

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aplikace diferenciálních rovnic v praxi



Vedoucí bakalářské práce:  
**RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.**  
Rok odevzdání: 2012

Vypracoval:  
**Josef Dolanský**  
MAP, III. ročník

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto bakalářskou práci samostatně za vedení RNDr. Jana Tomečka, Ph.D., a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 16. dubna 2012

## **Poděkování**

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu diplomové práce RNDr. Janu Tomečkovi, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Dále bych chtěl poděkovat tvůrcům typografického systému  $\text{\TeX}$ , kterým je práce vysázena.

# Obsah

Úvod	4
<b>1 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu</b>	<b>5</b>
1.1 Existence a jednoznačnost řešení . . . . .	6
1.2 Homogenní rovnice . . . . .	7
1.2.1 Lineární závislost řešení a fundamentální množina . . . . .	7
1.3 Nehomogenní diferenciální rovnice . . . . .	10
1.4 Diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty . . . . .	11
1.4.1 Metody řešení homogenní rovnice s konstantními koeficienty	11
1.4.2 Metody řešení nehomogenní rovnice . . . . .	13
<b>2 Základy elektroniky</b>	<b>19</b>
2.1 Základní pojmy . . . . .	19
2.2 Základní elektronické zákony a principy . . . . .	19
2.3 Základní elektronické součástky a jejich vlastnosti. . . . .	21
2.3.1 Rezistor . . . . .	21
2.3.2 Kondenzátor . . . . .	23
2.3.3 Cívka . . . . .	26
<b>3 Odvozené příklady</b>	<b>27</b>
3.1 Integrovní člunek RC . . . . .	27
3.2 Seriový RLC obvod . . . . .	32
<b>Závěr</b>	<b>38</b>
<b>Příloha</b>	<b>39</b>

# Úvod

Hlavním cílem této bakalářské práce je přiblížit aplikaci obyčejných diferenciálních rovnic v praxi. Diferenciální rovnice se používají v různých vědních oborech jako například v chemii, fyzice, medicíně, elektronice. Zaměřil jsme se na aplikaci v elektronice, na příklady, které vedou na lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Tato práce je napsána tak, aby ji porozuměl čtenář se znalostí derivací a integrací funkcí jedné proměnné. Práce obsahuje vybrané důkazy tvrzení. Důkazy tvrzení, které zde nejdou uvedeny, ať už z důvodu rozsahu nebo potřeby znalosti z jiných matematických disciplín (např. funkcionální analýza nebo diferenciální počet funkcí více proměnných), může čtenář vyhledat v knize, na kterou je v textu odkázán.

V první kapitole je popsána problematika lineárních diferenciálních rovnic, věta o existenci a jednoznačnosti řešení, vlastnosti řešení a metody nalezení řešení. Na závěr kapitoly jsou uvedeny tři příklady hodnotící uvedené metody.

Druhá kapitola obsahuje úvod do elektroniky. Jsou zde zdefinované základní veličiny, elektronické vzorce a nakonec tři elementární elektronické součástky, které posléze použijeme v poslední kapitole.

Ve třetí a poslední kapitole, která je stěžejní pro tuto práci, jsou popsány dva elektronické obvody. Je zde popis obvodu, odvození diferenciální rovnice a následné vyřešení. Pro ověření správnosti je poté obvod odsimulován v programu Multisim 10.1. Nakonec jsou popsány možnosti využití tohoto obvodu ve složitějších zapojeních.

V příloze je pro doplnění popis funkcí osciloskopu, který jsem použil v simulaci.

# 1 Lineární diferenciální rovnice $n$ -tého řádu

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

kde  $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$  jsou reálné funkce definované na  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f(x) \not\equiv 0$ , budeme nazývat nehomogenní lineární diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu. Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

budeme nazývat homogenní lineární diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu. Rovnici (1) v tzv. normálním tvaru rozumíme rovnicí

$$y^{(n)} = f(x) - a_1(x)y^{(n-1)} - \dots - a_n(x)y. \quad (3)$$

Řešením rovnice (1) resp. (2) rozumíme funkci  $y(x) \in C^n(J)$ <sup>1</sup> kde  $J \subseteq I$ , takovou že  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$  pro každé  $x \in J$ . Obecným řešením rozumíme množinu všech řešení rovnice (1). Partikulárním řešením rozumíme jedno konkrétní řešení této rovnice.

Zavedením počátečních podmínek

$$y(x_0) = \xi_0, \quad y'(x_0) = \xi_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \xi_{n-1}, \quad (4)$$

které musí řešení rovnice (1) splňovat, dostáváme tzv. Cauchyho počáteční úlohu.

Rovnici (3) můžeme převést pomocí substituce na soustavu  $n$  rovnic prvního řádu. Po provedení substituce, kde

$$y_1 = y, \quad y_2 = y'_1, \quad y_3 = y'_2, \quad \dots, \quad y_n = y'_{n-1} \quad (5)$$

se rovnice (3) převede na soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_n' &= f(x) - a_1(x)y_n - \dots - a_n(x)y_1, \end{aligned} \quad (6)$$

---

<sup>1</sup> $C^n(J)$  rozumíme prostor všech spojitých funkcí, které mají spojitě derivace až do řádu  $n$  na intervalu  $J$

a počáteční podmínky budou mít tvar

$$y_1(x_0) = \xi_0, y_2(x_0) = \xi_1, \dots, y_n(x_0) = \xi_{n-1}. \quad (7)$$

Soustavu rovnic (6) pro zpřehlednění budeme psát v maticovém zápisu

$$y'(x) = A(x)y + b(x), \quad (8)$$

kde

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \dots & -a_1(x) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$b(x) = (0, \dots, 0, f(x))^T. \quad (10)$$

**Věta 1.1.** *Je-li  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  řešením (6), pak složka  $y_1$  je řešením (1) a naopak, je-li  $y_1$  řešením (1), pak  $y = (y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})$  je řešením (6).*

V následujících kapitolách 1.1 - 1.3, se budeme zabývat soustavami diferenciálních rovnic, protože, jak jsme si ukázali, je lineární diferenciální rovnice speciálním případem soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu.

## 1.1 Existence a jednoznačnost řešení

Jednou z prvních otázek při řešení rovnice, resp. soustavy rovnic, je existence a jednoznačnost řešení.

**Věta 1.2.** *Nechť je maticová funkce  $A(x)$  a vektorová funkce  $b(x)$  spojitá na intervalu  $I$ . Pak je  $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$  řešením rovnice (8) s vektorem počátečních podmínek (7) právě tehdy, když na  $I$  platí*

$$y(x) = \xi + \int_{x_0}^x (A(s)y(s) + b(s)) ds.$$

Důkaz tohoto tvrzení je triviální.

### Věta 1.3. (O existenci a jednoznačnosti)

Nechť je maticová funkce  $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$  a vektorová funkce  $b(x) = (b_i(x))_{i=1}^n$  spojitá na  $I$ . Pak má rovnice (8) s počátečními podmínkami (7) právě jedno řešení definované na celém  $I$ . Hledané řešení je limitou posloupnosti postupných aproximací

$$y_{k+1}(x) = \xi + \int_{x_0}^x (A(s)y_k(s) + b(s))ds, \quad x \in I$$

kde  $y_0(x) = 0$ .

**Důkaz:** str. 21 [1]

□

## 1.2 Homogenní rovnice

V této kapitole si zavedeme pojem lineárně závislých a nezávislých řešení rovnice (2) a pojem fundamentálního systému.

Označíme-li  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)^T$ , pak homogenní rovnici (2) můžeme přepsat pomocí substituce (5) do tvaru

$$y' = A(x)y, \quad (11)$$

kde matice  $A$  je tvaru (9). Odpovídající maticová rovnice

$$Y' = A(x)Y \quad (12)$$

má řešení tvaru

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

kde funkce  $y_k(x) = (y_{1k}(x), y_{2k}(x), \dots, y_{nk}(x))$  pro  $k = 1, \dots, n$  jsou řešením rovnice (11).

### 1.2.1 Lineární závislost řešení a fundamentální množina

V této kapitole zadefinujeme pojem lineární nezávislosti řešení a fundamentální množiny.



**Definice 1.1.** Řešení  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$  jsou lineárně nezávislá právě tehdy, když jsou vektory

$$\begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_{1k}(x) \\ y_{2k}(x) \\ \vdots \\ y_{nk}(x) \end{pmatrix}$$

lineárně nezávislé pro každé  $x \in J$ .

Pro ověření lineární nezávislosti řešení  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  zdefinujeme funkci

$$W(x) = \det Y(x),$$

která se nazývá wronskián funkcí  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , kde  $Y(x)$  je tvaru (13).

**Věta 1.4.** *Nechť  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  jsou řešení (11). Pak jsou lineárně nezávislá právě tehdy, když je  $W(x) \neq 0$  pro každé  $x \in J$ .*

Protože funkce  $W(x)$  může být natolik složitá, že nejsme schopni nalézt nulové body této funkce, uvedeme si Jacobiho vzorec, z jehož důsledku vyplyne postačující podmínka pro nenulovost  $W(x)$ .

**Věta 1.5. (Jacobiho vzorec)**

*Nechť je  $Y$  řešení maticové rovnice  $Y' = A(x)Y$ , kde  $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ . Pak je*

$$\det Y(x) = \det Y(x_0) \exp \left( \int_{x_0}^x \operatorname{Tr} A(s) ds \right),$$

kde  $\operatorname{Tr} A(s) = a_{11}(s) + \dots + a_{nn}(s)$  je tzv. stopa matice  $A(s)$ .

**Důkaz:** Nechť  $y_j(x) = (y_{1j}(x), y_{2j}(x), \dots, y_{nj}(x))$  je řešení (11).

Pak  $y'_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(x)y_{kj}(x)$ . Označme

$$\begin{aligned} \det Y_l &= \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y'_{l1}(x) & \dots & y'_{ln}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{lk}y_{k1}(x) & \dots & \sum_{k=1}^n a_{lk}y_{kn}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ll}y_{l1}(x) & \dots & a_{ll}y_{ln}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} = a_{ll} \det Y. \end{aligned}$$

Nyní uijeme vzorec

$$(\det Y(x))' = \sum_{i=1}^n \det Y_i(x),$$

kde  $Y_i(x)$  vznikne z  $Y(x)$  tak, že zderivujeme  $i$ -tý řádek matice  $Y(x)$ . Po dosazení dostáváme, že

$$(\det Y)' = \sum_{l=1}^n a_{ll} \det Y$$

Při zavedení substituce  $z = \det Y$  dostáváme diferenciální rovnici  $z' = \text{Tr } A(x)z$ .

Tato rovnice má při počáteční podmínce  $z(x_0) = \det Y(x_0)$  řešení tvaru

$$z(x) = z(x_0) \exp \left( \int_{x_0}^x \text{Tr } A(s) ds \right)$$

Tím je důkaz hotov. □

**Důsledek 1.1.** *Wronskián  $W(x)$  je nenulový na intervalu  $I$ , právě tehdy když je  $W(x_0) \neq 0$  pro některý bod  $x_0 \in I$ .*

**Důsledek 1.2.** *Řešení  $y_1, \dots, y_n$  jsou lineárně nezávislá, právě tehdy když je  $W(x_0) \neq 0$  pro nějaké  $x_0 \in J$  (tj. pro každé  $x_0 \in J$ ).*

**Definice 1.2.** Matici  $Y(x)$  nazveme fundamentální maticí řešení rovnice (12), jestliže je tvořena lineárně nezávislými řešeními rovnice (12).

**Věta 1.6.** *Nechť  $Y(x)$  je fundamentální matice příslušící (12). Pak obecné řešení rovnice (12) je tvaru*

$$z(x) = Y(x)c$$

kde  $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ .

### 1.3 Nehomogenní diferenciální rovnice

Mějme nehomogenní diferenciální rovnici (3). Pomocí substituce (5) ji převedme do tvaru (8).

**Věta 1.7.** *Nechť  $y(x)$  je řešení (8) a nechť  $Y(x)$  je fundamentální řešení příslušné homogenní rovnice. Pak obecné řešení rovnice (8) je tvaru*

$$z(x) = Y(x)c + y(x), \tag{14}$$

kde  $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}$ .

**Důkaz:** Nechť  $y(x)$  je řešení (8) a nechť  $Y(x)$  je fundamentální řešení příslušné homogenní rovnice. Pak

$$\begin{aligned} z'(x) &= Y'(x)c + y'(x) = A(x)Y(x)c + A(x)y(x) + b(x) \\ &= A(x)(Y(x)c + y) + b(x) = A(x)z(x) + b(x). \end{aligned}$$

Mějme nyní řešení  $z(x)$  a dokažme, že existuje právě jedno  $c = (c_1, \dots, c_n)^T$  takové, že platí (14). Protože  $z(x) - y(x)$  je řešením homogenní rovnice, platí

$$z(x) - y(x) = Y(x)c.$$

Nechť  $z(x_0) = z_0$ , pak má předchozí rovnice právě jedno řešení, protože  $Y(x)$  je fundamentální matice, tj. její hodnost je právě  $n$ .  $\square$

### Věta 1.8. (Metoda variace konstant)

Nechť  $Y(x)$  je fundamentální matice rovnice (8). Pak funkce ve tvaru

$$y(x) = Y(x)c(x), \quad (15)$$

kde

$$c(x) = \int Y(s)^{-1}b(s)ds$$

je řešením rovnice (8).

**Důkaz:** Předpokládejme, že  $y(x) = Y(x)c(x)$  je řešením rovnice (8). Pak dosazením rovnice (15) do rovnice (8) dostáváme

$$Y(x)'c(x) + Y(x)c'(x) = A(x)Y(x)c(x) + b(x)$$

$$Y(x)c'(x) = b(x)$$

$$c'(x) = Y(x)^{-1}b(x)$$

$$c(x) = \int Y(x)^{-1}b(x)dx,$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

## 1.4 Diferenciální rovnice $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty

Lineární diferenciální rovnicí  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \dots + a_ny(x) = f(x), \quad (16)$$

kde  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Příslušnou homogenní rovnici k rovnici (16) rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \dots + a_ny(x) = 0. \quad (17)$$

### 1.4.1 Metody řešení homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Předpokládejme, že rovnice (17) má řešení ve tvaru  $\exp(\lambda x)$ . Po dosazení do (17) dostáváme, že

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n)\exp(\lambda x) = 0, \quad (18)$$

což je splněno právě tehdy když je  $\lambda$  kořenem funkce

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n. \quad (19)$$

Funkci (19) nazýváme charakteristický polynom příslušný rovnici (17).

**Věta 1.9.** *Nechť jsou  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  jednoduché kořeny polynomu  $p(\lambda)$ . Pak funkce  $\exp(\lambda_1 x), \exp(\lambda_2 x), \dots, \exp(\lambda_n x)$  tvoří fundamentální množinu řešení.*

**Důkaz:** Wronskián funkcí  $\exp(\lambda_1 x), \exp(\lambda_2 x), \dots, \exp(\lambda_n x)$  je tvaru

$$\begin{aligned} W &= \det \begin{vmatrix} \exp(\lambda_1 x) & \dots & \exp(\lambda_n x) \\ \lambda_1 \exp(\lambda_1 x) & \ddots & \lambda_n \exp(\lambda_n x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \exp(\lambda_1 x) & \dots & \lambda_n^{n-1} \exp(\lambda_n x) \end{vmatrix} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x\right) \det \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \ddots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{(*)}. \end{aligned}$$

Ten je nenulový, neboť hodnota determinantu (\*) (tzv. Vandermondeův determinant) je rovna součinu

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2) \cdots (\lambda_n - \lambda_2) \cdots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \neq 0.$$

□

**Věta 1.10.** *Nechť má funkce  $p(\lambda)$  kořeny  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  s násobnostmi  $m_1, \dots, m_k$  takových, že  $m_1 + \dots + m_k = n$ . Pak funkce  $\exp(\lambda_1 x), x \exp(\lambda_1 x), \dots, x^{m_1-1} \exp(\lambda_1 x), \dots, \exp(\lambda_k x), \dots, x^{m_k-1} \exp(\lambda_k x)$  tvoří fundamentální množinu řešení.*

**Důkaz:** str. 48 [1]

□

**Věta 1.11.** *Nechť má funkce  $p(\lambda)$  komplexní kořen  $a + ib$  (tj. také komplexně sdružený kořen  $a - ib$ ). Pak funkce  $\exp(ax) \sin(bx)$  a  $\exp(ax) \cos(bx)$  tvoří lineárně nezávislou množinu řešení.*

**Důkaz:** str. 49 [1]

□

### 1.4.2 Metody řešení nehomogenní rovnice

Jedna z metod pro nalezení jednoho řešení nehomogenní rovnice je metoda variace konstant, kterou jsme popsali ve větě (1.8). Řešíme soustavu

$$\begin{aligned} y_1(x)c_1'(x) &+ y_2(x)c_2'(x) &+ \dots &+ y_n(x)c_n'(x) &= &0 \\ y_1'(x)c_1'(x) &+ y_2'(x)c_2'(x) &+ \dots &+ y_n'(x)c_n'(x) &= &0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ y_1(x)^{(n-1)}c_1'(x) &+ y_2(x)^{(n-1)}c_2'(x) &+ \dots &+ y_n(x)^{(n-1)}c_n'(x) &= &f(x), \end{aligned} \quad (20)$$

kde  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  tvoří fundamentální množinu řešení rovnice (12). Ze soustavy (20) vypočteme  $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$ . Partikulární řešení rovnice (16) pak bude tvaru

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x).$$

**Poznámka 1.1.** Tato metoda ovšem funguje pouze za předpokladu, že je koeficient u  $y^{(n)}$  roven jedné. V opačném případě musíme v soustavě (20) nahradit v poslední rovnici funkci  $f(x)$  funkcí  $\frac{f(x)}{a_0}$ , kde  $a_0$  je koeficient u  $y^{(n)}$ .

Další metodou je tzv. metoda odhadu nebo také metoda neurčitých koeficientů. Tuto metodu lze použít pouze v případě lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a vychází ze tvaru funkce  $f(x)$ .

**Věta 1.12.** *Nechť je funkce  $f(x)$  tvaru*

$$e^{\alpha x}(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x), \quad (21)$$

kde  $P(x)$  je polynom stupně  $p$  a  $Q(x)$  je polynom stupně  $q$  a necht'  $\alpha + i\beta$  je  $m$ -násobným kořenem příslušného charakteristického polynomu. Pak partikulární řešení rovnice (16) je tvaru

$$y(x) = x^m e^{\alpha x}(K(x) \cos \beta x + L(x) \sin \beta x), \quad (22)$$

kde polynomy  $K(x), L(x)$  jsou stupně  $r = \max(p, q)$ .

Funkci (22) s neznámými konstantami v polynomech  $K(x)$  a  $L(x)$  dosadíme do rovnice (16) a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné  $x$ , resp.  $\sin(\beta x), \cos(\beta x)$ .

Následující dva příklady ukazují výhody a nevýhody jednotlivých metod.

**Příklad 1.1.** Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 4y' + 4y = \exp(2x) \cos(x). \quad (23)$$

Příslušná homogenní rovnice má tvar

$$y'' - 4y' + 4y = 0. \quad (24)$$

Charakteristický polynom příslušný rovnici (24) je tvaru

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

a

$$\lambda_{1,2} = 2$$

je jeho dvojnásobný kořen, tj.

$$y_1 = \exp(2x), \quad y_2 = x \exp(2x)$$

tvoří fundamentální množinu. Obecné řešení rovnice (24) je tedy tvaru

$$y = c_1 \exp(2x) + c_2 x \exp(2x).$$

(i) Metoda variace konstant

Partikulární řešení rovnice (23) nalezneme metodu variace konstant, tj. budeme řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x) \exp(2x) + c_2'(x) x \exp(2x) &= 0 \\ c_1'(x) 2 \exp(2x) + c_2'(x) (\exp(2x) + 2x \exp(2x)) &= \exp(2x) \cos(x). \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení

$$c_1'(x) = -x \cos(x), \quad c_2'(x) = \cos(x).$$

Po zintegrování funkcí  $c_1(x)$  a  $c_2(x)$  dostáváme, že

$$c_1(x) = -x \sin(x) - \cos(x), \quad c_2(x) = \sin(x). \quad (25)$$

Obecné řešení rovnice (23) je tedy tvaru

$$y = c_1 \exp(2x) + c_2 x \exp(2x) - \exp(2x) \cos(x), \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Metoda odhadu

Partikulární řešení nehomogenní rovnice budeme hledat vzhledem k větě (1.12) ve tvaru

$$y = x \exp(2x)(a \cos(x) + b \sin(x)). \quad (26)$$

Zderivováním vztahu (26) a dosazením do (23) dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} & \exp(2x)(4a \cos(x) - 4a \sin(x) - a \cos(x) + 4b \sin(x) + \\ & + 4b \cos(x) - b \sin(x) - 8a \cos(x) + 4a \sin(x) - 8b \sin(x) - \\ & - 4b \cos(x) + 4a \cos(x) + 4b \sin(x)) = \exp(2x) \cos(x). \end{aligned}$$

Nyní porovnáme koeficienty u  $\sin(x)$  a  $\cos(x)$ .

$$\begin{aligned} \cos(x) : & 4a - a + 4b - 8a - 4b + 4a = 1 \\ \sin(x) : & -4a + 4b - b + 4a - 8b + 4b = 0 \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení  $a = -1$  a  $b = 0$ . Obecné řešení rovnice (23) je tedy tvaru

$$y = c_1 \exp(2x) + c_2 x \exp(2x) - \exp(2x) \cos(x), \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 1.2.** Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 5y' + 6y = \exp(x). \quad (27)$$

Příslušná homogenní rovnice má tvar

$$y'' - 5y' + 6y = 0. \quad (28)$$

Charakteristický polynom příslušný rovnici (28) je tvaru

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

a

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$$

jsou jeho kořeny, tj.

$$y_1 = \exp(3x), \quad y_2 = \exp(2x)$$



tvoří fundamentální množinu. Obecné řešení rovnice (28) je tedy tvaru

$$y = c_1 \exp(3x) + c_2 \exp(2x).$$

(i) Metoda variace konstant

Partikulární řešení rovnice (27) nalezneme metodu variace konstant, tj. budeme řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x) \exp(3x) + c_2'(x) \exp(2x) &= 0 \\ c_1'(x) 3 \exp(3x) + c_2'(x) 2 \exp(2x) &= \exp(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Tato soustava má řešení

$$c_1'(x) = \exp(-2x), \quad c_2'(x) = -\exp(-x).$$

Po zintegrování funkcí  $c_1(x)$  a  $c_2(x)$  dostáváme, že

$$c_1(x) = -\frac{1}{2} \exp(-2x), \quad c_2(x) = \exp(-x). \quad (30)$$

Obecné řešení rovnice (27) je tedy tvaru

$$y = c_1 \exp(3x) + c_2 \exp(2x) + \frac{1}{2} \exp(x), \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Metoda odhadu

Partikulární řešení nehomogenní rovnice budeme hledat vzhledem k větě (1.12) ve tvaru

$$y = a \exp(x). \quad (31)$$

Zderivováním vztahu (26) a dosazením do (27) dostáváme rovnici

$$\exp(x)(a - 5a + 6a) = \exp(x).$$

Nyní porovnáme koeficienty u  $x^0$ .

$$x^0 : a - 5a + 6a = 1. \quad (32)$$

Tato rovnice má řešení  $a = \frac{1}{2}$ . Obecné řešení rovnice (27) je tedy tvaru

$$y = c_1 \exp(3x) + c_2 \exp(2x) + \frac{1}{2} \exp(x), \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

V příkladu 1.1 bylo vhodnější použít metodu variace konstant, protože funkce  $c_1'(x)$  a  $c_2'(x)$  bylo velice jednoduché integrovat. U metody odhadu jsem museli overit, zda  $\lambda = 3$  není kořenem charakteristické rovnice. U příkladu (1.2) byla situace opačná, metoda variace konstant zde byla „zdlouhavější“ oproti metodě odhadu. Metoda variace má výhodu v tom, že je univerzální, ovšem za cenu možné složité funkce  $c'(x)$ , která se „hůře“ integruje. Metoda odhadu má výhodu, že řešíme soustavu rovnic o  $k$  neznámých, avšak musíme znát tvar odhadované funkce. Z těchto důvodů nelze jednoznačně říci, která metoda je vhodnější.

Nyní si uvedme jeden příklad, kde pravá strana není ve speciálním tvaru.

**Příklad 1.3.** Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = \tan(x). \quad (33)$$

Příslušná homogenní rovnice má tvar

$$y'' + y = 0. \quad (34)$$

Charakteristický polynom příslušný rovnici (34) je tvaru

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

a

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

jsou jeho kořeny, tj.

$$y_1 = \cos(x), \quad y_2 = \sin(x)$$

tvoří fundamentální množinu. Obecné řešení rovnice (34) je tedy tvaru

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Partikulární řešení rovnice (27) nalezneme metodu variace konstant, tj. budeme řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos(x) + c_2'(x) \sin(x) &= 0 \\ -c_1'(x) \sin(x) + c_2'(x) \cos(x) &= \tan(x). \end{aligned} \quad (35)$$

Tato soustava má řešení

$$c_1'(x) = -\sin(x) \tan(x), \quad c_2'(x) = \sin(x).$$

Po zintegrování funkcí  $c_1(x)$  a  $c_2(x)$  dostáváme, že

$$c_1(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin(x) - 1}{\sin(x) + 1} \right|, \quad c_2(x) = -\cos(x). \quad (36)$$

Obecné řešení rovnice (27) je tedy tvaru

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x) \ln \left| \frac{\sin(x) - 1}{\sin(x) + 1} \right|, \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pro tuto kapitolu bylo čerpáno z [1], [2], [3].

## 2 Základy elektroniky

Tato kapitola obsahuje vybrané pojmy z elektroniky. Dále je zde popis tří elementárních součástí.

### 2.1 Základní pojmy

**Definice 2.1.** Elektrický náboj je základní vlastností elementárních částic hmoty, která je charakterizována silovými účinky.

**Definice 2.2.** Elektrickým polem rozumíme prostředí, ve kterém se projevují silové účinky elektrického náboje.

#### **Zákon 2.1. (Zákon o zachování elektrického náboje)**

*V izolované soustavě se celkový elektrický náboj zachovává.*

**Definice 2.3.** Elektrickým proudem rozumíme uspořádaný pohyb elektrického náboje v elektrickém poli.

Jednotkou proudu je ampér [A]. 1A rozumíme náboj o velikosti 1C, který projde libovolnou plochou za 1s.

**Definice 2.4.** Elektrickým napětím rozumíme rozdíl potencionálních energií působících na náboj.

Jednotkou napětí je volt [V]. 1V rozumíme práci o velikosti 1J, která je zapotřebí pro přemístění náboje o velikosti 1C.

### 2.2 Základní elektronické zákony a principy

Mezi základní elektronické vzorce patří Ohmův zákon, první a druhý Kirchhoffův zákon.

#### **Zákon 2.2. (Ohmův zákon)**

*Ohmův zákon je definován jako*

$$R = \frac{U}{I},$$

kde  $U$  je napětí na vodiči ve voltech  $[V]$ ,  $I$  je proud procházející vodičem v ampérech  $[A]$  a  $R$  je odpor vodiče v ohmech  $[\Omega]$ .

Druhá možnost zápisu Ohmova zákona je pomocí tzv. diferenciálního tvaru

$$j = \sigma E,$$

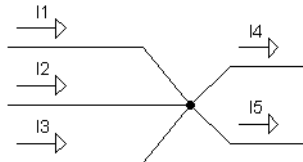
kde  $j$  je hustota elektrického proudu v ampérech na metr čtvereční  $[A/m^2]$ ,  $\sigma$  je měrná elektrická vodivost v siemensích na metr  $[S/m]$  a  $E$  je intenzita elektrického pole ve voltech na metr  $[V/m]$ . V praxi se ovšem diferenciální tvar Ohmova zákona používá velmi zřídka.

### Zákon 2.3. (První Kirchhoffův zákon)

*Součet všech proudů v uzlu se rovná nule.*

**Důsledek 2.1.** *Z prvního Kirchhoffova zákona a zákona o zachování elektrického náboje plyne, že proud v sérii je stejný.*

**Příklad 2.1.** Mějme proudový uzel zobrazený na obrázku 1.



Obrázek 1: Ukázkový příklad na užití prvního Kirchhoffova zákona.

Podle prvního Kirchhoffova zákona platí

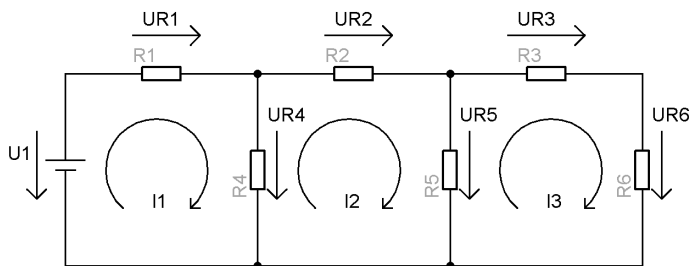
$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5.$$

### Zákon 2.4. (Druhý Kirchhoffův zákon)

*Součet všech napětí je v každém proudovém okruhu roven nule. Pro sestavení tzv. smyčkových rovnic se zvolí libovolná orientace šipky označující směr proudu ve smyčce. Všechna napětí a proudy, jejichž směr s danou orientací souhlasí, získají znaménko kladné, při směru opačném znaménko záporné. Má-li vypočtená hodnota proudu nebo napětí záporné znaménko, je její skutečný směr opačný ke zvolené orientaci.*

**Důsledek 2.2.** Z druhého Kirchhoffova zákona nám vyplývá, že napětí je paralelně stejné.

**Příklad 2.2.** Mějme obvod zobrazený na obrázku 2.



Obrázek 2: Ukázkový příklad na užití druhého Kirchhoffova zákona.

Užitím druhého Kirchhoffova zákona dostáváme pro jednotlivé smyčky následující rovnice

$$\begin{aligned} U_1 - U_{R1} - U_{R4} &= 0, \\ U_{R4} - U_{R2} - U_{R5} &= 0, \\ U_{R5} - U_{R3} - U_{R6} &= 0. \end{aligned}$$

## 2.3 Základní elektronické součástky a jejich vlastnosti.

### 2.3.1 Rezistor

Rezistor (nebo také odpor) je elektronická součástka, která má jistý ohmický odpor  $[\Omega]$ . Ideální rezistor je lineární, frekvenčně nezávislá (tj. odpor rezistoru nezávisí na frekvenci) součástka, která má konstantní odpor. Proud protékající rezistorem je dán Ohmovým zákonem. V reálném případě ovšem odpor rezistoru není konstantní, ale je závislý na několika faktorech. Jedním z nich je teplotní závislost. Teplotní závislost se dá vyjádřit vztahem

$$R_t = R_{20}(1 + \alpha\Delta t),$$

kde  $R_{20}$  je odpor při  $20^\circ$ ,  $\Delta t = (t - 20)$  je změna teploty a  $\alpha$  je teplotní koeficient v  $[K^{-1}]$ . Konstantu  $\alpha$  nalezneme v tabulkách pro daný kov, ze kterého je rezistor vyroben. Na rezistoru nedochází k fázovému posunutí napětí vůči proudu, tj. napětí roste a klesá ve stejný okamžik jako proud.



Obrázek 3: Evropská a americká schématická značka rezistoru.

V našem případě budeme používat evropské značení.

**Věta 2.1.** *Nechť je  $m$  rezistorů zapojených sériově. Pak výsledný odpor takto zapojených rezistorů je*

$$R_V = \sum_{i=1}^m R_i.$$

**Důkaz:** Z druhého Kirchhoffova zákona víme, že

$$U_{R_V} = \sum_{i=1}^m U_{R_i}.$$

Užitím Ohmova zákona a z důsledku prvního Kirchhoffova zákona dostaneme, že

$$IR_V = \sum_{i=1}^m IR_i,$$

$$R_V = \sum_{i=1}^m R_i.$$

□

**Věta 2.2.** *Nechť je  $m$  rezistorů zapojených paralelně. Pak výsledný odpor takto zapojených rezistorů je*

$$R_V = \left( \sum_{i=1}^m R_i^{-1} \right)^{-1}.$$

**Důkaz:** Z prvního Kirchhoffova zákona víme, že

$$I_{R_V} = \sum_{i=1}^m I_{R_i}.$$

Užitím Ohmova zákona a z důsledku druhého Kirchhoffova zákona nám vyplývá, že

$$\frac{U}{R_V} = \sum_{i=1}^m \frac{U}{R_i},$$
$$\frac{1}{R_V} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{R_i}.$$

□

### 2.3.2 Kondenzátor

Kondenzátor je elektronická součástka, která má schopnost kumulovat a posléze udržet elektrický náboj. V ideálním případě by tento náboj byl schopný kondenzátor udržet nekonečně dlouho, ale v reálném případě se jedná pouze o hodnoty v řádech sekund. Kondenzátor je tvořen dvěma vodivými destičkami, mezi kterými je umístěno dielektrikum (izolující prvek). Po připojení kondenzátoru na stejnosměrné napětí se na jednotlivých destičkách nakumuluje náboj  $+Q$  a  $-Q$ . Kondenzátor má tedy jistou kapacitu. Jednotka kapacity je  $1F$  (farad). Kapacitu kondenzátoru můžeme určit vztahem

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot S}{d},$$

kde  $\varepsilon_0$  je dielektrická konstanta vakua  $8.85 \cdot 10^{-12} [F/m]$ ,  $\varepsilon_r$  je relativní dielektrická konstanta použitého dielektrika,  $S$  je vzdálenost destiček od sebe  $[m]$ ,  $d$  je plocha destiček  $[m^2]$ . Vzhledem ke vztahu definujícímu kapacitu  $C$  je zřejmé, že kapacita v řádech faradů se v praxi velmi těžko realizuje a, proto se používají převážně jednotky  $\mu F$ ,  $nF$ ,  $pF$ . Proud procházející kondenzátorem je určen vztahem

$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}. \quad (37)$$



Pro stejnosměrné napětí se kondenzátor po nabití chová jako izolant (toto si dokážeme v další kapitole). Při průchodu střídavého proudu na kondenzátoru dochází k fázovému posunutí proudu vůči napětí o  $90^\circ$ , a to tak, že proud předbíhá napětí (v ideálním případě, v reálném případě je tento úhel menší). Kapacitní reaktance (někdy také označovaná jako kapacitní fázový odpor)  $X_C$  je definován pro střídavou složku jako

$$X_C = \frac{U}{I}$$

nebo také

$$X_C = \frac{1}{\omega C},$$

kde  $\omega$  je tzv. úhlový kmitočet ( $\omega = 2\pi f$ ),  $C$  je kapacita kondenzátoru.



Obrázek 4: Evropská a americká schématická značka kondenzátoru.

V našem případě budeme používat evropské značení.

**Věta 2.3.** *Nechť je  $m$  kondenzátorů zapojených seriově. Pak výsledná kapacita takto zapojených kondenzátorů je*

$$C_V = \left( \sum_{i=1}^m C_i^{-1} \right)^{-1}.$$

**Důkaz:** Z druhého Kirchhoffova zákona víme, že

$$U_V = \sum_{i=1}^m U_{C_i}.$$

Užitím Ohmova zákona a z důsledku prvního Kirchhoffova zákona nám vyplývá,

že

$$\begin{aligned}IX_{C_V} &= \sum_{i=1}^m IX_{C_i}, \\X_{C_V} &= \sum_{i=1}^m X_{C_i}, \\ \frac{1}{\omega C_V} &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega C_i}, \\ C_V &= \left( \sum_{i=1}^m C_i^{-1} \right)^{-1}.\end{aligned}$$

□

**Věta 2.4.** *Nechť je  $m$  kondenzátorů zapojených paralelně. Pak výsledná kapacita takto zapojených kondenzátorů je*

$$C_V = \sum_{i=1}^m C_i.$$

**Důkaz:** Z prvního Kirchhoffova zákona víme, že

$$I_{C_V} = \sum_{i=1}^m I_{C_i}.$$

Užitím Ohmova zákona a z důsledku druhého Kirchhoffova zákona nám vyplývá, že

$$\begin{aligned}\frac{U}{X_{C_V}} &= \sum_{i=1}^m \frac{U}{X_{C_i}}, \\ \frac{1}{X_{C_V}} &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{X_{C_i}}, \\ \omega C_V &= \sum_{i=1}^m \omega C_i, \\ C_V &= \sum_{i=1}^m C_i.\end{aligned}$$

□

### 2.3.3 Cívka

Konstrukčně je cívka pouze navinutý izolovaný vodič na jádře (jádro může být vzduchové, železné atd.). Cívka je elektronická součástka, která má schopnost při změně proudu indukovat napětí. Cívka se tedy vyznačuje jistou indukčností, kterou lze určit jako

$$L = \frac{\mu N^2}{l} S,$$

kde  $\mu$  je permeabilita prostředí,  $N$  je počet závitů cívky,  $l$  je délka cívky [m],  $S$  je obsah průřezu vodiče, ze kterého je cívka navinuta [m<sup>2</sup>]. Jednotkou kapacity je 1H (Henry). Zde je oproti kondenzátoru problém dosáhnout indukčnosti v řádech nH. Napětí na cívce lze určit jako

$$U(t) = L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (38)$$

Při průchodu střídavého proudu dochází k fázovému posunutí proudu vůči napětí, a to tak, že je proud zpožděn vůči napětí o 90° (opět se jedná pouze o ideální případ). Induktivní reaktance (někdy také označovaná jako induktivní jalový odpor)  $X_L$  lze určit pro střídavou složku jako

$$X_L = \frac{U}{I}$$

nebo také

$$X_L = \omega L,$$

kde  $\omega$  je tzv. úhlový kmitočet ( $\omega = 2\pi f$ ),  $L$  je indukčnost cívky.



Obrázek 5: Evropská a americká schématická značka cívky.

V našem případě budeme používat americké značení.

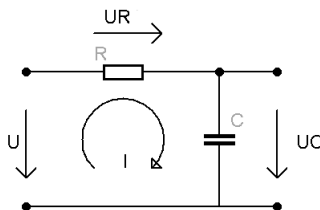
**Poznámka 2.1.** Seriové a paralelní zapojení cívky je totožné se sériovým a paralelním zapojením rezistoru. Důkazy se vedou obdobně.

Pro tuto kapitolu bylo čerpáno z [4], [5], [6], [7].

### 3 Odvozené příklady

#### 3.1 Integrační článek RC

Integračním článkem RC rozumíme rezistor  $R$  a kondenzátor  $C$  zapojený v sérii, kde výstupní napětí odebíráme na kondenzátoru  $C$ , viz. obrázek 6. Nyní se podívejme, jak se tento obvod bude chovat pro konstantní napětí  $U$ .



Obrázek 6: Integrační článek RC.

Rovnice popisující tento obvod má tvar

$$U_R(t) + U_C(t) = U,$$

kde  $U_R(t)$  je úbytek napětí na rezistoru a  $U_C$  je úbytek napětí na kondenzátoru. Na  $U_R$  aplikujeme Ohmův zákon (Zákon 2.2), tj.

$$IR + U_C(t) = U.$$

Poté pro proud  $I$  použijeme vztah (37), tj.

$$RCU'_C(t) + U_C(t) = U, \quad (39)$$

což je diferenciální rovnice prvního řádu. Nejprve vyřešme homogenní rovnici

$$RCU'_C(t) + U_C(t) = 0, \quad (40)$$

což je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Charakteristický polynom rovnice (40) má tvar

$$RC\lambda + 1 = 0.$$

Kořen této rovnice je  $\lambda = -\frac{1}{RC}$ , tj. obecné řešení rovnice (40) je tvaru

$$U_C(t) = c \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad (41)$$

kde  $c \in \mathbb{R}$ . Nyní se vraťme k rovnici (39). Partikulární řešení rovnice (40) budeme hledat metodou variace konstant, tj.

$$U_C(t) = c(t) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad (42)$$

$$U'_C(t) = c'(t) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - c(t) \frac{t}{RC} \exp\left(-\frac{1}{RC}\right). \quad (43)$$

Dosazením rovnic (42) a (43) do rovnice (39) dostáváme

$$U = RCc'(t) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (44)$$

Po vyjádření  $c'(t)$  a zintegrování podle  $t$  dostáváme, že

$$c(t) = U \exp\left(\frac{t}{RC}\right). \quad (45)$$

Dosazením (45) do (41) dostáváme, že

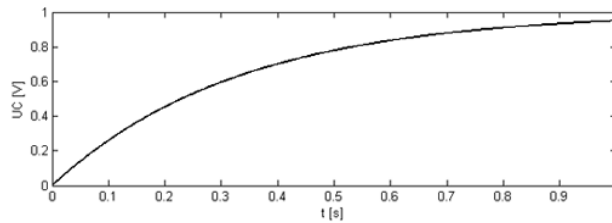
$$U_C(t) = U + c \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (46)$$

Toto je obecná rovnice pro integrační členek RC. Nyní se podívejme, jak se bude obvod chovat pro připojené nebo odpojené stejnosměrné napětí  $U$ .

(i) Nechť je napětí  $U$  připojené a kondenzátor  $C$  je vybitý. Této situaci odpovídá počáteční podmínka  $U_C(0) = 0$ . Po dosazení této počáteční podmínky do (46) dostáváme, že

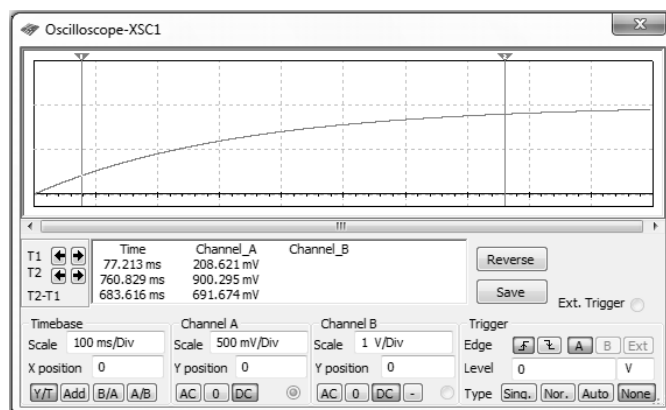
$$U_C(t) = U \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right). \quad (47)$$

Graf funkce (47) pro parametry  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 330\mu\text{F}$  a  $U = 1\text{V}$  představuje obrázek 12.



Obrázek 7: Graf nabíjení kondenzátoru.

Pro ověření, zda odvozená funkce opravdu reprezentuje napětí na kondenzátoru  $C$ , provedeme simulaci pomocí programu Multisim 10.1. Po sestavení obvodu s parametry součástek, které jsme zvolili pro vykreslení předchozího grafu naměříme pomocí osciloskopu průběh napětí, který reprezentuje obrázek 8. Porovnání naměřených a vypočítaných hodnot je uvedeno v tabulce.



Obrázek 8: Průběh napětí měřený osciloskopem.

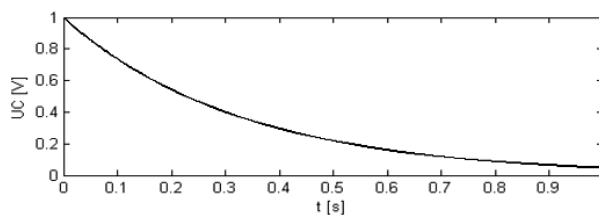
čas [s]	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
vypočítané $U_C$ [mV]	261	454	597	702	780	837	880	911	933	952
naměřené $U_C$ [mV]	261	453	596	703	780	838	880	911	934	951

(ii) Nechť je kondenzátor  $C$  nabit na napětí  $U$  a napětí  $U$  je odpojené. Této situaci odpovídá počáteční podmínka  $U_C(0) = U$ . Po dosazení této počáteční

podmínky do (46) dostáváme, že

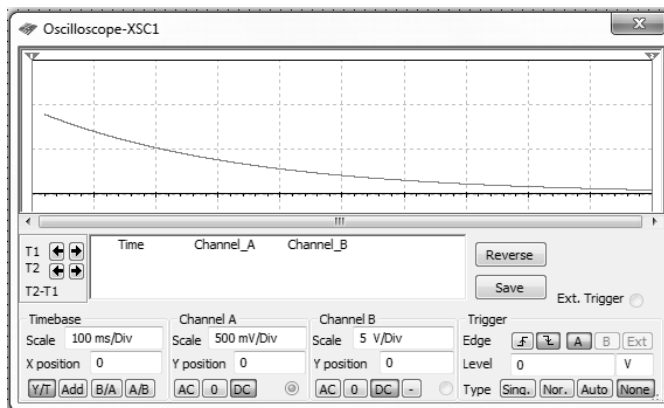
$$U_C(t) = U \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (48)$$

Graf funkce (48) pro parametry  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 330\mu\text{F}$  a  $U = 1\text{V}$  představuje obrázek (9).



Obrázek 9: Graf vybíjení kondenzátoru.

Pro ověření, zda odvozená funkce opravdu reprezentuje napětí na kondenzátoru  $C$  provedeme simulaci pomocí programu Multisim 10.1. Po sestavení obvodu s parametry součástek, které jsme zvolili pro vykreslení předchozího grafu naměříme pomocí osciloskopu průběh napětí, který reprezentuje obrázek 10. Porovnání



Obrázek 10: Průběh napětí měřený osciloskopem.

naměřených a vypočítaných hodnot je uvedeno v tabulce.

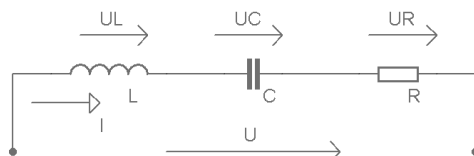
čas [s]	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
vypočítané $U_C$ [mV]	743	545	402	297	219	162	120	89	65	48
naměřené $U_C$ [mV]	740	543	401	295	220	159	118	87	65	47

Jak je vidět, můžeme vhodnou volbou kondenzátoru  $C$  a rezistoru  $R$  dosáhnout toho, že v námi požadovaný čas od připojení napětí  $U$  bude  $U_C$  rovno námi požadované hodnotě. Tento článek můžeme například vidět v realizaci astabilního klopného obvodu pomocí časovače 555, kde RC článkem nastavujeme frekvenci klopného obvodu.



### 3.2 Sériový RLC obvod

Sériovým RLC obvodem rozumíme obvod, kde jsou ideální rezistor, ideální kondenzátor a ideální cívka zapojeny do serie a nás bude zajímat proud procházející tímto obvodem, viz. obrázek 11.



Obrázek 11: Sériový RLC obvod.

Rovnice popisující tento obvod má tvar

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = U(t),$$

kde  $U_L(t)$  je úbytek napětí na cívce,  $U_R(t)$  je úbytek napětí na rezistoru a  $U_C(t)$  je úbytek napětí na kondenzátoru. Na  $U_L$  aplikujeme (38), na  $U_R$  aplikujeme Ohmův zákon, na  $U_C$  aplikujeme (37), tj. dostáváme rovnost

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t)dt = U(t) \quad \text{pro } t > 0.$$

Zderivováním podle času dostáváme rovnici

$$I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{1}{L}U'(t), \quad (49)$$

což je nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici

$$I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{LC}I(t) = 0. \quad (50)$$

Charakteristický polynom rovnice (50) je tvaru

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0.$$

Nyní se naskýtají tři možnosti.

(i) Necht' je  $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} < 0$ . Pak fundamentální množina řešení rovnice (50) je tvořena funkcemi

$$I_1(t) = c_1 \exp(at) \cos(bt), \quad I_2(t) = c_2 \exp(at) \sin(bt), \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kde

$$a = -\frac{R}{2L}, \quad b = \frac{\sqrt{-\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)}}{2}. \quad (51)$$

Nyní nalezneme obecné řešení rovnice (49), kde za  $U(t)$  pro demonstraci funkce obvodu zvolíme  $U(t) = \sin(\omega t)$ , kde  $\omega = 2\pi f$ , tj.  $U'(t) = \omega \cos(\omega t)$ . Partikulární řešení budeme hledat metodou odhadu. Řešení budeme hledat vzhledem k větě 1.12 ve tvaru

$$I(t) = c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t). \quad (52)$$

Dosazením rovnice (52) do rovnice (49) dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} -c\omega^2 \cos(\omega t) - d\omega^2 \sin(\omega t) - \frac{R}{L}c\omega \sin(\omega t) + \frac{R}{L}d\omega \cos(\omega t) + \\ + \frac{1}{LC}c \cos(\omega t) + \frac{1}{LC}d \sin(\omega t) = \frac{\omega}{L} \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u  $\cos(\omega t)$  a  $\sin(\omega t)$  dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) : -c\omega^2 + \frac{R}{L}d\omega + \frac{c}{LC} &= \frac{\omega}{L} \\ \sin(\omega t) : -d\omega^2 - \frac{R}{L}c\omega + \frac{d}{LC} &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení

$$\begin{aligned} c &= \frac{\omega C(\omega^4 L^2 C^2 + R^2 C^2 \omega^2 + 1 - 2\omega^2 LC) - R^2 C^3 \omega^3}{(1 - \omega^2 LC)(\omega^4 L^2 C^2 + R^2 C^2 \omega^2 + 1 - 2\omega^2 LC)} \\ d &= \frac{RC^2 \omega^2}{\omega^4 L^2 C^2 + R^2 C^2 \omega^2 + 1 - 2\omega^2 LC}. \end{aligned} \quad (53)$$

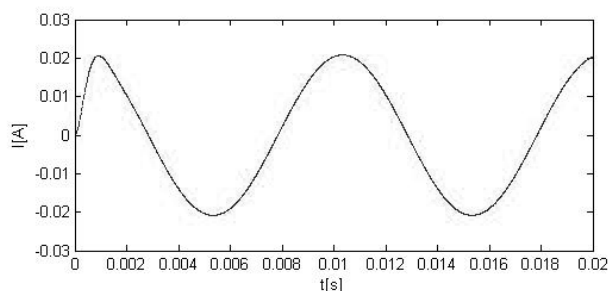
Obecné řešení rovnice (49) je tedy tvaru

$$I(t) = c_1 \exp(at) \cos(bt) + c_2 \exp(at) \sin(bt) + c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t),$$

kde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $a$  a  $b$  jsou definovány v (51),  $c$  a  $d$  jsou definovány v (53). Situaci, kdy do obvodu připojíme napětí  $U(t)$ , odpovídají počáteční podmínky  $I(0) = 0$ ,  $I'(0) = 0$ , tj. dostáváme partikulární řešení tvaru

$$I(t) = -c \exp(at) \cos(bt) + \frac{ac - \omega d}{b} \sin(bt) + c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t). \quad (54)$$

Graf funkce (54) pro parametry  $R = 10\text{k}\Omega$ ,  $L = 2\text{mH}$ ,  $C = 33\mu\text{F}$  a  $f = 100\text{Hz}$  představuje obrázek 12. Pro ověření zda odvozená funkce opravdu reprezentuje



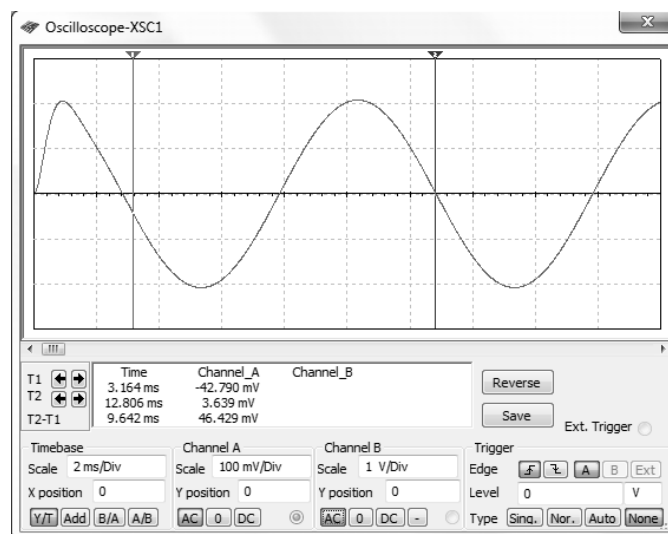
Obrázek 12: Proud RLC obvodem.

proud v RLC obvodu, provedeme simulaci pomocí programu Multisim 10.1. Tato simulace bude ovšem nepřímá, protože proud osciloskopem měřit nelze. Proto využijeme rezistor  $R$ , úbytek napětí  $U_R$  a Ohmův zákon. Po sestavení obvodu s parametry součástek, které jsme zvolili pro vykreslení předchozího grafu, naměříme pomocí osciloskopu průběh napětí  $U_R(t)$ , který reprezentuje obrázek 13. Porovnání naměřených a vypočítaných hodnot je uvedeno v tabulce.

čas [ms]	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
vypočítané $I$ [mA]	10	-14	-19	2	20	11	-14	-19	2.1	20
naměřené $I$ [mA]	10	-13	-19	2.4	20	10	-14	-19	2.2	20

(ii) Nechť je  $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = 0$ . Tento případ v reálném světě nemůže nikdy nastat, neboť nejsme schopni vyrobit součástku, která by měla přesně danou hodnotu. Proto si zde uvedme pouze to, jak by vypadala fundamentální množina řešení. Fundamentální množina řešení rovnice (50) je tvořena funkcemi

$$I_1(t) = c_1 \exp(at), \quad I_2(t) = c_2 t \exp(at), \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



Obrázek 13: Průběh napětí měřený osciloskopem.

kde  $a = -\frac{R}{2L}$ .

(iii) Necht' je  $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} > 0$ . Pak fundamentální množina řešení rovnice (50) je tvořena funkcemi

$$I_1(t) = c_1 \exp(at), \quad I_2(t) = c_2 \exp(bt), \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kde

$$a = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}, \quad b = \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}. \quad (55)$$

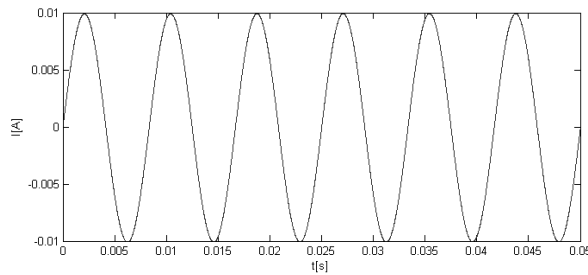
Partikulární řešení je totožné jako v případě i), tj. obecné řešení je tvaru

$$I(t) = c_1 \exp(at) + c_2 \exp(bt) + c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t),$$

kde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $a$  a  $b$  jsou definovány v (55),  $c$  a  $d$  jsou definovány v (53). Situaci, kdy do obvodu připojíme napětí  $U(t)$ , odpovídají počáteční podmínky  $I(0) = 0$ ,  $I'(0) = 0$ , tj. dostáváme partikulární řešení tvaru

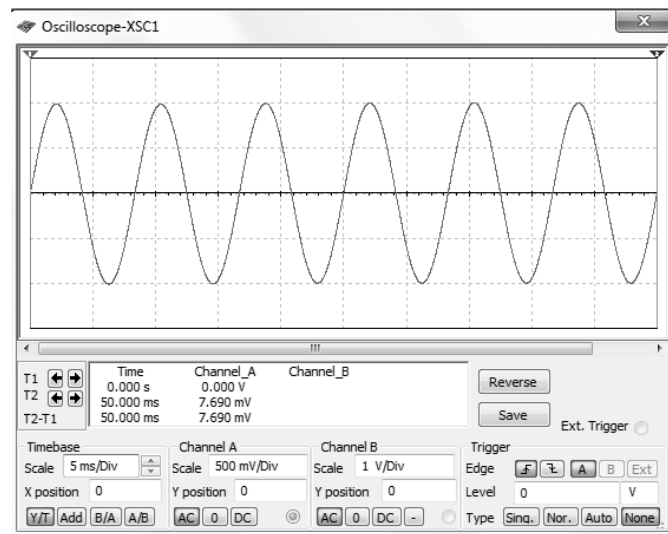
$$I(t) = \frac{d\omega - bc}{b - a} \exp(at) + \frac{ac - d\omega}{b - a} \exp(bt) + c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t). \quad (56)$$

Graf funkce (56) pro parametry  $R = 100\text{k}\Omega$ ,  $L = 0.6\text{mH}$ ,  $C = 1.3\mu\text{F}$  a  $f = 120\text{Hz}$  představuje obrázek 14. Pro ověření, zda odvozená funkce opravdu repre-



Obrázek 14: Proud RLC obvodem.

zentuje proud v RLC obvodu, provedeme simulaci pomocí programu Multisim 10.1. Tato simulace bude ovšem nepřímá, protože proud osciloskopem měřit nelze. Proto využijeme rezistor  $R$ , úbytek napětí  $U_R$  a Ohmův zákon. Po sestrojení obvodu s parametry součástek, které jsme zvolili pro vykreslení předchozího grafu, naměříme pomocí osciloskopu průběh napětí  $U_R(t)$ , který reprezentuje obrázek 15. Porovnání naměřených a vypočítaných hodnot je uvedeno v tabulce.



Obrázek 15: Průběh napětí měřený osciloskopem.

čas [ms]	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
vypočítané $I$ [mA]	-6	9,4	-9,6	5,8	-1,2	-5,9	-9,4	-9,6	5,6	-2
naměřené $I$ [mA]	-5	-9,6	-9,4	6	4	-6	9,6	9,1	5,8	7

Tento obvod se používá jako tzv. pásmová propust'. Pásmová propust' je obvod, kterým prochází maximální proud při určité frekvenci <sup>2</sup>, čím dále jsme od této frekvence, tím menší proud obvodem prochází. Připojíme-li tedy do tohoto obvodu například reproduktor, a součástky navolíme tak, aby proud protékající obvodem byl co největší pro nízké frekvence, získáme bassový reproduktor, tj. pro nízké tóny by reproduktor hrát hlasitěji nežli pro vysoké tóny.

Pro tuto kapitolu bylo čerpáno z [4], [5], [6], [7], [8].

---

<sup>2</sup>Tato frekvence je určena tzv. Thompsonovým vzorcem  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ .

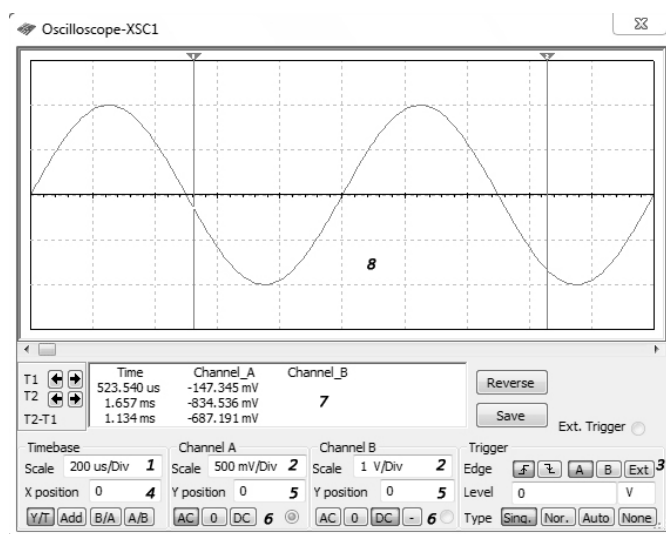
## Závěr

Toto téma jsem si vybral ze dvou důvodů. Prvním důvodem bylo to, že jsem studoval střední odbornou školu se zaměřením na elektroniku. Obvody zde popsané jsme probírali, avšak bez náznaku jejich odvození. Takto jsem měl možnost si poznatky ze střední školy ověřit. Druhou motivací bylo využití matematiky v praxi.

Cílem práce byla demonstrace aplikace matematiky v oblasti elektroniky, konkrétně v obvodech složených z rezistoru, kondenzátoru a cívky. První dvě kapitoly obsahují teoretické poznatky potřebné pro lepší pochopení kapitoly následující. V ní jsou tyto skutečnosti převedeny do praxe. Uvedené příklady dokazují funkčnost a případnou praktickou využitelnost obvodu. Nejtěžší částí práce bylo stanovení počátečních podmínek pro RLC obvod tak, aby dané výsledky bylo možné porovnávat se simulací. Ta prokázala, že obvod je funkční a prakticky využitelný. Dále se naskýtá možnost obohacení obvodů o další elektronické součástky, např. diody.

## Příloha

Osciloskop je měřicí přístroj, který je schopný zobrazovat až  $n$  průběhů napětí v reálném čase. Podle toho, kolik je osciloskop schopný zobrazit současně vstupních napětí, rozdělujeme osciloskopy na jednokanálové, dvoukanálové, čtyřkanálové a vícekanálové. Dále můžeme rozdělit osciloskopy na analogové a digitální. Pomocí osciloskopu jsme schopni určit například maximální napětí, průběh napětí v čase nebo frekvenci.



Obrázek 16: Popis osciloskopu.

Popis k obrázku 16.

1. časová základna - slouží k nastavení jednotky času na jeden horizontální dílek
2. napěťové nastavení - slouží k nastavení napětí na jeden vertikální dílek
3. nastavení vlastností zobrazovaného signálu (vzestupná hrana, sestupná hrana, atd.)
4. posunutí zobrazovaného napětí horizontálně o danou hodnotu
5. posunutí zobrazovaného napětí vertikálně o danou hodnotu



6. typ vstupního napětí pro daný kanál
7. hodnoty napětí v časech  $T1$  a  $T2$  pro jednotlivé kanály a k nim přidružené hodnoty zobrazené na obrazovce (dvě vertikální čáry na obrazovce)
8. obrazovka osciloskopu s rastrem jednotlivých dílků

## Seznam obrázků

1	Ukázkový příklad na užití prvního Kirchhoffova zákona. . . . .	20
2	Ukázkový příklad na užití druhého Kirchhoffova zákona. . . . .	21
3	Evropská a americká schématická značka rezistoru. . . . .	22
4	Evropská a americká schématická značka kondenzátoru. . . . .	24
5	Evropská a americká schématická značka cívky. . . . .	26
6	Integrační článek RC. . . . .	27
7	Graf nabíjení kondenzátoru. . . . .	29
8	Průběh napětí měřený osciloskopem. . . . .	29
9	Graf vybíjení kondenzátoru. . . . .	30
10	Průběh napětí měřený osciloskopem. . . . .	30
11	Sériový RLC obvod. . . . .	32
12	Proud RLC obvodem. . . . .	34
13	Průběh napětí měřený osciloskopem. . . . .	35
14	Proud RLC obvodem. . . . .	36
15	Průběh napětí měřený osciloskopem. . . . .	36
16	Popis osciloskopu. . . . .	39

## Literatura

- [1] Kalas J., Ráb M., *Obyčejné diferenciální rovnice*, 2. vydání, Brno : Masarykova univerzita v Brně, 2001
- [2] Ráb M., *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, 3. vydání, Brno : Masarykova univerzita v Brně, 2004
- [3] Greguš M., Švec M., Šeda V., *Obyčejné diferenciálne rovnice*, 1. vydání, Bratislava : Alfa, 1985
- [4] Láníček R., *Elektronika - obvody - součástky - děje*, 1. vydání, Praha : BEN - technická literatura, 2001
- [5] Dietmeier U., *Vzorce pro elektroniku*, 1. české vydání, Praha : BEN - technická literatura, 2004
- [6] Doleček J., *Moderní učebnice elektroniky - 1. díl*, Praha : BEN - technická literatura, 2005
- [7] Barták J., *Užití diferenciálních rovnic*, 1. vydání, Praha : SPN, 1984
- [8] Ohmův zákon [online], dostupné z: [http://cs.wikipedia.org/wiki/Ohm%C5%AFv\\_{z}%C3%A1kon](http://cs.wikipedia.org/wiki/Ohm%C5%AFv_{z}%C3%A1kon), [citováno 1. 4. 2012].