UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Rezerva pojistného životních pojištění

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.**
Vypracovala: **Tereza Vajdáková**
Studijní program: Aplikovaná matematika
Studijní obor: Matematika – ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2016

Bibliografická identifikace

Autor: Tereza Vajdáková

Název práce: Rezerva pojistného životních pojištění

Typ práce: Bakalářská

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2016

Anotace:

Cílem této bakalářské práce je popsat principy tvorby rezervy pojistného životních pojištění, kterou musí pojišťovny v ČR ze zákona tvořit. Dále ukázat, jak se od sebe liší netto a bruttorezervy u jednotlivých druhů pojištění. Na počátku bakalářské práce se čtenář seznámí se základními pojmy životního pojištění, pojistně-matematickými vztahy a principy ekvivalence a fiktivního souboru. Dále práce ukazuje, jak se tvoří jak jednorázové, tak běžné netto a bruttopojistné u kapitálových a důchodových pojištění. Vše je doplněno o řešené příklady pro lepší pochopení dané problematiky. Po odvození potřebných vztahů se zaměří na rezervu pojistného životních pojištění, kterou lze dělit na netto a bruttorezervu. Každé z těchto rezerv je v práci věnována podkapitola, ve kterých se uvádí různé způsoby stanovení jejich hodnoty a jak se mění jejich hodnoty v čase. Na samém konci této práce je porovnáno, jak se hodnoty netto a bruttorezerv v rámci jednotlivých druhů pojištění mění.

Klíčová slova:

Životní pojištění, pojistná matematika, komutační čísla, kalkulace pojistného, nettorezerva, bruttorezerva

Počet stra: 75

Počet příloh: 3

Jazyk: Český

Bibliographical identification

Author: Tereza Vajdáková

Title: Life Insurance Premium Reserve

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics

Supervisor: Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.

The year of presentation: 2016

Annotation:

The aim of this bachelor's thesis is to describe the principles of making life insurance premium reserve, that insurance companies in Czech Republic has to create. The other aim is to show, what differences there are between net and gross premium reserves for different types of insurance. At the beginning of the thesis a reader familiarizes oneself with the basic concepts of life insurance, actuarial relations and principals of equivalence and fictitious file. Further, this work shows the calculation of the net and gross single and annual premium in capital and pension insurance. All the calculations are demonstrated on the numerical examples for better understanding. After derivation of the necessary relations the work focuses on the life insurance premium reserve, which is treated as net and gross reserve. Each of them a special subsection is dedicated. Various methods for the calculation of net/gross premium reserve together with their course are mentioned in them. At the very end of the thesis the courses of net and gross premium reserve for each type of insurance are compared.

Key words:

Life Insurance, Actuarial Mathematics, Commutation Functions, Calculation of Premium, Net Premium Reserves, Gross Premium Reserves

Number of pages: 75

Number of appendices: 3

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Evy Bohanesové, Ph.D. a že jsem v seznamu použitých zdrojů uvedla všechny prameny, ze kterých jsem při zpracování této práce čerpala.

V Olomouci dne.............................. ....

podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala paní Mgr. Evě Bohanesové, Ph.D. za pomoc, cenné rady, ochotu a čas, který mi věnovala při konzultacích této práce.

Úvod

V dnešní době je zcela normální a přirozené, že se chtějí lidé chránit před různými riziky, což jde ruku v ruce se strachem. Strachem, že například nebudeme moci zaopatřit svou rodinu v případě smrti. A právě kvůli tomuto strachu si lidé sjednávají pojištění, aby mohli chránit sebe nebo blízké osoby, případně aby získali určitý obnos peněz po uplynutí nějaké doby. Právě tyto nastíněné situace a další řeší životní pojištění.

Lidé si při sjednání některého z životních pojištění ujasní, jaká pojistná částka jim vyhovuje v případě vzniku pojistné události. Pojišťovny při vzniku pojistné události tuto pojistnou částku oprávněným osobám vyplatí. Pojistník však musí pojišťovně na oplátku platit pojistné, ať už jednorázové či běžné. [1] Nabízí se otázka, kde pojišťovna vezme peníze na výplatu sjednané pojistné částky? Vždyť celé pojistné nemůže pojišťovna klientovi odložit, protože i klient stojí pojišťovnu určité finance.

Právě ta část pojistného, kterou pojišťovna klientovi odloží a dále ji zhodnocuje, se nazývá rezerva pojistného životních pojištění. Tato rezerva slouží ke krytí budoucích závazků pojišťovny, tedy výplaty pojistné částky. Jedná se o nejdůležitější rezervu, kterou je pojišťovna povinna ze zákona tvořit. [1]

Toto téma jsem si pro svou bakalářskou práci vybrala především proto, že mě životní pojištění a jeho produkty zajímaly už dříve. Myslím, že si většina lidí nedokáže představit, co vše stojí za tím, než jim někdo vůbec může nabídnout produkt životního pojištění. Dále mě velice zaujalo spojení finanční matematiky a teorie pravděpodobnosti, která se využívá proto, že v dnešním světě není nic jisté, natož okamžik smrti a pojišťovny kryjí zásadně ty pojistné události, které nastaly nahodile. Při psaní své práce jsem čerpala teorii a příslušné vztahy především z knihy profesora Cipry [1].

Moje bakalářská práce je členěna do čtyř kapitol. V první kapitole se obecně zmiňuji o životním pojištění a seznamuji čtenáře se základními pojmy, dále se věnuji pojistné matematice, jejíž znalost je potřebná k pochopení dané problematiky. Na konci první kapitoly poté vysvětluji principy ekvivalence a fiktivního souboru, které se v pojišťovnictví hojně využívají.

Ve druhé kapitole se zpočátku zabývám jednotlivými druhy životních pojištění, které odpovídají dělení podle výplaty pojistného plnění. K těmto pojištěním je poté vždy doplněn ukázkový příklad, ve kterém počítám jednorázové nettopojistné pomocí střední hodnoty náhodné veličiny, nebo za pomoci komutačních čísel. Ve třetí podkapitole se věnuji běžnému nettopojistnému, v jejímž závěru je uveden souhrnný příklad. Ve čtvrté podkapitole se stejným způsobem věnuji bruttopojistnému.

Ve třetí kapitole se zabývám technickými rezervami, které musí pojišťovna ze zákona tvořit. Důraz je kladen na rezervu pojistného životních pojištění.

Ve čtvrté, poslední kapitole, se zabývám rezervami pojistného životních pojištění. Tato kapitola je dělena především na dvě části, přičemž jedna se zabývá nettorezervou a druhá bruttorezervou. Uvedeny jsou výpočty pro oba typy rezerv a pro jednotlivé druhy pojištění. V případě nettorezervy ukazuji více druhů výpočtu. Na konci každé podkapitoly je opět uveden souhrnný příklad s časovým vývojem hodnot rezerv pro jednotlivá pojištění. Díky vypočteným ukázkovým příkladům pak mohu v poslední podkapitole porovnat rozdíl hodnot netto a bruttorezerv.

V zadání všech příkladů je uveden přesný odkaz na soubor, ve kterém jsou provedeny výpočty za pomocí programu Excel. Tento soubor je k dispozici v elektronické příloze (CD). Dále je v přílohách k nalezení úmrtnostní tabulka pro muže z roku 2014, kterou jsem získala z internetových stránek Českého statistického úřadu [2]. Poslední přílohou je tabulka komutačních čísel, kterou jsem vytvořila pomocí úmrtnostní tabulky a vztahů, které jsou uvedeny v mé práci. Tyto tabulky využívám k výpočtům pojistných a rezerv.

1 Životní pojištění [1]

Životní pojištění slouží k finanční ochraně osob a jejich rodinných příslušníků v případě vzniku pojistné události. Pojistnou událostí se rozumí nahodilá událost, díky níž vzniká nárok pojištěného na pojistné plnění.

Životní pojištění má několik druhů. Lze je rozlišit například podle typu výplaty pojistného plnění na kapitálová životní pojištění a důchodová. Dále podle toho, jestli se tvoří rezerva, na rezervotvorná (kapitálová) a nerezervotvorná (riziková), nebo podle toho, je-li výše pojistného plnění garantovaná či nikoliv na kapitálová a investiční.

Kapitálové životní pojištění je typické tím, že pojistné plnění je vyplaceno jednorázově. Dále je typická tvorba rezervy z nespotřebovaného pojistného, které bývá v průběhu pojištění zhodnocováno takovou úrokovou mírou, která je známa již při sjednání pojistné smlouvy. Jezná se o tzv. technickou úrokovou míru (viz dále). Vzhledem k tomu, že úrokové míry se v čase mění podle vývoje ekonomiky, mohou pojišťovny na tento vývoj reagovat.

Podle profesora Cipry patří do skupiny *kapitálových životních pojištění*

- pojištění pro případ dožití,
- pojištění pro případ smrti,
- dočasné pojištění pro případ smrti,
- smíšené pojištění

a do skupiny *důchodových životních pojištění*

- pojištění doživotního důchodu,
- pojištění odloženého doživotního důchodu,
- pojištění dočasného důchodu.

Více se těmto pojištěním věnuji ve 2. kapitole, kde jsou k jednotlivým druhům uvedeny výpočty jednorázového a běžného nettopojistného a bruttopojistného.

Dalším kritériem členění je již zmíněná tvorba rezervy. Je to část pojistného, která neslouží na úhradu nákladů pojišťovny ani ke krytí rizik. Z toho důvodu je investována a zhodnocována. Tato složka je tvořena z pojistného a nazývá se rezerva pojistného. Rozlišujeme tedy:

- *rezervotvorné životní pojištění* (někdy nazýváno jako kapitálové životní pojištění), u něhož je část pojistného shromažďována a investována pojišťovnou. Při pojistné události se pak zhodnocená část celkově zaplaceného pojistného vyplácí oprávněné osobě,

- *nerezervotvorné životní pojištění*, u něhož k tvorbě rezervy prakticky nedochází. Příkladem může být dočasné pojištění pro případ smrti, kdy se rezerva nejprve v menší míře tvoří, postupně je však spotřebována.

1.1 Základní pojmy

Na samém počátku mé bakalářské práce je nutné seznámit se se základními pojmy životního pojištění, jejichž znalost je důležitá pro pochopení dané problematiky. Mezi ně patří:

- Pojištění: produkt, kterým si lidé sjednávají ochranu proti nahodilým událostem nebo právní vztah mezi dvěma stranami, kdy se jedna z nich zavazuje platit pojistné a druhá plnit v případě, že dojde k pojistné události.
- Pojistná událost: nahodilá událost, díky níž vzniká nárok pojištěného na pojistné plnění.
- Pojistitel: právnická osoba oprávněná provozovat pojišťovnickou činnost.
- Pojistník: osoba, která má povinnost platit pojistné.
- Pojištěný: osoba, na jejíž život se pojištění vztahuje. Může být shodná s osobou pojistníka.
- Oprávněná osoba: osoba, která má nárok na pojistné plnění.
- Obmyšlená osoba: osoba, která má nárok na pojistné plnění v případě smrti pojištěného. Obmyšlená osoba musí být uvedena v pojistné smlouvě, a to buď pod svým jménem anebo jen vztahem k obmyšlenému. Obmyšlených může být více. V tomto případě musí být stanoven poměr, v němž bude v případě pojistné události pojistné plnění vyplaceno. Pokud obmyšlený není stanoven, podléhá pojistné plnění dědickému řízení. [3]
- Pojistná částka: u životního pojištění přímo pojistné plnění.
- Pojistná doba: doba, na kterou je pojištění sjednáno.
- Pojistné období: časový interval mezi dvěma platbami pojistného.
- Pojistné: úplata za pojištění.
- Pojistné plnění**:** částka, kterou vyplatí pojišťovna v případě pojistné události
- Technická úroková míra**:** představuje výnos z pojistného, na které má klient právo. Stanovuje ji ČNB podle situace na finančním trhu. V současné době je její horní hranice 1,3 % $p.a.$ [4]

1.2 Pojistná matematika

K tomu, abychom byli schopni vypočítat výši pojistného a rezervy pojistného životních pojištění, případně další pojistné veličiny, se využívá finanční matematika (především přepočet pojistného v čase a počítání důchodů) a pravděpodobnost úmrtí, resp. dožití se určitého věku. Data, která jsou potřebná k výpočtům pojistně-matematických úloh, jsou k získání v úmrtnostních tabulkách, které sestavuje Český statistický úřad.

V životním pojištění se pracuje se dvěma náhodnými jevy – smrt před dosažením věku nebo v určitém věku a dožití se určitého věku. Předpokládáme, že jevy jsou zcela náhodné (nemůžeme ovlivnit čas smrti), tj. úmyslnou smrt vylučujeme, a že oba jevy nemohou nastat zároveň. Jak už jsem psala v úvodu své práce, budu při odvozování pojistně - matematických vztahů vycházet z knihy profesora Cipry [1].

Základem modelu úmrtnosti je spojitá náhodná veličina T_0, která značí délku života právě narozeného jedince. *Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny* T_0 se popisuje distribuční funkcí, tedy

$$F_0(t) = P(T_0 \leq t) = P(T_0 < t), \tag{1.2.1}$$

kde rovnost vychází ze spojitosti náhodné veličiny T_0. Funkci $F_0(t)$ můžeme též chápat jako pravděpodobnost, že právě narozený jedinec zemře před dosažením věku t.

Dále se pro výpočty v pojistné matematice zavádí *funkce přežití,* která je definována jako

$$S_0(t) = P(T_0 > t) = 1 - F_x(t). \tag{1.2.2}$$

V našem případě je ale mnohem praktičtější sledovat náhodnou veličinu, která nám představuje budoucí délku života ve věku x za podmínky, že se osoba dožila věku x. Takovou náhodnou veličinu značíme T_x. Odvození distribuční funkce náhodné veličiny T_x provedeme pomocí definice podmíněné pravděpodobnosti.

Podmíněná pravděpodobnost „Nechť je dán pravděpodobností prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a náhodný jev* $B \in \mathcal{A}, P(B) > 0$*. Funkce* $P(\ |B)$ *definována na* $\mathcal{A}$ *předpisem*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, A \in \mathcal{A} \tag{1.2.3}$$

se nazývá pravděpodobnost jevu A podmíněná jevem B, nebo krátce podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky B.“[5]

Distribuční funkci náhodné veličiny T_x tedy odvodíme pomocí (1.2.3) jako

$$\begin{aligned} F_x(t) = P(T_x \leq t) &= P(T_0 \leq x + t | T_0 > x) \\ &= \frac{P(x < T_0 \leq x + t)}{P(T_0 > x)} = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

V posledním kroku je využita jedna z vlastností distribuční funkce, která zní:

„Pro libovolná reálná a ≤ b platí:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a), \tag{1.2.5}$$

kde $X \in (a, b >.$ *“* [5]

Pro *funkci přežití náhodné veličiny* T_x *ve věku* x platí vztah

$$\begin{aligned} S_x(t) = P(T_x > t) = P(T_0 > x + t | T_0 > x) \\ = \frac{P(T_0 > x + t)}{P(T_0 > x)} = \frac{S_0(x + t)}{S_0(x)}. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

kde je opět využita definice podmíněné pravděpodobnosti (1.2.3) a vlastnost distribuční funkce (1.2.5).

Pro *celočíselnou délku života ve věku* x se zavádí diskrétní náhodná veličina K_x, která nabývá hodnot $k = 0,1,2, \ldots$ Tato náhodná veličina je definovaná jako celá část náhodné veličiny T_x , tedy $K_x = [T_x]$ s pravděpodobností

$$\begin{aligned} P(K_x = k) = P(k \leq T_x < k + 1) = F_x(k + 1) - F_x(k) \\ = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_kp_x - {}_kp_x \cdot p_{x+k} = {}_kp_x \cdot q_{x+k}. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

V pojistně-matematických výpočtech jsou zavedeny pro pravděpodobnosti následujících jevů tyto symboly:

- Pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře před dosažením věku $x + t$
$$_tq_x = F_x(t) = P(T_x \leq t). \tag{1.2.8}$$
- Pro $t = 1$ máme q_x, neboli pravděpodobnost úmrtí před dosažením věku $x + 1$. Je to pravděpodobnost, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře před dosažením věku $x + 1$, tj.
$$q_x = F_x(1) = P(T_x \leq 1). \tag{1.2.9}$$
- Pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x , se dožije věku $x + t$
$$_tp_x = S_x(t) = P(T_x > t). \tag{1.2.10}$$

- Opět, pro $t = 1$ je p_x pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x + 1$
$$p_x = S_x(1) = P(T_x > 1). \tag{1.2.11}$$

- Pravděpodobnost, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x + s$, ale zemře před dosažením věku $x + s + t$ značíme

$${}_{s|t}q_x = P(s < T_x \leq s + t) = F_x(s + t) - F_x(s). \tag{1.2.12}$$

- Pravděpodobnost, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře ve věku $x + s$

$${}_{s|}q_x = P(s < T_x \leq s + 1) = F_x(s + 1) - F_x(s). \tag{1.2.13}$$

- Jelikož v problematice životního pojištění existují pouze dva stavy, a to „smrt" a „dožití se určitého věku", platí mezi příslušnými pravděpodobnostmi následující vztah:
$${}_tp_x + {}_tq_x = 1. \tag{1.2.14}$$

- Další vztah, který platí mezi výše definovanými pravděpodobnostmi, je:

$${}_{s+t}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} \,. \tag{1.2.15}$$

Důkaz tohoto tvrzení provedu úpravou pravé strany této rovnosti pomocí definice podmíněné pravděpodobnosti (1.2.3)

$$\begin{aligned} P(T_x > s) \cdot P(T_{x+s} > t) &= P(T_x > s) \cdot P(T_x > s + t \mid T_x > s) \\ &= P(T_x > s) \cdot \frac{P(T_x > s + t)}{P(T_x > s)} = P(T_x > s + t) = {}_{s+t}p_x. \end{aligned}$$

Tímto jsme získali pravděpodobnost, která je na levé straně rovnice.

□

- Dále se často při výpočtech pojistného využívá vztah

$${}_{s\,|t}q_x = {}_sp_x \cdot {}_tq_{x+s}. \tag{1.2.16}$$

- Pro celočíselné věky platí, s ohledem na (1.2.15)

$${}_np_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1} \,. \tag{1.2.17}$$

Tento vztah dokážu pomocí matematické indukce. První krok je pro $n = 1$:

$$ {}_1p_x = p_x, $$

další krok důkazu je předpoklad platnosti pro $n = k$:

$$ {}_kp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1} \,. $$

V poslední kroku dokážu, že vztah platí i pro $n = k + 1$, tj.

$$ {}_{k+1}p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k} $$

Důkaz platnosti této rovnice ukážu pomocí vztahu (1.2.15), tedy pro $s = k$ a $t = 1$ platí:

$$ {}_{k+1}p_x = {}_kp_x \cdot p_{x+k}. $$

Za platnosti indukčního předpokladu lze upravit pravou stranu rovnice následujícím způsobem:

$$ {}_{k+1}p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1} \cdot p_{x+k}. $$

Tímto jsem dokázala, že vztah platí pro $n = k + 1$, platí tedy i pro n.

□

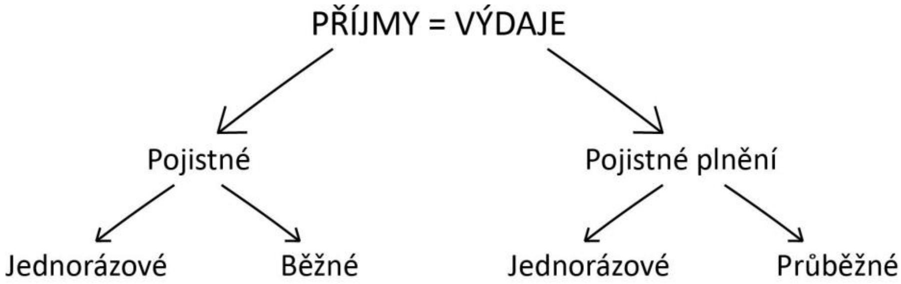
Tyto vztahy jsou důležité při praktických výpočtech pravděpodobností úmrtí, resp. přežití.

1.3 Princip ekvivalence a fiktivního souboru

V této podkapitole rozvádím dva principy, na nichž jsou založeny všechny pojistně-matematické výpočty v životním pojištění.

1.3.1. Princip ekvivalence

Princip ekvivalence je založen na rovnosti příjmů a výdajů pojišťoven, viz obrázek 1.



Obrázek 1: Princip ekvivalence

Z tohoto zjednodušeného schématu je zřejmé, že na straně pojistného, tedy příjmu pro pojišťovny, je jednorázové pojistné, které se zaplatí jednou při uzavření pojistné smlouvy, nebo běžné pojistné, které se platí průběžně počátkem každého pojistného období po celou dobu trvání pojištění, nebo po dobu kratší. K pojistnému jsou přičteny náklady pojišťovny, konkrétně poplatky, například za sjednání pojištění, předčasné ukončení pojistné smlouvy nebo za změnu pojistného, dále náklady na provoz pojišťovny a na inkaso pojistného či výplatu pojistného plnění.

Výdaje jsou pro pojišťovnu nejčastěji výplaty pojistných plnění, které mohou být také jednorázové nebo průběžné. Jednorázové pojistné plnění je běžnější oproti průběžným výplatám, které jsou nabízeny u pojištění doživotního či dočasného důchodu. Mezi výdaje však také patří ty části pojistného, které tvoří náklady pojišťovny. Ty se buď zcela spotřebují, nebo pokud část z nich zbude (např. ušetřením), může být připsána k pojistné smlouvě jakožto podíl na zisku.

Tyto budoucí příjmy a výdaje je nutné kvůli stanovení pojistného shrnout k jednotnému datu, tzv. referenčnímu datu. U životního pojištění je to okamžik jeho založení. Nechť pojistné plnění pro x-letého pojištěného je při dožití se věku $x + n$ pro jednoduchost rovno 1 Kč. Pro zjištění výše jednorázového nettopojistného, splatného ve věku x, musíme korunu diskontovat k datu počátku pojištění. Diskontní faktor má tvar:

$$v = \frac{1}{1+i}, \tag{1.3.1}$$

kde i je technická úroková míra. Dále je nutné zohlednit náhodný charakter jevu „dožití se určitého věku“, resp. „úmrtí“, protože pojistné plnění bude vyplaceno pouze tehdy, když se pojištěný dožije věku $x + n$, resp. zemře před dosažením věku $x + n$, jinak předpokládáme, že pojištění zanikne bez náhrady. V případě dožití se věku $x + n$ tedy musíme diskontované pojistné plnění ve tvaru v^n vynásobit příslušnou pravděpodobností dožití ${}_np_x$:

$$v^n \cdot {}_np_x. \tag{1.3.2}$$

Tímto jsme získali vztah pro výpočet jednorázového nettopojistného pro pojištění rizika „dožití“. Odvození vztahu pro výpočet pojistného pro pojištění pro případ úmrtí je ukázáno dále.

Pravděpodobnosti dožití a úmrtí se ale musí odněkud získat. Jejich výpočet a využití vychází z druhého principu matematiky životního pojištění, kterým se zabývám v následující kapitole.

1.3.2 Princip fiktivního souboru

Princip fiktivního souboru vychází ze skutečnosti, že pojišťovny v pojistně-matematických výpočtech nevychází z reálných počtů žijících a zemřelých osob, ale používají statisticky upravená data. Přitom vychází ze souboru 100 000 právě narozených jedinců. Je to uměle nastavený neboli fiktivní soubor. Jeho počet prvků $l_0 = 100\,000$ nazýváme kořenem (radixem) úmrtnostních tabulek.

Úmrtnostní tabulky sestavuje Český statistický úřad, pro muže a ženy zvlášť. V úmrtnostních tabulkách jsou pro celočíselné věky od 0 po 105 uvedeny především pravděpodobnosti dožití a úmrtí, počty žijících a zemřelých a hodnoty dalších veličin. Úmrtnostní tabulky jsou k nalezení na internetových stránkách Českého statistického úřadu [2].

Výchozími daty pro konstrukci úmrtnostních tabulek jsou pozorované počty žijících a zemřelých ve věku od 0 po 105 (hodnotou 105 rozumíme věk 105 a více let). Z těchto dat se stanoví časová řada pravděpodobností úmrtí, která je poté vyhlazena. Metodika sestavení úmrtnostních tabulek je opět uveřejněna na internetových stránkách Českého statistického úřadu [6]. Tato vyhlazená řada je obsažena v úmrtnostní tabulce. Podle vztahu (1.2.14) se dopočítají hodnoty pravděpodobností dožití p_x pro každý věk x. Počty žijících, l_x, pro každý věk x pak vypočítáme pomocí vztahu

$$l_x = l_0 \cdot {}_x p_0. \qquad (1.3.3)$$

Tuto hodnotu můžeme interpretovat jako střední hodnotu náhodné veličiny, která vyjadřuje počet právě narozených jedinců, kteří se dožili věku x, s binomickým rozdělením pravděpodobnosti $B_i(l_0,\ {}_x p_0)$. Hodnoty $l_0, l_1, l_2, \dots$ tvoří klesající posloupnost, kterou nazýváme *dekrementním řádem*. Počet osob zemřelých ve věku x ,d_x, pak získáme vztahem

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \qquad (1.3.4)$$

Úmrtnostní tabulky též můžeme využít pro výpočet pravděpodobnosti dožití se určitého věku, resp. pravděpodobnosti úmrtí, a to z počtu žijících, resp. zemřelých osob.

- Pro pravděpodobnost dožití se věku $x + n$ pro x-letého jedince platí:

$$ {}_{n}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \tag{1.3.5} $$

  kde l_{x+n} značí počet osob, které se dožijí věku $x + n$ a l_x představuje počet osob, které se dožijí věku x.

- Podobně lze vypočítat pravděpodobnost úmrtí x-letého jedince před dosažením věku $x + n$

$$ {}_{n}q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}, \tag{1.3.6} $$

- nebo pravděpodobnost ${}_{n\,|}q_x$ úmrtí x-letého jedince ve věku $x + n$

$$ {}_{n|}q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}, \tag{1.3.7} $$

  kde d_{x+n} značí počet osob zemřelých ve věku $x + n$.

Jak lze vidět, tyto vztahy nám velmi ulehčí výpočty pravděpodobností, neboť nám k tomu stačí znalost pouze dvou čísel z úmrtnostních tabulek.

2 Druhy životního pojištění a kalkulace pojistného [1]

V prvních dvou podkapitolách se zabývám druhy životních pojištění, odvozováním vztahů pro výpočet jednorázového nettopojistného (obecně značeno $JN_{xn\rceil}$, resp. JN_x) těchto pojištění a jejich výpočet ukazuji na názorných příkladech. Ve třetí podkapitole se zabývám výpočty běžného nettopojistného pro vybrané druhy pojištění, které opět doplním o příklad. V poslední podkapitole se poté zabývám bruttopojistným. Při zpracování teorie a odvozování nettopojistného a bruttopojistného u jednotlivých druhů pojištění vycházím z knihy profesora Cipry [1]. Jednotlivé druhy životního pojištění, kterými se budu zabývat, odpovídají dělení podle formy pojistného plnění.

2.1 Kapitálová životní pojištění

Mezi kapitálová životní pojištění patří:

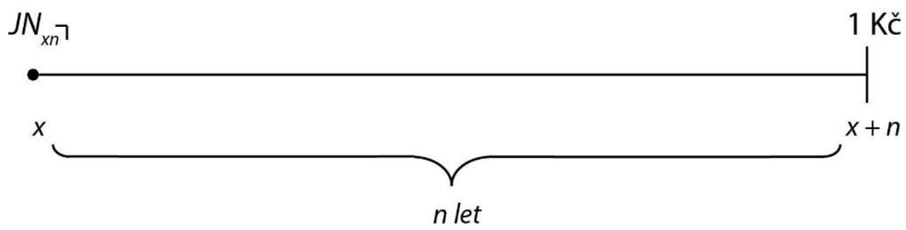
- pojištění pro případ dožití,
- pojištění pro případ smrti,
- dočasné pojištění pro případ smrti,
- smíšené pojištění.

Výplata pojistného plnění je u těchto druhů pojištění nejčastěji jednorázová. V některých případech mohou být výplaty rozděleny do několika částí, například při diagnostikování vážné nemoci, kdy je část pojistného plnění vyplacena hned a část až po smrti pojištěného.

2.1.1 Pojištění pro případ dožití

V případě sjednání pojištění pro případ dožití vyplatí pojišťovna sjednané pojistné plnění, jestliže se pojištěný dožije konce pojistné doby n. Pokud pojištěný zemře před koncem sjednané pojistné doby, zanikne i nárok na výplatu pojištění.

Tento druh pojištění se nejčastěji sjednává k zabezpečení osoby pojištěného, například zabezpečení prostředků na stáří, nebo zabezpečení prostředků pro dítě, které získá pojistné plnění až dožitím se 18. roku života, nebo ukončením studií dítěte, popřípadě sňatkem. [7]



Obrázek 2: Schéma pojištění pro případ dožití

Výplata pojistného plnění pro případ dožití je podmíněna dožitím se konce pojistné doby obecně délky n let. Při stanovení jednorázového nettopojistného je proto nutné diskontované pojistné plnění násobit pravděpodobností dožití se věku $x+n$ pro x-letého jedince pojištěného. Tuto myšlenku můžeme zformulovat pomocí náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$, kterou lze definovat následujícím způsobem:

$$\boldsymbol{Z} = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{K_x} = 0,1, \dots, n-1 \\ v^n, & \boldsymbol{K_x} = n, n+1, \dots \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ (2.1.1.) je uvedeno v následující tabulce

Hodnota $\boldsymbol{K_x}$	**Hodnota $\boldsymbol{Z}$**	**Pravděpodobnost**
0	0	${}_{0\mid}q_x$
1	0	${}_{1\mid}q_x$
2	0	${}_{2\mid}q_x$
. . .	. . .	. . .
$n-1$	0	${}_{n-1\mid}q_x$
n $n+1$ . . .	v^n	${}_np_x$

Tabulka 1: Pojištění pro případ dožití, rozdělení náhodné veličiny Z

Jednotkovou počáteční hodnotu značíme ${}_nE_x$, a vypočítá se jako střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$.

$$E(\boldsymbol{Z}) = {}_nE_x = {}_np_x \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = {}_np_x \cdot v^n. \qquad (2.1.2)$$

V případě, že by pojistná částka byla S Kč, vypočítá se počáteční hodnota

$$S \cdot {}_nE_x = S \cdot {}_np_x \cdot v^n. \qquad (2.1.3)$$

Výpočet jednorázového nettopojistného pomocí střední hodnoty náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ (2.1.1) ukážu v následujícím příkladu.

Příklad 1

Jaká je výše pojistného v pojištění na dožití 45letého jedince, na jejímž konci je pojistné plnění 1 Kč při technické úrokové míře i=1,3 % $p.a.$? Pojistná doba je stanovena na 20 let.

Řešení:
$n = 20, x = 45$

$$ {}_{20}E_{45} = {}_{20}p_{45} \cdot v^{20} = 0{,}649\ 699\ Kč. $$

Výplata 1 Kč je tedy podmíněna pravděpodobností dožití se věku 65 let. Takové pojištění stojí 0,649 699 Kč. V případě pojistné částky 150 000 Kč by pojistné činilo 97 454,91 Kč. Výpočty k tomuto příkladu jsou uvedeny v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – kapitálová pojištění v záložce Příklad 1.

Další způsob výpočtu jednorázového nettopojistného je pomocí využití principu fiktivního souboru a principu ekvivalence. Tento výpočet se provádí použitím tzv. *komutačních čísel*. Pojišťovny musí počítat s pojistným plněním všech pojištěných. Počet těchto pojištěných ovšem vezmou z úmrtnostních tabulek. Proto musí 1 Kč pojistného plnění vynásobit celkovým počtem pojištěných osob, které se dožily věku $x + n$. Neboli celkové pojistné plnění, které musí pojišťovna zaplatit je $1 \cdot l_{x+n}$. Tuto částku je třeba diskontovat k datu počátku pojištění, vynásobíme diskontním faktorem v^n. Nakonec vydělíme počtem osob žijících ve věku x, neboť chceme výši pojistného pro jednoho pojištěného

$$ 1 \cdot v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_np_x \cdot v^n. \tag{2.1.4} $$

Lze vidět, že jsme dospěli ke stejnému vzorci, jako je tomu u předchozího výpočtu jednorázového nettopojistného pojištění na dožití. Nyní, abychom vztah pro nettopojistné měli vyjádřen pomocí komutačních čísel, zlomek l_{x+n}/l_x rozšíříme členem v^x:

$$ 1 \cdot v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{v^{n+x} \cdot l_{x+n}}{v^x \cdot l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}, \tag{2.1.5} $$

kde
$$ D_x = l_x \cdot v^x \tag{2.1.6} $$

je komutační číslo, které můžeme interpretovat jako diskontovaný počet osob, které se dožily věku x,

$$ D_{x+n} = l_{x+n} \cdot v^{x+n} \tag{2.1.7} $$

je komutační číslo, které interpretujeme jako diskontovaný počet osob, které se dožily věku $x + n$.

Pokud je pojistná částka jiná než 1 Kč, má jednorázové nettopojistné tvar

$$S \cdot {}_nE_x = S \cdot \left(\frac{D_{x+n}}{D_x}\right). \tag{2.1.8}$$

Nyní ukážu na příkladu výpočet jednorázového nettopojistného s využitím znalosti komutačních čísel.

Příklad 2

Jaká je výše pojistného v pojištění na dožití 45letého jedince, na jejímž konci je pojistné plnění 1 Kč při technické úrokové míře i=1,3 % $p.a.$? Pojistná doba je stanovena na 20 let.

Řešení:

$n = 20, x = 45$

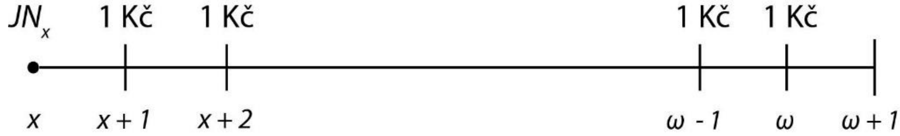
Výpočet je uvedený v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – kapitálová pojištění v záložce Příklad 2.

$${}_{20}E_{45} = 1 \cdot \frac{D_{65}}{D_{45}} = 0{,}649\ 699\ Kč,$$

což je naprosto stejný výsledek jako v příkladu 1. Takové pojištění tedy stojí 0,649 699 Kč. V případě, že je pojistné plnění 150 000 Kč, stojí pojištění 97 454,91 Kč.

2.1.2 Pojištění pro případ smrti

Při sjednání tohoto druhu pojištění vyplácí pojišťovna pojistné plnění obmyšlené osobě až v případě smrti pojištěného. Jelikož nikdo neví, kdy nastane smrt pojištěného, je toto pojištění sjednáno na dobu neurčitou. Tento druh pojištění se využívá především jako tzv. pohřební pojištění, tedy slouží na zaplacení nákladů spojených s pohřbem pojištěné osoby. Níže uvádím schematicky zaznačenou myšlenku pro odvození jednorázového nettopojistného. Nechť výše pojistného plnění je 1 Kč.



Obrázek 3: Schéma pojištění pro případ smrti

Pokud pojištěný zemře ve věku x, bude vyplaceno pojistné plnění až na konci 1. pojistného roku, tedy v nedožitém věku pojištěného $x + 1$. V případě, že pojištěný zemře ve věku $x + 1$, bude pojistné plnění vyplaceno obmyšlené osobě na konci 2. pojistného roku. Tímto principem se pokračuje až do smrti ve věku ω, což je poslední věk života jedince uvedený v úmrtnostních tabulkách.

Při sestavování modelu pro výpočet jednorázového nettopojistného musíme pamatovat na to, že k pojistnému plnění může dojít na konci kteréhokoli pojistného roku. Proto pojišťovna tyto částky sčítá. V modelu je pak nutné jednotlivé částky diskontovat o takový počet roků, o který je výplata pojistného plnění opožděna. Samozřejmě, výplata pojistného plnění je podmíněna úmrtím pojištěného. Je tedy potřeba každou diskontovanou částku opět násobit příslušnou pravděpodobností úmrtí. V případě pojištěného, který zemře v průběhu prvního roku, bude plnění ve výši 1 Kč diskontováno pouze o jeden rok a výplata této diskontované koruny je podmíněna jeho úmrtím s pravděpodobností q_x, což můžeme zapsat jako ${}_{0\,|}q_x$. Pokud však zemře až v dalším roce, je pojistné plnění (opět 1 Kč) diskontováno o dva roky a výplata je podmíněna jeho úmrtím s pravděpodobností $p_x \cdot q_{x+1}$, neboli ${}_{1\,|}q_x$, což můžeme interpretovat jako pravděpodobnost úmrtí ve věku $x+1$. Můžeme tedy zformulovat model pro výpočet jednorázového nettopojistného pomocí náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$, která je dána vztahem:

$$\boldsymbol{Z} = v^{K_x+1}, K_x = 0,1,2,\dots,\omega - x \tag{2.1.9}$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ (2.1.9) je uvedeno v následující tabulce

Hodnota $\boldsymbol{K_x}$	**Hodnota $\boldsymbol{Z}$**	**Pravděpodobnost úmrtí**
0	v	${}_{0\,|}q_x$
1	v^2	${}_{1\,|}q_x$
2	v^3	${}_{2\,|}q_x$
. . .	. . .	. . .
$\omega - x$	$v^{\omega-x+1}$	${}_{\omega-x\,|}q_x$

Tabulka 2: Pojištění pro případ smrt, rozdělení náhodné veličiny Z

Jednotkovou počáteční hodnotu pro pojištění smrti značíme A_x a vypočítáme ji jako střední hodnotu náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ (2.1.9)

$$E(\boldsymbol{Z}) = A_x = {}_{0\,|}q_x \cdot v + {}_{1\,|}q_x \cdot v^2 + {}_{2\,|}q_x \cdot v^3 + \cdots + {}_{\omega-x\,|}q_x \cdot v^{\omega-x+1} = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_{k\,|}q_x \cdot v^{k+1} = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}. \tag{2.1.10}$$

V případě pojistného plnění S Kč poté

$$S \cdot A_x = S \cdot \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}. \tag{2.1.11}$$

Výpočet jednorázového nettopojistného při použití střední hodnoty náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ (2.1.9) pro pojištění smrti ukážu na následujícím příkladu.

Příklad 3

Jaké je jednorázové nettopojistné pro pojištění pro případ smrti 45letého muže, na jejímž konci má být vyplacena 1 Kč?

Řešení:

$x = 45$

$$A_{45} = \sum_{k=0}^{60} {}_kp_{45} \cdot q_{45+k} \cdot v^{k+1} = \ 0{,}661\ 629\ K\check{c}.$$

Takové pojištění stojí 0,661 629 Kč v případě pojistného plnění 1 Kč. Pokud by pojistné plnění bylo 150 000 Kč, pojištění by stálo 99 244,30 Kč. Výpočet k příkladu je uveden v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – kapitálová pojištění v záložce Příklad 3.

Odvození počáteční hodnoty pojištění pomocí komutačních čísel se provede následovně:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{d_x \cdot v}{l_x} + \frac{d_{x+1} \cdot v^2}{l_x} + \frac{d_{x+2} \cdot v^3}{l_x} + \cdots + \frac{d_\omega \cdot v^{\omega+1-x}}{l_x} \\ &= \frac{d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + d_{x+2} \cdot v^{x+3} + \cdots + d_\omega \cdot v^{\omega+1}}{l_x \cdot v^x} \\ &= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_\omega}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}, \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

kde D_x, C_x, M_x jsou komutační čísla. Číslo $D_x$je už definováno v případě jednorázového nettopojistného pro případ dožití (2.1.6), další komutační čísla jsou dána vztahy:

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1}, \tag{2.1.13}$$

což značí diskontovaný počet zemřelých ve věku x a

$$M_x = \sum_{j=0}^{\omega - x} C_{x+j} = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_\omega. \tag{2.1.14}$$

Pokud je pojistná částka S Kč, má jednorázové nettopojistné tvar

$$S \cdot A_x = S \cdot \frac{M_x}{D_x}. \tag{2.1.15}$$

Výpočet jednorázového nettopojistného pro pojištění smrti pomocí komutačních čísel ukážu na následujícím příkladu.

Příklad 4

Jaké je jednorázové nettopojistné pro pojištění pro případ smrti 45letého muže, na jejímž konci má být vyplacena 1 Kč?

Řešení:

$x = 45$

$$A_x = \frac{M_{45}}{D_{45}} = 0{,}661\ 629\ Kč.$$

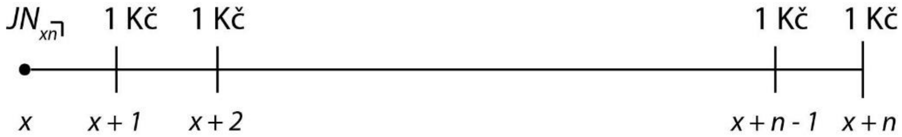
Jednorázové nettopojistné je tedy 0,661 629 Kč. V případě, že by pojistná částka (která současně přestavuje pojistné plnění) byla 150 000 Kč, bylo by pojistné ve výši 99 244,30 Kč. Výpočet je opět uveden v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – kapitálová pojištění v záložce Příklad 4.

2.1.3 Dočasné pojištění pro případ smrti

Dočasné pojištění pro případ smrti je velmi podobné pojištění pro případ smrti s tím rozdílem, že pojistná doba není stanovena do konce života pojištěného, ale pouze na nějakou omezenou dobu. Pojištění je tedy sjednáno na dobu n let. Pokud pojištěný zemře v kterémkoli věku $x + k$, vyplatí pojišťovna na konci pojistného roku pojistné plnění obmyšlené osobě. V případě, že pojištěný zemře až po uplynutí pojistné doby, nárok na výplatu pojistného plnění již není.

Tento druh pojištění se používá při poskytování dlouhodobého úvěru, například hypotečního. V tomto případě je dlužník pojištěný a banka obmyšlenou osobou. Banky se tímto zajišťují pro případ vzniku pojistné události, v tomto případě smrti.

Níže uvedu schéma pro výpočet jednorázového nettopojistného. Pojistné plnění nechť je 1 Kč.



Obrázek 4: Schéma dočasného pojištění pro případ smrti

Úvaha při sestavování modelu pro výpočet tohoto pojistného je podobná, jako v případě pojištění pro případ smrti, které je popsáno v kapitole 2.1.2. Pouze se změní pojistná doba, nepočítá se tedy až do úmrtí osoby pojištěného teoreticky ve věku ω, ale pouze do uplynutí sjednané doby n. Výpočet provedeme pomocí náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$, která je definována vztahem:

$$\boldsymbol{Z} = \begin{cases} v^{\boldsymbol{K}_x+1}, & \boldsymbol{K}_x = 0,1,\dots,n-1 \\ 0, & \boldsymbol{K}_x = n, n+1, \dots \end{cases} \tag{2.1.16}$$

s rozdělením pravděpodobnosti, které je uvedeno v následující tabulce:

Hodnota $\boldsymbol{K}_x$	Hodnota $\boldsymbol{Z}$	Pravděpodobnost
0	v	${}_{0\mid}q_x$
1	v^2	${}_{1\mid}q_x$
2	v^3	${}_{2\mid}q_x$
. . .	. . .	. . .
$n-1$	v^n	${}_{n-1\mid}q_x$

Tabulka 3: Dočasné pojištění pro případ smrti, rozdělení náhodné veličiny Z

Jednotkovou počáteční hodnotu pro dočasné pojištění pro případ smrti značíme $A_{x\overline{n}|}^{1}$. Její výši vypočítáme jako střední hodnotu náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ (2.1.16)

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{Z}) = A_{x\overline{n}|}^{1} &= {}_{0\mid}q_x \cdot v + {}_{1\mid}q_x \cdot v^2 + {}_{2\mid}q_x \cdot v^3 + \cdots + {}_{n-1\mid}q_x \cdot v^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k\mid}q_x \cdot v^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}. \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Pokud je pojistná částka jiná než 1 Kč, má jednorázové nettopojistné tvar

$$S \cdot A_{x\overline{n}|}^{1} = S \cdot \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}. \tag{2.1.18}$$

Příklad 5

Jaká je výše jednorázového nettopojistného pro dočasné pojištění smrti, které uzavře 45letý muž na dobu 20 let při technické úrokové míře $i = 1{,}3\ \%\ p.a.$? Výpočet k příkladu je uveden v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – kapitálová pojištění v záložce Příklad 5.

Řešení:

$x = 45, n = 20$

$$A^1_{45,20]} = \sum_{k=0}^{18} {}_kp_{45} \cdot q_{45+k} \cdot v^{k+1} = 0{,}133\ 693\ Kč.$$

Dočasné pojištění pro případ smrti stojí 0,133 693 Kč v případě, že je pojistná částka 1 Kč. Pokud by byla 150 000 Kč, stálo by takové pojištění 20 053,94 Kč.

Odvození pomocí komutačních čísel se provede následovně:

$$\begin{aligned} A^1_{xn]} &= \frac{d_x \cdot v}{l_x} + \frac{d_{x+1} \cdot v^2}{l_x} + \frac{d_{x+2} \cdot v^3}{l_x} + \cdots + \frac{d_{x+n-1} \cdot v^n}{l_x} \\ &= \frac{d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + d_{x+2} \cdot v^{x+3} + \cdots + d_{x+n-1} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} \\ &= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

kde D_x, M_x a M_{x+n} jsou komutační čísla. První dvě čísla jsou definována vztahy (2.1.6) a (2.1.14), poslední je dáno vztahem:

$$M_{x+n} = \sum_{j=n}^{\omega-x} C_{x+j} = C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + \cdots + C_\omega. \tag{2.1.20}$$

V případě pojistného plnění S Kč

$$S \cdot A^1_{xn]} = S \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \tag{2.1.21}$$

Příklad 6

Jaká je výše jednorázového nettopojistného pro dočasné pojištění smrti, které uzavře 45letý muž na dobu 20 let při technické úrokové míře $i = 1{,}3\ \%\ p.a.$?

Řešení:
$x = 45, n = 20$

$$A^{1}_{45,20\rceil} = \frac{M_{45} - M_{65}}{D_{45}} = 0{,}133\,692\ Kč.$$

Takové pojištění stojí 0,133 692 Kč na 1 Kč pojistné částky. V případě, že by pojistné plnění bylo nastaveno na 150 000 Kč, by pojistné bylo ve výši 20 053,94 Kč. Výpočty k tomuto příkladu jsou uvedeny v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – kapitálová pojištění v záložce Příklad 6.

2.1.4 Smíšené pojištění

Smíšené pojištění je kombinací dvou druhů pojištění, a to dočasného pojištění pro případ smrti a pojištění pro případ dožití. Pojišťovna vyplatí pojistné plnění v případě, že pojištěný zemře, anebo se dožije konce pojistné doby délky n.

Tento druh pojištění je mezi lidmi velmi oblíbený, neboť výplata pojistného plnění nastane za každé situace, ať už výplatou obmyšlené osobě v případě smrti pojištěného, nebo pojištěnému díky dožití se konce pojistné doby.

Výpočet jednorázového nettopojistého lze opět provést pomocí náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$:

$$\boldsymbol{Z} = \begin{cases} v^{\boldsymbol{K_x}+1}, & \boldsymbol{K_x} = 0,1,\dots,n-1 \\ v^n, & \boldsymbol{K_x} = n, n+1, \dots \end{cases} \tag{2.1.22}$$

Rozdělení pravděpodobnosti takto definované náhodné veličiny je uvedeno v následující tabulce:

Hodnota $\boldsymbol{K_x}$	Hodnota $\boldsymbol{Z}$	Pravděpodobnost
0	v	${}_{0\,\mid}q_x$
1	v^2	${}_{1\,\mid}q_x$
2	v^3	${}_{2\,\mid}q_x$
. . .	. . .	. . .
$\mathrm{n}-2$	v^{n-1}	${}_{n-2\,\mid}q_x$.
$\mathrm{n}-1$ n $\mathrm{n}+1$ . . .	v^n	${}_{n-1\,\mid}q_x + {}_{n}p_x = {}_{n-1}p_x$

Tabulka 4: Smíšené pojištění, rozdělení náhodné veličiny Z

Jednotková počáteční hodnota smíšeného pojištění se značí $A_{xn\rceil}$ a vypočítá se jako střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ (2.1.22):

(2.1.23)

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{Z}) = A_{xn\rceil} = {}_{n}E_x + A^1_{xn\rceil} \\ &= {}_{0\,|}q_x \cdot v + {}_{1\,|}q_x \cdot v^2 + \cdots + {}_{n-2\,|}q_x \cdot v^{n-1} + {}_{n-1\,|}q_x \cdot v^n + {}_{n}p_x \cdot v^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k\,|}q_x \cdot v^{k+1} + {}_{n}p_x \cdot v^n = \sum_{k=0}^{n-2} {}_{k\,|}q_x \cdot v^{k+1} + {}_{n-1}p_x \cdot v^n. \end{aligned}$$

Opět v případě pojistného plnění S Kč má počáteční hodnota pojištění tvar

$$S \cdot A_{xn\rceil} = S \cdot \sum_{k=0}^{n-2} {}_{k\,|}q_x \cdot v^{k+1} + {}_{n-1}p_x \cdot v^n. \qquad (2.1.24)$$

Příklad 7
Jaké je jednorázové nettopojistné pro smíšené pojištění, které uzavře muž ve věku 45 let na dobu 20 let.

Řešení:
$x = 45, n = 20$

$$\begin{aligned} A_{45,20\rceil} &= \sum_{k=0}^{18} {}_{k\,|}q_{45} \cdot v^{k+1} + {}_{19}p_{45} \cdot v^{20} \\ &= \sum_{k=0}^{18} {}_{k}p_{45} \cdot q_{45+k} \cdot v^{k+1} + {}_{19}p_{45} \cdot v^{20} = 0{,}783\ 392\ Kč. \end{aligned}$$

Smíšené pojištění tohoto druhu stojí 0,783 392 Kč. V případě, že pojistné plnění bude 150 000 Kč, bude cena pojištění 117 508,85 Kč. Výpočet k příkladu je k nalezení v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – kapitálová pojištění v záložce Příklad 7.

K výpočtu jednorázového nettopojistného pro smíšené pojištění lze také použít znalost komutačních čísel:

$$
\begin{aligned}
A_{xn]} &= \frac{d_x \cdot v}{l_x} + \frac{d_{x+1} \cdot v^2}{l_x} + \frac{d_{x+2} \cdot v^3}{l_x} + \cdots + \frac{d_{x+n-1} \cdot v^n}{l_x} + \frac{l_{x+n} \cdot v^n}{l_x} \\
&= \frac{d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + d_{x+2} \cdot v^{x+3} + \cdots + d_{x+n-1} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} \\
&+ \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x},
\end{aligned}
\tag{2.1.25}
$$

kde D_x, D_{x+n}, M_x, M_{x+n} jsou komutační čísla definována vztahy (2.1.6), (2.1.7), (2.1.14) a (2.1.20).

Pokud je pojistné plnění jiné než 1 Kč, má nettopojistné tvar

$$
S \cdot A_{xn]} = S \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{2.1.26}
$$

Pro názornost opět uvádím příklad, který je vypočítán za pomoci komutačních čísel, které jsem vypočítala pomocí vztahů pro komutační čísla při technické úrokové míře $i = 1{,}3\%\ p.a.$

Příklad 8

Jaké je jednorázové nettopojistné pro smíšené pojištění, které uzavře muž ve věku 45 let na dobu 20 let?

Řešení:

$x = 45, n = 20$

$$
A_{45,20]} = \frac{M_{45} - M_{65} + D_{65}}{D_{45}} = 0{,}783\ 392\ Kč.
$$

Takové pojištění stojí 0,783 392 Kč na 1 Kč pojistné částky. V případě, že by pojistné plnění bylo 150 000Kč, stálo by 117 508,85 Kč. Výpočty k tomuto příkladu jsou uvedeny v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – kapitálová pojištění v záložce Příklad 8.

Poznámka: mezi kapitálová životní pojištění patří také pojištění s pevnou dobou výplaty. Pojistná doba je stanovena na n let. Pojišťovna vyplatí pojistné plnění na konci pojistné doby bez ohledu na to, jestli se pojištěný dožil věku $x + n$. V případě úmrtí pojištěného na sebe pojišťovna bere povinnost platit pojistné. Tento druh pojištění většinou sjednávají rodiče v případě, kdy chtějí zabezpečit své potomky, kteří jsou potom pojištěnými osobami. Pojišťovna vyplatí pojistné plnění na konci pojistné doby, např. v případě dovršení plnoletosti, či sňatku. Jednorázové nettopojistné se vypočítá následujícím způsobem:

$$Jednotková\ počáteční\ hodnota\ pojištění\ s\ pevnou\ dobou\ výplaty = v^n$$

Srovnání získaných hodnot jednorázového nettopojistného

Pro přehlednost uvádím v následující tabulce hodnoty jednorázového nettopojistného pro 45letého muže, které jsem získala z předchozích příkladů. Pojistné plnění je 1 Kč a technická úroková míra $i = 1{,}3\ \%\ p.a.$

Pojištění pro případ dožití, $n = 20$	0,649 699 Kč
Pojištění pro případ smrti	0,661 629 Kč
Dočasné pojištění pro případ smrti, $n = 20$	0,133 693 Kč
Smíšené pojištění, $n = 20$	0,783 392 Kč

Tabulka 5: Srovnání výsledků nettpojistného u kapitálových pojištění

Z tabulky lze vidět, že k nejdražším pojištění patří smíšené pojištění (kryje obě rizika) a pojištění pro případ smrti (funguje doživotně). K dražším pojištění patří také pojištění pro případ dožití, což je způsobeno vysokou pravděpodobností dožití, zejména v mladším věku. K nejlevnějším pojištěním patří dočasné pojištění pro případ smrti, neboť je oproti pojištění na dožití časově omezeno a též díky nízkým pravděpodobnostem úmrtí v mladším věku.

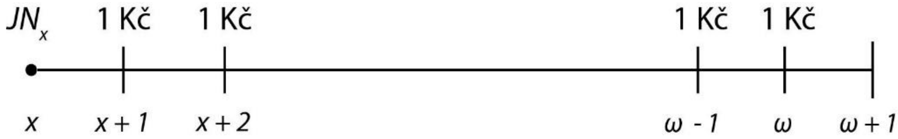
2. 2 Důchodová pojištění

V této podkapitole se budu zabývat pojištěním důchodu. Jedná se o takový druh pojištění, ve kterém se pojistné plnění vyplácí pojištěnému v pravidelných intervalech formou důchodu. Mezi důchodová pojištění patří:

- pojištění doživotního důchodu,
- pojištění odloženého doživotního důchodu,
- pojištění dočasného důchodu.

2.2.1 Pojištění doživotního důchodu

Díky tomuto pojištění získává pojištěný doživotní rentu, která je mu vyplácena vždy na začátku pojistného roku, jestliže se ho pojištěný dožije. Jedná se tedy o předlhůtní doživotní důchod. Nechť jsou tyto výplaty pro jednoduchost rovny 1Kč, jak naznačuje obrázek 5:



Obrázek 5: Schéma pojištění doživotního důchodu

Výpočet jednorázového nettopojistného pro pojištění doživotního důchodu lze provést pomocí náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$, která je dána vztahem:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{k=0}^{\omega-x} I_{(K_x \geq k)} \cdot v^k, \tag{2.2.1}$$

kde $I_{(K_x \geq k)}$ je identifikátor jevu $K_x \geq k$, který nabývá hodnot 1, nebo 0, jestliže jev $K_x \geq k$ nastane, nebo nenastane.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$(2.2.1) uvádím v následující tabulce:

Hodnota $\boldsymbol{K_x}$	**Hodnota $\boldsymbol{Z}$**	**Pravděpodobnost**
0	$v^0 = 1$	${}_0p_x = 1$
1	v^1	${}_1p_x = p_x$
2	v^2	${}_2p_x$
. . .	. . .	. . .
$\omega - x$	$v^{\omega-x}$	${}_{\omega-x}p_x$

Tabulka 6: Pojištění doživotního důchodu, rozdělení náhodné veličiny Z

Jednotková počáteční hodnota pojištění nebo též jednorázové nettopojistné se značí $\ddot{a}_x$. Její výpočet se provede jako střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ (2.2.1).

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{Z}) = \ddot{a}_x &= 1 + p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots + {}_{\omega-x}p_x \cdot v^{\omega-x} \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot v^k. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Pokud je roční důchod S Kč, má počáteční hodnota pojištění tvar

$$S \cdot \ddot{a}_x = S \cdot \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot v^k. \tag{2.2.3}$$

Výpočet počáteční hodnoty doživotního pojištění důchodu ukážu na následujícím příkladu.

Příklad 9

Jaké je jednorázové nettopojistné pro pojištění doživotního důchodu, které si sjedná muž ve věku 45 let?

Řešení:

$x = 45$

$$\ddot{a}_{45} = \sum_{k=0}^{60} {}_{k}p_{45} \cdot v^k = 26{,}37\ Kč.$$

Takové pojištění stojí 26,37 Kč pro pojistné plnění 1 Kč (roční výplata důchodu). V případě pojistného plnění ve výši 15 000Kč je cena pojištění 395 504,01 Kč. Výpočet k příkladu je uveden v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – důchodová pojištění, záložka Příklad 9.

Odvození počáteční hodnoty pojištění lze opět provést pomocí komutačních čísel následujícím způsobem:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+k} \cdot v^k}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+k} \cdot v^{x+k}}{l_x \cdot v^x} = \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots D_\omega}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}, \qquad (2.2.4)$$

kde N_x a D_x jsou komutační čísla. $D_x$je dáno vztahem (2.1.6) a kde N_x je definováno vztahem

$$N_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} = D_x + D_{x+1} + \cdots + D_\omega. \qquad (2.2.5)$$

Opět pro roční důchod S Kč

$$S \cdot \ddot{a}_x = S \cdot \frac{N_x}{D_x}. \qquad (2.2.6)$$

Příklad 10

Jaké je jednorázové nettopojistné pro pojištění doživotního důchodu, které si sjedná muž ve věku 45 let?

Řešení:
$x = 45$

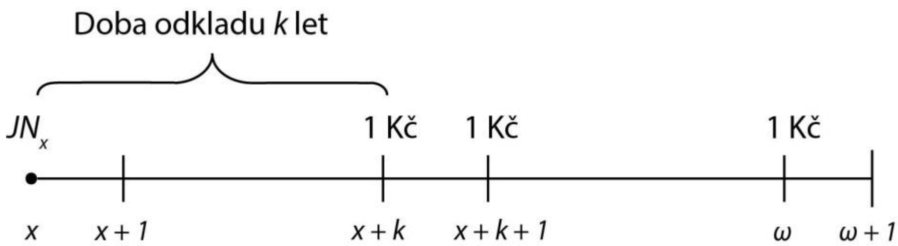
$$\ddot{a}_{45} = \frac{N_{45}}{D_{45}} = 26{,}37\ Kč.$$

Pojištění pro 40letého muže stojí 26,37 Kč na 1 Kč ročního důchodu. Výpočty k tomuto příkladu jsou uvedeny v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – důchodová pojištění v záložce Příklad 10. V případě ročního důchodu 15 000 Kč je pojistné 395 504,01 Kč.

2.2.2. Pojištění odloženého doživotního důchodu

V případě sjednání tohoto druhu pojištění se výplata důchodu posune o k let od uzavření pojistné smlouvy. Pokud pojištěný zemře v době odkladu, zanikne i nárok na výplatu pojistného plnění. V praxi se toto riziko zmírní tím, že v případě smrti pojištěného v době odkladu se obmyšlené osobě vyplatí zaplacené pojistné.

V následujícím schématu uvedu platbu jednorázového nettopojistného a výplaty pojistných plnění, které budou pro jednoduchost 1 Kč.



Obrázek 6: Schéma odloženého doživotního pojištění důchodu

Odvození jednotkové počáteční hodnoty jednorázového nettopojistného pomocí komutačních čísel se provádí následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} {}_{k|}\ddot{a}_x &= \sum_{j=k}^{\omega-x} \frac{l_{x+j} \cdot v^j}{l_x} = \sum_{j=k}^{\omega-x} \frac{l_{x+j} \cdot v^{x+j}}{l_x \cdot v^x} = \frac{D_{x+k} + D_{x+k+1} + \cdots + D_\omega}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+k}}{D_x}, \end{aligned} \qquad (2.2.7)$$

kde D_x (2.1.6) a N_{x+k} jsou komutační čísla, pro N_{x+k} platí

$$N_{x+k} = \sum_{j=k}^{\omega-x} D_{x+j} = D_{x+k} + D_{x+k+1} + \cdots + D_{\omega}. \tag{2.2.8}$$

V případě ročního důchodu S Kč je počáteční hodnota rovna

$$S \cdot {}_{k\,|}\ddot{a}_x = S \cdot \frac{N_{x+k}}{D_x} \tag{2.2.9}$$

Výpočet předvedu na následujícím příkladu.

Příklad 11

Jaká je výše jednorázového nettopojistného pro pojištění odloženého doživotního důchodu s dobou odkladu 20 let pro 45letého jedince? Předpokládejme pro jednoduchost, že roční výplata je ve výši 1 Kč

Řešení:

$x = 45, k = 20$

$${}_{20\,|}\ddot{a}_{45} = \frac{N_{65}}{D_{45}} = 9{,}49\ K\check{c}.$$

Dané pojištění doživotního důchodu pro 45letého muže s dobou odkladu 25 let stojí 9,49 Kč. Při ročním důchodu 15 000 Kč je pojistné ve výši 142 322,97 Kč. Výpočet je opět uveden v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – důchodová pojištění, tentokrát v záložce Příklad 11.

2.2.3. Pojištění dočasného důchodu

Pojištěnému, který si sjedná u své pojišťovny pojištění dočasného důchodu, je vyplácen důchod ve formě pojistného plnění vždy na začátku pojistného roku po dobu n let.

Výpočet jednotkové počáteční hodnoty tohoto pojištění se provádí pomocí náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$, která je dána vztahem:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{k=0}^{n-1} I_{(\boldsymbol{K}_x \geq k)} \cdot v^k, \tag{2.2.10}$$

kde $I_{(\boldsymbol{K}_x \geq k)}$ je identifikátor, který jsem vysvětlila v kapitole 2.2.1.

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ (2.2.10) je uvedeno v následující tabulce:

Hodnota $\boldsymbol{K_x}$	**Hodnota $\boldsymbol{Z}$**	**Pravděpodobnost**
0	$v^0 = 1$	${}_0p_x = 1$
1	v	${}_1p_x = p_x$
2	v^2	${}_2p_x$
. . .	. . .	. . .
$n-1$	v^{n-1}	${}_{n-1}p_x$

Tabulka 7: Pojištění dočasného důchodu, rozdělení náhodné veličiny Z

Jednotková počáteční hodnota pojištění dočasného důchodu se značí $\ddot{a}_{x\overline{n}|}$ a vypočítá se jako střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}$ (2.2.10)

$$E(\boldsymbol{Z}) = \ddot{a}_{x\overline{n}|} = 1 + p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \dots + {}_{n-1}p_x \cdot v^{n-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x \cdot v^k. \tag{2.2.11}$$

Opět pro pojistnou částku jinou než 1 Kč

$$S \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|} = S \cdot \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x \cdot v^k. \tag{2.2.12}$$

Příklad 12
Jaká je jednotková počáteční hodnota pojištění dočasného důchodu, které si sjedná 45letý muž na dobu 20 let?

Řešení:
$x = 45, n = 20$

$$\ddot{a}_{45,\overline{20}|} = \sum_{k=0}^{19} {}_kp_{45} \cdot v^k = 16{,}88\ Kč$$

Takové pojištění stojí 16,88 Kč. Pokud by roční důchod činil 15 000 Kč, pojištění by stálo 253 181,04 Kč. Výpočet k příkladu je uveden v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné - důchodová pojištění, záložka Příklad 12.

Odvození jednotkové počáteční hodnoty pojištění dočasného důchodu $ä_{xn\rceil}$ pomocí komutačních čísel probíhá následujícím způsobem:

$$ä_{xn\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k} \cdot v^k}{l_x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k} \cdot v^{x+k}}{l_x \cdot v^x} = \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}, \tag{2.2.13}$$

kde D_x, N_x a N_{x+n} jsou komutační čísla definována vztahy (2.1.6), (2.2.5) a (2.2.8)

Pro roční důchod S Kč platí

$$S \cdot ä_{xn\rceil} = S \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. \tag{2.2.14}$$

Poznámka: lze také zavést pojištění odloženého dočasného důchodu.

Příklad 13
Jaká je jednotková počáteční hodnota pojištění dočasného důchodu, které si sjedná 45letý muž na dobu 20 let?

Řešení:
$x = 45, n = 20$

$$ä_{45,20\rceil} = \frac{N_{45} - N_{65}}{D_{45}} = 16{,}88\ Kč.$$

Takové pojištění tedy stojí 16,88 Kč. V případě ročního důchodu 15 000 Kč stojí pojištění 253 181,04 Kč. Výpočet je uveden v elektronické příloze (CD) Jednorázové nettopojistné – důchodová pojištění v záložce Příklad 13.

Poznámka: v praxi se často využívají področní důchody. Je to taková situace, kdy je důchod vyplácen m-krát ročně. V tomto případě se používají počáteční hodnoty področních důchodů tak, že se m-krát ročně vyplácí částka $\frac{1}{m}$. V průběhu roku se tedy vyplatí taková částka, která by představovala roční výplatu (v našem případě 1 Kč).

Srovnání získaných hodnot jednorázového nettopojistného

Opět do tabulky uvádím hodnoty jednorázového nettopojistného pojištění důchodu pro 45letého muže při technické úrokové míře $i = 1{,}3\%$. Pojistné plnění nechť je 1 Kč, $n = 20$.

Pojištění doživotního důchodu	26,37 Kč
Pojištění odloženého doživotního důchodu	9,49 Kč
Pojištění dočasného důchodu	16,88 Kč

Tabulka 8: Srovnání výsledků nettopojistného u důchodových pojištění

Z tabulky je zřejmé, že nejdražší je pojištění doživotního důchodu, což je zřejmě způsobeno započtením nejdelší možné doby vyplácení.

2. 3 Běžné nettopojistné

Při odvozování vzorců v podkapitolách 2. 1. a 2. 2. jsem předpokládala, že se pojistné platí jednorázově. V životním pojištění jsou ale běžnější průběžné platby pojistného, čili běžné nettopojistné. Při odvození výše běžného nettopojistného se vychází z principu ekvivalence. V podstatě požadujeme, aby jednorázové pojistné bylo „rozpuštěno“ do pravidelných plateb. Pojistná částka je pro jednoduchost 1 Kč. Podle principu ekvivalence potom platí:

$$P \cdot \ddot{a}_{xn\rceil} = JN_{xn\rceil}, \tag{2.3.1}$$

kde P značí výše ročního nettopojistného, které se platí vždy na počátku dalšího pojistného roku. Z tohoto vztahu už můžeme jednoduše vyjádřit vztah pro výpočet běžného nettopojistného tak, že osamostatníme P na levé straně.

$$P = \frac{JN_{xn\rceil}}{\ddot{a}_{xn\rceil}}. \tag{2.3.2}$$

V případě pojistné částky S Kč pro běžné pojistné platí

$$S \cdot P = S \cdot \frac{JN_{xn\rceil}}{\ddot{a}_{xn\rceil}}. \tag{2.3.3}$$

Platby běžného nettopojistného tedy tvoří dočasný bezprostřední předlhůtní důchod, který je placen pojistiteli. Vyplácení je ukončeno buď vypršením pojistné doby, resp. doby odkladu u důchodového odloženého pojištění nebo úmrtím. Pro odvození vztahů pro vybrané druhy pojištění využívám komutační čísla, která jsem definovala v předchozích podkapitolách. U pojištění doživotního i dočasného důchodu, u nichž není doba odkladu, nemá smysl určovat běžné pojistné, neboť by platby pojistného a výplaty pojistné částky probíhaly souběžně. Vztahy pro výpočet jednotkového běžného pojistného jsou následující:

- *běžné nettopojistné pro pojištění na dožití*:

$$P_{xn\rceil} = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{nx\rceil}} = \frac{\frac{D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}, \tag{2.3.4}$$

- *běžné nettopojistné pro pojištění smrti:*

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_x}} = \frac{M_x}{N_x}, \tag{2.3.5}$$

- *běžné nettopojistné pro dočasné pojištění smrti:*

$$P_{x\overline{n|}} = \frac{A^1_{x\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x\overline{n|}}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}, \tag{2.3.6}$$

- *běžné nettopojistné smíšeného pojištění:*

$$P_{x\overline{n|}} = \frac{A_{x\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x\overline{n|}}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}, \tag{2.3.7}$$

- *běžné nettopojistné pro pojištění odloženého doživotního důchodu:*

$$P_{x\overline{k|}} = \frac{{}_{k|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x\overline{k|}}} = \frac{\frac{N_{x+k}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+k}}{D_x}} = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+k}}. \tag{2.3.8}$$

Na následujícím souhrnném příkladu ukážu výpočet běžného nettopojistného u těchto pojištění.

Příklad 14

Jaká je výše běžného pojistného u pojištění:

a) dožití se věku 65 let,
b) smrti,
c) dočasného pro případ smrti na dobu 20 let,
d) smíšeného na 20 let,
e) doživotního důchodu s dobou odkladu 20 let,

které si sjedná muž ve věku 45 let? Technická úroková míra je 1,3 % $p.a.$

S (Kč)	Pojištění na dožití	Pojištění smrti	Dočasné pojištění	Smíšené pojištění
1	0,038492	0,025093	0,007921	0,046413
150 000	5 773,83	3 763,97	1 188,12	6 961,95

Tabulka 9: Výsledky příkladu 14 - kapitálová pojištění

S (Kč)	Pojištění odloženého důchodu
1	0,56
15 000	8 432,09

Tabulka 10: Výsledky příkladu 14 – důchodová pojištění

Výpočty k příkladu jsou uvedeny v elektronické příloze (CD) Běžné nettopojistné – záložka Příklad 14.

2.4 Bruttopojistné

Dosud jsem ve své práci uvažovala pouze nettopojistné, tedy čistou počáteční hodnotu pojištění. Pojišťovna ale do pojistného zahrnuje i různé náklady, které se k nettopojistnému přičítají. Takové pojistné se nazývá bruttopojistné. Dle profesora Cipry jsou v bruttopojistném obsaženy:

- *počáteční jednorázové náklady* α: náklady, které jsou vynaloženy při uzavření pojistné smlouvy. Patří mezi ně provize zprostředkovatelům pojištění. K jednorázovým počátečním nákladům mohou také patřit náklady na vstupní lékařskou prohlídku, pokud ji vyžaduje povaha pojištění. Tyto náklady jsou nejčastěji dány jako procento z pojistné částky nebo ročního důchodu.
- *běžné správní náklady* β: tento druh nákladu se vynakládá v průběhu trvání pojištění. Patří mezi ně například nájem budov a energie. Počítají se jako procento z pojistné částky nebo ročního důchodu. V praxi se může stát, že je doba placení pojistného kratší než pojistná doba. V tomto případě se poté běžné správní náklady dělí na náklady β_1 a β_2. Kdy β_1 představují náklady v průběhu trvání pojistného a β_2 běžné správní náklady během placení pojistného. Platí
$$\beta = \beta_1 + \beta_2. \qquad (2.4.1)$$
- *inkasní náklady* γ*:* představují náklady, které jsou spojeny s příjmem plateb ve formě běžného pojistného. Vypočítají se jako procento z ročního bruttopojistného.
- *náklady při výplatě důchodu* δ: už z názvu plyne, že jsou tyto náklady spojeny s důchodovým pojištěním. Jedná se především o náklady v důsledku výplaty důchodu. Počítají se jako procento z ročního důchodu.
- *jednotná správní přirážka* ε*:* správní přirážku využívají některé pojišťovny pro zjednodušení výpočtů. Jsou v ní zahrnuty všechny předchozí náklady. Vypočítá se jako procento z ročního bruttopojistného.

2.4.1 Jednorázové bruttopojistné

Jednorázové pojistné u nettopojistného znamená, že se pojištění zaplatí jednou na začátku pojistné doby. U bruttopojistného tomu není jinak, jediný rozdíl při výpočtu je v tom, že se k nettopojistnému přičtou počáteční náklady α, které jsou placeny jednorázově a běžné správní náklady β_1, které jsou však placeny na počátku každého pojistného roku. Proto se musí počítat se současnou hodnotou důchodu, který je tvořen platbami nákladů β_1. Obecně lze tedy jednorázové bruttopojistné s pojistnou částkou S Kč vypočítat následujícím způsobem:

$$S \cdot JB_{x\overline{n}|} = S \cdot \left(JN_{x\overline{n}|} + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|}\right) \qquad (2.4.2)$$

pokud se jedná o pojištění s omezenou dobou trvání, nebo

$$S \cdot JB_x = S \cdot (JN_x + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_x) \qquad (2.4.3)$$

pro pojištění s neomezenou dobou trvání. Symbolem JB, resp. JN je označeno jednorázové bruttopojistné, resp. nettopojistné. Za $JN_{x\overline{n}|}$, resp. JN_x a $\ddot{a}_{x\overline{n}|}$, resp. $\ddot{a}_x$ se dosadí odpovídající komutační čísla, která jsem zavedla v podkapitolách 2.1 a 2.2.

Jednorázové bruttopojistné pro

- životní pojištění s pojistnou dobou délky n let vypočteme podle vztah (2.4.2), kde za $JN_{x\overline{n}|}$ dosadíme ${}_nE_x$ v případě pojištění na dožití, $A^1_{x\overline{n}|}$ u dočasného pojištění pro případ smrti a $A_{x\overline{n}|}$ v případě smíšené pojištění. Například *jednorázové bruttopojistné pro pojištění na dožití* je tvaru

$$S \cdot JB_{x\overline{n}|} = S \cdot \left({}_nE_x + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|}\right) \qquad (2.4.4)$$

- a v případě *pojištění pro případ smrti* podle vztahu (2.4.3)

$$S \cdot JB_x = S \cdot (A_x + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_x). \qquad (2.4.5)$$

V případě pojištění důchodů se musí zohlednit výplatní náklady δ. Na ukázku uvádím vztah pro výpočet jednorázového bruttopojistného

- *odloženého doživotního důchodu*

$$S \cdot JB_x = S \cdot \left[(1+\delta) \cdot {}_{k|}\ddot{a}_x + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x\overline{k}|}\right]. \qquad (2.4.6)$$

Výpočet jednorázového bruttopojistného u jednotlivých druhů pojištění ukážu na následujícím příkladu.

Příklad 15

Jaké je jednorázové bruttopojistné pro pojištění

a) dožití se věku 65 let,
b) smrti,
c) dočasného pro případ smrti na dobu 20 let,
d) smíšeného na 20 let,
e) doživotního důchodu s dobou odkladu 20 let,

které si sjedná muž ve věku 45 let? Pojistná částka $S = 150\ 000\ Kč$ pro kapitálová pojištění, $S = 15\ 000\ Kč$ pro důchodová pojištění, náklady $\alpha = 0{,}05, \beta_1 = 0{,}003$, $\delta = 0{,}03$.

V následující tabulkách jsou zaznamenány výše jednorázového bruttopojistného pro jednotlivé druhy pojištění. Zároveň jsem k nim pro porovnání přidala hodnoty jednorázového nettopojistného pro odpovídající druhy pojištění.

	Pojištění dožití		**Pojištění smrti**		**Dočasné pojištění**		**Smíšené pojištění**	
S (Kč)	$JB_{45,20}$	$JN_{45,20}$	JB_{45}	JN_{45}	$JB_{45,20}$	$JN_{45,20}$	$JB_{45,20}$	$JN_{45,20}$
1	0,750336	0,649699	0,790729	0,661629	0,234329	0,133693	0,884029	0,783392
150 000	112 550,34	97 454,91	118 609,42	99 244,30	35 149,37	20 053,94	132 604,28	117 508,85

Tabulka 11: Výsledky příkladu 15 – kapitálová pojištění

	Pojištění odloženého doživot. důchodu	
S (Kč)	$JB_{45,20}$	$JN_{45,20}$
1	9,87	9,49
15 000	148 102,20	142 322,97

Tabulka 12: Výsledky příkladu 15 – důchodová pojištění

Z předchozích tabulek (11 a 12) je zřejmé, že bruttopojistné je pro všechny uvažované druhy pojištění dražší. Toto je způsobeno právě zahrnutím nákladů pojišťovny do výpočtů pojistného. V případě pojištění na dožití, dočasného pojištění a smíšeného pojištění, tedy časově omezených pojištění, jsou rozdíly mezi jednorázovým netto a bruttopojistným stejné. Toto je způsobeno povahou výpočtu jednorázového bruttopojistného. Ze vztahu (2.4.2) a (2.4.3) je patrné, že se k odpovídajícímu jednorázovému nettopojistnému vždy přičítají stejné částky. Celkově je rozdíl nejmenší u pojištění odloženého doživotního důchodu, i navzdory tomu, že jsou u něj zahrnuty i výplatní náklady. Ty se však platí jen jednou, neboť se jedná o jednorázové pojistné.

Výpočet k příkladu je uveden v elektronické příloze (CD) Jednorázové a běžné bruttopojistné, záložka Příklad 15.

2.4.2 Běžné bruttopojistné

Při výpočtech běžného bruttopojistného se musí oproti jednorázovému bruttopojistnému zohlednit ještě inkasní náklady γ a provozní náklady β_2. Při odvození vztahu pro výpočet, který vychází z principu ekvivalence, se inkasní náklady γ počítají jako procento z ročního bruttopojistného. Běžné bruttopojistné pro pojištění s omezenou pojistnou dobou se odvodí podle následujícího vztahu

$$S \cdot B_{xn\rceil} \cdot \ddot{a}_{xn\rceil} = S \cdot \left(JN_{xn\rceil} + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{xn\rceil} + \gamma \cdot B_{xn\rceil} \cdot \ddot{a}_{xn\rceil} \right). \tag{2.4.7}$$

Po úpravě

$$S \cdot B_{xn\rceil} = S \cdot \frac{JN_{xn\rceil} + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{xn\rceil}}{(1 - \gamma) \cdot \ddot{a}_{xn\rceil}}. \tag{2.4.8}$$

Pro pojištění s neomezenou pojistnou dobou má běžné bruttopojistné tvar

$$S \cdot B_x = S \cdot \frac{JN_x + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_x}{(1 - \gamma) \cdot \ddot{a}_x}. \tag{2.4.9}$$

Například běžné bruttopojistné

- *pojištění na dožití má tvar*

$$S \cdot B_{xn\rceil} = S \cdot \frac{{}_nE_x + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{xn\rceil}}{(1 - \gamma) \cdot \ddot{a}_{xn\rceil}}, \tag{2.4.10}$$

- *pojištění pro případ smrti*

$$S \cdot B_x = S \cdot \frac{A_x + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_x}{(1 - \gamma) \cdot \ddot{a}_x}. \tag{2.4.11}$$

V případě pojištění důchodů se opět musí zohlednit náklady při samotné výplatě důchodu. Pro ukázku uvádím vztah pro výpočet běžného bruttopojistného:

- *odloženého doživotního důchodu*

$$S \cdot B_x = S \cdot \frac{(1 + \delta) \cdot {}_{k\,|}\ddot{a}_x + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{xk\rceil}}{(1 - \gamma) \cdot \ddot{a}_{xk\rceil}}. \tag{2.4.12}$$

U běžného bruttopojistného opět nemá smysl uvažovat pojištění doživotního a dočasného důchodu ze stejného důvodu, jako tomu je u běžného nettopojistného.

Výpočty běžného bruttopojistného opět ukážu na následujícím příkladu.

Příklad 16

Jaké je běžné bruttopojistné pro pojištění

f) dožití se věku 65 let,
g) smrti,
h) dočasného pro případ smrti na dobu 20 let,
i) smíšeného na 20 let,
j) doživotního důchodu s dobou odkladu 20 let,

které si sjedná muž ve věku 45 let? Pojistná částka $S = 150\,000\ Kč$ pro kapitálová pojištění, $S = 15\,000\ Kč$ pro důchodový pojištění, náklady $\alpha = 0{,}05$, $\beta_1 = 0{,}003$, $\beta_2 = 0{,}003$, $\gamma = 0{,}005$, $\delta = 0{,}03$.

	Pojištění dožití		**Pojištění smrti**		**Dočasné pojištění**		**Smíšené pojištění**	
S (Kč)	$B_{45,20}$	$P_{45,20}$	B_{45}	P_{45}	$B_{45,20}$	$P_{45,20}$	$B_{45,20}$	$P_{45,20}$
1	0,049952	0,038492	0,034726	0,025093	0,017772	0,007921	0,058290	0,046413
150 000	7 492,81	5 773,83	5 208,86	3 763,97	2 665,75	1 188,12	8 743,47	6 961,95

Tabulka 13: Výsledky příkladu 16 – kapitálová pojištění

	Pojištění odloženého doživot. důchodu	
S (Kč)	$B_{45,20}$	$P_{45,20}$
1	0,62	0,56
15 000	9 283,67	8 432,09

Tabulka 14: Výsledky příkladu 16 – důchodová pojištění

Opět lze z tabulek výše (13 a 14) vyčíst, že běžné bruttopojistné je vždy vyšší, než netto. Rozdíly mezi časově omezených pojištění však nejsou stejné, jako tomu bylo u jednorázového netto a bruttopojistného. Nejmenší rozdíl v běžných pojistných je opět u pojištění odloženého doživotního důchodu.

Výpočet k příkladu je uveden v elektronické příloze (CD) Jednorázové a běžné bruttopojistné v záložce Příklad 16. Opět jsou zde zahrnuty i hodnoty odpovídajícího běžného nettopojistného.

3 Technická rezerva [1]

Pojišťovna musí podle Zákona o pojišťovnictví ve skutečnosti tvořit několik druhů finančních rezerv. [8] Tvoří tzv. *technické rezervy*, které slouží ke krytí závazků z pojišťovací činnosti. Výše těchto závazků a okamžik vzniku však nejsou jisté. Jisté však je, že tyto závazky nastanou. Jsou důležitou složkou pasiv pojišťoven. Technické rezervy se skládají z jednotlivých rezerv, a to:

- *rezerva pojistného životních pojištění* (slouží ke krytí budoucích závazků z pojištění, více viz kapitola 4)
- *rezerva na nezasloužené pojistné* (Nezasloužené pojistné je taková část pojistného, které patří až do následujícího roku, vezmeme-li v úvahu, že se pojistný rok nekryje s rokem kalendářním, ale zasahuje do dvou kalendářních roků. Její výše odpovídá části pojistného na budoucí období.),
- *rezerva na pojistná plnění* (slouží k výplatě pojistného plnění při vzniku pojistných událostí),
- *rezerva na prémie a slevy* (rezerva se tvoří k výplatě prémií a slev, které jsou uvedeny v pojistné smlouvě),
- *rezerva životních pojištění*, je-li nositelem investičního rizika pojistník (slouží ke krytí závazků vůči pojištěným v případě, kdy pojištěný nese investiční riziko),
- *rezerva na splnění závazku z použité technické úrokové míry* (tvoří se ke krytí závazků vyplývajících z nedostatečného výnosu, který je garantován použitou technickou úrokovou mírou),
- *rezerva pojistného neživotních pojištění* (slouží u pojištění, u kterých se pojistné stanovuje na základě vstupního věku pojištěné osoby).

4 Rezerva pojistného životních pojištění [1]

Jak jsem již nastínila ve 3. kapitole, rezerva pojistného životních pojištění je primárně určena ke krytí budoucích závazků, které plynou ze životního pojištění. Jedná se o nejdůležitější rezervu z technických rezerv v rámci životních pojištění. Zjednodušeně se nazývá nettorezerva, resp. bruttorezerva (což je nettorezerva se zohledněnými náklady). K výpočtu výše této rezervy se využívají pojistně-matematické vztahy, které jsem definovala ve 2. kapitole. Více se jednotlivým rezervám věnuji v následujících kapitolách. Při zpracování této kapitoly opět čerpám informace z knihy profesora Cipry [1].

4.1 Nettorezerva

Při zamyšlení se nad pojmem a vůbec způsobem výpočtu nettorezervy nás nejspíše první napadne, že se od příjmů z pojistného odečtou výdaje pojišťovny na pojistná plnění. Přičemž uvažujeme pojistné plnění jak při dožití se určitého věku, tak při smrti. Tento rozdíl poté pojišťovna uspoří.

Při této úvaze nás však může napadnout, jak je možné, že nettorezerva vůbec vznikne, když by zaplacené (běžné) pojistné mělo sloužit ke krytí rizik v rámci pojistného kmene (pojistný kmen je soubor stejných nebo velmi podobných smluv), takže bychom čekali, že se po jeho zaplacení v průběhu pojistného roku spotřebuje. Takto je tomu však v případě neživotního pojištění, kde se vždy stanovuje výše pojistného na každý jednotlivý rok. Toto pojistné se poté celé spotřebuje.

V životním pojištění však tento princip nelze použít, neboť pojistná doba bývá o mnoho vyšší, než je tomu u neživotního pojištění. Pokud bychom uvažovali riziko úmrtí, pravděpodobnost vzniku této pojistné události by v prvních letech pojistné doby byla nižší. Nízké by tedy bylo i pojistné. V průběhu trávní pojištění by však tato částka rostla až do takových výšek, kdy by pojištění nemuselo být pro jedince zajímavé a nikdo by je nechtěl platit. Proto se pojistné rozpočítává do konstantních částek (běžné pojistné). Tato částka se poté platí pravidelně po celou dobu trvání pojištění. Někdy může být doba platby kratší než pojistná doba. V takovém případě je však pojistné vyšší, než by tomu bylo při platbě pojistného po celou dobu trvání pojištění. Rezerva poté vzniká především v prvních letech trvání pojištění, kdy je spotřebována pouze část pojistného.

Na následujícím příkladu ukážu, jak se vyvíjí výše pojistného v neživotním a životním pojištění.

Příklad 17

Jaká je výše pojistného v případě pojištění smrti s pojistnou částkou 150 000 Kč při využití principu neživotního a životního pojištění? Pojištění si sjedná 45letý muž. Pojistná částka nechť je 150 000 Kč.

K výpočtům využiji vztah

$$P = S \cdot q_1 \cdot q_2, \tag{4.1.1}$$

kde q_1 je *škodní frekvence*, která se vypočítá jako množství pojistných událostí v daném roce vydělená množstvím pojistných smluv v tom samém roce, a q_2 je *škodní rozsah*, který představuje průměrnou škodu v daném roce vydělený průměrnou pojistnou částkou. S je opět pojistná částka.

Pro výpočty v pojištění pro případ smrti budu předpokládat, že škodní frekvence $q_1$je rovna pravděpodobnosti úmrtí a škodní rozsah q_2 je roven jedné. Výpočet k tomuto příkladu je uveden v elektronické příloze (CD) Nettopojistné, záložka Příklad 17. Níže uvádím vývoj pojistného v čase získaného využitím jak principů z neživotního, tak životního pojištění.

t	x+t	P, dle NŽP	Px, dle ŽP
0	45	402,27	3763,97
1	46	464,28	3763,97
2	47	504,10	3763,97
3	48	565,25	3763,97
4	49	610,77	3763,97
5	50	687,18	3763,97
6	51	736,70	3763,97
7	52	823,87	3763,97
8	53	878,97	3763,97
9	54	978,31	3763,97
10	55	1101,35	3763,97
11	56	1259,58	3763,97
12	57	1412,55	3763,97
13	58	1591,16	3763,97
14	59	1752,98	3763,97
15	60	1974,89	3763,97
16	61	2184,66	3763,97
17	62	2402,33	3763,97
18	63	2610,63	3763,97
19	64	2846,55	3763,97
20	65	3105,55	3763,97
21	66	3477,81	3763,97
22	67	3779,66	3763,97
23	68	4105,23	3763,97
24	69	4414,92	3763,97
25	70	4668,59	3763,97
26	71	4923,58	3763,97
27	72	5306,66	3763,97

t	x+t	P, dle NŽP	Px, dle ŽP
28	73	5626,54	3763,97
29	74	6150,70	3763,97
30	75	6858,76	3763,97
31	76	7600,65	3763,97
32	77	8352,14	3763,97
33	78	9227,55	3763,97
34	79	10081,33	3763,97
35	80	11047,60	3763,97
36	81	12192,73	3763,97
37	82	13398,34	3763,97
38	83	14729,39	3763,97
39	84	16185,31	3763,97
40	85	17796,28	3763,97
41	86	19565,32	3763,97
42	87	21505,16	3763,97
43	88	23628,90	3763,97
44	89	25949,83	3763,97
45	90	28481,28	3763,97
46	91	31236,26	3763,97
47	92	34227,21	3763,97
48	93	37465,53	3763,97
49	94	40961,08	3763,97
50	95	44721,64	3763,97
51	96	48752,20	3763,97
52	97	53054,23	3763,97
53	98	57624,82	3763,97
54	99	62455,82	3763,97
55	100	67532,95	3763,97

Tabulka 15: Výše pojistného pro pojištění smrti principem životního a neživotního pojištění

Z tabulky je zřejmé, že pojistné je podle principu z neživotního pojištění menší než podle životního pojištění do 21. roku trvání pojištění. Ke konci pojistné doby je poté pojistné z neživotního pojištění několikanásobně větší než pojistné v případě životního pojištění.

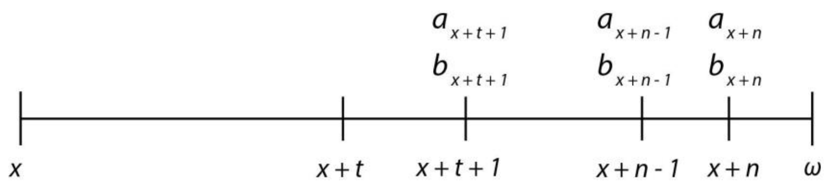
Nettorezervu pojistného v životním pojištění lze tedy počítat jako rozdíl celkových příjmů a celkových výdajů z minulého období. Takový přístup se nazývá *retrospektivní*. Dále se využívá přístup *prospektivní*, který je opačný k přístupu retrospektivnímu. Odečítají se tedy budoucí celkové výdaje, které jsou tvořeny možným budoucím plnění, od budoucích úhrnných příjmů. Existují ještě další dva přístupy k výpočtu nettorezervy, a to *diferenční* a *výplatní*. Tyto přístupy však vychází z prospektivního přístupu. Více se jimi zabývám v podkapitolách 4.1.2 a 4.1.3.

V praxi se více využívá prospektivní tvar, a to z toho důvodu, že dokáže zaznamenat budoucí změny. Naproti tomu v retrospektivním tvaru se využívají pouze informace získané z minulosti.

Rezerva pojistného může v určitých situacích vyjít záporná (např. v prvních letech pojištění). Pokud tak nastane, účetně má hodnotu rovnou nule. Výpočet musí být proveden pomocí technické úrokové míry, která byla platná v době uzavření pojistné smlouvy.

4.1.1 Nettorezerva za běžné pojistné v prospektivním tvaru

Rezerva pojistného životních pojištění tvoří největší část technických rezerv, nazývá se jednoduše rezerva. Pokud se neuvažují náklady, počítá se pouze z pojistného a pojistného plnění, nazývá se nettorezerva. Odvození nettorezervy provádím v prospektivním tvaru pro jedince pojištěného ve věku $x + t$, přičemž vstupní věk pojištěného ve věku x, pro teoretické všeobecné pojištění. Schéma výplat pojistných plnění pro takové pojištění, kdy jsou uvažována plnění pro každý věk jak při dožití ($a_{x+t+j}, j = 1,2, \dots, n$), tak při úmrtí před dosažením tohoto věku ($b_{x+t+j}, j = 1,2, \dots, n$) uvádím v následujícím obrázku.



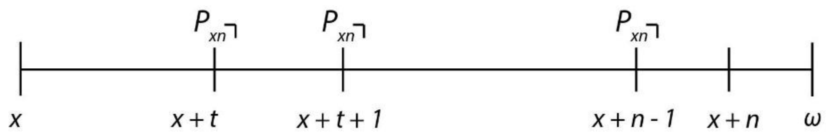
Obrázek 7:Schéma výplat pojistných plnění

Opět použiji princip ekvivalence (vzhledem k rozložení finančních toků v čase) i princip fiktivního souboru (vzhledem k počtu doživších se či zemřelých v určitém věku převzatým z úmrtnostních tabulek), tak jako u odvození jednorázového nettopojistného. Nettorezervu lze stanovit za běžné i jednorázové pojistné. Prospektivní tvar nettorezervy za běžné pojistné je ve formě rozdílu mezi součtem budoucích výdajů a součtem budoucích příjmů.

Součet výdajů pro běžné pojistné je poté rovno:

$$\begin{aligned}
&\mathit{Budoucí\ výdaje} \\
&= \frac{a_{x+t+1} \cdot v \cdot l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \cdot \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}} + \frac{a_{x+t+2} \cdot v^2 \cdot l_{x+t+2}}{l_{x+t}} \cdot \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}} + \cdots \\
&+ \frac{a_{x+n} \cdot v^{n-t} \cdot l_{x+n}}{l_{x+t}} \cdot \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}} + \frac{b_{x+t+1} \cdot v \cdot d_{x+t}}{l_{x+t}} \cdot \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}} \\
&+ \frac{b_{x+t+2} \cdot v^2 \cdot d_{x+t+1}}{l_{x+t}} \cdot \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}} + \cdots + \frac{b_{x+n} \cdot v^{n-t} \cdot d_{x+n-1}}{l_{x+t}} \cdot \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}} \\
&= \frac{a_{x+t+1} \cdot D_{x+t+1} + a_{x+t+2} \cdot D_{x+t+1} + \cdots + a_{x+n} \cdot D_{x+n}}{D_{x+t}} \\
&+ \frac{b_{x+t+1} \cdot C_{x+t} + b_{x+t+2} \cdot C_{x+t+1} + \cdots + b_{x+n} \cdot C_{x+n-1}}{D_{x+t}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n-t} a_{x+t+j} \cdot D_{x+t+j} + \sum_{j=1}^{n-t} b_{x+t+j} \cdot C_{x+t+j-1}}{D_{x+t}}.
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

K odvození rezervy je dále potřeba sečíst budoucí příjmy. Rozložení příjmů během pojistné doby znázorňuje následující obrázek



Obrázek 8: Schéma příjmů během pojistné doby

Součet příjmů pro běžné pojistné je rovno:

$$\begin{aligned}
&\mathit{Budoucí\ příjmy} \\
&= P_{xn\rceil} + \frac{P_{xn\rceil} \cdot v \cdot l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \cdot \frac{v^{x+n}}{v^{x+n}} + \frac{P_{xn\rceil} \cdot v^2 \cdot l_{x+t+2}}{l_{x+t}} \\
&\cdot \frac{v^{x+n}}{v^{x+n}} + \cdots \frac{P_{xn\rceil} \cdot v^{n-t-1} \cdot l_{x+n-1}}{l_{x+t}} \cdot \frac{v^{x+n}}{v^{x+n}} \\
&= P_{xn\rceil} \cdot \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_{x+t}} \\
&= P_{xn\rceil} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} = P_{xn\rceil} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n-t-1} D_{x+t+j}}{D_{x+t}},
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

kde $P_{xn\rceil}$ značí běžné pojistné.

Rezerva pojistného životních pojištění v prospektivním tvaru je poté rovna rozdílu výdajů (4.1.2) a příjmů (4.1.3), které jsem popsala výše:

$$ {}_tV_{xn\rceil} = \frac{\sum_{j=1}^{n-t} a_{x+t+j} \cdot D_{x+t+j} + \sum_{j=1}^{n-t} b_{x+t+j} \cdot C_{x+t+j-1}}{D_{x+t}} - P_{xn\rceil} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n-t-1} D_{x+t+j}}{D_{x+t}}. \quad (4.1.4) $$

Dosazením za hodnoty a_{x+t+j} a b_{x+t+j} lze jednoduše určit vztahy pro nettorezervu za běžné pojistné pro jednotlivé druhy pojištění. Budu předpokládat pojistnou částku ve výši 1Kč.

Nettorezerva za běžné pojistné pro pojištění na dožití

V tomto případě platí pro výdaje na pojistné plnění $b_{x+t+j} = 0$ pro $j = 1,2, \dots, n-t$, $a_{x+t+j} = 0$ pro $j = 1,2, \dots, n-t-1$, $a_{x+n} = 1$. Po dosazení do vztahu (4.1.4) dostaneme následující vztah pro nettorezervu

$$ \begin{aligned} V_{xn\rceil} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{xn\rceil} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n-t-1} D_{x+t+j}}{D_{x+t}} \\ &= \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{xn\rceil} \cdot \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_{x+t}} \\ &= \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{xn\rceil} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \\ &= \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \\ &= \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \left(1 - \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right). \end{aligned} \quad (4.1.5) $$

V případě, kdy se pojistná částka rovná částce S Kč, se vzorec (4.1.5) upraví do tvaru

$$ S \cdot V_{xn\rceil} = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \left(1 - \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right). \quad (4.1.6) $$

Využitím vzorců, které jsem definovala v předchozích kapitolách lze výraz

$$ \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{xn\rceil} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \quad (4.1.7) $$

upravit na následující tvar

$${}_{n-t}E_{x+t} - P_{x\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t}|}. \tag{4.1.8}$$

Obecně lze tedy vzorec pro nettorezervu za běžné pojistné v případě pojistné částky S Kč v prospektivním tvaru zapsat způsobem

$$S \cdot {}_tV_{x\overline{n}|} = S \cdot (JN_{x+t,\overline{n-t}|} - P_{x\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t}|}), \tag{4.1.9}$$

resp. v případě pojištění s neomezenou pojistnou dobou

$$S \cdot {}_tV_x = S \cdot (JN_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}). \tag{4.1.10}$$

Takto lze formálně zapsat vztahy pro nettorezervu všech druhů pojištění, které jsem ve své práci dosud použila. Je to tedy rozdíl hodnoty pojištění v čase t (neboli ve věku $x+t$) a současné hodnoty důchodu tvořeného platbami běžného pojistného trvajícího od věku $x+t$ po zbytek pojistné doby. Pro praktické výpočty jsou však vhodnější vzorce s využitím komutačních čísel.

Nettorezerva za běžné pojistné pojištění pro případ smrti

V případě pojištění tohoto druhu jsou výdaje pojišťovny na pojistná plnění $b_{x+t+j} = 1$ pro $j = 1,2,\dots,\omega+1-t-x$, $a_{x+t+j} = 0$ pro $j = 1,2,\dots,n-t$. Nettorezerva je tedy rovna

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= \frac{C_{x+t} + C_{x+t+1} + \cdots + C_\omega}{D_{x+t}} - P_x \cdot \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} + \cdots + D_\omega}{D_{x+t}} \\ &= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x \cdot N_{x+t}}{N_x \cdot D_{x+t}} = \frac{1}{D_{x+t}}\left(M_{x+t} - \frac{M_x \cdot N_{x+t}}{N_x}\right). \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Výraz lze též obecně přepsat do následujícího tvaru

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}. \tag{4.1.12}$$

V případě pojistné částky jiné než 1 Kč má nettorezerva tvar

$$S \cdot {}_tV_x = S \cdot \frac{1}{D_{x+t}}\left(M_{x+t} - \frac{M_x \cdot N_{x+t}}{N_x}\right), \tag{4.1.13}$$

nebo

$$S \cdot {}_tV_x = S \cdot (A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}). \tag{4.1.14}$$

Nettorezerva za běžné pojistné dočasného pojištění pro případ smrti

V dočasném pojištění pro případ smrti platí pro výdaje pojistných plnění následující: $b_{x+t+j} = 1$ pro $j = 1,2, \dots, n-t$, $a_{x+t+j} = 0$ pro $j = 1,2, \dots, n-t$. V případě dočasného pojištění pro případ smrti se nettorezerva netvoří vůbec, nebo je její velikost zanedbatelná. Nettorezerva je ve tvaru

$$\begin{aligned} V_{x\overline{n|}} &= \frac{C_{x+t} + C_{x+t+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_{x+t}} - P_{x\overline{n|}} \\ &\quad \cdot \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_{x+t}} \\ &= \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}, \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

nebo

$${}_tV_{x\overline{n|}} = A^1_{x+t,\overline{n-t|}} - P_{x\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t|}}. \tag{4.1.16}$$

Pokud je pojistná částka S Kč, má nettorezerva tvar

$$S \cdot {}_tV_{x\overline{n|}} = S \cdot \left(\frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \right), \tag{4.1.17}$$

nebo

$$S \cdot {}_tV_{x\overline{n|}} = S \cdot \left(A^1_{x+t,\overline{n-t|}} - P_{x\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t|}} \right). \tag{4.1.18}$$

Nettorezerva za běžné pojistné pro smíšené pojištění

V případě smíšeného pojištění platí pro výdaje na pojistná plnění následující $b_{x+t+j} = 1$ pro $j = 1,2, \dots, n-t$, $a_{x+t+j} = 0$ pro $j = 1,2, \dots, n-t-1$, $a_{x+n} = 1$, pojistná částka je 1 Kč.

$$\begin{aligned} {}_tV_{x\overline{n|}} &= \frac{C_{x+t} + C_{x+t+1} + \cdots + C_{x++n-1}}{D_{x+t}} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{x\overline{n|}} \\ &\quad \cdot \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_{x+t}} \\ &= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}. \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Opět lze nettorezervu přepsat do tvaru

$${}_tV_{x\overline{n|}} = A_{x+t,\overline{n-t|}} - P_{x\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t|}}. \tag{4.1.20}$$

Pokud bude pojistná částka jiná než 1 Kč, platí

$$S \cdot {}_vV_{x\overline{n}|} = S \cdot \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}, \qquad (4.1.21)$$

nebo

$$S \cdot {}_vV_{x\overline{n}|} = S \cdot \left(A_{x+t,\overline{n-t}|} - P_{x\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t}|}\right). \qquad (4.1.22)$$

Nettorezerva za běžné pojistné pro pojištění odloženého doživotního důchodu

V pojištění odloženého doživotního důchodu mohou nastat dvě situace, a to tvorba rezervy v době odkladu ($t > k$)a v době čerpání rent ($t \geq k$). Pojistná částka nechť je 1 Kč.

Pro $t < k$:

$$\begin{aligned} {}_tV_x = \frac{N_{x+k}}{D_{x+t}} - P_{x\overline{k}|} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+k}}{D_{x+t}} = \frac{N_{x+k}}{D_{x+t}} - \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+k}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+k}}{D_{x+t}} \\ = \frac{N_{x+k}}{D_{x+t}}\left(1 - \frac{N_{x+t} - N_{x+k}}{N_x - N_{x+k}}\right) = \frac{N_{x+k}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+k}}, \end{aligned} \qquad (4.1.23)$$

nebo opět

$${}_tV_x = {}_{k-t|}\ddot{a}_{x+t} - P_{x\overline{k}|} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{k-t}|}. \qquad (4.1.24)$$

Pokud by roční důchod byl S Kč, má nettorezerva tvar

$$S \cdot {}_tV_x = S \cdot \frac{N_{x+k}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+k}}, \qquad (4.1.25)$$

nebo

$$S \cdot {}_tV_x = S \cdot \left({}_{k-t|}\ddot{a}_{x+t} - P_{x\overline{k}|} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{k-t}|}.\right) \qquad (4.1.26)$$

Pro $t \geq k$:

$${}_tV_x = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = \ddot{a}_{x+t}. \qquad (4.1.27)$$

V tomto případě je nettorezerva tvořena již jen budoucími výplatami rent, proto je ve tvaru současné hodnoty příslušného důchodu.
V případě ročního důchodu jiného než 1 Kč platí

$$S \cdot {}_tV_x = S \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = S \cdot \ddot{a}_{x+t}. \qquad (4.1.28)$$

Pro názornost uvádím příklad výpočtů rezerv u jednotlivých druhů pojištění

Příklad 18

Jaká je výše nettorezervy u pojištění:

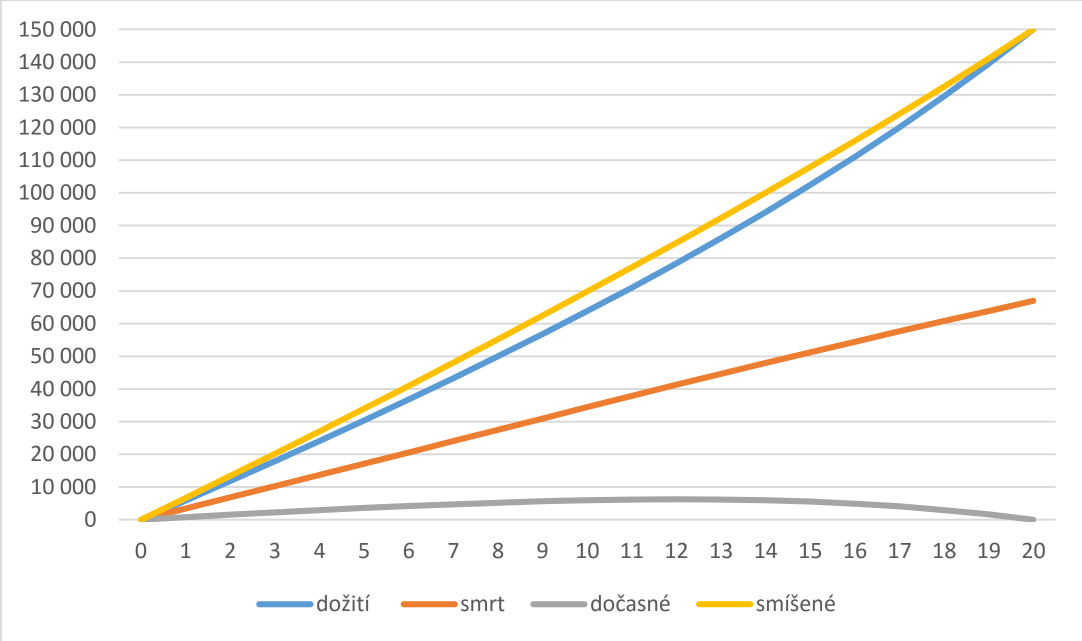
a) dožití se věku 65 let,
b) smrti,
c) dočasného pro případ smrti na dobu 20 let,
d) smíšeného na 20 let,
e) doživotního důchodu s dobou odkladu 20 let,

které si sjedná muž ve věku 45 let na pojistnou částku 150 000 Kč v případě kapitálových pojištění a 15 000 Kč v případě důchodového pojištění? Technická úroková míra je 1,3 % $p.a.$

Výsledky k příkladu jsou uvedeny v elektronické příloze (CD) Nettorezerva, záložka Příklad 18.

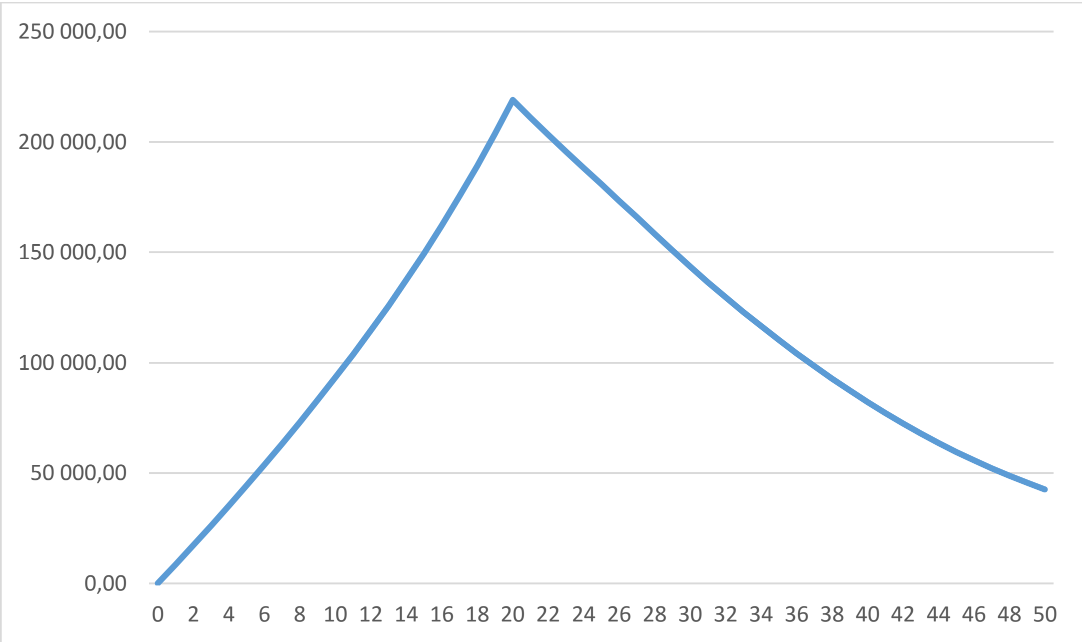
Na základě údajů, které jsem získala z Příkladu 18, mohu sestavit grafy průběhů jednotlivých nettorezerv. Na následujícím grafu lze vidět, jak se nettorezervy u kapitálových životních pojištění vyvíjí v čase. Nettorezervy pojištění pro případ dožití a smíšeného pojištění mají po celou dobu rostoucí charakter a na konci pojistné doby se naspoří celá pojistná částka. U pojištění smrti (zvolila jsem pouze prvních 20 let) lze vidět, že má také rostoucí charakter, ale roste pomaleji, než předchozí pojištění. Je to způsobeno tím, že pojištění není časově omezeno a končí až v případě smrti pojištěného. Smrt je ale náhodná, proto není jasné, kdy tato skutečnost nastane a kdy dojde k výplatě pojistného plnění. V případě dočasného pojištění pro případ smrti má křivka konkávní charakter, jejíž hodnota začíná a končí v nule. Tato skutečnost je způsobena povahou dočasného pojištění pro případ smrti. V prvních letech pojištění jsou výdaje na pojistná plnění vyšší, než příjmy z pojistného. Důvod tohoto chování je takový, že v prvních rocích pojistné doby je věk pojištěného nižší. Riziko výplaty pojistného plnění není vysoké, proto je riziková část[1] pojistného nižší. Zůstává tedy větší část pojistného pro rezervu. S narůstajícím věkem se ale riziko smrti zvětšuje, proto se do rizikového fondu odvádí vyšší částky. Na ukládací část tedy nezbyde tolik prostředků a rezerva se postupně snižuje. Na konci pojistné doby se na výplatu pojistného plnění spotřebuje i uspořená část pojistného.

[1] V případě úmrtí před koncem pojistné doby se pojistná částka vyplácí ze dvou fondů, a to z nettorezervy (tedy ukládací části) a z rizikového kapitálu (rizikové části). Rizikový kapitál odpovídá rozdílu mezi pojistnou částkou a nettorezervou v daném čase. Do rizikového kapitálu pojišťovna postupně přiděluje příslušnou část z nettopojistného v rámci celého pojistného kmene.



Graf 1:Nettorezerva kapitálových pojištění

U pojištění odloženého doživotního důchodu má nettorezerva v době odkladu, tedy pro $t < 20$, rostoucí charakter. Pro $t \geq 20$, což představuje dobu výplaty, nettorezerva klesá v důsledku výplaty důchodů. Průběh nettorezervy v čase zobrazuje následující graf.



Graf 2: Nettorezerva pojištění odloženého doživotního důchodu

4.1.2 Nettorezerva za běžné pojistné v diferenčním tvaru

Dalším ze způsobů vyjádření nettorezervy je použitím rozdílů běžného pojistného v čase t, tedy $P_{x+t,n-t]}$, a běžného pojistného v čase n, tedy $P_{xn]}$. Za předpokladu, že je pojistná částka 1 Kč, se odvození provádí následujícím způsobem

$$ {}_tV_{xn]} = JN_{x+t,n-t]} - P_{xn]} \cdot ä_{x+t,n-t]} = ä_{x+t,n-t]} \cdot \left(\frac{JN_{x+t,n-t]}}{ä_{x+t,n-t]}} - P_{xn]}\right) = \left(P_{x+t,n-t]} - P_{xn]}\right) \cdot ä_{x+t,n-t]}. \tag{4.1.29} $$

Pokud by pojistné plnění bylo S Kč, bude mít nettorezerva tvar

$$ S \cdot {}_tV_{xn]} = S \cdot \left(P_{x+t,n-t]} - P_{xn]}\right) \cdot ä_{x+t,n-t]}. \tag{4.1.30} $$

Za $P_{x+t,n-t]}$, $P_{xn]}$ a $ä_{x+t,n-t]}$ se poté dosadí hodnoty běžného nettopojistného vypočtené pro věk $x+t$ a vstupní věk x, resp. současná hodnota důchodu pro věk $x+t$ a zbytek pojistné doby $n-t$.

Při využití výpočtu nettorezervy pomocí diferenčního tvaru je však problém s výpočtem u časově omezených pojištění v posledním roce trvání pojištění. Nedá se pouze dosadit do vzorce, neboť by vyšel výraz dělený nulou. Matematickou úpravou výrazu lze ale tuto skutečnost odstranit.

Ze vztahu (4.1.29), případně (4.1.30) je patrné, že se nettorezerva může interpretovat jako současná hodnota důchodů, který je tvořen rozdílem pojistného ve věku $x+t$ a zbytek pojistné doby $n-t$ a pojistného pro věk x s pojistnou dobou n let. Pojistné pro věk x s pojistnou dobou n let bude vždy menší, než pojistné ve věku $x+t$ a zbytek pojistné doby $n-t$, neboť je sestaveno pro mladšího jedince a také proto, že bylo stanoveno na delší dobu n let.

Pro ukázku opět uvádím příklad, na kterém demonstruji výpočty u jednotlivých pojištění.

Příklad 19

Jaká je výše nettorezervy u pojištění:

a) dožití se věku 65 let,
b) smrti,
c) dočasného pro případ smrti na dobu 20 let,
d) smíšeného na 20 let,
e) doživotního důchodu s dobou odkladu 20 let,

které si sjedná muž ve věku 45 let na pojistnou částku 150 000 Kč pro kapitálová pojištění a 15 000 Kč pro důchodová? Technická úroková míra je 1,3 % $p.a$.

V textu výše jsem se zmínila o problému při počítání nettorezervy u časově omezených pojištění, který vznikne v posledním roce trvání pojištění. Níže uvádím pro ukázku úpravu výrazu pro pojištění na dožití.

Řešení pro:

$x = 45, t = 20$

$$\begin{aligned}150\,000 \cdot {}_{20}V_{45,20\rceil} &= 150\,000 \cdot \left(P_{45+20,20-20\rceil} - P_{45,20\rceil}\right) \cdot \ddot{a}_{45+20,20-20\rceil} \\ &= 150\,000 \cdot \left(\frac{D_{65}}{N_{65}-N_{65}} - \frac{D_{65}}{N_{45}-N_{65}}\right) \cdot \frac{N_{65}-N_{65}}{D_{65}} \\ &= 150\,000 \cdot \left(\frac{D_{65}}{N_{65}-N_{65}} \cdot \frac{N_{65}-N_{65}}{D_{65}} - \frac{D_{65}}{N_{45}-N_{65}} \cdot \frac{N_{65}-N_{65}}{D_{65}}\right) = 150\,000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{65}} \\ &= 150\,000\ K\check{c}.\end{aligned}$$

Výpočty ke všem pojištění jsou k nalezení v elektronické příloze (CD) Nettorezerva v záložce Příklad 19 a)-e).

4.1.3 Nettorezerva za běžné pojistné ve výplatním tvaru

Ještě další způsob vyjádření nettorezervy je pomocí tzv. výplatního tvaru. Jeho odvození se opět provádí pomocí základního tvaru nettorezervy v prospektivním tvaru. V případě, že je pojistná částka 1 Kč, vypadá vztah následovně

$$\begin{aligned}{}_tV_{xn\rceil} &= JN_{x+t,n-t\rceil} - P_{xn\rceil} \cdot \ddot{a}_{x+t,n-t\rceil} = \left(1 - \frac{P_{xn\rceil} \cdot \ddot{a}_{x+t,n-t\rceil}}{JN_{x+t,n-t\rceil}}\right) \cdot JN_{x+t,n-t\rceil} \\ &= \left(1 - \frac{P_{xn\rceil}}{\frac{JN_{x+t,n-t\rceil}}{\ddot{a}_{x+t,n-t\rceil}}}\right) \cdot JN_{x+t,n-t\rceil} = \left(1 - \frac{P_{xn\rceil}}{P_{x+t,n-t\rceil}}\right) \cdot JN_{x+t,n-t\rceil}.\end{aligned} \tag{4.1.31}$$

Pokud je pojistná částka S Kč, upraví se vztah vynásobením levé i pravé strany rovnice

$$S \cdot {}_tV_{xn\rceil} = S \cdot \left(1 - \frac{P_{xn\rceil}}{P_{x+t,n-t\rceil}}\right) \cdot JN_{x+t,n-t\rceil}. \tag{4.1.32}$$

Za $P_{xn\rceil}$ a $P_{x+t,n-t\rceil}$ se poté dosadí příslušné hodnoty běžného pojistného, kterým se zabývám v kapitole 2.3 a za $JN_{x+t,n-t\rceil}$ hodnota pojištění ve věku $x + t$.

Při výpočtu nettorezervy ve výplatním tvaru nastane v posledním roce pojištění podobná situace jako při výčtu nettorezervy v diferenčním tvaru, kterou jsem popsala v podkapitole 4.1.2.

Z tvaru nettorezervy (4.1.31), příp. (4.1.32) lze vidět, že je rovna pojistnému plnění ve věku $x + t$ po odečtení té části pojistného plnění, které je pokryto již stanoveným pojistným $P_{x\rceil n}$.

Výpočet nettorezervy pomocí výplatního tvaru ukážu v následujícím příkladu

Příklad 20

Jaká je výše nettorezervy u pojištění:

a) dožití se věku 65 let,
b) smrti,
c) dočasného na dobu 20 let,
d) smíšeného na 20 let,
e) doživotního důchodu s dobou odkladu 20 let,

které si sjedná muž ve věku 45 let na pojistnou částku 150 000 Kč v případě kapitálových pojištění a částku 15 000 Kč pro důchodová pojištění? Technická úroková míra je 1,3 % $p.a.$

Nyní opět ukážu problém, který nastane v posledním roce trvání pojištění. Na ukázku si vyberu opět pojištění na dožití se.

Řešení pro:

$x = 45, t = 20$

$$150\,000 \cdot {}_{20}V_{45,20\rceil} = 150\,000 \cdot \left(1 - \frac{P_{45,20\rceil}}{P_{45+20,20-20\rceil}}\right) \cdot JN_{45+20,20-20\rceil}$$

$$= 150\,000 \cdot \left(1 - \frac{\frac{D_{65}}{N_{45} - N_{65}}}{\frac{D_{65}}{N_{65} - N_{65}}}\right) \cdot \frac{D_{65}}{D_{65}} = 150\,000 \cdot \left(1 - \frac{N_{65} - N_{65}}{N_{45} - N_{65}}\right) \cdot \frac{D_{65}}{D_{65}}$$

$$= 150\,000\ K\check{c}.$$

Výpočty k příkladu jsou uvedeny v elektronické příloze (CD) Nettorezerva, záložka Příklad 20 a)-e).

Při porovnání výsledků nettorezervy získaných jednotlivými způsoby výpočtu lze vidět, že všechny hodnoty rezervy vyšly pro každé pojištění naprosto stejně. Podle potřeby lze tedy využívat všechny vzorce pro výpočet nettorezervy.

Poznámka: Doposud jsem uvažovala nettorezervu, která se počítala z běžného pojistného. V případě jednorázového nettopojistného se výše nettorezervy rovná právě hodnotě pojištění ve věku $x + t$, neboť se pojistné zaplatí najednou na počátku pojistné doby a nettorezerva se v průběhu trvání tvoří z této zaplacené částky. V případě, kdy je pojistná částka 1 Kč, má obecně nettorezerva za jednorázové nettopojistné v případě pojištění s omezenou dobou trvání tvar

$$ {}_tV^j_{x\overline{n}|} = JN_{x+t,\overline{n-t}|}. \tag{4.1.33}$$

Pokud by pojistná částka byla S Kč, má nettorezerva tvar

$$ S \cdot {}_tV^j_{x\overline{n}|} = S \cdot JN_{x+t,\overline{n-t}|}. \tag{4.1.34}$$

V případě pojištění s neomezenou dobou trvání má nettorezerva tvar

$$ {}_tV^j_x = JN_{x+t}. \tag{4.1.35}$$

A opět pokud by pojistná částka byla jiná než 1 Kč

$$ S \cdot {}_tV^j_x = S \cdot JN_{x+t}. \tag{4.1.36}$$

4.2 Bruttorezerva

Bruttorezerva je rezerva pojistného životních pojištění, která zohledňuje i správní náklady, které jsou zavedeny v kapitole 2.4.

4.2.1 Bruttorezerva za běžné pojistné

Princip výpočtu bruttorezervy za běžné pojistné je podobný, jako tomu bylo u nettopojistného v prospektivním tvaru. Bruttorezerva je též rovna rozdílu očekávaných výdajů na pojistná plnění a očekávaných příjmů z bruttopojistného v čase $x + t$, avšak jediný rozdíl je takový, že se musí zohlednit i správní náklady, které pojišťovna vybere v pojistném a poté vynaloží. Obecně má tedy bruttorezerva běžného pojistného pro pojištění s omezenou dobou trvání tvar

$$S \cdot \; {}_tV_{xn]}^{brutto} = S \cdot \left[\left(JN_{x+t,n-t} + \beta \cdot \ddot{a}_{x+t,n-t} + \gamma \cdot B_{xn]} \cdot \ddot{a}_{x+t,n-t} \right) - B_{xn]} \cdot \ddot{a}_{x+t,n-t]} \right]. \tag{4.2.1}$$

Pokud za roční bruttopojistné dosadím vztah

$$B_{xn]} = \; {}_nP_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{xn]}} + \beta + \gamma \cdot B_{xn],} \tag{4.2.2}$$

který jsem získala úpravou výrazu (2.4.8), a vzniklou rovnici upravím, bude mít bruttorezerva tvar

$$S \cdot \; {}_tV_{xn]}^{brutto} = S \cdot \left(JN_{xn]} - P_{xn]} \cdot \ddot{a}_{x+t,n-t]} - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t,n-t]}}{\ddot{a}_{xn]}} \right). \tag{4.2.3}$$

Vztah pro výpočet brutorezervy za běžné pojistné je tedy

$$S \cdot \; {}_tV_{xn]}^{brutto} = S \cdot \left(\; {}_tV_{xn]} - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t,n-t]}}{\ddot{a}_{xn]}} \right). \tag{4.2.4}$$

Pro pojištění s neomezenou pojistnou dobou má bruttorezerva běžného pojistného tvar

$$S \cdot \; {}_tV_x^{brutto} = S \cdot \left(\; {}_tV_x - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \right). \tag{4.2.5}$$

Z předchozích vztahů lze vidět, že se bruttorezerva vypočítá jako rozdíl mezi nettorezervou a alfa násobkem podílu důchodu v čase $x + t$ a x. Tomuto odečtení se říká *zillmerování nettorezervy*. Zillmerování se provádí z toho důvodu, že na počátku pojištění musí pojišťovna vynaložit počáteční náklady α. Tyto náklady se jí však vrátí až po čase ve formě plateb pojistného. Proto pojišťovna od nettorezervy odečítá poměrnou část nákladů α.

Je-li bruttorezerva za běžné pojistné v prvních letech pojištění menší než nula vlivem odpočtu poměrné části α nákladů, je nutné z účetních důvodů definovat tzv. *zillmerovanou rezervu*

$$S \cdot \; {}_tV_{xn]}^{Z} = \begin{cases} S \cdot \; {}_tV_{xn]}^{brutto} & pro\ S \cdot \; {}_tV_{xn]} \geq 0 \\ 0 & pro\ S \cdot \; {}_tV_{xn]} < 0 \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Na ukázku uvádím výpočet bruttozervy za běžné pojistné pro:

- *pojištění na dožití*

$$S \cdot \ {}_tV_{x\overline{n}|}^{brutto} = S \cdot \left({}_nE_x \ - P_{x\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t}|} - \alpha \frac{\ddot{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} \right) \\ = \ S \cdot \left(\ {}_tV_{x\overline{n}|} - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} \right) \tag{4.2.7}$$

- *pojištění smrti*

$$S \cdot \ {}_tV_x^{brutto} = S \cdot \left(A_x - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} - \alpha \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \right) \\ = \ S \cdot \left(\ {}_tV_x - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \right). \tag{4.2.8}$$

- *pojištění odloženého doživotního důchodu*

V případě bruttorezervy za běžné pojistné odloženého doživotního důchodu je opět nutné rozlišit dobu placení pojistného a dobu výplaty důchodu.

<u>Pro $t < k$</u>, tedy dobu placení pojistného

$$S \cdot \ {}_tV_x^{brutto} = S \cdot \left[(1+\delta) \cdot \left({}_{k-t|}\ddot{a}_{x+t} - P_{x\overline{k}|} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{k-t}|} \right) - \alpha \frac{\ddot{a}_{x+t,\overline{k-t}}}{\ddot{a}_{x\overline{k}|}} \right] \\ = S \cdot \left[(1+\delta) \cdot \ {}_tV_x \ - \alpha \frac{\ddot{a}_{x+t,\overline{k-t}}}{\ddot{a}_{x\overline{k}|}} \right]. \tag{4.2.9}$$

<u>Pro $t \geq k$</u>, tedy dobu výplaty rent

$$S \cdot \ {}_tV_x^{brutto} = S \cdot (1+\delta)\ddot{a}_{x+t} = S \cdot (1+\delta) \cdot \ {}_tV_x \ . \tag{4.2.10}$$

Příklad 21

Jaká je výše bruttorezervy z běžného pojistného u pojištění:

a) dožití se věku 65 let,
b) pro případ smrti,
c) dočasného pro případ smrti na dobu 20 let,
d) smíšeného na 20 let,
e) odloženého důchodu s dobou odkladu 20 let,

které si sjedná muž ve věku 45 let? Technická úroková míra je 1,3 % $p.a.$ Náklady $\alpha = 0{,}05$, $\delta = 0{,}03$. Pojistná částka je 150 000 Kč při sjednání kapitálových pojištění a 15 000 Kč v případě důchodového pojištění.

Výsledky k příkladu jsou uvedeny v elektronické příloze (CD) Bruttorezerva, záložka Příklad 21 a)-e).

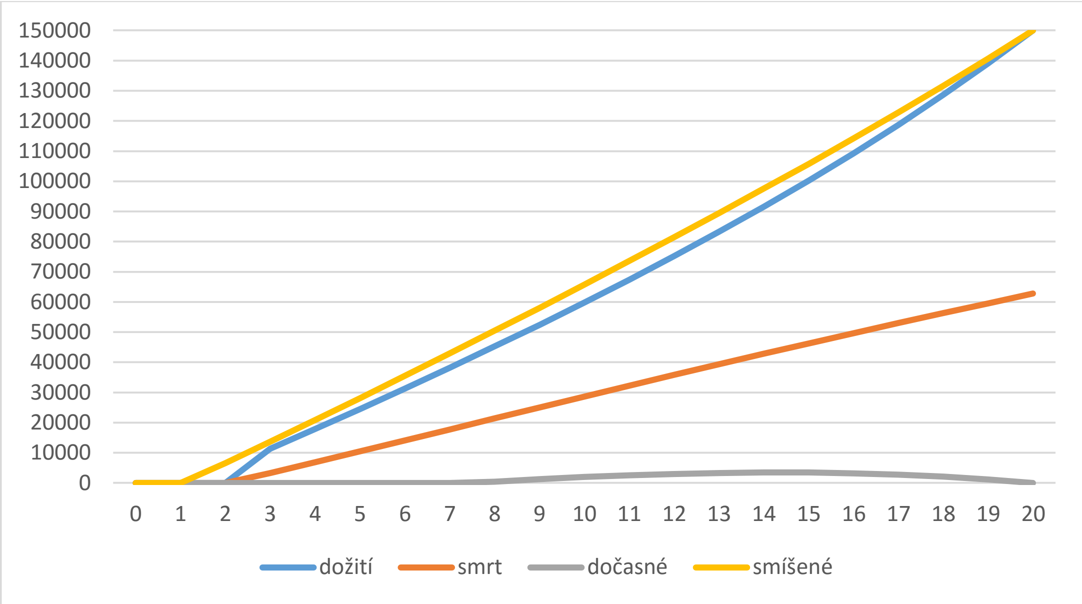
Poznámka: Doposud jsem pouze uvažovala bruttorezervu za běžné pojistné. V případě bruttorezervy za jednorázové pojistné se k nettorezervě za jednorázové pojistné přičte člen $\beta_1 \cdot \ddot{a}_{x+t,n-t\rceil}$, resp. $\beta_1 \cdot \ddot{a}_{x+t}$. Tento člen se někdy nazývá rezerva běžných nákladů a představuje potřebnou částku na pokrytí budoucích správních nákladů. Bruttorezerva jednorázového pojistného s omezenou dobou trvání je tedy obecně dána vztahem

$$S \cdot \ {}_{t}V_{x,n\rceil}^{brutto,j} = S \cdot \left({}_{t}V_{xn\rceil}^{j} - \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x+t,n-t\rceil} \right) \tag{4.2.11}$$

a v případě časově neomezeného pojištění

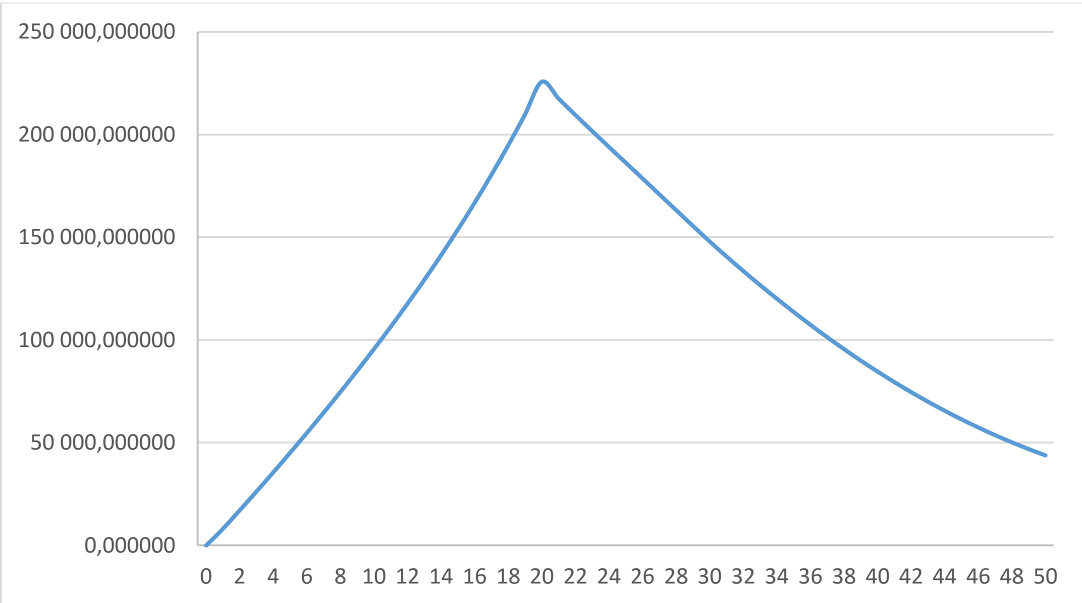
$$S \cdot \ {}_{t}V_{x}^{brutto,j} = S \cdot \left({}_{t}V_{x}^{j} - \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x+t\rceil} \right). \tag{4.2.12}$$

S využitím výsledků, které jsem získala v příkladu 21, mohu opět sestavit grafy, které vyjadřují průběh bruttorezervy u kapitálových a důchodového pojištění. V následujícím grafu lze vidět, že průběh bruttorezervy u kapitálových pojištění je velmi podobný průběhu nettorezervy, která je zobrazena v grafu 1. Na pohled je rozdíl pouze v prvních letech pojištění, kdy je bruttorezerva nulová. Tato skutečnost je způsobena zillmerováním bruttorezervy. Hodnoty jsou však všechny rozdílné. Těmto rozdílům se více věnuji v následující podkapitole.



Graf 3: Bruttorezerva kapitálových pojištění

U bruttorezervy pojištění odloženého doživotního důchodu s dobou odkladu 20 let je průběh taktéž podobný, jako tomu bylo u nettorezervy (graf 2).



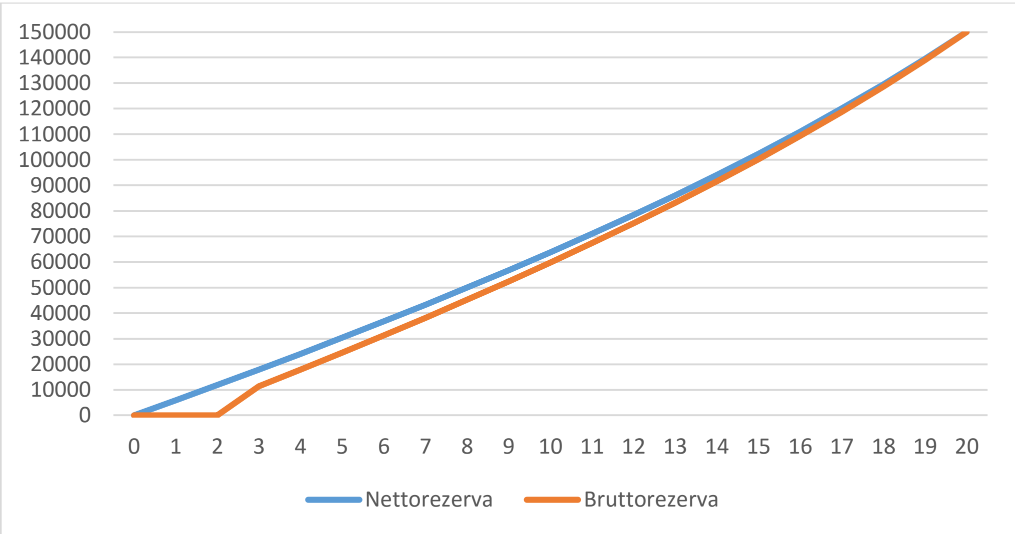
Graf 4: Bruttorezerva pojištění odloženého doživotního důchodu

4.3 Srovnání nettorezervy a bruttorezervy

Doposud jsem srovnávala stejné rezervy mezi kapitálovým a důchodovým pojištění. Pro představu uvedu i porovnání nettorezervy a bruttorezervy v rámci jednotlivých pojištění. Díky příkladům, které jsem ve své práci počítala, mohu sestavit následující grafy rezerv u jednotlivých druhů pojištění. V příkladech jsem uvažovala situaci, kdy si pojištění sjednává 45letý muž na pojistnou částku 150 000 Kč pro kapitálové pojištění. U důchodových pojištění jsem uvažovala roční důchod 15 000 Kč. V případě časově omezeného pojištění byla tato doba 20 let, v případě pojištění odloženého doživotního důchodu byla doba odkladu 20 let.

Pojištění na dožití

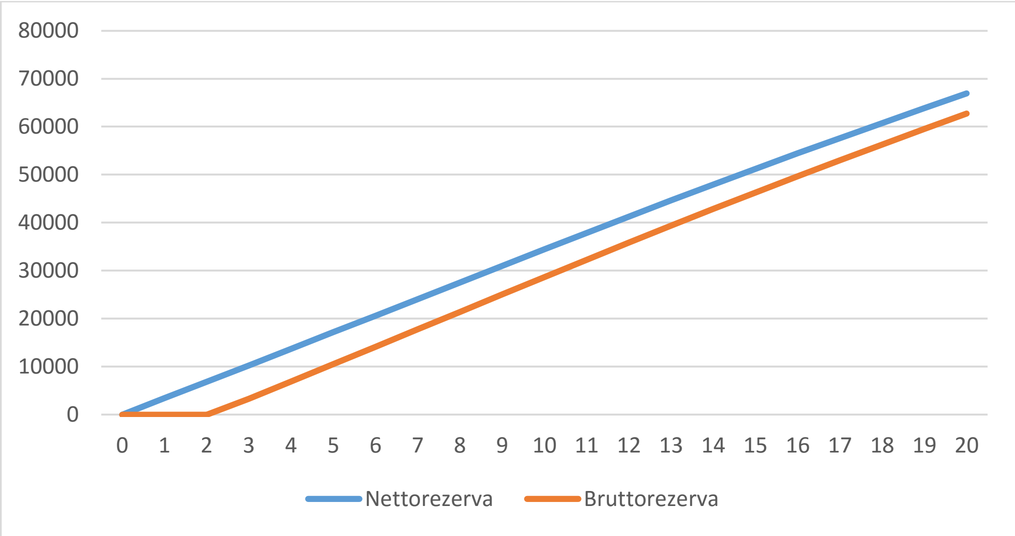
V případě pojištění na dožití je největší rozdíl mezi rezervami v prvních letech pojištění, kdy je bruttorezerva nulová. Tato skutečnost je způsobena zillmerováním bruttorezervy, neboť by byla bruttorezerva v těchto letech záporná. Rozdíl mezi nettorezervou a bruttorezervou se v čase snižuje. V posledním roce je tento rozdíl nulový a velikost rezerv je 150 000 Kč, což je právě pojistná částka. Popsanou situaci ukazuje graf 5.



Graf 5: Nettorezerva a bruttorezerva pojištění na dožití

Pojištění smrti

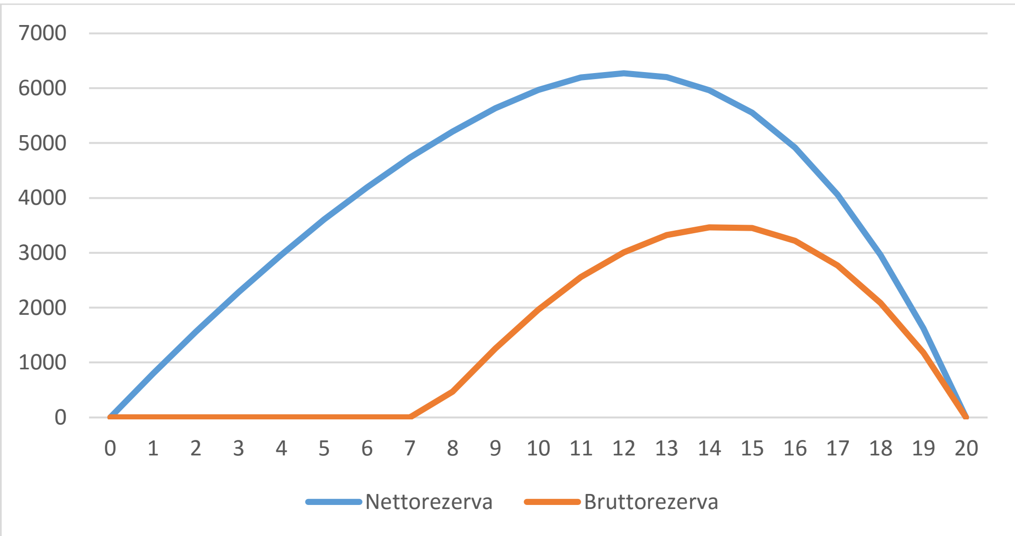
Při výpočtu rezerv z pojistného u pojištění smrti lze opět vidět, že v prvních 3 letech tvoření rezerv je bruttorezerva nulová vlivem zillmerování. I v tomto případě se rozdíl mezi nettorezervou a bruttorezervou v snižuje v čase, avšak výrazně pomaleji, než je tomu u pojištění na dožití. Pro ukázku jsem zvolila pouze pro prvních 20 let pojištění. V grafu 6 lze vidět, že čím delší dobu pojištění trvá, tím si jsou rezervy bližší.



Graf 6: Nettorezerva a bruttorezerva pojištění smrti

Dočasné pojištění pro případ smrti

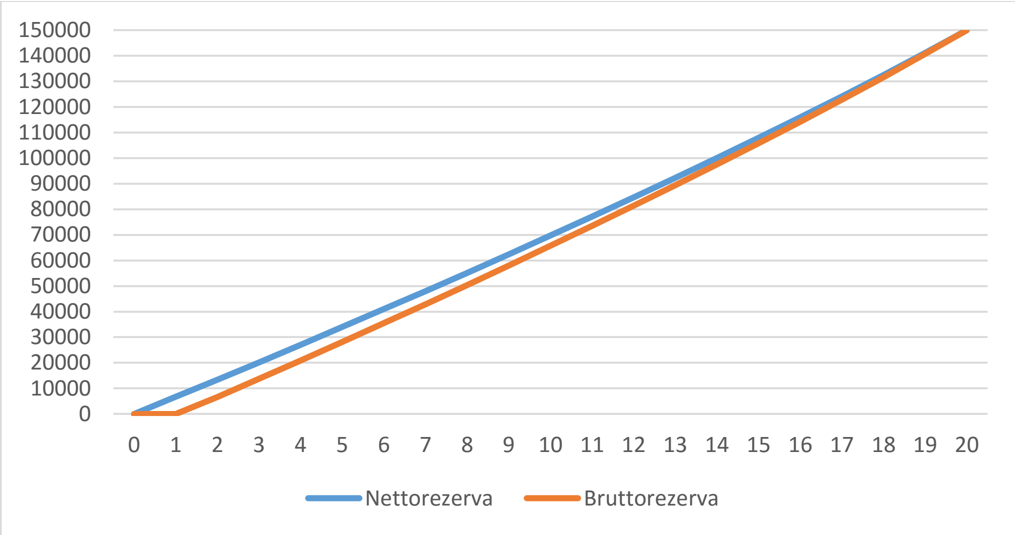
Rezervy tvořené z plateb pojistného při sjednání dočasného pojištění smrti mají konkávní tvar z důvodu, který jsem popsala na konci podkapitoly 4.1. U bruttorezervy je patrné zillmerování rezervy, kdy v prvních 8 letech je bruttorezerva nulová. Rozdíl v hodnotách brutto a nettorezervy je v porovnání s ostatními pojištění velmi výrazný. Na konci pojistné doby jsou obě rezervy rovny 0. Tato situace je znázorněna v grafu 7.



Graf 7: Nettorezerva a bruttorezerva dočasného pojištění smrti

Smíšené pojištění

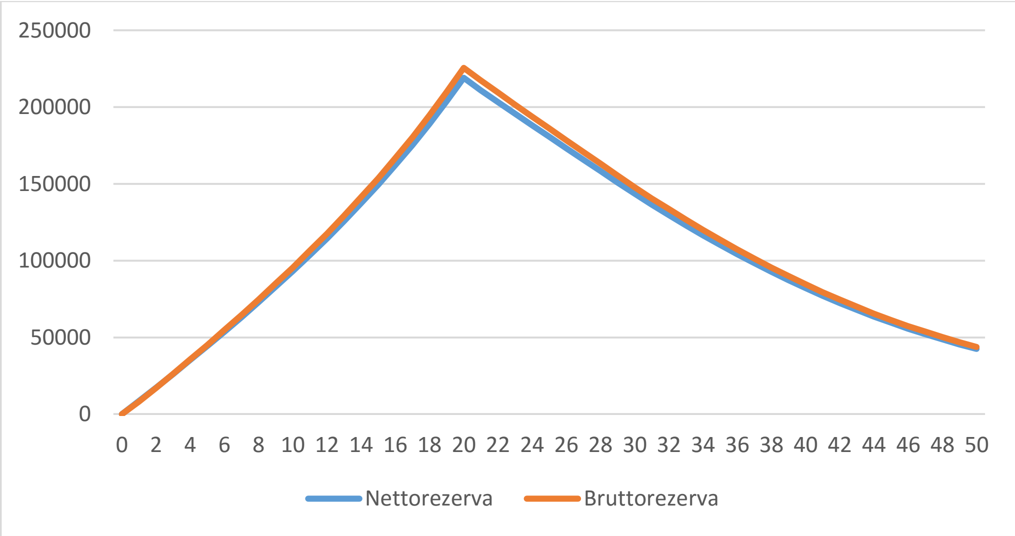
V případě smíšeného pojištění, které je kombinací dočasného pojištění pro případ smrti a pojištění na dožití, si jsou rezervy bližší, než v případě pojištění na dožití. Důvodem je skutečnost, že se zohledňují dvě pojistná rizika, a to dožití se určitého věku a smrt, zatímco při pojištění dožití se při tvorbě rezervy zohledňuje jen jedno z rizik. Zillmerovaná bruttorezerva se objevuje v prvních 2 letech tvoření rezervy. Na konci pojistné doby jsou obě rezervy rovny pojistné částce 150 000 Kč. Vývoj rezerv v čase v případě smíšeného pojistné jsou znázorněny v grafu 8.



Graf 8: Nettorezerva a bruttorezerva smíšeného pojištění

Pojištění odloženého doživotního důchodu

Při pojištění odloženého doživotního důchodu s dobou odkladu 20 let jsou si rezervy nejvíce podobné. Největší rozdíl mezi rezervami je ve 20. roku trvání pojištění, tedy v době, kdy se přestává platit pojistné, a začínají výplaty pravidelného důchodu, které jsem pro ukázku nastavila na 30 let. Popsanou situaci znázorňuje graf 9.



Graf 9: Nettorezerva a bruttorezerva pojištění odloženého doživotního důchodu

Závěr

Ve své práci jsem se zabývala výpočty rezervy pojistného životních pojištění. Než jsem však mohla k samotným výpočtům přistoupit, musela jsem zavést velké množství vztahů, které se v pojistné matematice využívají.

V druhé kapitole jsem poté odvodila počáteční hodnoty (jednorázové nettopojistné) kapitálových a důchodových pojištění, následně i běžné pojistné. Věnovala jsem se jak netto tak brutto pojistnému. Na konci každé podkapitoly jsem poté uvedla ukázkový příklad, jehož řešení je k nalezení v elektronické příloze (CD).

Po zavedení potřebných vztahů jsem se přesunula k odvozování a výpočtům nettorezervy. Tu je možné vypočítat čtyřmi různými způsoby, kdy každý v těchto způsobů má svou vlastní interpretaci. Nejpřirozeněji lze nettorezervu vnímat jako rozdíl mezi příjmy z pojistného (v minulosti) a výdaji na pojistná plnění (v minulosti). Takto je rezerva popsána vzorcem v retrospektivním tvaru. V praxi se však mnohem více využívá vzorec v prospektivním tvaru, který umožňuje měnit hodnoty podle budoucího vývoje. Další ze způsobů vyjádření nettorezervy je v diferenčním tvaru. Je to současná hodnotu důchodu tvořeného rozdílem běžného nettopojistného stanoveného pro aktuální věk, tedy $x + t$, a zbytek pojistné doby $(n - t\ )$ a běžného nettopojistného stanoveného pro vstupní věk x a celkovou pojistnou dobu n let. Tento přístup může být vhodný v případě, že chceme sledovat výši nettorezervy v závislosti na výši pojistného. Nakonec se dá nettorezerva vyjádřit jako pojistné plnění, které bylo stanoveno pro aktuální věk pojistného $(x + t)$ a zbytek pojistné doby $(n - t)$. Toto plnění odpovídá té části pojistného plnění, které není pokryto původně zaplaceným běžným nettopojistným pro vstupní věk x a celkovou pojistnou dobu n let. Takto interpretovaná nettorezerva se vyjádří za pomocí vzorce ve výplatním tvaru. Způsob výpočtu za pomocí výplatního tvaru může být nápomocen při analýze nettorezervy jak z hlediska závislosti na výši pojistného, tak v závislosti na výši pojistného plnění, převedeného vždy k aktuálnímu věku.

Pří výpočtu bruttorezervy se vychází z podobné úvahy, jako je tomu u nettorezervy. Opět se jedná o rozdíl mezi očekávanými výdaji na pojistná plnění a očekávanými příjmy z pojistného, ovšem už musí být pří výpočtu zohledněny náklady, které pojišťovna vynaloží. V prvních letech může vyjít bruttorezerva záporná, to však z účetního hlediska není možné. Proto se z tohoto důvodu zadání tzv. zillmerování bruttorezervy.

Na konci každé podkapitoly jsem uvedla ukázkový příklad, jehož výpočet je k nalezení v elektronické příloze (CD). Díky výsledkům, které jsem získala, jsem se mohla na konci své práce věnovat rozdílům mezi netto a bruttorezervami. Největší rozdíl mezi rezervami je v případě dočasného pojištění smrti a nejmenší rozdíl je v případě pojištění odloženého doživotního důchodu. Obecně lze však napsat, že hodnota bruttorezervy je ze začátku doby tvorby rezervy vždy menší, než hodnota nettorezervy, což je způsobeno především zillmerováním bruttorezervy a způsobem výpočtu bruttorezerv. V případě bruttorezervy se od zaplaceného pojistného odčítají i náklady, a na tvorbu rezervy tedy nezbyde tolik finančních prostředků. Ke konci pojistné doby jsou si však hodnoty rezervy bližší a na jejím konci jsou si rovny (především u pojištění, která mají omezenou pojistnou dobu).

Díky psaní této práce jsem si velmi rozšířila obzory znalosti pojistné matematiky životního pojištění a ujasnila si fungování jednotlivých druhů životního pojištění.

Seznam použitých zdrojů

[1] CIPRA, Tomáš. Pojistná matematika: teorie a praxe. 2., aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2006. ISBN 80-86929-11-6.

[2] Úmrtnostní tabulky za ČR od roku 1920. [Online]. [Cit. 1.3.2016; 20:35 SEČ]. Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/umrtnostni_tabulky.

[3] ČESKO. Zákon č. 37/2004 Sb., o pojistné smlouvě a o změně souvisejících zákonů. [Online]. [Cit. 17.4.2016; SEČ]. Dostupné z: http://business.center.cz/business/pravo/zakony/pojistna_smlouva/cast1h4.aspx.

[4] 2. Úřední sdělení České národní banky ze dne 14. ledna 2015. [Online]. Praha, 2015. [Cit. 1.3.2016; 20:49 SEČ]. Dostupné z: http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/legislativa/vestnik/2015/download/vestnik_2015_02_20215560.pdf.

[5] HRON, Karel a Pavla KUNDEROVÁ. Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. ISBN 978-80-244-3396-7.

[6] Úmrtnostní tabulky - Metodické poznámky. [Online]. [Cit. 1.3.2016; 20:58 SEČ].

[7] DAŇHEL, Jaroslav. Kapitoly z pojistné teorie. Vyd. 1. Praha: Oeconomica, 2002, ISBN 80-245-0306-9.

[8] ČESKO. Zákon č. 363/1999 Sb., o pojišťovnictví. [Cit. 10.4.2016; 18:12 SEŠ]. Dostupné z: http://business.center.cz/business/pravo/zakony/pojistovnictvi/cast1h3.aspx.

Seznam příloh

Příloha A – elektronická příloha (CD) s výpočty všech příkladů

Příloha B – úmrtnostní tabulky pro muže z roku 2014 dostupné z internetových stránek Českého statistického úřadu [2]

Příloha C – tabulka komutačních čísel pro muže z roku 2014 pro technickou úrokovou míru $1{,}3\ \%\ p.a.$ (vlastní zpracování)

Příloha B

2014	Česká republika							
Muži								
věk *age*	**Dx**	**Px**	**qx**	**lx**	**dx**	**Lx**	**Tx**	**ex**
0	153	55585	0,002712	100000	271	99777	7578099	75,78
1	12	55624	0,000216	99729	22	99718	7478322	74,99
2	7	56044	0,000125	99707	12	99701	7378604	74,00
3	6	58793	0,000102	99695	10	99690	7278903	73,01
4	7	61707	0,000080	99685	8	99681	7179213	72,02
5	6	62493	0,000096	99677	10	99672	7079533	71,02
6	2	61712	0,000087	99667	9	99663	6979861	70,03
7	10	58225	0,000100	99658	10	99654	6880198	69,04
8	3	54405	0,000109	99649	11	99643	6780545	68,04
9	8	51702	0,000121	99638	12	99632	6680901	67,05
10	4	49544	0,000093	99626	9	99621	6581270	66,06
11	5	48273	0,000082	99616	8	99612	6481649	65,07
12	3	47581	0,000081	99608	8	99604	6382036	64,07
13	4	47089	0,000127	99600	13	99594	6282432	63,08
14	11	46508	0,000178	99587	18	99579	6182838	62,08
15	12	46176	0,000255	99570	25	99557	6083260	61,10
16	15	46547	0,000359	99544	36	99527	5983703	60,11
17	22	46896	0,000499	99509	50	99484	5884176	59,13
18	33	48789	0,000666	99459	66	99426	5784692	58,16
19	44	53138	0,000769	99393	76	99355	5685266	57,20
20	47	59355	0,000784	99316	78	99277	5585912	56,24
21	43	63253	0,000695	99239	69	99204	5486634	55,29
22	41	65648	0,000621	99169	62	99139	5387430	54,33
23	37	67959	0,000631	99108	63	99077	5288292	53,36
24	48	68021	0,000636	99045	63	99014	5189215	52,39
25	52	69293	0,000693	98982	69	98948	5090201	51,43
26	44	70768	0,000776	98914	77	98875	4991253	50,46
27	62	71630	0,000759	98837	75	98799	4892378	49,50
28	60	73317	0,000734	98762	72	98726	4793578	48,54
29	46	74427	0,000754	98689	74	98652	4694853	47,57
30	54	74822	0,000741	98615	73	98579	4596200	46,61
31	66	75697	0,000772	98542	76	98504	4497622	45,64
32	65	76763	0,000854	98466	84	98424	4399118	44,68
33	67	79597	0,000939	98382	92	98336	4300694	43,71
34	88	86058	0,000972	98289	96	98242	4202358	42,75
35	103	91332	0,001032	98194	101	98143	4104117	41,80
36	90	93316	0,001067	98092	105	98040	4005974	40,84
37	107	95154	0,001079	97988	106	97935	3907934	39,88
38	113	97041	0,001197	97882	117	97824	3809999	38,92
39	134	98305	0,001415	97765	138	97696	3712175	37,97
40	163	96011	0,001621	97627	158	97547	3614479	37,02
41	162	88601	0,001797	97468	175	97381	3516932	36,08
42	159	81552	0,001941	97293	189	97199	3419551	35,15
43	157	77439	0,002109	97104	205	97002	3322352	34,21
44	177	74494	0,002367	96899	229	96785	3225351	33,29
45	195	71254	0,002682	96670	259	96540	3128566	32,36
46	212	69433	0,003095	96411	298	96262	3032025	31,45
47	237	69739	0,003361	96112	323	95951	2935764	30,55
48	275	71268	0,003768	95789	361	95609	2839813	29,65
49	287	74235	0,004072	95428	389	95234	2744204	28,76
50	357	74184	0,004581	95040	435	94822	2648970	27,87

51	325	68890	0,004911	94604	465	94372	2554148	27,00
52	374	64214	0,005492	94140	517	93881	2459776	26,13
53	345	62659	0,005860	93623	549	93348	2365894	25,27
54	426	61516	0,006522	93074	607	92771	2272546	24,42
55	438	62879	0,007342	92467	679	92128	2179775	23,57
56	572	67113	0,008397	91788	771	91403	2087648	22,74
57	684	70145	0,009417	91017	857	90589	1996245	21,93
58	739	71035	0,010608	90160	956	89682	1905656	21,14
59	846	70945	0,011687	89204	1042	88683	1815974	20,36
60	917	70705	0,013166	88161	1161	87581	1727291	19,59
61	1045	70894	0,014564	87001	1267	86367	1639710	18,85
62	1173	70493	0,016016	85734	1373	85047	1553343	18,12
63	1178	69158	0,017404	84361	1468	83626	1468296	17,41
64	1296	66796	0,018977	82892	1573	82106	1384669	16,70
65	1363	65945	0,020704	81319	1684	80477	1302564	16,02
66	1577	66983	0,023185	79636	1846	78712	1222086	15,35
67	1660	65418	0,025198	77789	1960	76809	1143374	14,70
68	1604	56324	0,027368	75829	2075	74791	1066564	14,07
69	1449	49974	0,029433	73754	2171	72668	991773	13,45
70	1575	49221	0,031124	71583	2228	70469	919104	12,84
71	1511	44359	0,032824	69355	2277	68217	848635	12,24
72	1374	39442	0,035378	67079	2373	65892	780419	11,63
73	1433	36952	0,037510	64706	2427	63492	714526	11,04
74	1398	32906	0,041005	62278	2554	61002	651035	10,45
75	1294	28762	0,045725	59725	2731	58359	590033	9,88
76	1379	26082	0,050671	56994	2888	55550	531674	9,33
77	1368	23635	0,055681	54106	3013	52600	476124	8,80
78	1402	22157	0,061517	51093	3143	49522	423524	8,29
79	1436	21003	0,067209	47950	3223	46339	374003	7,80
80	1541	19734	0,073651	44727	3294	43080	327664	7,33
81	1561	18688	0,081285	41433	3368	39749	284584	6,87
82	1606	17251	0,089322	38065	3400	36365	244835	6,43
83	1647	15404	0,098196	34665	3404	32963	208469	6,01
84	1524	13454	0,107902	31261	3373	29575	175506	5,61
85	1477	11298	0,118642	27888	3309	26234	145931	5,23
86	1350	9314	0,130435	24579	3206	22976	119698	4,87
87	1284	7588	0,143368	21373	3064	19841	96721	4,53
88	1149	6210	0,157526	18309	2884	16867	76880	4,20
89	992	4903	0,172999	15425	2669	14091	60013	3,89
90	924	3819	0,189875	12756	2422	11545	45922	3,60
91	727	2874	0,208242	10334	2152	9258	34377	3,33
92	588	2000	0,228181	8182	1867	7249	25119	3,07
93	370	1338	0,249770	6315	1577	5527	17870	2,83
94	318	800	0,273074	4738	1294	4091	12343	2,61
95	122	391	0,298144	3444	1027	2931	8252	2,40
96	66	194	0,325015	2417	786	2024	5322	2,20
97	51	136	0,353695	1632	577	1343	3297	2,02
98	41	100	0,384165	1055	405	852	1954	1,85
99	39	74	0,416372	649	270	514	1102	1,70
100	27	57	0,450220	379	171	294	588	1,55
101	25	41	0,485566	208	101	158	294	1,41
102	6	25	0,522217	107	56	79	136	1,27
103	9	14	0,559924	51	29	37	57	1,12
104	0	14	0,598379	23	13	16	20	0,90
105	0	23	1,000000	9	9	5	5	0,50

Tabulka 16: Úmrtnostní tabulka pro muže z roku 2014. Zdroj: ČSU

Příloha C

2014		TÚM: 1,30%					v=	0,98716683
Muži								
věk *age*	lx	dx	Dx	Cx	Nx	Mx	Sx	Rx
0	100 000	271	100 000,00	267,75	4 827 300,57	38 050,44	159 149 015,22	2 784 914,40
1	99 729	22	98 448,94	20,96	4 727 300,57	37 782,69	154 321 714,64	2 746 863,96
2	99 707	12	97 164,56	11,98	4 628 851,64	37 761,73	149 594 414,07	2 709 081,27
3	99 695	10	95 905,65	9,66	4 531 687,08	37 749,75	144 965 562,43	2 671 319,55
4	99 685	8	94 665,22	7,47	4 435 781,43	37 740,08	140 433 875,35	2 633 569,80
5	99 677	10	93 442,89	8,82	4 341 116,21	37 732,61	135 998 093,92	2 595 829,72
6	99 667	9	92 234,90	7,91	4 247 673,32	37 723,79	131 656 977,71	2 558 097,11
7	99 658	10	91 043,32	8,95	4 155 438,43	37 715,87	127 409 304,38	2 520 373,32
8	99 649	11	89 865,99	9,65	4 064 395,11	37 706,92	123 253 865,95	2 482 657,44
9	99 638	12	88 703,07	10,56	3 974 529,12	37 697,27	119 189 470,84	2 444 950,52
10	99 626	9	87 554,17	8,05	3 885 826,04	37 686,71	115 214 941,73	2 407 253,25
11	99 616	8	86 422,52	7,00	3 798 271,87	37 678,66	111 329 115,68	2 369 566,54
12	99 608	8	85 306,45	6,80	3 711 849,35	37 671,66	107 530 843,81	2 331 887,88
13	99 600	13	84 204,90	10,59	3 626 542,91	37 664,86	103 818 994,46	2 294 216,22
14	99 587	18	83 113,69	14,59	3 542 338,01	37 654,27	100 192 451,55	2 256 551,37
15	99 570	25	82 032,48	20,65	3 459 224,32	37 639,67	96 650 113,54	2 218 897,10
16	99 544	36	80 959,10	28,70	3 377 191,84	37 619,03	93 190 889,22	2 181 257,43
17	99 509	50	79 891,44	39,36	3 296 232,74	37 590,33	89 813 697,38	2 143 638,40
18	99 459	66	78 826,82	51,79	3 216 341,30	37 550,97	86 517 464,65	2 106 048,07
19	99 393	76	77 763,44	59,05	3 137 514,48	37 499,18	83 301 123,34	2 068 497,10
20	99 316	78	76 706,44	59,35	3 059 751,05	37 440,14	80 163 608,86	2 030 997,92
21	99 239	69	75 662,70	51,95	2 983 044,61	37 380,79	77 103 857,82	1 993 557,78
22	99 169	62	74 639,76	45,78	2 907 381,90	37 328,84	74 120 813,21	1 956 177,00
23	99 108	63	73 636,12	45,87	2 832 742,14	37 283,06	71 213 431,31	1 918 848,15
24	99 045	63	72 645,26	45,60	2 759 106,02	37 237,19	68 380 689,17	1 881 565,10
25	98 982	69	71 667,39	49,04	2 686 460,76	37 191,59	65 621 583,14	1 844 327,91
26	98 914	77	70 698,63	54,13	2 614 793,37	37 142,55	62 935 122,38	1 807 136,32
27	98 837	75	69 737,21	52,27	2 544 094,74	37 088,41	60 320 329,01	1 769 993,77
28	98 762	72	68 789,99	49,83	2 474 357,53	37 036,15	57 776 234,27	1 732 905,36
29	98 689	74	67 857,37	50,51	2 405 567,54	36 986,31	55 301 876,74	1 695 869,22
30	98 615	73	66 936,03	48,98	2 337 710,17	36 935,80	52 896 309,20	1 658 882,90
31	98 542	76	66 028,05	50,30	2 270 774,14	36 886,82	50 558 599,04	1 621 947,10
32	98 466	84	65 130,40	54,93	2 204 746,09	36 836,52	48 287 824,90	1 585 060,29
33	98 382	92	64 239,63	59,57	2 139 615,70	36 781,58	46 083 078,80	1 548 223,77
34	98 289	96	63 355,67	60,77	2 075 376,06	36 722,02	43 943 463,11	1 511 442,18
35	98 194	101	62 481,84	63,68	2 012 020,39	36 661,25	41 868 087,05	1 474 720,16
36	98 092	105	61 616,32	64,89	1 949 538,55	36 597,56	39 856 066,65	1 438 058,92
37	97 988	106	60 760,70	64,74	1 887 922,23	36 532,67	37 906 528,11	1 401 461,35
38	97 882	117	59 916,21	70,80	1 827 161,53	36 467,94	36 018 605,88	1 364 928,68
39	97 765	138	59 076,50	82,55	1 767 245,32	36 397,14	34 191 444,35	1 328 460,75
40	97 627	158	58 235,81	93,20	1 708 168,83	36 314,59	32 424 199,03	1 292 063,61
41	97 468	175	57 395,27	101,82	1 649 933,01	36 221,40	30 716 030,20	1 255 749,01
42	97 293	189	56 556,88	108,38	1 592 537,75	36 119,57	29 066 097,19	1 219 527,62
43	97 104	205	55 722,70	116,02	1 535 980,87	36 011,19	27 473 559,44	1 183 408,04
44	96 899	229	54 891,58	128,28	1 480 258,17	35 895,17	25 937 578,57	1 147 396,85
45	96 670	259	54 058,87	143,11	1 425 366,60	35 766,90	24 457 320,40	1 111 501,68
46	96 411	298	53 222,01	162,62	1 371 307,73	35 623,78	23 031 953,80	1 075 734,78
47	96 112	323	52 376,38	173,76	1 318 085,72	35 461,16	21 660 646,07	1 040 110,99
48	95 789	361	51 530,46	191,69	1 265 709,34	35 287,40	20 342 560,35	1 004 649,83
49	95 428	389	50 677,47	203,70	1 214 178,88	35 095,71	19 076 851,01	969 362,43
50	95 040	435	49 823,42	225,32	1 163 501,40	34 892,01	17 862 672,13	934 266,72

51	94 604	465	48 958,70	237,37	1 113 677,99	34 666,69	16 699 170,73	899 374,71
52	94 140	517	48 093,04	260,76	1 064 719,28	34 429,32	15 585 492,74	864 708,02
53	93 623	549	47 215,10	273,12	1 016 626,24	34 168,56	14 520 773,46	830 278,71
54	93 074	607	46 336,06	298,33	969 411,15	33 895,44	13 504 147,21	796 110,15
55	92 467	679	45 443,09	329,38	923 075,09	33 597,11	12 534 736,07	762 214,71
56	91 788	771	44 530,53	369,13	877 632,01	33 267,73	11 611 660,97	728 617,60
57	91 017	857	43 589,93	405,22	833 101,47	32 898,60	10 734 028,97	695 349,87
58	90 160	956	42 625,32	446,35	789 511,54	32 493,38	9 900 927,50	662 451,27
59	89 204	1 042	41 631,95	480,29	746 886,22	32 047,03	9 111 415,96	629 957,88
60	88 161	1 161	40 617,39	527,90	705 254,28	31 566,74	8 364 529,73	597 910,85
61	87 001	1 267	39 568,23	568,89	664 636,89	31 038,83	7 659 275,46	566 344,12
62	85 734	1 373	38 491,55	608,55	625 068,66	30 469,94	6 994 638,56	535 305,28
63	84 361	1 468	37 389,03	642,38	586 577,11	29 861,39	6 369 569,90	504 835,34
64	82 892	1 573	36 266,84	679,40	549 188,07	29 219,01	5 782 992,80	474 973,95
65	81 319	1 684	35 122,01	717,82	512 921,24	28 539,61	5 233 804,72	445 754,94
66	79 636	1 846	33 953,46	777,12	477 799,22	27 821,79	4 720 883,49	417 215,33
67	77 789	1 960	32 740,61	814,40	443 845,76	27 044,66	4 243 084,26	389 393,54
68	75 829	2 075	31 506,05	851,20	411 105,15	26 230,26	3 799 238,50	362 348,88
69	73 754	2 171	30 250,52	878,93	379 599,10	25 379,06	3 388 133,35	336 118,61
70	71 583	2 228	28 983,38	890,50	349 348,58	24 500,13	3 008 534,25	310 739,55
71	69 355	2 277	27 720,93	898,23	320 365,19	23 609,63	2 659 185,68	286 239,42
72	67 079	2 373	26 466,95	924,33	292 644,26	22 711,40	2 338 820,48	262 629,78
73	64 706	2 427	25 202,97	933,24	266 177,31	21 787,08	2 046 176,22	239 918,38
74	62 278	2 554	23 946,30	969,31	240 974,33	20 853,84	1 779 998,91	218 131,31
75	59 725	2 731	22 669,68	1 023,27	217 028,03	19 884,53	1 539 024,58	197 277,47
76	56 994	2 888	21 355,49	1 068,22	194 358,35	18 861,26	1 321 996,54	177 392,94
77	54 106	3 013	20 013,21	1 100,05	173 002,86	17 793,04	1 127 638,19	158 531,69
78	51 093	3 143	18 656,33	1 132,95	152 989,64	16 692,99	954 635,33	140 738,65
79	47 950	3 223	17 283,95	1 146,73	134 333,32	15 560,03	801 645,69	124 045,66
80	44 727	3 294	15 915,42	1 157,14	117 049,36	14 413,31	667 312,37	108 485,63
81	41 433	3 368	14 554,04	1 167,84	101 133,94	13 256,17	550 263,01	94 072,32
82	38 065	3 400	13 199,42	1 163,87	86 579,91	12 088,33	449 129,07	80 816,16
83	34 665	3 404	11 866,16	1 150,25	73 380,49	10 924,45	362 549,16	68 727,83
84	31 261	3 373	10 563,62	1 125,21	61 514,33	9 774,20	289 168,67	57 803,38
85	27 888	3 309	9 302,85	1 089,54	50 950,71	8 648,99	227 654,34	48 029,18
86	24 579	3 206	8 093,92	1 042,19	41 647,86	7 559,45	176 703,63	39 380,19
87	21 373	3 064	6 947,86	983,32	33 553,94	6 517,26	135 055,77	31 820,74
88	18 309	2 884	5 875,38	913,65	26 606,07	5 533,94	101 501,84	25 303,48
89	15 425	2 669	4 886,34	834,48	20 730,69	4 620,30	74 895,76	19 769,54
90	12 756	2 422	3 989,15	747,72	15 844,35	3 785,81	54 165,07	15 149,25
91	10 334	2 152	3 190,23	655,81	11 855,21	3 038,09	38 320,72	11 363,43
92	8 182	1 867	2 493,48	561,66	8 664,97	2 382,28	26 465,51	8 325,34
93	6 315	1 577	1 899,82	468,43	6 171,50	1 820,62	17 800,53	5 943,06
94	4 738	1 294	1 407,01	379,29	4 271,68	1 352,19	11 629,04	4 122,44
95	3 444	1 027	1 009,66	297,16	2 864,67	972,90	7 357,36	2 770,26
96	2 417	786	699,54	224,44	1 855,01	675,74	4 492,68	1 797,35
97	1 632	577	466,12	162,75	1 155,46	451,29	2 637,67	1 121,62
98	1 055	405	297,39	112,78	689,34	288,55	1 482,21	670,32
99	649	270	180,79	74,31	391,95	175,76	792,87	381,78
100	379	171	104,16	46,29	211,16	101,45	400,92	206,01
101	208	101	56,53	27,10	106,99	55,16	189,76	104,56
102	107	56	28,71	14,80	50,46	28,06	82,76	49,40
103	51	29	13,54	7,48	21,75	13,26	32,30	21,34
104	23	13	5,88	3,47	8,21	5,78	10,55	8,08
105	9	9	2,33	2,30	2,33	2,30	2,33	2,30

Tabulka 17: Tabulka komutačních čísel pro muže pro rok 2014 s TÚM 1,3 % p.a. Zdroj: vlastní zpracování