UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Alena Šestořádová

Geometrická interpretace průměrů v programu GeoGebra

Olomouc 2019

Vedoucí práce: doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Tomáše Zdráhala, CSc. a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu.

V Olomouci dne ....

Bc. Alena Šestořádová

Poděkování

Ráda bych tímto způsobem poděkovala vedoucímu mé diplomové práce doc. RNDr. Tomáši Zdráhalovi, CSc. za jeho cenné rady, připomínky a vstřícnost.

Dále bych chtěla poděkovat vyučujícím na katedře matematiky, jejichž přednášek a cvičení jsem se v průběhu mého studia měla možnost účastnit. Děkuji také mé rodině a mému příteli za pomoc a podporu při mém úsilí.

Bc. Alena Šestořádová

Bibliografická identifikace

Autor	Bc. Alena Šestořádová
Název práce	Geometrická interpretace průměrů v programu GeoGebra
Typ práce	Diplomová práce
Pracoviště	Katedra matematiky
Vedoucí práce	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
Rok obhajoby	2019
Abstrakt	Práce se zabývá problematikou průměrů ve školské matematice a je rozdělena do dvou kapitol – Teoretická část a Praktická část. V teoretické části práce jsou představeny tři nejpoužívanější typy průměrů, a to průměr aritmetický, geometrický a harmonický. Součástí teoretické části jsou rovněž vztahy mezi těmito průměry a jejich grafické znázornění. Na teoretickou část navazuje část praktická, která obsahuje řešené příklady k dané problematice. Celá práce je doprovázena obrázky tvořenými v programu GeoGebra a je tudíž vhodnou pomůckou pro výuku na základních/středních školách.
Klíčová slova	Aritmetický průměr, geometrický průměr, harmonický průměr, GeoGebra
Počet stran	70
Počet příloh	1
Jazyk	český

Bibliographical identification

Author	Bc. Alena Šestořádová
Title	Geometric Interpretation of Means in GeoGebra
Type of thesis	Diploma thesis
Department	Department of Mathematics
Supervisor	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
Year	2019
Abstract	Diploma thesis deals with usage of means in school mathematics and is divided into two sections – Theoretical part and Practical part. In the theoretical part, there are presented the most used types of means, namely the arithmetic, geometric and harmonic mean. The theoretical part includes relations between these means and also their graphical representation. The whole work contains pictures created in software GeoGebra and therefore it is a useful tool for teaching in primary/secondary schools.
Keywords	Arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, GeoGebra
Number of pages	70
Number of appendices	1
Language	Czech

Obsah

Seznam obrázků

Použité značení

$A = \{a_1, ..., a_n\}$	Množina reálných nezáporných čísel
$\mathcal{A}(a_1, ..., a_n)$	Aritmetický průměr prvků množiny A
$\mathcal{G}(a_1, ..., a_n)$	Geometrický průměr prvků množiny A
$\mathcal{H}(a_1, ..., a_n)$	Harmonický průměr prvků množiny A
$o_{\square}$	Obvod čtverce [m]
$o_{\boxed{}}$	Obvod obdélníku [m]
P_{i}	Těžiště i-tého trojúhelníku
$\mathbb{R}$	Množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	Množina reálných kladných čísel
S	Obsah obrazce [m^2]
$S_{\square}$	Obsah čtverce [m^2]
$S_{\boxed{}}$	Obsah obdélníku [m^2]
s, s_1, s_2	Dráha [km]
t, t_1, t_2	Čas [h]
$V_{\square}$	Objem krychle [m^2]
$V_{\boxed{}}$	Objem kvádru [m^2]
v, v_1, v_2	Rychlost [$\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$]
x_{s}	X-ová souřadnice průměru vrcholů šestiúhelníku [m]
y_{s}	Y-ová souřadnice průměru vrcholů šestiúhelníku [m]
$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}$	1. derivace S podle a
$\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}a^2}$	2. derivace S podle a

Úvod

Cílem této práce je přiblížit problematiku průměrů a jejich využití všem, kteří se v této oblasti matematiky cítí ztraceni, či si nejsou zcela jistí správností svého řešení. Konkrétně se tato práce zabývá průměrem aritmetickým, geometrickým a harmonickým. Rovněž, doufejme, bude tato práce vhodnou pomůckou při výuce průměrů na základních/středních školách pro pedagogické pracovníky či jako podpora samostudia samotných žáků/studentů.

Celá problematika je v práci pojednána v interaktivní formě, kterou jistě čtenář ocení. Interaktivní forma práce byla vytvářena v matematickém softwaru GeoGebra umožňujícímu interaktivně znázornit situace/úlohy z matematické analýzy, algebry a geometrie [1]. Jelikož je software GeoGebra volně stažitelný, je možné ho využít ke zpestření výuky matematiky i ostatních předmětů (např. zeměpis, fyzika) na základních/středních školách.

Autorovým poněkud neskromným přáním přitom je, aby tato práce byla přínosem nejen samotným žákům či studentům, ale též jejich pedagogům při výuce a přiměla je více využívat moderních technologií k lepšímu zprostředkování a pochopení učiva žákům za pomoci vizuálních metod.

Kapitola 1

Teoretická část

V této kapitole si postupně představíme průměr aritmetický, geometrický a harmonický. Uvedeme zde vzorce pro jejich výpočet a podíváme se na vybrané vlastnosti těchto průměrů.

Součástí každého oddílu zabývajícího se příslušným průměrem bude jeho geometrická interpretace, která je zpracována v programu GeoGebra [1]. Geometrická interpretace bude prezentována dvěma způsoby, přičemž první z nich je vhodný pro užití, vzhledem ke své jednoduchosti, na základních školách. Druhý z nich je složitější, a proto autor doporučuje jeho využití na středních, příp. vysokých, školách.

V poslední části této kapitoly uvedeme vztahy mezi jednotlivými průměry. Nejprve se na tyto vztahy zaměříme z pohledu grafického znázornění. To bude opět tvořeno formou jednodušší, která je vhodná pro základní školy, a složitější pro střední, příp. vysoké, školy. Následně si ukážeme vztahy mezi průměry rovněž algebraicky.

Co je to průměr?

Tuto otázku si mnozí z nás v životě nepoložili, pravděpodobně ani nikdy nepoloží, a může se zdát jako zbytečná. Vždyť všichni průměr běžně používáme – sečteme dané hodnoty a vydělíme tento součet jejich počtem. Tato otázka je tedy bezvýznamná, nebo ne?

Pravdou je, že mimo tento průměr, zvaný aritmetický, existuje celá řada dalších průměrů. Namátkou jmenujme alespoň pár z nich – geometrický, harmonický, kvadratický, kubický, apod. [9] Kdy a proč tedy jaký průměr použít? Abychom mohli odpovědět na tuto otázku, musíme se podívat na to, co to průměr vlastně je.

Podíváme se na to z pohledu hledání průměru dvou hodnot a, b. Jistě se shodneme na tom, že průměr těchto dvou hodnot bude nějaké další číslo, které je pro dané dvě hodnoty specifické. Toto specifikum spočívá v nahrazení hodnot a, b právě tímto číslem (průměrem), přičemž se zachová původní výsledek operace prováděné s čísly a, b [8].

Hledáme tedy dvojčata – čísla x, y, jejichž „role“ je stejná, jako u čísel a, b a navíc, jelikož jsou to dvojčata, musí být i jejich hodnota stejná (x a y se sobě musí rovnat) [8]. Jelikož se tato práce zabývá pouze průměrem aritmetickým, geometrickým a harmonickým, aplikujeme si předchozí větu právě na ně.

Aritmetický průměr

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{a+b}{2} \\ \frac{x+y}{2} &= \frac{a+b}{2} \\ \frac{2x}{2} &= \frac{a+b}{2} \\ x &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Geometrický průměr

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \sqrt{ab} \\ \sqrt{xy} &= \sqrt{ab} \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{ab} \\ x &= \sqrt{ab} \end{aligned}$$

Harmonický průměr

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{2ab}{a+b} \\ \frac{2xy}{x+y} &= \frac{2ab}{a+b} \\ \frac{2x^2}{2x} &= \frac{2ab}{a+b} \\ x &= \frac{2ab}{a+b} \end{aligned}$$

1.1 Aritmetický průměr

Nejdříve se seznámíme s nejznámějším a nejvíce používaným průměrem, kterým beze sporu je průměr aritmetický. Tento byl již pro dvě hodnoty a a b znám a využíván Babyloňany v době cca 7000 př. n. l. Později, v období Starověkého Řecka, byly průměry aplikovány v teorii hudby, zejména Pythagorasem [4, 7].

Nyní si definujme aritmetický průměr. Je-li $A = \{a_1, ..., a_n\}$ množina reálných kladných čísel, poté se aritmetický průměr prvků množiny A vypočte pomocí vzorce:

$$\mathcal{A}(a_1, ..., a_n) = \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \tag{1.1}$$

Nyní se podívejme na některé ze základních vlastností aritmetického průměru [2, 3]:

- Změníme-li pořadí prvků množiny A (provedeme permutaci prvků), výsledná hodnota aritmetického průměru se nezmění.

$$\mathcal{A}(a_1, ..., a_n) = \mathcal{A}(a_n, ..., a_1) \tag{1.2}$$

- Přičteme-li ke každému číslu z množiny A konstantu k, kde $k \in \mathbb{R}$, poté bude i hodnota aritmetického průměru zvětšena o tuto konstantu.

$$\mathcal{A}(a_1 + k, ..., a_n + k) = \mathcal{A}(a_1, ..., a_n) + k \tag{1.3}$$

- Vynásobíme-li každé číslo z množiny A konstantou l, kde $l \in \mathbb{R}$, poté bude i hodnota aritmetického průměru vynásobena touto konstantou.

$$\mathcal{A}(a_1 \cdot l ..., a_n \cdot l) = \mathcal{A}(a_1, ..., a_n) \cdot l \tag{1.4}$$

- Hodnota aritmetického průměru prvků množiny $A = \{a_1, ..., a_n\}$ leží mezi nejmenším a největším prvkem této množiny.

$$min(a_1, ..., a_n) \leq \mathcal{A}(a_1, ..., a_n) \leq max(a_1, ..., a_n) \tag{1.5}$$

  Rovnost nastává tehdy a pouze tehdy, když jsou si prvky množiny A rovny.

- Mají-li množiny $A = \{a_1, ..., a_n\}$ a $B = \{b_1, ..., b_n\}$ stejný počet prvků, pak platí:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n}(b_i) \implies \mathcal{A}(a_1, ..., a_n) \leq \mathcal{A}(b_1, ..., b_n). \tag{1.6}$$

  Rovnost nastává tehdy a pouze tehdy, jsou-li si prvky množiny A a B rovny.

Geometrická interpretace aritmetického průměru v GeoGebře

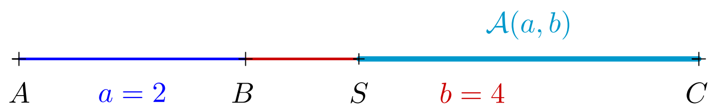
Zde si postupně ukážeme dvě geometrické interpretace aritmetického průměru dvou čísel a, b, kde $a, b \in \mathbb{R}^+$. První interpretace je vzhledem ke své jednoduchosti vhodná k využití a vysvětlení aritmetického průměru na základních školách. Druhá interpretace je složitější a využívá znalostí grafů funkcí, a proto se lépe uplatní při výuce na středních, příp. vysokých, školách.

Geometrická interpretace 1

Nejprve si napíšeme vzorec pro výpočet aritmetického průměru ze dvou čísel a, b:

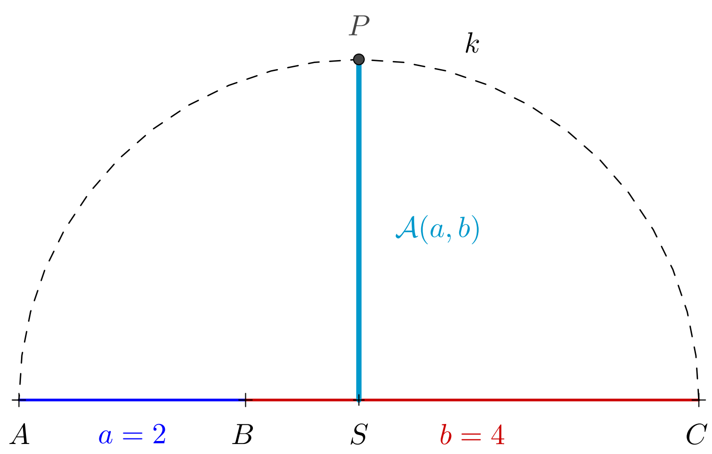
$$\mathcal{A}(a, b) = \frac{a+b}{2}; \qquad a, b \in \mathbb{R}^+ \tag{1.7}$$

Čísla a, b si znázorníme pomocí úseček AB a BC, přičemž tyto úsečky budou ležet na stejné přímce. Zvolíme si tedy $\mid AB \mid= a$ a $\mid BC \mid= b$. Součtem délek a, b získáme délku úsečky AC. Nyní můžeme nalézt hledanou hodnotu aritmetického průměru. Tato je rovna polovině délky úsečky AC, viz Obr. 1.1.



Obrázek 1.1: Aritmetický průměr čísel a, b

Pro lepší viditelnost si zkonstruujme kružnici k se středem S o poloměru $\mathcal{A}(a, b)$, viz Obr. 1.2.



Obrázek 1.2: Aritmetický průměr čísel a, b

Geometrická interpretace 2

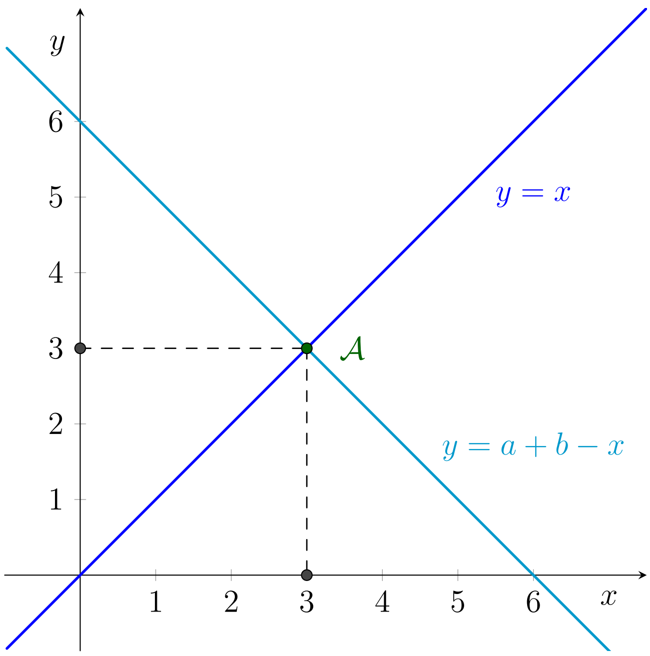
Pro zjištění aritmetického průměru dvou hodnot využijeme znalost grafů funkcí jedné proměnné. Jak bylo zmíněno v oddíle 1, nalezneme nejprve takové x a y, pro které platí rovnost 1.8. My ovšem hledáme jeden konkrétní bod $\mathcal{A}$, jehož x-ová a y-ová souřadnice je stejná ($x = y$) a je rovna hodnotě aritmetického průměru.

$$\frac{x+y}{2} = \frac{a+b}{2} \tag{1.8}$$
$$\frac{x+x}{2} = \frac{a+b}{2} \tag{1.9}$$
$$x = \frac{a+b}{2} \tag{1.10}$$

Abychom si mohli výše zmíněné znázornit, musíme si nejprve ze vztahu 1.8 vyjádřit y:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{a+b}{2} \qquad | \cdot 2 \tag{1.11}$$
$$x+y = a+b \qquad | -x \tag{1.12}$$
$$y = a+b-x. \tag{1.13}$$

Funkci y si zakreslíme do grafu 1.3. Tato přímka sestává z bodů, jejichž součet x-ové a y-ové souřadnice je roven součtu $a + b$. Hledáme takový bod $\mathcal{A}$, který náleží této přímce, a pro nějž platí, že jeho x-ová a y-ová souřadnice je stejná. Tento bod získáme jako průsečík přímek $y = x$ a $y = a + b - x$.



Obrázek 1.3: Aritmetický průměr čísel a, b

Pozn. Graf 1.3 odpovídá hodnotám $a = 2$ a $b = 4$.

1.2 Geometrický průměr

Dále se budeme zabývat méně známým a využívaným průměrem, a to průměrem geometrickým. Nyní se podívejme, jak je geometrický průměr definován. Je-li $A = \{a_1, ..., a_n\}$ množina reálných kladných čísel, poté se geometrický průměr prvků množiny A vypočte pomocí vzorce:

$$\mathcal{G}(a_1, ..., a_n) \quad = \quad \sqrt[n]{a_1 ... a_n} \tag{1.14}$$

Opět se podívejme na některé ze základních vlastností geometrického průměru [2]:

- Změníme-li pořadí prvků množiny A (provedeme permutaci prvků), výsledná hodnota geometrického průměru se nezmění.

$$\mathcal{G}(a_1, ..., a_n) \quad = \quad \mathcal{G}(a_n, ..., a_1) \tag{1.15}$$

- Vynásobíme-li každé číslo z množiny A konstantou l, kde $l \in \mathbb{R}$, poté bude i hodnota geometrického průměru vynásobena touto konstantou.

$$\mathcal{G}(a_1 \cdot l ..., a_n \cdot l) \quad = \quad \mathcal{G}(a_1, ..., a_n) \cdot l \tag{1.16}$$

- Hodnota geometrického průměru prvků množiny $A = \{a_1, ..., a_n\}$ leží mezi nejmenším a největším prvkem této množiny.

$$min(a_1, ..., a_n) \quad \leq \quad \mathcal{G}(a_1, ..., a_n) \quad \leq \quad max(a_1, ..., a_n) \tag{1.17}$$

  Rovnost nastává tehdy a pouze tehdy, když jsou si prvky množiny A rovny.

- Mají-li množiny $A = \{a_1, ..., a_n\}$ a $B = \{b_1, ..., b_n\}$ stejný počet prvků, pak platí:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i) \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n}(b_i) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{G}(a_1, ..., a_n) \quad \leq \quad \mathcal{G}(b_1, ..., b_n). \tag{1.18}$$

  Rovnost nastává tehdy a pouze tehdy, jsou-li si prvky množiny A a B rovny.

Geometrická interpretace geometrického průměru v GeoGebře

Geometrický průměr dvou hodnot a, b si opět zobrazíme dvěma způsoby, podobně jako u předešlého průměru.

Geometrická interpretace 1

Vzorec pro výpočet geometrického průměru dvou čísel a, b má následují tvar:

$$\mathcal{G}(a,b) = \sqrt{a \cdot b}; \qquad a, b \in \mathbb{R}^+ \tag{1.19}$$

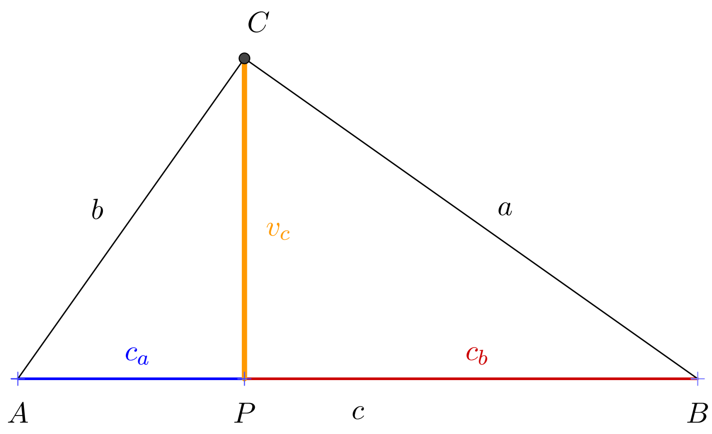
V grafickém znázornění vzorce 1.19 využijeme podobnosti s Euklidovou větou o výšce. Za tímto účelem si musíme vzorec 1.19 upravit následujícím způsobem:

$$\mathcal{G}(a,b) = \sqrt{a \cdot b} \qquad |^2 \tag{1.20}$$

$$\mathcal{G}^2(a,b) = ab \tag{1.21}$$

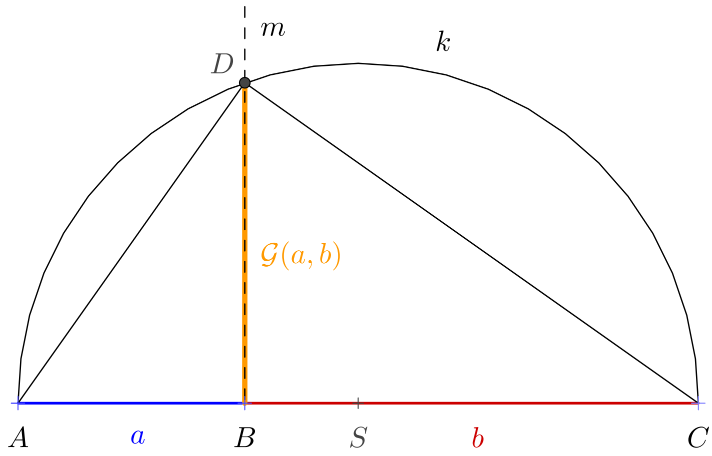
Pozorný čtenář si zajisté povšimnul analogie mezi vzorcem 1.21 a vzorcem pro Euklidovu větu 1.22. Připomeňme, že Euklidova věta o výšce se vztahuje pouze k pravoúhlému trojúhelníku (Obr. 1.4) a říká, že platí vztah:

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b. \tag{1.22}$$



Obrázek 1.4: Euklidova věta o výšce

V našem případě se $c_a = a$, $c_b = b$ a $v_c = \mathcal{G}(a,b)$. Využitím Thaletovy kružnice můžeme $\mathcal{G}(a,b)$ znázornit jen se znalostí délek a a b, viz Obr. 1.5.



Obrázek 1.5: Geometrický průměr čísel a, b

Pro lepší přehled si zde popíšeme postup konstrukce.

1. AC; $\mid AC \mid = a + b$
2. B; $B \in AC \quad \wedge \quad \mid AB \mid = a \quad \wedge \quad \mid BC \mid = b$
3. S; $S \in AC \quad \wedge \quad \mid SA \mid = \mid SB \mid$
4. k; $k\left(S; r = \dfrac{\mid AC \mid}{2}\right)$
5. m; $m \perp AC \quad \wedge \quad B \in m$
6. D; $D \in m \cap k$
7. $\mathcal{G}(a, b)$; $\mathcal{G}(a, b) = \mid BD \mid$

Geometrický průměr dvou čísel a, b je v Obr. 1.5 znázorněn úsečkou BD.

Pozn. Obr. 1.5 je vytvořen pro hodnoty $a = 2$ a $b = 4$.

Geometrická interpretace 2

Zde si geometrický průměr znázorníme pomocí grafů funkcí jedné proměnné. Jak bylo zmíněno v oddíle 1, nalezneme nejprve takové x a y, pro které platí rovnost 1.23. My ale hledáme bod $\mathcal{G}$, jehož x-ová a y-ová souřadnice je stejná a je rovna hodnotě geometrického průměru.

$$\sqrt{xy} = \sqrt{ab} \tag{1.23}$$

$$\sqrt{x \cdot x} = \sqrt{ab} \tag{1.24}$$

$$x = \sqrt{ab} \tag{1.25}$$

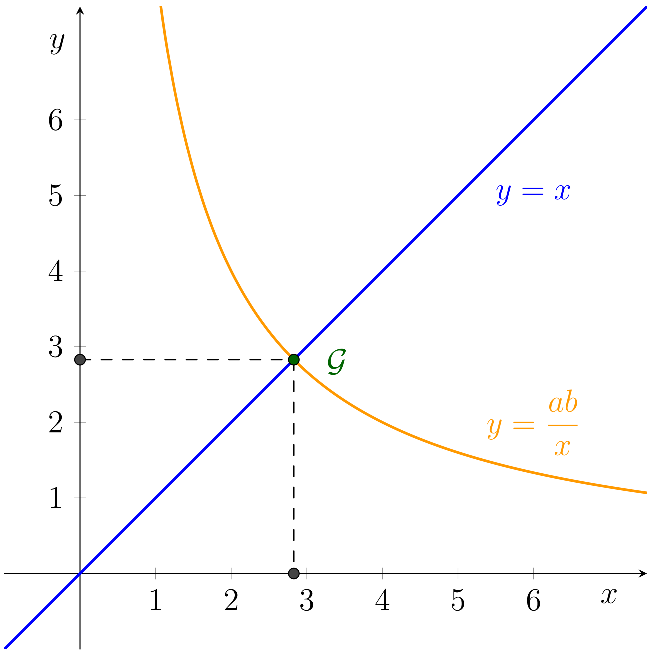
Z 1.23 si vyjádříme y, čímž získáme předpis funkce, jejíž graf budeme vytvářet:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{ab} \qquad |^2 \tag{1.26}$$

$$xy = ab \qquad | \cdot \frac{1}{x} \tag{1.27}$$

$$y = \frac{ab}{x} \tag{1.28}$$

Dále si funkci y znázorníme v grafu 1.6. Křivka, která je grafem funkce y, je tvořena body, jejichž součin x-ové a y-ové souřadnice je roven součinu $a \cdot b$. Musíme tedy najít takový bod $\mathcal{G}$, který náleží funkci y a jehož x-ová a y-ová souřadnice je totožná. Tento bod vznikne jako průsečík funkcí $y = \frac{ab}{x}$ a $y = x$.



Obrázek 1.6: Geometrický průměr čísel a, b

Pozn. Obr. 1.6 je vytvořen pro hodnoty $a = 2$ a $b = 4$.

1.3 Harmonický průměr

Posledním průměrem obsaženým v této práci je harmonický průměr. Nyní se podívejme na definici tohoto průměru. Je-li $A = \{a_1, ..., a_n\}$ množina reálných kladných čísel, poté se harmonický průměr prvků množiny A vypočte pomocí vzorce:

$$\mathcal{H}(a_1, ..., a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}} \tag{1.29}$$

Pro harmonický průměr platí stejné vlastnosti jako pro průměr geometrický [2]:

- Změníme-li pořadí prvků množiny A (provedeme permutaci prvků), výsledná hodnota harmonického průměru se nezmění.

$$\mathcal{H}(a_1, ..., a_n) = \mathcal{H}(a_n, ..., a_1) \tag{1.30}$$

- Vynásobíme-li každé číslo z množiny A konstantou l, kde $l \in \mathbb{R}$, poté bude i hodnota harmonického průměru vynásobena touto konstantou.

$$\mathcal{H}(a_1 \cdot l..., a_n \cdot l) = \mathcal{H}(a_1, ..., a_n) \cdot l \tag{1.31}$$

- Hodnota harmonického průměru prvků množiny $A = \{a_1, ..., a_n\}$ leží mezi nejmenším a největším prvkem této množiny.

$$min(a_1, ..., a_n) \leq \mathcal{H}(a_1, ..., a_n) \leq max(a_1, ..., a_n) \tag{1.32}$$

  Rovnost nastává tehdy a pouze tehdy, když jsou si prvky množiny A rovny.

- Mají-li množiny $A = \{a_1, ..., a_n\}$ a $B = \{b_1, ..., b_n\}$ stejný počet prvků, pak platí:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n}(b_i) \implies \mathcal{H}(a_1, ..., a_n) \leq \mathcal{H}(b_1, ..., b_n). \tag{1.33}$$

  Rovnost nastává tehdy a pouze tehdy, jsou-li si prvky množiny A a B rovny.

Geometrická interpretace harmonického průměru v GeoGebře

Postup je analogický jako u předešlých průměrů, tzn. harmonický průměr dvou hodnot a, b, si zobrazíme dvěma způsoby.

Geometrická interpretace 1

Vzorec pro výpočer harmonického průměru dvou čísel a, b má tvar:

$$\mathcal{H}(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}; \qquad a,b \in \mathbb{R}^+ \tag{1.34}$$

Nejprve si vzorec upravíme následujícím způsobem:

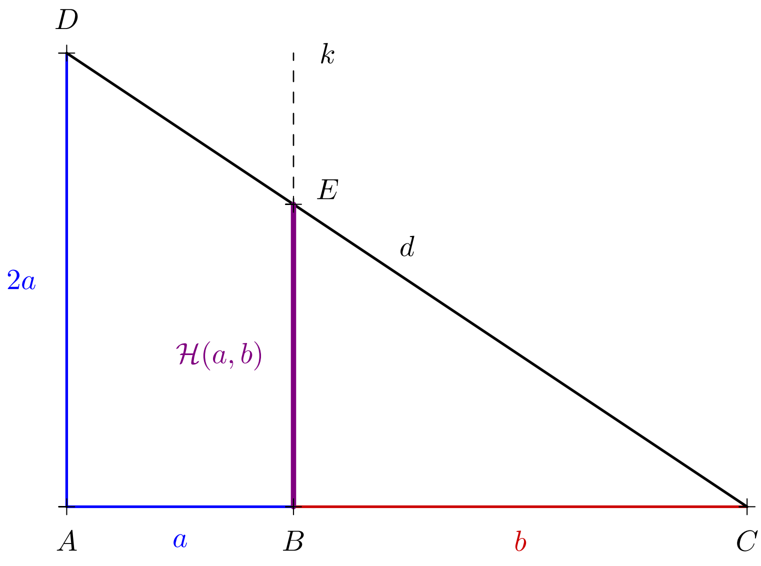
$$\mathcal{H}(a,b) = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} \tag{1.35}$$

$$\mathcal{H}(a,b) = \frac{2ab}{a+b} \tag{1.36}$$

$$\frac{\mathcal{H}(a,b)}{b} = \frac{2a}{a+b} \tag{1.37}$$

$$\tag{1.38}$$

U grafického znázornění vzorce 1.37 využijeme podobnosti trojúhelníků. Konkrétně podobnosti trojúhelníku ACD a BCE, viz Obr. 1.7.



Obrázek 1.7: Podobnost trojúhelníků

Geometrická interpretace 2

Harmonický průměr zde znázorníme pomocí grafů funkcí jedné proměnné. Jak bylo zmíněno v oddíle 1, nalezneme nejprve takové x a y, pro které platí rovnost 1.39. My ovšem hledáme bod $\mathcal{H}$, jehož x-ová a y-ová souřadnice je stejná a je rovna hodnotě harmonického průměru.

$$\frac{2xy}{x+y} = \frac{2ab}{a+b} \tag{1.39}$$

$$\frac{2xx}{x+x} = \frac{2ab}{a+b} \tag{1.40}$$

$$\frac{2x^2}{2x} = \frac{2ab}{a+b} \tag{1.41}$$

$$x = \frac{2ab}{a+b} \tag{1.42}$$

K znázornění grafu funkce si musíme nejprve ze vztahu 1.39 vyjádřit y:

$$\frac{2xy}{x+y} = \frac{2ab}{a+b} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{ab}{a+b} \qquad \Big| \cdot (x+y)$$

$$xy = \frac{ab(x+y)}{a+b} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{abx+aby}{x(a+b)}$$

$$y = \frac{abx}{x(a+b)} + \frac{aby}{x(a+b)} \qquad \Big| - \frac{aby}{x(a+b)}$$

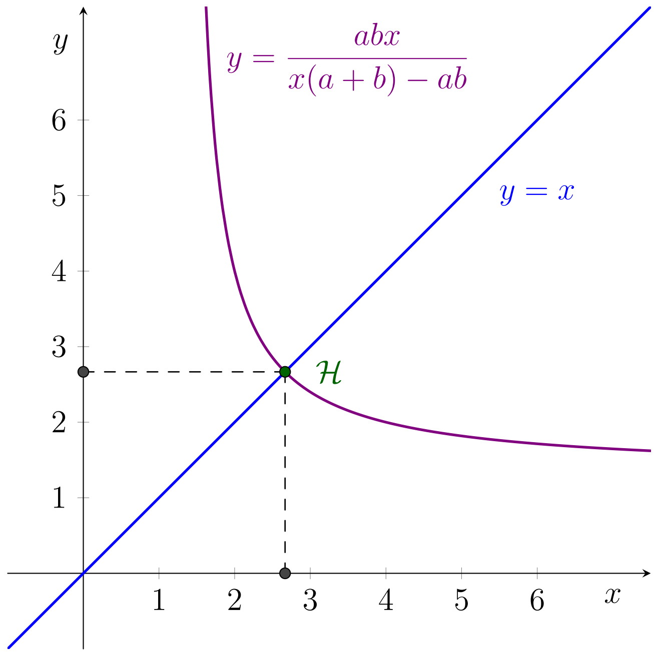
$$y - \frac{aby}{x(a+b)} = \frac{abx}{x(a+b)}$$

$$y\left(\frac{x(a+b)-ab}{x(a+b)}\right) = \frac{abx}{x(a+b)} \qquad \Big| \cdot \frac{x(a+b)}{x(a+b)-ab}$$

$$y = \frac{abx}{x(a+b)} \cdot \frac{x(a+b)}{x(a+b)-ab}$$

$$y = \frac{abx}{x(a+b)-ab}$$

Nyní si můžeme funkci y znázornit v grafu (Obr. 1.8). Křivka této funkce je tvořena body, pro jejichž souřadnice platí vztah 1.39. My hledáme takový bod $\mathcal{H}$, který náleží funkci y a jehož x-ová a y-ová souřadnice je stejná. Tento bod nalezneme jako průsečík funkce $y = \dfrac{abx}{x(a+b) - ab}$ a $y = x$.



Obrázek 1.8: Harmonický průměr čísel a, b

Pozn. Graf 1.8 odpovídá hodnotám $a = 2$ a $b = 4$.

1.4 Vztahy mezi průměry

V tomto oddílu budeme zkoumat nejen geometricky, ale i algebraicky, vztahy mezi průměrem aritmetickým, geometrickým a harmonickým pro dvě hodnoty.

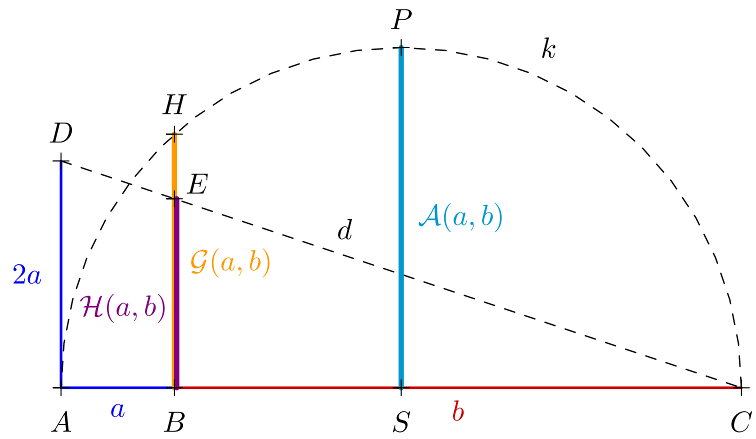
1.4.1 Geometrická nerovnost

Nejprve se budeme věnovat grafickému znázornění jejich vztahu. Budeme vycházet z geometrické interpretace těchto průměrů, které jsme si v předchozích oddílech vytvořili a vložíme je všechny do společného obrázku (Obr. 1.9), kde

$|PS|$ je aritmetický průměr čísel a,b,

$|HB|$ je geometrický průměr čísel a,b,

$|EB|$ je harmonický průměr čísel a,b.



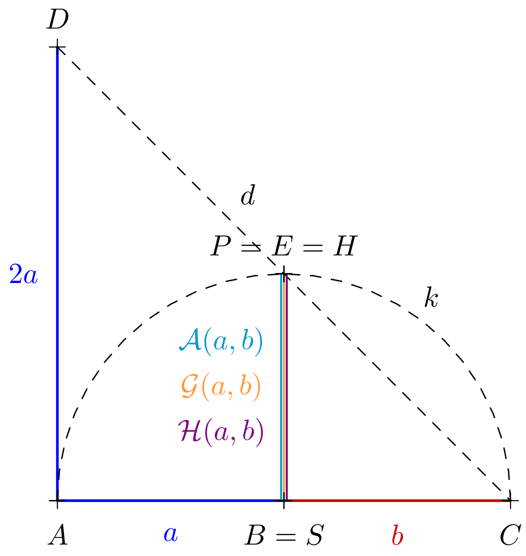
Obrázek 1.9: Vztah mezi průměry

Na Obr. 1.9 vidíme, že nejdelší je úsečka $|PS|$ a nejkratší $|EB|$. Z toho vyplývá nerovnost

$$\mathcal{A}(a,b) > \mathcal{G}(a,b) > \mathcal{H}(a,b). \tag{1.43}$$

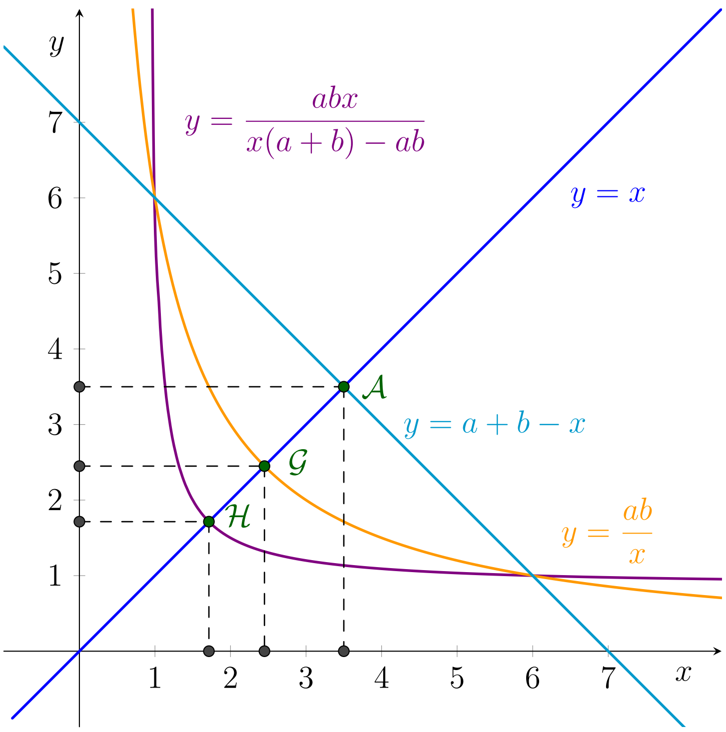
Pokud ovšem budeme měnit poměr hodnot a a b, zjistíme, že v případě rovnosti těchto hodnot jsou si rovny i průměry, viz Obr. 1.10. Proto je nutné nerovnost průměrů upravit:

$$\mathcal{A}(a,b) \geq \mathcal{G}(a,b) \geq \mathcal{H}(a,b). \tag{1.44}$$



Obrázek 1.10: Rovnost průměrů

Jelikož jsme si průměry znázorňovali pomocí dvou geometrických interpretací, ukážeme si jejich nerovnost i druhým způsobem. V něm jsme využívali funkce jedné proměnné. Opět si zakresleme průměry do jednoho obrázku, viz Obr. 1.11.



Obrázek 1.11: Vztah mezi průměry

1.4.2 Algebraická nerovnost

Nejprve si ukážeme nerovnost aritmetického a geometrického průměru čísel a, b, kde $a, b \in \mathbb{R}^+$. Budeme vycházet z nerovnosti 1.45 a pomocí ekvivalentních úprav zjistíme, zda platí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(a,b) &\geq \mathcal{G}(a,b) && && (1.45)\\
\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} && \mid \cdot 2 && (1.46)\\
a+b &\geq 2\sqrt{ab} && \mid^2 && (1.47)\\
(a+b)^2 &\geq 4ab && && (1.48)\\
a^2+2ab+b^2 &\geq 4ab && \mid (-4ab) && (1.49)\\
a^2-2ab+b^2 &\geq 0 && && (1.50)\\
(a-b)^2 &\geq 0 && && (1.51)
\end{aligned}$$

Víme, že druhá mocnina čísla je vždy větší nebo rovna nule. Z toho důvodu platí nerovnost 1.51. Jelikož platí tato poslední nerovnost, platí i nerovnost 1.45, ze které jsme vycházeli.

Stejným způsobem si rovněž ukážeme nerovnost geometrického a harmonického průměru čísel a, b, kde a, $b \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(a,b) &\geq \mathcal{H}(a,b) && && (1.52)\\
\sqrt{ab} &\geq \frac{2ab}{a+b} && \mid^2 && (1.53)\\
ab &\geq \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} && \mid \cdot (a+b)^2 && (1.54)\\
ab(a+b)^2 &\geq 4a^2b^2 && \mid \cdot \frac{1}{ab} && (1.55)\\
(a+b)^2 &\geq 4ab && && (1.56)\\
a^2+2ab+b^2 &\geq 4ab && \mid (-4ab) && (1.57)\\
a^2-2ab+b^2 &\geq 0 && && (1.58)\\
(a-b)^2 &\geq 0 && && (1.59)
\end{aligned}$$

Podobně jako v předchozím případě je vždy druhá mocnina čísla větší nebo rovna nule, a proto poslední nerovnost platí, stejně jako nerovnost geometrického a harmonického průměru.

Ukázali jsme, že aritmetický průměr je větší nebo roven geometrickému průměru a zároveň geometrický průměr je větší nebo roven průměru harmonickému.

$$\mathcal{A}(a,b) \geq \mathcal{G}(a,b) \qquad \wedge \qquad \mathcal{G}(a,b) \geq \mathcal{H}(a,b) \tag{1.60}$$

Z toho nám vyplývá nerovnost všech zmíněných průměrů

$$\mathcal{A}(a,b) \geq \mathcal{G}(a,b) \geq \mathcal{H}(a,b). \tag{1.61}$$

Pro jistotu si ovšem ukažme i zbývající nerovnost aritmetického a harmonického průměru čísel a, b, kde a, b $\in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(a,b) &\geq \mathcal{H}(a,b) && \qquad (1.62)\\
\frac{a+b}{2} &\geq \frac{2ab}{a+b} && \mid 2(a+b) \qquad (1.63)\\
(a+b)(a+b) &\geq 4ab && \mid \cdot (a+b)^2 \qquad (1.64)\\
a^2+2ab+b^2 &\geq 4ab && \mid (-4ab) \qquad (1.65)\\
a^2-2ab+b^2 &\geq 0 && \qquad (1.66)\\
(a-b)^2 &\geq 0 && \qquad (1.67)
\end{aligned}$$

Kapitola 2

Praktická část

Praktická část obsahuje řešené příklady a je rozdělena do tří oddílů. První se zabývá řešením příkladů na aritmetický průměr, ve druhém řešíme úlohy na geometrický průměr a ve třetím na harmonický průměr. Řešení většiny úloh je rozděleno na dvě části – numerickou a grafickou.

V numerickém řešení, jak již sám název prozrazuje, řešíme příklady početně. V této části se snažíme dojít pomocí obecných postupů ke vzorcům pro dané průměry, a tím poukázat na využití znalosti průměrů v běžných příkladech.

Oproti tomu grafické řešení nám zprostředkovává řešení v lépe pochopitelné podobě. Tato část obsahuje obrázky vytvořené v programu GeoGebra a ukazuje čtenáři postup grafického řešení. Obrázky, až na ty vytvořené v 3D, jsou převedeny z GeoGebry do profesionálního sázecího systému LaTeX pomocí balíčku Ti*k*Z/PGF Picture [5]. Tento balíček nám umožňuje pracovat, namísto s rastrovými, s vektorovými obrázky.

2.1 Aritmetický průměr

Příklad 2.1.1

Lukáš se rozhodl, že se projede po zimě poprvé na kole. První část cesty byla do kopce, a proto Lukáš udržoval tempo 5 km/h. Cesta do kopce mu trvala přesně hodinu. Poté se změnil profil terénu a Lukáš mohl na další hodinu zvýšit rychlost na 25 km/h. Jakou konstantní rychlostí by měl jet Lukáš, aby za stejný čas ujel stejnou dráhu?

Numerické řešení

Zápis:		
1. hodina	$v_1 = 5$	km/h
2. hodina	$v_2 = 25$	km/h
Průměrná rychlost	?	km/h

Dále si připomeňme vzorec pro výpočet rychlosti hmotného bodu:

$$v = \frac{s}{t}, \tag{2.1}$$

kde v je rychlost [km·h^{-1}],
s dráha [km],
t čas [s].

Jedinou neznámou ve vzorci je v našem případě dráha. Nejprve si určíme dílčí dráhu s_1 odpovídající rychlosti v_1 a dráhu s_2, kterou Lukáš ujel rychlostí v_2.

$$s_1 = v_1 \cdot t, \tag{2.2}$$
$$s_2 = v_2 \cdot t, \tag{2.3}$$

Celková dráha se rovná součtu těchto dílčích drah

$$s = s_1 + s_2, \tag{2.4}$$
$$s = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t. \tag{2.5}$$

Dráhu jsme si tedy určili a můžeme přejít s využitím vzorce pro výpočet rychlosti 2.1 a znalosti celkového času jízdy, který je roven $2t$, ke konkrétnímu řešení:

$$v = \frac{v_1 \cdot t + v_2 \cdot t}{2t}, \tag{2.6}$$
$$v = \frac{t \cdot (v_1 + v_2)}{2t}. \tag{2.7}$$

Po vykrácení dostáváme známý vztah 1.7 pro výpočet aritmetického průměru dvou hodnot

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}, \tag{2.8}$$

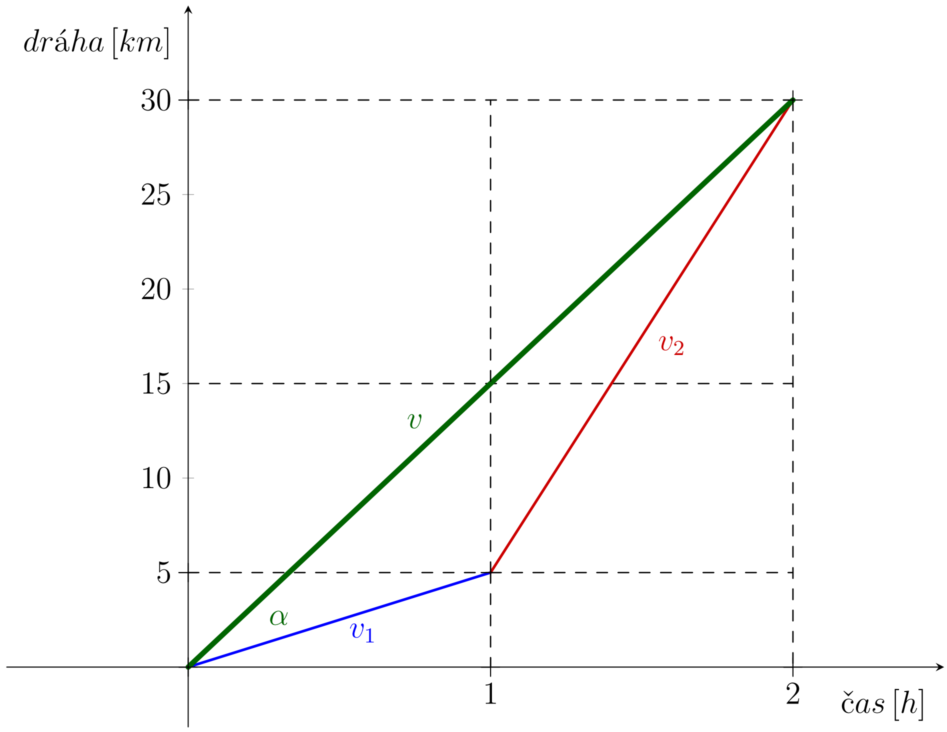
$$v = \frac{5 + 25}{2}, \tag{2.9}$$

$$v = 15 \text{ km/h}. \tag{2.10}$$

Odpověď: Pokud by chtěl jet Lukáš konstantní rychlostí při zachování času i dráhy, musel by jet rychlostí $v = 15$ km/h.

Grafické znázornění řešení 1

Údaje ze zadání si vyneseme do grafu (Obr. 2.1), kde osa x vyjadřuje čas a osa y ujetou dráhu.



Obrázek 2.1: Obrázek k řešení příkladu

Pomocí spojnice počátečního a koncového bodu jsme získali úsečku v, která, jak vidno, vyjadřuje konstantní přírůstek dráhy v závislosti na čase. Hledanou konstantní rychlost, kterou by Lukáš ujel za 2 hodiny dráhu 30 km, nalezneme jako průnik kolmice k ose x v bodu (1,0) a úsečky v. Hodnota y-ové souřadnice bodu průniku odpovídá dráze, kterou Lukáš ujede za hodinu, tudíž hledaná rychlost je 15 km/h.

Jinými slovy, v souladu se vzorcem pro výpočet rychlosti 2.1, zjistíme průměrnou rychlost použitím funkce tangens úhlu α, který svírá kladný směr osy x s přímkou v.

$$\tan(\alpha) = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přilehlá odvěsna}}, \tag{2.11}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{30}{2}, \tag{2.12}$$

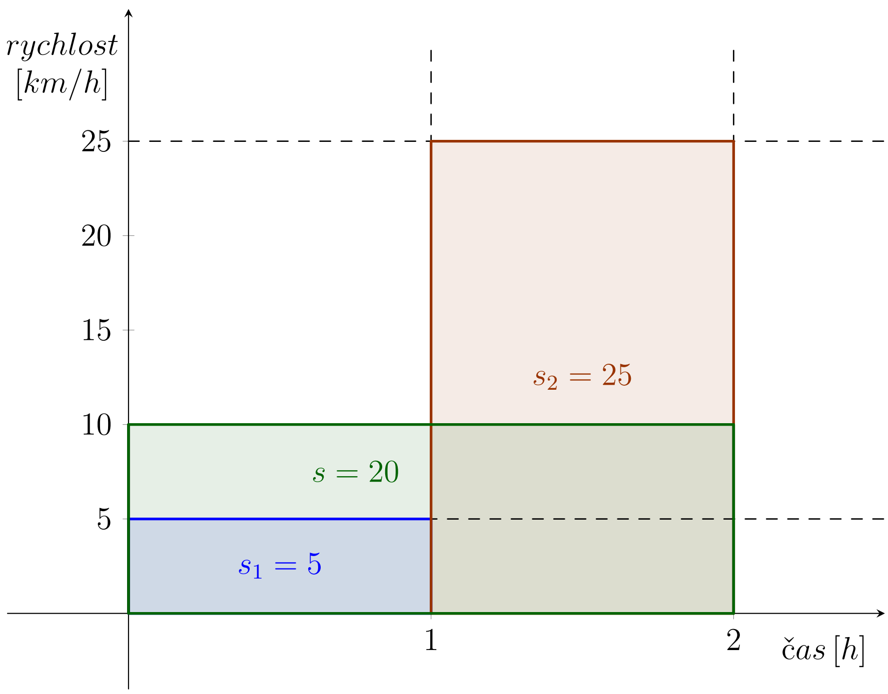
$$\tan(\alpha) = \frac{15}{1} \tag{2.13}$$

Ze vztahu 2.13 můžeme vyčíst, že za 1 hodinu ujede Lukáš 15 km.

Odpověď: Pokud by chtěl jet Lukáš konstantní rychlostí při zachování času i dráhy, musel by jet rychlostí $v = 15$ km/h.

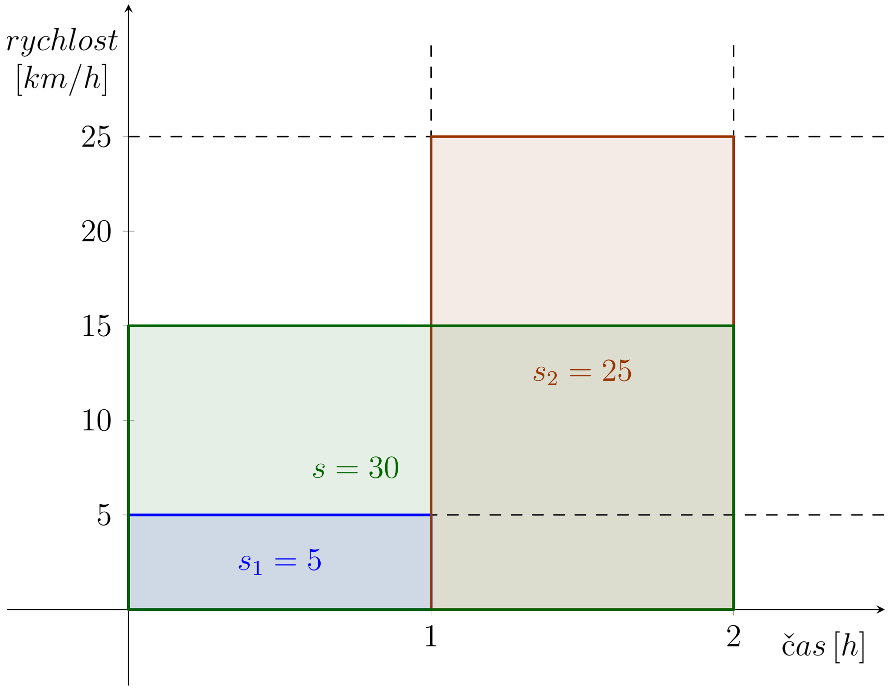
Grafické znázornění řešení 2

Danou situaci si můžeme znázornit i grafem závislosti rychlosti na čase (Obr. 2.2). Ze vzorce pro výpočet rychlosti 2.1 si vyjádříme dráhu, podobně jako u vzorců 2.2, 2.3. V grafickém znázornění má výsledný součin rychlosti a času podobu plochy pod křivkou. Vzniknou nám dvě obdélníkové plochy s_1, s_2. My hledáme plochu s takovou, jejíž obsah přes celý časový interval (2 h) je roven součtu obsahů s_1 a s_2.



Obrázek 2.2: Obrázek k řešení příkladu

Zvolme si rychlost 10 km/h, viz Obr. 2.2. Vidíme, že obsah plochy s není roven součtu obsahů ploch s_1 a s_2. Měníme tedy rychlost v, dokud rovnosti nedocílíme, viz Obr. 2.3.



Obrázek 2.3: Obrázek k řešení příkladu

Zjistili jsme, že rovnost platí tehdy a pouze tehdy, když je rychlost rovna 15 km/h.

Odpověď: Pokud by chtěl jet Lukáš konstantní rychlostí při zachování času i dráhy, musel by jet rychlostí $v = 15$ km/h.

Příklad 2.1.2

Na základní škole se pořádala čtenářská soutěž pro třídy 2. stupně, jejíž vítězem byla třída s nejvyšším průměrem přečtených knih na žáka za rok. Jelikož se jednalo o vesnickou školu, bylo v námi zkoumané třídě 6.A pouze 10 žáků. Výsledky jednotlivých žáků byly následující: Pepíček přečetl 2 knihy, Mařenka 10 knih, Jitka 5 knih, Petr 7 knih, Martin 5 knih, Simona 8 knih, Michal 10 knih, Kamila 4 knihy, Adam 7 knih, Pavel 9 knih a Edita 4 knihy.

Vypočtěte:

a) Kolik průměrně přečetli žáci 6. A knih?

b) Jak by se změnil průměr celé třídy, kdyby každý žák přečetl o 3 knihy více?

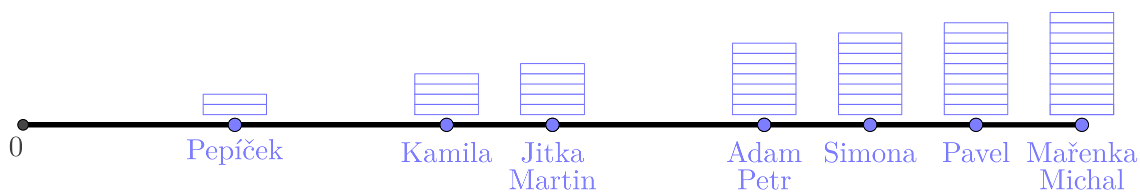
c) Jak by se změnil průměr celé třídy, kdyby každý žák přečetl $2\times$ více knih?

Řešení

Pro přehlednost provedeme nejprve zápis.

Pepíček	2 knihy	Simona	8 knih
Mařenka	10 knih	Michal	10 knih
Jitka	5 knih	Kamila	4 knihy
Petr	7 knih	Adam	7 knih
Martin	5 knih	Pavel	9 knih

a) Situaci si znázorníme na číselné ose (Obr. 2.4). Ta nám jasně ukazuje, že většina žáků se vyskytuje v její pravé části. Předpokladem tedy je, že se i hledaný průměr bude v této části vyskytovat.



Obrázek 2.4: Číselná osa

Chceme-li znát průměrný počet knih připadajících na žáka, musíme nejdříve stanovit součet všech přečtených knih. Nyní stačí podělit tento součet počtem žáků ve třídě. Tímto jsme docílili nalezení námi hledaného průměru.

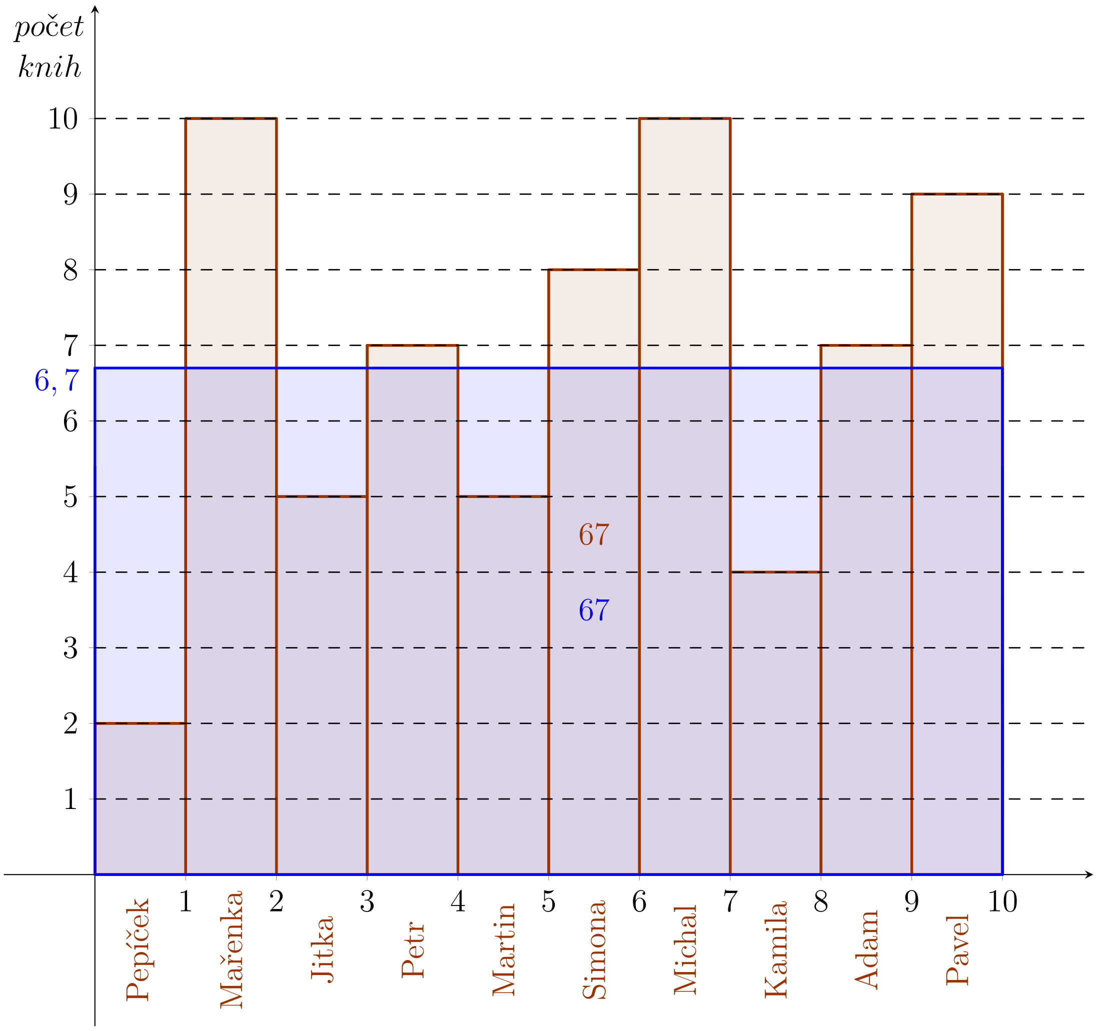
$$\mathcal{A}(a, ..., j) = \frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i+j}{10}, \tag{2.14}$$

$$\mathcal{A}(a, ..., j) = \frac{2+10+5+7+5+8+10+4+7+9}{10}, \tag{2.15}$$

$$\mathcal{A}(a, ..., j) = \frac{67}{10}, \tag{2.16}$$

$$\mathcal{A}(a, ..., j) = 6,7 \tag{2.17}$$

Danou úlohu můžeme vyřešit i graficky, podobně jako u Příklad 2.1.1, tj. přes rovnost obsahů ploch (Obr. 2.5).



Obrázek 2.5: Obrázek k řešení příkladu

b) Jelikož jsme si vše potřebné vyjádřili v předchozí části příkladu, dosadíme do vzorce 2.14 hodnoty zvětšené o 3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(a,...,j) &= \frac{(a+3)+(b+3)+(c+3)+(d+3)+(e+3)}{10}+ \quad (2.18)\\
&+ \frac{(f+3)+(g+3)+(h+3)+(i+3)+(j+3)}{10},\\
\mathcal{A}(a,...,j) &= \frac{5+13+8+10+8+11+13+7+10+12}{10}, \quad (2.19)\\
\mathcal{A}(a,...,j) &= \frac{97}{10}, \quad (2.20)\\
\mathcal{A}(a,...,j) &= 9,7 \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Vidíme, že zvětšením vstupních parametrů o 3 se nám současně zvýšila hodnota průměru o totéž číslo. Tím jsme ukázali na jednu z vlastností aritmetického průměru uvedenou v oddíle 1.1.

c) Platnost další vlastnosti aritmetického průměru z oddílu 1.1 ukážeme vynásobením vstupních parametrů číslem 2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(a,...,j) &= \frac{2a+2b+2c+2d+2e+2f+2g+2h+2i+2j}{10}, \quad (2.22)\\
\mathcal{A}(a,...,j) &= \frac{4+20+10+14+10+16+20+8+14+18}{10}, \quad (2.23)\\
\mathcal{A}(a,...,j) &= \frac{134}{10}, \quad (2.24)\\
\mathcal{A}(a,...,j) &= 13,4 \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Vidíme, že se nám hodnota aritmetického průměru taktéž zdvojnásobila.

Příklad 2.1.3

Simona si vybírá v obchodě s nábytkem jídelní stůl. Chtěla by stůl ve tvaru obdélníku s rozměry 13×9 dm. Pokud by si to však rozmyslela a chtěla by stůl čtvercového tvaru, jaké by měl mít rozměry, aby byl zachován jeho obvod?

Numerické řešení

Požadavek rovnosti obvodů lze zapsat následujícím vztahem

$$2(a+b) = 4c. \tag{2.26}$$

Po úpravě vztahu 2.26 dostaneme vzorec pro výpočet aritmetického průměru

$$2a+2b = 4c, \tag{2.27}$$

$$a+a+b+b = 4c, \tag{2.28}$$

$$\frac{a+a+b+b}{4} = c. \tag{2.29}$$

Nyní dosaďme do vztahu 2.29 hodnoty ze zadání

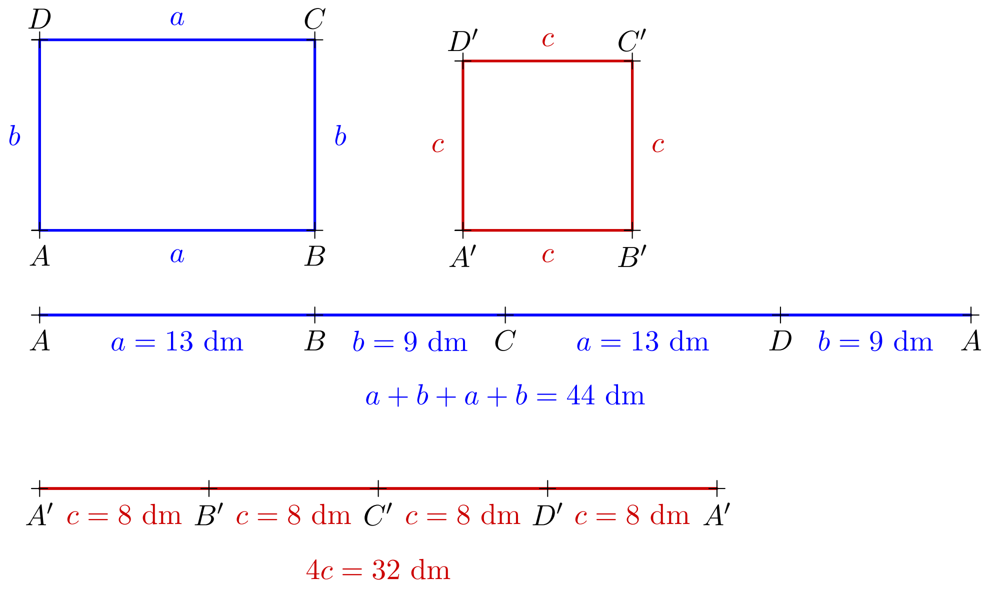
$$c = \frac{130+130+90+90}{4}, \tag{2.30}$$

$$c = 11 \text{ dm} \tag{2.31}$$

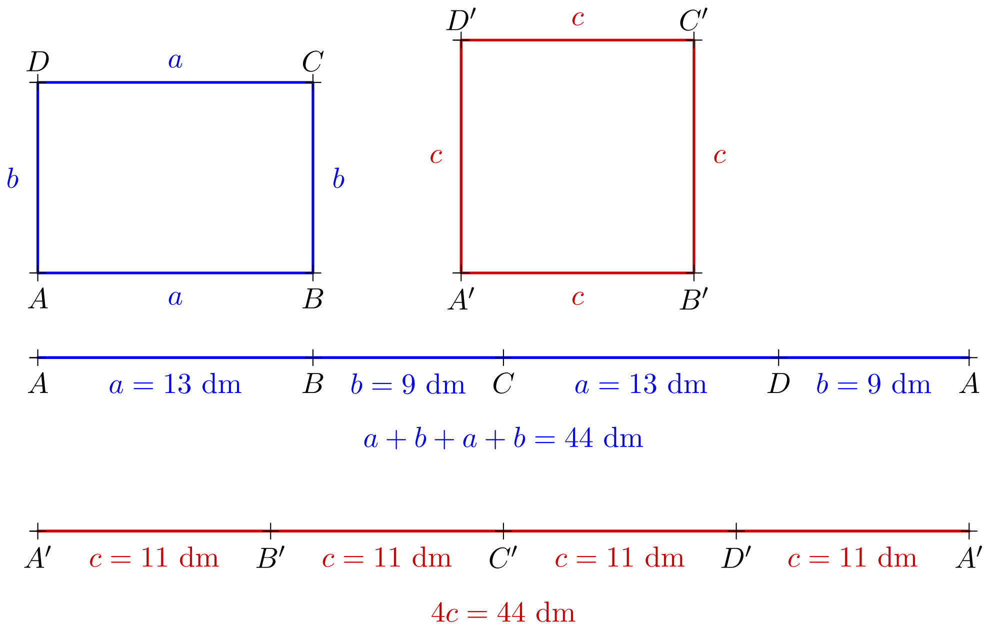
Odpověď: Délka strany stolu čtvercového tvaru by byla 11 dm.

Grafické znázornění řešení 1

Nejprve si zakresleme obdélník o rozměrech 13×9 dm. Poté si zkonstruujme přímku a nanesme na ni délky stran obdélníku $ABCD$. Vznikne nám úsečka o délce rovné obvodu tohoto obdélníku. K nalezení čtverce o stejném obvodu si sestrojíme úsečku sestávající ze 4 stejně dlouhých částí, viz Obr. 2.6. Délku těchto částí měníme tak dlouho, dokud její délka není rovna délce původní úsečky, viz Obr. 2.7.



Obrázek 2.6: Obrázek 1 k řešení příkladu



Obrázek 2.7: Obrázek 2 k řešení příkladu

Abychom zachovali obvod obdélníkového stolu, musel by mít čtvercový stůl strany o délce rovné 11 dm.

Odpověď: Délka strany stolu čtvercového tvaru by byla 11 dm.

Grafické znázornění řešení 2

Úlohu můžeme pojmout také jako hledání maximálního obsahu stolu při zachování původního obvodu. Důvodem hledání maximálního obsahu je skutečnost, že ze všech možných čtyřúhelníků o stejném obvodu má největší obsah právě námi hledaný čtverec. Ukažme si toto tvrzení následujícím způsobem.

Nejprve si ukažme, v jakém případě platí rovnost obvodu obdélníku a čtverce:

$$o_{\square} = o_{\rectangle} \tag{2.32}$$

$$4a' = 2(a+b) \tag{2.33}$$

$$a' = \frac{a+b}{2} \tag{2.34}$$

Délka strany čtverce je tedy rovna aritmetickému průměru délek stran obdélníku. Nyní si ukažme, že čtverec má vždy větší obsah než obdélník téhož obvodu.

$$S_{\square} > S_{\rectangle} \tag{2.35}$$

$$(a')^2 > ab \tag{2.36}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab \tag{2.37}$$

$$\frac{1}{4}(a+b)^2 > ab \tag{2.38}$$

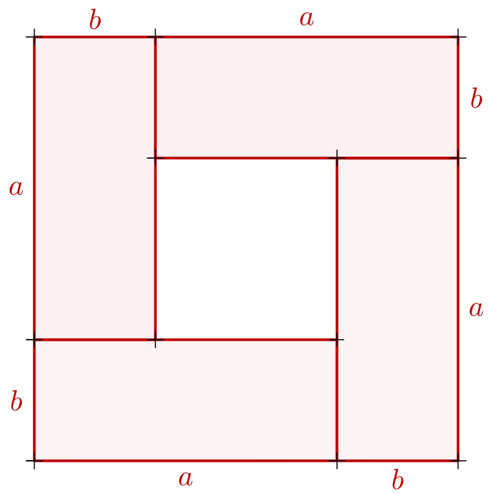
$$(a+b)^2 > 4ab \tag{2.39}$$

$$a^2+2ab+b^2 > 4ab \tag{2.40}$$

$$a^2-2ab+b^2 > 0 \tag{2.41}$$

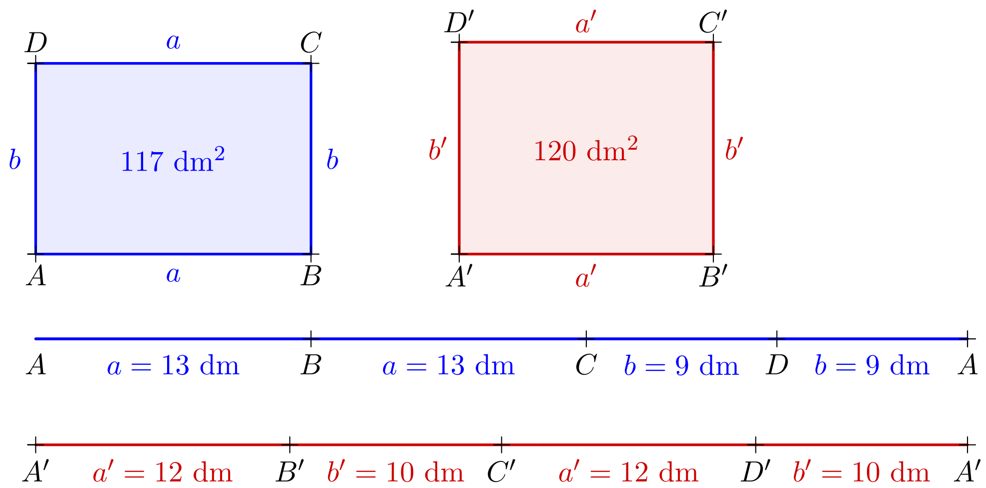
$$(a-b)^2 > 0 \tag{2.42}$$

Jelikož platí nerovnost 2.42, platí i prvotní předpoklad. Nerovnost 2.39 si můžeme znázornit i graficky (Obr. 2.8). Z obrázku je patrné, že obsah celého čtverce je větší, než součet obsahů čtyř obdélníků.

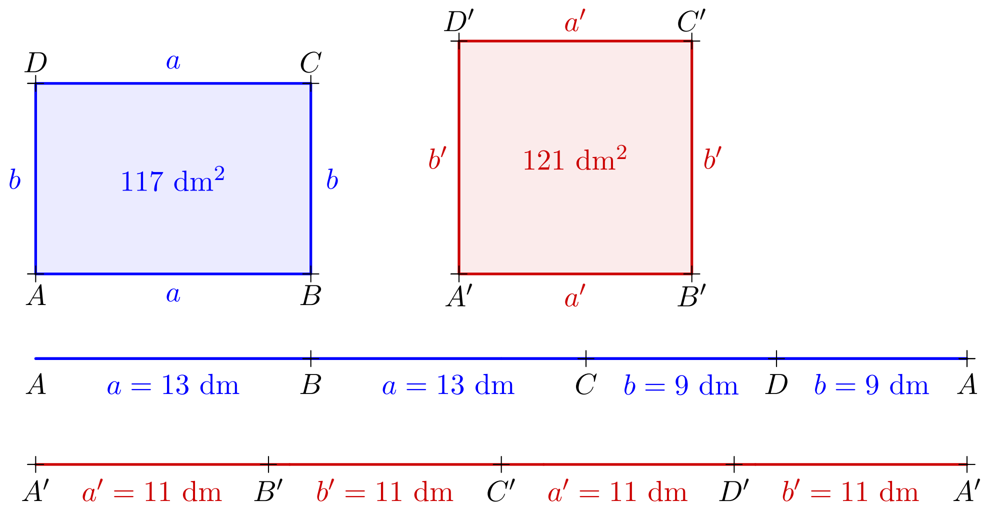


Obrázek 2.8: Nerovnost obsahů

Přejděme nyní ke grafickému znázornění řešení našeho příkladu. Opět si naneseme délky stran obdélníku na přímku a tím nám vznikne úsečka o délce rovné obvodu obdélníku. Pod ni si zkonstruujeme úsečku totožnou a měníme poměr jejich částí (délek stran a', b'), viz Obr. 2.9, tak dlouho, dokud nebude součin $S = a' \cdot b'$ maximální, viz Obr. 2.10.



Obrázek 2.9: Obrázek 3 k řešení příkladu



Obrázek 2.10: Obrázek 4 k řešení příkladu

Odpověď: Délka strany stolu čtvercového tvaru by byla 11 dm.

Příklad 2.1.4

Mějme krabici ve tvaru kvádru, jehož hrany mají délky $a = 5$ dm, $b = 4$ dm a $c = 9$ dm. Jakou délku by měla hrana krabice ve tvaru krychle, jejíž součet délek hran by byl roven součtu délek hran kvádru?

Numerické řešení

Jelikož součet délek hran kvádru a krychle má být roven, platí vztah

$$12a' = 4a + 4b + 4c \tag{2.43}$$

Po rozepsání vztahu 2.43 vidíme, že se jedná o vzorec pro výpočet aritmetického průměru z dvanácti hodnot.

$$a' = \frac{4a + 4b + 4c}{12} \tag{2.44}$$

Dosazením do 2.44 získáme hledanou délku hrany krabice ve tvaru krychle

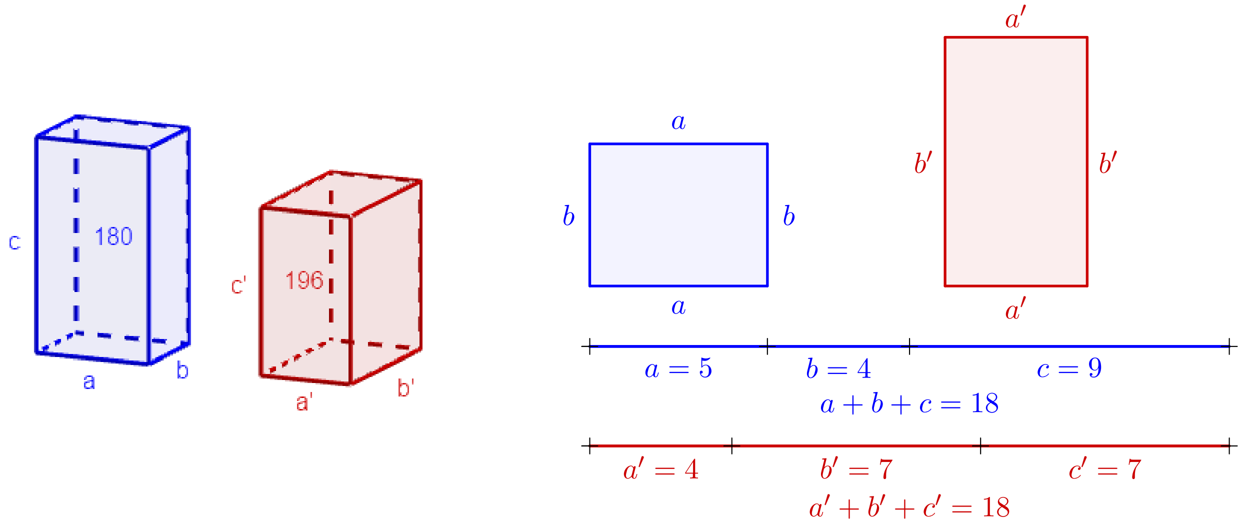
$$a' = \frac{4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 9}{12}, \tag{2.45}$$

$$a' = 6 \text{ dm}. \tag{2.46}$$

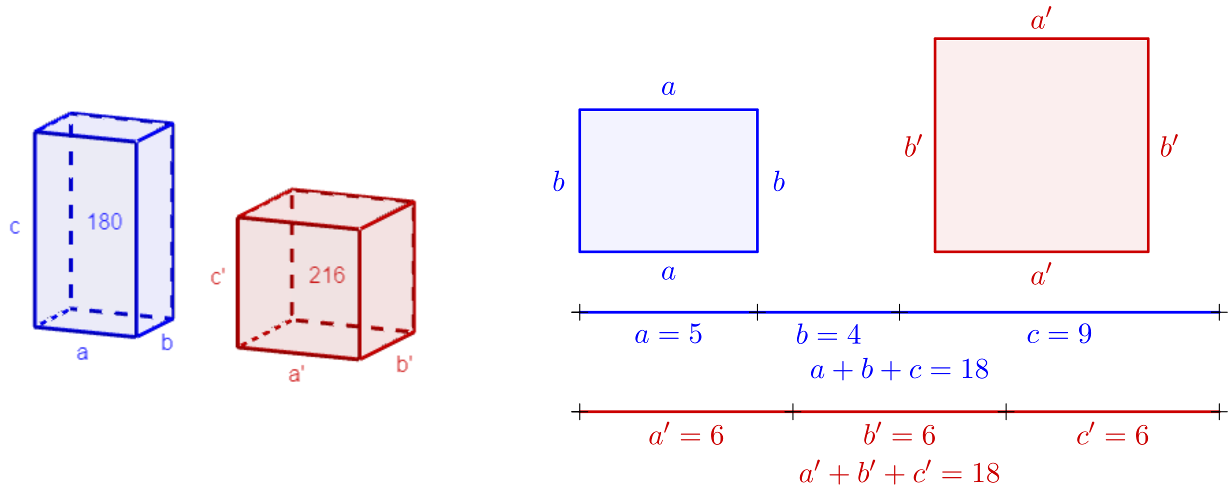
Odpověď: Krabice ve tvaru krychle by měla hrany o délce 6 dm.

Grafické znázornění řešení

Tuto úlohu můžeme pojmout jako hledání maximálního objemu kvádru při zachování součtu délek hran. Postupujeme obdobně jako u Příklad 2.1.3 (Grafické znázornění řešení 2). Měníme poměr délek hran kvádru, viz Obr. 2.11, tak dlouho, dokud nezískáme jejich maximální součin, viz Obr. 2.12.



Obrázek 2.11: Obrázek 1 k řešení příkladu

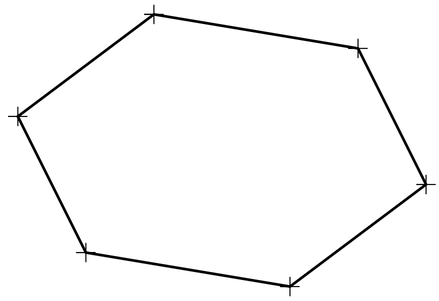


Obrázek 2.12: Obrázek 2 k řešení příkladu

Odpověď: Krabice ve tvaru krychle by měla hrany o délce 6 dm.

Příklad 2.1.5

a) Sestrojte na milimetrový papír libovolný šestiúhelník, jehož protější strany jsou rovnoběžné, viz Obr. 2.13. Nalezněte bod, jehož x-ová (y-ová) souřadnice bude aritmetickým průměrem x-ových (y-ových) souřadnic vrcholů šestiúhelníku.

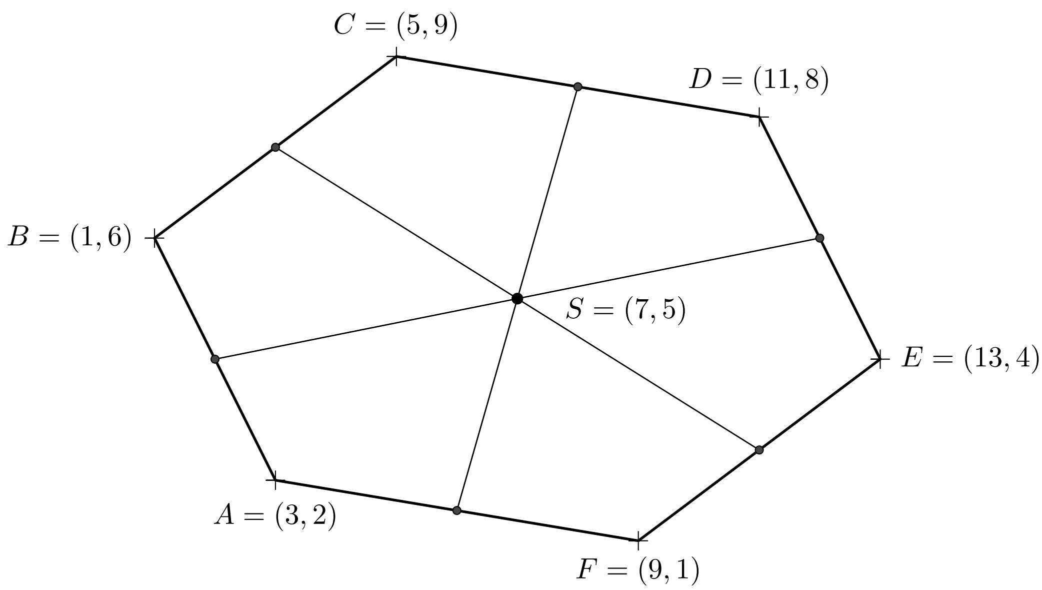


Obrázek 2.13: Obrázek k zadání příkladu

b) Do téhož šestiúhelníku sestrojte jeho těžiště.

Řešení

a) Pro zjištění aritmetického průměru všech vrcholů musíme nejprve nalézt středy stran (aritmetický průměr sousedních vrcholů) šestiúhelníku. Spojením středů protějších stran získáme průsečík, jehož x-ová (y-ová) souřadnice je aritmetickým průměrem souřadnic vrcholů šestiúhelníku.



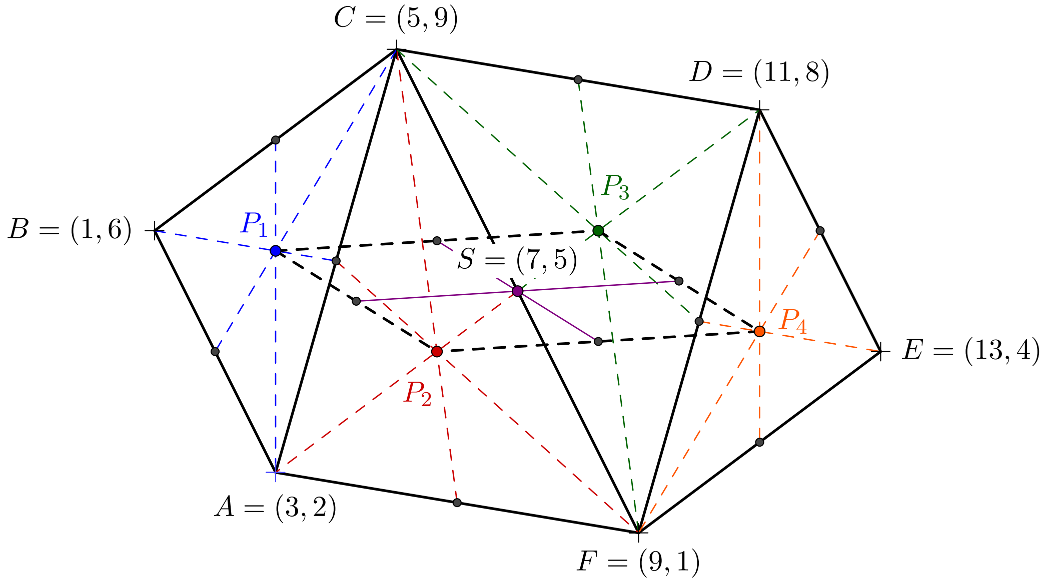
Obrázek 2.14: Obrázek k řešení a) příkladu

Ověření výpočtem:

$$x_S = \frac{3+1+5+11+13+9}{6} \qquad y_S = \frac{2+6+9+8+4+1}{6}$$
$$x_S = 7 \qquad y_S = 5$$

$$S = (7,5)$$

b) Šestiúhelník si rozdělíme na 4 libovolné trojúhelníky. V každém trojúhelníku si zkonstruujeme středy jeho stran a spojíme je s protějším vrcholem (sestrojíme těžnice trojúhelníků). Průsečíkem těchto těžnic jsou body P_1, P_2, P_3, P_4, které jsou těžišti daných trojúhelníků. Po spojení těchto bodů nám vznikne rovnoběžník, viz Obr. 2.15. Zde zopakujeme postup z předešlé části příkladu, tzn. vytvoříme středy stran čtyřúhelníku, které spojíme se středy protilehlých stran. Průsečíkem je hledané těžiště.

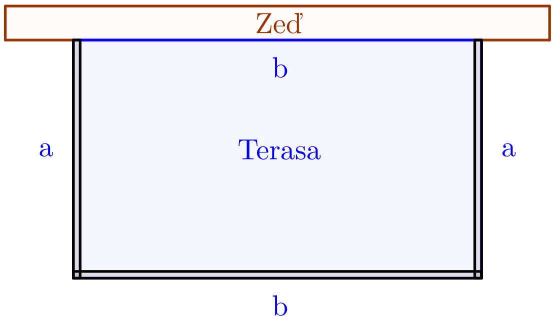


Obrázek 2.15: Obrázek k řešení b) příkladu

Pozn. Z obou částí příkladu je zřejmé, že u šestiúhleníku, jehož protější strany jsou rovnoběžné, jsou souřadnice těžiště a bodu, jehož souřadnice vzniknou aritmetickým průměrem souřadnic vrcholů, totožné.

Příklad 2.1.6

Manželé Dvořákovi si chtějí postavit terasu. Již dříve si ve slevě nakoupili zábradlí o délce 16 m. Nyní přemýšlí, jaké zvolit rozměry obdélníkové terasy, aby byla její plocha maximální. (Oporou k řešení nám může být úvod u grafického znázornění řesení 2 – Příklad 2.1.3.)

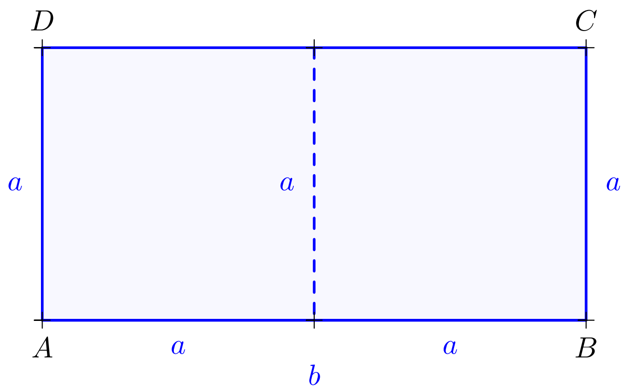


Obrázek 2.16: Obrázek k zadání příkladu

Numerické řešení

Využijeme poznatku z Příklad 2.1.3 (Grafické znázornění řešení 2). Zde jsme zjistili, že maximální plochu při zachování obvodu čtyřúhelníku dostaneme pro čtverec. Z tohoto důvodu si terasu rozdělíme na dva čtverce o délce strany a (Obr. 2.17).

$$o = 2a + b \qquad \wedge \qquad b = 2a \tag{2.47}$$



Obrázek 2.17: Obrázek 1 k řešení příkladu

$$o = 4a \tag{2.48}$$
$$a = \frac{o}{4} \tag{2.49}$$
$$a = \frac{16}{4} \tag{2.50}$$
$$a = 4 \text{ m} \tag{2.51}$$

Po dosazení hodnoty a do 2.47 nám vyjde $b = 8$ m.

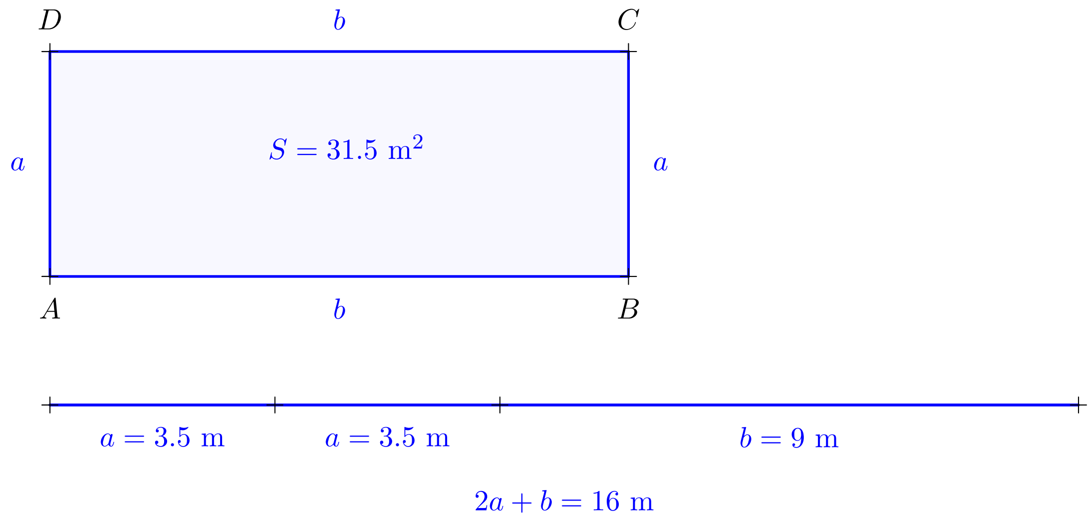
Odpověď: Terasa bude mít rozměry 8×4 m.

Grafické znázornění řešení

Jak ze zadání vyplývá, hledáme největší možný obsah obdélníku o stranách a, b. Aby tomu tak bylo, musí být součin daných čísel maximální, a zároveň musí platit:

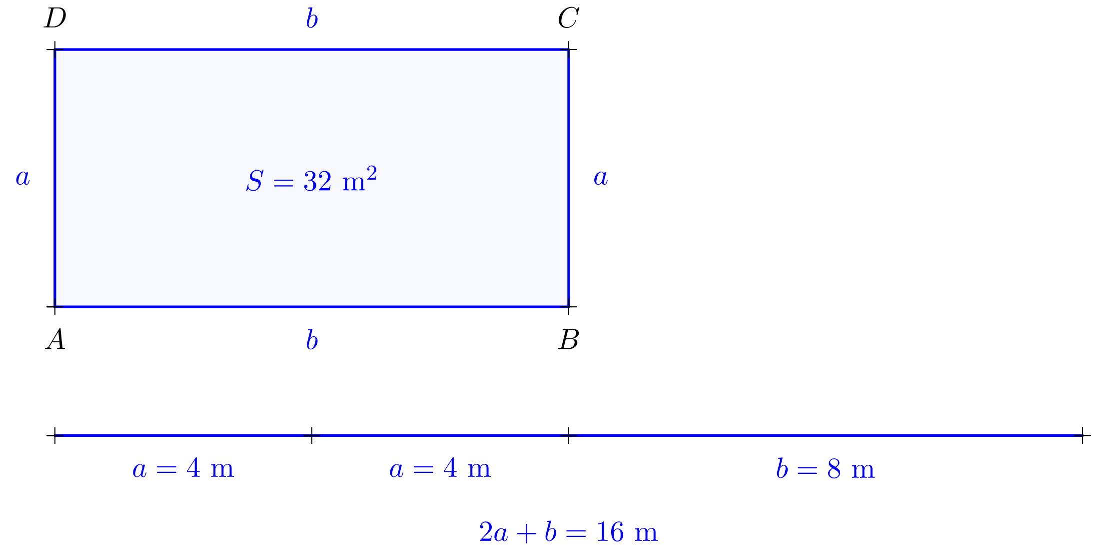
$$2a + b = 16 \text{ m}. \tag{2.52}$$

Nejprve si na přímku naneseme $2\times$ libovolnou délku strany a. Ze znalosti celkové délky (rovnice 2.52) stanovíme délku strany b a vypočteme obsah obdélníku, viz Obr. 2.18.



Obrázek 2.18: Obrázek 2 k řešení příkladu

Poměr stran a, b měníme, dokud nedosáhneme jejich maximálního součinu (maximálního obsahu obdélníku).



Obrázek 2.19: Obrázek 3 k řešení příkladu

Odpověď: Terasa bude mít rozměry 8×4 m.

Pozn. Úlohu o nalezení maximální plochy lze vyřešit i pomocí znalosti vysokoškolské matematiky, konkrétně pomocí základů diferenciálního počtu.

Hledáme maximální obsah obdélníku, pro který platí

$$2a + b = 16. \tag{2.53}$$

Vztah 2.53 vložíme do vzorce pro výpočet obsahu obdélníku:

$$S = a \cdot b \tag{2.54}$$

$$S = a \cdot (16 - 2a). \tag{2.55}$$

K nalezení maxima funkce použijeme její 1. derivaci

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = (16 - 2a) + a. \tag{2.56}$$

Funkde má v bodě a maximum, když je její 1. derivace rovna 0 ($\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = 0$), proto

$$0 = (16 - 2a) + a \cdot (-2) \tag{2.57}$$

$$0 = 16 - 4a \tag{2.58}$$

$$4a = 16 \tag{2.59}$$

$$a = 4 \text{ m}. \tag{2.60}$$

Výslednou hodnotu $a = 4$ dosadíme vztahu 2.53 a vypočteme zbývající délku strany obdélníku:

$$2a + b = 16 \tag{2.61}$$

$$b = 16 - 2a \tag{2.62}$$

$$b = 16 - 8 \tag{2.63}$$

$$b = 8 \text{ m.} \tag{2.64}$$

Ověření, že se opravdu jedná o maximum, pomocí 2. derivace:

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}a^2} < 0 \tag{2.65}$$

Pokud platí nerovnost 2.65, pak se skutečně jedná o maximum funkce. 2. derivace funkce je tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}a^2} = -4. \tag{2.66}$$

Jelikož $-4 < 0$, pak nerovnost 2.65 platí. Tím jsme ověřili, že se skutečně jedná o maximum.

2.2 Geometrický průměr

Příklad 2.2.1

Manželé Novákovi si na zahradě chtějí postavit bazén ve tvaru kvádru o rozměrech $a = 8$ m, $b = 4$ m a $c = 2$ m. Jelikož stavební firma dodává tento typ bazénů o dost dráže nežli bazény ve tvaru krychle, rozhodli se manželé ušetřit a pořídit si bazén krychlový s podmínkou, že objem bazénu se zachová. Jaké rozměry bude mít krychlový bazén?

Numerické řešení

Při řešení příkladu vycházíme z rovnosti objemů kvádru a krychle

$$V_{\square} = V_{\square}, \tag{2.67}$$

$$(a')^3 = abc, \tag{2.68}$$

$$a' = \sqrt[3]{abc}. \tag{2.69}$$

Po úpravě vztahu 2.67 získáme vzorec pro výpočet geometrického průměru čísel a, b, c. Na závěr dosadíme rozměry bazénu ve tvaru kvádru do vzorce, a tím získáme rozměry bazénu ve tvaru krychle.

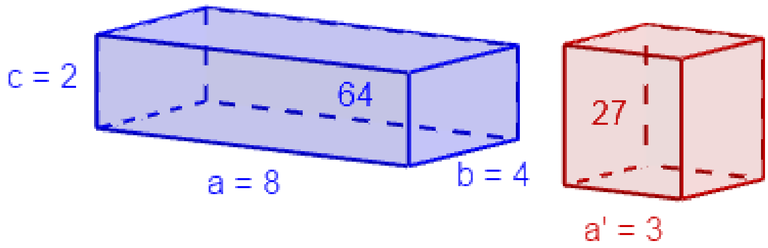
$$a' = \sqrt[3]{8 \cdot 4 \cdot 2}, \tag{2.70}$$

$$a' = 4 \text{ m}. \tag{2.71}$$

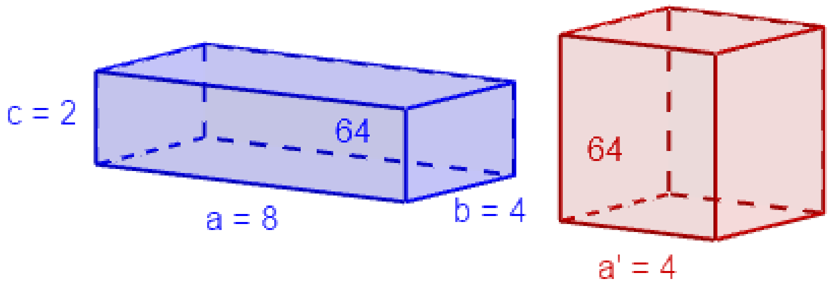
Odpověď: Bazén ve tvaru krychle bude mít hrany o délce 4 m.

Grafické znázornění řešení

Nejprve si zkonstruujeme kvádr o rozměrech $a = 8$ m, $b = 4$ m a $c = 2$ m a necháme si v GeoGebře zobrazit hodnotu jeho objemu. Poté si sestrojíme krychli o libovolné délce hrany a opět si zobrazíme hodnotu jejího objemu, viz Obr. 2.20. Délku hrany krychle měníme, dokud se objem kvádru a krychle nebude rovnat, viz Obr. 2.21.



Obrázek 2.20: Obrázek 1 k řešení příkladu



Obrázek 2.21: Obrázek 2 k řešení příkladu

Z Obr. 2.21 vyplývá, že krychlový bazén o délce hrany $a' = 4$ m má stejný objem jako zadaný bazén ve tvaru kvádru.

Odpověď: Bazén ve tvaru krychle bude mít hrany o délce 4 m.

Příklad 2.2.2

David si chce se svou přítelkyní postavit dům. Jelikož je zběhlý ve stavebním právu, ví, že musí postavit dům do 150 m^2 zastavěné plochy, aby se vyhnuli žádosti o stavební povolení a měli dům pouze na ohlášení stavby. Původně chtěli obdélníkový půdorys, nicméně stavební úřad vyžaduje čtvercový, aby se nelišil od ostatních domů v řadové zástavbě. O jaké maximální délce strany musí být čtvercový půdorys (v celých číslech)?

Numerické řešení

Při řešení tohoto příkladu vycházíme z rovnosti obsahů čtverce a obdélníku.

$$S_{\square} = S_{\boxed{}}, \tag{2.72}$$

$$a^2 = bc, \tag{2.73}$$

$$a = \sqrt{bc}. \tag{2.74}$$

Opět si můžeme povšimnout, že úpravou vztahu 2.72 jsme dostali vzorec pro výpočet geometrického průměru dvou čísel. Pro dokončení této úlohy stačí dosatit údaje ze zadání do předchozí rovnice.

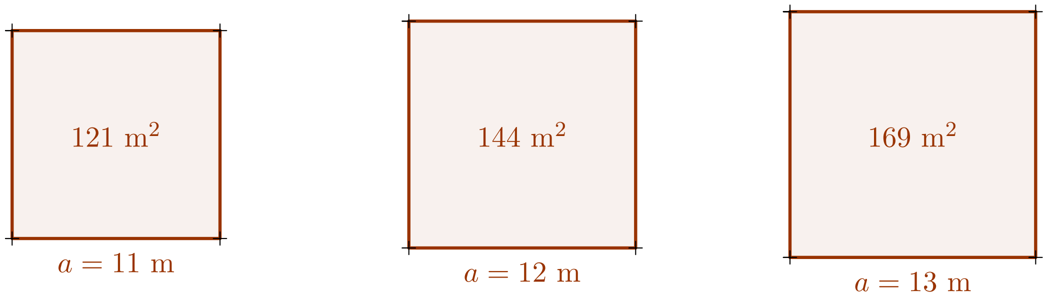
$$a = \sqrt{150}, \tag{2.75}$$

$$a = 12,25 \text{ m}. \tag{2.76}$$

Odpověď: Délka strany čtvercového půdorysu musí být maximálně 12 m.

Grafické znázornění řešení

Sestrojíme si čtverec o libovolné délce strany a tu postupně měníme, viz Obr. 2.22. Jak můžeme na obrázku vidět, maximální délka strany a musí být 12 m.



Obrázek 2.22: Obrázek k řešení příkladu

Odpověď: Délka strany čtvercového půdorysu musí být maximálně 12 m.

Příklad 2.2.3

Roman si koupil na dražbě cenný obraz. První rok po koupi obrazu stoupla jeho hodnota o 60%, druhý rok o dalších 100% a třetí rok o 150%. O kolik % průměrně stoupla jeho hodnota každý rok?

Numerické řešení

Zápis:		
1. rok	o 60 % více	(1,6 - krát více)
2. rok	o 100 % více	(2 - krát více)
3. rok	o 150 % více	(2,5 - krát více)
Průměrně	o ? % více	(x - krát více)

Označme si $a = 1,6$; $b = 2$ a $c = 2,5$. Nyní se podívejme, jak rostla hodnota obrazu v čase:

Rok	Konečná hodnota
začátek 1. roku	počáteční hodnota
konec 1. roku	(počáteční hodnota)·a
konec 2. roku	((počáteční hodnota)·a)·b
konec 3. roku	(((počáteční hodnota)·a)·b) ·c

Vidíme, že na konci monitorovaného období stoupla hodnota obrazu o součin čísel a, b, c. My ovšem hledáme takové číslo x, o jehož násobek každý rok průměrně stoupla hodnota obrazu:

$$x^3 = abc. \tag{2.77}$$

Nyní jen stačí dosadit hodnoty ze zadání a provést výpočet:

$$x^3 = 1,6 \cdot 2 \cdot 2,5, \tag{2.78}$$

$$x^3 = 8, \tag{2.79}$$

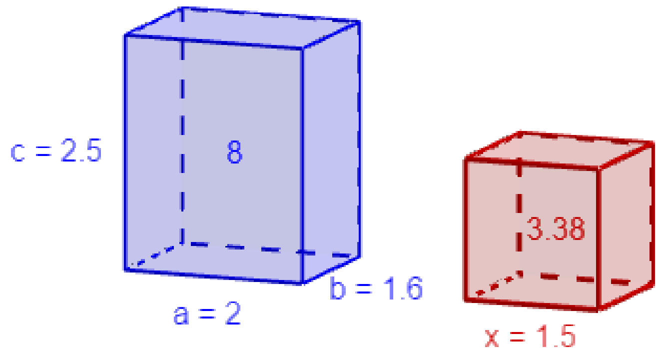
$$x = \sqrt[3]{8}, \tag{2.80}$$

$$x = 2. \tag{2.81}$$

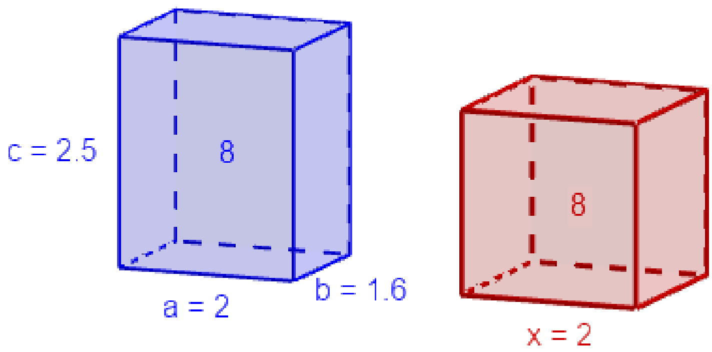
Odpověď: Průměrně se hodnota obrazu každým rokem zdvojnásobí.

Grafické znázornění řešení

Jak již v numerickém řešení vidíme, hledáme takové x, jehož třetí mocnina je rovna součinu čísel a, b, c. Součin čísel a, b, c můžeme graficky znázornit jako kvádr o objemu rovnému přesně tomuto součinu. Oproti tomu grafické znázornění x^3 nalezneme ve formě krychle o délce hrany x. Našim úkolem je tedy nalézt takovou délku hrany x, při níž jsou si hodnoty objemů krychle a kvádru rovny, viz Obr. 2.24.



Obrázek 2.23: Obrázek 1 k řešení příkladu

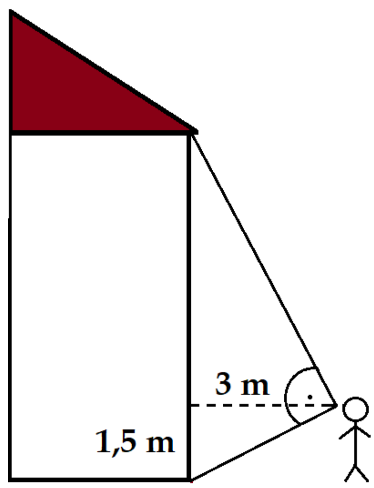


Obrázek 2.24: Obrázek 2 k řešení příkladu

Odpověď: Průměrně se hodnota obrazu každým rokem zdvojnásobí.

Příklad 2.2.4

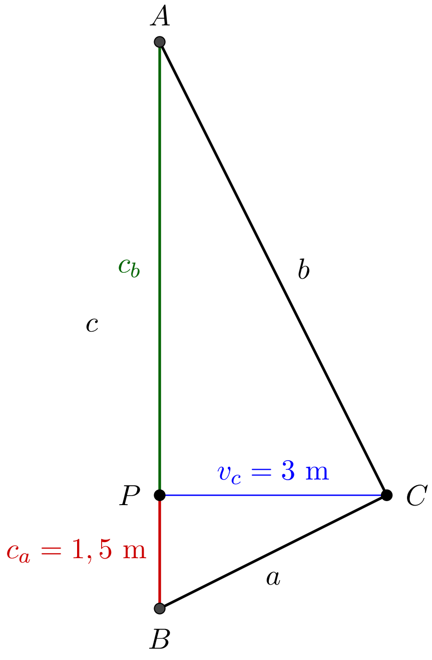
Klárka, $1,5$ m vysoká dívka, stojí před svým domem ve vzdálenosti 3 m. Úhel jejího pohledu od země po střechu domu je 90°. Jak vysoký je dům od země po střechu?



Obrázek 2.25: Obrázek k zadání příkladu

Numerické řešení

K řešení této úlohy využijeme Euklidovu větu o výšce, které jsme se věnovali v oddíle o geometrickém průměru 1.2.



Obrázek 2.26: Obrázek k řešení příkladu

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b \tag{2.82}$$
$$c_b = \frac{v_c^2}{c_a}, \tag{2.83}$$
$$c_b = \frac{9}{1,5}, \tag{2.84}$$
$$c_b = 6 \text{ m.} \tag{2.85}$$

Využitím Euklidovy věty o výšce jsme vypočítali délku úsečky c_b. Aby jsme získali celkovou výšku domu, musíme k ní připočíst výšku Kláry c_a:

$$c = c_b + c_a \tag{2.86}$$
$$c = 6 + 1,5 \tag{2.87}$$
$$c = 7,5 \text{ m.} \tag{2.88}$$

Odpověď: Dům je od země po střechu vysoký $7,5$ m.

2.3 Harmonický průměr

Příklad 2.3.1

Je pátek, venku je sychravo a Tomáš vyráží do školy. Dnes ho čeká zkoušení, tudíž se do školy nijak nehrne. Po příchodu do školy se Tomáš podíval na mobil a zjistil, že rychlost chůze byla pouhých 5 km/h. Po skončení výuky bylo venku již pěkné počasí, a proto Tomáš utíkal rychle domů, aby se převlékl a mohl si jít hrát ven s kamarády. To už mu cesta trvala kratší dobu a jeho průměrná rychlost byla 9 km/h. Vypočtěte celkovou průměrnou rychlost Tomáše z obou cest.

Numerické řešení

Zápis:		
1. cesta	$v_1 = 5$	km/h
2. cesta	$v_2 = 9$	km/h
Průměrná rychlost	?	km/h

Opět budeme při řešení úlohy vycházet ze vzorce 2.1. Jedinou neznámou je čas t chůze Tomáše. Nejprve si určíme dílčí čas t_1 odpovídající rychlosti v_1 a čas t_2 odpovídající rychlosti v_2.

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \tag{2.89}$$

$$t_2 = \frac{s}{v_2}. \tag{2.90}$$

Celkový čas je roven součtu časů t_1 a t_2

$$t = t_1 + t_2, \tag{2.91}$$

$$t = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}. \tag{2.92}$$

S využitím vzorce pro výpočet rychlosti 2.1 můžeme přikročit k výpočtu. Je nutno mít na zřeteli, že celková dráha, kterou Tomáš ušel, je rovna $2s$.

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}}, \tag{2.93}$$

$$v = \frac{2s}{s \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} \tag{2.94}$$

Po vykrácení dostáváme známý vztah 1.34 pro výpočet harmonického průměru dvou hodnot

$$v = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}, \tag{2.95}$$

$$v = \frac{2}{\frac{1}{5} + \frac{1}{9}}, \tag{2.96}$$

$$v = 6,4 \text{ km/h}. \tag{2.97}$$

Odpověď: Průměrná rychlost chůze Tomáše je $v = 6,4$ km/h.

Grafické znázornění řešení

K zobrazení řešení využijeme, podobně jako v Příklad 2.1.1, graf závislosti dráhy s na čase t. Ze zadání příkladu je známa rovnost drah $s_1 = s_2$, ovšem čas je neznámý. K vyjádření závislosti dráhy na čase nám poslouží znalost rychlostí v_1, v_2. Opět využijeme notoricky známý vzorec 2.1 pro výpočet rychlosti, který je v tomto grafickém znázornění roven tangentě příslušného úhlu.

$$v = \frac{s}{t} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přilehlá odvěsna}}$$

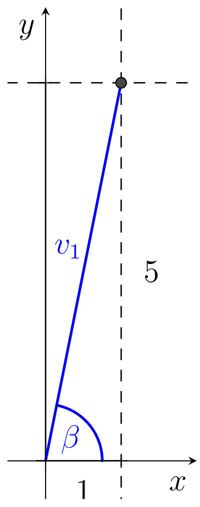
$$v = \tan(\alpha) \qquad \tan(\alpha) = \frac{s}{t}$$

Konkrétně pro rychlost v_1, v_2 dostaneme následující:

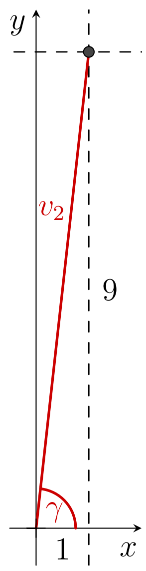
$$\tan(\beta) = v_1 \qquad \tan(\gamma) = v_2$$

$$\tan(\beta) = \frac{5}{1} \qquad \tan(\gamma) = \frac{9}{1}$$

Grafické znázornění úhlu β odpovídajícímu rychlosti v_1 nalezneme na Obr. 2.27a, zatímco úhlu γ odpovídajícímu rychlosti v_2 na Obr. 2.27b.



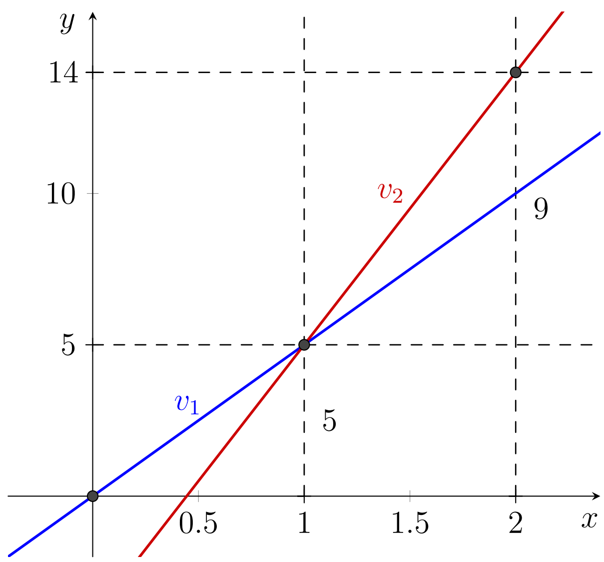
(a) $\tan(\beta) = v_1$



(b) $\tan(\gamma) = v_2$

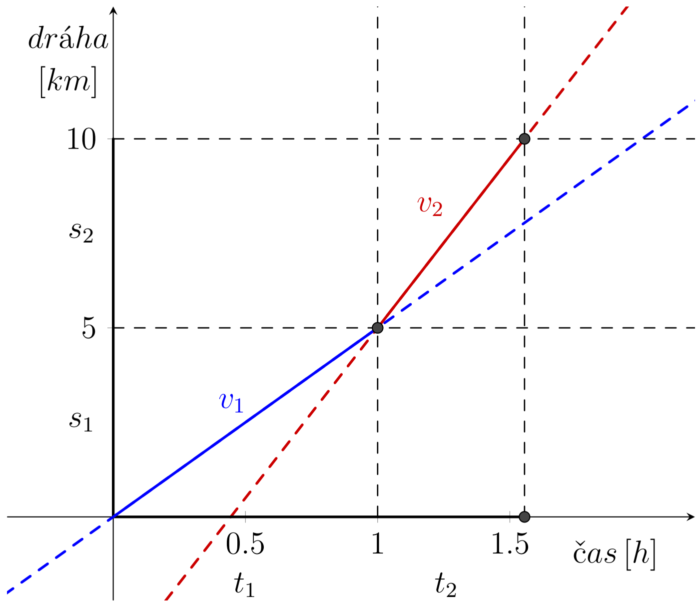
Obrázek 2.27: Obrázek 1 k řešení příkladu

Nyní si tyto přímky zobrazme v jednom grafu (Obr. 2.28). Jako první sestrojíme přímku v_1, která bude procházet počátkem. Na ni bude v bodě (1,5) navazovat přímka v_2.



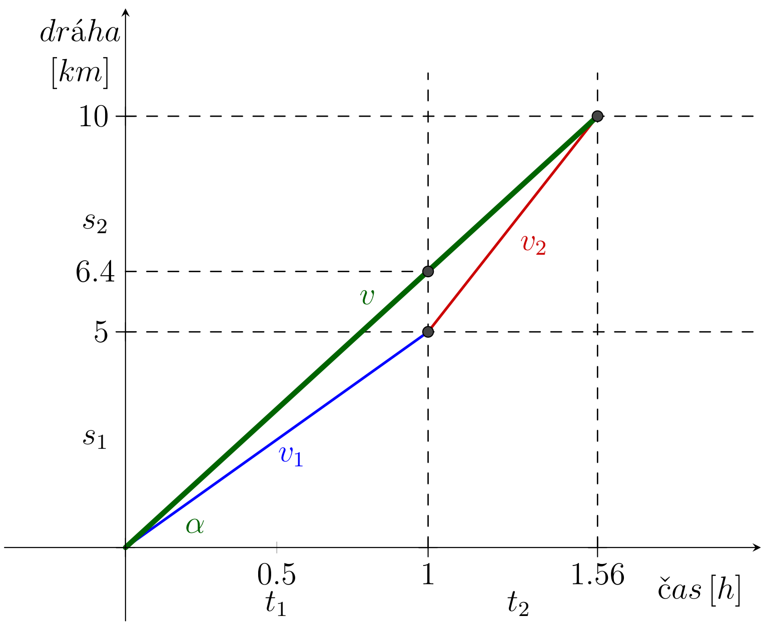
Obrázek 2.28: Obrázek 2 k řešení příkladu

Posledním krokem k sestrojení grafu je vymezení úseček na přímkách v_1, v_2 takovým způsobem, aby platila rovnost $s_1 = s_2$. Z praktických důvodů si zvolme velikost každé z drah rovnu 5 km. Abychom této velikosti dosáhli, je nutno ořezat přímku v_1 pomocí kolmic na svislou osu v bodech (0,0) a (0,5). Obdobným způsobem, kolmicemi na svislou osu v bodech (0,5) a (0,10), ořežeme i přímku v_2, viz Obr. 2.29.



Obrázek 2.29: Obrázek 3 k řešení příkladu

Pomocí spojnice počátečního a koncového bodu získáme úsečku v, která vyjadřuje konstantní přírůstek dráhy v závislosti na čase. Hledanou průměrnou rychlost chůze Tomáše nalezneme jako průnik kolmice k vodorovné ose v bodě (1,0) a úsečky v. Hodnota y-ové souřadnice bodu průniku odpovídá dráze, kterou Tomáš ujde za hodinu, tudíž průměrná rychlost jeho chůze je $6,4$ km/h.



Obrázek 2.30: Obrázek 4 k řešení příkladu

Odpověď: Průměrná rychlost chůze Tomáše je $v = 6,4$ km/h.

Příklad 2.3.2

Čtyři kamarádi začnou ve stejný čas číst knížku Harry Potter a Kámen mudrců. Michal ji přečte za 3 dny, Petr za 5 dní, Kryštof za 6 dní a Filip za 10 dní. Za jak dlouho přečte tuto knihu jedno z čtyřčat, pokud každé čtyřče čte stejně rychle a mají dohromady přečíst 4 knihy za stejnou dobu jako naši čtyři kamarádi? Jinak řečeno, jaká je průměrná doba čtení této knihy v této skupině čtyř kamarádů?

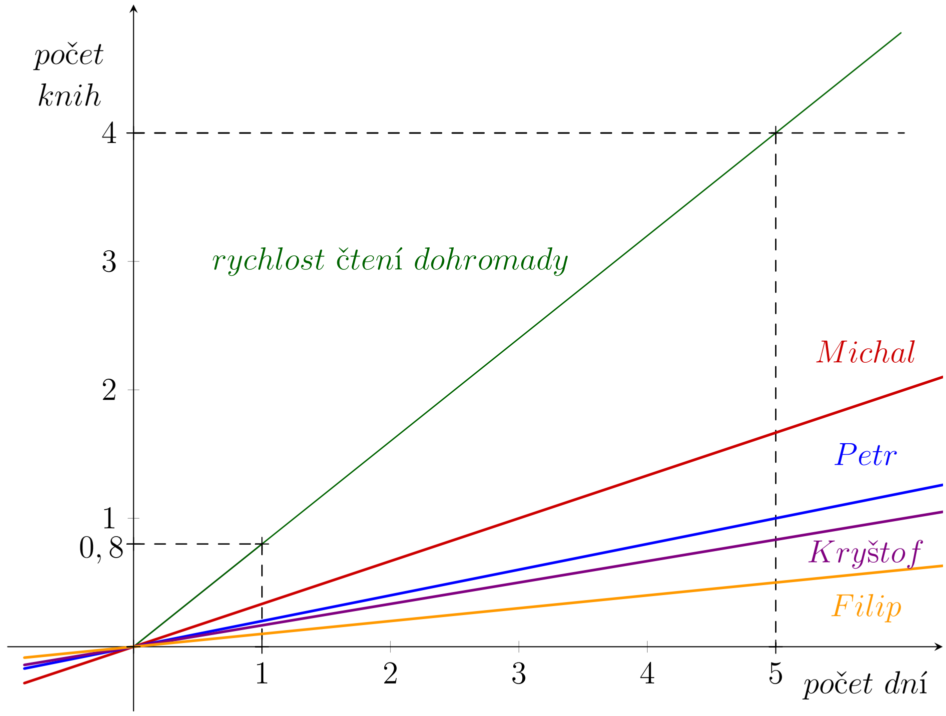
Řešení

Zápis:		
Michal	za 3	dny
Petr	za 5	dní
Kryštof	za 6	dní
Filip	za 10	dní

Nyní si vyjádříme, jakou část knihy přečte každý z kamarádů za den:

Michal	1/3	knihy
Petr	1/5	knihy
Kryštof	1/6	knihy
Filip	1/10	knihy

Dohromady přečtou kamarádi za den $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\right)=0,8$ knihy. Uvědomme si, že každý čte svou vlastní knihu, tzn. celkový počet knih je roven 4, viz Obr. 2.31.



Obrázek 2.31: Obrázek k řešení příkladu

Pokud tedy tito kamarádi přečtou za den $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\right)$ knihy, musíme zjistit, kolik dní jim trvá přečtení všech 4 knih:

$$x\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\right) = 4 \tag{2.98}$$

$$x = \frac{4}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}} \tag{2.99}$$

$$x = 4\cdot\frac{30}{24} \tag{2.100}$$

$$x = \frac{120}{24} \tag{2.101}$$

$$x = 5 \tag{2.102}$$

Odpověď: Průměrná rychlost čtení knihy Harry Potter a Kámen mudrců je mezi kamarády 5 dní.

Pozn. Povšimněme si podobnosti mezi vztahem 2.99 a vzorcem pro výpočet harmonického průměru pro n hodnot 1.29 definovaném v oddíle 1.3.

Příklad 2.3.3

Pan Novák chce vyčerpat vodu ze studny. Doma má staré čerpadlo, kterému to bude trvat 3 hodiny. Jeho soused má novější čerpadlo, které vyčerpá vodu ze studny za 2 hodiny. Jak dlouho by trvalo vyčerpat studnu při využití obou čerpadel zároveň?

Numerické řešení

Zápis:		
staré čerpadlo	za 3	hodiny
nové čerpadlo	za 2	hodiny
dohromady	za x	hodin

Dále si vyjádříme, kolik vody vyčerpá každé z čerpadel za 1 hodinu:

staré čerpadlo	1/3	vody ze studny
nové čerpadlo	1/2	vody ze studny

Pokud by pracovala obě čerpadla zároveň, vyčerpala by za jednu hodinu $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$ celkové vody ve studni. Našim úkolem je zjistit, za kolik hodin by společně vyčerpala všechnu vodu. Hledáme tedy takové x, pro které by platila rovnost 2.103.

$$x\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = 1 \tag{2.103}$$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \tag{2.104}$$

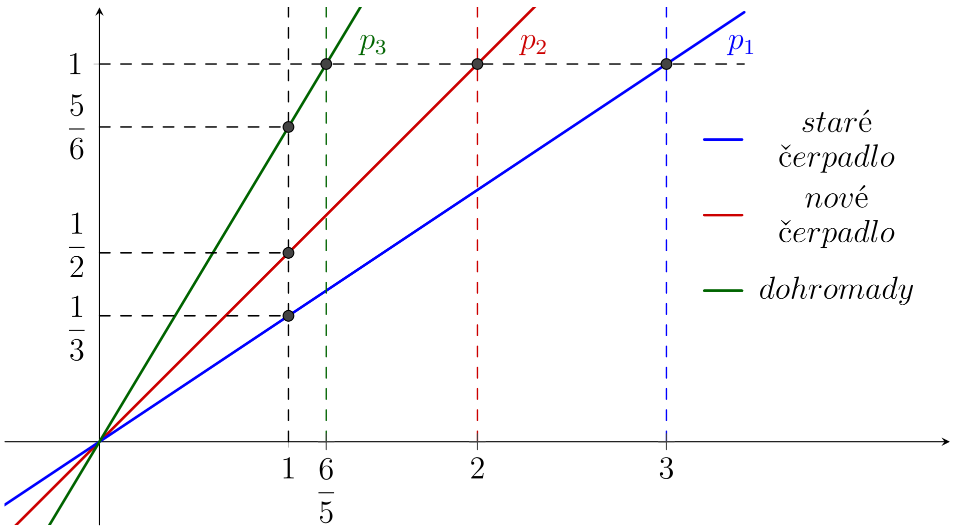
$$x = \frac{6}{5} \tag{2.105}$$

$$x = 1\frac{1}{5} \tag{2.106}$$

Odpověď: Obě čerpadla zároveň vyčerpají vodu ze studny za $1\frac{1}{5}$ hodiny (1 hodinu a 12 minut).

Grafické znázornění řešení

Vytvoříme si graf závislosti množství odčerpané vody ze studny na čase. Do něj vyneseme postupně přímku p_1 vyjadřující rychlost čerpání starého čerpadla, p_2 odpovídající rychlosti čerpání nového čerpadla a nakonec přímku p_3 pro čerpání pomocí obou čerpadel současně. Například přímku p_1 dostaneme jako spojnici bodu (0,0) a $(1,\frac{1}{3})$. U zbylých přímek postupujeme analogicky, viz Obr. 2.32.



Obrázek 2.32: Obrázek k řešení příkladu

Dále nalezneme průsečík přímky p_3 s kolmicí na svislou osu v bodě (0,1). X-ová souřadnice tohoto průsečíku nám udává dobu potřebnou k vyčerpání studny za využití obou čerpadel současně.

Odpověď: Obě čerpadla zároveň vyčerpají vodu ze studny za $\frac{6}{5}$ hodiny (1 hodinu a 12 minut).

Příklad 2.3.4

Zednický mistr postaví zeď délky 1 m, výšky $2,75$ m a tloušťky 300 mm z cihel pálených za 3 hodiny. Jeho syn, který se teprve zaučuje, by tuto práci vykonal za dvojnásobný čas. První hodinu staví zeď společně, poté ale syn odjíždí na fotbal a mistr pracuje sám. Urči, za jak dlouho mistr práci bez syna dokončí.

Numerické řešení

Nejprve si stanovíme dobu trvání stavby zdi, kterou provádí mistr a jeho syn společně.
Zápis:

mistr	za 3	hodiny
syn	za 6	hodin
dohromady	za t	hodin

Dále si stanovme, jakou část zdi postaví za 1 hodinu:

mistr	1/3	zdi
syn	1/6	zdi

Dohromady za 1 hodinu postaví $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$ zdi. Našim úkolem je zjistit, za jak dlouho postaví společně celou zeď, tj. hledáme takové t, pro které platí:

$$t\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) = 1 \qquad (2.107)$$

$$t = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \qquad (2.108)$$

$$t = 2\ \text{h} \qquad (2.109)$$

Zjistili jsme, že společně by zeď postavili za 2 hodiny. Ovšem po hodině práce syn odešel na fotbal. Z toho vyplývá, že společně stihli postavit pouze polovinu zdi. Druhou polovinu zdi staví již mistr sám. Ke zjištění doby potřebné pro dostavbu zdi využijeme přímou úměru.

100%	3	hodiny
50%	u	hodin

$$\frac{u}{3} = \frac{50}{100}$$

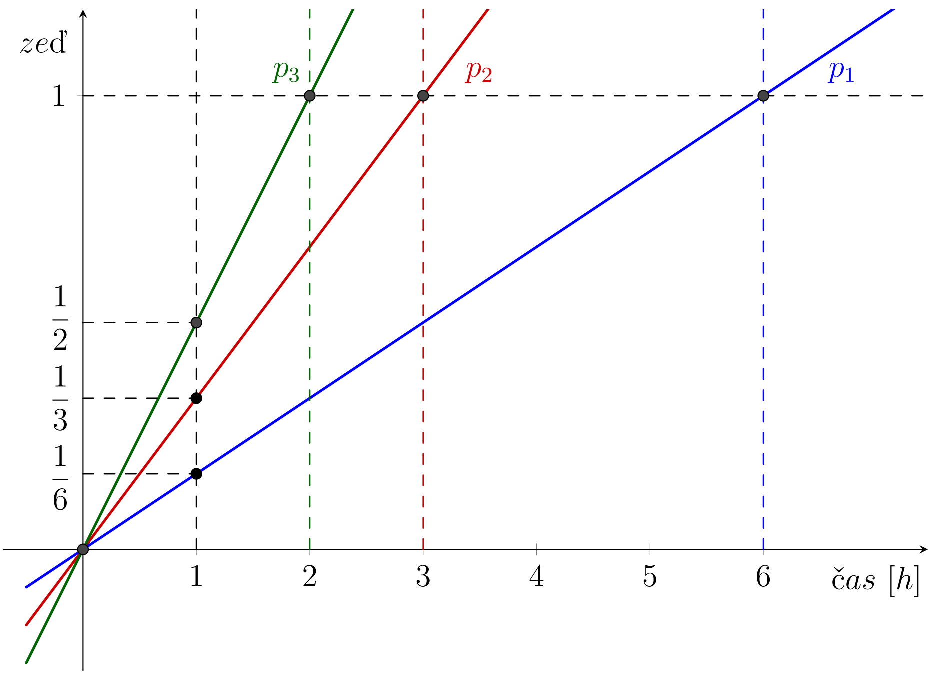
$$u = \frac{150}{100}$$

$$u = 1,5\ \text{h}$$

Odpověď: Po odchodu syna dokončil mistr stavbu zdi za 1,5 hodiny.

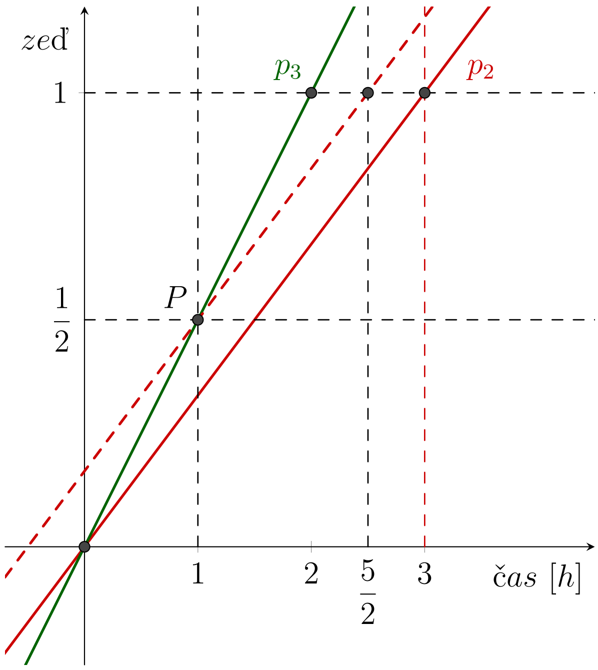
Grafické znázornění řešení

První část grafického řešení (Obr. 2.33) sestává ze znázornění doby trvání práce syna p_1, mistra p_2 a jejich společné práce p_3. Při řešení této části postupujeme obdobně jako v Příklad 2.3.3, tzn. na vodorovnou osu si vyneseme kolmici v bodě (1,0) a na svislou osu postupně kolmice v bodech $(0,\frac{1}{6})$, $(0,\frac{1}{3})$ a $(0,\frac{1}{2})$. Vzniklé průsečíky těchto kolmic spojíme s počátkem, z čehož nám vzniknou přímky p_1, p_2 a p_3.



Obrázek 2.33: Obrázek 1 k řešení příkladu

V další části grafického řešení hledáme, jak dlouho bude trvat práce samotnému mistrovi po odchodu jeho syna na fotbal. Víme, že syn odešel po jedné hodině, a proto využijeme kolmici v bodě (1,0), kde y-ová souřadnice jejího průsečíku P s přímkou p_3 udává množství postavené zdi za jednu hodinu (Obr. 2.34). Od tohoto okamžiku pracuje mistr na stavbě zdi sám. Rychlost stavby zdi mistrem nám vyjadřuje přímka p_2, tudíž s ní vedeme rovnoběžku procházející průsečíkem P. Jelikož chceme zjistit, jak dlouho pracoval mistr sám, musíme najít průsečík této rovoběžky s kolmicí na svislou osu v bodě (0,1).



Obrázek 2.34: Obrázek 2 k řešení příkladu

X-ová souřadnice nalezeného průsečíku představuje celkovou dobu stavby zdi. Našim úkolem je zjistit, za jak dlouho dokončí mistr práci bez syna. Tuto dobu nám vyjadřuje vzdálenost mezi body (1,0) a ($\frac{5}{2}$,0).

Odpověď: Po odchodu syna dokončil mistr stavbu zdi za 1,5 hodiny.

Závěr

Cílem práce bylo přiblížit problematiku průměrů a jejich využití jak žákům základních/středních škol, tak i jejich učitelům. Konkrétně jsou zde uvedeny tři nejpoužívanější průměry – aritmetický, geometrický a harmonický. Práce je logicky členěna do dvou částí a to na část teoretickou a praktickou.

V teoretické části jsme si představili dané průměry, některé z jejich vlastností a ukázali si jejich grafické znázornění. V závěru této kapitoly jsme se zabývali vztahy mezi těmito průměry a to nejen algebraicky, ale i pomocí grafického znázornění.

Praktická část je rozdělena do tří podkapitol, z nichž se každá věnuje jednomu průměru. Každá z těchto podkapitol obsahuje řešené příklady, které jsou pro daný průměr typické. Řešení každého příkladu je provedeno nejprve početně a poté graficky znázorněno.

Hlavní přínos práce je ve zprostředkování dané problematiky interaktivní formou, což může vést k lepšímu pochopení učiva. Za tímto účelem byl využit matematický software GeoGebra [1], který je, vzhledem ke své jednoduchosti, vhodný pro výuku na základních/středních školách.

GeoGebra ve spojení s profesionálním sázecím systémem LaTeX umožnila vytvoření práce na vysoké grafické úrovni, což, jak se autor domnívá, povede k lepšímu zprostředkování a pochopení učiva.

Literatura

[1] O programu GeoGebra – GeoGebra. *GeoGebra | Free Math Apps - used by over 100 Million Students & Teachers Worldwide* [online]. 2018 [cit. 2019-03-31]. Dostupné z: `<https://www.geogebra.org/about>`

[2] BULLEN, P. S. *The Arithmetic, Geometric and Harmonic Means*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2003, ISBN 978-94-017-0399-4, s. 60–174, doi:10.1007/978-94-017-0399-4_2. Dostupné z: `<https://doi.org/10.1007/978-94-017-0399-4_2>`

[3] HAJJA, M. Some Elementary Aspects of Means. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, ročník 2013, 2013: s. 1–9, ISSN 0161-1712, doi:10.1155/2013/689560. Dostupné z: `<http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2013/689560/>`

[4] HEATH, T. L. *A history of Greek mathematics*. New York: Dover Publications, první vydání, 1981, ISBN 978-0486240732.

[5] TANTAU, T. Ti*k*Z and PGF: Manual for version 1.18. In: *Trustees of Boston University [US]*[online]. Lübeck: Institut für Theoretische Informatik, 2007 [cit. 2019-03-31]. Dostupné z: `<https://www.bu.edu/math/files/2013/08/tikzpgfmanual.pdf>`

[6] TRÁVNÍČEK, S.; CALÁBEK, P.; ŠVRČEK, J. *Matematická analýza I*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, první vydání, 2014, ISBN 978-80-244-4117-7.

[7] WASSELL, S. Rediscovering a family of means. *The Mathematical Intelligencer*, ročník 24 (2), 2002: s. 58–65, doi:10.1007/BF03024619.

[8] ZDRÁHAL, T. Průměry kolem nás. In: *Sborník příspěvků konference Motivace nadaných žáků a studentů v matematice a přírodních vědách II.* Brno: Masarykova univerzita, MSD Brno, 2013, s. 96–101.

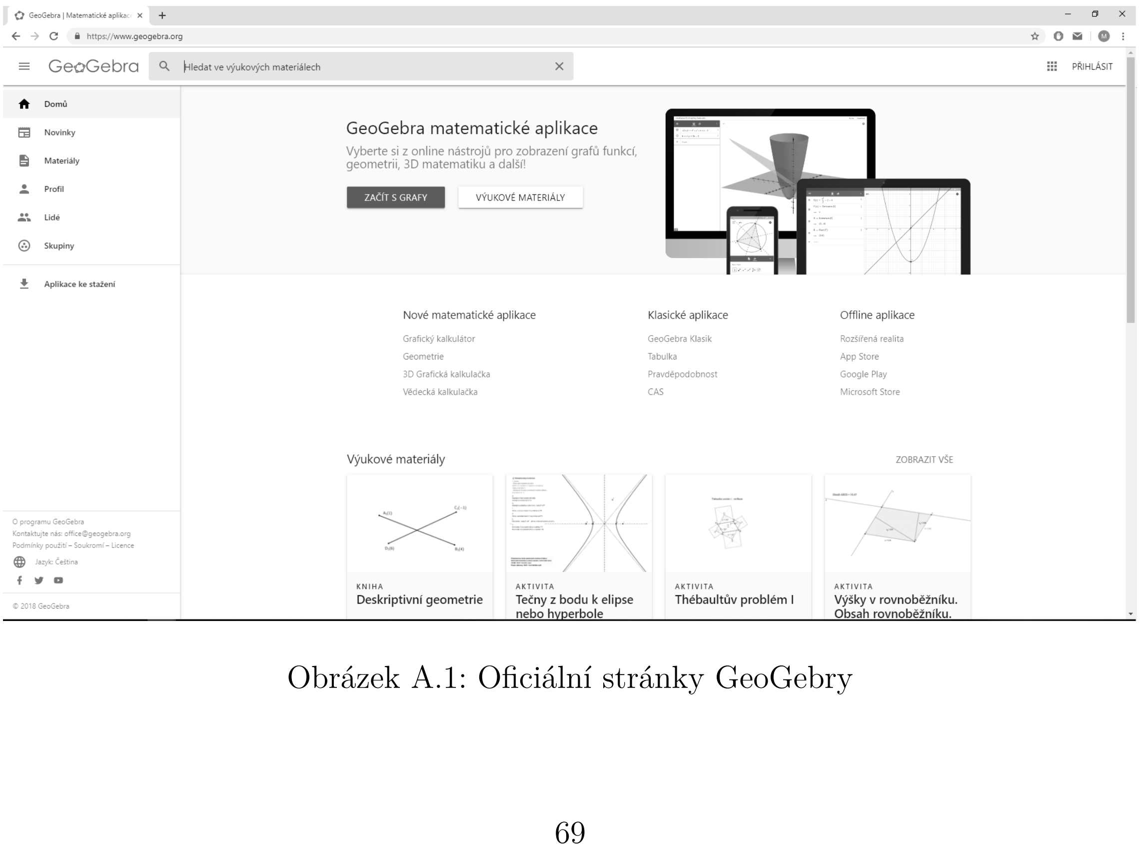
[9] ZHOUF, J. *Dostal žák správnou známku? aneb Pojednání o průměrech* [online]. 2012 [cit. 2019-04-18]. Dostupné z:
`<http://mates.upol.cz/Services/AttachmentHandler.ashx?id=181&type=1>`

Přílohy

Příloha A

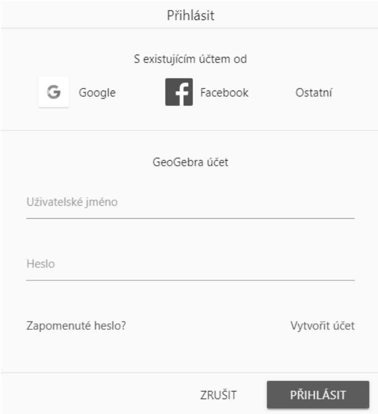
Jak již bylo řečeno, GeoGebra je dynamický matematický software, který umožňuje interaktivně znázornit situace/úlohy z oblasti analytické geometrie, matematické analýzy, algebry, statistiky apod. [1]. Software je volně dostupný na oficiálních stránkách GeoGebry a uživatel jej může využít ve dvou formách. První formou je stažení instalačního souboru, pomocí kterého si jej uživatel nainstaluje do svého počítače, notebooku. Druhou formou je online aplikace, která umožňuje uživateli pracovat bez nutnosti instalace.

GeoGebra umožňuje založit si uživatelský účet a veškerou svou práci si zde ukládat, popř. ji sdílet s veřejností. K vytvoření účtu stačí na oficiálních stránkách GeoGebry kliknout na tlačítko Přihlásit (v pravém horním rohu), viz Obr. A.1.



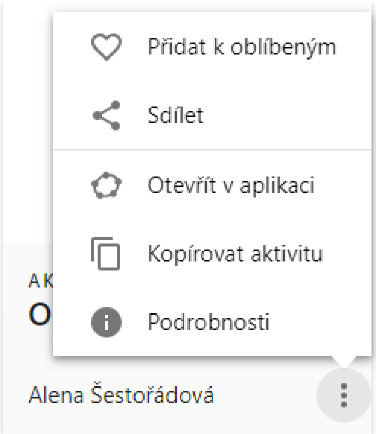
Obrázek A.1: Oficiální stránky GeoGebry

Po stisknutí tlačítka Přihlásit vyskočí okno (Obr. A.2). Zde si nový uživatel zvolí možnost Vytvořit účet (vpravo dole) a poté vyplní registrační formulář.



Obrázek A.2: GeoGebra – vytvoření účtu

Obrázky vytvořené v této práci si může čtenář prohlédnout a pracovat s nimi i bez registrace a to na oficiálních stránkách GeoGebry. K jejich rychlému nalezení stačí na této stránce vyhledat příjmení autora nebo název této práce. Poté se zobrazí veškeré obrázky autora. U vybraného obrázku kliknete na tři tečky v pravém dolním rohu a vyberete jednu z možností, viz Obr. A.3. Tímto postupem naleznete obrázky



Obrázek A.3: GeoGebra

využité v této práci a dle Vašeho uvážení s nimi můžete pracovat. Pokud některého z Vás tento software zaujal natolik, že by jej chtěl sám v budoucnu využívat, přikládá autor práce odkazy na návody a manuály pro práci s GeoGebrou. Ty jsou dostupné na stránkách níže uvedených:

https://www.geogebra.org/m/zwbyag58

https://wiki.geogebra.org/cs/Kategorie:Manuál_(oficiální)