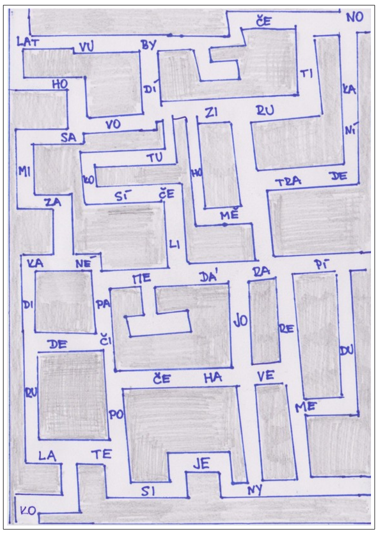
hned vlevo. Další možnou odbočku zatoč vpravo, na konci cesty vlevo a opět vpravo. Nyní dojdeš až na konec ke slabice NO.

Charakteristika úlohy:

Úloha je bludiště, kde je možné špatně odbočit kvůli nepozornému čtení zadání. Jde o projevení schopnosti představivosti, ale také o výběr správné strategie řešení. Je důležité zapsat všechny slabiky na cestě a to buď postupně, jak se po cestě postupuje nebo po nalezení konce cesty. Žáci musí i projevit schopnost vymyslet různé varianty slov a kombinovat písmena, ale také ukážou svoji slovní zásobu.

Příprava:

K této úloze se opět hodí interaktivní tabule, abychom mohli s žáky cestu zakreslovat do mapky společně. Když rozdáme kopie a žáci cestu vyznačí, počkáme, až si všichni zapíšou slabiky a budeme je kontrolovat. I my slabiky velkými písmeny zapíšeme na tabuli, abychom mohli kontrolovat každé slovo, které nám žáci budou diktovat. Teprve po společné kontrole slabik začíná pokus o hledání co nejvíce možných slov. Společně kontrolujeme nalezená slova a vyhlásíme krále slov.



3. Kolika způsoby můžeš přečíst slovo HRNEK níže. Pohybovat se můžeš pouze doprava a dolů.

Charakteristika úlohy:

Cílem úlohy je opět ověřeni orientace v rovině žáků a úvahy nad kombinacemi různých cest a hledání co nejvíce řešeni.

Předpokladem úspěšného řešeni je zvoleni strategie takové, aby se žákům nepopletly čáry, které budou označovat cestu skrz slovní hlavolam. Chyby, které mohou nastat, jsou tedy v označení nalezeného slova hrnek nebo nepozornost v hledání a nalezení nízkého počtu řešeni.

Zajímá mě postup řešeni, jak budou žáci vyznačovat možnosti jednotlivých čteni

a na kolik možnosti přijdou. Úloha je využitím Pascalova trojúhelníku v praxi, opět nemá smysl na tuto skutečnost žáky upozorňovat. Pro žáky to znamená především objevování různých variant cest v rovině zadaného slova a orientaci ve schématu. My si můžeme ověřit počet řešení právě Pascalovým trojúhelníkem.

Příprava:

K tomuto hlavolamu nepotřebujeme mnoho pomůcek. Stačí nám zapsat slovo dle zadání na tabuli, samozřejmě hodně zřetelně a kopie pro žáky se slovem. Sami pracují, průběžně je obcházíme a radíme jim, jak postupovat, aby nezapomněli na žádnou možnost.

H R N E K

R N E K

N E K

E K

K

4. Cestuj z levého dolního rohu podle šipek (vždy pouze po čárách), uvidíš, co ti vznikne. První čáru máš předkreslenou, dokresli zbytek obrázku dle dalšího návodu. Šikmé čáry jsou již předkresleny, napoj se vždy na ně a pokračuj dále dle návodu. Až budeš hotov, dokresli zbytek obrázku podle sebe, ale jinou barvou než jsi kreslil původně.

Charakteristika úlohy:

V úloze jde o dodržení stanovené cesty a použití fantazie při dokreslování obrázku. Úloha je zařazena i kvůli uvolnění a odpočinku žáků. Je však nutné zadat žákům přesný čas, který můžou úlohu řešit, neboť někteří by se mohli zabrat do kresby a nevnímali by čas.

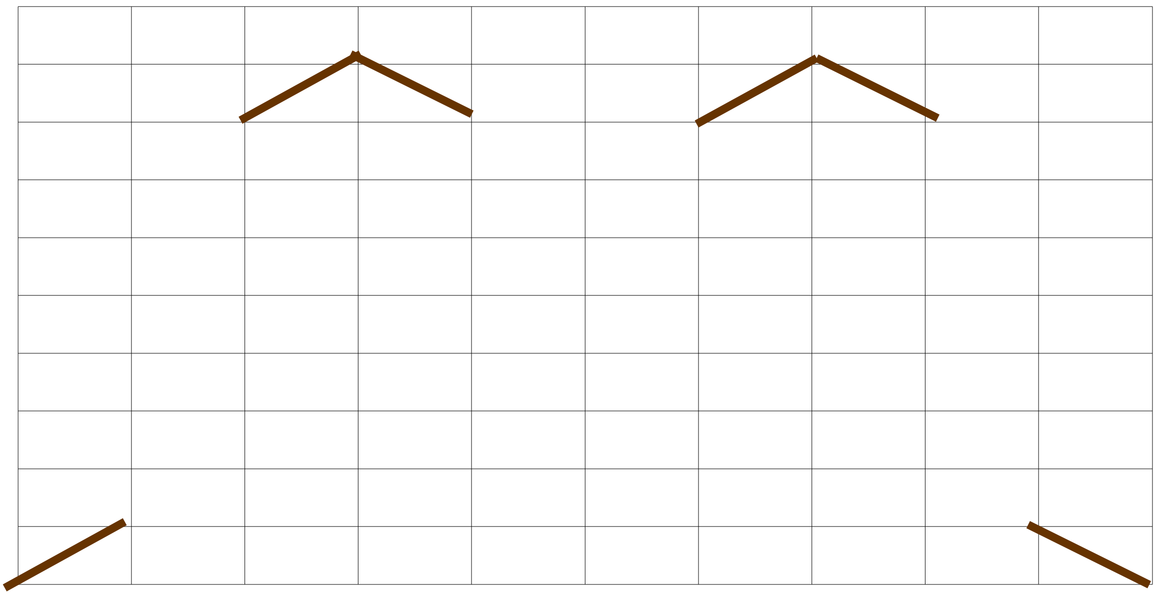
Příprava:

Příprava úkolu je velice jednoduchá. Stačí si předem navrhnout obrázek a poté už jen diktovat žákům cestu, kterou budou zakreslovat na čtverečkovaný papír. Popř. můžete připravit předkreslené šikmé čáry. To bych však volila pouze na začátek. Stejně tak diktát úkolu je jednodušší než zadané šipky na papíru

→, →, ↑, ←, ↑, ←, ↑, ↑, ↑, ↑, ↑, →,

→, →,

→, ↓, ↓, ↓, ↓, ↓, ←, ↓, ←, ↓, →, →



5. Prasečí rodinka měla chlívek v pravém horním rohu. Všichni se chtěli dostat ke žlabu s obědem, který je v dolním levém rohu. Žádná dvě prasátka nešla stejnou cestou a mohla jít pouze dolů a doleva.

Kolik prasátek bydlí ve chlívku?

Charakteristika úlohy:

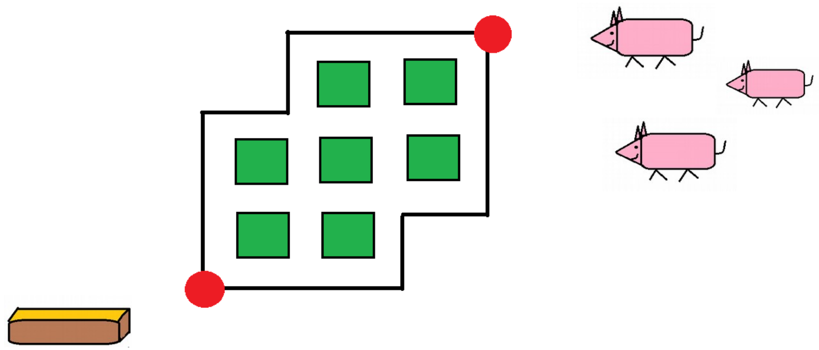
Cílem úlohy je ověřit schopnost žáků orientovat se v rovině bludiště a nalézt všechny možné kombinace cestiček systematicky bez vynechání jediné z nich.

Předpokladem úspěšného vyřešení úlohy je zvolení systému označení možných cest a porozumění zadání. Chyby, ke kterým by mohlo dojít jsou hledání cest, které nevedou pouze doleva a nahoru, ale i cest jiných, také špatné označení nalezené cesty a její pozdější opakování nebo zmatek v řešení způsobený mnoha čarami označující různé cesty např. z důvodu použití jen jedné barvy.

V úloze budu sledovat, zda jsou žáci schopni nalézt správnou cestu, a zda v jejich zápisu je nějaký systém.

Příprava:

Bludiště není těžké překreslit na tabuli, můžeme tedy tak učinit, pokud nemáme k dispozici interaktivní tabuli. Rozdáme žákům kopie s bludištěm a nejprve se budeme snažit tipovat počet řešení, poté se pustí žáci do zakreslování cestiček. Nakonec žáci budou říkat, kolik řešení našli a společně si je potom ukážeme na tabuli.

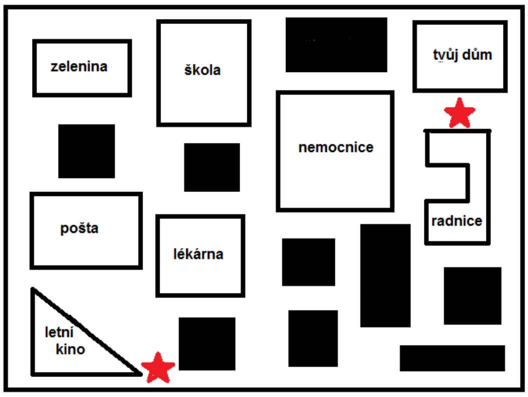


2.4 Výstupní test

Výstupní test byl vypracován kvůli ověření stanovených předpokladů ve výzkumné části diplomové práce. Úlohy, které test obsahuje, jsou obdobné úlohám v testu vstupním a měly by tak ověřit, zda budou výsledky testu po procvičování s žáky lepší nebo budou stejné. Jsou zde tedy zastoupeny úlohy zaměřené na orientaci v prostoru s prvky kombinatoriky, tzn. že žáci budou hledat v rovině předem určenou cestu a hledat i její možné další varianty, dále je zde jedna úloha, kde se používají kombinace s opakováním a variace bez opakování a nakonec i několik algebrogramů, které prověřují logické usuzování a schopnost hledat více možností řešení.

Vzorové řešení výstupního testu a žákovského řešení bude vloženo do k DP jako příloha.

1. Chceš jít s kamarády na nový film, který promítají v letním kině. Vycházíte z domu, začátek cesty je na mapce vyznačen hvězdičkou. Kolika různými cestami se dostaneš k letnímu kinu, když můžeš jít pouze doprava a dolů? Cíl tvé cesty je opět vyznačen hvězdičkou.



Charakteristika úlohy:

Úloha je zaměřena na orientaci v rovině a hledání různých variant cesty k cíli. Důležité je, že si žáci musí uvědomit, která je pravá a levá strana z pohledu, ze kterého je to žádoucí v této úloze. Toto bludiště je obdobou úlohy č. 4 ve vstupním testu, je však z reálného prostředí.

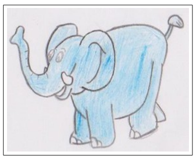
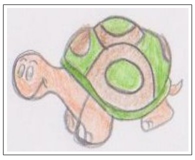
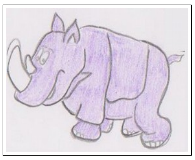
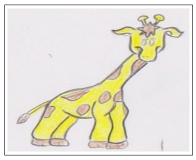
Předpokladem úspěšného vyřešení je správná analýza zadání, neboť by se mnoho žáků mohlo nechat napálit tím, že půjdou místo doprava, doleva. Vychází totiž z domu (označeno na mapce), mají tedy strany zrcadlově ke svému pohledu na obrázek. Tuto skutečnost by mohli žáci odhalit i v případě, že strany spletou, neboť v tom případě by úloha neměla řešení. Toto bludiště je obdobou úlohy č. 4 ve vstupním testu, je však z reálného prostředí.

Sledovat při hodnocení budu, zda žáci zvolili správný směr, a zda se jim povedlo najít všechny možné cesty.

Je možných 6 správných řešení úlohy, bude tedy hodnocena maximálně 6 body.

2. Ředitel ZOO v Liberci se rozhodl, že sežene nová zvířátka do svých výběhů. Nabídku měl z těchto zvířat: slon, žirafa, nosorožec, lev a želva. Mohl však vybrat

pouze tři z nich, více místa v ZOO neměl. Najdi všechny možné varianty trojic zvířat, které mohl ředitel vybrat.

Charakteristika úlohy:

Cílem úlohy je ověřit schopnost žáků uvažovat o různých kombinacích trojic zvířat a schopnost vymyslet systém pro zapsání úlohy tak, aby byly objeveny všechny správné možnosti. S žáky bude dovednost procvičována během společné výuky.

Předpokladem úspěšného vyřešení úlohy je, že žáci budou systematicky zapisovat nebo zakreslovat trojice a uvědomí si, že se nemůžou opakovat. Chyby které mohou nastat při řešení úlohy by mohly být ve špatném porozumění zadání a nepochopení požadavku, dále pak v opakování trojic nebo nenalezení všech možných kvůli výběru špatného systému zápisu.

Zajímá mě, zda žáci využijí strategie, které jsme si ukázali v hodině, a zda opravdu nezapomenou na žádnou z možností.

Úloha je na využití kombinací bez opakování, je tedy obdobou úlohy č. 2 ve vstupním testu. Je možné získat za úlohu 10 bodů, za každou nalezenou možnost 1 bod. Při hodnocení budu sledovat celkový postup řešení. Pokud některou z dvojic budou žáci opakovat, budu jim počítat pouze tu jednu správnou.

3. Kolika různými způsoby můžeš přečíst slovo lusk?

L U S K

U S K

S K

K

Charakteristika úlohy:

Cílem úlohy je opět ověřit u žáků schopnosti orientace v rovině, úvahy nad kombinacemi různých cest a hledání co nejvíce řešení.

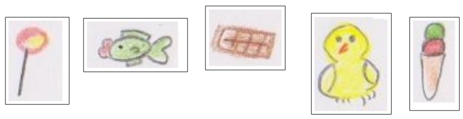
Předpokladem úspěšného řešení je zvolení strategie takové, aby se žákům nepopletly čáry, které budou označovat cestu skrz slovní hlavolam. Mohou ale už využít i znalost principu kombinatorického pravidla součtu, který bude předmětem výuky během jedné z hodin. Sama jsem zvědavá, zda si budou Pascalův trojúhelník a kombinatorické pravidlo součtu pamatovat a zvolí tedy tuto jednodušší a rychlejší variantu k řešení nebo se budou snažit všechny cesty najít sami zakreslováním. Budu muset sledovat a kontrolovat i zakreslené cesty, neboť by někdo mohl opisovat a výsledek pouze odhadnout.

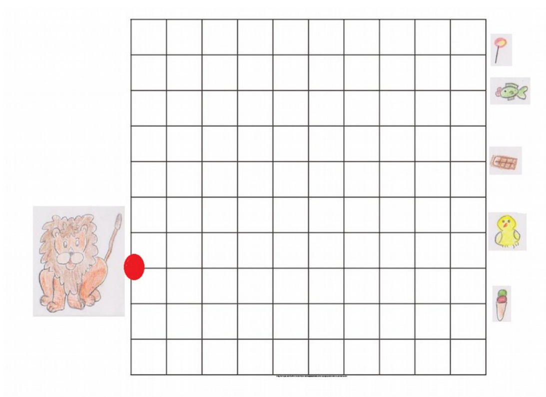
V úloze je možné najít 8 různých řešení, proto bude bodový zisk maximálně 8 bodů.

4. Hledej cestičku podle návodu a zakroužkuj, k jaké dobrotě dojde lev.

→ → ↑ → ↑ → ↓ ↓ ↓ → → ↑ ↑ ← ↑ → → → ↑ ↑ → ↓ ↓ ↓ →

A) B) C) D) E)





Charakteristika úlohy:

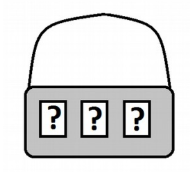
Úloha ověřuje schopnost orientace v rovině, správného čtení zadání, ale i schopnost výběru správné možnosti.

Předpokladem úspěšného vyřešení je bezchybné zaznamenávání cesty dle zadání.

Sledovat budu, zda žáci nezapomněli na některý z pokynů, neboť se může stát, že některou z šipek přehlédnou nebo směr zaznamenají vícekrát.

Úloha bude hodnocena 2 body. Jeden bod za nalezení správné cesty a 1 bod za zakroužkování správné odpovědi.

5. Tvoje tetička Ti darovala k narozeninám krásné nové kolo, ale s tetou to nikdy nebylo jednoduché, proto si i tentokrát pro tebe připravila úkol, za který kolo dostaneš. Přivázala kolo k lampě před vaším domem a dala na něj zámek. Kód zámku se musí skládat pouze z číslic 1 a 3 a číslice se mohou v kódu opakovat. Kolik kódů musíš vyzkoušet zadat, abys měl jistotu, že kolo bude tvoje?



Charakteristika úlohy:

Tato úloha slouží k procvičování variací s opakováním. Cílem je zjistit, zda žáci dokážou po procvičování strategií zápisu možností zvolit strategii takovou, aby nalezli všechny varianty trojmístného kódu. Také je důležité správně číst zadání a uvědomit si, že číslice se v kódu musí opakovat. V této úloze to nebude těžké, neboť by jinak ze dvou číslic nemohli sestavit kód třímístný. Úloha je obdobou cvičení č. 5 ve vstupním testu, pouze s tím rozdílem, že tato je s možností opakování číslic.

Předpokladem úspěšného vyřešení je strategický zápis a bezchybné spočítání nalezených možností.

Úlohu budu hodnotit dle počtu řešení. Celkový počet bodů je 8.

6. Doplň místo písmen číslice 0 až 9 tak, aby příklady níže byly správně vypočítané.

a) 20 + X = XX X = ______________________________

b) AB + B = BA A = ______________________________

B = ______________________________

c) 7C . 3 = GGC C = ______________________________

G = ______________________________

d) M + 40 = 4M M = ________________________________

e) D - 9 = 35 D = ________________________________

Charakteristika úlohy:

Algebrogramy u žáků prověřují schopnost logicky uvažovat a hledat různé možnosti řešení. Úloha je obdobou cvičení č. 6 ve vstupním testu. Zde je však i algebrogram, který žádné reálné řešení nemá.

Předpokladem správného vyřešení je, že budou žáci uvažovat nad čísly, která můžou doplnit a vždy si sami odůvodní, proč některá z čísel mohou hned vyřadit z výběru. Pokud budou dosazovat do každého příkladu všechny číslice od 0 do 9, je možné, že test nestihnou splnit. I tak však můžou najít správná řešení.

Za každou správně nalezenou možnost řešení dostanou žáci 1 bod. Celkem tedy můžou získat 13 bodů. V jednom příkladu žádná možnost není, je ale nutné, aby tuto skutečnost žáci do řešení zaspali, jinak bod nezískají.

2.4.1 Hodnocení výstupního testu

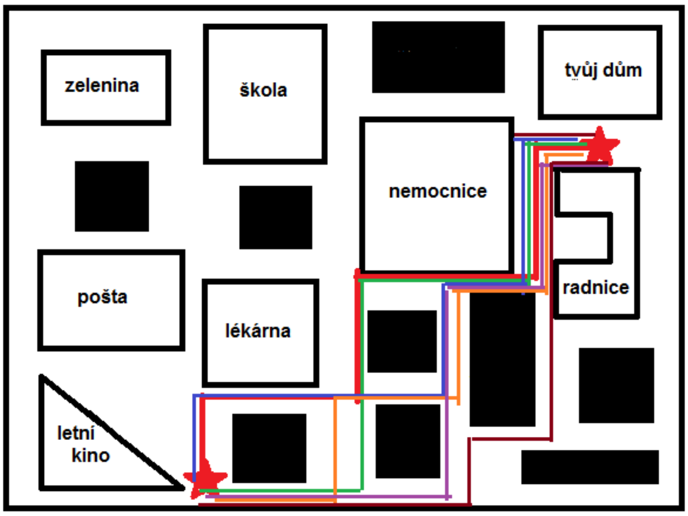
Výstupní test bude hodnocen stejně jako test vstupní, aby bylo možné výsledky třídy porovnat. Přiklonila jsem se tedy k procentuálnímu hodnocení celého testu i jednotlivých úloh. Bude tak jasné, ve které oblasti se žáci zlepšili a kde ne.

Celkem je možné získat 47 bodů. Každá úloha bude zhodnocena zvlášť a bude přidán komentář ke strategii řešení. Následně bude vypracována tabulka úspěšnosti obou tříd.

2.4.2 Vzorové řešení výstupního testu

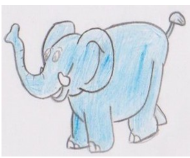
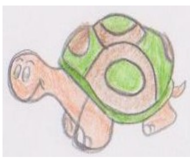
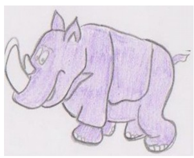
1. Chceš jít s kamarády na nový film, který promítají v letním kině. Vycházíte z domu, začátek cesty je na mapce vyznačen hvězdičkou. Kolika různými cestami se dostaneš k letnímu kinu, když můžeš jít pouze doprava a dolů? Cíl tvé cesty je opět vyznačen hvězdičkou.

Správné řešení:



K letnímu kinu se můžu dostat 6 různými cestami.

2. Ředitel ZOO v Liberci se rozhodl, že sežene nová zvířátka do svých výběhů. Nabídku měl z těchto zvířat: slon, žirafa, nosorožec, lev a želva. Mohl však vybrat pouze tři z nich, více místa v ZOO neměl. Najdi všechny možné varianty trojic zvířat, které mohl ředitel vybrat.

Správné řešení:

a) Výpis možností:

1. slon + želva + nosorožec
2. slon + želva + lev
3. slon + želva + žirafa
4. slon + nosorožec + lev
5. slon + nosorožec + žirafa
6. slon + lev + žirafa
7. želva + nosorožec + lev

8. želva + nosorožec + žirafa

9. želva + lev + žirafa

10. nosorožec + lev + žirafa

Žáci můžou také přímo manipulovat s obrázky a vytvářet jednotlivé kombinace.

b) Kombinace bez opakování:

$$K(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$K(3,5)=\frac{5!}{(5-3)!3!}=\frac{5.4.3.2.1}{2!3!}=10$$

Je celkem 10 různých trojic.

3. Kolika různými způsoby můžeš přečíst slovo lusk?

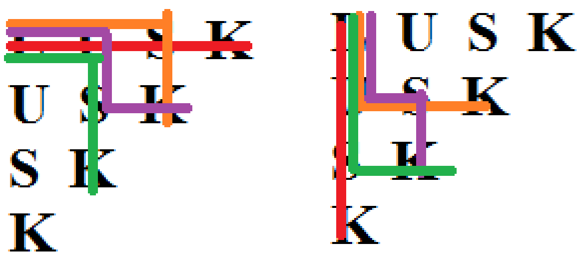
L U S K

U S K

S K

K

Správné řešení: a)



b) Pascalův trojúhelník, procvičování kombinatorického pravidla součtu (viz Kapitola v teorii 1.4.1)

●1 ●1 ●1● 1 → 1 + 3 + 3 + 1 = 8

●1 ●2 ●3

●1 ●3

●1

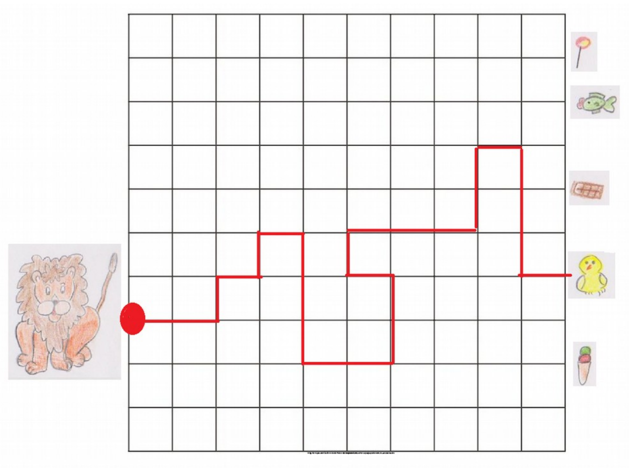
Celkem je 8 způsobů, jak lze přečíst slovo lusk.

4. Hledej cestičku podle návodu a zakroužkuj, k jaké dobrotě dojde lev.

→ → ↑ → ↑ → ↓ ↓ ↓ → → ↑ ↑ ← ↑ → → → ↑

↑ → ↓ ↓ ↓ →

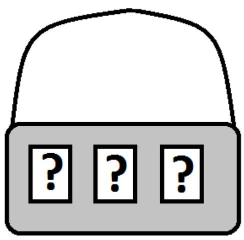
A) B) C) D) E)



5. Tvoje tetička Ti darovala k narozeninám krásné nové kolo, ale s tetou to nikdy nebylo jednoduché, proto si i tentokrát pro tebe připravila úkol, za který kolo dostaneš. Přivázala kolo k lampě před vaším domem a dala na něj zámek. Kód zámku se musí skládat pouze z číslic 1 a 3 a číslice se mohou v kódu opakovat. Kolik kódů musíš vyzkoušet zadat, abys měl jistotu, že kolo bude tvoje?

a)

1 1 1	3 3 3
1 1 3	3 3 1
1 3 1	3 1 3
3 1 1	1 3 3



b) Variace s opakováním:

$$V'(k,n)=n^k$$

$$V'(3,2)=2^3=8$$

Musím vyzkoušet 8 kódů, abych si byla jistá, že bude kolo moje.

6. Doplň místo písmen číslice 0 až 9 tak, aby příklady níže byly správně vypočítané.

a) 20 + X = XX

b) AB + B = BA

c) 7C . 3 = GGC

d) M+ 40 = 4M

e) D - 9 = 35

Správné řešení:

a) 20 + X = XX

Dosazujeme číslice od 0 do 9 nebo počítáme zpaměti.

X = 1 → 20 + 1 = 21

X = 2 → 20 + 2 = 22

b) AB + B = BA

Můžeme opět dosazovat různé číslice od 0 do 9, ale výhodnější je uvažovat, jak by mohl vzniknout výsledek, kde bude na místě desítek B a jednotek A. Pokoušíme se tedy dosazovat od největší číslice po nejmenší a víme, že A nemůže být 9, protože pak by ve výsledku byly i stovky.

A = 8, B = 9 → 89 + 9 = 98

c) 7C . 3 = GGC

Nejprve se pokusíme zauvažovat, které číslo, když vynásobíme třemi má v jednotkách stále to násobené číslo. Jediné takové je 5.

C = 5 → 75 . 3 = 225 → G = 2

d) M+ 40 = 4M

Zpaměti se pokusíme dosadit některé z číslic a zjistíme, že je možné dosadit všechny možné od 0 do 9 a příklad bude mít smysl.

M = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

e) D - 9 = 35

Pokud se pozorně podíváme na příklad, ihned zjistíme, že v menšenci je pouze jednotka, nelze tak mít v rozdílu desítku. Příklad tedy nemá smysl.

D = ∅

3. VÝZKUMNÁ ČÁST

Ve výzkumné části se budu zabývat ověřením předpokladů, které budou stanovené v kapitole 4.2 výzkumné části diplomové práce. Celý výzkum bude prováděn nejprve na Základní škole Mozartova 24 v Jablonci nad Nisou, ve třetích ročnících, které jsou ve škole dva. Poté zanalyzuji získaná data předloženého vstupního testu, na jejichž základě vytvořím pracovní listy pro žáky k procvičení hlavolamů rozvíjejících logické myšlení, konkrétně zaměřené na kombinatorické myšlení a orientaci v rovině. Na závěr žáci absolvují ještě výstupní test, kde se budu snažit ověřit, zda se zlepšili oproti testu vstupnímu a tím potvrdím nebo vyvrátím stanovené předpoklady.

3.1 Příprava výzkumu

Před samotným výzkumným šetřením na základní škole jsem musím nejprve připravit hlavolamy do vstupního testu, pracovní listy s úlohami k procvičení pro žáky a test výstupní. Informace a inspiraci budu čerpat z mnoha děl českých i zahraničních autorů zabývajících se hlavolamy pro žáky základních škol, ale i pro dospělé. Dále si musím prostudovat ŠVP základní školy, abych věděla, jakou látku matematiky již probírali žáci v prvním a druhém ročníku ZŠ a zařadila jsem tak úlohy se správným obsahem a obtížností. Následně vytipuji úlohy do testu vstupního, které mi poslouží ke zmapování dosavadních schopností žáků řešit úlohy zaměřené na orientaci v rovině, na využití variací, kombinací a permutací a algebrogramy.

Po dokončení testu ho zadám žákům třetího ročníku a to nejprve jednomu a poté ještě druhému, abych měla kontrolní prvek pro vyhodnocení testu.

Po vyhodnocení testu připravím pracovní listy s dalšími hlavolamy stejného typu jako byly ve vstupním testu, abych s žáky danou látku probrala, měli více času na použití různých strategií při řešení než během testování, také abych jim případně poradila, jak úlohy řešit, a aby měli možnost blíže se s tématikou seznámit. Pro další učitele pak vypracuji metodické listy s tipy, jak dané úlohy žákům prezentovat. Před tím než absolvuji výuku v jedné z tříd, ve 3.A, musím ještě vyrobit mnoho materiálu pro samotné aktivity jako nejrůznější kartičky, obrázky apod. Nakonec ještě zpracuji hlavolamy do testu výstupního, kterými budou ověřeny stanovené předpoklady. Druhá třída 3.B bude třídou kontrolní. Zadám zde pouze test vstupní, výuka proběhne s paní učitelkou Mgr. Ivou Svobodovou stejně jako zadání testu výstupního. Všechny pracovní listy paní učitelce předám i s osobní konzultací ohledně metodiky.

3.2 Stanovení výzkumných předpokladů

V praktické části diplomové práce se budu snažit žákům představit hlavolamy rozvíjející logické myšlení a to ve dvou oblastech. První oblastí je kombinatorické myšlení a druhá oblast je orientace v rovině. Tato témata se budu snažit i v některých úlohách propojit a následně stanovím tři výzkumné předpoklady.

P1: Využívání hlavolamů vede k rozvoji řešitelských strategií žáků, což se projeví větší úspěšností v řešení úloh

Komentář:

Předpokládám, že pokud se s žáky budou procvičovat úlohy pomocí hlavolamů, budou mít možnost vyzkoušet si různé strategie řešení a to díky použití pro ně neznámých a zajímavých úloh, se kterými se pravděpodobně v běžné výuce pravidelně nesetkávají. Díky procvičení různých strategií řešení, nutnosti zamýšlet se nad úlohami před samotným počítáním a díky hledání více možných řešení budou připraveni na řešení obtížnějších úloh ve vyšších ročnících, ale snad i v běžném životě a úspěšnost řešení úloh se zvýší.

Ověření:

Žákům 3.A i 3.B bude mnou nejprve zadán vstupní test, abych zjistila, jaké strategie používají při řešení hlavolamů, poté strategie společně procvičíme se 3.A v několika cvičeních, se 3.B procvičí jejich třídní učeitelka Mgr. Iva Svobodová a následně se přesvědčím díky výstupnímu testu, zda již žáci dovedou strategie použít, nebo dokonce vymyslí i nějakou svoji. Test budu zadávat ve 3.A já a ve 3.B opět třídní učitelka. Zároveň zhodnotím, která z metod řešení je pro žáky třetího ročníku nejvíce vyhovující, a které úlohy nejvíce problematické.

P1a: Cíleně vybané úlohy podpoří rozvoj kombinačních schopností žáků při řešení nestandardních úloh

Komentář:

Kombinační schopnosti jsou v životě velice důležité, neboť nám pomáhají řešit různé problémy denně. Ať už se jedná o to, jakým způsobem můžeme například rozdělit žáky do dvojic, do řad, do čtveřic apod. nebo třeba zjistíme, kolika různými způsoby můžeme nakombinovat oblečení, které máme ve skříni. Samozřejmě se kombinatorika objevuje i v mnoha dalších případech, proto je nutné toto myšlení procvičovat již od raného věku. Cíleně tedy musíme s žáky procvičovat úlohy tohoto typu.

Ověření:

K ověření tohoto předpokladu využiji k procvičování algebrogramy, úlohy se sportovní tematikou, využití principu Pascalova trojúhelníku v praxi a jednoduché úlohy s použitím kombinatorického pravidla součtu a součinu a úlohy na využití variací. Použité metody řešení by měly být především experiment, grafické znázornění a výčet prvků.

P2: Využití hlavolamů s kombinatorickými prvky orientace v rovině vede k rozvoji prostorové představivosti a volby správné strategie k nalezení všech řešení

Sama mám celý život problémy s prostorovou představivostí a lámala jsem si hlavu, čím by to mohlo být a jak ji zlepšit. Během studia na vysoké škole jsem zjistila, že je mnoho úloh k procvičování prostorové představivosti a orientace v rovině a měly by se využívat již od prvního ročníku základní školy.

Rozvoj této schopnosti napomůže orientaci v rovině i v prostoru, což se v běžném životě může projevit např. lepší orientací v mapách nebo při procházce v lese, v cizím městě, ale i při rozestavovávní nábytku, plánování zahrady apod. Samozřejmě existují i zaměstnání, kde je orientace v rovině a v prostoru důležitá, jako např. navrhování a výroba elektrických obvodů, navrhování stavebních objektů, ale i silnic nebo parků.

Ověření:

K ověření tohoto předpokladu využiji úlohy, kde žáci budou hledat cesty v bludištích, na mapách, ve čtvercové síti aj. Dovednosti budou ověřeny pomocí výstupního testu. Výsledek testu bude porovnám s výsledkem testu vstupního. Vstupní test zadám sama v obou třídách, ve 3.A budu s žáky procvičovat a zadávat výstupní test, ve 3.B procvičí i zadá test třídní učitelka.

3.3 Popis výzkumu

Výzkum proběhne v nezávislých stádiích. Prvním stádiem je vypracování dotazníku pro učitele a předání co největšímu možnému počtu učitelů na prvním stupni ZŠ. Dále je to zpracování dotazníku a jeho analýza.

Na základě analýzy dotazníku bude vytvořen vstupní test pro žáky třetího ročníku ZŠ obsahující hlavolamy s tematikou kombinatoriky a orientace v rovině. Budou to úlohy na využití variací, kombinací a permutací. Dále bludiště, která budou mít jedno nebo více možných řešení a algebrogramy. Úlohy jsou definovány v kapitole 1.6, vstupní test v kapitole 2.2. Následně proběhne analýza vstupního testu a na jejím základě budou vypracovány pracovní listy pro žáky s problematickými úlohami (kapitola 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3). Po procvičení bude následovat výstupní test (kapitola 2.4) a jeho analýza.

3.4 Realizace výzkumu

Experiment započal před Vánocemi roku 2018, kdy jsem rozeslala dotazníky do všech základních škol nejprve v Jablonci nad Nisou, dle výpisu na webových stránkách města Jablonec nad Nisou (Základní školy - Jablonec nad Nisou 2001) a okolí, tj. do Nové Vsi nad Nisou, Tanvaldu, Smržovky, Desné, Lučan nad Nisou, Železného Brodu, Janova nad Nisou, Josefova Dolu, Zásady, Velkých Hamrů a do Rychnova u Jablonce nad Nisou. Následně pak do Liberce, dle výpisu na webových stránkách města Liberec (Základní školy - Statutární město Liberec 2019) . Jen málo ředitelů si přálo předat dotazník učitelům, a tak se mi nakonec vrátilo 59 vyplněných dotazníků. Jeden z nich je přiložen v elektronické příloze č. 7. Vyhodnocení dotazníku je v následující kapitole 3.4.1.

Pokračování výzkumu proběhlo v úterý 19. 3. 2019 na Základní škole Mozartova 24 v Jablonci nad Nisou a to ve třídě 3.A s dvaceti čtyřmi žáky. Po příchodu do třídy jsem se s nimi seznámila, společně jsme se bavili o hlavolamech a poté jsem jim rozdala vstupní testy. Postupně jsme přečetli všechna zadání úloh.

U první úlohy (orientace v rovině – spojování výsledků příkladů dle určených parametrů a vybrání křivky odpovídající řešení) jsem žáky upozornila, ať si pozorně přečtou, že mají spojovat výsledky od nejmenšího po největší a pokud si nebudou jisti, přečtou si zadání znovu.

U druhé úlohy (na využití kombinací bez opakování se sportovní tematikou) jsem jim pak poradila, ať používají pastelky a nebojí se zkoušet různé možnosti, i když si nebudou jisti správností svého řešení. Také jsem je upozornila, že je to běžná slovní úloha, je tedy nutná i slovní odpověď, abych si byla jistá jejich řešením.

Třetí úloha (slovní hříčka na využití kombinatorického pravidla součtu v Pascalově trojúhelníku) žákům přišla na první pohled jednoduchá, opět jsem jim tedy pouze poradila, ať používají různé barvy, aby se sami vyznali ve svém řešení a stejně tak i u úlohy čtvrté (bludiště s možností využití kombinatorického pravidla součtu v Pascalově trojúhelníku).

V páté úloze (na využití variací bez opakování – tvorba třímístného kódu) jsme si upřesnili, že se v kódu nesmí opakovat stejné číslice, nesmí to tedy být např. 1-1-1 apod. Tato informace nebyla ze zadání zcela jasná.

Poslední úloha (algebrogramy) přišla žákům velice složitá a vůbec nechápali, co mají dělat. Ukázali jsme si tedy pár podobných příkladů na tabuli, kde jsem vyznačovala neznámé barvami stejně jako čísla, která jsme potom dosazovali.

Nakonec jsem se zeptala, zda mají žáci ještě nějaký dotaz a ujistila je, že pokud budou chtít během testu cokoliv vědět a upřesnit, určitě se mohou přihlásit a já za nimi přijdu.

Na splnění testu měli žáci 45 minut, tedy jednu běžnou vyučovací hodinu. Vyhodnocení vstupního testu je v kapitole 3.4.2 a ukázka vyplněného testu v elektronické Příloze č. 5.

Další část výzkumu proběhla ve čtvrtek, tedy 21. 3. 2019 ve stejné škole, akorát ve 3.B. Zde bylo také 24 žáků a postup zadání testu byl stejný jako v předchozí třídě.

Hned při zadávání jsem si všimla zjevných rozdílů v kolektivu třídy. 3.B byla celkově mnohem soustředěnější, tišší a sami většinou chápali i co jsou algebrogramy. S paní učitelkou probírali během jejich výuky mnoho zajímavých úloh podobného typu. Vyhodnocení testů 3.B v kapitole 3.4.2.

Poté proběhla výuka ve 3.A. Ve čtvrtek 2. 5. 2019 byly s žáky probrány úlohy z kombinatoriky a to na využití variací, permutací a kombinací – průběh hodiny v kapitole 3.4.3. Úlohy jsem vždy vybírala na základně průběhu hodiny, obtížnosti úlohy a zbývajícího času do konce výuky. Nejprve jsme tedy procvičili nejjednodušší úlohu z pracovního listu a následně jsem vybrala těžší a nejtěžší i s přihlédnutím na úlohy, které bude obsahovat test výstupní. Následující termín pondělí 6. 5. 2019 jsem s žáky procvičila algebrogramy – průběh hodiny v kapitole č. 3.4.4 a v úterý 7. 5. 2019 orientaci v rovině – průběh hodiny v kapitole 3.4.5.

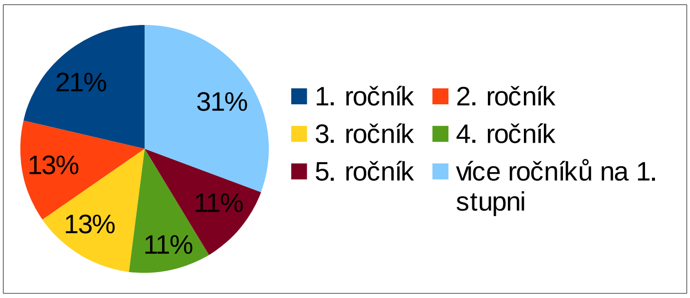
Na závěr byl žákům 3.A zadán výstupní test a to v úterý 14. 5. 2019. Vyplněný výstupní test přiložen jako elektronická příloha č. 6 a vyhodnocení v kapitole 3.4.6. Úlohy jsme s žáky přečetli nahlas, vždy jsem se zeptala, zde je všem jasné zadání nebo zda mají dotazy. Upozornila jsem je u první úlohy, aby se ujistili, kde je pravá strana, když vyjdou ze svého domu (vyznačeno na mapce), obraz je totiž zrcadlový, u druhé úlohy se ptali žáci, zda můžou použít dvakrát stejnou dvojici s přeházenými zvířaty, vysvětlili jsme si, proč ne. U třetí úlohy byl všem postup jasný a někteří si pamatovali z hodiny i kombinatorické pravidlo součtu a říkali, že ho použijí. Ve čtvrté úloze nebylo žákům jasné, kudy mají vést cestu, ukázala jsem, že po lince od puntíku. Zadání šestého a sedmého cvičení bylo všem jasné.

Ve 3.B, která poslouží jako kontrolní třída z důvodu ověření stanovených výzkumných předpokladů viz kapitola 3.2, procvičovala paní učitelka úlohy během běžné výuky od úterý 23. 4. 2019 až do úterý 14. 5. 2019. Zadávala žákům stejné úlohy, jako byly zadány ve 3.A, metodika však byla zvolena odlišná, neboť paní učitelka procvičovala jednotlivé úlohy během různých hodin matematiky jako oživení při probírání běžné látky matematiky. Oproti tomu ve 3.A byla zvolena tématická hodina a úlohy byly procvičeny v jedné vyučovací hodině. Ve 3.B žáci využívají barevná PET víčka, využili je tedy také při řešení úloh z pracovního listu Variace, kombinace, permutace (kapitola 2.3.1), místo barevných lístečků, které jsem rozdala ve 3.A. Také na tabuli paní učitelka nelepila jako já barevné panáčky při řeší úlohy s tanečními páry viz kapitola 2.3.1. Ostatní aspekty procvičování úloh byly však dle informací od paní učitelky stejné jako ve 3.A. Algebrogramy paní učitelka zadávala žákům postupně během různých hodin matematiky, dle výpovědi však žákům postup řešení vysvětlovala stejně jako já ve 3.A. Některé z příkladů však žákům zadala jako domácí úkol a následnou hodinu s žáky rozebrala řešení a strategii. Úlohy na orientaci v rovině zadala paní učitelka stejně a využila i prezentaci s řešením, kterou jsem vytvořila pro výuky ve 3.A. Prezentace obsahovala vždy zadání úlohy a řešení, které jsme si ukázali a následně si vysvětlili postup. Dle informací od paní učitelky nebyl žákům příliš vysvětlen princip kombinatorického pravidla součtu v Pascalově trojúhelníku a neprocvičili ho na dalších vymyšlených příkladech jako bylo učiněno ve 3.A. Výstupní test ve 3.B zadala sama paní učitelka Svobodová 16. 5. 2019. Vyhodnocení výstupního testu v kapitole 3.4.6.

3.4.1 Vyhodnocení dotazníku

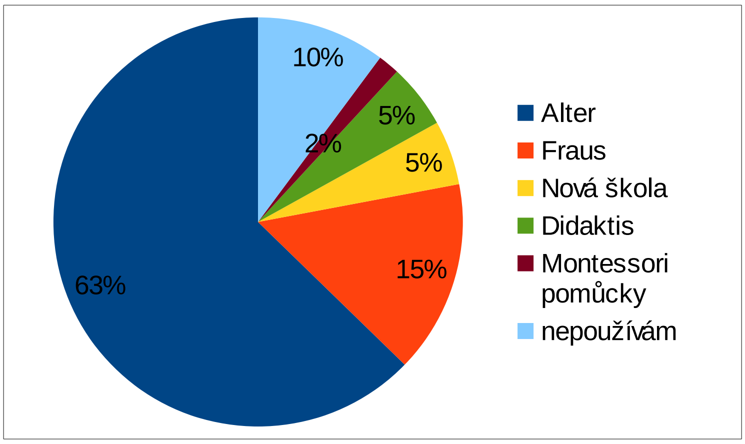
Dotazník obsahoval celkem dvanáct otázek. Učitelům byl předán elektronickou formou s použitím softwaru google forms, který je nabízen společností google v rámci jejich e-mailu zdarma. Tato forma nabízí zpracování odpovědí formou grafů, pokud se odpovídalo vybráním z nabízených možností. Pokud ne, odpovědi se pouze zobrazily jako výčet. Rozeberu tedy výsledky jednotlivých otázek.

1. otázka: Jaký ročník nyní učíte? Odpovídalo 59 učitelů



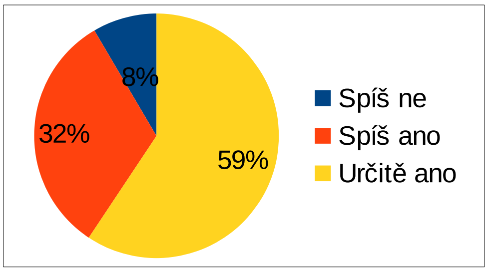
Graf 1: Vyučované ročníky odpovídajících učitelů

2. otázka: Jakou učebnici matematiky používáte? Odpovídalo 59 učitelů



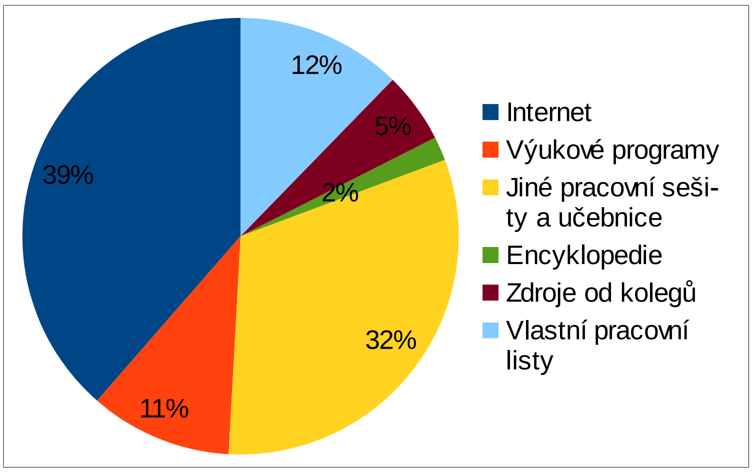
Graf 2: Četnost využívaných učebnic

3. otázka: Využíváte v hodinách matematiky i jiné zdroje (publikace, internet…) než je učebnice? Odpovídalo 59 učitelů



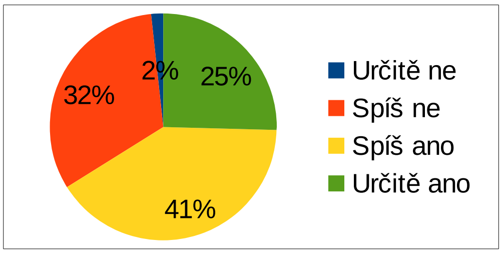
Graf 3: Četnost využívání jiných zdrojů než je učebnice

Jiné zdroje vypsané učiteli: Odpovídalo 55 učitelů



Graf 4: Další využívané zdroje

Otázka č. 4: Používáte v hodinách netradiční pomůcky? Odpovědělo 59 učitelů



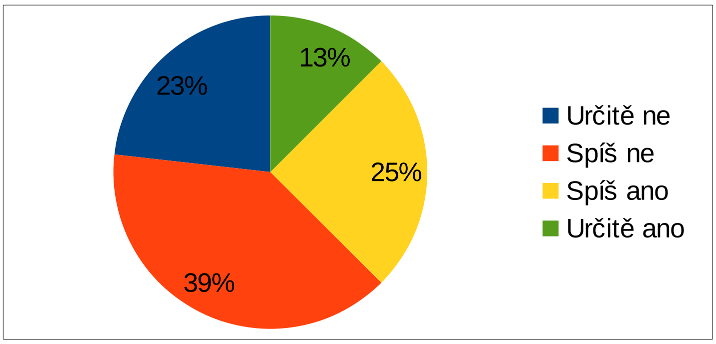
Graf 5: Četnost využívání netradičních pomůcek

Které netradiční pomůcky používáte? Odpovídalo 41 učitelů

Shrnutí:

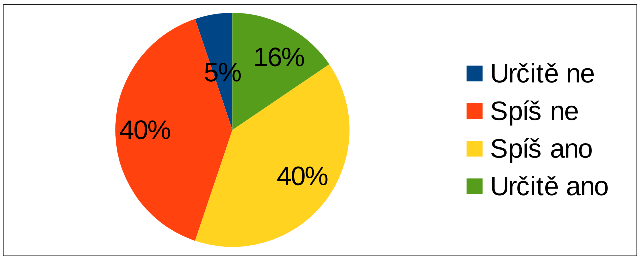
Učitelé na prvním stupni základních škol se nespokojují pouze s učebnicí a pracovním sešity, ale většina z nich používá nejrůznější netradiční pomůcky jako jsou papírové pyramidy, zápalky, různé krabičky, houbičky na mytí nádobí apod. V odpovědích jsem mnohokrát zaznamenala i pomůcky, které by mohly rozvíjet oblasti logického myšlení, které jsou spojené s tématem diplomové práce, např. kostky, PET víčka (použití na různé možnosti kombinování, vytváření skupin prvků dle určitých pravidel), stavebnice, modelína, provázky...záleží vždy na použití. Mnoho učitelů si vyrábí vlastní pomůcky do hodin, nespecifikují je však blíže. Také jsem zaznamenala, že někteří z učitelů používají deskové hry jako je Brain Box.

Otázka č. 5: Řešíte v hodinách matematiky algebrogramy? Odpovědělo 56 učitelů



Graf 6: Četnost využívání algebrogramů

Otázka č. 6: Zadáváte žákům k řešení šifry? Odpovědělo 56 učitelů



Graf 7: Četnost využívání šifer

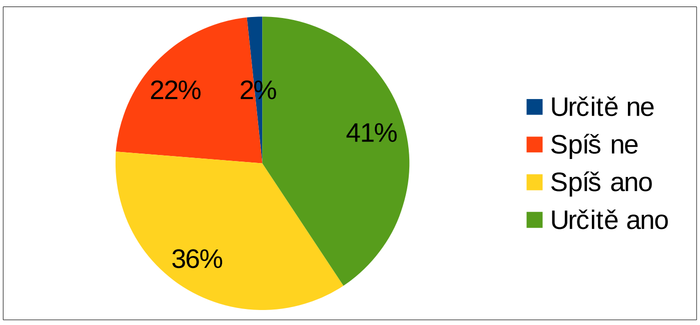
Otázka č. 7: Jaké typy zajímavých úloh v hodinách matematiky využíváte?

Odpovědělo 45 učitelů

Shrnutí:

Učitelé, kteří na otázku odpověděli, používají v mnoha případech k oživení hodin Hejného matematiku od vydavatelství Fraus, neboť úlohy jsou velice pestré, např. pyramidy, autobus, obrázkové hlavolamy, šifry, logické řady apod. Mnoho těchto úloh opravdu rozvíjí uvedené dovednosti. Někteří s žáky procvičují i algebrogramy, využívají čtvercové sítě (orientace v rovině), hlavolamy – ne blíže specifikované, tangramy, sudoku. Jedna z odpovědí byla i tajemná geometrie, což je velice zajímavá odpověď a určitě by mohla rozvíjet prostorové vidění žáků, stejně jako souřadnicová síť. Také se používají hlavolamy se sirkami.

Otázka č. 8: Využíváte v hodinách modely těles? Odpovědělo 59 učitelů



Graf 8: Četnost využívání modelů těles

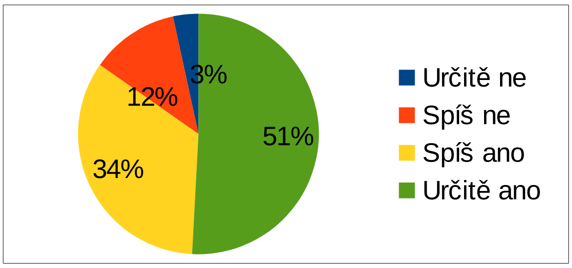
Otázka č. 9: Jaké pomůcky využíváte pro modelování obrazců a sítí těles?

Odpovědělo 48 učitelů

Shrnutí:

Modelování obrazců a sítí těles je velice vhodné k rozvoji prostorového vidění, k němuž je potřeba i schopnost orientovat se v rovině. Učitelé na prvním stupni základních škol používají ve většině případů k modelování špejle, modelíny, a podobné pomůcky jako jsou provázky, lana, latě atd. Jsou to velice vhodné pomůcky pro utvoření představy o obrazcích. Dále jsou dle odpovědí využívány hojně stavebnice dřevěné, ale i Merkur, samotné modely těles, ale i nejrůznější krabičky a modurit.

Otázka č. 10: Využíváte čtverečkovaný papír? Odpovědělo 59 učitelů



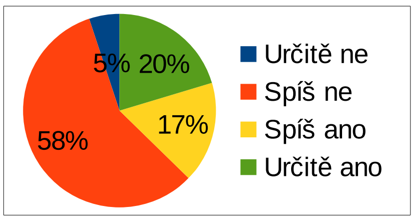
Graf 9: Četnost využívání čtvercové sítě

Uveďte při jakých činnostech: Odpovědělo 49 učitelů

Shrnutí:

Učitelé používají čtvercovou síť především při výuce geometrie a to např. u osově souměrných útvarů, při rýsování kolmic, rovnoběžek, při výpočtech obsahu a obvodu. Velice málo byly zaznamenány odpovědi, které by potvrzovali použití čtvercové sítě v souvislosti s rozvojem orientace v rovině. Pouze dva učitelé síť používají k tvoření sítí těles a k cestám po síti.

Otázka č. 11: Využíváte ve výuce (nějaké) hlavolamy? Odpovědělo 59 učitelů



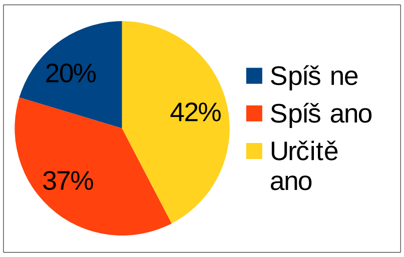
Graf 10: Četnost využívání hlavolamů

Jaké?: Odpovědělo 23 učitelů

Shrnutí:

Pouze menšina učitelů používá v hodinách hlavolamy. V mnoha případech využívají materiály prof. Hejného, tangramy, bludiště, apod. Překvapila mě odpověď učitele, který odpověděl, že by je využíval, kdyby byly, neboť publikací nabízející hlavolamy je nespočet.

Otázka č. 12: Využíváte hry? Odpovědělo 59 učitelů



Graf 11: Četnost využívání her

Jaké?: Odpovědělo 45 učitelů

Shrnutí:

Učitelé připravují pro žáky mnoho her do hodin matematiky, nedá se však říci, že zcela cíleně rozvíjí kombinatorické myšlení a orientaci v rovině. Učitelé používají i společenské hry jako je Ubongo, kde je nutné rozvážit strategii hry a využívá se orientace v rovině – ve hře se používají různé tvary jako např. v pentaminu, dále se jeden učitel zmínil i o šachách a více učitelů o dominu. Vždy však záleží na použití hry.

Jakým způsobem?: Odpovědělo 38 učitelů

Shrnutí:

Hry jsou součástí výuky většiny učitelů a jejich použití je rozličné. Někteří používají hry k motivaci na začátku hodiny, někteří k procvičování a upevnění učiva, další pak ke zpestření hodiny nebo k odpočinku. Jeden z učitelů využívá hry při tematických dnech jako jsou Vánoce, další k prevenci rizikového chování. Velice mě překvapilo, že někteří učitelé hry spíše nevyužívají, neboť se domnívám, že na první stupni je to nejlepší forma předávání znalostí a vědomostí.

3.4.2 Vyhodnocení vstupního testu

Vstupní test byl zadán dvěma třídám a to 3.A (19. 3. 2019) a 3. B (21. 3. 2019). Ohodnotím celkový počet bodů žáků obou tříd a zároveň i každou úlohu zvlášť, abych věděla, která z nich dělala žákům největší problém.

Ve třídě 3.A i v kontrolní třídě 3.B bylo 24 žáků a všichni se zúčastnili vstupního testu a na jeho splnění měli 45 minut. V obou třídách jsem zadávala test při stejných podmínkách.

Celková úspěšnost ve 3.A se pohybovala v rozmezí od 26% do necelých 77%. Průměrně pak byla úspěšnost celé třídy 41%. Maximálně bylo možné získat 43 bodů, ty nezískal ani jeden žák. Nejvyšší zisk bodů byl 33 a nejnižší 11.

Celková úspěšnost ve 3.B se pohybovala v rozmezí od 33% do 86%, tedy výsledky již na počátku byly lepší než ve 3.A. Průměrná úspěšnost celé třídy byla 54%. Maximální počet bodů opět nezískal žádný ze žáků. Nejvyšší získaný počet byl 37 a ten získali dva žáci, nejnižší 14 bodů.

Tabulka 1: Celková procentuální úspěšnost žáků 3. A a 3.B ve vstupním testu

Počet bodů 3.A	Počet žáků	Procentuální úspěšnost
33	1	77%
31	1	72%
30	1	70%
29	1	67%
24	1	56%
21	2	49%
20	2	47%
19	1	44%
17	2	40%
16	2	37%
14	4	33%
13	2	30%
12	1	28%
11	1	26%

Počet bodů 3.B	Počet žáků	Procentuální úspěšnost
37	2	86%
36	2	84%
35	1	81%
34	1	79%
33	1	77%
32	1	74%
31	1	72%
25	2	58%
23	1	53%
22	2	51%
21	2	49%
20	2	47%
19	1	44%
16	1	37%
14	1	33%

Hodnocení jednotlivých úloh:

1. Zapiš výsledky příkladů na linku pod nimi a výsledky spoj od nejmenšího po největší. Rozhodni, která čára vznikne spojením všech výsledků.

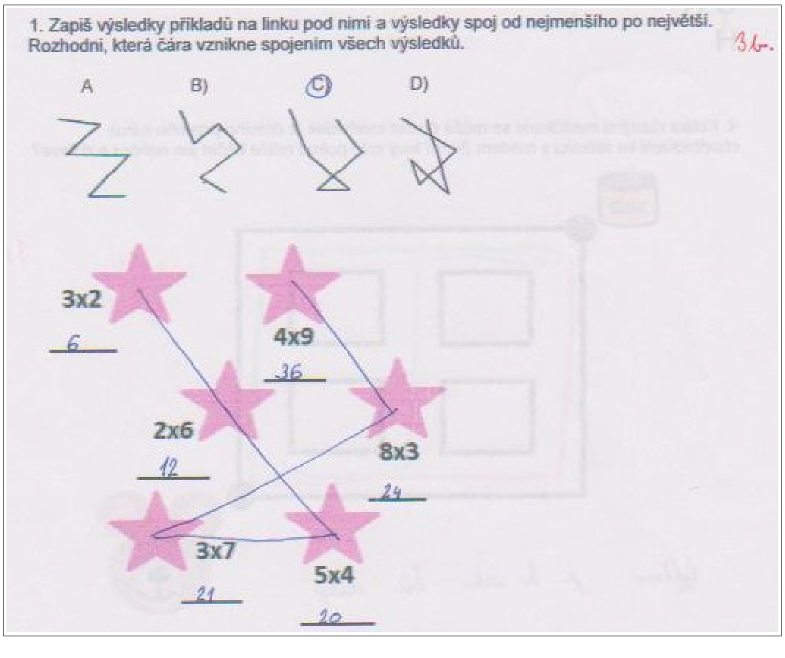
V této úloze bylo možné získat max. 3 body. Jeden bod za správné vypočítání příkladů, jeden bod za správné spojení výsledků a jeden bod za vybrání správné odpovědi.

Ve 3. A 18 žáků získalo 3 body, 4 žáci 2 body, 1 žák 1 bod a 1 žák 0 bodů.
Celková úspěšnost třídy byla průměrně 87%.

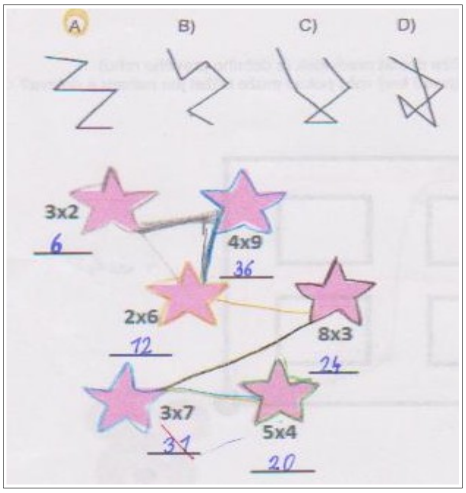
Ve 3.B 16 žáků získalo 3 body, 4 žáci 2 body, 2 žáci 1 bod a 2 žáci 0 bodů..
Celková úspěšnost třídy byla průměrně 80%.

Chyby, které se objevovaly v testu – špatně spočítané příklady, 4x pak žáci špatně spojili výsledky a tím pádem vybrali špatnou odpověď.

Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 13: Vstupní test, cvičení 1 – správné řešení žákyně 3.A



Ilustrace 14: Vstupní test, cvičení 1 – chybné řešení žáka 3.B

2. Ve škole se konal hokejový turnaj. Účastnilo se 5 družstev a všechna družstva musela hrát se všemi z protivníků, vždy pouze jeden zápas. Kolik zápasů se odehrálo celkem?

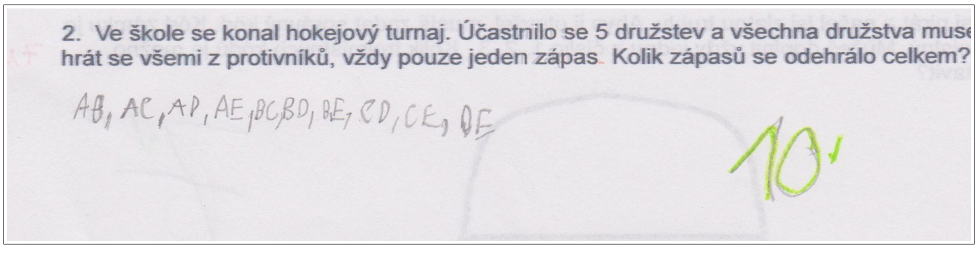
V této úloze bylo možné získat max. 10 bodů, za každou správnou kombinaci 1 bod.

Ve 3. A získali 4 žáci 10 bodů, 1 žák 9 bodů a 19 žáků 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 20%.

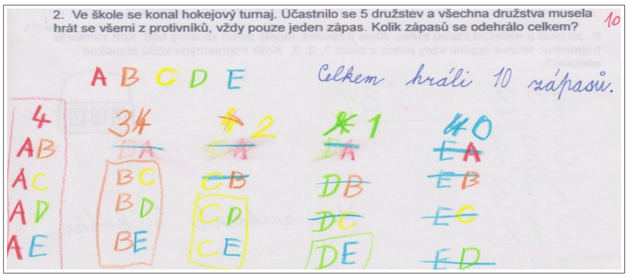
Ve 3.B 14 žáků získalo 10 bodů, 1 žák získal 9 bodů, 1 žák 8 bodů, 1 žák 7 bodů, 1 žák 5 bodů a 6 žáků 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 70%.

Chyby, které se objevovaly v testu - žáci, kteří nezískali žádný bod, nezkusili řešit úlohu vůbec. Ti, kteří nezískali plný počet bodů, nesystematicky zapisovali, proto nenalezli všechny možné kombinace. Zajímavé bylo, že v úspěšnější třídě žáci označovali družstva většinou velkými písmeny abecedy. Počty zápasů pak vyznačovali buď do tabulky, výčtem možností nebo jako diagram.

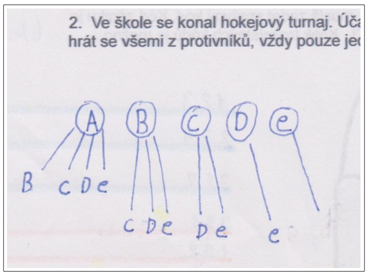
Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 15: Vstupní test, cvičení 2 – správné řešení výpisem prvků žáka 3.B



Ilustrace 16: Vstupní test, cvičení 2 – správné řešení tabulkou žáka 3.A



Ilustrace 17: Vstupní test, cvičení 2 – správné řešení diagramem žákyně 3.A

3. Kolika způsoby můžeš přečíst slovo KRUH napsané níže? Pohybovat se můžeš pouze doprava a dolů:

K R U H
R U H
U H
H

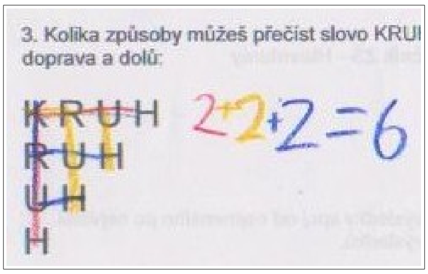
V této úloze bylo možné získat max. 8 bodů. Jeden bod za každou nalezenou cestu.

Ve 3. A 1 žák získal 8 bodů, 3 žáci 6 bodů, 2 žáci 5 bodů. 8 žáků 4 body, 3 žáci 3 body, 4 žáci 2 body a 3 žáci 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 44%.

Ve 3.B získalo 6 žáků 8 bodů, 4 žáci 7 bodů, 8 žáků 6 bodů., 1 žák 5 bodů, 1 žák 4 body, 2 žáci 2 body a žáci 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 72%.

Chyby, které se objevovaly v testu – nenalezené cesty nebo nepochopení zadání. Cesty žáci odlišovali barevnými pastelkami. Kdo zvolil větší počet barev, většinou získal bodů více. Někteří označovali cesty pouze dvěma barvami nebo pouze propiskou a konečný počet cest proto popletli.

Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 18: Vstupní test, cvičení 3 - řešení žákyně 3.A třemi barvami – 6 možností

4. Kolika různými cestičkami se může dostat medvídek (z dolního pravého rohu) chodbičkami ke sklenici s medem (horní levý roh) pokud může běžet jen nahoru a doleva?

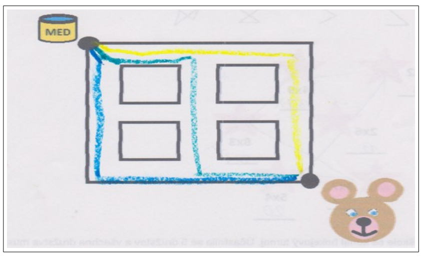
V této úloze bylo možné získat max. 6 bodů. Jeden bod za každou nalezenou cestu.

Ve 3. A 1 žák získal 6 bodů, 11 žáků 5 bodů, 6 žáků 4 body, 4 žáci 3 body a 2 žáci 2 body. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 70%.

Ve 3.B získalo 13 žáků 6 bodů, 2 žáci 5 bodů, 6 žáků 4 body a 3 žáci 3 body. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 83%.

Chyby, které se objevovaly v testu – pouze nenalezené cesty nebo nepochopení zadání. Cesty byly žáky vyznačovány barevně a to buď liniemi nebo vybarvením části cesty. K pochopení systému řešení bych musela vedle žáků sedět a vidět přímo, jak postupovali.

Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 19: Vstupní test, cvičení 4 - řešení žákyně 3.A - 3 cesty

5. Jsi pirát a našel jsi zlatou truhlu. Abys ji otevřel, musíš zadat správný kód. Kód zámku je trojmístný. Můžeš doplnit vždy jednu z číslic 1, 2, 3. Kolik trojmístných kódů je možno nastavit?

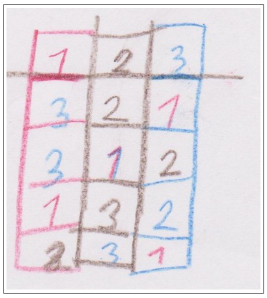
V této úloze bylo možné získat max. 6 bodů. Jeden bod za každou možnou variaci.

Ve 3. A získalo 10 žáků 6 bodů, 5 žáků 5 bodů, 4 žáci 4 body, 5 žáků 3 body a 3 žáci 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 70%.

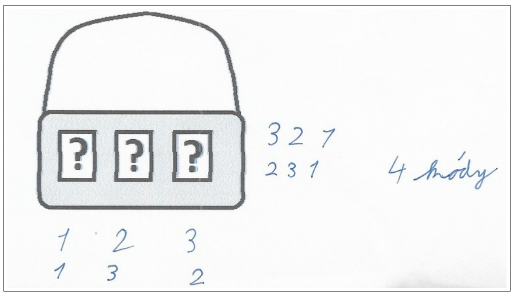
Ve 3.B získalo 15 žáků 6 bodů, 3 žáci 5 bodů, 1 žák 3 body, 1 žák 1 bod a 3 žáci 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 76%.

Chyby, které se objevovaly v testu – nesystematický zápis možných řešení, což vedlo k nenalezení všech možných variací kódu. Dva žáci, kteří nezískali žádný bod, vůbec nevěděli, jak pracovat nebo možná nechali úlohu až na závěr a již ji nestihli řešit. Místa pro číslice si žáci značili buď do tabulky, což vedlo k systematickému zápisu, nebo si překreslovali celý zámek.

Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 20: Vstupní test, cvičení 5 - řešení žáka 3.A tabulkou, 5 možností



Ilustrace 21: Vstupní test, cvičení 5 - řešení žákyně 3.B experimentem, 4 možnosti

6. Doplň místo písmen číslice 0-9 tak, aby příklady níže byly správně vypočítané. (algebrogramy)

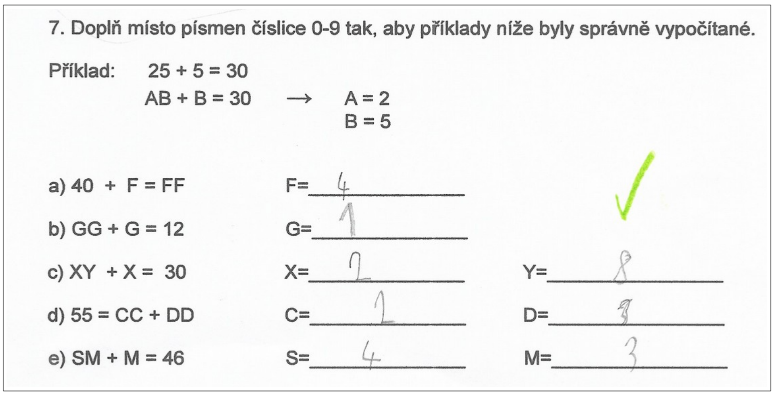
V této úloze bylo možné získat max. 10 bodů. Jeden bod za každý správně vypočítaný příklad.

Ve 3. A získali 3 žáci 5 bodů, 2 žáci 4 body, 3 žáci 3 body, 9 žáků 2 body, 3 žáci 1 bod a 4 žáci 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 20%.

Ve 3.B získali 4 žáci 5 bodů, 2 žáci 4 body, 4 žáci 3 body, 5 žáků 2 body, 3 žáci 1 bod a 6 žáků 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 22%

Chyby, které se objevovaly v testu – nenalezení správného čísla nebo nalezení pouze jedné z možností. Pokud žáci získali body, buď počítali zpaměti nebo dosazovali postupně číslice.

Ukázka řešení žáků:

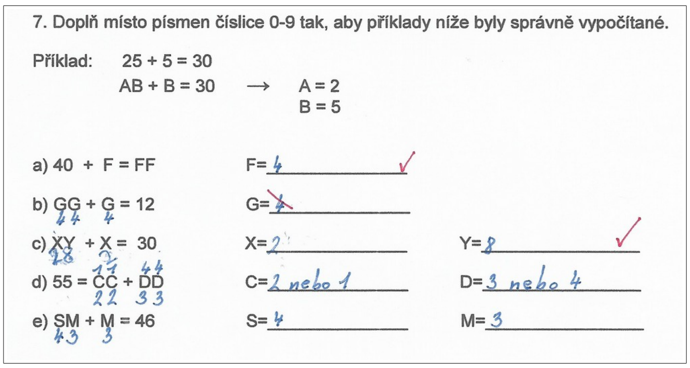


7. Doplň místo písmen číslice 0-9 tak, aby příklady níže byly správně vypočítané.

Příklad: 25 + 5 = 30
AB + B = 30 → A = 2
B = 5

a) 40 + F = FF F= 4
b) GG + G = 12 G= 1
c) XY + X = 30 X= 2 Y= 8
d) 55 = CC + DD C= 2 D= 3
e) SM + M = 46 S= 4 M= 3

Ilustrace 22: Vstupní test, cvičení 6 – řešení žáka 3.A pamětným počítáním



7. Doplň místo písmen číslice 0-9 tak, aby příklady níže byly správně vypočítané.

Příklad: 25 + 5 = 30
AB + B = 30 → A = 2
B = 5

a) 40 + F = FF F= 4
b) GG + G = 12 G= ~~4~~
44 4
c) XY + X = 30 X= 2 Y= 8
28 2
11 44
d) 55 = CC + DD C= 2 nebo 1 D= 3 nebo 4
22 33
e) SM + M = 46 S= 4 M= 3
43 3

Ilustrace 23: Vstupní test, cvičení 6 - řešení žáka 3.B dosazováním

3.4.3 Vyučovací hodina – Variace, kombinace, permutace

Vyučovací hodina proběhla 2. 5. 2019 ve 3.A a to od 8 hodin. Ve třídě bylo ten den 24 žáků, od kterých jsem obdržela podepsané souhlasy zákonných zástupců se zveřejněním fotografií jejich dětí z výuky v diplomové práci (ukázka v elektronické příloze č. 8). Také jsem si připravila diktafon, abych mohla průběh celé hodiny zaznamenávat a fotoaparát, abych mohla fotit zajímavé okamžiky v hodině.

Cíle vyučovací hodiny: Žák bude umět systematicky hledat všechna možná řešení úloh.

Organizační forma: Frontální, samostatná, skupinová.

Učební pomůcky: Dětské barevné kostky, papírové obrázky- děvčata a chlapci, barevné křídy, sáčky s barevnými papírovými čtverečky, pastelky, papír, tabule

Průběh hodiny:

1. etapa (organizační) – 3 minuty

V této etapě jsem seznámila žáky s tématem a průběhem hodiny. Ptala jsem se jich, zda se někdy setkali s problémem, že se nemohli rozhodnout, co si vzít na sebe nebo co si vybrat ráno k snídani nebo s kým jít za ruku do tělocvičny. Většina žáků tento problém již zažila a sami navrhovali podobné problémy. Prozradila jsem jim, že se tyto problémy dají řešit i matematicky a my si ukážeme jak – motivace.

2. etapa (expoziční) – 40 minut

1. úloha (Pracovní list Variace, kombinace, permutace, 1. cvičení) – 12 minut

Žáky jsem požádala, aby si sesedli do „hnízd“, tedy skupinek po čtyřech a to pouze otočením židlí ke svým spolužákům. Nyní jsem rozdala každé skupince sáček s barevnými čtverci – 6 různých barev a od každé barvy 8 čtverečků. Na první prázdnou lavici jsem položila 3 barevné dětské kostky a to modrou, červenou a zelenou. Zeptala jsem se žáků, zda by dokázali říct, kolika různými způsoby se dají kostky naskládat na sebe. Jeden z žáků se zeptal, jak to myslím, tak jsem postavila kostky do komínu a ukázala jim, že je dole modrá kostka, uprostřed zelená a nahoře červená, ale barevná kombinace může být i jiná a kostky jsem přeskládala. Zeptala jsem se, zda již pochopili zadání úlohy. Všichni pochopili. Zadala jsem jim tento úkol a poradila jim, ať si kombinace vyzkouší pomocí barevných čtverců, které mají na lavici. Žáci začali pracovat.

Bylo vidět, že nejsou zvyklí pracovat ve skupině, musela jsem je pobízet, aby se bavili o možnostech, aby opravdu zkoušeli a radili si, samozřejmě potichu, aby neradili a nerušili ostatní skupiny. Chodila jsem po třídě, pozorovala žáky, jak řeší úlohu a pokud nevěděli, snažila jsem se jim poradit.

Po pěti minutách jsem je požádala, ať skončí s činností a pochlubí se se svým řešením. Každá skupinka zvedla tolik prstů, kolik našli řešení. Tři skupinky našly všechna řešení, a tak jedna ze skupinek byla vyvolána k první lavici a komíny postavila.

Potom jsem se zeptala, zda by někdo věděl, jak najít všechna řešení, aby si byli jistí, že na nic nezapomněli. Jedna žákyně poradila ostatním, že začínala vždy s jednou barvou dole a k ní přiřazovala další možnosti. Ukázala na kostkách před třídou, jak to myslí. Všichni nyní viděli, jak úkol vyřešit tak, aby opravdu nezapomněli na žádnou z možností, tedy jak systematicky postupovat k získání správného výsledku.

2. úloha (stejný pracovní list, 4. cvičení) – 10 minut

Zeptala jsem se žáků, zda znají nějaký tanec. Jedna žákyně řekla, že zná valčík, další mazurku a další polku. Další mojí otázkou byla, zda vědí, co je k tanci vždycky kromě hudby zapotřebí. Nikdo nevěděl. Řekla jsem jim, že jedna holka a jeden kluk. Třída se smála. Začala jsem je tedy seznamovat s úlohou. Na tabuli jsem lepila jednotlivá děvčata a chlapce a říkala jim, že tři dívky Anička, Petra a Lucka si měly vybrat tanečníka ze tří chlapců a to z Aleše, Míry a Romana. Kolik různých dvojic mohlo vzniknout? Poradila jsem jim, že můžou zkusit úlohu vyřešit také pomocí barevných čtverců nebo si můžou na papír psát jména dětí. Opět jsem je nechala pracovat ve skupině a sledovala jsem, zda spolupracují, případně jsem jim poradila, jak mají spolupracovat. Také jsem se snažila navést je na další možnosti. Po třech minutách jsem je zastavila a zeptala, kolik kdo našel možností. Tentokrát našly 4 skupinky plný počet možností. Opět jsem se zeptala, jak to udělat, abychom našli všechny možnosti a jedna z žákyň vysvětlila, že nejprve k jedné dívce přiřadila všechny chlapce, pak k druhé dívce a nakonec ke třetí. Řešení jsme si ukázali na tabuli tak, že jsme k sobě lepily barevné páry.

3. úloha (stejný pracovní list, 6. cvičení) – 18 minut

Tentokrát jsem žáky požádala, aby se otočil každý na své místo. Na tabuli jsem napsala číslice 6, 8, 2, 3 a řekla jsem jim, že mají trojmístní zámek a mají uhodnout správnou kombinaci. Pokud si však chtějí být jistí, že ji uhodnou, musí najít všechny možné kódy složené z těchto číslic. Ty se můžou v kódu opakovat. Napsala jsem jim na tabuli kód 2-2-2 a 2-3-6 jako ukázku dvou možných kódů. Požádala jsem je, aby nejdříve přemýšleli, jak by přišli opravdu na všechny možnosti a pak se teprve pustili do zapisování na rozdaný papír.

Chodila jsem po třídě a sledovala, jaký kdo zvolil postup řešení, radila jsem s dalšími možnostmi a ukazovala jsem některým, že na papíře mají jednu možnost napsanou vícekrát.

Po pěti minutách už většina žáků nevěděla, tak jsem se zeptala na počet nalezených možností. Nikdo neměl ani polovinu řešení, tak jsem jim dovolila, že si můžou ukázat řešení se svojí dvojicí a můžou se společně pokusit hledat další, protože jich je o mnoho víc. Nechala jsem jim další dvě minuty a poté jsem již začali možnosti konzultovat společně. Jedna dvojice našla téměř všechny možnosti a řekla třídě, jak postupovala. Jejich řešení bylo velice systematické. Zbytku třídy jsem ukázala nejlepší způsob systematického řešení na tabuli a to s číslicí dva na prvním místě a střídáním ostatních číslic dle výpisu v příloze č. 1. Další sloupeček vypsala dívka z dvojice se správným řešením. Další sloupeček vypsal žák, který si připadal ztracený – vysvětlila jsem mu přímo u tabule, jak zapisovat a poslední sloupeček zkusil každý sám na papír a zkontrolovala i poté podle mého zápisu. Úloha zabrala mnoho času, ale žáci již chápali, jak ji strategicky vyřešit.

3. etapa (závěrečná) - 2 minuty

Ruce zvedli ti žáci, kteří by již sami dokázali vyřešit příklad s kostkami, poté příklad s tanečníky a nakonec příklad s číselnými kombinacemi. První dva by dokázali vyřešit všichni, poslední polovina třídy, dle jejich úsudku. Poděkovala jsem jim za spolupráci a prozradila, že nás čeká další týden společná hodina, kde budeme odhalovat tajemství algebrogramů, ale že jim neprozradím, co to je. Žáci zajásali a ukončili jsme hodinu zpěvem lidové písně Měla babka čtyři jabka, neboť se na ni tancuje tanec mazurka jako ve cvičení 2.

3.4.4 Vyučovací hodina – Algebrogramy

Další vyučovací hodina proběhla v pondělí 6. 5. 2019 opět od 8 hodin ráno. Ve třídě bylo 22 žáků, 2 žáci byli nemocní. Před začátkem hodiny jsem si připravila na tabuli příklady, jednoduché algebrogramy. Bohužel jsem měla k dispozici pouze jednu část tabule, neboť na ostatních měla hotovou přípravu paní učitelka a tabuli jsem nesměla zavřít neboť i na jednou venkovním křídle byla příprava, kterou žáci nesměli vidět. Má příprava tedy byla omezena pouze na prvních pět příkladů. Opět jsem použila i diktafon a fotoaparát jako při první hodině.

Cíle vyučovací hodiny: Žák pochopí pravidla pro řešení algebrogramů.

Organizační forma: Frontální, samostatná, skupinová.

Učební pomůcky: Tabule, barevné křídy, papírové kartičky s číslicemi.

Průběh hodiny:

1. etapa (organizační) – 3 minuty

Přivítala jsem se se žáky a zeptala, zda si pamatují, co jsme dělali minulou hodinu. Jedna z žákyň nám obsah hodiny zopakovala. Poté jsem se zeptala, jestli si někdo pamatuje, co budeme dělat dnes. Žáci zkoušeli zopakovat slovo algebrogramy, ale nikomu se správně nepodařilo. Řekla jsem ho tedy já a vysvětlila jim, co to algebrogram je. Požádala jsem je, aby si opět sedli do skupinek. Dvě žákyně zůstaly pouze ve dvojici.

2. etapa (expoziční) – 40 minut

1. úloha (Pracovní list Algebrogramy, 1. cvičení) 35 minut

Žákům jsem ukázala příklady na tabuli a požádala je, ať neřeší příklady ve skupince napřed, vždy nejprve zkusí řešit sami příklad a poté si ukážeme řešení společně. Začali jsme tedy prvním příkladem. Někteří vůbec nevěděli, jak řešit. Obcházela jsem třídu a poradila jim, ať dosazují za obrázek postupně číslice, až přijdou na správný výsledek. První příklad nakonec zvládla vyřešit celá třída a jeden z žáků šel nalepit správnou číslici na tabuli místo obrázku.

Druhý příklad opět zkoušeli nejprve žáci ve skupince. Tři skupinky příklad vyřešily. Zavolala jsem si tedy k tabuli žáka ze skupinky, která příklad nevyřešila. Sám zapisoval na tabuli příklady s dosazením číslic, začal od 0, poté zadal 1, dále 2 a poté začal přemýšlet a počítat zpaměti. Rychle přišel na výsledek 9. Jeden z žáků jiné skupinky poradil, že se příklad dá spočítat i dělením výsledku dvěma členy, tedy 18:2.

Třetí příklad trval žákům déle, většina se snažila přemýšlet, místo toho, aby dosazovali automaticky číslice, když nedokázali sami přijít na systém. Poradila jsem jim, že musí vždy sledovat výsledek a desítku, kterou obsahuje. Výsledek v našem příkladu obsahoval 7 desítek, bylo tedy jasné, že pokud chceme najít D, musí to být číslo menší než 7, ale zároveň určitě větší než 4 – vyvodili sami žáci, pokusili se tedy dosadit již jen 5 a 6 a na výsledek přišli rychle.

Čtvrtý příklad nepřipadal žákům složitý.

U pátého příkladu jsem je upozornila, že nemusí dosazovat všechny číslice od 0, ale ať přemýšlejí, které mohou vyloučit. Nechala jsem je samostatně pracovat a nakonec jsme si řekli, které číslice vyřadili a jaký výsledek jim vyšel. Dvě skupinky nevěděli, jak jsme přišli na číslice, které jsme vyřadili, vysvětlila žákyně úspěšné skupiny.

Poslední příklad z prvního cvičení si vyzkoušel každý žák sám za sebe. Chvilku jsem počkala a nakonec jsme si řekli výsledek. Někteří opět seděli a vůbec nezkoušeli dosazovat postupně číslice, jen koukali. Poradila jsem jim, ať dosazují a pustili se do toho. Měla jsem pocit, že byli trochu líní a aktivita je již tolik nebaví. Zadala jsem jim tedy úkol ve skupince, ať se pokusí vymyslet sami jednoduchý algebrogram pro ostatní.

2. úloha – vymýšlení algebrogramů 5 minut

Tato úloha nebyla obsažena v pracovních listech, ale chtěla jsem hodinu oživit a aktivitu přesměrovat především na žáky. Naštěstí tato strategie vyšla a žáky bavila. Všechny skupinky vymysleli algebrogramů více, ale nechala jsem je zadat třídě vždy pouze jeden. Tuto aktivitu jsem pojala jako soutěžní, výsledek tedy vždy řekl ten nejrychlejší a vysvětlil, jak se k výsledku dostal.

3. úloha – (Pracovní list algebrogramy, 2. cvičení) – 5 minut

Nezbývalo již mnoho času, proto jsem se rozhodla zadat třídě pouze jeden vybraný příklad ze cvičení 2 a to takový, aby museli najít více řešení. Byl to příklad D). Pracovali všichni a snažili se, jen tři skupinky přišli na obě řešení.

Poslední příklad, který jsme stihli, byl ze cvičení 3. chtěla jsem aby si ho také vyzkoušeli. Vyřešily čtyři skupinky díky systematickému dosazování. Díky tomu, že A = 1, přišli na výsledek poměrně rychle.

3. etapa (závěrečná) – 2 minuty

Poslední dvě minuty jsem věnovala pocitům žáků ze seznámení s algebrogramy. Většinu bavilo počítat tyto příklady, některé ne. Čtyři žáci byli z příkladů zmateni a stále nevěděli, jak je řešit.

Nakonec jsem třídě ukázala na tabuli algebrogram z pracovního listu Pro chytré hlavičky a slíbila jsem, že kdo ho vyřeší do dalšího setkání, dostane sladkou odměnu.

3.4.5 Vyučovací hodina - Orientace v rovině

Poslední společná hodina proběhla v úterý 7. 5. 2019 a ve třídě bylo 22 žáků. Když mě žáci viděli, ihned začali tvořit „hnízda“, tentokrát jsem je však požádala, aby zůstali ve svých lavicích, protože bude pracovat každý sám. Připravený jsem měla i diktafon a fotoaparát.

Cíle vyučovací hodiny: Žák procvičí strategie řešení bludišť.

Organizační forma: Frontální, samostatná.

Učební pomůcky: Pracovní listy, prezentace, tabule, křídy.

Průběh hodiny:

1. etapa (organizační) – 2 minuty

Žáků jsem se ptala, zda někdy řešili hlavolamy typu bludiště, a zda je mají rádi. Někteří řekli, že neradi řeší takové úlohy. Informovala jsem je o tom, že dnes si vyzkoušíme možná trochu jiná bludiště než doposud viděli.

2. etapa (expoziční) - 40 minut

1. úloha (Pracovní list Orientace v rovině, 1. cvičení) – 5 minut

Žákům jsem rozdala pracovní listy, stejné jako jsou v praktické části diplomové práce v kapitole 2.3.3. Sama jsem si připravila projektor a na plátně jsem zobrazila v předem připravené prezentaci stejnou úlohu, jako viděli žáci ve svých pracovních listech. Přečetli jsme společně zadání, ukázali si na plátně bod odkud mají jít a v zadání jsme si ještě jednou ujasnili směr cesty. Zeptala jsem se jich, jak předejdou tomu, aby jeden pokyn v zadání nevykonali dvakrát. Jedna žákyně poradila ostatním, že si bude provedený pokyn v zadání škrtat. A nyní se žáci pustili do samostatné práce, Chodila jsem po třídě a překvapeně jsem zjistila, že je úloha pro žáky obtížná a pouze dva našli stanovený cíl. Začali jsme tedy od začátku a pokyny jsem jim četla já. Nyní vyřešilo dalších 13 žáků. Poslední fází tohoto hlavolamu bylo, že jeden žák četl zadání mně a já na tabuli ukazovala, kudy kráčím. Pochopili i ostatní žáci.

2. úloha (stejný Pracovní list, 2. cvičení) – 15 minut

Další úlohu a to cvičení 2 žáci řešili opět nejprve samostatně. Předem jsem jim však trochu poradila, ať si uvědomí, že cest k cíli je mnoho a ať dávají pozor, ať na žádnou nezapomenou. Někteří žáci stále nevěděli, co mají dělat. Dvě možné cesty jsem tedy ukázala v mapce na plátně a poradila, ať si pro zápis každé nové cesty zvolí novou barvu. Nyní už pracoval každý sám. Každý žák našel aspoň tři cesty. Největší počet nalezených cest byl 8. Ukázala jsem řešení na plátně a všechna jsme prošli.

3. úloha (Stejný pracovní list, 4. cvičení) - 20 minut

Toto cvičení jsem s žáky chtěla probrat přednostně, proto jsme cvičení 3. přeskočili. Chtěla jsem žákům ukázat kombinatorické pravidlo součtu v Pascalově trojúhelníku. Nejprve ale žáci zkoušeli hledat cesty sami a opět jsem jim poradila, ať používají různé barvy a pokud budou mít pocit, že se nevyznají v řešení, ať si hlavolam překreslí ještě jednou a další řešení píšou do nového obrázku. Nechala jsem žáky pracovat, nechtěli skončit, bavilo je hledat cesty. Pár žáků pouze sedělo po nalezení jedné cesty, poradila jsem jim tedy další a pokračovali dál. 4 žáci našli všechna řešení. Ukázali jsem si na plátně správná řešení a poradila jsem žákům, jak hledat cesty systematicky. Nyní jsem řekla, že jim prozradím fígl, jak vyřešit úlohu bez práce. Přepsala jsem hlavolam na tabuli a místo písmen jsem psala číslice, u toho jsem vysvětlovala, jak jsem na číslice přišla. Žáci mi sami radili, jakou číslici mám doplnit, nakonec jsme společně sečetli poslední číslice a výsledek byl na světě. Vymyslela jsem obdobné hlavolamy a zapsala je na tabuli a žáci zkoušeli sami řešit pomocí kombinatorického pravidla součtu.

3. etapa (závěrečná) – 3 minuty

Bohužel jsme již nestihli další cvičení, paní učitelka ale požádala žáky, aby si pracovní listy nechali, protože zbývající hlavolamy vyzkouší sami během výuky, když jim zbyde čas. Zeptala jsem se, zda je úlohy bavili a zda by je dokázali již řešit lépe než před naší hodinou. Všichni byli nadšeni a jedna žákyně mi řekla, že jí hodiny matematiky nikdy tak neutíkali jako ty naše společné. Rozloučila jsem se s žáky, poděkovala jsem jim za jejich práci v hodinách a pochválila jsem je i před paní učitelkou za spolupráci a nadšení pro věc. Také jsem jim oznámila, že přijdu ještě naposledy a to zadat test a jsem zvědavá, zda někdo přinese algebrogram.

3.4.6 Vyhodnocení výstupního testu

Výstupní test byl zadán stejným dvěma třídám jako test vstupní s cílem potvrdit nebo vyvrátit stanovené výzkumné předpoklady v kapitole 3.2 Rozdíl oproti testu vstupním byl v počtu žáků ve třídách, neboť v obou třídách plnilo test pouze 23 žáků. Tedy v každé třídě o jednoho žáka méně. Navíc chyběli žáci jiní než při testu vstupním, výsledek tedy může být zkreslený. Ohodnotím opět celkový počet bodů žáků obou tříd a zároveň i každou úlohu zvlášť, abych věděla, jaký pokrok žáci udělali a v jakých úlohách největší.

Ve třídě 3.A, kde jsem se účastnila zadávání obou testů i procvičování úloh i v kontrolní třídě 3.B, kde jsem sama zadávala pouze test vstupní, bylo tedy 23 žákům a na splnění testu měli všichni 45 minut, tedy jednu vyučovací hodinu.

Celková úspěšnost ve 3.A se pohybovala v rozmezí od 8,5% do 94%. Průměrně pak byla úspěšnost celé třídy 52%, vzrostla tedy o 11% oproti testu vstupnímu. Maximálně bylo možné získat 47 bodů, ty nezískal ani jeden žák. Nejvyšší bodový zisk byl 44 a nejnižší 4.

Celková úspěšnost ve 3.B se pohybovala v rozmezí od 36% do 100%. Průměrná úspěšnost celé třídy byla 68%, vzrostla o 12%. Maximální počet bodů získal 1 žák. Nejnižší bodový zisk byl 17.

Po realizaci aktivit došlo v obou třídách ke zlepšení.

Tabulka 2: Celková procentuální úspěšnost žáků 3. A a 3.B ve výstupním testu

3.A

Počet bodů	Počet žáků	Procentuální úspěšnost
44	1	94%
40	1	85%
36	1	77%
34	1	72%
33	1	70%
32	1	68%
30	1	64%
28	1	60%
27	1	58%
25	1	53%
24	1	51%
21	6	47%
20	1	43%
19	1	41%
16	1	34%
14	1	30%
11	1	23%
4	1	9%

3.B

Počet bodů	Počet žáků	Procentuální úspěšnost
47	1	100%
45	2	96%
41	2	87%
36	2	77%
64	2	72%
33	1	70%
32	1	68%
3	5	67%
28	1	60%
27	2	58%
21	2	47%
19	1	41%
17	1	36%

Hodnocení jednotlivých úloh:

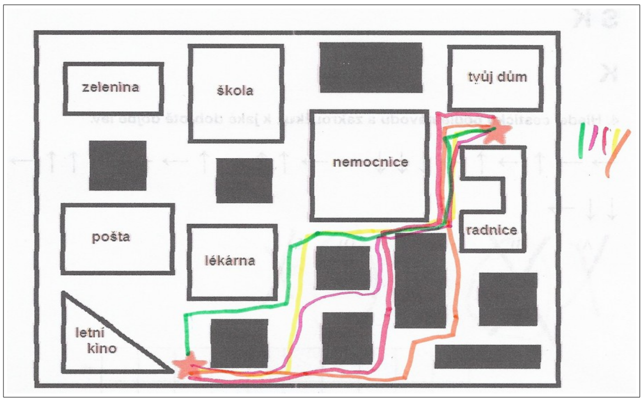
1. Chceš jít s kamarády na nový film, který promítají v letním kině. Vycházíte z domu, začátek cesty je na mapce vyznačen hvězdičkou. Kolika různými cestami se dostaneš k letnímu kinu, když můžeš jít pouze doprava a dolů? Cíl tvé cesty je opět vyznačen hvězdičkou.

V této úloze bylo možné získat max. 6 bodů. Za každou správnou odpověď 1 bod. Ve 3. A 5 žáků získalo 6 bodů, 6 žáků 5 bodů, 8 žáků 4 body a 4 žáci 3 body. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 75%

Ve 3.B 9 žáků získalo 5 bodů, 5 žáků 5 bodů, 4 žáci 4 body a 5 žáků 3 body. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 80%.

Chyby, které se objevovaly v testu – někdo našel i cesty navíc, neboť šel i vlevo a nahoru, někdo nenašel všechny cesty, neboť neprocházel systematicky město uličku po uličce dle pokynů a několik žáků používalo pouze pero při zakreslování cest, proto nebyli schopni dopočítat se správného výsledku.

Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 24: Výstupní test, cvičení 1 - řešení žákyně 3.A 5 barvami – 5 řešení

2. Ředitel ZOO v Liberci se rozhodl, že sežene nová zvířátka do svých výběhů. Nabídku měl z těchto zvířat: slon, žirafa, nosorožec, lev a želva. Mohl však vybrat pouze tři z nich, více místa v ZOO neměl. Najdi všechny možné varianty trojic zvířat, které mohl ředitel vybrat.

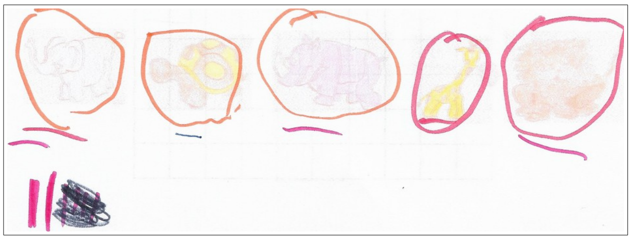
V této úloze bylo možné získat max. 10 bodů. Za každou správnou odpověď 1 bod..

Ve 3. A získali 2 žáci 10 bodů, 1 žák 7 bodů, 3 žáci 6 bodů, 1 žák 5 bodů, 1 žák 4 body, 2 žáci 3 body, 4 žáci 1 bod a 9 žáků 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 28%.

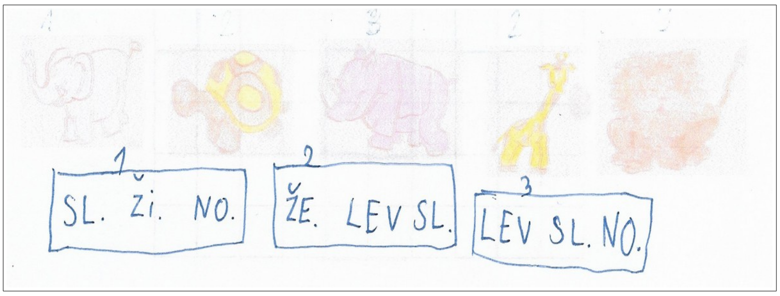
Ve 3.B získalo 5 žáků 10 bodů, 4 žáci 9 bodů, 1 žák 8 bodů, 3 žáci 7 bodů, 3 žáci 6 bodů, 1 žák 5 bodů, 1 žák 4 body a 6 žáků 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 62%.

Chyby, které se objevovaly v testu – nesystematický zápis trojic, někteří vůbec nepochopili zadání a sestavovali dvojice, možná i nepozorně četli.

Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 25: Výstupní test, cvičení 2 - nesprávné řešení žákyně 3.A



Ilustrace 26: Výstupní test, cvičení 2 – nesystematické nesprávné řešení žáka 3.B

3. Kolika různými způsoby můžeš přečíst slovo lusk?

V této úloze bylo možné získat max. 10 bodů. Za každou správnou odpověď 1 bod.

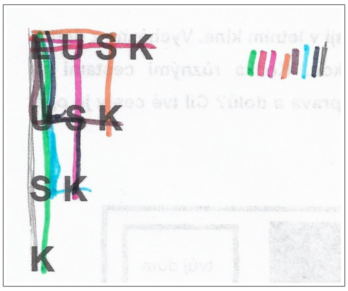
V této úloze bylo možné získat max. 8 bodů. Za každý nalezený způsob přečtení 1 bod.

Ve 3. A získalo 8 žáků 8 bodů, 4 žáci 7 bodů, 9 žáků 6 bodů, 1 žák 4 body a 1 žák 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 65%.

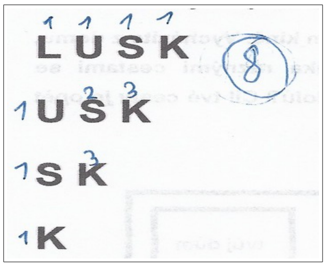
Ve 3.B získalo 10 žáků 8 bodů,5 žáků 7 bodů, 4 žáci 6 bodů, 2 žáci 4 body a 2 žáci 2 body. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 66%.

Chyby, které se objevovaly v testu – nesystematické vyhledávání slov, neznalost kombinatorického pravidla součtu – ti, co měli plný počet bodů, často využili toto pravidlo, dále pak měli žáci zmatek v použitých barvách.

Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 27: Výstupní test, cvičení 3 - správné řešení žákyně 3.A 8 barvami – 8 možností



Ilustrace 28: Výstupní test, cvičení 4 - správné řešení žáka 3.B pomocí komb. pravidla součtu – 8 možností

4. Hledej cestičku podle návodu a zakroužkuj, k jaké dobrotě dojde lev.

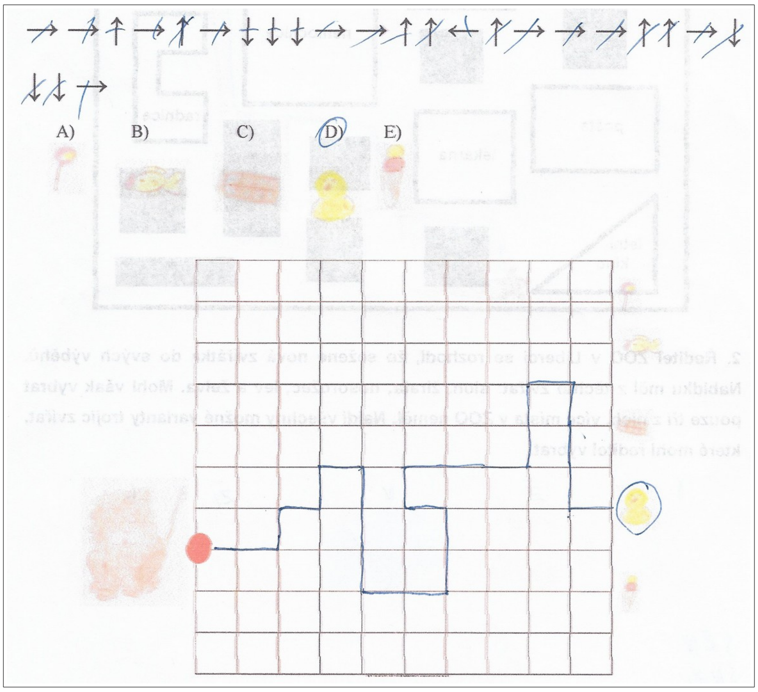
V této úloze bylo možné získat max. 1 bod za vyřešenou úlohu.

Ve 3. A se úloha nepovedla 2 žákům. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 91%.

Ve 3.B byl 1 žák, který nezískal 1 bod. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 95%.

Chyby, které se objevovaly v testu – nepochopení zadání.

Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 29: Výstupní test, cvičení 4 - správné řešení žáka 3.A

5. Tvoje tetička Ti darovala k narozeninám krásné nové kolo, ale s tetou to nikdy nebylo jednoduché, proto si i tentokrát pro tebe připravila úkol, za který kolo dostaneš. Přivázala kolo k lampě před vaším domem a dala na něj zámek. Kód zámku se musí skládat pouze z číslic 1 a 3 a číslice se mohou v kódu opakovat. Kolik kódů musíš vyzkoušet zadat, abys měl jistotu, že kolo bude tvoje?

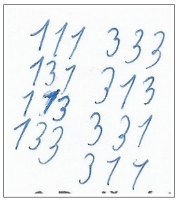
V této úloze bylo možné získat max. 8 bodů. Za každý správně nalezený kód 1 bod.

Ve 3. A získalo 9 žáků 8 bodů, 2 žáci 7 bodů, 6 žáků 6 bodů, 1 žák 5 bodů, 2 žáci 3 body s 3 žáci 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 72%

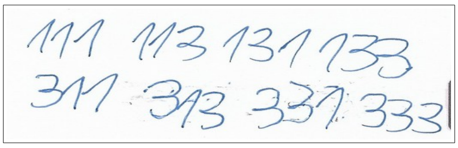
Ve 3.B získalo 12 žáků 8 bodů, 3 žáci 7 bodů, 4 žáci 6 bodů, 2 žáci 5 bodů a 2 žáci 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 79%

Chyby, které se objevovaly v testu – nesystematický zápis kódů, nepochopení úlohy, zapsání stejného kódu vícekrát nebo skládání kódů z jiných číslic.

Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 30: Výstupní test, cvičení 5 – správné systematické řešení žákyně 3.A - 8 kombinací



Ilustrace 31: Výstupní test, cvičení 5 – správné systematické řešení žáka 3.B - 8 kombinací

6. Doplň místo písmen číslice 0 až 9 tak, aby příklady níže byly správně vypočítané.

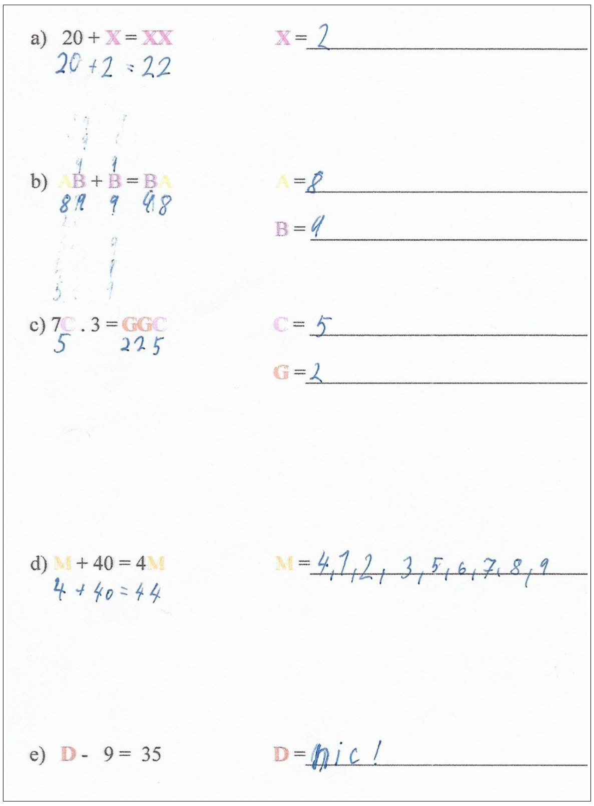
V této úloze bylo možné získat max. 14 bodů, za každé správné řešení 1 bod.

Ve 3. A získali 2 žáci 14 bodů, 2 žáci 11 bodů, 3 žáci bodů, 1 žák 6 bodů, 2 žáci 5 bodů, 4 žáci 3 body, 3 žáci 2 body, 1 žák 1 bod a 5 žáků 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 35%.

Ve 3. B získali 3 žáci 14 bodů, 1 žák 13 bodů, 4 žáci 12 bodů, 1 žák 10 bodů, 5 žáků 9 bodů, 1 žák 7 bodů, 4 žáci 6 bodů, 1 žák 2 body a 3 žáci 0 bodů. Celková úspěšnost třídy byla průměrně 60%.

Chyby, které se objevovaly v testu – nestrategické dosazování číslic, nevyzkoušení dosazování. V mnoha případech také nelze identifikovat postup, neboť žáci používají gumovací pera a pokud dosadili špatnou číslici, vygumovali pokus a pracovali dál.

Ukázka řešení žáků:



Ilustrace 32: Výstupní test, cvičení 6 - správné řešení žákyně 3.A – metoda dosazování číslic (gumování již dosazených)

3.4.7 Celkové hodnocení testů

Vstupní test byl žákům předložen kvůli ověření jejich dosavadních dovedností řešit hlavolamy a výstupní test měl ověřit, zda se tyto dovednosti nějak rozvinuly a zlepšily díky procvičování úloh.

Pokud budeme diskutovat úspěšnost v nalezení správné strategie při řešení hlavolamů, což odpovídá předpokladu P1 dle kapitoly 3.2, dle výsledků testů se v obou třídách žáci zlepšili. Procentuálně se jedná o 11% ve 3.A a o 12% ve 3.B. Jelikož jsem měla možnost s žáky 3.A procvičovat úlohy pouze tři vyučovací hodiny, kdy každá jedna hodina byla tématicky zaměřená, považuji zlepšení za velký úspěch. Popis průběhu jednotlivých hodin ve 3.A je v kapitolách 3.4.3, 3.4.4 a 3.4.5. Ve 3.B byly úlohy procvičovány s jejich paní učitelkou Mgr. Ivou Svobodovou průběžně během

6 různých hodin matematiky. V případe algebrogramů zadala paní učitelka některé z nich jako domácí úkol a další den rozebírali společně řešení a strategie. Ostatní úlohy byly řešeny výhradně ve škole. Aby paní učitelka zvolila stejnou metodiku řešení, vždy, když jsem odučila hodinu ve 3.A, jsem se s ní o přestávce sešla a vysvětlila jsem jí, jak jsem s žáky pracovala a jak jsem jim látku vysvětlovala. Předala jsem jí i kopii přípravy a pomůcky jako nastříhané panáčky apod. Dle výpovědi paní učitelky pomůcky používala a to i včetně prezentace vytvořené k hodině orientace v rovině. Pouze nastříhané čtverečky nebyly potřeba, neboť žáci 3.B mají v lavicích dostatečné množství barevných víček od PET lahví.

Procvičování úloh vedlo tedy ke zlepšení výsledků u slabších i lepších žáků, což potvrzuje zlepšení výsledků v obou odlišných třídách bez ohledu na vyučujícího, který vedl následně hodiny.

Pokud bych se měla vyjádřit k úspěšnosti v jednotlivých úlohách, tak u některých úloh došlo k blízkému vyrovnání úspěšnosti (slovní hříčka), někde došlo k výraznému posunu u slabší třídy (3.A) a to především opět u slovní hříčky, naopak u silnější třídy zde úspěšnost poklesla. Velice zajímavé je, že ve slabší třídě došlo k posunu u všech úloh, avšak ve 3.B výsledky posklesly u bludiště, slovní hříčky a kombinací (viz tabulka č. 3) V algebrogramech se zlepšily obě třídy a potvrdily tak předpoklad P2. Žáci se snažili hledat více možných řešení. 3.A se zlepšila o 15% a 3.B dokonce o 38%. Mnozí se opravdu snažili dále dosazovat číslice, i když již jedno řešení nalezli. Někteří žáci používali gumovací pera, postup tedy smazali a nebylo možné ho analyzovat.

V bludišti a hlavolamu se slovem „lusk“ také hledali více možností, a protože slovo mělo stejně písmen a řešení jako slovo ve vstupním testu, je velice snadné porovnání. Zde se 3.A zlepšila o 21%, 3.B se naopak zhoršila o 6%. Nevím ale, jak moc paní učitelka žákům vysvětlila kombinatorické pravidlo součtu. Použili ho pouze dva žáci 3.B, ve 3.A ho použilo žáků 14, přestože pouze 7 z nich ho použilo správně. Zhoršení ve 3.B tedy mohlo nastat díky neporozumění kombinatorickému pravidlu součtu, možná nepozorností nebo nepečlivostí.

Celkově však nastalo zlepšení v řešení hlavolamů procvičujících orientaci v rovině s více možnostmi řešení. V hodinách dělaly tyto úlohy žákům 3.A problémy, ve výstupním testu si s nimi však dobře poradili. Dle výpovědi paní učitelky na tom byla 3.B stejně. Kombinatorická úloha, kde se vybíraly z pěti prvků tři, již nedopadla tak dobře jako ostatní, ale podobná úloha s určováním číselných kombinací dopadla velice dobře a žáci se zlepšili i v řešení algebrogramů. Uvažuji li nad tím, proč pro žáky byla složitá úloha, kde měli z pěti prvků vybírat tři, bylo to nejspíš kvůli tomu, že si situaci nedokázali dobře představit a nedokázali použít správnou strategii – označení zvířat a tvoření skupin po třech tak, aby se stejné skupinky neopakovaly.

Důležitá je také úvaha nad důvody zhoršení třídy 3.B v některých úlohách. Jsou jimi bludiště, slovní hříčka a kombinace. Můžeme se domnívat, že to bylo např. jiným přístupem vyučujícího, nepochopením úloh ze strany žáků, nepřesným vysvětlením možných strategií řešení, ale např. i nějakým vnějším faktorem, který se mohl ve třídě objevit a mohl tak žáky vyrušit z koncentrace. Žáci se také mohli snažit méně pod vedením svojí paní učitelky, když věděli, že za výsledek nedostanou známku, nebyli tak dostatečně motivováni. Možná je ani samotné procvičování nebavilo, a tak je nemotivovalo k dostatečné soustředěnosti během výstupního testu.

Je škoda, že paní učitelka nevyužila diktafon během procvičování hlavolamů, neboť bych mohla výuku analyzovat přesněji. Sama jsem ho použila, když jsem sepisovala průběh jednotlivých hodin, neboť bych si těžko pamatovala všechny otázky žáků a časovou dotaci jednotlivých úloh. Diktafon mi také pomohl v tom, že nyní vím, zda na žáky mluvím zřetelně (dle mého názoru ano) nebo jakou mluvu používám (přistihla jsem se, že ne vždy mluvím spisovně).

Shrnutí úspěšnosti je v tabulce níže, musím však ještě upřesnit typy úloh v tabulce a jejich čísla v testech.

Úlohy, které jsem pojmenovala Orientace v rovině, jsou ve vstupním testu úloha č. 1 a ve výstupním testu úloha č. 4, bližší charakteristika v kapitole 1.6 / a.

Úlohy pojmenované Bludiště jsou ve vstupním testu úloha č. 4 a ve výstupním testu úloha č. 1, bližší charakteristika v kapitole 1.6 / d.

Slovní hříčka jsou úlohy se slovem KRUH a LUSK, tedy ve vstupním i výstupním testu č. 3. , bližší charakteristika v kapitole 1.6 / d.

Úlohy nazvané kombinace jsou takové, kde bylo nutné hledat kombinace bez opakování, ve vstupním i výstupním testu se jednalo o úlohy č. 2. Bližší charakteristika v kapitole 1.6 / b..

Variace jsou úlohy, kde se hledají možnosti s využitím variací bez nebo s opakováním a to ve vstupním i výstupním testu ve cvičení č. 5. Bližší charakteristika v kapitole 1.6 / b.

Algebrogramy jsou zařazeny jako poslední 6. úloha v obou testech. Bližší charakteristika v kapitole 1.6 / c.

V tabulce jsou barevně označena procenta, která označují zlepšení.

Tabulka 3: Porovnání úspěšnosti vstupního a výstupního testu

	3.A		3.B	
Typ úlohy	Vstupní test	Výstupní test	Vstupní test	Výstupní test
Orientace v rovině	87%	91%	80%	95%
Bludiště	70%	75%	83%	80%
Slovní hříčka	44%	65%	72%	66%
Kombinace	20%	28%	70%	62%
Variace	70%	72%	76%	79%
Algebrogramy	20%	35%	22%	60%

3.5 Ověření předpokladů

Na počátku diplomové práce byly stanoveny tři předpoklady. K jejich ověření jsem využila tyto metody:

- dotazník
- pozorování řešitelských strategií během výuky
- analýza vstupního a výstupního testu a jejich porovnání
- analýza nahrávky z výuky

Podrobné zpracování výsledků dotazníků, vstupního a výstupního testu a popis vyučovacích hodin je obsažen v předchozích kapitolách. V rámci analýzy testů jsem se zaměřila na sledování jevů, které podporují stanovené předpoklady. V kapitole 3.4.7 jsou pak shrnuty informace z obou testů a jsou zde uvedeny i odkazy a informace k podpoře či vyvrácení předpokladů. V této kapitole pouze stručně shrnu informace, které se předpokladů týkají.

P1: Využívání hlavolamů vede k rozvoji řešitelských strategií žáků, což se projeví větší úspěšností v řešení úloh

Dle výsledků testů, které jsou podrobněji probrány v kapitolách 3.3.2, 3.4.6 a 3.4.7 byl předpoklad ověřen a potvrzen ve 3.A a ve 3.B s odchylkami.

Celková průměrná úspěšnost žáků obou tříd ve výstupním testu narostla a byly využívány strategie procvičené v hodinách v obou třídách. Pokud bychom rozebírali každý typ úlohy zvlášť, došlo ve 3.A ke zlepšení ve všech oblastech, ve 3.B pouze ve třech viz Tabulka 3. Možné důvody poklesu úspěšnosti ve 3.B jsou zváženy v kapitole 3.4.7.

Pro žáky jsou nejpřijatelnější strategie, při kterých jsou využívány barvy, řešení je tak pro ně přehledné a srozumitelnější. To především v úlohách testujících orientaci v rovině. Při řešení úloh, kde je nutné využít variace a kombinace, žáci nejvíce využívali výpis prvků, diagram nebo tabulku.

Nejvíce problematické pro žáky byly úlohy kombinatorické a to takové, kde měli z pěti prvků vybrat pouze různé kombinace třech prvků a to bez opakování. Potvrzuje to tedy také předpoklad P1, avšak v negativním obraze, neboť hlavolam takového typu nebyl s žáky dostatečně procvičen, a proto nebyly dostatečně rozvinuty strategie řešení a nenastala tak větší úspěšnost a to hlavně ve 3.B. Ve 3.A byly žáci úspěšnější než při řešení podobné úlohy ve vstupním testu, avšak celková úspěšnost byla stále velice nízká.

P1a: Cíleně vybrané úlohy podpoří rozvoj kombinačních schopností žáků při řešení nestandardních úloh

Tento předpoklad se nejvíce potvrdil při řešení algebrogramů a to v obou třídách, kde došlo k výraznému zlepšení a to hlavně díky tomu, že se žáci naučili zkoušet dosazovat další číslici, i když již našli jedno správné řešení. Stejně tak se žáci zlepšili v obou třídách při řešení úloh s variacemi a to i přesto, že ve vstupním testu byla úloha snadnější. Úloha s kombinacemi pro žáky 3.A dopadla ve výstupním testu lépe. Došlo tedy ke zlepšení a potvrdil se předpoklad. Úlohy tohoto typu by však bylo potřeba procvičit více, neboť i přes zlepšení byla úspěšnost velice nízká. Zároveň však 3.B předpoklad vyvrací, neboť se zhoršila, i když jen o malá procento. Možné důvody jsou uvedeny v kapitole 3.4.7.

P2: Využití hlavolamů s kombinatorickými prvky orientace v rovině vede k rozvoji prostorové představivosti a volby správné strategie k nalezení všech řešení

Kombinatorické pravidlo součtu bylo procvičeno pouze v souvislosti se slovními hříčkami, zde ho také žáci použili ve výstupním testu, avšak ne příliš často. Spíš se spoléhali na experiment. Třída 3.A se však zlepšila v řešení úlohy, kde je možné užít kombinatorické pravidlo součtu, i když správně ho použilo pouze 7 žáků. I to však považuji za úspěch, neboť jsem procvičování věnovala pouze 20 minut. V kontrolní třídě 3.B se předpoklad nepotvrdil. Jen málo žáků využilo kombinatorické pravidlo součtu. Možná bylo paní učitelkou vysvětleno složitě nebo nebyl kladen důraz na výhodu jeho použití a nebylo následně dostatečně procvičeno. Možná byli žáci něčím při vysvětlování rozptýleni nebo aktivita probíhala již na konci hodiny a žáci mysleli na něco jiného.

Shrnutí:

Ve třídě, kde jsem se účastnila na všech částech experimentu sama, byly předpoklady potvrzeny. V kontrolní třídě, kde vyučovala třídní učitelka Mgr. Iva Svobodová předpoklady zcela potvrzeny nebyly a to i přesto, že jsem s paní učitelkou probrala metodiku procvičení jednotlivých hlavolamů a předala jsem jí i potřebné názorné pomůcky. Úvaha nad možnými důvody neúspěchu třídy 3.B v některých hlavolamech v kapitole 3.4.7.

ZÁVĚR

V teoretické části diplomové práce jsem se zaměřila na definici logického myšlení, zařazování úloh na jeho rozvoj do výuky na základně nařízení Rámcového vzdělávacího programu pro ZV, dále jsem popsala typologii hlavolamů a konkretizovala ty, které jsem využila k rozvoji logického myšlení v diplomové práci. Také jsem definovala základní pojmy spojené s využitými hlavolamy.

Již zjišťování informací pro teoretickou část diplomové práce mi mnoho dalo, neboť jsem do té doby netušila, kolik různých hlavolamů je, že jsou dostupné publikace s nimi, a dokonce se dají najít i takové, které jsou přímo určené pro děti. Inspirovalo mě to k pořízení některých takových publikací domů, protože je využiji v praxi a to jak pro žáky již od prvního ročníku, tak pro moje vlastní děti. Také jsem se donutila více zapřemýšlet nad Rámcovým vzdělávacím programem a lépe jsem porozuměla stanoveným cílům, kterých bychom měli dosáhnout během vzdělávání žáků.

Na experimentu s žáky pro mě byla nejtěžší samotná příprava. Tvorba vstupního a výstupního testu tak, aby znění úloh bylo pro všechny žáky jednoznačné a srozumitelné, a aby úlohy souvisely se stanovenými předpoklady, mě velice potrápilo, ale uvědomila jsem si, že bych měla jako pedagog být opravdu v budoucnosti svědomitá při přípravě vlastních úloh, neboť kvůli nejednoznačnému zadání může docházet ke zbytečným chybám a nedorozuměním.

Nejvíce mě bavilo tvořit úlohy do pracovních listů. Mohla jsem využít svoji fantazii a vytvořit i vlastní obrázky k úlohám. Oproti tvorbě testu však úlohy neměly tak zavazující charakter a byla jsem klidnější a uvolněnější. Při výrobě pomůcek do hodin matematiky a při kontaktu se žáky, jsem si také zavzpomínala na vyučování mojí první třídy, pro kterou jsem téměř každý večer doma něco nového vyráběla a trávila jsem s nimi mnoho času i mimo vyučování a uvědomila jsem si, že jsem opravdu vděčná za tuto práci, a že se nebojím se po rodičovské dovolené vrátit zase zpátky do školy. Roky studia tak nebyly zbytečné a jako jedna z mála lidí mám výhodu, že mě moje práce baví a dává mi smysl. Jako největší bonus bylo závěrečné zjištění po vyhodnocení výsledků, že opravdu má smysl s žáky systematicky pracovat, neboť se mohou zlepšit i ti nejhorší.

Do praxe si tedy odnáším zkušenost, že si musím pořádně promyslet cíl pro určitou hodinu a musím připravit aktivity tak, aby byly opravdu efektivní, žáky motivovaly, bavily, byly něčím jiné, ale přesto je naučily mnoho dovedností a hlavně aby mi opravdu pomohly dosáhnout stanoveného cíle. Také jsem se naučila, že když už něco dělám, má smysl si také ověřit, zda to dělám dobře a musím umět zareagovat a popřemýšlet o možných chybách z mojí strany, pokud žáci látku neumí tak dobře, jak by měli. Také jsem si uvědomila, že není tak jednoduché analyzovat výsledky žáků. Zajímavé bylo i slyšet celé tři vyučovací hodiny nahrané na diktafonu. Slyšet vlastní hlas, uvědomit si svoje reakce na dotazy a používanou mluvu, je více než poučné.

Díky zvolenému tématu jsem přišla na dobrý způsob, jak trávit volný čas, když není zrovna nejlepší počasí. Řešení hlavolamů mě začalo velice bavit a strhla jsem pro tuto zábavu i většinu mojí rodiny. Vrátila jsem se zpátky i k Rubikově kostce, která mě přestala bavit během základní školy, protože její skládání pro mě bylo už velice jednoduché. Nyní u skládání občas relaxuji. Objevuji také stále nové a nové hlavolamy, vzniká jich velké množství. Jsem rozhodnuta žít s hlavolamy dál a rozmnožovat svoji zkušenost s nimi tak, abych ji mohla předat svojí vlastní rodině, ale i žákům a pomohla jim tak rozvíjet jejich dovednosti v mnoha oblastech logického myšlení, ale i motoriky.

Zdroje

CALDA, E., DUPAČ, V., 2010. Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. 5. vydání. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-365-3

DUDENEY, H. E., 1995. Matematické hlavolamy. 1. vydání. Praha: Olympia. ISBN 80-7033-380-4

GARDNER M., 1994. My best mathematical and logic puzzles. 1. vydání. United States: Dover. ISBN 978-0-486-28152-0

GARLOCK, D. C., 2015. The greatest brainteasers of All time. 1. vydání. United States: Millcity press. ISBN: 978-1-63413-476-6

HART-DAVIS, A., 2006. Lišácké hádanky a hlavolamy. 1. vydání. Praha: Portál. ISBN 80-7367-132-8

HEJNÝ, M. 2014. Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně. 1. vydání. Univerzita Karlova v Praze. ISBN 978-80-7290-776-2

LANGMEIER, J., KREJČÍŘOVÁ, D., 2006. Vývojová psychologie. 2. vydání. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-1284-0

MAČÁK, K., 1999. Poznámky k formování kombinatoriky v 16. a 17. století . Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-150-7

MOČALOV, L. P., 1980. Hlavolamy. 1. vydání. Praha: Mladá fronta.

NAKONEČNÝ, M., 1997. Encyklopedie obecné psychologie, 1. vydání Praha: Academia. ISBN 80-200-0625-7

PIAGET, J., 1997. Psychologie dítěte. 2. vydání. Praha: Portál. ISBN 80-7178-146-0

PIAGET, J., 1970. Psychologie inteligence. 2. vydání. Praha: SPN. ISBN 14-053-70

POSPÍŠILOVÁ, Z., 2006. Hádanky a hříčky nejen se slovíčky. 1. vydání. Praha: Portál. ISBN 80-7367-070-4

PŘÍHONSKÁ, J.: Matematické hry a hlavolamy jako prostředek k rozvoji prostorové představivosti. In: Sborník z mezinárodní konference Experience in Further Education of Teachers in Mathematics, Ostravská univerzita, Ostrava 2008.

RIEDLEROVÁ, I., 2001. Hádanky a hlavolamy pro rozvoj myšlení děti. 1. vydání. Praha: Portál. ISBN 80-7178-458-3

ROUGIER, R., 1997. Rozvíjíme logické myšlení. 1. vydání. Praha: Portál. ISBN 80-7178-101-0

VEJMOLA, S., 2007. Jak vyrobit a vyřešit hlavolamy. 1. vydání. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-2013-5

VILENKIN, J. N., 1977. Kombinatorika. 1. vydání. Praha: SNTL

VOŠICKÝ, Z., LANK, V., VODNR, M., 2007. Matematika v kostce. 1. vydání. Praha: Fragment. ISBN 978-80-253-0523-2

VRBA, A., 1980. Kombinatorika. 1. vydání. Praha: Mladá fronta.

Internetové zdroje:

Faktoriál — Matematika.cz. Matematika pro střední a základní školy - Matematika.cz [online]. Copyright © 2006 [cit. 23.05.2019]. Dostupné z: https://matematika.cz/faktorial

HISTORIE HLAVOLAMŮ | GeniusLogicus. Genius Logicus [online]. Copyright © [cit. 23.05.2019]. Dostupné z: https://www.geniuslogicus.eu/cz/souteze-pro-skoly/1383/

Kombinatorika a pravděpodobnost. Krajská matematická soutěžek [online]. Copyright © 2014 [cit. 22.05.2019]. Dostupné z:https://michalheczko.cz/kombinatorika/lekce.php?s=k&l=09

Mensa České republiky. Mensa České republiky [online]. Dostupné z: http://www.mensa.cz/volny-cas/hlavolamy/ [online]. Copyright © [cit. 27.05.2019].

Možná řešení Hanojské věže • Mozkolam.cz. Mozkolam.cz • Slovní i vizuální hlavolamy, rébusy, hádanky... [online]. Copyright © Mozkolam.cz [cit. 22.05.2019]. Dostupné z: http://mozkolam.cz/mechanicke-hlavolamy/mozna-reseni-hanojske-veze/

[online]. Copyright © [cit. 05.06.2019]. Dostupné z: https://kmd.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/prihonska-mat_pro_praxi1/KOMBINATORIKA-prez.pdf

Originální hlavolam Čínské kroužky. Zažeň nudu [online]. Copyright © Copyright 2015 [cit. 23.05.2019]. Dostupné z: https://www.zazen-nudu.cz/kovovy-hlavolam-cinske-krouzky

Přesouvací hlavolam | Knihy Dobrovský. Knihy Dobrovský | Dobré příběhy za dobré ceny [online]. Copyright © 2001 [cit. 22.05.2019]. Dostupné z: https://www.knihydobrovsky.cz/presouvaci-hlavolam-102991478

RVP ZV_2017_červen.pdf, MŠMT ČR. MŠMT ČR [online]. Copyright ©2013 [cit. 13.05.2019]. Dostupné z:http://www.msmt.cz/file/43792/

Polyomino - Wikipedia. [online]. Dostupne z: https://en.wikipedia.org/wiki/Polyomino

Simira - Hlavolam drátovaný srdcový - misulka x. Originální česká výroba | Simira handmade obchod [online]. Copyright © 2011 [cit. 22.05.2019]. Dostupné z: https://www.simira.cz/dratovani/hlavolam-dratovany-srdcovy-hlavolam-hlava-na-hlavu-dratovan-265726

Single Black Domino - Game Dominoes - Metal Lapel Hat Pin Tie Tack Pinback |eBay. Electronics, Cars, Fashion, Collectibles, Coupons and More | eBay [online].Copyright c 1995 [cit. 22.05.2019]. Dostupne z: https://www.ebay.com/itm/Single-Black-Domino-Game-Dominoes-Metal-Lapel-Hat-Pin-Tie-Tack-Pinback-/231267063400

Tangramy | Táborová inspirace. Táborová inspirace [online]. Dostupné z: http://taborovky.blog.cz/1601/tangramy

Základní školy - Jablonec nad Nisou. Jablonec nad Nisou [online]. Copyright © 2000 [cit. 01.06.2019]. Dostupné z: https://www.mestojablonec.cz/cs/vzdelavani/skoly/zakladni-skoly.html

Základní školy - Statutární město Liberec. [online]. Copyright © [cit. 01.06.2019]. Dostupné z: https://www.liberec.cz/cz/prakticke-informace/vzdelani/zakladni-skoly/

Seznam příloh

Seznam elektronických příloh

Příloha 1 - Vzorové řešení pracovního listu Kombinace, variace permutace, 3. ročník

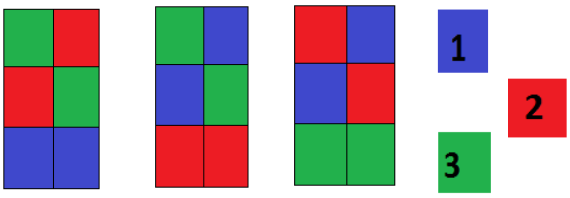
1. Máš tři kostky, jednu modrou, jednu červenou a jednu zelenou. Jakými způsoby můžeš na sebe kostky postavit do komínu?

Správné řešení:

a)

Z Č	Z M	Č M	3 2	3 1	2 1
Č Z	M Z	M Č	2 3	1 3	1 2
M M	Č Č	Z Z	1 1	2 2	3 3

b)



c) Variace bez opakování:

$$V(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V(3,3)=\frac{3!}{(0!)}=\frac{3.2.1}{0!}=6$$

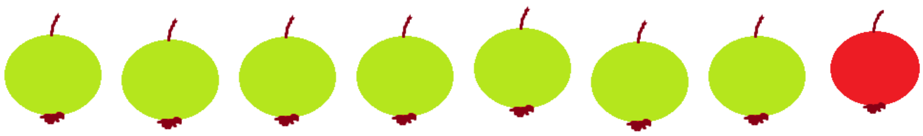
d) Permutace bez opakování:

$$P(n)=n!$$

$$P(3)=3!=3.2.1=6$$

Úloha má celkem 6 správných řešení.

2. Na stole leží 7 zelených a 1 červené jablko. Všechna vložíme do jedné tašky. Chceme vytáhnout jablko červené. Kolik jablek musíme z tašky vyndat, abychom si byli jistí, že budeme mít právě to červené?



Správné řešení:

Žáci musí na výsledek přijít buď logickým uvážením nebo pomocí experimentu, který si nejprve vyzkouší sami a poté vyzkoušíme společně.

Musíme z tašky vytáhnout všech 8 jablek, abychom měli jistotu, že budeme mít i červené.

3. V družině zbyli odpoledne 4 poslední žáci. Tomáš, Petr, Mařenka a Lenka. Jakými způsoby si mohou spolu sednout do lavic? Kdo s kým bude sedět?

Správné řešení:

a) Tomáš a Petr + Mařenka a Lenka a platí i výměna stran žáků tedy Mařenka a Lenka + Tomáš a Petr

Tomáš a Petr + Lenka a Mařenka + 2. možnost viz výše

Petr a Tomáš + Mařenka a Lenka + 2. možnost viz výše

Petr a Tomáš + Lenka a Mařenka + 2. možnost viz výše

Tomáš a Lenka + Petr a Mařenka + 2. možnost viz výše

Tomáš a Lenka + Mařenka a Petr + 2. možnost viz výše

Lenka a Tomáš + Mařenka a Petr + 2. možnost viz výše

Lenka a Tomáš + Petr a Mařenka + 2. možnost viz výše

Tomáš a Mařenka + Lenka a Petr + 2. možnost viz výše

Tomáš a Mařenka + Petr a Lenka + 2. možnost viz výše

Mařenka a Tomáš + Lenka a Petr + 2. možnost viz výše

Mařenka a Tomáš + Petr a Lenka + 2. možnost viz výše

b)Variace bez opakování:

$$V(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V(4,4)=\frac{4!}{(4-4)!}=\frac{4.3.2.1}{0!}=24$$

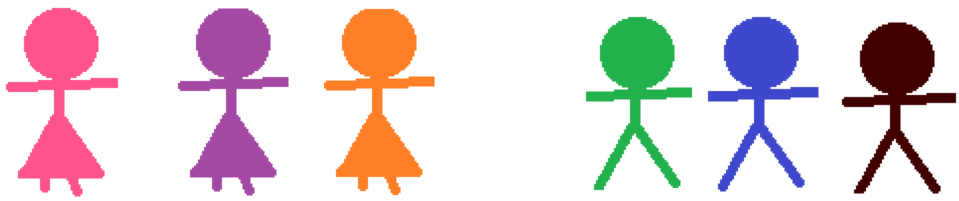
c) Permutace bez opakování

$$P(n)=n!$$

$$P(4)=4!=4.3.2.1=24$$

Celkem je tedy 24 možností, jak si žáci mohou do lavic sednout.

4. Při hudební výchově se učili žáci tančit mazurku. Ve třídě jich bylo celkem 6. Z toho 3 holky a 3 kluci. Kolik různých dvojic (vždy holka s klukem) mohou vytvořit?

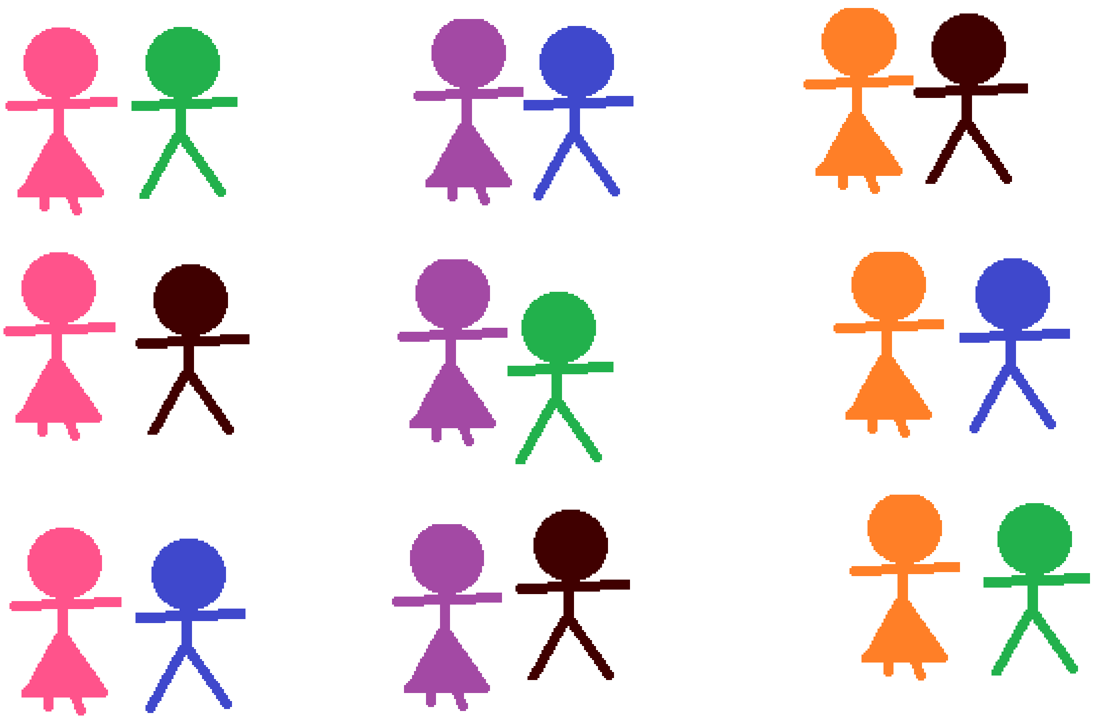


Správné řešení:

a) D1 D2 D3

CH1 CH2 CH3 CH1 CH2 CH3 CH1 CH2 CH3

b)



Můžeme vytvořit 9 různých dvojic.

Můžeme s žáky diskutovat, jak by se to dalo spočítat. Začít je možné jen se dvěma chlapci a jednou dívkou a postupně zvyšovat počty. Jsou tři dívky a tři chlapci. 3 . 3 = 9. Pokusíme se s žáky nyní řešit stejné úlohy na kombinatorické pravidlo součinu, jen měníme velikost množin. Již pouze ústně. Výsledky můžou zapisovat na mazací destičky. Ověřujeme si jejich znalost malé násobilky.

5. Kolik trojciferných čísel můžeš vytvořit z číslic 1, 2, 3? Vždy musí být použity všechny tři číslice. Nesmí se tedy opakovat.

Správné řešení:

a)

1 2 3	2 1 3	3 1 2
1 3 2	2 3 1	3 2 1

b) Variace bez opakování:

$$V(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V(3,3)=\frac{3!}{(3-3)!}=\frac{3.2.1}{0}=6$$

c) Permutace bez opakování:

$$P(n)=n!$$

$$P(3)=3!=3.2.1=6$$

Můžeme vytvořit 6 trojciferných čísel.

6. Kolik trojciferných čísel můžeš vytvořit z číslic 6, 8, 2, 3? Číslice se můžou v čísle opakovat.

Správné řešení:

a)

2 2 2	3 3 3	6 6 6	8 8 8
2 2 3	3 3 2	6 6 2	8 8 2
2 2 6	3 3 6	6 6 3	8 8 3
2 2 8	3 3 8	6 6 8	8 8 6
2 3 2	3 2 3	6 2 6	8 2 8
2 6 2	3 6 3	6 3 6	8 3 8
2 8 2	3 8 3	6 8 6	8 6 8
2 3 6	3 2 6	6 2 3	8 2 3
2 6 3	3 6 2	6 3 2	8 3 2

2 3 8	3 2 8	6 2 8	8 2 6
2 8 3	3 8 2	6 8 2	8 6 2
2 6 8	3 6 8	6 3 8	8 3 6
2 8 6	3 8 6	6 8 3	8 6 3
3 2 2	2 3 3	2 6 6	2 8 8
6 2 2	6 3 3	3 6 6	3 8 8
8 2 2	8 3 3	8 6 6	6 8 8

b) Variace s opakováním:

$V'(k,n)=n^k$ $\quad V'(3,4)=4^3=64$

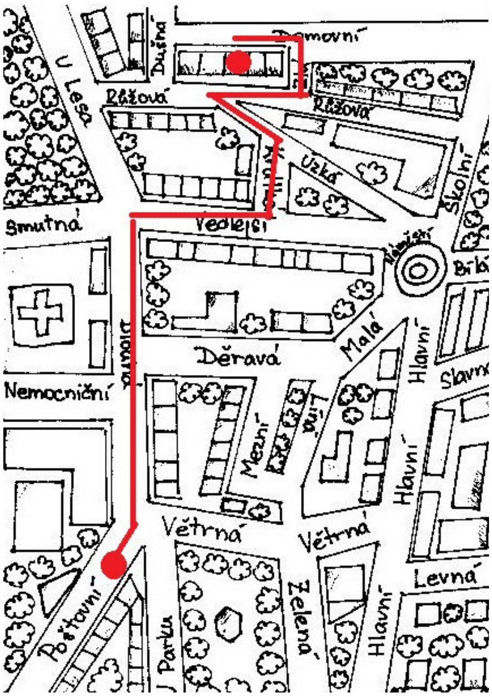
Celkem je možné vytvořit 64 trojciferných čísel.

Příloha 2 - Vzorové řešení pracovního listu

Orientace v rovině s prvky kombinatoriky, 3. ročník

1a) Kamarádka ti napsala návod, jak se k ní dostaneš od vás z domu. Nikdy jsi u ní ještě nebyl. Ty bydlíš v Poštovní ulici. (vyznačena červeným puntíkem) Na konci ulice se můžeš dát třemi směry. Ty půjdeš vlevo, poté se dáš druhou odbočkou vpravo, poté zahneš ihned doleva a na konci ulice opět doleva. Nyní odboč vpravo a ihned vlevo a opět vlevo. Kamarádka bydlí ve třetím domě od křižovatky. Udělej červený puntík v domečku, kde bydlí.

Správné řešení:

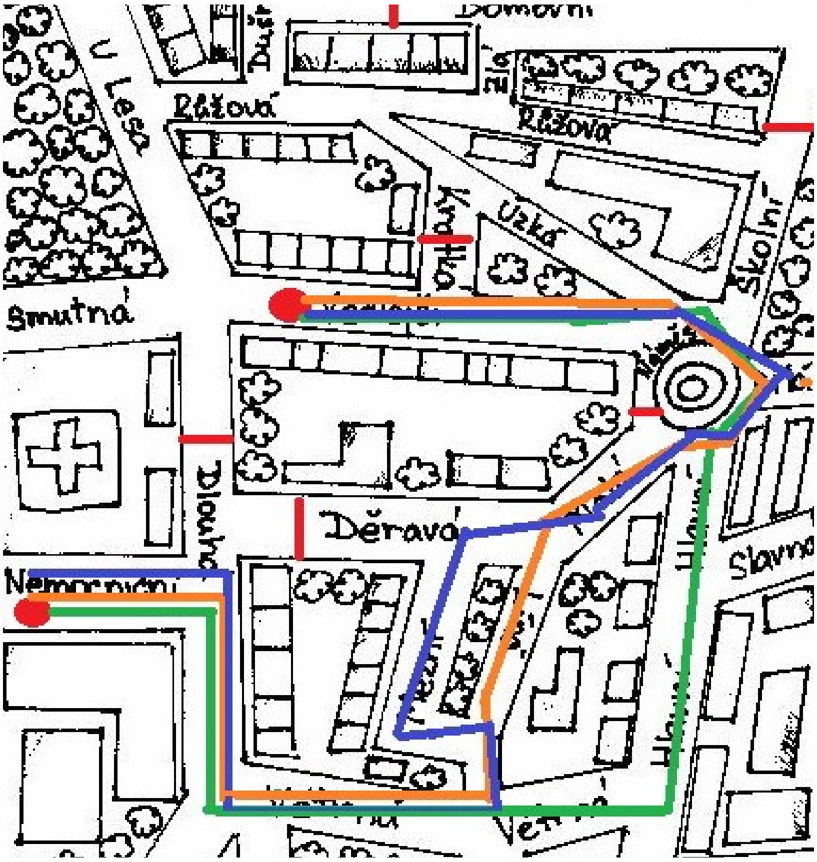


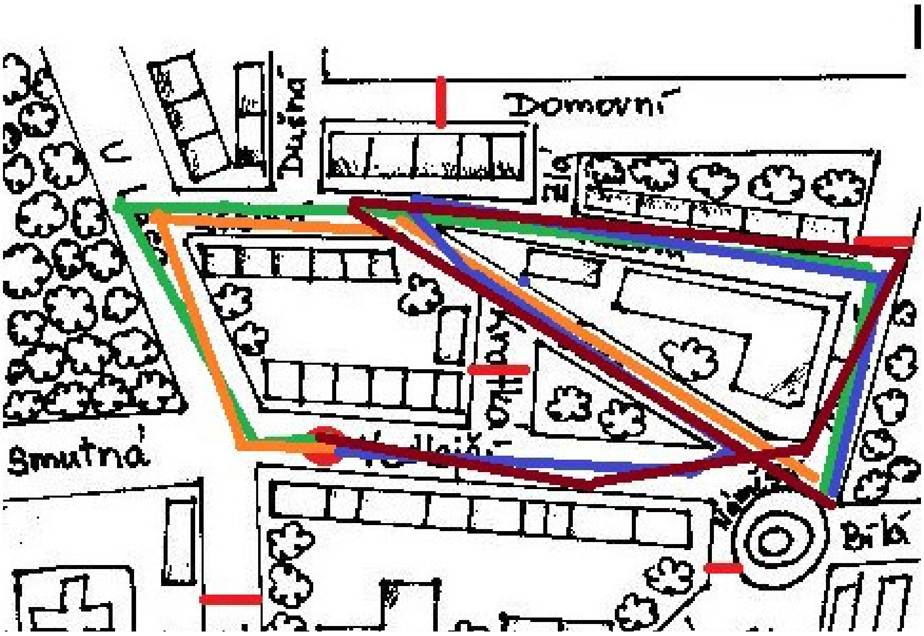
1b) Zakresli do mapky různými barvami cesty, kterými se můžeš z Nemocniční ulice dostat do ulice Vedlejší. Červené čáry jsou příkopy, přes které se nedá přejít.

Správné řešení:

K Náměstí vedou vždy tři varianty cest, přes ulici Hlavní, Línou a Mezní viz obrázek č. 1. Dále budu zobrazovat různé cesty až od Naměstí viz obrazek č. 2. Musime pak tedy všechny cesty sečíst dohromady a nezapomenout, že cesty z obrázku č. 2 musime vynásobit třemi (varianty k Naměsti). Tedy každou cestu vynásobíme třemi.

Správné řešení:

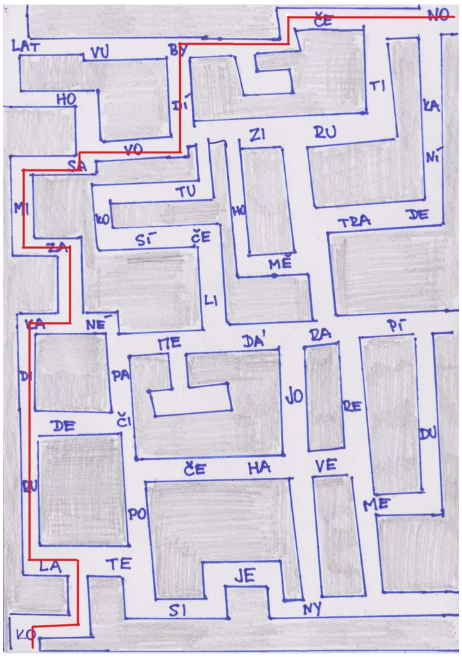




Celkem je tedy možné jít 15 cestami. Tři cesty jsou vždy možné k Náměstí a poté máme pět různých variant od Náměstí. Celkem je to tedy 3.5 = 15.

2. Jdi bludištěm podle návodu, zapiš si všechny slabiky, které cestou potkáš a nakonec se z nich pokus vytvořit co nejvíce slov. Začínáš v levém dolním rohu slabikou KO, poté odbočíš vlevo, jdeš rovně a druhou odbočkou zabočíš vpravo a hned vlevo. Další možnou odbočku zatoč vpravo, na konci cesty vlevo a opět vpravo. Nyní dojdeš až na konec ke slabice NO.

Správné řešení:



Slabiky:

KO LA RU DI KA ZA MI SA VO DI BY ČE NO

Slova (může byt více):

kola, koza, rukola, vosa, kasa, byla, ruka, kosa, kobyla, díru, vodí, ladí, lasa, vodila…

3. Kolika způsoby můžeš přečíst slovo HRNEK níže. Pohybovat se můžeš pouze doprava a dolů.

H R N E K

R N E K

N E K

E K

K

Správné řešení:

a)

b) Pascalův trojuhelnik (viz. Kapitola 1.4.1)

●1 ●1 ●1● 1 ●1 → 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16

●1 ●2 ●3 ● 4

●1 ●3 ● 6

●1 ●4

● 1

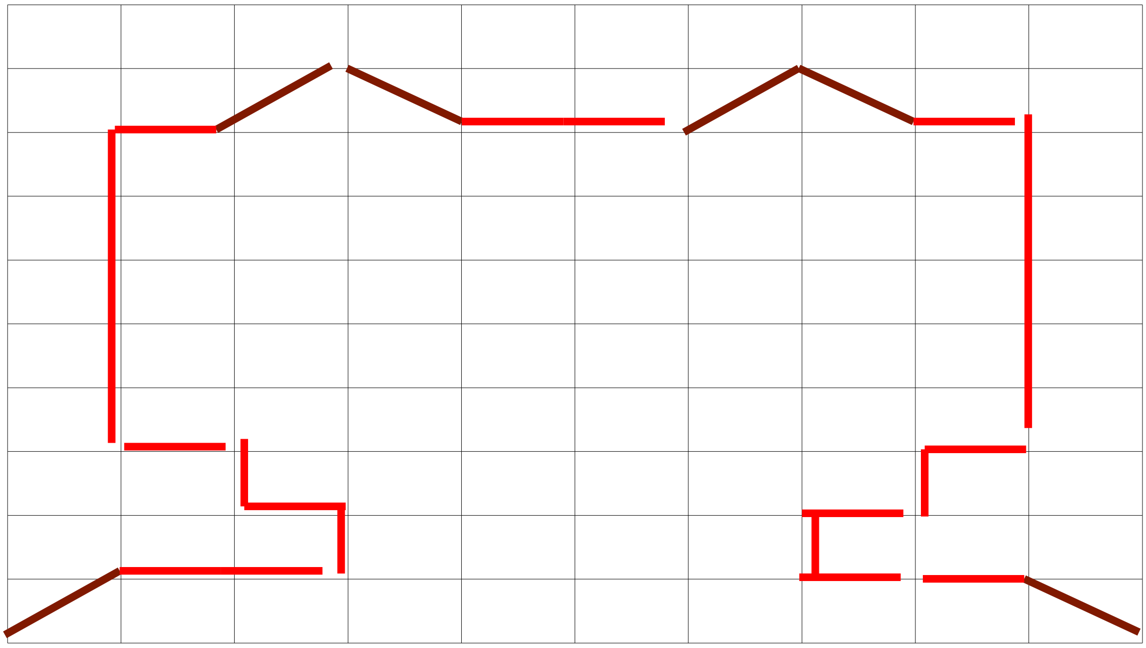
Celkem je 16 možností, jak můžeme přečíst slovo hrnek.

4. Cestuj z levého dolního rohu podle šipek (vždy pouze po čárách), uvidíš, co ti vznikne. První čáru máš předkreslenou, dokresli zbytek obrázku dle dalšího návodu. Šikmé čáry jsou již předkresleny, napoj se vždy na ně a pokračuj dále dle návodu. Až budeš hotov, dokresli zbytek obrázku podle sebe, ale jinou barvou než jsi kreslil původně.

→, →, ↑, ←, ↑, ←, ↑, ↑, ↑, ↑, ↑, →,

→, →,

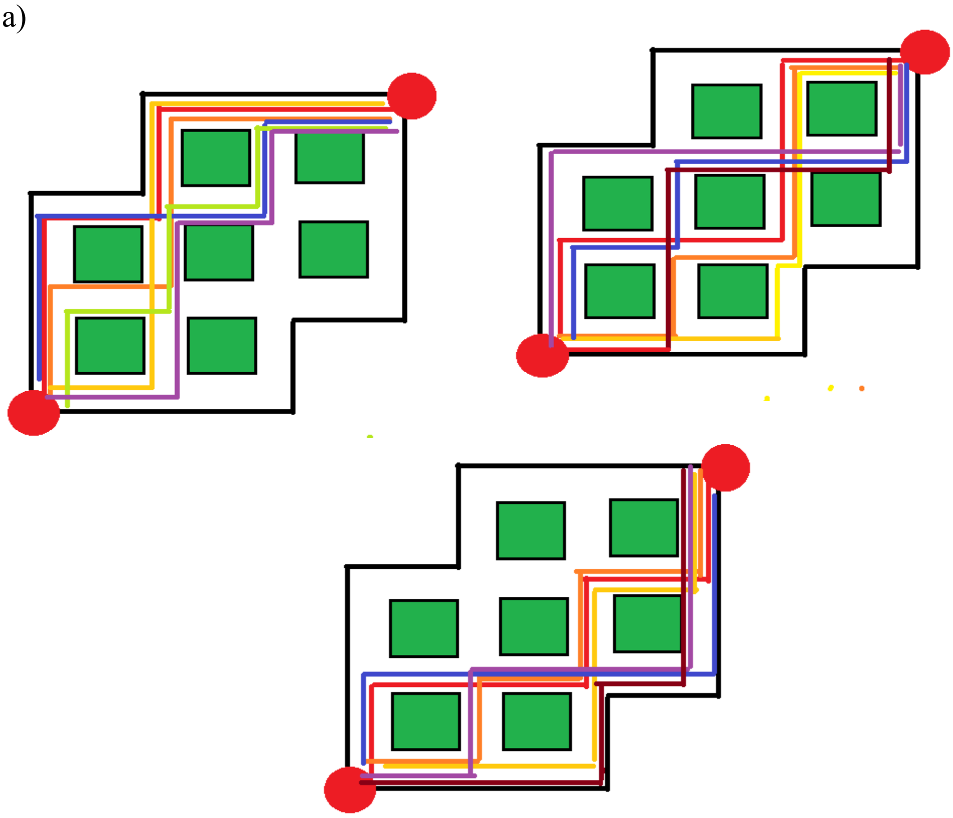
→, ↓, ↓, ↓, ↓, ↓, ←, ↓, ←, ↓, →, →



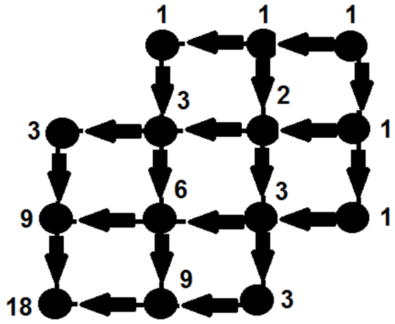
5. Prasečí rodinka měla chlívek v pravém horním rohu. Všichni se chtěli dostat ke žlabu s obědem, který je v dolním levém rohu. Žádná dvě prasátka nešla stejnou cestou a mohla jít pouze dolů a doleva. Kolik prasátek bydlí ve chlívku?

Správné řešení:

a)



b) Využití Pascalova trojúhelníku, procvičování kombinatorického pravidla součtu



Příloha 3 - Vzorové řešení pracovního listu Algebrogramy, 3. ročník

1. Zjisti, které číslo může být dosazeno za písmeno, aby byla rovnice pravdivá. Můžeš použít číslice 0-9. Příklady se jmenují algebrogramy.

Správné řešení:

a) **X + 5 = 10**

10 – 5 = 5

X = 5

b) A + A = 18

18 / 2 = 9

A = 9

c) DD + D = 72

Dosazujeme číslice dle logického uvážení. Je jasné, že pokud bude D< 6 a zároveň D>6 úloha nebude mít smysl, musíme tedy dosadit číslici 6.

D = 6

d) **50 + J = JJ**

Opět buď systematicky dosazujeme číslice od 0-9 a přijdeme na správný výsledek nebo uvažujeme, jaké číslo lze dosadit za J tak, aby platilo, že ve výsledku bude stejná desítka jako ve sčítanci. Jelikož máme pouze devět číslic, je jasné, že výsledek musí být 5.

J = 5

e) PP + P + P = 52

Logická úvaha nás dovede k výsledku 4, neboť pokud bychom doplnili kterékoliv jiné číslo, nikdy bychom se nedostali k výsledné desítce, tedy k padesátce. Musíme tedy odhadnout, že ve sčítanci musí být 40 a následně si ověříme, že součet po doplnění 4 bude opravdu 52.

$P = 4$

f) $L \cdot L = L + L$

Někteří žáci již vědí, že je možné zkoušet pouze zpaměti dosazovat za neznámou, někteří budou muset zkoušet dosazovat opět systematicky od 0-9. Je možný pouze jeden výsledek a to:

$L = 2$

2. Vyřeš algebrogramy. Najdi všechna řešení.

Správné řešení:

a) $Q + P = 10$

Žáci doplňují systematicky číslice od 0-9. Sami musí zhodnotit, že číslice 0 nemůže být doplněna. Výsledek by nikdy nemohl být 10.

$Q_1 = 1$, $P_1 = 9$

$Q_2 = 2$, $P_2 = 8$

$Q_3 = 3$, $P_3 = 7$

$Q_4 = 4$, $P_4 = 6$

$Q_5 = 5$, $P_5 = 5$ – nelze, neboť Q a P musí být čísla rozdílná

$Q_6 = 6$, $P_6 = 4$

$Q_7 = 7$, $P_7 = 3$

$Q_8 = 8$, $P_8 = 2$

$Q_9 = 9$, $P_9 = 1$

b) $AB + B = 68$

Předchází úvaha, zda je možné dosadit za A číslice 0, 1, 2, 3, 4 – nelze, neboť poté by nemohla být ve výsledné desítce 6. Dosadíme tedy číslice 5 a poté zjistíme, že když bude ve sčítance 50, zbývá nám do 68 již pouze 18. 18/2 = 9, musíme tedy za B dosadit

9. Stejně tak uvažujeme i s číslicí 6 za A, poté najdeme snado B.

$A_1 = 5$, $B_1 = 9$

$A_2 = 6$, $B_2 = 4$

c) SM + M = 46

Opět řešíme stejně jako předchozí úlohy. Pokud žákům nejde uvažovat nad výsledke, opět dosazují nejprve za S, k němu se snaží vymyslet správné M.

$S_1 = 4$, $M_1 = 3$

$S_2 = 3$, $M_2 = 8$

d) E . E = F

Dosazujeme postupně číslice od 0 do 9. Zastavíme se u číslice 4, neboť násobky čísla 4 jsou větší než 9, nelze tedy najít F, stejně tak u větších čísel.

$E_1 = 1$, → 1 . 1 = 1 - nelze, neboť sčítanec musí být číslo odlišné od E

$E_2 = 2$, → 2 . 2 = 4 → F2 = 4

$E_3 = 3$ → 3 . 3 = 9 → F3 = 9

$E_4 = 4$ → 4 . 4 = 16 – nelze, neboť sčítanec musí být pouze jedna číslice

e) C . C = D + D

Stále stejný postup nebo počítáme zpaměti.

C = 4, **D** = 8

3. Vyřeš algebrogramy, najdi všechna řešení.

a)	b)	c)	d)
AB	DD	DG	AC
+ BA	+ C	+ DG	+ ACC
AAC	CCG	GH	CBB

Správné řešení:

a) A = 1, B = 9, C = 0

b) $A = 9, B = 1, C = 0$

c) $A_1 = 1, B_1 = 2, C_1 = 4$

$A_2 = 2, B_2 = 4, C_2 = 8$

$A_3 = 2, B_3 = 5, B_3 = 0$

$A_4 = 4, B_4 = 9, C_4 = 8$

$A_5 = 3, B_5 = 7, B_5 = 4$

d) $A_1 = 4, B_1 = 5, C_1 = 0$

$A_2 = 5, B_2 = 6, C_2 = 2$

$A_3 = 6, B_3 = 7, B_3 = 4$

$A_4 = 7, B_4 = 8, C_4 = 6$

4. PRO CHYTRÉ HLAVIČKY:

Pro každé písmeno zvol číslici od 0 do 9. Každé písmeno je ve všech příkladech stejnou číslicí.

2T + TA = GT

T2 + TB = FT

FT – GT = BA

2T + T2 = GG

FT – TA = TT

Správné řešení:

Opět řešíme dosazováním, metodou pokus-omyl. Doporučíme žákům, ať začnou vždy dosazovat nejprve za písmeno, které je nejčastější. Ve všech příkladech musí stejné písmeno odpovídat stejné číslice, proto vždy musí zkusit dosadit stejnou číslici do všech příkladů.

T = 3

A = 0

G = 5

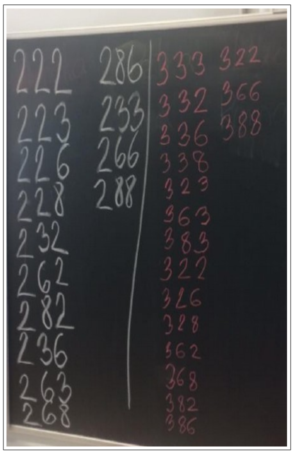
B = 1

F = 6

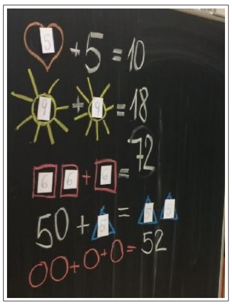
Příloha 4 – Foto z realizace

Ilustrace 1: Názorné a písemné řešení žáků úlohy č. 1 - Pracovní list Kombinace, variace, permutace

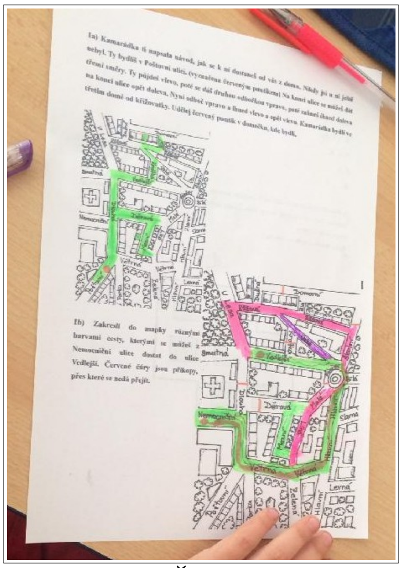
Ilustrace 2: Příprava na tabuli k úloze č. 4 - Pracovní list kombinace, variace, permutace



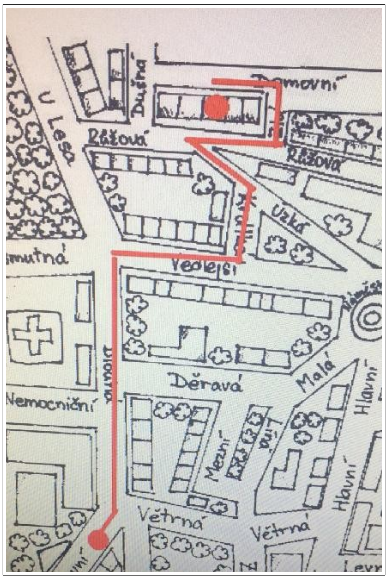
Ilustrace 3: Systematické vypisování možností k úloze č. 6 - Pracovní list kombinace, variace, permutace



Ilustrace 4: Řešení úlohy č. 1 na tabuli - Pracovní list Algebrogramy

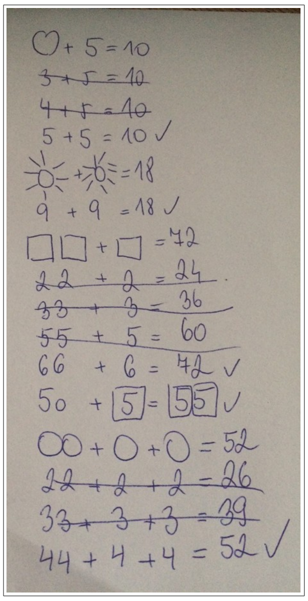


Ilustrace 5: Řešení úlohy č. 1 žákem 3.A - Pracovní list Orientace v rovině s prvky kombinatoriky

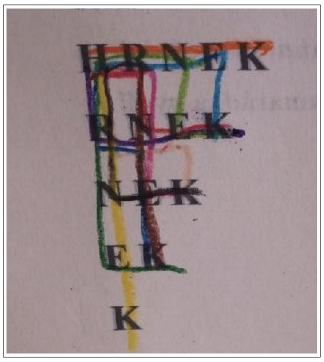


Ilustrace 6: Vzorové řešení úlohy č. 1 zobrazené na projektoru - Pracovní list Orientace v rovině

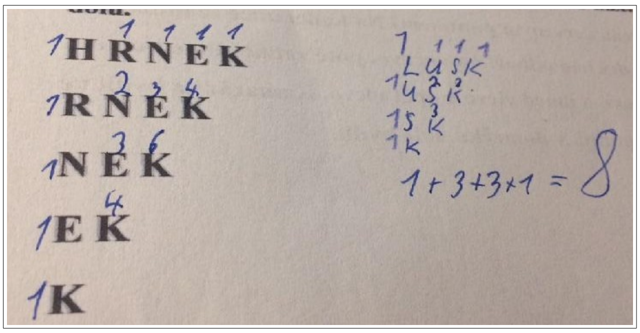
Ukázka využitých metod řešení



Ilustrace 7: Řešení žáka 3.A úlohy č. 1 dosazováním - Pracovní list Algebrogramy



Ilustrace 8: Řešení úlohy č. 3 žákem 3.A graficky - Pracovní list Orientace v rovině s prvky kombinatoriky



Ilustrace 9: Řešení úlohy č. 3 žákem 3.A pomocí kombinatorického pravidla součtu v Pascalově trojúhelníku - Pracovní list ad ilustrace 8