

**Univerzita Hradec Králové**  
**Přírodovědecká fakulta**  
**Katedra matematiky**

**Řešení nelineárních rovnic za použití  
matematických numerických metod a jejich  
aplikace ve fyzice**

**Bakalářská práce**

Autor: Damián Bušovský  
Studijní program: B1701 Fyzika  
Studijní obor: Fyzika se zaměřením na vzdělávání,  
Matematika se zaměřením na vzdělávání  
Vedoucí práce: Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny prameny, ze kterých jsem vycházel.

V Hradci Králové dne

Jméno a příjmení

Poděkování:

Děkuji Mgr. Jitce Kühnové, Ph.D. za její ochotu při vedení této bakalářské práce. Dále chci poděkovat RNDr. Danielu Jezberovi za pomoc při hledání vhodné fyzikální aplikace numerických matematických metod.

## **Anotace**

BUŠOVSKÝ, D. *Řešení nelineárních rovnic za použití matematických numerických metod a jejich aplikace ve fyzice*. Hradec Králové, 2017. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Jitka Kühnová. 60 s.

Předmětem této práce je podrobné popsání řešení nelineárních rovnic za využití numerických matematických metod, konkrétně pak metody půlení intervalů, prosté iterace, Newtonovy metody, metody sečen a metody regula falsi, a jejich následná aplikace při řešení fyzikálních problémů. Teoretická část se zabývá důkazy platnosti výše uvedených metod a jejich podrobným popsáním. Praktická část následně obsahuje řešení konkrétních nelineárních rovnic za využití těchto metod a jejich praktické využití ve fyzikální problematice.

## **Klíčová slova**

numerické matematické metody, řešení nelineárních rovnic, metoda bisekce, metoda prosté iterace, Newtonova metoda, metoda sečen, metoda regula falsi

## **Annotation**

BUŠOVSKÝ, D. *Solving nonlinear equations using mathematical numerical methods and their applications in physics*. Hradec Králové, 2017. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Jitka Kühnová. 60 p.

The aim of this work is a detailed description of solving nonlinear equations while using numerical mathematical methods, namely bisection method, iteration, Newton's method, secant method, regula falsi method and their subsequent application in solving physical problems. The theoretical part deals with proving the validity of the above-mentioned methods and with their thorough description. Practical part contains processes of solving specific nonlinear equations with the use of these methods and their practical application on issues concerning physics.

## **Keywords**

numerical mathematical methods, solving nonlinear equations, bisection method, iteration, Newton's method, secant method, regula falsi

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>Značení</b>	<b>8</b>
<b>1 Numerické metody</b>	<b>9</b>
1.1 Zavedení některých pojmů . . . . .	9
1.2 Metoda bisekce . . . . .	10
1.3 Metoda prosté iterace . . . . .	12
1.4 Newtonova metoda . . . . .	19
1.5 Metoda sečen . . . . .	22
1.6 Metoda regula falsi . . . . .	24
<b>2 Řešené příklady</b>	<b>29</b>
2.1 Metoda bisekce . . . . .	29
2.2 Metoda prosté iterace . . . . .	31
2.3 Newtonova metoda . . . . .	35
2.4 Metoda sečen . . . . .	40
2.5 Metoda regula falsi . . . . .	43
<b>3 Aplikace ve fyzice</b>	<b>49</b>
3.1 Teorie . . . . .	49
3.2 Postup měření . . . . .	52
3.3 Naměřené hodnoty a jejich zpracování . . . . .	53
<b>Závěr</b>	<b>57</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>58</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>59</b>
<b>Literatura</b>	<b>60</b>

# Úvod

Jednou ze základních úloh matematiky je hledání řešení rovnic, pokud je rovnice zapsaná ve tvaru  $f(x) = 0$ , je tato úloha ekvivalentní s hledáním kořene funkce  $f$ . Student se v průběhu svého studia seznámí s algebraickými metodami řešení mnoha typů rovnic. Avšak existuje nekonečně mnoho rovnic, které nejsou algebraicky řešitelné. Uvedme například možnosti řešení rovnic  $f(x) = 0$ , kdy funkce  $f$  je polynomickou funkcí. Takovéto rovnice jsou vždy algebraicky řešitelné, pokud funkce  $f$  je nejvýše stupně 4. Nicméně nutno zmínit skutečnost, že řešení většiny kubických a bikvadratických rovnic je poměrně zdlouhavé. V případech, kdy stojíme před úkolem nalezení řešení nějaké rovnice, která není algebraicky řešitelná, nebo je takto řešitelná, ale postup je příliš komplikovaný, nám mohou dobře posloužit numerické matematické metody řešení nelineárních rovnic ve tvaru  $f(x) = 0$ .

Takovéto metody mají široké uplatnění v programátorské praxi. Každá metoda je charakteristická svým algoritmem, který vede k nalezení přibližného řešení. Převést tyto algoritmy do zdrojového kódu nějakého programovacího jazyka by neměl být ani pro programátora začátečníka problém. Prakticky stačí být obeznámen s funkcí cyklických a podmíněných příkazů.

Cílem této práce je popsat a geometricky interpretovat některé z těchto metod, jmenovitě metodu bisekce, metodu prosté iterace, Newtonovu metodu, metodu sečen a metodu regula falsi. Čtenář bude obeznámen s algoritmy, které mohou vést k úspěšnému určení řešení (nebo aspoň jeho přibližné hodnoty) rovnice  $f(x) = 0$ , resp. kořenu funkce  $f$ , jednotlivých metod a důkazy jejich platnosti. Následně tyto metody budou uplatněny v řešení konkrétních příkladů. Hledání řešení algebraicky neřešitelných, nebo složitě řešitelných rovnic však není pouze záležitostí matematiky, ale i fyziky. Fyzikální úvahy mohou vést k požadavku nalezení řešení takové rovnice, proto poukážeme na aplikaci numerických matematických metod ve fyzikální problematice. Úvodem nutno zdůraznit, že žádná ze zmíněných metod není univerzálním nástrojem pro nalezení všech řešení všech rovnic. Jedním z našich dalších cílů tedy je rozebrat efektivitu řešení některých konkrétních typů rovnic pomocí uvedených metod.

První kapitola je věnována zavedení některých potřebných pojmů, které budou v práci používány, a právě popisu jednotlivých metod. V této kapitole bylo čerpáno z: [1], [3], [4], [6], [7], [9], [11]. Kapitola druhá uvádí řešení konkrétních příkladů a v případě potřeby i jejich stručný rozbor a geometrickou interpretaci iteračních

procesů. V poslední kapitole je zpracováno fyzikální měření, které vede na řešení algebraicky složitě řešitelné rovnice pomocí numerických metod. Uveden je i stručný výtah z fyzikální teorie příslušné k tématu. Ve třetí kapitole bylo čerpáno z: [2], [5], [8], [10].

Jednou ze základních tendencí autora je oddělit teoretické poznatky od výpočtů, proto jsou téměř všechny číselné výpočty uvedeny ve druhé kapitole, popřípadě ve třetí. V rámci celé práce se omezíme pouze na hledání řešení (resp. kořenů) nelineárních rovnic (resp. funkcí) jedné reálné neznámé (resp. proměnné). Výpočty byly realizovány v programu *GNU Octave*, všechny obrázky obsažené v práci byly vytvořeny v programu *Geogebra*.

# Značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$	posloupnost čísel $x_0, x_1, x_2, \dots$
$\mathbf{u}$	vektor $\mathbf{u}$
$V(a), U(a)$	okolí bodu $a$
$D_f, H_f$	definiční obor a obor hodnot funkce $f$
$f', f''$	první a druhá derivace funkce $f$
$D_{f'}, D_{f''}$	definiční obor první a druhé derivace funkce $f$
$C^n \langle a, b \rangle$	množina funkcí se spojitými derivacemi do řádu $n$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$



# Kapitola 1

## Numerické metody

Tématem této kapitoly jsou numerické metody řešení nelineárních algebraických rovnic, kdy algebraickými metodami nejsme schopni získat přesnou hodnotu řešení. Obecně budeme hledat řešení rovnice ve tvaru

$$f(x) = 0, \tag{1.1}$$

kde  $x$  je reálná proměnná a  $f$  je v nějakém smyslu „rozumná“ funkce. Číslo  $\xi$ , které je řešením rovnice (1.1), budeme nazývat kořenem funkce  $f$ .

### 1.1 Zavedení některých pojmů

Každá z následujících uvedených metod je charakteristická svým řádem. Zjednodušeně řečeno, řád metody je číslo určující rychlost konvergence dané metody ke kořeni funkce  $f$ , resp. k řešení rovnice (1.1).

**Definice 1.1.** Necht' posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ , která je výsledkem nějakého iteračního procesu, konverguje k číslu  $\xi$ . Necht' proces neskončí po konečně mnoha krocích, tj.  $\alpha_k \neq 0$  pro všechna  $k \geq 0$ , kde  $\alpha_k = x_k - \xi$ . Existuje-li reálné číslo  $p \geq 1$  takové, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|^p} = c \neq 0,$$

pak řekneme, že iterační proces (iterační metoda) je řádu  $p$  v bodě  $\xi$ .

V této bakalářské práci budeme hojně užívat pojmu spojitě funkce, proto jej řádně zadefinujeme. Začneme definicí spojitosti funkce v bodě.

**Definice 1.2.** Říkáme, že funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a$ , jestliže  $a \in D_f$  a k libovolnému okolí  $U(b)$  bodu  $b = f(a)$  existuje okolí  $V(a)$  bodu  $a$  tak, že pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  platí

$$x \in V(a) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U(b).$$

Nyní uveďme právě definici spojitě funkce.

**Definice 1.3.** Říkáme, že funkce  $f$  je spojitá, je-li spojitá v každém bodě definičního oboru.

Pro potřeby řešení konkrétních příkladů je vhodné se obeznámit se zněním následujících vět.

**Věta 1.1.** *Nechť funkce  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojité v bodě  $b \in B$  a nechť  $c \in \mathbb{R}$ . Pak jsou v bodě  $b$  spojité též funkce  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $cf$ ,  $fg$ ,  $|f|$ , a je-li  $g(b) \neq 0$ , též funkce  $f/g$ .*

*Důkaz.* Lze nalézt v [1, str. 143]. □

**Věta 1.2** (Spojitost složené funkce.). *Nechť funkce  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá v bodě  $a \in A$  a funkce  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá v bodě  $b = g(a)$ ,  $H_g \subset B$ . Pak složená funkce  $F = f \circ g$  je spojitá v bodě  $a$ .*

*Důkaz.* Lze nalézt v [1, str. 143]. □

## 1.2 Metoda bisekce

Tato metoda je metodou vždy konvergentní, jedná se o metodu řádu jedna. Metody tohoto řádu konvergují lineárně. Rychlost konvergence takových metod sice není velká, ale konvergují při libovolné počáteční aproximaci. Metoda bisekce neboli metoda půlení intervalů je založena na následující větě.

**Věta 1.3** (Cauchyova věta o nulové hodnotě.). *Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a platí-li  $f(a)f(b) < 0$ , tj.  $f(a) \neq 0 \neq f(b)$ ,  $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ , pak existuje bod  $\xi \in (a, b)$  tak, že  $f(\xi) = 0$ .*

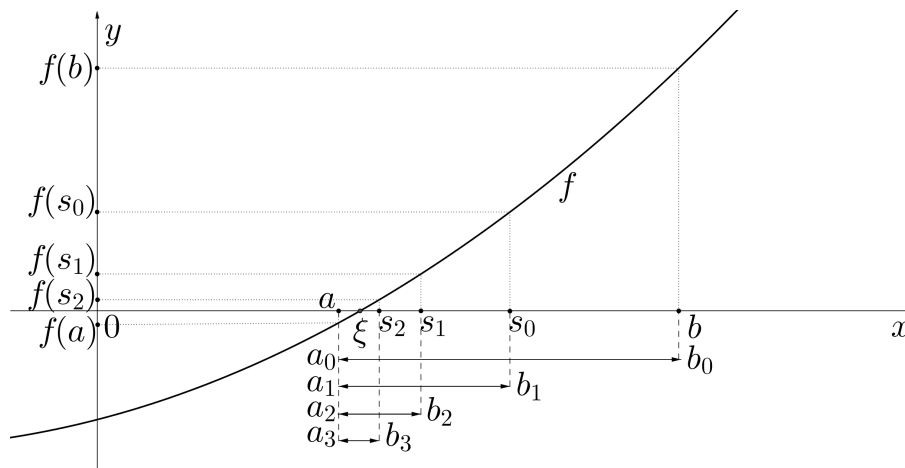
*Důkaz.* Lze nalézt v [1, str. 149]. □

Popišme nyní průběh metody bisekce. Předpokládejme, že funkce  $f$  splňuje podmínky věty 1.3. Dále předpokládejme, že v intervalu  $(a, b)$  leží právě jeden kořen  $\xi$ . Označme  $a = a_0$ ,  $b = b_0$ ,  $s_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ . Je-li  $f(a_0)f(s_0) < 0$ , pak kořen leží v intervalu  $(a_0, s_0)$  a položíme  $a_0 = a_1$ ,  $s_0 = b_1$ . Je-li  $f(s_0)f(b_0) < 0$ , pak kořen leží v intervalu  $(s_0, b_0)$  a položíme  $s_0 = a_1$ ,  $b_0 = b_1$ . Třetí možností je, že funkční hodnota v bodě  $s_0$  je rovna nule, pak je číslo  $s_0$  kořenem funkce  $f$ . Opakováním tohoto postupu získáme posloupnost intervalů

$$(a_0, b_0) \supset (a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \dots (a_n, b_n) \supset \dots,$$

přičemž pro všechna  $i$ , kdy  $i = 0, 1, \dots, n, \dots$ , platí, že  $f(a_i)f(b_i) < 0$ .

Na obrázku 1.1 je vidět, jak volba počátečního intervalu ovlivní následující průběh iterací. V tomto konkrétním případě dolní mez  $a$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  je v porovnání s horní mezí blízko kořene  $\xi$ , proto mají všechny iterační intervaly zobrazené na obrázku 1.1 stejnou dolní mez.



Obrázek 1.1: Iterační průběh metody bisekce

Je zřejmé, že platí

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq \xi,$$

$$\xi \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0.$$

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  je tedy neklesající zdola omezená a  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  nerostoucí shora omezená. Délka intervalu  $(a_n, b_n)$  je dána vztahem

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

tedy pro  $n \rightarrow \infty$  se délka intervalu  $(a_n, b_n)$  bude blížit k nule. Proto platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi.$$

V tuto chvíli lze již snadno dokázat, že  $\xi$  je kořenem funkce  $f$ , jelikož  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a platí  $f(a_n)f(b_n) < 0, n = 0, 1, 2, \dots$ . Z tohoto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) = f^2(\xi) \leq 0.$$

Chceme-li odhadnout chybu metody půlení intervalů, nejprve si znovu uvědomme, že funkce  $f$  je na  $\langle a, b \rangle$  spojitá a že kořen  $\xi$  leží vždy uvnitř intervalu  $\langle a_n, b_n \rangle$ :

$$a_n \leq \xi \leq b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Aproximací kořene  $\xi$  hodnotou  $s_n$  z uvedeného postupu plyne, že

$$|s_n - \xi| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}, \quad s_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

V praxi při řešení určitého příkladu lze předem určit nutný počet iterací pro nalezení intervalu, který obsahuje hledaný kořen, s požadovanou přesností. Přesností budeme v tomto případě rozumět délku posledního nalezeného intervalu, v němž leží kořen  $\xi$ . Postupujme induktivně. Pokud bychom hledali kořen rovnice (1.1) na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak pro odchylku  $\varepsilon$ , která vyjadřuje délku nalezeného intervalu, v němž leží kořen, jednotlivých iteračních kroků platí:

$$\begin{aligned}
0 &: b_0 - a_0 = \varepsilon \\
1 &: \frac{b_0 - a_0}{2} = \varepsilon \\
2 &: \frac{b_0 - a_0}{4} = \varepsilon \\
3 &: \frac{b_0 - a_0}{8} = \varepsilon \\
&\vdots \\
n &: \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Úpravou vztahu pro odchylku  $n$ -tého iteračního kroku získáme vztah vyjadřující nutný počet iterací pro splnění zadané přesnosti:

$$\begin{aligned}
\frac{b_0 - a_0}{2^n} &= \varepsilon \\
\log_2 \left( \frac{b_0 - a_0}{2^n} \right) &= \log_2 \varepsilon \\
\log_2(b_0 - a_0) - n &= \log_2 \varepsilon \\
n &= \log_2(b_0 - a_0) - \log_2 \varepsilon \\
n &= \log_2 \left( \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right). \tag{1.2}
\end{aligned}$$

Závěrem této úvahy si uvědomme, že  $n$  je přirozené číslo. Z tohoto důvodu upravíme rovnici (1.2) do tvaru

$$n \geq \log_2 \left( \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right). \tag{1.3}$$

### 1.3 Metoda prosté iterace

V této sekci se budeme zabývat řešením rovnice (1.1), pomocí hledání řešení ekvivalentní rovnice tvaru

$$g(x) = x. \tag{1.4}$$

Budeme tedy hledat bod  $\xi$ , který je pevným bodem funkce  $g$ . Bod  $\xi$  je pevným bodem funkce  $g$ , pokud platí  $g(\xi) = \xi$ . Pokud jsou rovnice (1.1) a (1.4) ekvivalentní, pak pevný bod  $\xi$  funkce  $g$  je kořenem funkce  $f$  a naopak. Nastávají dvě otázky. Jakým postupem nalézt pevný bod  $\xi$ ? Jak vhodně zvolit funkci  $g$ ? Nejprve se pokusíme odpovědět na první z nich.

**Věta 1.4.** *Nechť  $g \in C \langle a, b \rangle$ ,  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ . Pak funkce  $g$  má v intervalu  $\langle a, b \rangle$  pevný bod. Jestliže  $g$  splňuje navíc Lipschitzovu podmínku s konstantou  $q$ ,  $0 \leq q < 1$*

$$|g(x) - g(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x, y \in \langle a, b \rangle,$$

*pak  $g$  má v intervalu jediný pevný bod.*

*Důkaz.* Jak se uvádí v [4], jestliže  $g(a) = a$  nebo  $g(b) = b$ , je existence pevného bodu zřejmá. Předpokládejme nyní, že  $g(a) > a$ ,  $g(b) < b$  a uvažujme funkci  $h$ ,  $h(x) = g(x) - x$ . Zřejmě  $h \in C \langle a, b \rangle$  a dále

$$h(a) = g(a) - a > 0, \quad h(b) = g(b) - b < 0.$$

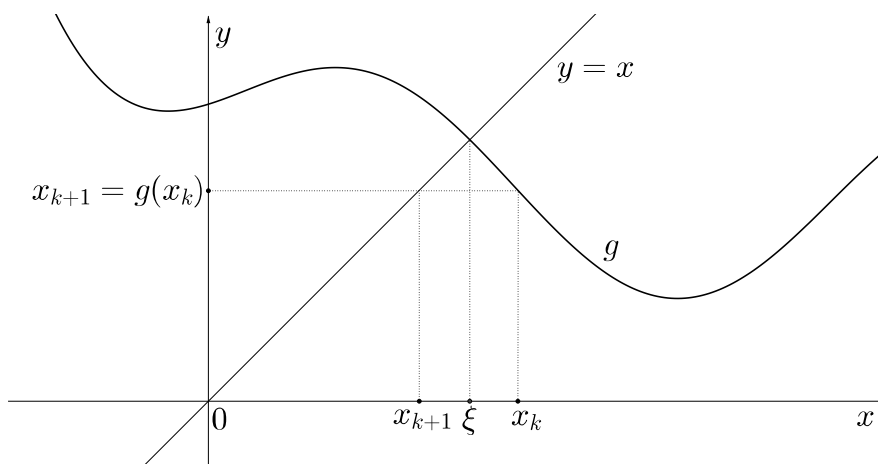
Z vlastností spojitých funkcí plyne, že existuje bod  $\xi \in (a, b)$  tak, že  $h(\xi) = 0$ , tj.  $g(\xi) - \xi = 0 \Rightarrow \xi = g(\xi)$  a tedy  $\xi$  je pevný bod funkce  $g$ .

Nechť funkce  $g$  splňuje Lipschitzovu podmínku s konstantou  $q$ ,  $0 \leq q < 1$ . Předpokládejme, že existují dva pevné body  $\xi, \eta$ . Nyní pro tyto body platí

$$|\xi - \eta| = |g(\xi) - g(\eta)| \leq q|\xi - \eta| < |\xi - \eta|,$$

což je spor a odtud plyne, že  $\xi = \eta$ . □

Hledání pevného bodu funkce  $g$  z rovnice (1.4) se dá geometricky interpretovat jakožto hledání průsečíku grafu funkce  $g$  s osou prvního a třetího kvadrantu roviny  $xy$ . K nalezení tohoto bodu můžeme využít právě metodu prosté iterace. Touto



Obrázek 1.2: Grafické určení  $x_{k+1}$  pomocí metody prosté iterace

metodou nacházíme pomocí počáteční aproximace  $x_0$  posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  podle předpisu

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Funkci  $g$  pak nazveme iterační funkcí (vizte obrázek 1.2).

Pokusme se nyní definovat chybu  $k$ -té iterace. Zavedme pro tuto chybu označení  $\varepsilon_k$ , tedy platí:

$$\varepsilon_k = x_k - \xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Za předpokladu, že posloupnost generovaná vztahem (1.5) je konvergentní, platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi.$$

Pokud existuje reálné číslo  $p \geq 1$  takové, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^p} = c \neq 0,$$

o metodě pak můžeme říci, že se jedná o metodu řádu  $p$  pro bod  $\xi$ . Číslo  $c$  nazveme asymptotickou konstantou chyby, která závisí na volbě iterační funkce  $g$ . Tím, že po konstantě  $c$  požadujeme, aby byla různá od nuly, získáváme jistotu, že  $p$  je určeno jednoznačně. Pokud  $c = 0$  pro nějakou funkci  $g$ , pak metoda konverguje rychleji než obvykle.

Formulujme následující větu, ve které ukážeme, že řád jednokrokových metod (takových metod, pro něž platí, že  $x_{k+1}$  určujeme pomocí jedné hodnoty  $x_k$ ) je přirozené číslo.

**Věta 1.5.** *Nechť funkce  $g$  má v okolí bodu  $\xi$  derivace až do řádu  $p \geq 1$  včetně. Iterační metoda  $x_{k+1} = g(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  je řádu  $p$  tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\xi = g(\xi), \quad g^{(j)}(\xi) = 0, \quad 1 \leq j < p, \quad g^{(p)}(\xi) \neq 0.$$

*Důkaz.* Jak se uvádí v [4], vyjádříme funkci  $g$  v okolí bodu  $\xi$  pomocí Taylorova vzorce

$$\begin{aligned} g(x_k) &= \xi + (x_k - \xi)g'(\xi) + \dots + \frac{(x_k - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}(\xi) + \frac{(x_k - \xi)^p}{p!}g^{(p)}(\alpha) = \\ &= \xi + \frac{(x_k - \xi)^p}{p!}g^{(p)}(\alpha), \end{aligned} \tag{1.6}$$

kde bod  $\alpha$  leží v intervalu určeném body  $x_k$  a  $\xi$ . Protože  $x_{k+1} = g(x_k)$ , dostaneme z předchozího vztahu

$$x_{k+1} - \xi = \frac{(x_k - \xi)^p}{p!}g^{(p)}(\alpha), \tag{1.7}$$

a tedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = \frac{|g^{(p)}(\xi)|}{p!} \neq 0.$$

Metoda je tedy řádu  $p \geq 1$ ,  $p$  přirozené číslo.

Z druhé strany: Nechť pro některé  $j$ ,  $1 \leq j < p$ , platí  $g^{(j)}(\xi) \neq 0$ . Pak z (1.6) plyne, že metoda nemůže být řádu  $p$ . Rovněž, jestliže  $g^{(p)}(\xi) = 0$ , pak z (1.7) plyne, že metoda není řádu  $p$ .  $\square$

V následující větě ukážeme, kdy metoda prosté iterace konverguje k pevnému bodu  $\xi$ .

**Věta 1.6.** *Nechť jsou splněny předpoklady věty 1.4. Pak pro libovolnou počáteční aproximaci  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  je posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $x_k = g(x_{k-1})$ , konvergentní a platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ , kde  $\xi$  je pevný bod funkce  $g$ .*

*Důkaz.* Jak se uvádí v [4], funkce  $g$  zobrazuje interval  $\langle a, b \rangle$  do sebe. Odtud plyne, že posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  je definována pro všechna  $k \geq 0$  a  $x_k \in \langle a, b \rangle$  pro všechna  $k \geq 0$ . Dále

$$|x_k - \xi| = |g(x_{k-1}) - g(\xi)| \leq q|x_{k-1} - \xi|.$$

Indukcí odtud plyne, že

$$|x_k - \xi| \leq q^k |x_0 - \xi|.$$

Jelikož  $0 \leq q < 1$ , je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \xi| = 0,$$

a tedy posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  konverguje k pevnému bodu  $\xi$ .  $\square$

*Důsledek 1.1.* Necht' funkce  $g$  splňuje předpoklady věty 1.4. Pak pro posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $x_k = g(x_{k-1})$ , platí

$$|x_k - \xi| \leq \frac{q^k}{1-q} |x_0 - x_1|, \quad \forall k \geq 1.$$

*Důkaz.* Lze nalézt v [4, str. 31].  $\square$

To, jak rychle metoda konverguje, závisí na faktoru  $\frac{q^k}{1-q}$ . Pokud je číslo  $q$  malé, pak metoda konverguje rychleji.

Pevné body se dají klasifikovat následující definicí.

**Definice 1.4.** Pevný bod  $\xi$  funkce  $g \in C \langle a, b \rangle$  se nazývá

- a) *přitahující* (atraktivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí  $V(\xi)$  tohoto bodu  $\xi$ , že pro každou počáteční aproximaci  $x_0 \in V(\xi)$  posloupnost iterací  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  konverguje k bodu  $\xi$ .
- b) *odpuzující* (repulzivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí  $U(\xi)$  bodu  $\xi$ , že pro každou počáteční aproximaci  $x_0 \in U(\xi)$ ,  $x_0 \neq \xi$ , existuje takové  $k$ , že  $x_k \notin U$ .

Další věta, kterou uvedeme, poukazuje na to, kdy je pevný bod přitahující (resp. odpuzující).

**Věta 1.7.** Necht'  $g \in C \langle a, b \rangle$ ,  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  a necht'  $\xi$  je pevný bod.

- a) Jestliže pro všechna  $x \neq \xi$  z nějakého okolí  $V(\xi)$  bodu  $\xi$  platí

$$\left| \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right| < 1,$$

pak  $\xi$  je přitahující pevný bod.

- b) Jestliže pro všechna  $x \neq \xi$  z nějakého okolí  $U(\xi)$  bodu  $\xi$  platí

$$\left| \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right| > 1,$$

pak  $\xi$  je odpuzující pevný bod.

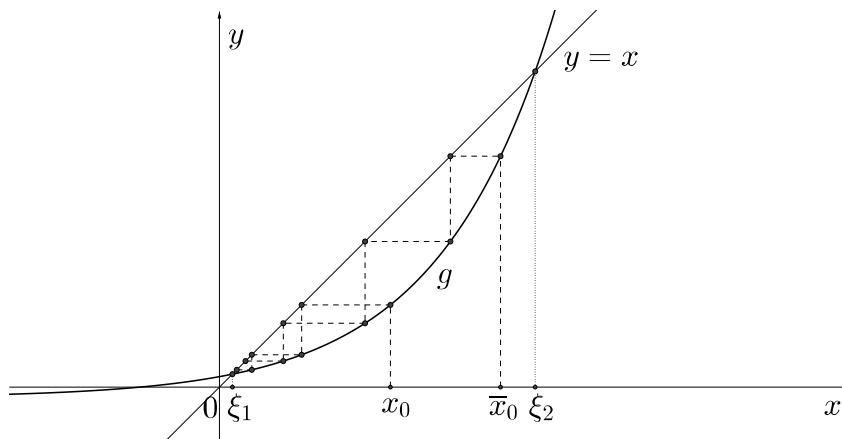
*Důkaz.* Lze nalézt v [4]. □

Z této věty lze formulovat důsledek, ze kterého budeme vycházet při řešení konkrétních příkladů.

*Důsledek 1.2.* Nechť  $g \in C \langle a, b \rangle$ ,  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  a nechť  $g$  má v bodě  $\xi$  derivaci.

- a) Je-li  $|g'(\xi)| < 1$ , pak  $\xi$  je přitahující pevný bod.
- b) Je-li  $|g'(\xi)| > 1$ , pak  $\xi$  je odpuzující pevný bod.

Na obrázku 1.3 je zobrazena situace, kdy funkce  $g$  má dva pevné body (jedná se o funkci  $g(x) = 1, 2^x - \frac{1}{2}$ ). Přičemž pro pevný bod  $\xi_1$  (resp.  $\xi_2$ ) platí:  $|g'(\xi_1)| < 1$  (resp.  $|g'(\xi_2)| > 1$ ). Body  $x_0, \bar{x}_0$  reprezentují dvě počáteční aproximace metody prosté iterace. Třetí a poslední možnost, která může nastat, je  $|g'(\xi)| = 1$ , kterou je



Obrázek 1.3: Přitahující a odpuzující pevný bod funkce  $g(x) = 1, 2^x - \frac{1}{2}$

třeba vyšetřovat zvlášť. V tomto případě může dojít k tomu, že pro počáteční iteraci z jedné strany okolí bodu  $\xi$  proces konverguje a z druhé diverguje. Na obrázku 1.4 pro hodnotu  $x_0$  metoda konverguje, pro  $\bar{x}_0$  diverguje.

Dalším pojmem, který je spojený s metodou prosté iterace a který je nutno zmínit, je *bod cyklu řádu  $n$*  (resp. *cyklus řádu  $n$* ). Předtím, než zdefinujeme samotné pojmy, zavedeme následující označení. Definujme iteraci  $x_{k+1}$  takto:

$$x_{k+1} = g_{k+1}(x_0),$$

kde

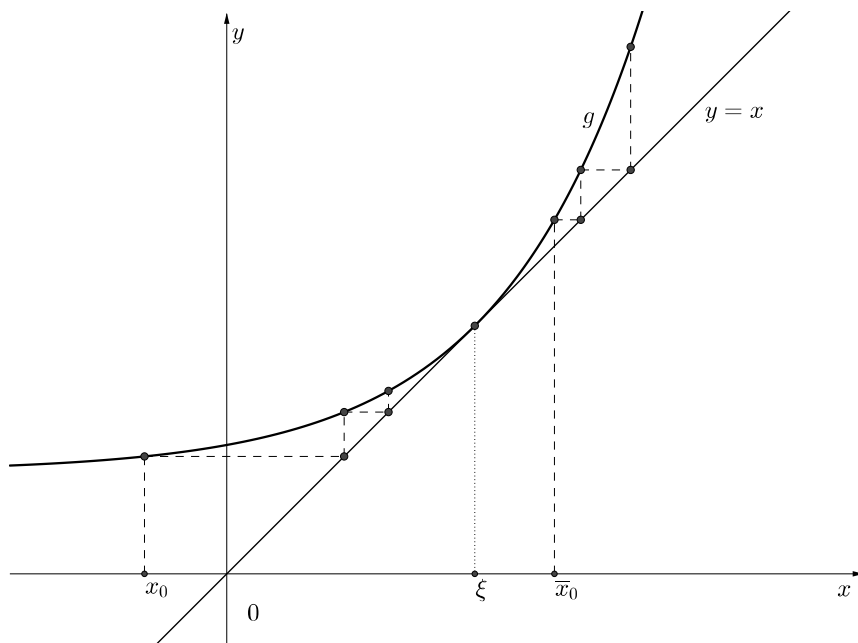
$$g_1(x) = g(x), \quad g_{k+1}(x) = g(g_k(x)).$$

Funkce  $g_k$  nazvěme *k-tá iterace* funkce  $g$ .

*Poznámka 1.1.* Výše uvedené značení lze tímto způsobem zavést, jelikož platí:

$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(g(x_0)), \quad x_3 = g(g(g(x_0))).$$





Obrázek 1.4: Metoda prosté iterace pro  $|g'(\xi)| = 1$

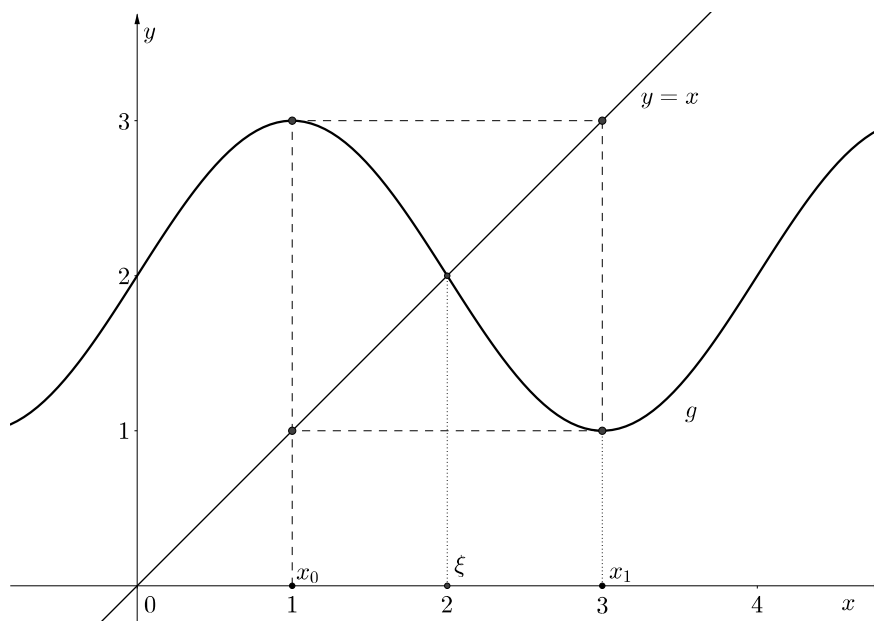
**Definice 1.5.** Necht'  $g \in C \langle a, b \rangle$ ,  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ . Řekneme, že bod  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  je bodem cyklu řádu  $n$  funkce  $g$ , nebo že  $x_0$  generuje cyklus řádu  $n$ , jestliže  $g_n(x_0) = x_0$ ,  $g_k(x_0) \neq x_0$  pro  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Pro ilustraci uvedme rovnici  $x = \cos(\frac{\pi}{2}(x - 1)) + 2$ . Stanovme  $x_0 = 1$  a označme  $g(x) = \cos(\frac{\pi}{2}(x - 1)) + 2$ . Funkce  $g$  má pevný bod  $\xi = 2$ . Zřejmě platí:  $x_1 = g(x_0) = 3$ ,  $x_2 = g_2(x_0) = 1$ . Podle definice 1.5 stanovený bod  $x_0 = 1$  generuje cyklus řádu 2. Vizte obrázek 1.5.

Zbývá pokusit se odpovědět na otázku, jak vhodně určit funkci  $g$  z rovnice (1.4) tak, abychom našli její pevný bod, resp. kořen funkce  $f$  z rovnice (1.1). Při hledání takové funkce musíme mít v první řadě na paměti důsledek 1.2. Pokud například bude naším úkolem nalézt kořen  $\xi$  funkce  $f$  na nějakém intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak se záměrně pokusíme nalézt takovou funkci  $g$ , pro kterou platí, že absolutní hodnota její derivace na tomto intervalu (popř. na nejdelším možném podintervalu intervalu  $\langle a, b \rangle$ ) je menší než 1. Pro ilustraci uvedeme příklad funkce  $f(x) = x + \sqrt[3]{100 - x}$ . Naším úkolem bude nalézt kořen  $\xi$  funkce  $f$  na intervalu  $\langle -7, -1 \rangle$ . Za funkci  $g$  zvolíme funkci  $g(x) = -\sqrt[3]{100 - x}$ . Definiční obor funkce  $g$  je  $D_g = \mathbb{R}$ . Derivace funkce  $g$  je

$$g'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(100 - x)^2}}.$$

Zjistíme, kde absolutní hodnota derivace funkce  $g$  nabývá hodnot nižších než 1. Absolutní hodnotu v tomto případě nemusíme brát v potaz, jelikož hodnoty derivace jsou všude kladné (kromě bodu  $x = 100$ , kde není definována). Budeme tedy řešit



Obrázek 1.5: Cyklus řádu dva metody prosté iterace  $x = \cos(\frac{\pi}{2}(x - 1)) + 2$

nerovnici

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{(100-x)^2}} < 1.$$

Tuto nerovnici upravíme do tvaru

$$\frac{1 - 3\sqrt[3]{(100-x)^2}}{3\sqrt[3]{(100-x)^2}} < 0 \quad (1.8)$$

a budeme hledat nulové body. První nulový bod určíme z jmenovatele  $n_1 = 100$ . Nulové body plynoucí z tvaru čitatele najdeme jakožto řešení rovnice

$$1 - 3\sqrt[3]{(100-x)^2} = 0. \quad (1.9)$$

Rovnice (1.9) má právě dvě řešení. Ta jsou

$$n_2 = 100 - \sqrt{\frac{1}{27}}, \quad n_3 = 100 + \sqrt{\frac{1}{27}}.$$

Nyní sestavme tabulku, pomocí které nalezneme intervaly, které vyhovují nerovnici (1.8). Z tabulky 1.1 vyplývá, že nerovnost (1.8) je splněna pro intervaly  $(-\infty, n_2)$ ,  $(n_3, \infty)$ . Je zřejmé, že platí

$$\langle -7, -1 \rangle \subset (-\infty, n_2).$$

Tedy funkce  $g$  byla zvolena vhodně, jelikož všechny pevné body funkce  $g$  z intervalu  $(-\infty, n_2)$  jsou přitahující. Přibližnou číselnou hodnotu tohoto pevného bodu určíme v kapitole 2 (vizte příklad 2.2.1).

	$(-\infty, n_2)$	$(n_2, n_1)$	$(n_1, n_3)$	$(n_3, \infty)$
$1 - 3\sqrt[3]{(100 - x)^2}$	–	+	+	–
$3\sqrt[3]{(100 - x)^2}$	+	+	+	+
	–	+	+	–

Tabulka 1.1: Pomocná tabulka

Uveďme další myšlenku, která nám může pomoci při hledání vhodného tvaru iterační funkce  $g$ . Tato myšlenka je založena na tom, že funkce  $f$  je diferencovatelná na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , přičemž platí, že existují taková reálná čísla  $c, d$ , která vyhovují nerovnici

$$0 < c \leq f'(x) \leq d \quad (1.10)$$

a to pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$ . Pokud by hodnoty derivace funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  nabývaly záporných hodnot, uvažovali bychom funkci  $-f$ . To si můžeme dovolit, jelikož rovnice  $-f(x) = 0$  je ekvivalentní s rovnicí (1.1). Dále rovnice

$$x = x - \lambda f(x)$$

je také ekvivalentní s rovnicí (1.1), přičemž konstantu  $\lambda$  lze určit tak, aby hledaná funkce  $g(x) = x - \lambda f(x)$  byla pro naše potřeby vhodně zvolenou funkcí. Po funkci  $g$  požadujeme, aby

$$|g'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| \leq q < 1,$$

tj. aby

$$1 - q \leq \lambda c \leq \lambda f'(x) \leq \lambda d \leq 1 + q.$$

Naším záměrem je, aby konstanta  $q$  byla co nejmenší kvůli důsledku 1.2. Nejmenší zřejmě bude ve chvíli, kdy ve středu intervalu  $\langle \lambda c, \lambda d \rangle$  bude ležet číslo 1. Proto položíme

$$\lambda = \frac{2}{c + d}.$$

Konkrétní příklad hledání vhodné iterační funkce pomocí tohoto postupu uvedeme v kapitole 2 (vizte příklad 2.2.4).

## 1.4 Newtonova metoda

Newtonova metoda, také označována jako Newtonova metoda tečen, je metodou řádu dva. O metodách řádu dva říkáme, že konvergují kvadraticky. Je-li  $x_0$  přibližná hodnota kořene rovnice (1.1), sestavíme posloupnost iterací  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  podle rekurentního vzorce.

Popíšeme nejprve slovně princip Newtonovy metody tečen. Je-li dána funkce  $f$  a počáteční aproximace  $x_0$  kořene  $\xi$ , pak budeme postupovat následovně. V bodě

$[x_0, f(x_0)]$  sestrojíme tečnu  $t_0$  ke grafu funkce  $f$ . Průsečík tečny  $t_0$  s osou  $x$  je první aproximací  $x_1$  kořene  $\xi$ . Obecný tvar rovnice tečny funkce  $f$  v bodě  $[x_0, f(x_0)]$  je

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Položme  $y = 0$ , jelikož hledáme průsečík s osou  $x$ , a  $x = x_1$ , jelikož první souřadnice hledaného průsečíku bude první iterací.

$$\begin{aligned} -f(x_0) &= f'(x_0)(x_1 - x_0) \\ -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= x_1 - x_0 \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

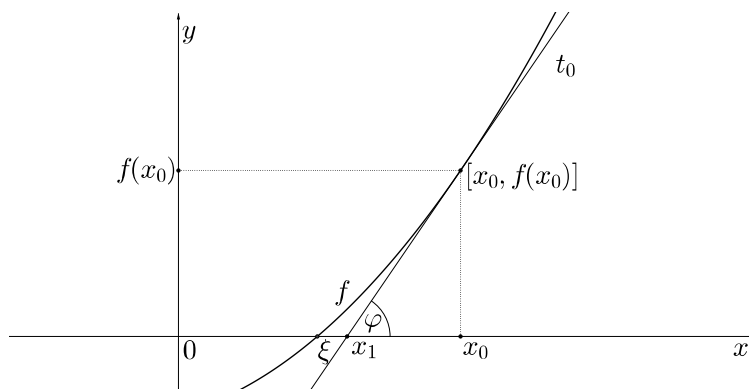
Obecně pro  $k$ -tou iteraci platí

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad (1.11)$$

Rovnice (1.11) je rekurentním vzorcem pro výpočet  $k$ -té iterace, kde  $k = 1, 2, \dots$ . Odvodíme tento vztah i graficky. Obrázek 1.6 zobrazuje předešlou situaci. Z definice derivace platí

$$\operatorname{tg}(\varphi) = f'(x_0).$$

Na obrázku 1.6 vzniká konstrukcí tečny  $t_0$  a úsečky spojující body  $[x_0, 0]$ ,  $[x_0, f(x_0)]$



Obrázek 1.6: Grafické určení  $x_1$  pomocí Newtonovy metody

pravoúhlý trojúhelník, ve kterém platí

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}.$$

Položme tato dvě vyjádření pro  $\text{tg}(\varphi)$  do rovnosti a upravme ji.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \\ f'(x_0)(x_0 - x_1) &= f(x_0) \\ x_0 - x_1 &= \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Zobecněním výsledného vztahu pro  $k$ -tou iteraci dostáváme opět vztah (1.11). Iterační funkce tedy nabývá tvaru

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (1.12)$$

Věty 1.5 lze využít při důkazu tvrzení, že Newtonova metoda tečen je skutečně metodou řádu dva (v následující úvaze dodržujeme značení derivací podle vzoru věty 1.5). Pro Newtonovu metodu nabývá iterační funkce tvaru (1.12). Předně si znovu uvědomme, že  $\xi$  je kořenem funkce  $f$ , musí tedy platit  $f(\xi) = 0$ . Necht' jsou splněny předpoklady věty 1.5, pak platí

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\xi) &= 1 - \frac{(f^{(1)}(\xi))^2}{(f^{(1)}(\xi))^2} = 1 - 1 = 0, \\ g^{(2)}(\xi) &= 0 - \frac{(f^{(1)}(\xi))^3 f^{(2)}(\xi) - 2(f^{(1)}(\xi))^3 f^{(2)}(\xi)}{(f^{(1)}(\xi))^4}, \\ g^{(2)}(\xi) &= \frac{(f^{(1)}(\xi))^3 f^{(2)}(\xi)}{(f^{(1)}(\xi))^4}, \\ g^{(2)}(\xi) &= \frac{f^{(2)}(\xi)}{f^{(1)}(\xi)} \neq 0. \end{aligned}$$

Newtonova metoda tečen je tedy metodou řádu dva.

Následující věta formuluje předpoklady konvergence této metody:

**Věta 1.8.** *Necht' funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,  $f(a)f(b) < 0$  a necht' existují derivace  $f'$ ,  $f''$  spojitě a nenulové v intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Pak rovnice (1.1) má v  $\langle a, b \rangle$  jediný kořen  $\xi$ . Zvolíme-li  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  tak, že  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ , platí pro posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  sestrojenou podle (1.11), že  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ .*

Označíme-li

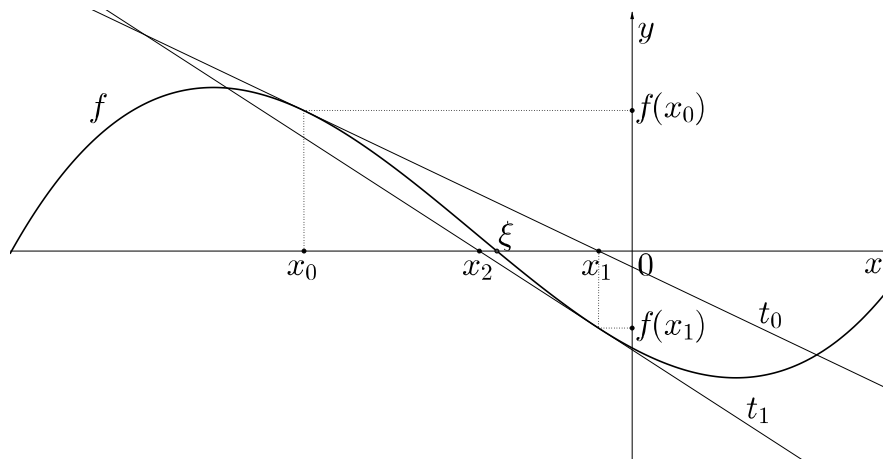
$$m_1 = \min_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|,$$

pak pro odhad chyby platí:

$$\begin{aligned} |\xi - x_k| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (\xi - x_{k-1})^2, \quad k = 1, 2, \dots, \\ |\xi - x_k| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_k - x_{k-1})^2, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Důkaz. Lze nalézt v [3, str. 171–172]. □

Závěrem této sekce ještě uvedeme, jak graficky vypadá určení členů posloupnosti  $\{x_k\}_{k=0}^2$  Newtonovou metodou. Vizte obrázek 1.7.



Obrázek 1.7: Iterační proces Newtonovy metody

## 1.5 Metoda sečen

Tuto metodu lze využít například v případě, že není snadné určit derivaci funkce  $f$ , která se vyskytuje v iteračním vzorci Newtonovy metody. Jedná se o metodu dvoukrokovou, jelikož pro výpočet  $x_{k+1}$  je zapotřebí dvou předchozích aproximací  $x_k, x_{k-1}$ , a tedy potřebujeme i dvě počáteční hodnoty. Metoda sečen je metodou řádu  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$ , proto konverguje o něco rychleji než například metoda bisekce. V rámci celé této sekce předpokládejme, že  $\xi$  je jednoduchý kořen rovnice (1.1).

Myšlenka této metody je následující. Vycházíme z počátečních hodnot  $x_0, x_1$ , které jsou v nejlepším případě blízké hodnotě kořene  $\xi$ . Bod  $x_2$ , jenž následuje v posloupnosti  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ , získáme jakožto průsečík přímky, která prochází body  $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)]$ , s osou  $x$ . Odvoďme nyní předpis pro určení hodnoty  $x_2$ . Přímka, nazvěme ji například  $p_1$ , prochází body  $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)]$ . Snadno určíme souřadnice jejího směrového vektoru:

$$\mathbf{u} = (x_0 - x_1, f(x_0) - f(x_1)).$$

Souřadnice normálového vektoru přímky  $p_1$  jsou

$$\mathbf{n} = (f(x_0) - f(x_1), x_1 - x_0).$$

Nalezneme tvar obecné rovnice přímky  $p_1$ .

$$(f(x_0) - f(x_1))x + (x_1 - x_0)y + c = 0$$

Bod  $[x_0, f(x_0)]$  leží na přímce  $p_1$ .

$$\begin{aligned}(f(x_0) - f(x_1))x_0 + (x_1 - x_0)f(x_0) + c &= 0 \\ -(f(x_0) - f(x_1))x_0 - (x_1 - x_0)f(x_0) &= c\end{aligned}$$

Obecná rovnice hledané přímky tedy je

$$p_1 : (f(x_0) - f(x_1))x + (x_1 - x_0)y - (f(x_0) - f(x_1))x_0 - (x_1 - x_0)f(x_0) = 0.$$

Položme  $y = 0$  a  $x = x_2$ , jelikož hledáme průsečík s osou  $x$ , jehož  $y$ -ová souřadnice je zřejmě rovna nule a  $x$ -ová souřadnice představuje hodnotu  $x_2$ .

$$(f(x_0) - f(x_1))x_2 - (f(x_0) - f(x_1))x_0 - (x_1 - x_0)f(x_0) = 0$$

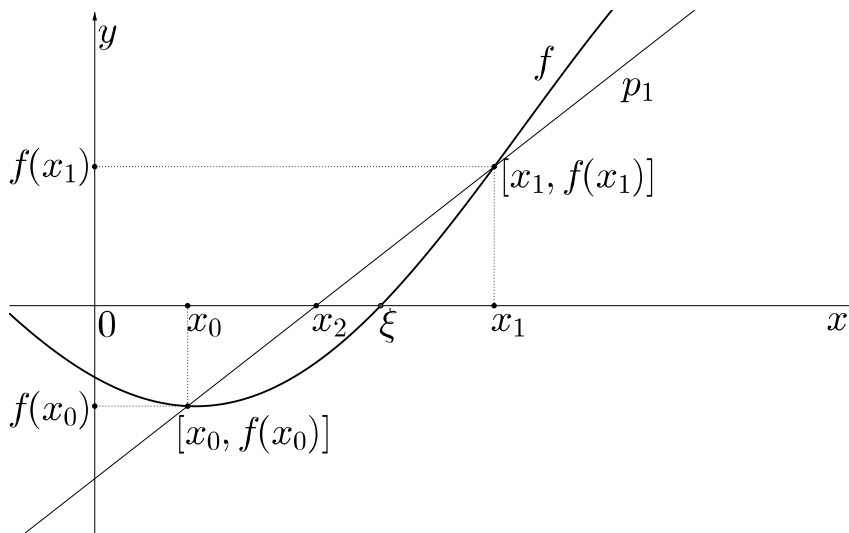
Vyjádřením  $x_2$  a úpravou výsledného výrazu dostáváme předpis, který nabývá tvaru

$$x_2 = x_0 - \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)} f(x_0). \quad (1.13)$$

Zobecněním rovnice (1.13) dostaneme obecný předpis pro výpočet  $x_{k+1}$ . Tedy

$$x_{k+1} = x_{k-1} - \frac{x_{k-1} - x_k}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} f(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

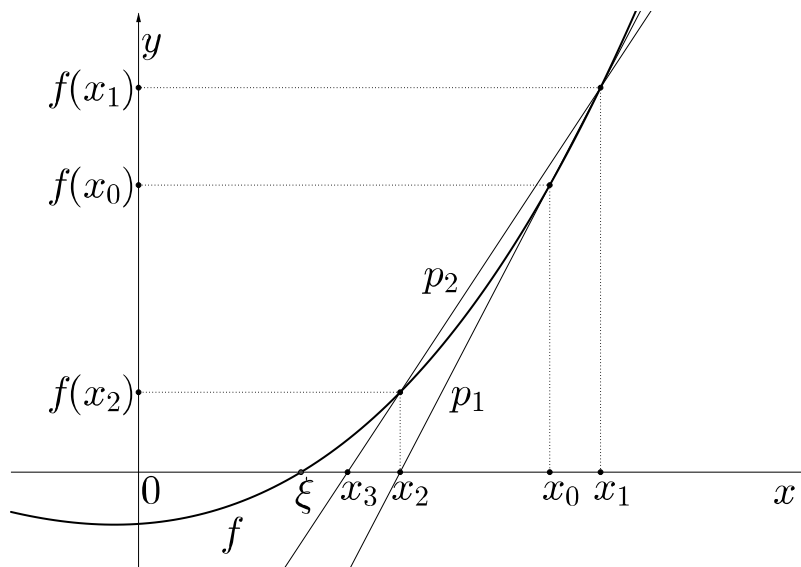
Grafické určení bodu  $x_2$  je zobrazeno na obrázku 1.8.



Obrázek 1.8: Grafické určení  $x_2$  pomocí metody sečen

**Věta 1.9.** *Nechť rovnice (1.1) má kořen  $\xi$  a nechť derivace  $f'$ ,  $f''$  jsou spojité v okolí bodu  $\xi$ , přičemž  $f'(\xi) \neq 0$ . Posloupnost určená metodou sečen konverguje ke kořenu  $\xi$ , pokud zvolíme počáteční aproximace  $x_0, x_1$  dostatečně blízko bodu  $\xi$ , a platí, že metoda je řádu  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$ .*

*Důkaz.* Lze nalézt v [4, str. 49–50]. □



Obrázek 1.9: Iterační proces metody sečen

Na obrázku 1.9 je geometricky interpretován průběh metody sečen. Jsou dány počáteční hodnoty  $x_0, x_1$  a funkce  $f$ . Přímka  $p_1$  vedená body  $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)]$  protíná osu  $x$  v bodě  $x_2$ . Dále přímka  $p_2$  prochází body  $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]$ , kde v jejím průsečíku s osou  $x$  leží bod  $x_3$ .

## 1.6 Metoda regula falsi

Metoda regula falsi je metodou odvozenou od metody sečen. Jedná se o vždy konvergentní metodu řádu jedna, o které říkáme, že konverguje lineárně. Tuto metodu, stejně jako metodu sečen, lze využít například v případě, že se z nějakého důvodu chceme vyhnout určování derivace funkce  $f$ , která je součástí iteračního vzorce Newtonovy metody. Jediný rozdíl v iteračním procesu mezi metodou regula falsi a metodou sečen je, že v případě metody regula falsi se pro počáteční hodnoty stanovuje podmínka  $f(x_0)f(x_1) < 0$  a každý další bod  $x_k$  kombinujeme s jedním z předchozích  $x_{k-1}, x_{k-2}$  tak, aby byla zachována změna znamének funkčních hodnot v těchto bodech. Budeme-li tedy chtít určit hodnotu  $x_{k+1}$  a při určování hodnoty  $x_k$  jsme zjistili, že platí například  $f(x_k) > 0, f(x_{k-1}) > 0, f(x_{k-2}) < 0$ , pak pro dosazení do vztahu (1.14) přeznačíme  $x_{k-2} = x_{k-1}$  a tuto hodnotu společně s  $x_k$  použijeme při určení  $x_{k+1}$ .

V úvodu této sekce jsme uvedli, že metoda regula falsi je metodou vždy konvergentní. Doplníme nyní toto tvrzení větou 1.10.

**Věta 1.10.** *Nechť  $f \in C \langle a, b \rangle$ ,  $f(a)f(b) < 0$  a necht'  $\xi$  je jediný kořen v  $\langle a, b \rangle$ . Pak posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  určená metodou regula falsi konverguje pro libovolné počáteční aproximace  $x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$ ,  $f(x_0)f(x_1) < 0$ , ke kořenu  $\xi \in \langle a, b \rangle$  funkce  $f$  a je to*



metoda prvního řádu.

*Důkaz.* Lze nalézt v [4, str. 51]. □

**Věta 1.11.** *Nechť funkce  $f$  je spojitá a má spojitou nenulovou derivaci v intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Nechť platí  $f(a)f(b) < 0$ . Označme  $\xi$  kořen rovnice (1.1) v intervalu  $\langle a, b \rangle$  (z předpokladů plyne, že tento kořen existuje a je právě jeden). Označme*

$$m = \min_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|.$$

*Pro libovolnou aproximaci  $x_k \in \langle a, b \rangle$  kořene  $\xi$  pak platí:*

$$|\xi - x_k| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}. \quad (1.15)$$

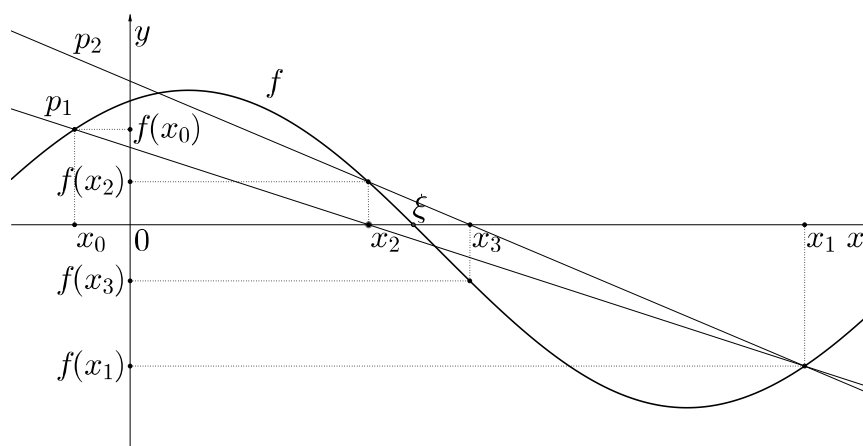
*Důkaz.* Jak se uvádí v [3], podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě platí:

$f(\xi) - f(x_k) = f'(c)(\xi - x_k)$ , kde  $c$  leží mezi  $\xi$ ,  $x_k$ . Protože  $\xi$  je kořen rovnice, je  $f(\xi) = 0$ , tedy

$$\xi - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(c)}$$

a odtud plyne (1.15). □

Uvedme grafický průběh metody regula falsi. Vizte obrázek 1.10. Pro počáteční

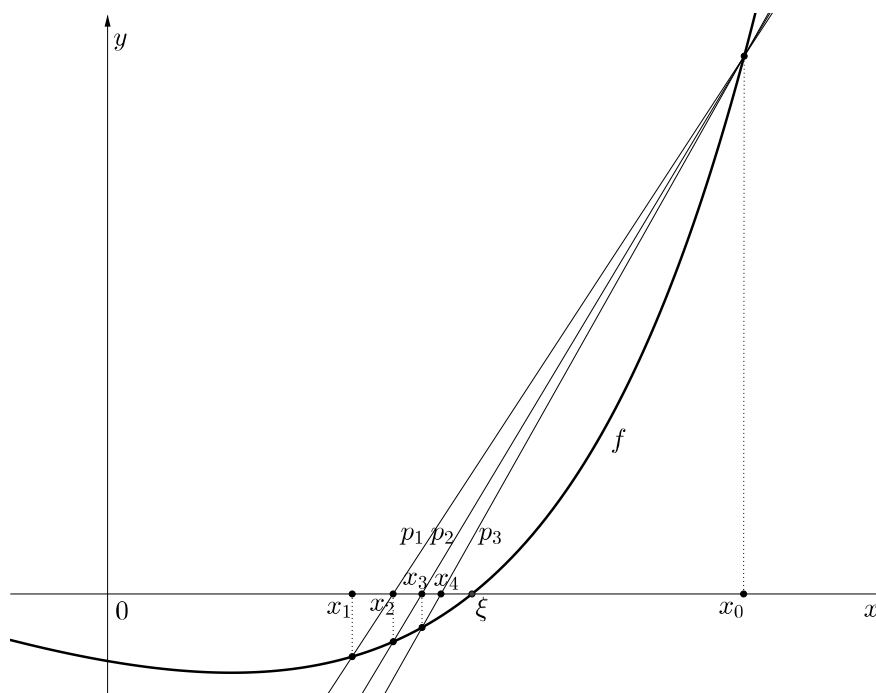


Obrázek 1.10: Iterační proces metody regula falsi

podmínky zřejmě platí  $f(x_0)f(x_1) < 0$ . Hodnotu  $x_2$  jsme získali jako průsečík přímky  $p_1$  s osou  $x$ . Pro  $x_2$  platí  $f(x_2) > 0$  a pro  $x_1$  platí  $f(x_1) < 0$ , proto přímka  $p_2$  prochází body  $[x_2, f(x_2)]$ ,  $[x_1, f(x_1)]$ . V průsečíku přímky  $p_2$  s osou  $x$  leží bod  $x_3$ . Následující postup by se odvíjel od skutečnosti, že  $f(x_3) < 0$  a  $f(x_2) > 0$ , proto bychom pro určení hodnoty  $x_4$  použili  $x_2, x_3$ .

Závěrem této sekce se ještě zamysleme nad tím, kdy je lepší použít metodu regula falsi a kdy metodu sečen. Pro metodu regula falsi platí, že konverguje vždy, pokud jsou splněny počáteční podmínky, z čehož vyplývá, že pokud pro počáteční

aproximace  $x_0, x_1$  neplatí  $f(x_0)f(x_1) < 0$ , pak použijeme pro určení kořene metodu sečen. Zdá se tedy, že pokud je tato podmínka splněna, je výhodnější použít metodu regula falsi. Avšak ne vždy tomu tak musí být. Pokusíme se tento fakt demonstrovat na následujícím příkladu. Uvažujme funkci  $f$  s kořenem  $\xi$  a počátečními aproximacemi  $x_0, x_1$ , pro něž platí  $f(x_0) > 0, f(x_1) < 0$ . Dále necht' platí  $|f(x_0)| \gg |f(x_1)|$ . Hledání kořene pomocí metody regula falsi je zobrazeno na obrázku 1.11.

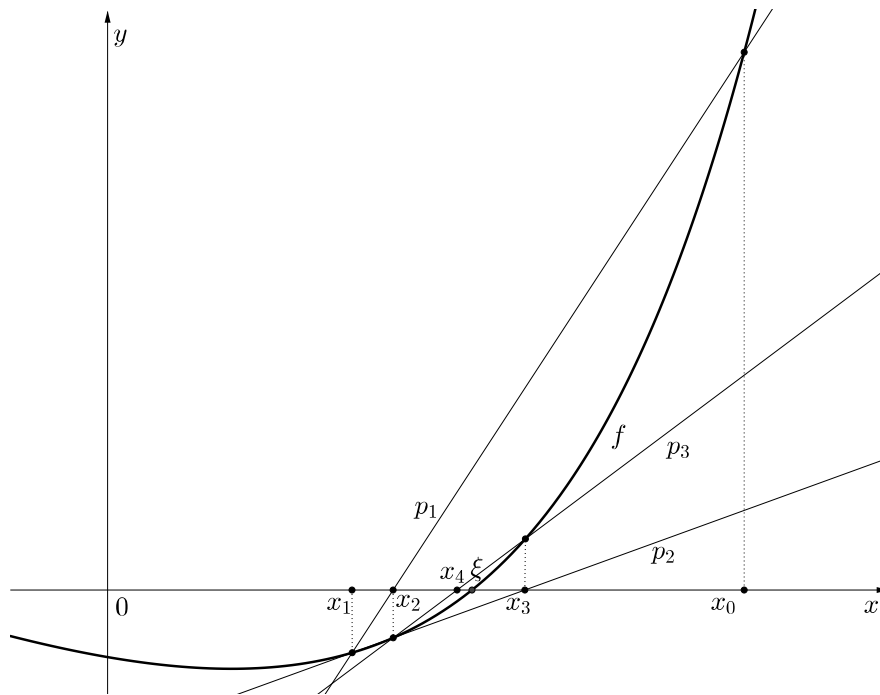


Obrázek 1.11: Konvergence ke kořenu metodou regula falsi

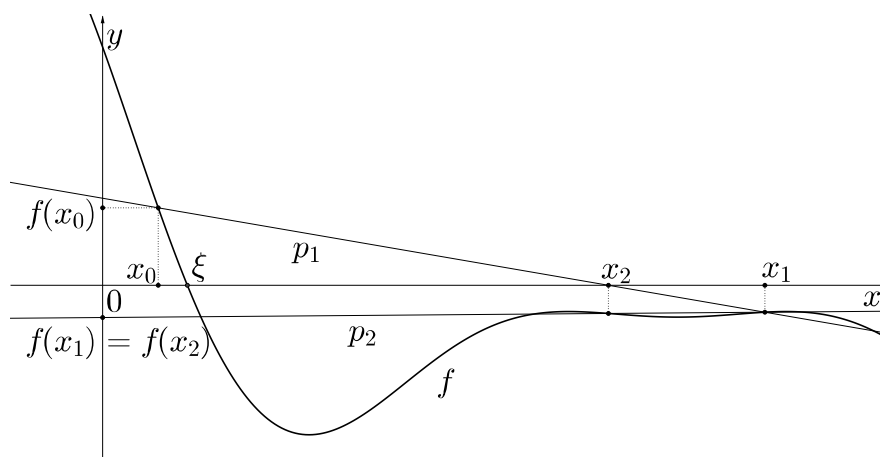
Nyní na stejnou funkci  $f$  aplikujme metodu sečen a to se stejnými počátečními podmínkami. Vizte obrázek 1.12. Snadno z těchto obrázků nahlédneme, že pro tento případ by metoda regula falsi konvergovala ke kořeni  $\xi$  funkce  $f$  pomaleji než metoda sečen. Pro přehlednost je na obou obrázcích zobrazena pouze posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^4$ . Z obrázku 1.12 je čitelné, že hodnota  $x_5$  by byla velmi blízká kořeni  $\xi$ , kdežto v případě obrázku 1.11 by následující členy posloupnosti  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  konvergovali ke kořeni  $\xi$  funkce  $f$  pomaleji.

Pro další případ, který nám napoví, kdy je výhodnější která metoda, vizte obrázek 1.13. Kořen jsme nejprve hledali pomocí metody sečen. V tomto konkrétním případě nastala situace, kdy  $f(x_1) = f(x_2)$ . Z rovnice (1.14) je jasné, že nejsme schopni určit hodnotu  $x_3$  posloupnosti  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ , která je generovaná metodou sečen. V případě, že na stejnou funkci  $f$  z obrázku 1.13 se stejnými počátečními hodnotami použijeme metodu regula falsi, jejíž algoritmus vylučuje, aby nastala rovnost funkčních hodnot ve vztahu (1.14), dokonvergujeme ke kořeni  $\xi$  funkce  $f$ . Vizte obrázek 1.14.

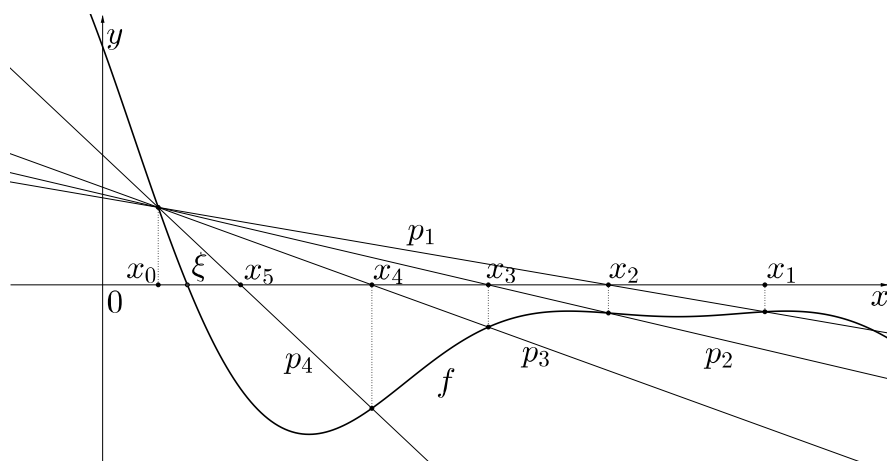
Výstupem této úvahy tedy je, že ani jedna z metod není univerzální a ani o jedné z nich nelze říci, že vždy představuje nejrychlejší cestu k nalezení kořene.



Obrázek 1.12: Konvergence ke kořenu metodou sečen



Obrázek 1.13: Konvergence metodou sečen



Obrázek 1.14: Konvergence metodou regula falsi

# Kapitola 2

## Řešené příklady

V této kapitole budeme aplikovat teoretické poznatky, jež jsme popsali v kapitole 1. Budeme se zabývat řešením konkrétních příkladů pomocí zmíněných numerických matematických metod.

### 2.1 Metoda bisekce

**Příklad 2.1.1.** *Metodou bisekce nalezněte přibližnou hodnotu kořene rovnice  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  s přesností  $\varepsilon = 0,01$  na intervalu  $\langle 1; 1,5 \rangle$ .*

**Řešení 2.1.1.** Označme pro snazší popis řešení  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ . Nejprve ověříme, zda je splněna počáteční podmínka metody bisekce, tedy platí-li, že součin funkčních hodnot funkce  $f$  v krajních bodech zadaného intervalu je záporné číslo.

$$f(1) = -5$$

$$f(1,5) = 2,375$$

Funkce  $f$  je navíc na intervalu  $\langle 1; 1,5 \rangle$  spojitou funkcí. Je tedy zřejmé, že podmínky metody bisekce jsou splněny. Dosazením do vztahu (1.3) zjistíme, kolik budeme muset udělat iteračních kroků, abychom dosáhli požadované přesnosti.

$$n \geq \log_2 \left( \frac{1,5 - 1}{0,01} \right) \doteq 5,644 \quad (2.1)$$

Jak jsme již zmínili,  $n$  označuje nutný počet iterací. Je tedy nejmenším možným přirozeným číslem, které splňuje nerovnici (2.1). V tomto případě je  $n = 6$ . Iterační proces je ilustrován tabulkou 2.1. Písmeno  $i$  značí, o kolikátou iteraci se jedná,  $a_i$ ,  $b_i$  krajní hodnoty iteračního intervalu a  $s_i$  jeho střed. Ve sloupcích označených jako  $A$ ,  $B$ ,  $S$  jsou zaneseny po řadě hodnoty  $\text{sign}(f(a_i))$ ,  $\text{sign}(f(b_i))$ ,  $\text{sign}(f(s_i))$ . Toto značení zachovejme v rámci všech tabulek příslušných k této sekci. Pro přehlednost tabulek jsme použili funkci  $\text{sign}(x)$ , jelikož iterační proces závisí především na znaménkách funkčních hodnot. Hledaný kořen  $\xi$  leží v intervalu  $(1,359375; 1,3671875)$ .

$i$	$a_i$	$b_i$	$A$	$B$	$s_i$	$S$
0	1,000 000	1,500	-1	+1	1,250 000 0	-1
1	1,250 000	1,500	-1	+1	1,375 000 0	+1
2	1,250 000	1,375	-1	+1	1,312 500 0	-1
3	1,312 500	1,375	-1	+1	1,343 750 0	-1
4	1,343 750	1,375	-1	+1	1,359 375 0	-1
5	1,359 375	1,375	-1	+1	1,367 187 5	+1

Tabulka 2.1: Tabulka k příkladu 2.1.1

$i$	$a_i$	$b_i$	$A$	$B$	$s_i$	$S$
0	-1,000 000	0,000 00	-1	+1	-0,500 000 0	+1
1	-1,000 000	-0,500 00	-1	+1	-0,750 000 0	-1
2	-0,750 000	-0,500 00	-1	+1	-0,625 000 0	+1
3	-0,750 000	-0,625 00	-1	+1	-0,687 500 0	+1
4	-0,750 000	-0,687 50	-1	+1	-0,718 750 0	+1
5	-0,750 000	-0,718 75	-1	+1	-0,734 375 0	-1
6	-0,734 375	-0,718 75	-1	+1	-0,726 562 5	+1

Tabulka 2.2: Tabulka k příkladu 2.1.2

**Příklad 2.1.2.** Metodou bisekce nalezněte přibližnou hodnotu kořene rovnice  $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$  na intervalu  $\langle -1; 0 \rangle$  s tolerancí  $\varepsilon = 0,01$ .

**Řešení 2.1.2.** Označme opět  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$ . Funkce  $f$  je na intervalu  $\langle -1; 0 \rangle$  spojitou funkcí. Ověřme, zda funkce  $f$  nabývá v krajních bodech zadaného intervalu funkčních hodnot s odlišnými znaménky.

$$f(-1) = -1$$

$$f(0) = 4$$

Dále zjistíme, kolik budeme muset provést iterací, abychom splnili stanovenou toleranci.

$$n \geq \log_2 \left( \frac{0 - (-1)}{0,01} \right) \doteq 6,644$$

$$n = 7$$

Tabulka 2.2 je tabulkou iteračního procesu tohoto příkladu. Hledaným intervalem, ve kterém leží kořen a který zároveň splňuje zadanou toleranci, je interval  $(-0,734375; -0,7265625)$ .

**Příklad 2.1.3.** Nalezněte přibližnou hodnotu kořene rovnice  $\cos(x) = x$  na intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$  s tolerancí  $\varepsilon = 0,001$ .

$i$	$a_i$	$b_i$	$A$	$B$	$s_i$	$S$
0	0,000 000 00	1,000 000 000	+1	-1	0,500 000 000 0	+1
1	0,500 000 00	1,000 000 000	+1	-1	0,750 000 000 0	-1
2	0,500 000 00	0,750 000 000	+1	-1	0,625 000 000 0	+1
3	0,625 000 00	0,750 000 000	+1	-1	0,687 500 000 0	+1
4	0,687 500 00	0,750 000 000	+1	-1	0,718 750 000 0	+1
5	0,718 750 00	0,750 000 000	+1	-1	0,734 375 000 0	+1
6	0,734 375 00	0,750 000 000	+1	-1	0,742 187 500 0	-1
7	0,734 375 00	0,742 187 500	+1	-1	0,738 281 250 0	+1
8	0,738 281 25	0,742 187 500	+1	-1	0,740 234 375 0	-1
9	0,738 281 25	0,740 234 375	+1	-1	0,739 257 812 5	-1

Tabulka 2.3: Tabulka k příkladu 2.1.3

**Řešení 2.1.3.** Nejprve upravme rovnici do tvaru  $\cos(x) - x = 0$ . Dále označme  $f(x) = \cos(x) - x$ . Funkce  $f$  je na intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$  spojitá. Zjistíme nutný počet iterací pro splnění tolerance.

$$n \geq \log_2 \left( \frac{1 - 0}{0,001} \right) \doteq 9,966$$

$$n = 10$$

Výpočty, které vedou k nalezení řešení, jsou v tabulce 2.3. Kořen  $\xi$  zadané rovnice leží v intervalu  $(0,73828125; 0,7392578125)$ .

**Příklad 2.1.4.** Nalezněte přibližnou hodnotu kořene rovnice  $x^3 - 2x + \cos(2x) = 0$  na intervalu  $\langle 0; 1,5 \rangle$  s tolerancí  $\varepsilon = 0,01$ .

**Řešení 2.1.4.** Nejprve označme  $f(x) = x^3 - 2x + \cos(2x)$ . Funkce  $f$  je zřejmě spojitá na  $\langle 0; 1,5 \rangle$ . Dále ověříme, že je splněna počáteční podmínka metody bisekce.

$$f(0) = 1$$

$$f(1,5) \doteq -0,615$$

Ze vztahu

$$n \geq \log_2 \left( \frac{1,5 - 0}{0,01} \right) \doteq 7,229$$

snadno určíme, že počet iterací  $n$  nutný ke splnění tolerance je roven osmi. Iterační proces je zanesen v tabulce 2.4. Kořen leží v intervalu  $(0,380859375; 0,38671875)$ .

## 2.2 Metoda prosté iterace

**Příklad 2.2.1.** Pomocí metody prosté iterace nalezněte kořen funkce  $f$ , která je dána předpisem  $f(x) = x + \sqrt[3]{100 - x}$ , na intervalu  $\langle -7, -1 \rangle$ . Vypočtěte 7 iterací.

$i$	$a_i$	$b_i$	$A$	$B$	$s_i$	$S$
0	0,000	1,500 000 00	+1	-1	0,750 000 000	-1
1	0,000	0,750 000 00	+1	-1	0,375 000 000	+1
2	0,375	0,750 000 00	+1	-1	0,562 500 000	-1
3	0,375	0,562 500 00	+1	-1	0,468 750 000	-1
4	0,375	0,468 750 00	+1	-1	0,421 875 000	-1
5	0,375	0,421 875 00	+1	-1	0,398 437 500	-1
6	0,375	0,398 437 50	+1	-1	0,386 718 750	-1
7	0,375	0,386 718 75	+1	-1	0,380 859 375	+1

Tabulka 2.4: Tabulka k příkladu 2.1.4

$k$	$x_k$	$x_{k+1}$
0	-1,000 000 000 0	-4,657 009 507 8
1	-4,657 009 507 8	-4,712 551 474 6
2	-4,712 551 474 6	-4,713 384 984 9
3	-4,713 384 984 9	-4,713 397 491 1
4	-4,713 397 491 1	-4,713 397 678 7
5	-4,713 397 678 7	-4,713 397 681 5
6	-4,713 397 681 5	-4,713 397 681 6

Tabulka 2.5: Tabulka k příkladu 2.2.1

**Řešení 2.2.1.** V sekci 1.3 jsme již odvodili, že vhodnou iterační funkcí pro tento případ je funkce  $g(x) = -\sqrt[3]{100 - x}$ . Provedme tedy samotný iterační proces. Posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^7$  budeme generovat pomocí vztahu (1.5). Za počáteční hodnotu zvolme  $x_0 = -1$ . V tabulce 2.5 je zaznamenán průběh iterací. Po sedmi krocích jsme dospěli k přibližné hodnotě kořene funkce  $f$  (resp. pevného bodu funkce  $g$ ), tedy  $\xi \doteq -4,7133976816$ . Funkční hodnota funkce  $f$  v bodě  $x_7$  je v řádu  $10^{-10}$ .

**Příklad 2.2.2.** Metodou prosté iterace určete přibližnou hodnotu kořene funkce  $f$ , která je dána předpisem  $f(x) = e^{-2x} + x - 3$ , a to na intervalu  $\langle 1, 4 \rangle$ . Uvažujte počáteční aproximaci  $x_0 = 2$ . Proved'te 5 iterací.

**Řešení 2.2.2.** Nejprve nalezneme vhodnou iterační funkci  $g$ . Bud'  $g(x) = 3 - e^{-2x}$ , pak derivace funkce  $g$  je

$$g'(x) = 2e^{-2x}.$$

Derivace takto zvolené funkce  $g$  nabývá pouze kladných hodnot, proto budeme řešit nerovnici

$$2e^{-2x} < 1.$$

Nejprve vyřešíme rovnici

$$2e^{-2x} = 1,$$



$k$	$x_k$	$x_{k+1}$
0	2,000 000 000 0	2,981 684 361 1
1	2,981 684 361 1	2,997 428 764 4
2	2,997 428 764 4	2,997 508 468 1
3	2,997 508 468 1	2,997 508 865 2
4	2,997 508 865 2	2,997 508 867 2

Tabulka 2.6: Tabulka k příkladu 2.2.2

čímž zjistíme v jakém bodě je hodnota derivace rovna jedné. Budeme takto postupovat, jelikož derivace funkce  $g$  je exponenciální funkcí, která klesá na celém svém definičním oboru. Pokud najdeme číslo  $c$ , pro které platí  $g'(c) = 1$ , můžeme určit intervaly  $(-\infty, c)$ ,  $(c, \infty)$ , kde na intervalu  $(-\infty, c)$  (resp.  $(c, \infty)$ ) budou ležet repulzivní (resp. atraktivní) pevné body funkce  $g$ .

$$e^{-2x} = \frac{1}{2}$$

$$-2x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = c = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-2}$$

Nalezli jsme číslo  $c \doteq 0,34657$ . Tedy námi zvolená funkce  $g$  má na celém zadaném intervalu  $\langle 1, 4 \rangle$  pouze přitahující pevné body. Začneme s iteračním procesem, vizte tabulka 2.6. Pomocí metody prosté iterace jsme našli přibližnou hodnotu kořene funkce  $f$ , přičemž platí:  $\xi \doteq 2,9975088672$ . Funkční hodnota funkce  $f$  v bodě  $x_5$  je řádu  $10^{-10}$ .

**Příklad 2.2.3.** Řešte stejné zadání jako v příkladu 2.2.2 s tím rozdílem, že kořen hledejte na intervalu  $\langle -6, 0 \rangle$  a za počáteční aproximaci uvažujte  $x_0 = -5$ .

**Řešení 2.2.3.** Z postupu řešení příkladu 2.2.2 je zřejmé, že iterační funkce ve tvaru  $g(x) = 3 - e^{-2x}$  v tuto chvíli nebude vhodná, jelikož její derivace na intervalu  $\left(-\infty, \frac{\ln(0,5)}{2}\right)$  nabývá hodnot vyšších než 1. Vyjádřeme tedy funkci  $g$  z předpisu funkce  $f$  jiným způsobem.

$$e^{-2x} + x - 3 = 0$$

$$e^{-2x} = 3 - x$$

$$-2x = \ln(3 - x)$$

$$x = \frac{\ln(3 - x)}{-2}$$

$$g(x) = \frac{\ln(3 - x)}{-2}$$

Derivace takto zvolené funkce  $g$  je

$$g'(x) = \frac{1}{6 - 2x}.$$

$k$	$x_k$	$x_{k+1}$
0	-5,000 000 000 0	-1,039 720 770 8
1	-1,039 720 770 8	-0,698 087 786 7
2	-0,698 087 786 7	-0,653 907 935 8
3	-0,653 907 935 8	-0,647 898 631 1
4	-0,647 898 631 1	-0,647 075 642 1

Tabulka 2.7: Tabulka k příkladu 2.2.3

Abychom našli intervaly, na nichž platí  $|g'(x)| < 1$ , musíme vyřešit následující dvě nerovnice:

$$\frac{1}{6-2x} < 1, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{6-2x} > -1. \quad (2.3)$$

Nerovnice (2.2) je splněna pro  $x \in (-\infty, \frac{5}{2}) \cup (3, \infty)$ . Nerovnici (2.3) vyhovují taková  $x$ , pro která platí:  $x \in (-\infty, 3) \cup (\frac{7}{2}, \infty)$ . Je zřejmé, že nerovnice (2.2), (2.3) jsou splněny zároveň pro  $x \in (-\infty, \frac{5}{2}) \cup (\frac{7}{2}, \infty)$ . Námi zvolená funkce  $g$  tedy vyhovuje zadání tohoto příkladu. Začneme s výpočty, vizte tabulka 2.7. Přibližná hodnota kořene  $\xi$  funkce  $f$  určená metodou prosté iterace je  $x_5 = -0,6470756421$ , přičemž funkční hodnota funkce  $f$  v bodě  $x_5$  je řádu  $10^{-4}$ . Pokud bychom chtěli výsledek zpřesnit, museli bychom v iteracích pokračovat.

V samotném závěru sekce 1.3 jsme uvedli další způsob, jak určit vhodnou iterační funkci  $g$ . Ukažme jej na následujícím příkladě.

**Příklad 2.2.4.** Pomocí metody prosté iterace vyřešte rovnici

$$3x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 2x - 1 = 0$$

na intervalu  $(0, 1)$ . Iterační proces zastavte ve chvíli, když  $|x_k - x_{k+1}| < 10^{-5}$ .

**Řešení 2.2.4.** Označme  $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 2x - 1$ . Derivace funkce  $f$  je

$$f'(x) = 12x^3 - 18x^2 + 12x + 2.$$

Druhá derivace funkce  $f$  je

$$f''(x) = 36x^2 - 36x + 12.$$

Diskriminant rovnice  $36x^2 - 36x + 12 = 0$  je menší než nula a koeficient kvadratického členu je větší než nula, z těchto důvodů

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in D_{f''},$$

$k$	$x_k$	$x_{k+1}$
0	0,000 000 000 0	0,200 000 000 0
1	0,200 000 000 0	0,280 640 000 0
2	0,280 640 000 0	0,296 675 105 2
3	0,296 675 105 2	0,299 072 248 5
4	0,299 072 248 5	0,299 410 474 4
5	0,299 410 474 4	0,299 457 783 6
6	0,299 457 783 6	0,299 464 392 9

Tabulka 2.8: Tabulka k příkladu 2.2.4

tedy  $f'$  je rostoucí funkcí pro všechna  $x$  z definičního oboru  $D_{f'}$ . Pro hodnoty derivací v krajních bodech zadaného intervalu platí  $f'(0) = 2$ ,  $f'(1) = 8$ , čímž je splněna podmínka (1.10). Položíme  $\lambda = \frac{2}{2+8} = \frac{1}{5}$ . Iterační funkce  $g$  je tedy tvaru

$$g(x) = x - \frac{1}{5}(3x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 2x - 1).$$

Nyní začněme s výpočty. Za počáteční aproximaci zvolme  $x_0 = 0$ . Vizte tabulka 2.8. Nalezli jsme hodnotu  $x_7 = 0,2994643929$ , která je přibližnou hodnotou řešení zadané rovnice. Funkční hodnota funkce  $f$  v bodě  $x_7$  je řádu  $10^{-8}$ . Tento příklad byl převzat z [7].

## 2.3 Newtonova metoda

**Příklad 2.3.1.** Pomocí Newtonovy metody nalezněte řešení rovnice  $x^4 - 2x^3 - 3 = 0$  při počáteční hodnotě  $x_0 = -2$  a to s přesností  $\varepsilon = 0,001$ .

**Řešení 2.3.1.** Označme  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3$ . Jak jsme odvodili v sekci 1.4, Newtonova metoda má iterační vzorec ve tvaru

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad (2.4)$$

pro  $k = 1, 2, \dots$  a za předpokladu, že pro všechna  $k$  platí

$$f'(x_{k-1}) \neq 0. \quad (2.5)$$

Nejprve tedy musíme určit první derivace funkce  $f$ .

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

Zadaná počáteční aproximace zřejmě splňuje podmínku (2.5). První iteraci získáme pro  $k = 1$  dosazením počáteční hodnoty do rovnice (2.4).

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ f(x_0) &= (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 - 3 \\ f'(x_0) &= 4 \cdot (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 \\ x_1 &\doteq -1,4821 \end{aligned}$$

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	-2,0000	-19,0000	-56,0000
1	-1,4821	8,3364	-26,2022
2	-1,1639	1,9885	-14,4347
3	-1,0261	0,2693	-10,6387
4	-1,0008	0,0080	-10,0192
5	-1,0000	0,0000	-10,0000

Tabulka 2.9: Tabulka k příkladu 2.3.1

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	-1,200 000	-7,200 156	-1,870 569
1	-5,049 180	123,451 000	-74,160 816
2	-3,384 541	32,348 037	-37,247 885
3	-2,516 088	7,070 482	-21,234 767
4	-2,183 121	0,948 415	-15,597 137
5	-2,122 314	0,030 127	-14,608 572
6	-2,120 252	0,000 039	-14,575 298
7	-2,120 249	0,000 005	-14,575 250

Tabulka 2.10: Tabulka k příkladu 2.3.2

Druhou iteraci spočteme analogicky.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$f(x_1) = (-1,4821)^4 - 2 \cdot (-1,4821)^3 - 3$$

$$f'(x_1) = 4 \cdot (-1,4821)^3 - 6 \cdot (-1,4821)^2$$

$$x_2 \doteq -1,1639$$

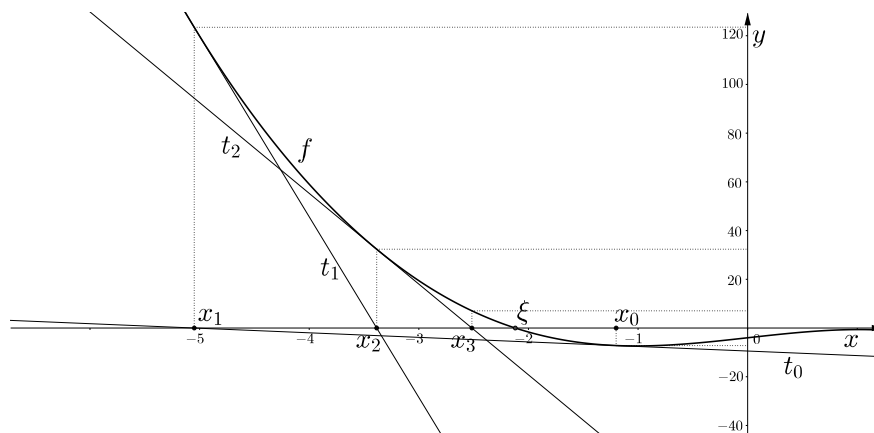
Iterace budeme stejným způsobem provádět dál. Iterační průběh je zanesen v tabulce 2.9. Nyní již snadno nahlédneme, že řešením zadané rovnice, nalezeným pomocí Newtonovy metody, při počáteční aproximaci  $x_0 = -2$ , je číslo  $-1$ . Na toleranci již nemusíme brát zřetel, jelikož jsme našli přesnou hodnotu kořene funkce  $f$ .

**Příklad 2.3.2.** *Bud'  $f(x) = 4 \sin(x) - x^3 + x - 4$ . Pomocí Newtonovy metody určete řešení rovnice (1.1) při počáteční aproximaci  $x_0 = -1,2$ . Výpočet ukončete, když  $|f(x_k)| < 10^{-5}$ .*

**Řešení 2.3.2.** První derivace funkce  $f$  nabývá tvaru

$$f'(x) = 4 \cos(x) - 3x^2 + 1.$$

Dále budeme postupovat stejně jako v příkladu 2.3.1. Vizte tabulka 2.10. Na obrázku 2.1 je graficky zobrazen průběh iterací (osy jsou v poměru 1 : 45). V tabulce 2.10



Obrázek 2.1: Iterační průběh příkladu 2.3.2

je dobře vidět, jak je důležitá správná volba počáteční aproximace. Derivace funkce  $f$  v počáteční aproximaci nabývá hodnoty nepříliš vzdálené od nuly (tedy přinejmenším v porovnání s hodnotami první derivace funkce  $f$  v dalších iteracích), a proto je první iterace tolik vzdálená od počáteční aproximace. Pokud bychom za počáteční hodnotu volili například  $-1,9$ , první iterace by nebyla natolik vzdálena. Přibližným řešením  $\xi$  zadané rovnice, které splňuje podmínku  $|f(\xi)| < 10^{-5}$ , je hodnota  $-2,120249$ .

**Příklad 2.3.3.** *Bud'  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ . Pomocí Newtonovy metody určete kořen funkce  $f$  při počáteční hodnotě  $x_0 = \frac{1}{3}$ . Proveďte nejvýše 4 iterace.*

**Řešení 2.3.3.** První derivace funkce  $f$  je

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1.$$

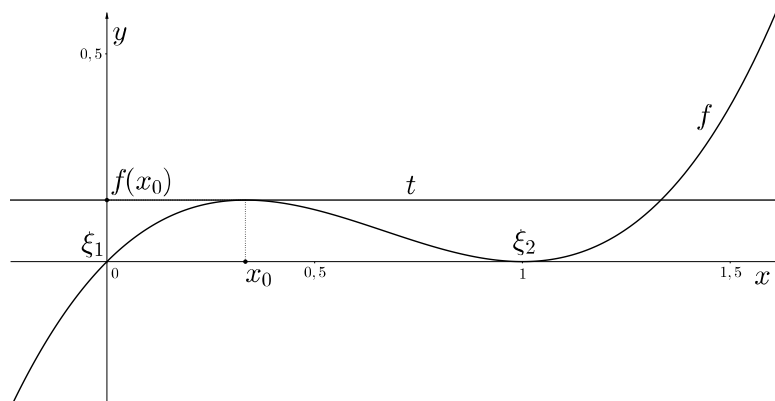
První iteraci určíme analogicky jako v předešlých příkladech.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_1 &= \frac{1}{3} - \frac{4}{0} \end{aligned} \tag{2.6}$$

V rovnici (2.6) dochází k dělení nulou, což je zapříčiněno nulovou hodnotou derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$ . Při této počáteční aproximaci tedy nelze nalézt kořen, jelikož tečna ke grafu funkce v bodě, kde derivace funkce nabývá nulové hodnoty, je rovnoběžná s osou  $x$ , tudíž ji nikde neprotne. Pro lepší představu vizte obrázek 2.2.

V následujících příkladech budeme řešit stejné zadání, pouze změníme počáteční hodnotu.

**Příklad 2.3.4.** *Bud'  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ . Pomocí Newtonovy metody určete kořen funkce  $f$  při počáteční hodnotě  $x_0 = 0,2$ . Proveďte nejvýše 4 iterace.*



Obrázek 2.2: Nulová hodnota derivace v příkladu 2.3.3

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	0,200 000 0	0,128 000 0	0,320 000 0
1	-0,200 000 0	-0,288 000 0	1,920 000 0
2	-0,050 000 0	-0,055 125 0	1,270 500 0
3	-0,004 347 8	-0,004 385 7	1,017 447 9
4	-0,000 037 3	0,000 037 3	1,000 149 2

Tabulka 2.11: Tabulka k příkladu 2.3.4

**Řešení 2.3.4.**

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Průběh iterací je zaznamenán v tabulce 2.11. Po čtyřech krocích jsme dospěli k hodnotě  $\xi \doteq -0,0000373$ .

**Příklad 2.3.5.** *Bud'  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ . Pomocí Newtonovy metody určete kořen funkce  $f$  při počáteční hodnotě  $x_0 = 0,5$ . Proved'te nejvýše 4 iterace.*

**Řešení 2.3.5.**

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Iterační proces Newtonovy metody je zaznamenán v tabulce 2.12. Hned při výpočtu první iterace jsme našli řešení zadané rovnice  $\xi = 1$ . V příkladech 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5 je opět vidět, jak moc záleží na volbě počáteční aproximace. Kořeny funkce  $f$ , která

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	0,500	0,125	-0,250
1	1,000	0,000	0,000

Tabulka 2.12: Tabulka k příkladu 2.3.5

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	-0,400 000	-0,685 193	-2,617 246
1	-0,661 799	0,489 248	-6,641 583
2	-0,588 135	0,048 976	-5,334 716
3	-0,578 954	0,000 704	-5,181 448
4	-0,578 818	-0,000 001	-5,179 194
5	-0,578 818	-0,000 001	-5,179 194

Tabulka 2.13: Tabulka k příkladu 2.3.6 při  $x_0 = -0,4$

$k$	$\bar{x}_k$	$f(\bar{x}_k)$	$f'(\bar{x}_k)$
0	0,500 000	-0,516 198	1,048 446
1	0,992 345	0,042 917	1,860 957
2	0,969 283	0,002 064	1,686 880
3	0,968 060	0,000 006	1,678 448
4	0,968 057	0,000 001	1,678 427

Tabulka 2.14: Tabulka k příkladu 2.3.6 při  $\bar{x}_0 = 0,5$

je součástí zadání těchto příkladů, lze nalézt i aritmeticky.

$$\begin{aligned}
 x^3 - 2x^2 + x &= 0 \\
 x(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\
 x(x-1)(x-1) &= 0 \\
 \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \xi_3 = 1
 \end{aligned}$$

Zadaná funkce  $f$  je polynomickou funkcí stupně 3. Má tedy buď tři jednoduché reálné kořeny, nebo jeden jednoduchý reálný kořen a dvojici komplexně sdružených imaginárních kořenů, nebo jeden trojnásobný reálný kořen, nebo jako v našem případě jeden jednoduchý reálný kořen a jeden dvojnásobný reálný kořen.

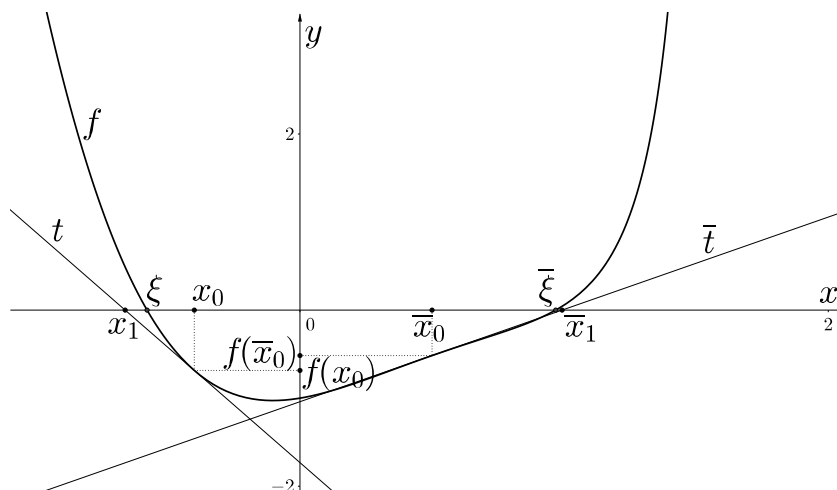
**Příklad 2.3.6.** *Nalezněte kořen funkce  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 0,5x + \operatorname{tg}(x) - 1$  na intervalu  $\langle -0,5; 1 \rangle$ . Výpočet ukončete ve chvíli, kdy rozdíl dvou po sobě jdoucích iterací bude v absolutní hodnotě menší než  $10^{-5}$ .*

**Řešení 2.3.6.** V zadání není pevně stanovena počáteční hodnota. Zvolme nejprve za počáteční hodnotu  $x_0 = -0,4$ . Derivace funkce  $f$  je

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x - 0,5 + \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Průběh výpočtů je zanesen v tabulce 2.13. Při počáteční aproximaci  $x_0 = -0,4$  jsme dospěli ke kořenu  $\xi \doteq -0,578818$ , avšak tento kořen není prvkem zadaného intervalu. Nyní začneme hledat kořen při počáteční aproximaci  $\bar{x}_0 = 0,5$ . Průběh určování kořene při této počáteční hodnotě je zanesen v tabulce 2.14. Tímto postupem jsme

dospěli ke kořeni  $\bar{\xi} \doteq 0,968057$ , který zřejmě leží v zadaném intervalu  $\langle -0,5; 1 \rangle$ . Rozdíl mezi počátečními aproximacemi je pouhých 0,9, a přesto jsme Newtonovou metodou dokonvergovali k různým kořenům funkce  $f$ . Nalezení prvních iterací  $x_1, \bar{x}_1$  pro obě počáteční hodnoty je graficky vyobrazeno na obrázku 2.3 (osy jsou zobrazeny v poměru 1 : 3).



Obrázek 2.3: Závislost konvergence na volbě počáteční hodnoty Newtonovy metody

## 2.4 Metoda sečen

**Příklad 2.4.1.** Metodou sečen určete kořen funkce  $f(x) = \sin(2^x) - x$  při počátečních aproximacích  $x_0 = 0,5$ ,  $x_1 = 1,5$ . Výpočet ukončete při hodnotě  $x_7$ , přičemž počítejte s přesností na 10 desetinných míst.

**Řešení 2.4.1.** Následující členy posloupnosti  $\{x_k\}_{k=0}^7$  budeme generovat pomocí zmíněného vztahu (1.14). Uvedme výpočet hodnoty  $x_2$ .

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 - \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)} f(x_0) \\ x_2 &= 0,5 - \frac{0,5 - 1,5}{f(0,5) - f(1,5)} f(0,5) \\ x_2 &\doteq 0,7903897298 \end{aligned}$$

Dílní výpočty dalších členů posloupnosti naleznete v tabulce 2.15. Metodou sečen jsme dospěli k hodnotě  $x_7 = 0,9401018528$ , která je přibližnou hodnotou kořene  $\xi$  funkce  $f$ .

**Příklad 2.4.2.** Pomocí metody sečen nalezněte přibližnou hodnotu řešení rovnice  $\sqrt{x^3 - x^2 - 1} - x = 0$  a to při  $x_0 = 1,6$ ,  $x_1 = 2$ . Výpočet ukončete ve chvíli, kdy bude platit nerovnost  $|x_k - x_{k+1}| < 10^{-4}$ .



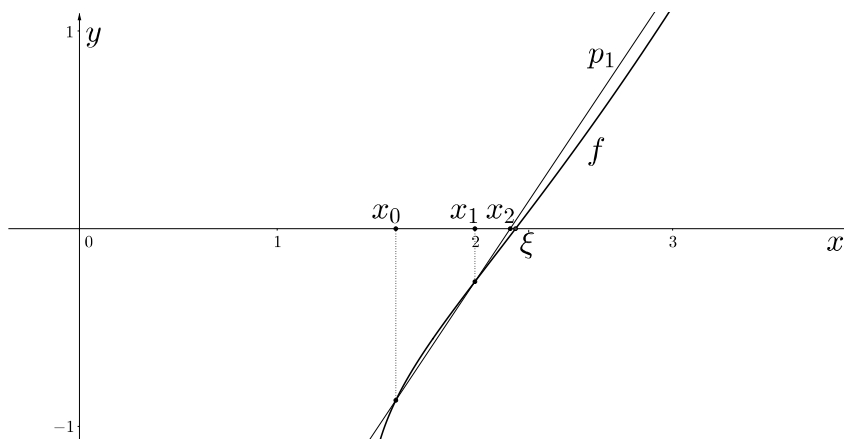
$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$
1	0,500 000 000 0	1,500 000 000 0	0,790 389 729 8	0,197 036 674 4
2	1,500 000 000 0	0,790 389 729 8	0,891 054 076 7	0,068 962 674 2
3	0,790 389 729 8	0,891 054 076 7	0,945 257 760 1	-0,007 519 733 0
4	0,891 054 076 7	0,945 257 760 1	0,939 928 466 2	0,000 251 963 4
5	0,945 257 760 1	0,939 928 466 2	0,940 101 245 3	0,000 000 882 8
6	0,939 928 466 2	0,940 101 245 3	0,940 101 852 8	-0,000 000 000 1

Tabulka 2.15: Tabulka k příkladu 2.4.1

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$
1	1,600 000 0	2,000 000 0	2,178 653 5	-0,035 171 4
2	2,000 000 0	2,178 653 5	2,205 647 0	0,000 101 5
3	2,178 653 5	2,205 647 0	2,205 569 3	-0,000 000 2

Tabulka 2.16: Tabulka k příkladu 2.4.2

**Řešení 2.4.2.** Označme  $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - 1} - x$ . Iterační proces metody sečen je zanesen v tabulce 2.16. Hodnoty  $x_3, x_4$  splňují stanovenou podmínku pro ukončení výpočtu. Řešení zadané rovnice (resp. kořen  $\xi$  funkce  $f$ ) je přibližně  $x_4 = 2,2055693$ . K výsledku jsme dokonvergovali velmi rychle. Lepší představu o tom, jak tento krátký proces určování přibližné hodnoty řešení probíhal, nám může poskytnout obrázek 2.4. Můžeme říci, že funkce  $f$  se na okolí bodu  $\xi$  chová jako přímka, což je



Obrázek 2.4: Rychlá konvergence ke kořenu v příkladu 2.4.2

právě důvod brzkého ukončení algoritmu metody sečen.

**Příklad 2.4.3.** Určete hodnotu kořene funkce  $f(x) = 0,3 \cos(x) + 2^x$  pomocí metody sečen při počátečních hodnotách  $x_0 = -3,5, x_1 = -1,5$ . Výpočet ukončete, když bude platit  $|x_k - x_{k+1}| < 10^{-3}$ .

**Řešení 2.4.3.** Dílčí výpočty jsou zaneseny v tabulce 2.17. Členy  $x_6, x_7$  posloup-

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$
1	-3,500 000 00	-1,500 000 00	-2,821 202 96	-0,143 241 37
2	-1,500 000 00	-2,821 202 96	-2,455 864 91	-0,049 919 29
3	-2,821 202 96	-2,455 864 91	-2,260 440 48	0,017 829 44
4	-2,455 864 91	-2,260 440 48	-2,311 870 35	-0,001 125 03
5	-2,260 440 48	-2,311 870 35	-2,308 817 78	-0,000 021 89
6	-2,311 870 35	-2,308 817 78	-2,308 757 20	0,000 000 03

Tabulka 2.17: Tabulka k příkladu 2.4.3

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$
1	1,200 000	0,250 000	0,541 412	0,113 787
2	0,250 000	0,541 412	-0,579 420	0,096 979
3	0,541 412	-0,579 420	-7,046 106	46 230,444 249
4	-0,579 420	-7,046 106	-0,579 406	0,096 959
5	-7,046 106	-0,579 406	-0,579 392	0,096 939

Tabulka 2.18: Tabulka k příkladu 2.4.4

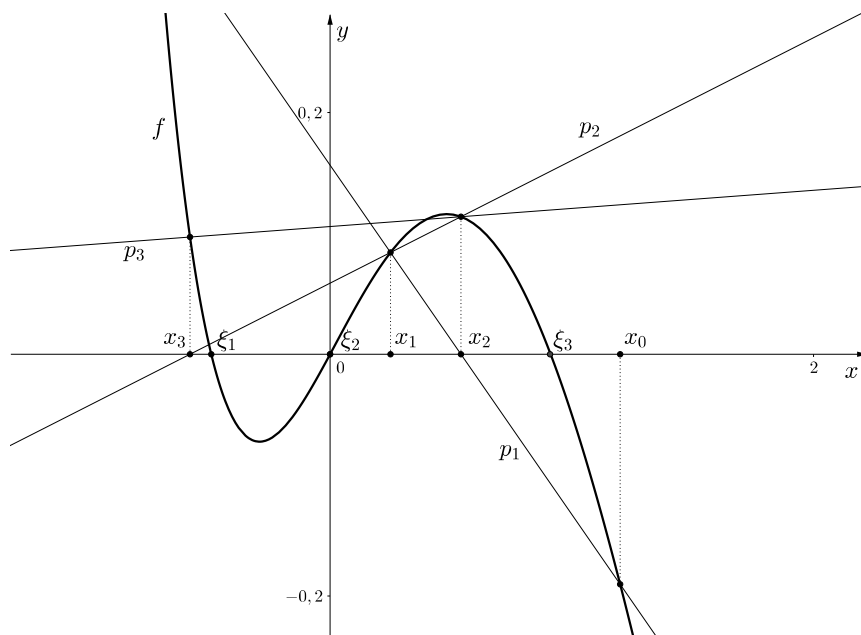
nosti  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  generované vztahem (1.14) splňují podmínku pro ukončení výpočtu. Přibližná hodnota kořene  $\xi$  funkce  $f$  tedy je  $x_7 = -2,3087572$ .

**Příklad 2.4.4.** *Metodou sečen při počátečních aproximacích  $x_0 = 1,2$ ,  $x_1 = 0,25$  nalezněte na intervalu  $\langle 0,5; 1,5 \rangle$  přibližnou hodnotu kořene funkce  $f(x) = \frac{2,9^x - x^3}{2^x} - 1$ . Výpočet ukončete, když  $|f(x_{k+1})| < 10^{-4}$ .*

**Řešení 2.4.4.** Další členy posloupnosti  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  generované pomocí metody sečen jsou zapsány v tabulce 2.18. Při hodnotě  $x_6$  výpočty ukončíme. Podívejme se nyní na obrázek 2.5, na kterém je zobrazen průběh metody sečen zadané funkce s počátečními hodnotami  $x_0 = 1,2$ ,  $x_1 = 0,25$  (souřadné osy jsou v poměru 5 : 1). Z tabulky 2.18 i z obrázku 2.5 je čitelné, že funkční hodnoty v bodech  $x_2, x_3$  jsou velmi blízké, proto  $x_4 = -7,046106$ . Takto zadanými počátečními podmínkami bychom dokonvergovali ke kořeni  $\xi_1$ , jehož hodnota je přibližně  $\xi_1 \doteq -0,491489$ , tedy neleží v intervalu  $\langle 0,5; 1,5 \rangle$ .

**Příklad 2.4.5.** *Metodou sečen při počátečních aproximacích  $x_0 = 0,25$ ,  $x_1 = 1,2$  nalezněte na intervalu  $\langle 0,5; 1,5 \rangle$  přibližnou hodnotu kořene funkce  $f(x) = \frac{2,9^x - x^3}{2^x} - 1$ . Výpočet ukončete, když  $|f(x_{k+1})| < 10^{-4}$ .*

**Řešení 2.4.5.** Výsledky výpočtů lze nalézt v tabulce 2.19. Tento příklad a příklad 2.4.4 mají stejné zadání s tím rozdílem, že došlo k záměně počátečních hodnot. Pokud  $x_0, x_1$  budou stanoveny tak, jak je tomu v zadání tohoto příkladu, metodou sečen získáme přibližnou hodnotu kořene  $\xi_3 \doteq 0,912455$ . Pro lepší představu vizte obrázek 2.6 (osy jsou v poměru 5 : 1).



Obrázek 2.5: Závislost konvergence na volbě počátečních hodnot metody sečen

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$
1	0,250 000	1,200 000	0,541 412	0,113 787
2	1,200 000	0,541 412	0,787 853	0,056 842
3	0,541 412	0,787 853	1,033 848	-0,071 347
4	0,787 853	1,033 848	0,896 933	0,008 017
5	1,033 848	0,896 933	0,910 763	0,000 874
6	0,896 933	0,910 763	0,912 455	-0,000 014

Tabulka 2.19: Tabulka k příkladu 2.4.5

**Příklad 2.4.6.** Metodou sečen přibližně určete kořen funkce  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + x - \frac{3}{2}$  a to při počátečních hodnotách  $x_0 = -3$ ,  $x_1 = -1$ . Výpočet ukončete, když nastane nerovnost  $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$ .

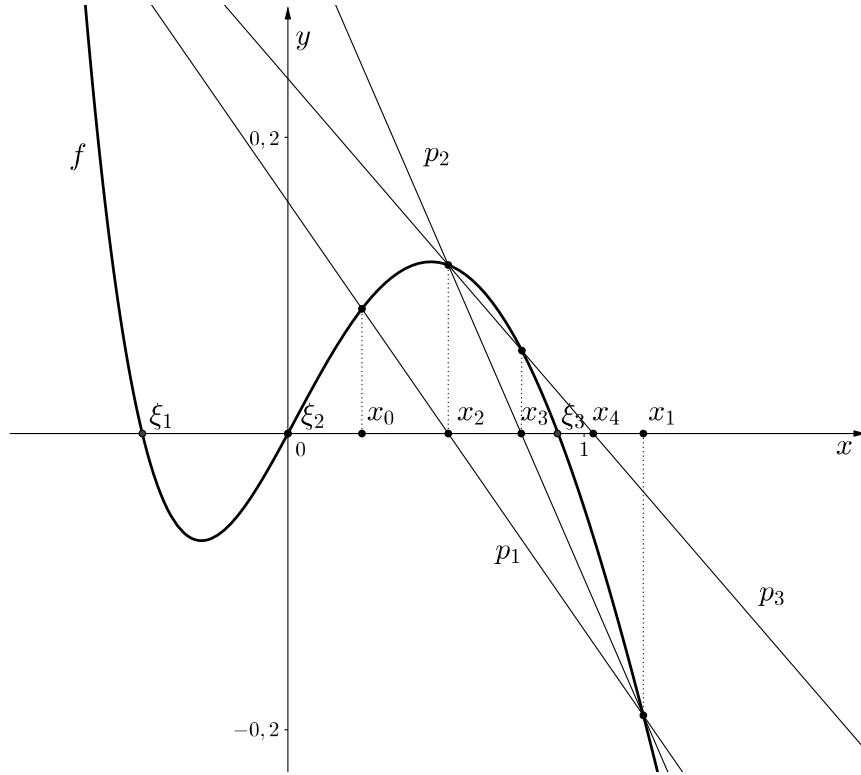
**Řešení 2.4.6.** Vizte tabulka 2.20. Kořen funkce  $f$  je  $\xi \doteq -1,659861173$ .

## 2.5 Metoda regula falsi

**Příklad 2.5.1.** Pomocí metody regula falsi nalezněte přibližnou hodnotu kořene funkce  $f(x) = \cos(x) + x^2 - \sin(x) - 1$  při počátečních hodnotách  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 3$ . Výpočet ukončete při hodnotě  $x_7$ , počítejte s přesností na sedm desetinných míst.

**Řešení 2.5.1.** Funkce  $f$  je spojitá na celém svém definičním oboru. Dále ověřme, zda platí  $f(x_0)f(x_1) < 0$ .

$$f(1) \doteq -0,3011687; \quad f(3) \doteq 6,8688875$$



Obrázek 2.6: Vhodně zvolené počáteční podmínky metody sečen

Počáteční podmínka metody regula falsi je zřejmě splněna. Postupovat budeme podle iteračního vzorce (1.14). Hodnotu  $x_2$  spočteme následovně:

$$x_2 = x_0 - \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)} f(x_0),$$

$$x_2 = 1 - \frac{1 - 3}{f(1) - f(3)} f(1),$$

$$x_2 \doteq 1,0840073.$$

Nyní nás bude zajímat jaké funkční hodnoty nabývá funkce  $f$  v bodě  $x_2$ .

$$f(x_2) = f(1,0840073) \doteq -0,2409773$$

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$
1	-3,000 000 000	-1,000 000 000	-1,250 000 000	-0,371 585 770
2	-1,000 000 000	-1,250 000 000	-1,973 412 370	0,453 546 180
3	-1,250 000 000	-1,973 412 370	-1,575 777 886	-0,094 816 090
4	-1,973 412 370	-1,575 777 886	-1,644 531 973	-0,018 067 826
5	-1,575 777 886	-1,644 531 973	-1,660 717 836	0,001 020 194
6	-1,644 531 973	-1,660 717 836	-1,659 852 753	-0,000 010 028
7	-1,660 717 836	-1,659 852 753	-1,659 861 173	-0,000 000 006

Tabulka 2.20: Tabulka k příkladu 2.4.6

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$M$	$N$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$
1	1,000 000 0	3,000 000 0	-1	+1	1,084 007 3	-0,240 977 3
2	3,000 000 0	1,084 007 3	+1	-1	1,148 946 8	-0,182 805 9
3	3,000 000 0	1,148 946 8	+1	-1	1,196 932 9	-0,133 060 2
4	3,000 000 0	1,196 932 9	+1	-1	1,231 197 2	-0,093 932 6
5	3,000 000 0	1,231 197 2	+1	-1	1,255 059 4	-0,064 876 7
6	3,000 000 0	1,255 059 4	+1	-1	1,271 386 2	-0,044 131 1

Tabulka 2.21: Tabulka k příkladu 2.5.1

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$M$	$N$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$
1	-3,500 00	-1,500 00	-1	+1	-2,821 20	-0,143 24
2	-1,500 00	-2,821 20	+1	-1	-2,455 86	-0,049 92
3	-1,500 00	-2,455 86	+1	-1	-2,343 51	-0,012 39
4	-1,500 00	-2,343 51	+1	-1	-2,316 51	-0,002 80
5	-1,500 00	-2,316 51	+1	-1	-2,310 46	-0,000 62
6	-1,500 00	-2,310 46	+1	-1	-2,309 13	-0,000 13
7	-1,500 00	-2,309 13	+1	-1	-2,308 84	-0,000 03

Tabulka 2.22: Tabulka k příkladu 2.5.2

Funkční hodnota v bodě  $x_2$  je záporná, proto musíme z  $x_0, x_1$  pro další krok použít  $x_1$ , jelikož platí  $f(x_1) > 0$ . Průběh dalších výpočtů je číselně zanesen v tabulce 2.21. Sloupce označené jako  $M, N$  obsahují po řadě hodnoty  $\text{sign}(f(x_{k-1})), \text{sign}(f(x_k))$ . Toto značení zachovejme v rámci všech tabulek příslušných k této sekci. Dospěli jsme k hodnotě  $x_7 = 1,2713862$ , kterou lze považovat za přibližnou hodnotu kořene  $\xi$  funkce  $f$ .

**Příklad 2.5.2.** Určete hodnotu kořene funkce  $f(x) = 0,3 \cos(x) + 2^x$  pomocí metody regula falsi při počátečních hodnotách  $x_0 = -3,5, x_1 = -1,5$ . Výpočet ukončete, když  $|x_k - x_{k+1}| < 10^{-3}$ .

**Řešení 2.5.2.** Funkce  $f$  je spojitou funkcí na celém svém definičním oboru. Zjistěme, zda počáteční hodnoty splňují podmínku  $f(x_0)f(x_1) < 0$ .

$$f(-3,5) = -0,19255; \quad f(-1,5) = 0,37477$$

Kořen leží v intervalu  $(-3,5; -1,5)$ , můžeme tedy začít s výpočty, vizte tabulka 2.22. Po sedmi iteračních krocích jsme došli k přibližné hodnotě kořene  $\xi = -2,30884$ , která splňuje zadanou podmínku. Povšimněme si, že stejné zadání jsme řešili také v příkladu 2.4.3. K tomu, abychom splnili danou podmínku, která je v obou příkladech stejná, jsme při použití metody regula falsi museli určit všechny členy až po  $x_8$ , kdežto v případě řešení pomocí metody sečen stačilo určit členy po  $x_7$ .

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$M$	$N$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$
1	1,000 00	2,000 00	+1	-1	0,696 97	0,999 50
2	2,000 00	0,696 97	-1	+1	1,348 01	0,449 05
3	2,000 00	1,348 01	-1	+1	1,549 92	0,094 73
4	2,000 00	1,549 92	-1	+1	1,588 83	0,016 63
5	2,000 00	1,588 83	-1	+1	1,595 55	0,002 82
6	2,000 00	1,595 55	-1	+1	1,596 69	0,000 47
7	2,000 00	1,596 69	-1	+1	1,596 88	0,000 07

Tabulka 2.23: Tabulka k příkladu 2.5.4

**Příklad 2.5.3.** Určete hodnotu kořene funkce  $f(x) = \arctg(x+1) - x^2 + x - \frac{1}{4}$ . Počáteční hodnoty metody regula falsi jsou  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 3$ . Výpočet ukončete, když dospějete k hodnotě  $x_{k+1}$ , pro kterou platí  $|f(x_{k+1})| < 10^{-4}$ .

**Řešení 2.5.3.** Podmínka spojitosti funkce  $f$  je zřejmě splněna. Ověříme zbývající podmínku.

$$f(2) \doteq -1,00095; \quad f(3) \doteq -4,92418$$

Na intervalu  $\langle 2; 3 \rangle$  nemusí mít funkce  $f$  kořen. Pokud bychom chtěli tyto počáteční hodnoty použít při hledání kořene funkce  $f$ , museli bychom přistoupit k použití metody sečen.

**Příklad 2.5.4.** Řešte příklad 2.5.3 při počátečních hodnotách  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 2$ .

**Řešení 2.5.4.**

$$f(0) \doteq 0,53540; \quad f(2) \doteq -1,00095$$

Zadání splňuje počáteční podmínky metody regula falsi. Hledání kořene je zaznamenáno v tabulce 2.23. Při takto zvolených počátečních podmínkách jsme po sedmi krocích zjistili hodnotu  $x_8$ , která splňuje podmínku  $|f(x_8)| < 10^{-4}$ . Pro přibližnou hodnotu kořene na základě výpočtů platí:  $\xi \doteq x_8 = 1,59688$ . Na obrázku 2.7 (osy jsou v poměru 1 : 2) je zobrazena funkce  $f$  s počátečními podmínkami příkladu 2.5.3 (značeny  $x_0, x_1$ ) a tohoto příkladu (značeny  $\bar{x}_0, \bar{x}_1$ ).

**Příklad 2.5.5.** Metodou regula falsi přibližně určete kořen funkce  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + x - \frac{3}{2}$  a to při počátečních hodnotách  $x_0 = -3$ ,  $x_1 = -1$ . Výpočet ukončete, když nastane nerovnost  $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$ .

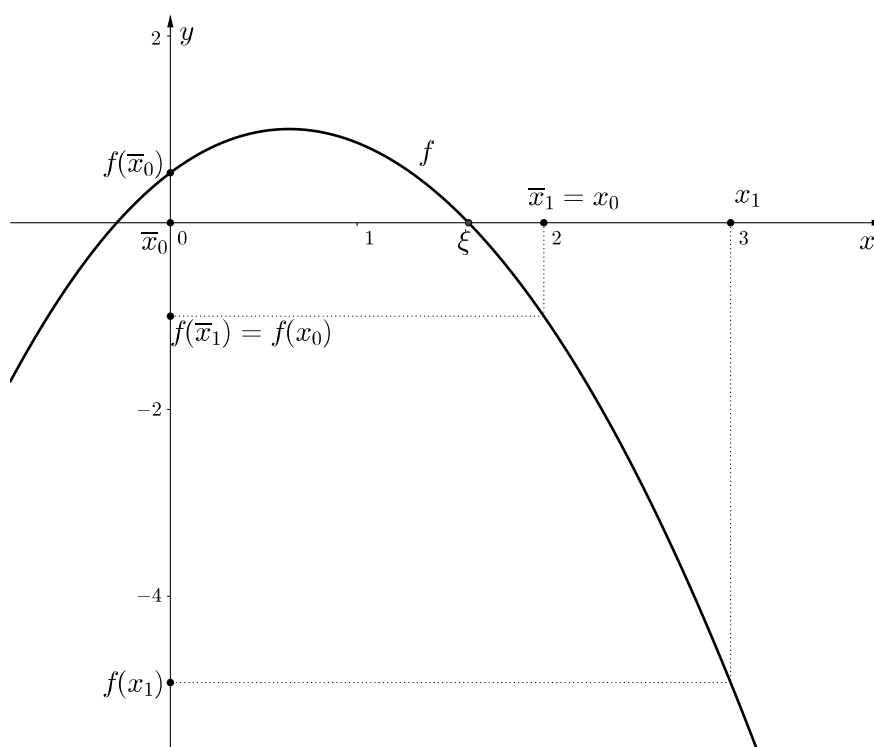
**Řešení 2.5.5.** Funkce  $f$  je zřejmě spojitá. Dále platí

$$f(-3) = 3,5; \quad f(-1) = -0,5.$$

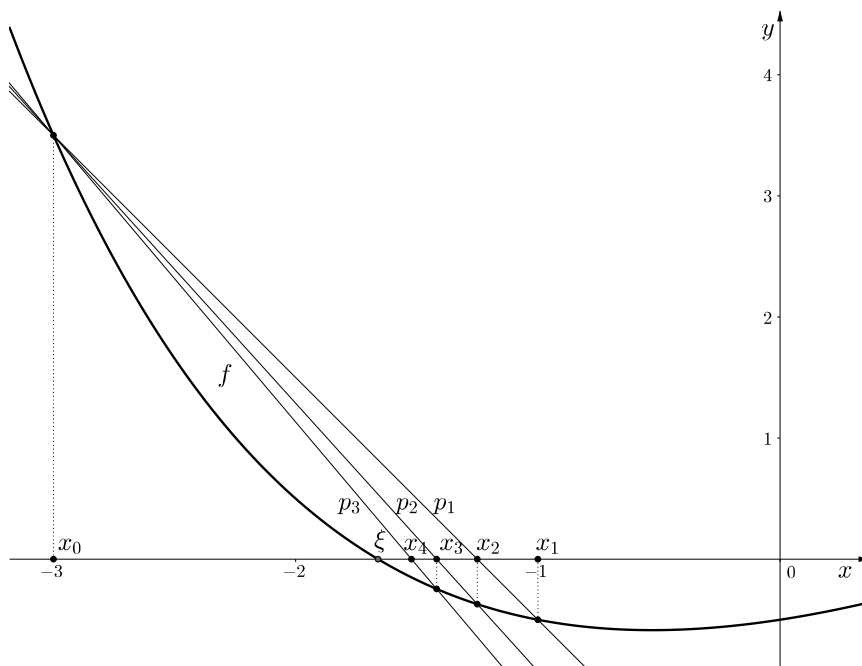
Můžeme tedy začít s hledáním kořene na intervalu  $(-3, -1)$ , vizte tabulka 2.24. Hledaná přibližná hodnota kořene  $\xi$  funkce  $f$  odpovídá hodnotě  $x_{20} = -1,6598525$ . Povšimněme si, že stejné zadání jsme řešili pomocí metody sečen v příkladu 2.4.6. Jde o případ, který jsme rozebírali závěrem sekce 1.6. Vizte obrázek 2.8 (osy jsou v poměru 1 : 2). Metoda regula falsi pro tento případ konverguje pomaleji.

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$M$	$N$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$
1	-3,000 000 0	-1,000 000 0	+1	-1	-1,250 000 0	-0,371 585 8
2	-3,000 000 0	-1,250 000 0	+1	-1	-1,417 960 9	-0,245 885 2
3	-3,000 000 0	-1,417 960 9	+1	-1	-1,521 808 2	-0,150 301 0
4	-3,000 000 0	-1,521 808 2	+1	-1	-1,582 672 7	-0,087 430 4
5	-3,000 000 0	-1,582 672 7	+1	-1	-1,617 214 8	-0,049 392 8
6	-3,000 000 0	-1,617 214 8	+1	-1	-1,636 457 4	-0,027 442 8
7	-3,000 000 0	-1,636 457 4	+1	-1	-1,647 065 5	-0,015 106 1
8	-3,000 000 0	-1,647 065 5	+1	-1	-1,652 879 7	-0,008 272 8
9	-3,000 000 0	-1,652 879 7	+1	-1	-1,656 056 3	-0,004 517 8
10	-3,000 000 0	-1,656 056 3	+1	-1	-1,657 788 8	-0,002 463 4
11	-3,000 000 0	-1,657 788 8	+1	-1	-1,658 732 8	-0,001 342 1
12	-3,000 000 0	-1,658 732 8	+1	-1	-1,659 246 9	-0,000 730 9
13	-3,000 000 0	-1,659 246 9	+1	-1	-1,659 526 8	-0,000 397 9
14	-3,000 000 0	-1,659 526 8	+1	-1	-1,659 679 2	-0,000 216 6
15	-3,000 000 0	-1,659 679 2	+1	-1	-1,659 762 1	-0,000 117 9
16	-3,000 000 0	-1,659 762 1	+1	-1	-1,659 807 3	-0,000 064 1
17	-3,000 000 0	-1,659 807 3	+1	-1	-1,659 831 9	-0,000 034 8
18	-3,000 000 0	-1,659 831 9	+1	-1	-1,659 845 2	-0,000 019 0
19	-3,000 000 0	-1,659 845 2	+1	-1	-1,659 852 5	-0,000 010 3

Tabulka 2.24: Tabulka k příkladu 2.5.5



Obrázek 2.7: Počáteční hodnoty příkladů 2.5.3, 2.5.4



Obrázek 2.8: Pomalá konvergence ke kořenu v příkladu 2.5.5



# Kapitola 3

## Aplikace ve fyzice

Zabývejme se nyní otázkou, jaké jsou možnosti aplikace zmíněných numerických metod ve fyzice. Při fyzikálních výpočtech či měřeních může nastat situace, kdy stojíme před úkolem vyřešit nějakou algebraicky neřešitelnou (nebo složitě řešitelnou) rovnici. V některých případech lze použít k nalezení řešení této rovnice numerických metod a určit jej aspoň přibližně. Přibližné řešení ve fyzikální praxi mnohdy postačí, jelikož používané přístroje mají své odchylky, které jsou dány jejich konstrukcí.

Nyní uvedeme příklad jednoho konkrétního fyzikálního měření, jehož zpracování vede k řešení algebraicky komplikovaně řešitelné rovnice. Předtím, než popíšeme samotný průběh měření, uveďme ve zkrácené formě teorii příslušnou k tématu. Budeme určovat *logaritmický dekrement* dřevěné tyče obdélníkového průřezu, který je důležitou charakteristikou tlumených oscilátorů.

### 3.1 Teorie

Představme si pružinu, na níž je zavěšeno závaží. To, jaká je výchylka pružiny, kterou v tuto chvíli považujeme za harmonický lineární mechanický oscilátor, v čase  $t$ , popisuje rovnice

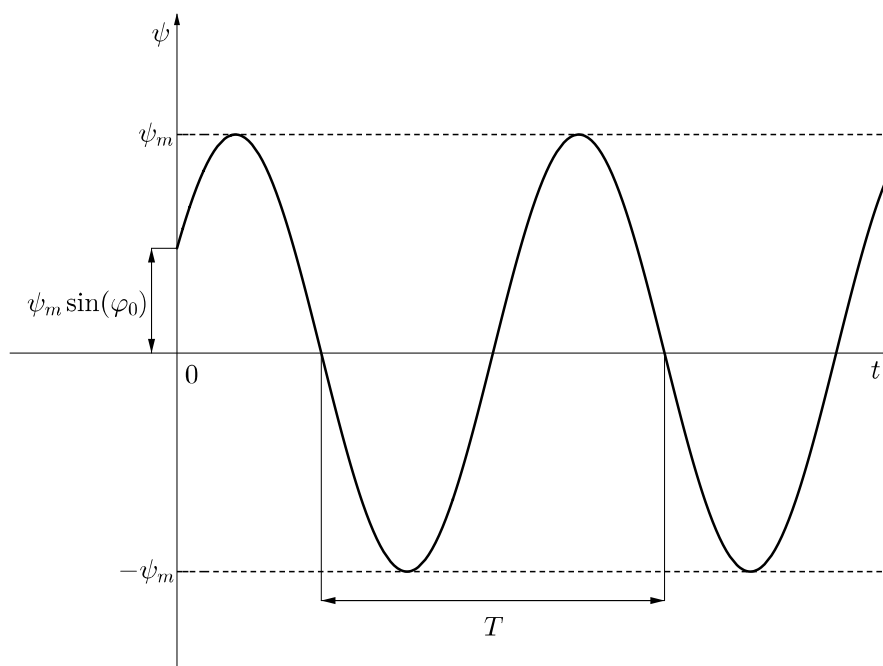
$$\psi = \psi_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.1)$$

Přičemž  $\psi_m$  značí amplitudu výchylky, výraz  $(\omega_0 t + \varphi_0)$  fázi kmitu,  $\varphi_0$  počáteční fázi kmitu,  $\omega_0$  úhlovou frekvenci oscilátoru, kde  $\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ , kde  $f$  je frekvence a  $T$  perioda. Závislost výchylky harmonického oscilátoru, který byl vychýlen z rovnovážné polohy, na čase je ilustrována obrázkem 3.1.

Popíšme nyní reálný mechanický lineární oscilátor. Na každý takový oscilátor působí odporová (tlumící) síla  $\mathbf{F}_o$ . Uvažujme případ, kdy odporová síla je přímo úměrná rychlosti  $\mathbf{v}$  pohybujícího se tělesa, tedy

$$\mathbf{F}_o = -b\mathbf{v}, \quad (3.2)$$

kde  $b > 0$  je *součinitel lineárního odporu* (jeho jednotka je  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$ ). Síla  $\mathbf{F}_o$  působí proti směru rychlosti  $\mathbf{v}$ , proto v rovnici (3.2) je na pravé straně mínus. Působením



Obrázek 3.1: Harmonické kmitání

této síly je tlumen kmitavý pohyb, přičemž se mechanická energie soustavy mění na vnitřní energii oscilátoru a jeho okolí. Abychom popsali závislost výchylky z rovnovážné polohy na čase u takového oscilátoru, musíme vyřešit pohybovou rovnici tlumených kmitů, která je lineární homogenní diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty. Rozbor řešení této rovnice lze nalézt v [10]. Pro naše potřeby postačí, když pouze uvedeme výsledný tvar vztahu, který popisuje průběh tlumených kmitů. Ten nabývá tvaru

$$\psi = \psi_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.3)$$

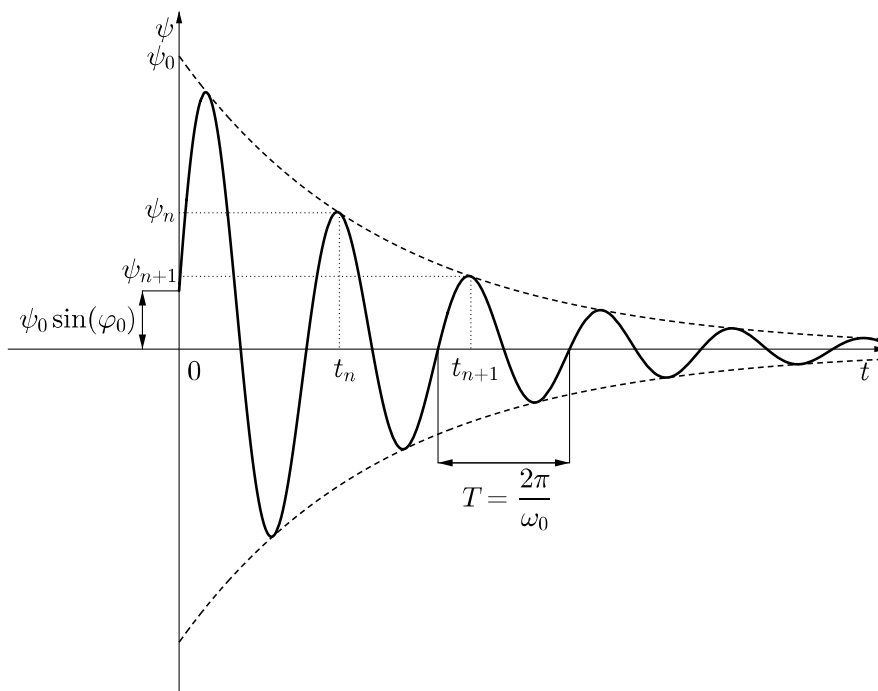
Porovnáme-li rovnice (3.1) a (3.3), zjistíme, že jediný rozdíl mezi nimi je, že amplitudu výchylky  $\psi_m$  z rovnice (3.1) nahradil součin  $\psi_0 e^{-\delta t}$ . Pro harmonické kmity je maximální výchylka po uplynutí periody  $T$  stejná, kdežto v případě tlumených kmitů klesá, jelikož funkce  $f(t) = \psi_0 e^{-\delta t}$  je klesající exponenciální funkcí. Časový průběh tlumených kmitů je zobrazen na obrázku 3.2. Z rovnice (3.3) pro amplitudu dvou po sobě jdoucích kmitů platí

$$\psi_n = \psi_0 e^{-\delta t_n}, \quad \psi_{n+1} = \psi_0 e^{-\delta(t_n+T)} = \psi_n e^{-\delta T}.$$

Naším cílem je zjistit, jaký je vztah mezi dvěma po sobě jdoucími lokálními maximy křivky z obrázku 3.2. Z toho důvodu vydělme vyjádření  $\psi_n$  vyjádřením  $\psi_{n+1}$ :

$$\frac{\psi_n}{\psi_{n+1}} = e^{\delta T}.$$

Výraz  $e^{\delta T}$  je konstantní a nazýváme jej *útlum*. Určíme-li hodnotu přirozeného logaritmu útlumu, dostáváme bezrozměrnou veličinu, kterou je *logaritmický dekrement*,



Obrázek 3.2: Tlumené kmitání

jenž značíme písmenem  $\Lambda$ . Tedy platí

$$\Lambda = \ln e^{\delta T} = \delta T.$$

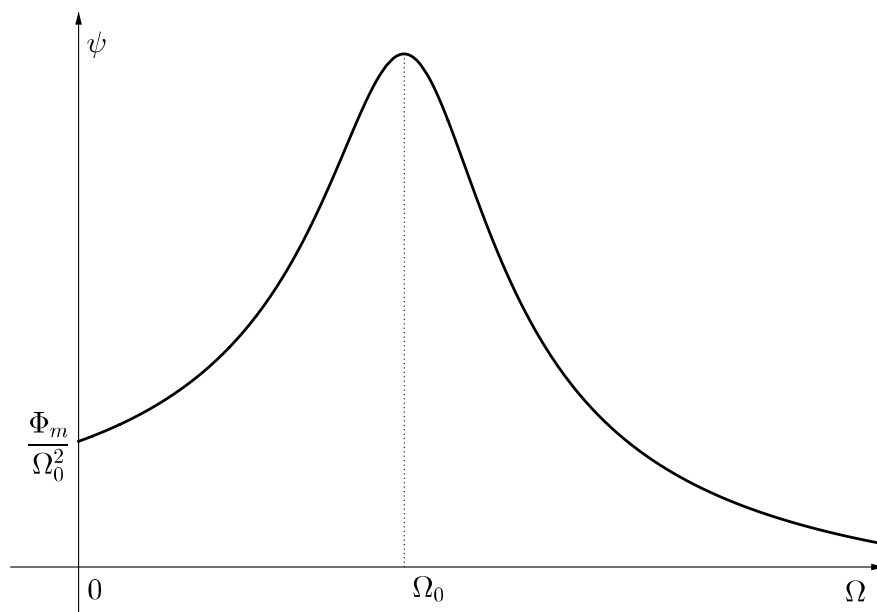
Pro potřeby měření je nutno zavést pojem *rezonanční frekvence*. Nebudeme se pouštět do podrobností, jelikož nám jde především o samotné zpracování hodnot, nikoliv o fyzikální podstatu. Nyní uvažujme mechanický oscilátor, který budeme nuceně rozkmitávat působením periodicky časově proměnné *budící síly*

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_m \sin(\Omega t), \quad (3.4)$$

kde  $\mathbf{F}_m$  je amplitudou budící síly a  $\Omega$  její úhlovou frekvencí. V případě takového oscilátoru lze správnou volbou úhlové frekvence  $\Omega$  docílit stavu *rezonance*. Takto vhodně zvolenou úhlovou frekvenci nazýváme *rezonanční úhlovou frekvencí* a značíme ji  $\Omega_0$ , přičemž se jedná o frekvenci, při níž oscilátor kmitá s největší amplitudou. Závislost amplitudy  $\psi$  na úhlové frekvenci  $\Omega$ , je ilustrována obrázkem 3.3. Tuto křivku nazýváme *rezonanční křivkou* a předpis pro její konstrukci je obecně dán vztahem

$$\psi = \frac{\Phi_m}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \quad (3.5)$$

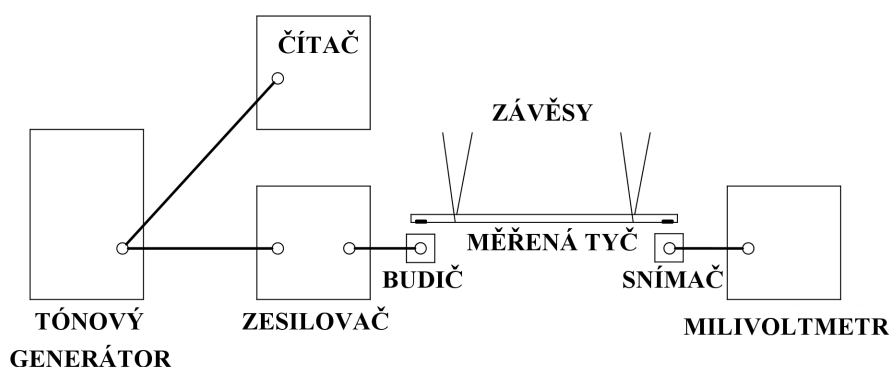
přičemž  $\Phi_m$  je amplitudou obecně braného budícího činitele, jenž realizuje nucené kmitání.



Obrázek 3.3: Rezonanční křivka

## 3.2 Postup měření

Dosud jsme uvažovali pouze případ, kdy osciluje závaží na pružině kolem rovnovážné polohy. V tomto měření budeme proměřovat rezonanční křivku dřevěné tyče obdélníkového průřezu, která je zavěšena v místech uzlů chvění tyče. Jak určit polohu uzlů lze nalézt v [8]. Aparaturu zapojíme podle schématu na obrázku 3.4. Oba konce tyče jsou opatřeny železnými plíšky. Pomocí elektromagnetického budiče,



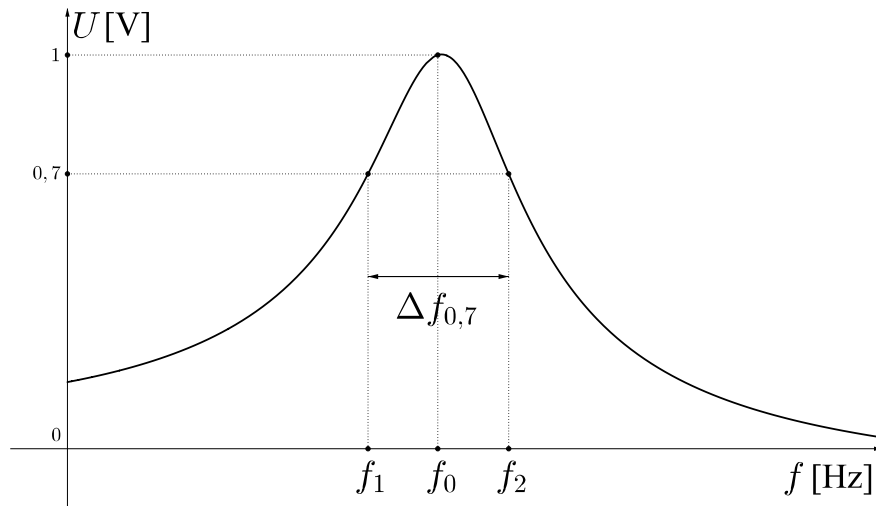
Obrázek 3.4: Zapojení aparatury

jehož obvodem bude procházet střídavý proud, uvedeme vzorek do chvění. Železný plíšek druhého kmitajícího konce způsobuje v okolí snímače proměnný magnetický tok a v závitěch snímače je indukováno napětí. Toto napětí je měřeno milivoltmetrem. Laděním frekvence střídavého proudu v budiči zjistíme rezonanční frekvenci  $f_0$ . Vztah mezi úhlovou rezonanční frekvencí a rezonančním kmitočtem je  $\Omega_0 = 2\pi f_0$ . Za rezonanční frekvenci  $f_0$  budeme považovat takovou frekvenci, pro kterou bude

hodnota amplitudy napětí na displeji milivoltmetru maximální. Ve chvíli, kdy nalezneme  $f_0$  upravíme hodnotu napětí na milivoltmetru na 1 V. Poté budeme ladit vstupní frekvenci na tónovém generátoru tak, abychom určili hodnoty frekvencí pro napětí 0,4 V; 0,6 V; 0,8 V na displeji takto nastaveného milivoltmetru. Podle obrázku 3.3 lze předpokládat, že nalezneme pro každou hodnotu napětí dvě frekvence, jinými slovy proměříme rezonanční křivku v obou směrech od maxima. Budeme tedy proměřovat závislost amplitudy napětí  $U$  na frekvenci  $f$ . Logaritmický dekrement tyče pak určíme ze vztahu

$$\Lambda = \pi \frac{\Delta f_{0,7}}{f_0}, \quad (3.6)$$

kde výrazem  $\Delta f_{0,7}$  rozumíme vzdálenost bodů  $[f_1; 0,7]$ ,  $[f_2; 0,7]$ , kde  $f_1$ ,  $f_2$  jsou hodnoty frekvencí, pro něž bychom milivoltmetrem naměřili 0,7 V. Pro ilustraci uveďme obrázek 3.5. Příslušné vztahy pro odvození rovnice (3.6) lze nalézt v [2], [5], [8].



Obrázek 3.5: Grafická interpretace výrazu  $\Delta f_{0,7}$

### 3.3 Naměřené hodnoty a jejich zpracování

V tabulce 3.1 jsou zaneseny naměřené hodnoty. Uzlové body roviny získané z naměřených hodnot proložíme vhodnou funkcí  $g$ , která bude obecně tvaru

$$g(f) = \frac{A}{\sqrt{((2\pi f_0)^2 - Bf^2)^2 + Cf^2}},$$

kde  $A, B, C \in \mathbb{R}$ . Tento tvar vyplývá z rovnice (3.5). Dá se předpokládat, že  $B \doteq 4\pi^2$ , jelikož platí  $\Omega = 2\pi f$ . K nalezení koeficientů  $A, B, C$  lze využít vhodný matematický software. V našem případě jsme při určování těchto hodnot, resp. při hledání vhodné aproximační funkce, pracovali se softwarem *Logger Pro 3 Demo*. Výsledná funkce,

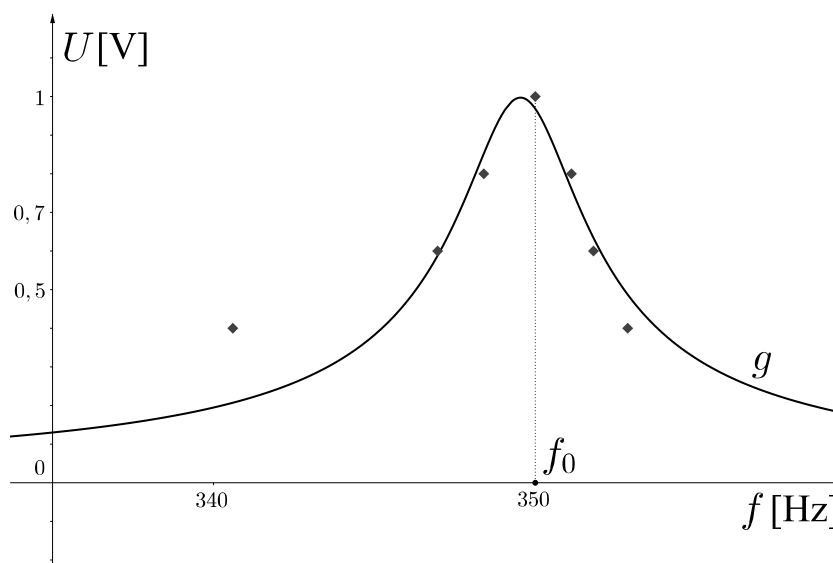
$U$ [V]	$f$ [Hz]
0,4	340,601
0,6	346,965
0,8	348,400
1,0	350,000
0,8	351,122
0,6	351,807
0,4	352,871

Tabulka 3.1: Tabulka naměřených hodnot

kterou proložíme uzlovými body je zobrazena na obrázku 3.6 (osy jsou v poměru 12 : 1 a protínají se v bodě [335, 0]) a její předpis je

$$g(f) = \frac{5,167 \cdot 10^4}{\sqrt{((2\pi f_0)^2 - 39,58f^2)^2 + 2,2 \cdot 10^4 f^2}},$$

kde z tabulky 3.1 platí  $f_0 = 350$  Hz. Graf funkce  $g$  není přesnou rezonanční křivkou,

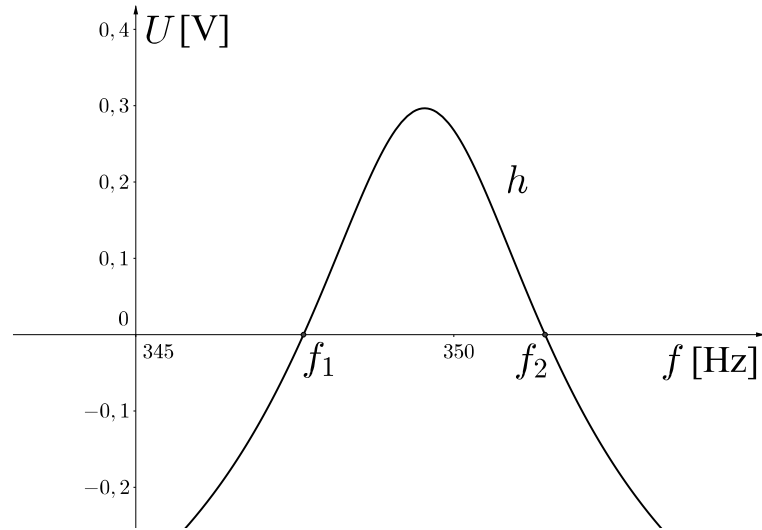


Obrázek 3.6: Uzlové body proložené funkcí  $g$

avšak pro ilustraci postačí.

Naším cílem je zjistit, jaké jsou přibližné hodnoty frekvencí  $f_1$ ,  $f_2$ , ve kterých funkce  $g$  nabývá napětí 0,7 V. Při hledání těchto frekvencí budeme vycházet z funkce  $h$ , pro kterou platí  $h(f) = g(f) - 0,7$ . Docílíme tak toho, že  $f_1$ ,  $f_2$  budou kořeny funkce  $h$ . Funkce  $h$  společně s body  $f_1$ ,  $f_2$  jsou vyobrazeny na obrázku 3.7 (osy jsou v poměru 12 : 1 a protínají se v bodě [345, 0]).

Pokusme se nejprve pomocí metody regula falsi nalézt přibližnou hodnotu frekvence  $f_1$ . Za počáteční hodnoty zvolme  $x_0 = 345$ ,  $x_1 = 350$ . Iterační proces zastavíme



Obrázek 3.7:  $h(f) = g(f) - 0,7$

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$\text{sign}(f(x_{k-1}))$	$\text{sign}(f(x_k))$	$x_{k+1}$	$\text{sign}(f(x_{k+1}))$
1	345,000	350,000	-1	+1	347,713	+1
2	345,000	347,713	-1	+1	347,595	-1
3	347,595	347,713	-1	+1	347,636	-1
4	347,636	347,713	-1	+1	347,636	-1

Tabulka 3.2: Iterační proces určování přibližné hodnoty frekvence  $f_1$

ve chvíli, kdy dvě po sobě jdoucí iterace budou od sebe vzdáleny o méně než  $10^{-2}$ . Průběh iterací je zaznamenán v tabulce 3.2.

*Poznámka 3.1.* Osvětleme důvody volby metody regula falsi pro určování hodnoty kořene funkce  $h$  na intervalu  $(x_0, x_1)$ . Na tomto intervalu funkce  $h$  nabývá svého maxima. V případě volby Newtonovy metody by mohla nastat situace jako v příkladu 2.3.3. Pokud bychom zvolili metodu sečen, hrozilo by, že funkce  $h$  by ve dvou po sobě jdoucích iteracích nabývala blízkých, nebo dokonce stejných hodnot. Tato situace je popsána v závěru sekce 1.6. Pro použití metody prosté iterace bychom museli najít vhodnou iterační funkci, což by pro funkci  $h$  bylo obtížné. Metoda bisekce, stejně jako metoda regula falsi, jsou metodami řádu jedna, tedy rychlost konvergence metody bisekce nebude vyšší než metody regula falsi.

Přibližná hodnota hledané frekvence je  $f_1 \doteq 347,636$  Hz. Nalezneme nyní pomocí metody sečen přibližnou velikost frekvence  $f_2$ . Uvažujme  $x_0 = 350$ ,  $x_1 = 355$  jako počáteční hodnoty. Podmínku ukončení iteračního procesu zachovejme stejnou jako při hledání přibližné hodnoty frekvence  $f_1$ . V tabulce 3.3 je zanesen iterační proces.

*Poznámka 3.2.* Při určování hodnoty  $f_2$  se opět vyvarujeme použití Newtonovy metody a metody prosté iterace z důvodů osvětlených v poznámce 3.1. Na intervalu

$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$x_{k+1}$
1	350,000	355,000	352,071
2	355,000	352,071	350,897
3	352,071	350,897	351,479
4	350,897	351,479	351,436
5	351,479	351,436	351,434

Tabulka 3.3: Iterační proces určování přibližné hodnoty frekvence  $f_2$

$(x_0, x_1)$  funkce  $h$  nenabývá maxima, metoda sečen je metodou vyššího řádu než metody regula falsi a bisekce, proto použijeme právě ji.

Metodou sečen jsme našli přibližnou hodnotu frekvence  $f_2 \doteq 351,434$  Hz. Nyní již známe hodnotu rezonanční frekvence  $f_0$  i přibližné hodnoty hledaných frekvencí  $f_1, f_2$ . Můžeme tedy dosazením do rovnice (3.6) určit logaritmický dekrement měřené tyče.

$$\Lambda = \pi \frac{\Delta f_{0,7}}{f_0}$$

$$\Lambda = \pi \frac{f_2 - f_1}{f_0}$$

$$\Lambda = \pi \frac{351,434 - 347,636}{350}$$

$$\Lambda \doteq 0,034$$

Přibližná hodnota logaritmického dekrementu měřené tyče je  $\Lambda \doteq 0,034$ .



# Závěr

Při hledání řešení rovnice (1.1) pomocí popsaných metod je nutno zohlednit hned několik skutečností. Vždy nám pomůže, pokud máme aspoň rámcovou představu o tom, jak se funkce  $f$  chová na okolí svého kořene  $\xi$ . Na základě této představy pak lze vybrat tu metodu, pomocí které dokonvergujeme k přibližné hodnotě kořene, popřípadě na základě výpočtů uhodneme přesnou hodnotu  $\xi$ . Jak je v textu zmíněno, každá z uvedených metod je charakteristická svým řádem. Snaha o aplikaci metody s nejvyšším možným řádem na řešení konkrétního příkladu je žádoucí. Nutno však sledovat veškeré okolnosti, jež by mohly negativně ovlivnit iterační proces dané metody. V případě, že nemáme jistotu, že některá z metod bude konvergovat ke kořenu, raději volme metodu jinou a to i s vědomím, že tato metoda bude konvergovat pomaleji. Žádná z metod není univerzálním nástrojem pro nalezení všech řešení všech rovnic, avšak v mnohých situacích poslouží velmi dobře.

První kapitola popisuje principy jednotlivých metod. Na základě těchto popisů jsme byli schopni řešit příklady v kapitole 2. Podařilo se nám poukázat na některé jevy, které mohou ovlivnit proces určování kořene. Tyto jevy byly také interpretovány geometricky. V rámci jedné bakalářské práce však nelze podrobně rozebrat všechny situace, jež mohou nastat. Ve třetí kapitole jsme uvedli jednu z možných fyzikálních aplikací numerických metod řešení nelineárních rovnic. Tento případ však je jen jedním z mnoha. Nepochybně bychom našli nepřeberné množství aplikací ve fyzikální problematice. Jmenujme například určování vlastních čísel matic, která mají význam v kvantové fyzice a kybernetice. Práce by dále mohla zahrnovat například sekci věnovanou lokalizaci kořenů polynomických funkcí. Tato sekce by nám zajisté pomohla při určování počátečních hodnot jednotlivých numerických metod.

# Seznam obrázků

1.1	Iterační průběh metody bisekce . . . . .	11
1.2	Grafické určení $x_{k+1}$ pomocí metody prosté iterace . . . . .	13
1.3	Přitahující a odpuzující pevný bod funkce $g(x) = 1, 2^x - \frac{1}{2}$ . . . . .	16
1.4	Metoda prosté iterace pro $ g'(\xi)  = 1$ . . . . .	17
1.5	Cyklus řádu dva metody prosté iterace $x = \cos(\frac{\pi}{2}(x - 1)) + 2$ . . . . .	18
1.6	Grafické určení $x_1$ pomocí Newtonovy metody . . . . .	20
1.7	Iterační proces Newtonovy metody . . . . .	22
1.8	Grafické určení $x_2$ pomocí metody sečen . . . . .	23
1.9	Iterační proces metody sečen . . . . .	24
1.10	Iterační proces metody regula falsi . . . . .	25
1.11	Konvergence ke kořenu metodou regula falsi . . . . .	26
1.12	Konvergence ke kořenu metodou sečen . . . . .	27
1.13	Konvergence metodou sečen . . . . .	27
1.14	Konvergence metodou regula falsi . . . . .	28
2.1	Iterační průběh příkladu 2.3.2 . . . . .	37
2.2	Nulová hodnota derivace v příkladu 2.3.3 . . . . .	38
2.3	Závislost konvergence na volbě počáteční hodnoty Newtonovy metody . . . . .	40
2.4	Rychlá konvergence ke kořenu v příkladu 2.4.2 . . . . .	41
2.5	Závislost konvergence na volbě počátečních hodnot metody sečen . . . . .	43
2.6	Vhodně zvolené počáteční podmínky metody sečen . . . . .	44
2.7	Počáteční hodnoty příkladů 2.5.3, 2.5.4 . . . . .	48
2.8	Pomalá konvergence ke kořenu v příkladu 2.5.5 . . . . .	48
3.1	Harmonické kmitání . . . . .	50
3.2	Tlumené kmitání . . . . .	51
3.3	Rezonanční křivka . . . . .	52
3.4	Zapojení aparatury . . . . .	52
3.5	Grafická interpretace výrazu $\Delta f_{0,7}$ . . . . .	53
3.6	Uzlové body proložené funkcí $g$ . . . . .	54
3.7	$h(f) = g(f) - 0,7$ . . . . .	55

# Seznam tabulek

1.1	Pomocná tabulka . . . . .	19
2.1	Tabulka k příkladu 2.1.1 . . . . .	30
2.2	Tabulka k příkladu 2.1.2 . . . . .	30
2.3	Tabulka k příkladu 2.1.3 . . . . .	31
2.4	Tabulka k příkladu 2.1.4 . . . . .	32
2.5	Tabulka k příkladu 2.2.1 . . . . .	32
2.6	Tabulka k příkladu 2.2.2 . . . . .	33
2.7	Tabulka k příkladu 2.2.3 . . . . .	34
2.8	Tabulka k příkladu 2.2.4 . . . . .	35
2.9	Tabulka k příkladu 2.3.1 . . . . .	36
2.10	Tabulka k příkladu 2.3.2 . . . . .	36
2.11	Tabulka k příkladu 2.3.4 . . . . .	38
2.12	Tabulka k příkladu 2.3.5 . . . . .	38
2.13	Tabulka k příkladu 2.3.6 při $x_0 = -0,4$ . . . . .	39
2.14	Tabulka k příkladu 2.3.6 při $\bar{x}_0 = 0,5$ . . . . .	39
2.15	Tabulka k příkladu 2.4.1 . . . . .	41
2.16	Tabulka k příkladu 2.4.2 . . . . .	41
2.17	Tabulka k příkladu 2.4.3 . . . . .	42
2.18	Tabulka k příkladu 2.4.4 . . . . .	42
2.19	Tabulka k příkladu 2.4.5 . . . . .	43
2.20	Tabulka k příkladu 2.4.6 . . . . .	44
2.21	Tabulka k příkladu 2.5.1 . . . . .	45
2.22	Tabulka k příkladu 2.5.2 . . . . .	45
2.23	Tabulka k příkladu 2.5.4 . . . . .	46
2.24	Tabulka k příkladu 2.5.5 . . . . .	47
3.1	Tabulka naměřených hodnot . . . . .	54
3.2	Iterační proces určování přibližné hodnoty frekvence $f_1$ . . . . .	55
3.3	Iterační proces určování přibližné hodnoty frekvence $f_2$ . . . . .	56

# Literatura

- [1] BRABEC, Jiří, ROZENSKÝ, Zdeněk a MARTAN, František. *Matematická analýza I: vysokoškolská učebnice pro elektrotechnické fakulty vysokých škol technických*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1985. 482 s.
- [2] BRDIČKA, Miroslav, SAMEK, Ladislav a SOPKO, Bruno. *Mechanika kontinua*. Vyd. 4., rev. a upr. Praha: Academia, 2011. 878 s. Gerstner; sv. 6. ISBN 978-80-200-2039-0.
- [3] ČERNÁ, Růžena et al. *Základy numerické matematiky a programování: celostátní vysokoškolská učebnice pro strojní, elektrotechnické a stavební fakulty vysokých škol technických*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1987. 445 s.
- [4] HOROVÁ, Ivana a ZELINKA, Jiří. *Numerické metody*. 2. rozšířené. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2008. 299 s. 4658/Př-1/08-17/31. ISBN 978-80-210-3317-7.
- [5] MERHAUT, Josef. *Theorie elektroakustických přístrojů. 1. [část]*. 1. vyd. Praha: ČSAV, 1955. 280 s. Studie a prameny; sv. 8. Práce Čs. akademie věd. Sekce technická.
- [6] RALSTON, Anthony. *Základy numerické matematiky: příručka pro university ČSR*. Překlad Milan Práger a Emil Vitásek. 1. čes. vyd. Praha: Academia, 1973. 635, [1] s.
- [7] RIEČANOVÁ, Zdena et al. *Numerické metody a matematická statistika: učebnice pre elektrotechnické fakulty vysokých škôl*. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1987. 490 s. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry.
- [8] STROUHAL, Čeněk. *Akustika*. Praha: Jednota čes. matematiků, 1902. 462 s. Sborník Jednoty čes. matematiků; č. VI.
- [9] VITÁSEK, Emil. *Numerické metody*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1987. 512 s. Česká matice technická; roč. 1987, čís. 428. Technický průkaz; sv. 67.
- [10] VYBÍRAL, Bohumil. *Kmitání a vlnění*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2014. 246 s. ISBN 978-80-7435-379-6.
- [11] ZÍTKO, Jan. *Úvod do numerické matematiky: Určeno pro posl. matematicko-fyz. fak. 1. sv.* 1. vyd. Praha: SPN, 1977. 249 s.