

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

MĚŘENÍ SETRVAČNÝCH CHARAKTERISTIK TĚLES PRO ÚČELY MATEMATICKÉHO MODELOVÁNÍ DYNAMIKY VOZIDEL

MEASUREMENT OF INERTIA PROPERTIES OF BODIES FOR THE PURPOSE
OF MATHEMATICAL MODELING OF VEHICLE DYNAMICS

DIPLOMOVÁ PRÁCE
DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

KAREL DVOŘÁK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. PETR PORTEŠ, Dr.

Abstrakt

Tato práce se zabývá návrhem metody, kterou lze měřit u součástí podvozků automobilů důležité mechanické veličiny – souřadnice polohy těžiště a tenzor momentů setrvačnosti, a to v případě, kdy inženýr nemá k dispozici počítačový model dané součásti. Práce problém rozděluje do několika dílčích podproblémů, přičemž u každého je navržen postup, jak jej lze s dostatečnou přesností a zároveň s přijatelnou náročností vyřešit. Byly zhotoveny potřebné pomůcky a bylo provedeno měření součástí. V závěru jsou porovnány změřené hodnoty s teoretickými a je odhadnuta přesnost, které lze touto metodou měření docílit.

Summary

The aim of the diploma thesis is to create a concept of methods that can be used for measurement of important mechanical inertia properties of bodies – the coordinates of center of gravity and the the moment of inertia tensor, in case we don't have 3D model of these bodies. The thesis divides this problem into several sub-problems and suggests the solutions for each of them. Required equipment was created and measurement was carried out. At the end the measured values are compared with the teoretical ones and accuracy of this method is determined.

Klíčová slova

dynamika, moment setrvačnosti, těžiště, Tritop, měření

Keywords

dynamics, moment of inertia, center of gravity, Tritop, measurement

DVOŘÁK, K. *Měření setrvačných charakteristik těles pro účely matematického modelování dynamiky vozidel*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojíního inženýrství, 2008. 77 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Petr Porteš, Dr.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně dle pokynů vedoucího diplomové práce a s použitím uvedené literatury.

Karel Dvořák

Chtěl bych na tomto místě poděkovat svému vedoucímu Ing. Petru Portěšovi, Dr. za vstřícnost, rady a cenné připomínky, které mi pomohly při zpracování této diplomové práce. Též bych chtěl poděkovat všem blízkým, kteří se mnou měli trpělivost a po celou dobu mě podporovali.

Karel Dvořák

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 3 |
| 2 | Definice hledaných veličin | 4 |
| 2.1 | Těžiště | 4 |
| 2.2 | Moment setrvačnosti | 4 |
| 3 | Přehled základních metod měření | 6 |
| 3.1 | Metody měření polohy těžiště | 6 |
| 3.1.1 | Vyvažovací metoda | 6 |
| 3.1.2 | Metoda několika vah | 7 |
| 3.1.3 | Metoda zavěšení tělesa | 7 |
| 3.1.4 | Metoda měření sil při rotaci | 8 |
| 3.1.5 | Metoda využívající měření momentu setrvačnosti | 8 |
| 3.2 | Metody měření momentů setrvačnosti | 8 |
| 3.2.1 | Metoda torzního kyvadla | 9 |
| 3.2.2 | Metoda kývání fyzikálního kyvadla | 11 |
| 3.2.3 | Metoda vícevláknových závěsů | 13 |
| 3.2.4 | Metoda rotace | 13 |
| 4 | Měření polohy těžiště | 14 |
| 4.1 | Základní principy fotogrammetrie | 14 |
| 4.2 | Fotogrammetrický systém Tritop | 15 |
| 4.3 | Formulace dílčích problémů a jejich řešení | 16 |
| 4.3.1 | Volba souřadného systému | 16 |
| 4.3.2 | Určení rovnice svislice | 16 |
| 4.3.3 | Výpočet polohy těžiště z rovnic přímek | 16 |
| 4.4 | Postup měření jednoho zavěšení systémem Tritop | 17 |
| 4.4.1 | Příprava měření | 17 |
| 4.4.2 | Fotografování zavěšené součásti | 19 |
| 4.4.3 | Zpracování výsledků v počítači | 20 |
| 4.5 | Popis funkce programu <i>Těžiště 2.0</i> | 21 |
| 4.6 | Odhad chyby měření polohy těžiště | 23 |
| 5 | Realizace měření polohy těžiště součástí popsanou metodou | 24 |
| 5.1 | Obdélníkový profil | 24 |
| 5.2 | Přední těhlice a ložisková skupina formule Ford | 25 |
| 5.3 | Zadní těhlice formule Ford | 27 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 6 | Celkové zhodnocení navržené metody měření polohy těžiště | 29 |
| 7 | Měření momentu setrvačnosti | 30 |
| 7.1 | Rozbor metody fyzikálního kyvadla | 30 |
| 7.2 | Analýza chyb měření | 32 |
| 7.3 | Návrh rámu umožňujícího kmitání vlastními kmity | 33 |
| 7.4 | Měření periody kyvu | 36 |
| 7.4.1 | Optická závora | 36 |
| 7.4.2 | Měření úhlové výchylky a prokládání sinusovkou | 38 |
| 7.4.3 | Průběh funkce $\tau = f(t)$ | 44 |
| 7.4.4 | Příčiny nekonstantního průběhu změřeného τ | 46 |
| 7.4.5 | Optimalizovaná metoda měření periody | 50 |
| 7.5 | Měření vzdálenosti těžiště od osy kývání | 53 |
| 7.5.1 | Vzdálenost těžiště rámu od osy kývání – l_r | 53 |
| 7.5.2 | Vzdálenost těžiště měřeného tělesa od osy kývání – l_t | 55 |
| 7.5.3 | Vzdálenost těžiště dvojice rám + měřené těleso od osy kývání – l_c | 56 |
| 7.5.4 | Odhad chyby měření vzdálenosti | 57 |
| 7.5.5 | Časová náročnost uvedeného postupu | 58 |
| 7.6 | Měření hmotnosti součástí | 59 |
| 8 | Ověření přesnosti metody měření momentu setrvačnosti | 60 |
| 8.1 | Měření momentu setrvačnosti ocelového kroužku | 60 |
| 8.2 | Měření momentu setrvačnosti ocelové koule | 62 |
| 9 | Výpočet tenzoru setrvačnosti z naměřených hodnot | 64 |
| 9.1 | Odvození vztahu pro výpočet složek tenzoru setrvačnosti | 64 |
| 9.2 | Postup měření a výpočtů | 66 |
| 9.3 | Odhad chyby při určování tenzoru setrvačnosti | 66 |
| 9.4 | Transformace tenzoru setrvačnosti | 67 |
| 10 | Realizace měření tenzoru setrvačnosti součástí | 69 |
| 11 | Zhodnocení metody měření momentu setrvačnosti | 72 |
| 11.1 | Koncepce měření | 72 |
| 11.2 | Měření periody kyvu | 72 |
| 11.3 | Měření vzdálenosti těžiště součástí od osy kývání | 73 |
| 11.4 | Výpočet tenzoru setrvačnosti | 73 |
| 12 | Shrnutí a závěr | 74 |
| | Seznam použité literatury a zdrojů | 75 |

1. Úvod

Počítače se za posledních několik desetiletí dokázaly prosadit prakticky ve všech oborech lidské činnosti. Svým vlivem výrazně změnily i automobilový průmysl – auto, které dnes sjede z výrobního pásu, je doslova *nabitě* integrovanými obvody, tranzistory a procesory. Počítače se prosadily i ve vývoji automobilů. Pomocí důmyslných programů může inženýr odhadnout, jak se bude auto chovat, ještě než bude vůbec vyrobeno.

I přes veškerou svou dokonalost však počítače pouze *modelují* realitu. Podle toho, jak *přesná* data počítači poskytneme, dostaneme obraz více či méně odpovídající skutečnosti. Bez dostatečně přesně zadaných vstupních dat počítač nemůže nikdy dospět ke smysluplným výsledkům; výpočty se vždy vztahují k údajům, které obdrží.

V mnoha případech má inženýr k dispozici přímo výrobní výkresy, případně i trojrozměrný model dané součásti. V takovém případě může počítač geometrické informace, které potřebuje, zjistit právě na základě tohoto modelu. Problém však nastává v okamžiku, kdy potřebujeme ve výpočtech použít těleso, u kterého jeho trojrozměrný model nemáme. V takovém případě musí přijít na řadu experimentální metody, kterými tyto veličiny zjistíme.

Pokud chceme analyzovat pohyb tělesa z hlediska dynamiky, potřebujeme znát především jeho důležité *mechanické veličiny*. A právě metodami, kterými lze u různých součástí automobilu zjišťovat mechanické veličiny potřebné pro počítačové modelování, se zabývá tato práce.

Těleso je z hlediska analýzy pohybových vlastností charakterizováno:

- polohou těžiště vůči definovanému souřadnému systému
- tenzorem momentů setrvačnosti
- hmotností

Simulačním programům stačí, aby o tělese znaly polohu těžiště, momenty setrvačnosti k hlavním osám a hmotnost – tyto veličiny dostatečně reprezentují těleso pro potřeby výpočtů vzájemného silového působení s okolím, kinetické energie tělesa apod. Pokud nemáme k dispozici počítačový model tělesa, odkud bychom mohli tyto veličiny dopočítat, musí přijít na řadu měření.

Tato práce si klade za cíl navrhnout metodu, kterou lze měřit polohu těžiště a momenty setrvačnosti (resp. tenzor setrvačnosti) tak, aby výsledky měření bylo možné využít v programech sloužících k matematickému modelování. Metoda by měla být optimalizována na měření součástí podvozků vozidel. Záměrem je zohlednit možnosti laboratoří Ústavu automobilního a dopravního inženýrství – zejména zjistit, zda lze pro daný záměr využít specializované vybavení (např. systém Tritop).

2. Definice hledaných veličin

2.1. Těžiště

Těžiště představuje charakteristický bod tělesa. Znalost jeho polohy je nezbytná pro většinu dalších výpočtů. V nehomogenním gravitačním poli se střed setrvačnosti nenachází v působišti gravitační síly (v těžišti). Gravitační pole Země však lze na naší rozlišovací úrovni pokládat za homogenní, a proto lze oba body ztotožnit – při výpočtech setrvačných sil translačního pohybu považujeme těleso za hmotný bod, u kterého se veškerá hmotnost nachází právě v těžišti.

Je to bod, jehož souřadnice jsou pro spojitě těleso definovány [10] jako:

$$\vec{\mathbf{r}}_t = \frac{\int \vec{\mathbf{r}} dm}{m} \quad (2.1)$$

kde m značí celkovou hmotnost tělesa a $\vec{\mathbf{r}}$ polohový vektor elementu dm .

2.2. Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti popisuje rozložení hmoty okolo osy otáčení a charakterizuje tak setrvačnost tělesa při rotaci. Pro případ, kdy známe osu otáčení, je moment setrvačnosti definován [13] jakožto integrál přes objem tělesa:

$$\mathbf{I} = \int \int \int r^2 \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (2.2)$$

kde r značí vzdálenost elementu od osy rotace a $\rho(x, y, z)$ jeho hustotu.

Pro rotační pohyb tělesa s obecnou osou otáčení lze setrvačné vlastnosti tělesa za rotace popsat [19] pomocí *tenzoru setrvačnosti*:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Pro jeho jednotlivé složky platí

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (x^2 + z^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} D_{xy} &= \int xy dm \\ D_{xz} &= \int xz dm \\ D_{yz} &= \int yz dm \end{aligned} \quad (2.5)$$

přičemž x , y a z představují souřadnice elementu vůči kartézskému souřadnému systému.

Složky tenzoru ležící na diagonále (rovnice 2.4) se nazývají [3] *momenty setrvačnosti k osám daného kartézského souřadného systému*. Ostatní složky tenzoru (rovnice 2.5) se nazývají *deviační momenty*. Pro každé těleso lze nalézt tři vzájemně kolmé osy (tzv. *hlavní osy*), vůči kterým má tenzor setrvačnosti nulové všechny deviační momenty – nenulové tak jsou pouze složky nacházející se na hlavní diagonále, které se v tomto případě nazývají *hlavní momenty setrvačnosti*. Tenzor setrvačnosti má potom takovýto tvar:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Hlavní momenty setrvačnosti plně určují tenzor setrvačnosti. Pro popis rotačních vlastností tělesa nám stačí znát pouze hlavní momenty setrvačnosti, orientaci hlavních os a polohu těžiště tělesa [22].

3. Přehled základních metod měření

Pro experimentální zjišťování polohy těžiště a určování momentů setrvačnosti existuje řada postupů. Každý z nich má své přednosti a nevýhody. Z obecného pohledu klademe na všechny metody několik základních požadavků. Především potřebujeme, aby jednotlivé postupy byly:

- dostatečně přesné
- přijatelně levné
- snadno proveditelné (rychlé, bez potřeby provádět složité výpočty apod.)

Všechny uváděné metody využívají určitých *projevů* dané veličiny – pomocí různých mechanismů převádíme hledané veličiny na jiné, které můžeme měřit přímo, případně z nich můžeme hledané hodnoty dopočítat.

3.1. Metody měření polohy těžiště

Metody, kterými lze zjišťovat polohu těžiště součásti, lze rozdělit do dvou skupin – na metody *statické* a *dynamické*. Dynamické metody, na rozdíl od statických, vyžadují, aby se těleso pohybovalo; z toho důvodu jsou považovány za méně přesné¹. Mezi statické metody patří vyvažovací metoda, metoda více vah a metoda zavěšení tělesa. Mezi dynamické potom metoda setrvačných sil a metoda využívající měření momentu setrvačnosti.

3.1.1. Vyvažovací metoda

Součást, u které chceme zjistit polohu těžiště, podepřeme na jedné straně tak, aby se těleso mohlo otáčet podél této podpěry – vznikne tak pevná osa otáčení, která omezuje pět ze šesti stupňů volnosti (viz obr. 3.1). Na druhé straně změříme sílu, kterou je nutné těleso udržovat ve vodorovné poloze. Těleso uvolníme (obr. 3.2²) a ze znalosti hmotnosti tělesa získáme rovnice momentové rovnováhy. Na základě této rovnice můžeme vypočítat vzdálenost polohy těžiště od osy otáčení:

$$\begin{aligned} F_m \cdot l - F_g \cdot x &= 0 \\ x &= \dots \end{aligned} \tag{3.1}$$

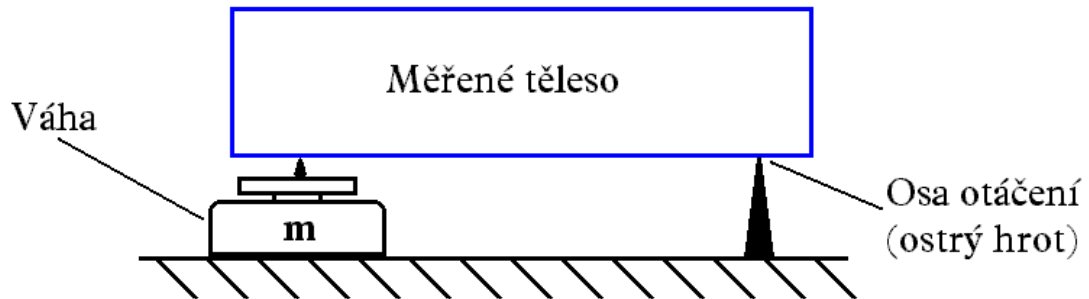
Jedno měření nám určí jednu rovinu, ve které se těžiště nachází. Měření proto provedeme pro tři různé polohy tělesa – polohu těžiště pak zjistíme jakožto průsečík tří rovin.

¹Přehled metod mj. čerpá z [7]

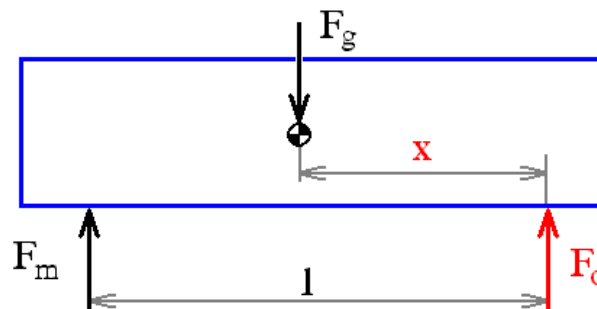
²Červeně jsou značeny veličiny, které neznáme, černě veličiny, které lze změřit či dopočítat.

3.1. METODY MĚŘENÍ POLOHY TĚŽIŠTĚ

Je zapotřebí minimalizovat tření v místě podepření tělesa. Těleso nejlépe podepřeme dvěma ostrými hroty, čímž vytvoříme požadovanou osu otáčení; v některých případech se používají speciální bezdotyková ložiska.



Obr. 3.1: Nákres vyvažovací metody



Obr. 3.2: Schéma uvolnění vyvažovací metody

3.1.2. Metoda několika vah

Tato metoda využívá podobného principu jako předchozí. Zkoumané těleso je ve třech bodech podepřeno váhami, případně ve dvou bodech váhami a v jednom bodě ostrým hrotem. Analogickými výpočty jako v případě rovnice 3.1 zjistíme dvě souřadnice těžiště jakožto průsečík dvou rovin.

Pro výpočet třetí souřadnice je nutné provést další měření – zkoumané těleso můžeme vhodným způsobem otočit nebo můžeme naklonit o určitý úhel celou měřící soustavu a ze znalosti silových poměrů a na základě nové silové rovnováhy dopočítat chybějící souřadnici.

3.1.3. Metoda zavěšení tělesa

Tato metoda nevyužívá žádné pevně dané osy otáčení a systémů vah. Zkoumané těleso je volně zavěšeno v jednom bodě – tak, aby byla umožněna rotace okolo vodorovných os.

Těleso se ustálí v poloze, ve které se jeho těžiště bude nacházet na svislici vedené z bodu zavěšení.

Takovéto měření provedeme nejméně dvakrát, přičemž pokaždé změním bod zavěšení tak, aby mělo těleso po ustálení jinou orientaci. Za těžiště považujeme bod, který se nachází v průsečíku přímk (svislic) vzniklých při jednotlivých zavěšeních.

Pro úchyt tělesa se nejčastěji používají nitě připevněné k různým konstrukčním prvkům tělesa. U těles některých tvarů lze použít i jiný postup: těleso nezavěšujeme *pod* určitý bod, ale naopak těleso podepřeme jen v jednom bodě a necháme ustálit v rovnovážné poloze – hledané těžiště se pak bude nacházet na svislici *nad* bodem podepření. Tento způsob však lze použít jen tehdy, pokud lze podporu (ostrý hrot) umístit tak, aby se nacházela nad těžištěm tělesa.

3.1.4. Metoda měření sil při rotaci

Zkoumané těleso je roztočeno okolo svislé osy, a to tak, aby předpokládaná poloha těžiště neležela na ose otáčení. Siloměry měří reakce, které toto otáčení vyvolává ve dvou ložiscích v různé výšce. Vzniklé síly způsobují dvě veličiny – posun polohy těžiště mimo osu otáčení a nevyváženost tělesa vůči této ose.

Reakce jsou měřeny za různých otáček. Analýzou záznamu naměřených sil z obou ložisek určíme, jak velká část reakce pochází ze které složky – složka způsobená posunutím osy rotace mimo těžiště se projeví v obou ložiscích se stejnou fází, projev složky způsobené nevyvážeností bude mít na každém ložisku fázi opačnou. Tato metoda je vhodná jen pro menší tělesa, která nepoškodí vzniklé odstředivé síly.

3.1.5. Metoda využívající měření momentu setrvačnosti

Zjistit polohu těžiště lze i prostřednictvím torzního kyvadla používaného pro zjišťování momentů setrvačnosti (viz dále). Pokud moment setrvačnosti změříme pro tři různé polohy tělesa, lze z naměřených hodnot zjistit souřadnice těžiště. Využívá se přitom vlastnosti momentu setrvačnosti, který je nejmenší, pokud osa otáčení prochází těžištěm.

3.2. Metody měření momentů setrvačnosti

Moment setrvačnosti je veličina charakterizující chování tělesa při rotaci – pro jeho měření proto neexistují statické metody, vždy musíme měřené těleso nechat rotovat. To lze v principu dvěma způsoby – těleso buď necháme rotovat okolo určité osy a následně měříme silové účinky vyvolané momentem setrvačnosti, nebo těleso necháme vhodným způsobem kývat a měříme projevy momentu setrvačnosti na tomto kyvadle. K základním postupům patří metoda torzního kyvadla, metoda fyzikálního kyvadla spolu s variantami vícevláknových závěsů a metoda rotace.

3.2.1. Metoda torzního kyvadla

Metoda je založena na měření periody vlastních kmitů torzního kyvadla. Zkoumané těleso pevně spojíme s torzním kyvadlem (tyčí, strunou či vhodným drátem), necháme je volně kmitat a měříme periodu vlastního kmitání.

Drát, který je vychýlený z rovnovážné polohy o úhel φ , působí proti deformaci momentem [11]:

$$M = -D \varphi \quad (3.2)$$

kde D je *direkční moment* torzního kyvadla (drátu) charakterizující dané torzní kyvadlo³. Závisí na délce krouceného vlákna, jeho poloměru a modulu pružnosti ve smyku materiálu, ze kterého je torzní kyvadlo vyrobeno⁴. Pohybová rovnice (netlumených) torzních kmitů má tvar:

$$I \alpha = -D \varphi \longrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{D}{I} \varphi = 0 \quad (3.3)$$

kde I představuje moment setrvačnosti vzhledem k ose torzního kmitání. Vztah 3.3 odpovídá diferenciální rovnici harmonického kmitání [13] ve tvaru

$$\ddot{q} + \frac{k}{m} q = 0 \quad (3.4)$$

Vlastní frekvence netlumeného kmitání torzního kyvadla Ω_0 je rovna

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (3.5)$$

Dosazením vztahu $\Omega_0 = 2\pi/T$, kde T je perioda vlastních kmitů torzního kyvadla, a úpravou dostáváme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (3.6)$$

Nyní můžeme vyjádřit vztah pro výpočet momentu setrvačnosti ze známé periody (netlumeného) kmitání:

$$I = T^2 \frac{D}{4\pi^2} \quad (3.7)$$

Pokud měříme periodu skutečného kyvadla, je nutné provést korekci na nulový útlum. Pohybová rovnice 3.3 neuvažuje tlumení, tedy předpokládá, že se veškerá energie kyvadla plynule mění z kinetické v potenciální a zpět. U skutečného kyvadla však dochází k disipaci energie vlivem vnitřního tření, vzdušného odporu a nedokonalé tuhosti součástí. V pohybové rovnici tlumeného kyvadla se obvykle předpokládá, že je tlumení přímo úměrné okamžité rychlosti [22]. Pohybová rovnice tlumeného kmitání potom vypadá:

$$\ddot{\varphi} + 2b \dot{\varphi} + \frac{D}{I} \varphi = 0 \quad (3.8)$$

³Vztah 3.2 platí, pokud není překročena mez úměrnosti (tzn. platí Hookův zákon).

⁴Direkční moment se obvykle zjišťuje experimentálně – použitím vztahů 3.7 a 3.12 a srovnáním s referenčním tělesem, u kterého je moment setrvačnosti známý např. z výpočtů.

3.2. METODY MĚŘENÍ MOMENTŮ SETRVAČNOSTI

kde b je součinitel útlumu; je považován za konstantu. Dále se zavádí veličina *logaritmický dekrement* ϑ :

$$\vartheta = b T_s = \ln \left(\frac{A_t}{A_{t+T_s}} \right) \quad (3.9)$$

kde A_t a A_{t+T_s} jsou dvě amplitudy tlumeného kmitání vzdálené o sebe o periodu tlumeného kmitání T_s .

Součinitel útlumu b lze vyjádřit z rovnice 3.9. Pro úhlovou frekvenci skutečného tlumeného kmitání se součinitelem útlumu b platí [22]:

$$\Omega_s = \sqrt{\Omega_0^2 - b^2} \quad (3.10)$$

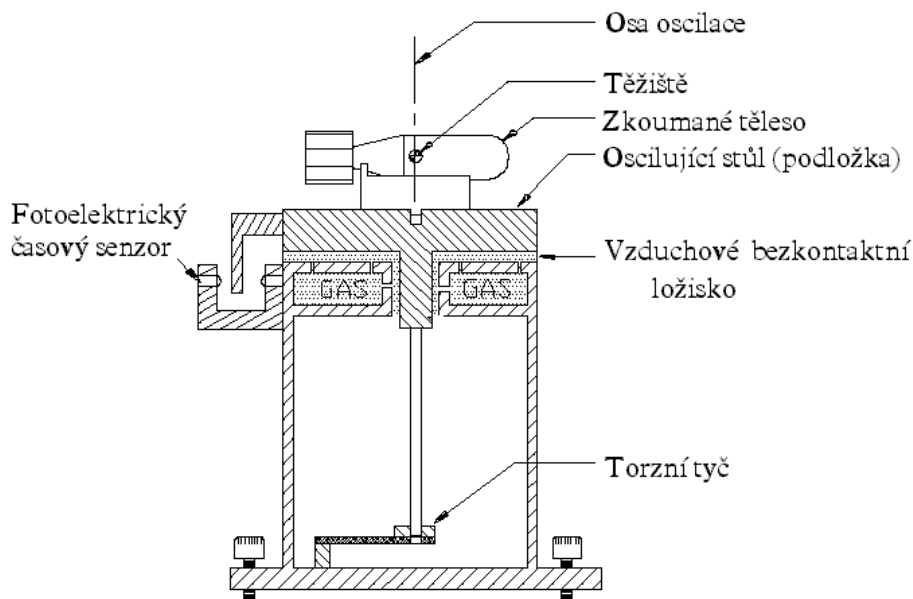
Odsud lze vyjádřit vztah pro výpočet periody odpovídající netlumenému vlastnímu kmitání, neboli vztah pro korekci periody kyvu na nulové tlumení:

$$T_0 = \sqrt{\frac{T_s^2 4\pi^2}{4\pi^2 + T_s^2 b^2}} \quad (3.11)$$

Při realizaci měření umístíme obvykle těleso tak, aby osa torzního kyvadla procházela těžištěm. Měříme periodu tlumeného kmitání T_s a součinitel útlumu b . Prostřednictvím vztahu 3.11 provedeme korekci a periodu netlumeného kmitání T_0 dosadíme do vztahu 3.7. Analogicky lze měřit moment setrvačnosti nikoli zavěšením samotného tělesa, ale umístěním tělesa na vhodný torzně kmitající rám. V takovém případě platí vztah:

$$I_c = I_r + I_t \quad (3.12)$$

kde I_c je moment setrvačnosti soustavy těleso + rám, I_r moment setrvačnosti rámu a I_t moment setrvačnosti měřeného tělesa. Firma Space Electronics k měření momentů setrvačnosti touto metodou používá [7] zvláštního zařízení (viz obr. 3.3). Součástí je zde

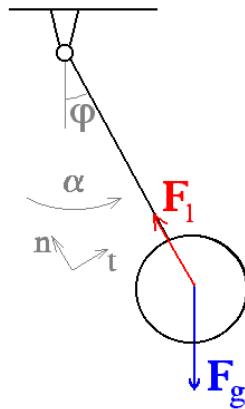


Obr. 3.3: Schéma měřiče momentu setrvačnosti firmy Space Electronics

umístěna na podložce, která osciluje spolu s tělesem. Periodu měří fotoelektrický časový senzor, bezkontaktní vzduchové ložisko minimalizuje tření a udržuje osu oscilace ve stálé poloze.

3.2.2. Metoda kývání fyzikálního kyvadla

Metoda je založena na podobném principu, těleso však neosciluje torzně, ale okolo vodorovné osy. Těleso kývajícím se okolo vodorovné osy díky vlastní tíze se nazývá *fyzikální kyvadlo*. Na obr. 3.4 jsou znázorněny síly, které na kyvadlo působí. Těleso uvolníme vůči osám ve směru normály a tečny pohybu.



Obr. 3.4: Odvození pohybových rovnic fyzikálního kyvadla

$$n : m a_n = F_l - F_g \cos \varphi \quad (3.13)$$

$$t : m a_t = -F_g \sin \varphi \quad (3.14)$$

$$M : I \alpha = -F_g \sin \varphi \cdot l \quad (3.15)$$

Po dosazení za F_g dostaneme [8] *pohybovou rovnici fyzikálního kyvadla*:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m g l}{I} \sin \varphi = 0 \quad (3.16)$$

kde I je moment setrvačnosti tělesa vůči ose kývání a φ okamžitá úhlová výchylka kyvadla. Jedná se o nelineární *obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu*, kterou musíme řešit numericky [9] – a toto řešení je poměrně náročné.

Řešení takovéto rovnice se proto obvykle udává pro malé hodnoty amplitudy kyvu, kdy lze kmitání považovat za harmonické. Protože platí

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) = 1 \quad (3.17)$$

pokládá se pro úhly $\varphi < 5^\circ$

$$\sin \varphi \doteq \varphi \quad (3.18)$$

V takovém případě rovnice 3.15 přejde na tvar

$$\ddot{\varphi} + \frac{m g l}{I} \varphi = 0 \quad (3.19)$$

Takovýto tvar je analogický k rovnici 3.3, přičemž i zde se zavádí pojem *direkční moment* $D = m g l$. Opět se jedná o rovnici netlumených harmonických kmitů (rovnice 3.4). Vlastní frekvence kmitání Ω_0 je rovna

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{m g l}{I}} \quad (3.20)$$

Pro periodu vlastního (netlumeného) kmitání T získáváme

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{m g l}} \quad (3.21)$$

kde m je hmotnost zkoumaného tělesa a l vzdálenost těžiště od osy otáčení. Úpravou pak dostaneme:

$$I = T^2 \frac{m g l}{4 \pi^2} \quad (3.22)$$

Vztah se používá pro úhly $\varphi < 5^\circ$. Analogicky se zavádí logaritmický dekrement a provádí se korekce na nulové tlumení jako v případě torzního kyvadla⁵:

$$T_0 = \sqrt{\frac{T_s^2 4\pi^2}{4\pi^2 + T_s^2 b^2}} \quad (3.23)$$

Ze změřené periody tlumeného kyvadla T_s a součinitele útlumu b spočítáme odpovídající periodu netlumeného kmitání T_0 , kterou dosadíme do vztahu 3.22. Diferenciální rovnice fyzikálního tlumeného kyvadla má tvar:

$$\ddot{\varphi} + 2b \dot{\varphi} + \frac{m g l}{I} \sin \varphi = 0 \quad (3.24)$$

resp. v případě uvažování zjednodušení $\sin \varphi \doteq \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + 2b \dot{\varphi} + \frac{m g l}{I} \varphi = 0 \quad (3.25)$$

Amplituda kyvu φ_m je tedy funkcí času. Ve skutečnosti není konstantní ani perioda kmitu T ; je funkcí právě amplitudy φ_m . Kmitání fyzikálního kyvadla není harmonické, za harmonické se obvykle považuje jen oblast pro malé amplitudy. Z limity 3.17 je vidět, že s klesající amplitudou φ_m pohybová rovnice fyzikálního kyvadla 3.16 přechází ve zjednodušený tvar 3.19, tzn. zvětšuje se přesnost zjednodušených vztahů. Můžeme proto psát

$$I = \lim_{\varphi_m \rightarrow 0} [T(\varphi_m)]^2 \frac{m g l}{4 \pi^2} \quad (3.26)$$

Při měření je proto nezbytné udržovat amplitudu kyvu pokud možno co nejmenší. Na druhou stranu tento požadavek činí obtížnějším měření periody.

⁵I u této redukce se předpokládá, že je součinitel útlumu konstantní – tento předpoklad bude dále rozebrán v kapitole 7.4.4.

3.2.3. Metoda vícevláknových závěsů

Tato metoda (resp. skupina metod) taktéž využívá kývání tělesa působením gravitace. Těleso je zavěšeno ve více než jednom bodě.

V případě dvouvláknového závěsu se stejnou délkou vláken těleso nevykonává rotační, ale pouze translační pohyb – trajektorií tvoří část kružnice. V pohybové rovnici proto nefiguruje člen $\sin \varphi$, který zapříčinil nelinearitu pohybové rovnice u fyzikálního kyvadla. Řešení je proto jednodušší. Obdobně se používají vícevláknové závěsy k torzním kmitům.

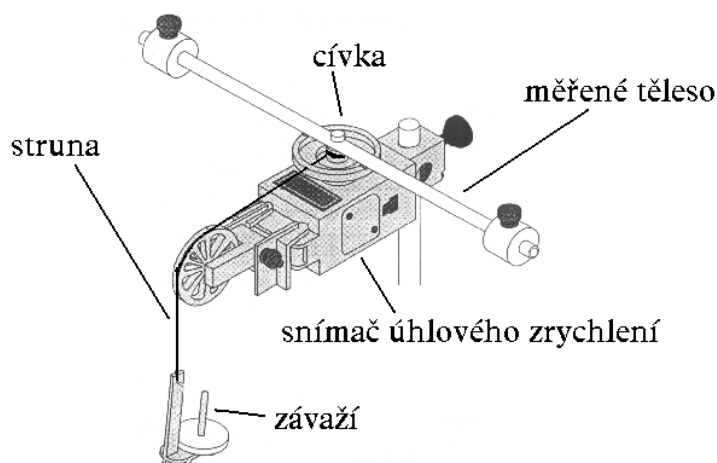
Obvykle u těchto metod bývá problematická praktická realizace. Je obtížné zajistit, aby těleso vykonávalo výhradně ten pohyb, který uvažujeme v pohybových rovnicích.

3.2.4. Metoda rotace

U této metody se měřené těleso nenechá kývat, ale roztáčí se působením konstantního momentu. Jako základ se užívá jednoduchá pohybová rovnice:

$$M_t = I\alpha \quad (3.27)$$

Možné uspořádání měření [1] ukazuje obrázek 3.5. Závaží hmotnosti m působí přes strunu na cívku na poloměru r a roztáčí tak měřené těleso (včetně případného rámu) konstantním momentem $M_t = mgr$. Je měřeno úhlové zrychlení α^6 . Ze vztahu 3.27 pak lze dopočítat moment setrvačnosti I vůči ose rotace. Vztah neuvažuje ztráty způsobené třením, vzdušným odporem atd., je proto nezbytné provádět korekce.



Obr. 3.5: Uspořádání měření metodou rotace.

⁶K měření zrychlení se používá například optická závora. Její princip je včetně ukázky popsán v kapitole 7.4.1

4. Měření polohy těžiště

Metoda zavěšení popsaná v kapitole 3.1.3 se potýká se zásadním problémem – je obtížné při každém zavěšení určovat souřadný systém, pokud je spojený s měřeným tělesem, případně zjišťovat polohu tělesa vůči souřadnému systému spojenému se zemí. Proto se při měření polohy těžiště součástí nejčastěji používá některá z metod, kde polohu těžiště určuje silová rovnováha (obr. 3.2). V této kapitole bude ukázáno, jak lze tento problém metody zavěšení vyřešit.

Měřit polohu tělesa lze kontaktně či bezkontaktně. Pokud však chceme těleso zavěsit v jednom bodě a měřit jeho polohu vůči svislici procházející bodem zavěšení, kontakt měřidla s takto zavěšeným tělesem znehodnotí požadovaný výsledek. Z tohoto důvodu je nezbytné použít takový způsob určení polohy, který polohu zavěšeného tělesa neovlivňuje. Bezkontaktním měřením polohy se zabývá obor *fotogrammetrie*.

4.1. Základní principy fotogrammetrie

*Fotogrammetrie*¹ je technika měření dvourozměrných či třírozměrných objektů, která využívá jako svůj základ fotografie². Měřený objekt je nejprve vhodným způsobem nafocen a posléze z tohoto souboru fotografií určitý algoritmus vypočítá polohu bodů tělesa, 3D mapu apod. Fotogrammetrie se používá zejména pro tvorbu topografických map, v technice se pomocí ní měří například deformace karoserie při crash testech. Za její hlavní přednosti lze považovat především vysokou *přesnost* a skutečnost, že se jedná o *bezkontaktní* metodu.

Fotogrammetrický systém se obvykle skládá z dvou klíčových prvků – kvalitního fotoaparátu a počítače s příslušným softwarem. Dále systém doplňují předměty přesných rozměrů sloužící ke kalibraci systému (*kalibrační tyče*), soubor referenčních bodů a další případné příslušenství.

Základní princip, kterého fotogrammetrie využívá, se nazývá *triangulace*. Samostatná fotografie obsahuje pouze dvourozměrnou informaci o měřeném objektu, proto je k měření nutné získat nejméně dvě fotografie z různých pozic. Systém z nich umí spočítat tzv. *paprsky* spojující body na objektu s fotoaparátem a následně i 3D souřadnice těchto bodů³. Systém zároveň potřebuje provést tzv. *resekci*, neboli zjistit přesnou polohu fotoaparátu a jeho orientaci v okamžiku focení. Z tohoto důvodu a kvůli redukci nepřesností se obvykle využívá více než dvou fotografií. Zpravidla se při výpočtech neuvažují rozměrové

¹Obecné informace o fotogrammetrii čerpají z [4] a [5].

²Principiálně se však může jednat i například o skeny apod.

³Jedná se o podobný princip, na jakém pracuje lidský zrak. Mozek z dvou různých pohledů ("fotografií" očí) dokáže určit nejen 2D rozměry, ale i vzdálenost předmětů.

jednotky. Systém proto potřebuje znát přesnou vzdálenost minimálně dvou bodů, které mu pomohou určit měřítko výpočtů; k tomu slouží kalibrační tyče známých rozměrů.

4.2. Fotogrammetrický systém Tritop

Fotogrammetrický systém *Tritop* vyvíjí firma GOM – Gesellschaft für Optische Messtechnik. Slouží k přesnému měření prostorových souřadnic bodů na objektu. Bude použit v této práci jako hlavní prostředek k určení polohy těžiště součástí.

Systém Tritop⁴ tvoří několik částí (viz obr. 4.1): digitální fotoaparát s pevnou ohniskovou vzdáleností, prstencový blesk, sada kódovaných referenčních bodů, sada nekódovaných referenčních bodů, certifikované kalibrační tyče a počítač s nainstalovaným softwarem, který provádí výpočty.

Samotné měření probíhá ve čtyřech základních krocích. Nejprve musíme těleso připravit k měření – označit je tzv. *nekódovanými referenčními body* a vhodně do jeho blízkosti umístit *kódované referenční body* a kalibrační tyče. Poté je nutné vyfotit dostatečné množství fotografií podle určitých pravidel, následně nafocená data převést do PC, které provede výpočty. Posledním krokem je postprocessing, tedy zpracování naměřených souřadnic podle potřeby. Typický postup práce popisuje kapitola 4.4.



Obr. 4.1: Systém Tritop. Počítač, fotoaparát s bleskem, kalibrační tyče, sady kódovaných a nekódovaných bodů, paměťové médium.

⁴Veškeré informace o systému Tritop čerpají z [27] a [28].

4.3. Formulace dílčích problémů a jejich řešení

Základní myšlenka je jednoduchá – potřebujeme několikrát zavěsit měřenou součást a pokaždé zjistit orientaci součásti a svislice procházející bodem zavěšení. Problematiku lze rozdělit do tří částí: potřebujeme **vhodně zvolit souřadný systém** a následně **popsat vzájemnou polohu součásti a svislice** z bodu zavěšení vůči tomuto souřadnému systému. Poté, co uskutečníme a změříme jednotlivá zavěšení, potřebujeme z rovnic jednotlivých svislic **vypočítat polohu těžiště**.

4.3.1. Volba souřadného systému

Jako nejvýhodnější se ukazuje spojit souřadný systém přímo s měřeným tělesem. Základní metoda, kterou používá Tritop pro definování souřadného systému, je tzv. *3-2-1 transformace*, u které zadáváme postupně tři, dva a jeden bod ležící ve třech rovinách tvořených osami. Často je nezbytné tyto body nejprve vytvořit – například u válcového tělesa prokládáním nalézt dva body ležící na jeho ose apod.

4.3.2. Určení rovnice svislice

Potřebujeme určit rovnici svislice, tedy rovnici přímky vedoucí ve směru působení gravitační síly a procházející bodem závěsu. Systém Tritop nabízí vedle měření polohy kódovaných a nekódovaných bodů i zjišťování polohy tzv. *features*. Umí nalézt např. ručně kreslenou čáru nebo hranu. Pro naše potřeby má význam možnost rozpoznat *Pipe or Contrast Line* – neboli "trubky" (a kontrastní čáry). Pokud těleso zavěsíme na dostatečně dlouhé vlákno (nit' nebo ohebný drát), bude mít toto vlákno svislý směr a přímka jím procházející bude procházet i hledaným těžištěm. Z pohledu Tritopu není vlákno ničím jiným než velmi tenkou trubkou, u které souřadnice polohy umí určit.

Každé těleso zavěsíme na nit' nebo dostatečně pevný a zároveň ohebný drát. Pomocí příkazu *Pipe or Contrast Line* Tritop toto vlákno rozpozná – vytvoří soubor mnoha bodů, které leží ve středech průřezů po celé délce nitě. Vzniklými body lze proložit přímkou, která odpovídá hledané svislici.

4.3.3. Výpočet polohy těžiště z rovnic přímek

Jako výsledek každého zavěšení tělesa dostaneme přímku – svislici procházející ve svislém směru bodem závěsu, resp. získáme dvojici bodů, které tuto svislici definují (viz dále). Všechny svislice by se teoreticky měly protínat v jednom bodě – těžišti. Stačily by nám tak jen svislice ze dvou zavěšení a polohu těžiště bychom určili jako průsečík různoběžek. Ve skutečnosti tomu tak však není – kvůli nepřesnostem měření se nejedná o různoběžky, ale o mimoběžky. Za těžiště proto označíme bod, který má od obou přímek nejmenší vzdálenost – takový bod bude ležet uprostřed *příčky* těchto mimoběžek.

4.4. POSTUP MĚŘENÍ JEDNOHO ZAVĚŠENÍ SYSTÉMEM TRITOP

Nechť mají parametrické rovnice přímek (svislic) tvary

$$P_1 = [A_x, A_y, A_z] + t_1 (s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}) \quad (4.1)$$

$$P_2 = [B_x, B_y, B_z] + t_2 (s_{2x}, s_{2y}, s_{2z}), \quad (4.2)$$

kde $A = (A_x, A_y, A_z)$ je souřadnice jednoho bodu dané přímky a (s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}) její směrnice a $B = (B_x, B_y, B_z)$ a (s_{2x}, s_{2y}, s_{2z}) totéž pro druhou svislici.

Potom bude mít příčka směrový vektor (s_{px}, s_{py}, s_{pz}) kolmý na obě přímky. Získáme jej vektorovým součinem směrových vektorů přímek:

$$(s_{px}, s_{py}, s_{pz}) = (s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}) \times (s_{2x}, s_{2y}, s_{2z}) \quad (4.3)$$

Příčka bude mít parametrický tvar

$$[A_x, A_y, A_z] + t_1 (s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}) = [B_x, B_y, B_z] + t_2 (s_{2x}, s_{2y}, s_{2z}) + t_p (s_{px}, s_{py}, s_{pz}) \quad (4.4)$$

Což je v podstatě soustava tří rovnic s neznámými parametry t_1 a t_2 a t_p . Řešením soustavy a dosazením parametrů t_1 a t_2 do rovnic 4.1 a 4.2 získáme dva krajní body příčky. Hledané těžiště, neboli bod ležící v nejmenší vzdálenosti od obou přímek, se bude nacházet ve středu mezi těmito body.

Pokud provedeme více než dvě zavěšení, bude každé dvojici přímek odpovídat jedna vypočtená *dílčí* poloha těžiště. Pro n zavěšení dostáváme $n \cdot (n - 1) / 2$ vypočtených dílčích poloh těžiště. Jako celkový výsledek označíme průměrnou hodnotu z těchto dílčích poloh.

Vzhledem k rozsáhlosti výpočtů, které je třeba provést před vypočtením polohy těžiště, byl vytvořen program *Těžiště 2.0* v programovacím jazyce Delphi. Podrobnosti o jeho funkci se nalézají v kapitole 4.5.

4.4. Postup měření jednoho zavěšení systémem Tritop

4.4.1. Příprava měření

Aby bylo možné měřenou součást vhodně zavěsit, byl vyroben výškově stavitelný stojan (obr. 4.2). Jako vlákno zavěšení lze zvolit např. černou reznou nit; pokud je těleso hmotnější, použijeme dostatečně pružný drát. Drát nesmí na sobě mít zlomy – pokud jej napneme, musí mít tvar přímky. Osvědčilo se použít obyčejnou kytarovou strunu; hodí se její kovové poutko na konci, díky kterému můžeme snadno vytvořit smyčku vhodnou k uchycení tělesa.

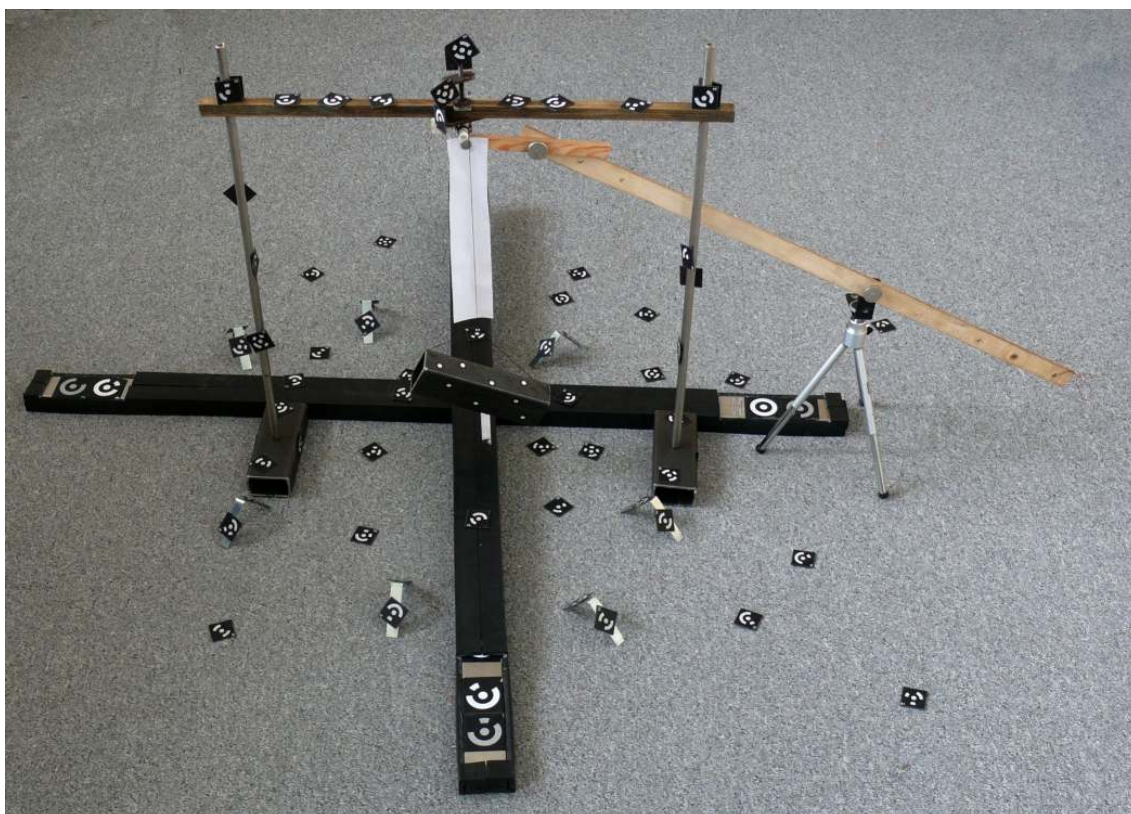
Samotnou součást následně označíme nekódovanými referenčními body. Důležité jsou především plochy, které budou později definovat souřadný systém (viz dále). U velmi malých předmětů by teoreticky mohla hmotnost těchto papírových nálepek ovlivnit i polohu těžiště tělesa. U součástí podvozků vozidel, na které se zaměřuje tato práce, však můžeme jejich vliv zanedbat.

4.4. POSTUP MĚŘENÍ JEDNOHO ZAVĚŠENÍ SYSTÉMEM TRITOP

Nyní těleso zavěšíme pomocí vlákna na stojan. Protože těleso takto budeme zavěšovat několikrát, je vhodné dodržovat určitá pravidla. Potřebujeme, aby jednotlivé svislice, které vzniknou jednotlivými zavěšeními, nebyly vzájemně rovnoběžné, resp. aby se úhel mezi libovolnou dvojicí pokud možno co nejvíce blížil 90° . Body na tělese, ve kterých těleso zavěšujeme, volíme s ohledem na tento požadavek.

V tomto okamžiku se pravděpodobně objeví další dílčí problém. Součást zavěšená na vláknech je velmi nestabilní, a to z hlediska rotace okolo svislice zavěšení. Systém Tritop vyžaduje, aby se poloha jednotlivých bodů během měření neměnila – volně zavěšené těleso však více či méně rotuje; a pokud se ustálí, stačí slabý proud vzduchu, aby se vychýlilo – což měření znemožní. Z toho důvodu potřebujeme jeden stupeň volnosti (rotaci okolo svislé osy) odebrat. Lze tak učinit zapřením tělesa o oporu spojenou se zemí, ovšem jen za podmínky, že tato opora zamezuje výhradně rotaci a nevychyluje součást z rovnovážné polohy. Opora by se měla tělesa dotýkat na pokud možno co největším rameni od svislice zavěšení. Možné řešení ukazuje obr. 4.2. Výsledky měření na součástech ukázaly, že případné zkreslení vzniklé touto oporou lze zanedbat.

Kromě toho je vhodné volit bod zavěšení tak, aby se nacházel pokud možno co nejdále od předpokládané polohy těžiště – pokud se nachází příliš blízko, je moment gravitační síly, který udržuje těleso v rovnovážné poloze, příliš malý a zavěšené těleso se



Obr. 4.2: Stojan, který slouží k zavěšení tělesa pro potřeby měření polohy těžiště součásti. Za vláknem (nití) je na flexibilním rameni upevněno bílé pozadí.



Obr. 4.3: Detail závěsu stojanu.

stane nestabilním, což způsobí obdobné problémy jako v předchozím případě. Vhodnou volbou bodu zavěšení lze tyto problémy omezit.

Dále potřebujeme zajistit takové podmínky, aby systém Tritop dokázal s dostatečnou přesností rozpoznat polohu vlákna. Tritop vlákno (resp. *Pipe or Contrast Line*) rozeznává na základě kontrastu oproti okolí. Vyžaduje, aby vlákno mělo černou barvu a pozadí bílou (nebo naopak). Samotné vlákno je tedy vhodné natřít na černou a v těsné blízkosti za ně umístit bílé pozadí. Jedno z možných řešení, jak toho docílit, ukazuje obr. 4.2; bílé pozadí – papír – je upevněn na rameni, které umožňuje měnit jeho polohu.

Nakonec je nezbytné rozmístit do okolí stojanu kalibrační tyče a kódované referenční body. Tritop potřebuje, aby se na každé fotografii nacházelo minimálně pět kódovaných bodů a zároveň aby se každý kódovaný bod nacházel nejméně na třech fotografiích [28]. Proto je třeba body rozmístit tak, aby se objevily na co nejvíce fotografiích a zároveň aby neexistoval pohled, ve kterém by jich byl nedostatek. Možné řešení zobrazuje obr. 4.2.

4.4.2. Fotografování zavěšené součásti

Při fotografování zavěšené součásti je nutné dodržovat pravidla uvedená v [27] a [28]. Nejprve provedeme kalibrační snímky – čtyři snímky otočené vždy o 90 stupňů. Poté vyfotíme sérii snímků stojanu i součásti. Pozornost se musí zaměřovat především na body, které budou definovat souřadný systém, a na vlákno zavěšení. Fotografie by měly měřený ob-

4.4. POSTUP MĚŘENÍ JEDNOHO ZAVĚŠENÍ SYSTÉMEM TRITOP

jekt pokud možno rovnoměrně obklopovat – výrobce doporučuje, aby fotografující měřený objekt obcházel a fotil snímky ve třech různých výškových rovinách.

V této práci bylo fotografováno digitální zrcadlovkou Fuji S2 Pro s objektivem Nikkor s pevnou ohniskovou vzdáleností $f = 24 \text{ mm}$ při citlivosti ISO 400, cloně 11 a času závěrky $1/125 \text{ s}$.

4.4.3. Zpracování výsledků v počítači

Zpracování fotografií probíhá v software dodávaném spolu se systémem Tritop⁵. Nejprve je nutné vytvořit nový projekt – definujeme použité kalibrační tyče, sadu kódovaných referenčních bodů a parametry použitého fotoaparátu. Poté, pokud kvalita nafocených fotografií dostačuje, na jejich základě Tritop vypočítá polohu jednotlivých referenčních bodů a zobrazí výsledek ve 3D pohledu.

V dalším kroku potřebujeme definovat souřadný systém. Obvykle použijeme již zmíněnou *3-2-1 transformaci*. Zde se postup pokaždé liší v závislosti na tvaru součásti a na tom, jak požadujeme zorientovat souřadný systém. Prostřednictvím nabídky *Primitives* a výběrem vhodných bodů vytvoříme na součásti potřebné body definující souřadný systém – potřebujeme tři body ležící v rovině tvořené osami x a y , dva body ležící v rovině tvořené osami x a z a jeden bod ležící v rovině tvořené osami y a z .

V nabídce *Operations – Transformations – 3-2-1 Transformation* tyto body vybereme a Tritop souřadný systém podle těchto bodů zorientuje. Jedná se o velmi důležitou část měření, ve které často dochází k chybě – je nezbytné ověřit, že ve všech zavěšeních souřadný systém definujeme stejně, v opačném případě dostaneme nesmyslné výsledky.

Dále je nutné zjistit polohu svislice. V nabídce *Features – Line – Pipe or Contrast Line* určíme, jaký druh čáry používáme (hodnotu *color* nastavíme na *black*). Vybereme fotografii, na které je vlákno dobře vidět a tažením označíme oblast, ve které se má Tritop snažit vlákno nalézt – vznikne tak dlouhý úzký obdélník. Potvrdíme stiskem pravého tlačítka myši. Vybereme jinou fotografii, na které je vlákno vidět pod jiným úhlem, a se stisknutou klávesou Ctrl označíme v druhé fotografii bod vlákna. Pokud kvalita fotografií dostačuje, Tritop vlákno rozpozná a proloží jím množství bodů.

V posledním kroku body vybereme⁶. V nabídce *Primitives – Lines* zvolíme možnost *Best Fit Line*, která nám těmito body proloží přímku – tato přímka odpovídá hledané svislici. Program *Těžiště 2.0* potřebuje znát souřadnice dvou (libovolných) bodů, které na této přímce leží. Body definujeme příkazem *Primitives – Points – Points from line*. Souřadnice těchto dvou bodů jsou souřadnice, které vkládáme do programu *Těžiště 2.0* jako body definující jednotlivá zavěšení.

⁵Pozn. Tato práce předkládá pouze základní postup měření – podrobný návod, jak s Tritopem pracovat, obsahuje [27] a [28]

⁶V obrázku stiskneme pravé tlačítko a volbu *Select area*, poté body ohraničíme čarou a potvrdíme pravým tlačítkem.

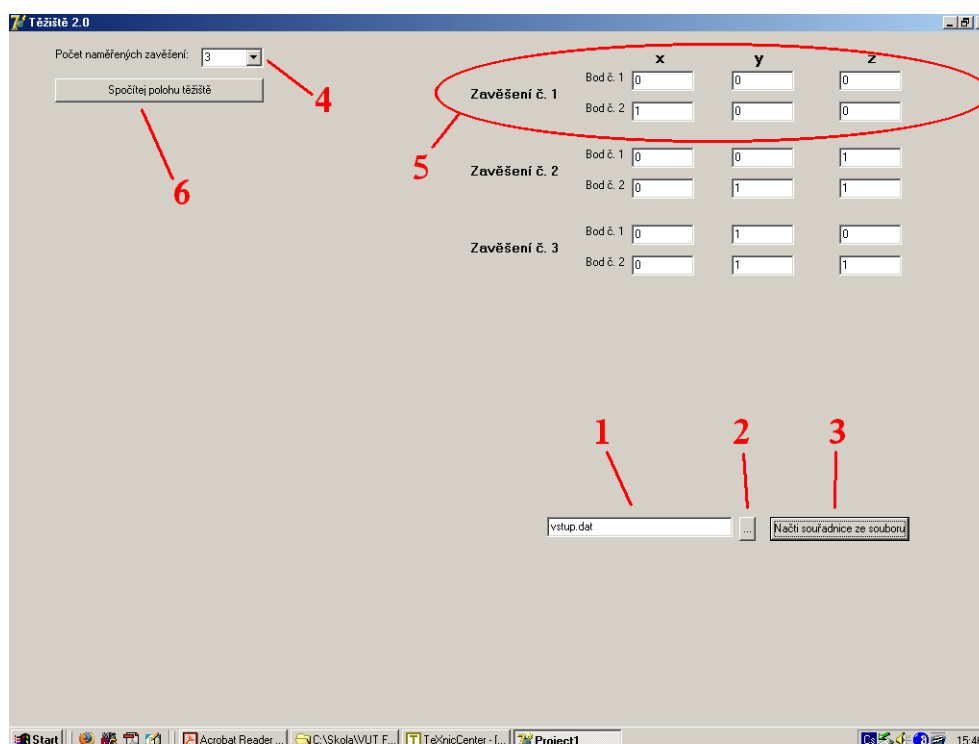
4.5. Popis funkce programu *Těžiště 2.0*

Součástí této diplomové práce je program *Těžiště 2.0* vytvořený v programovacím jazyce Borland Delphi. Slouží k výpočtu samotné polohy těžiště ze souřadnic bodů, které určují jednotlivé svislice zavěšení, zároveň umožňuje odhadnout chybu měření. Program se nachází na přiloženém CD, a to včetně zdrojových kódů.

Obrázek 4.4 ukazuje základní obrazovku programu. V rolovacím menu (pozice 4) se volí počet provedených zavěšení. V pravé části obrazovky se do jednotlivých políček (5) zadávají souřadnice dvojic bodů, které určují příslušné svislice zavěšení získané z Tritopu. Program pracuje bezrozměrově, tzn. výpočty provádí jen číselně, bez použití jednotek. Souřadnice lze zadávat přímo nebo načíst ze souboru, jehož adresa se zadává do pole 1. Po stisku tlačítka **Načti souřadnice ze souboru** – 3 program načte souřadnice bodů do příslušných polí. K výběru souboru lze využít tlačítko **Procházet** – 2. V okamžiku, kdy jsou všechna data správně zadána, zahájí výpočet stisk tlačítka **Spočítej polohu těžiště** – 6.

Postup, kterým program provádí výpočet, probíhá v těchto krocích:

1. Program do vhodných proměnných načte souřadnice bodů definujících jednotlivé svislice zavěšení (obr. 4.4, pozice 5).



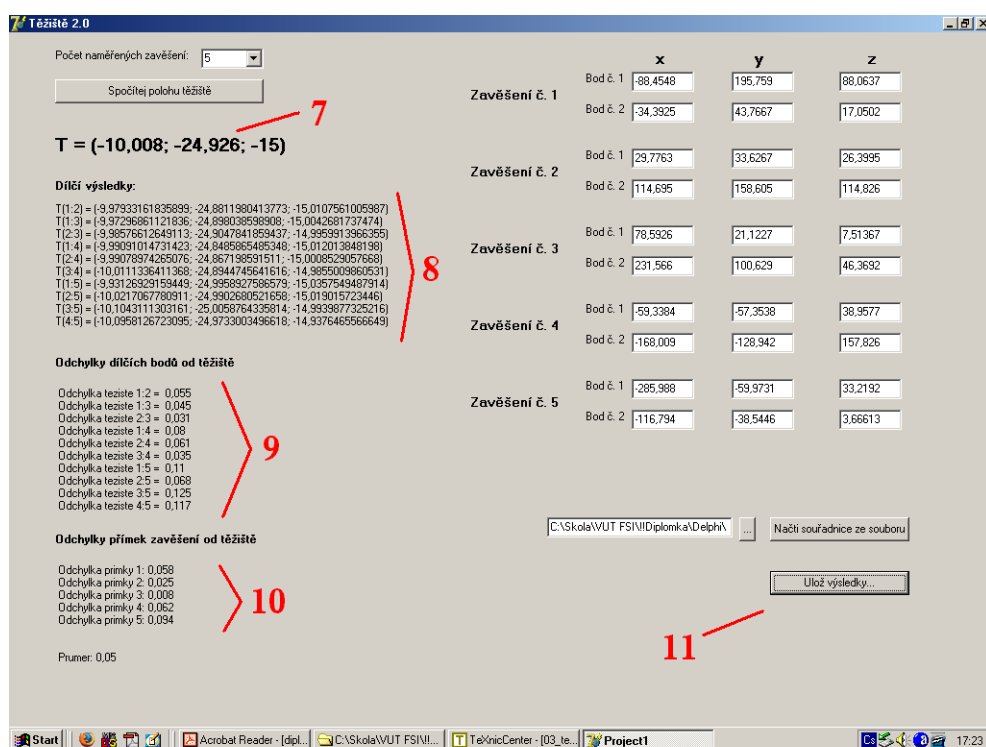
Obr. 4.4: Program *Těžiště 2.0* – zadávání vstupních dat.

- Na základě informace o počtu provedených zavěšení z rolovacího menu 4 program určí, kolika způsoby lze vytvořit dvojice z těchto svislic (a tedy kolik získáme dílčích poloh těžiště) a určí pořadí, ve kterém bude výpočet těchto dílčích poloh počítat⁷.
- Program ze vstupních dat určí rovnice svislic zavěšení ve tvaru

$$P_i = [A_{xi}, A_{yi}, A_{zi}] + t_i (B_{xi} - A_{xi}, B_{yi} - A_{yi}, B_{zi} - A_{zi}) \quad (4.5)$$

kde A_{xi} , A_{yi} , A_{zi} , B_{xi} , B_{yi} a B_{zi} jsou souřadnice bodů určujících svislici i-tého zavěšení z pole 5 a t_i je parametr této svislice. Jedná se o tvar odpovídající rovnicím 4.1 a 4.2.

- V pořadí určeném v bodě 2 program na základě vztahů 4.3 a 4.4 vypočítá pro každou dvojici svislic odpovídající polohu krajních bodů příčky a z ní i dílčí polohu těžiště.
- Výslednou polohu těžiště program spočítá jako průměr dílčích poloh těžišť získaných jednotlivými kombinacemi svislic zavěšení.
- Výsledky vypíše na obrazovku.



Obr. 4.5: Program *Těžiště 2.0* – výsledek výpočtů.

⁷Např. pokud jsme provedli tři zavěšení, máme tři způsoby, jak vytvořit dvojice svislic a získáme tak tři dílčí polohy těžiště. Program určí, že nejprve spočítáme "průsečík" 1. svislice s 2., poté 1. s 3. a nakonec 2. s 3. Podobně u čtyř zavěšení získáme 6 možných "průsečíků" – 1. s 2., 1. se 3., 2. se 3., 1. se 4., 2. se 4. a 3. se 4. U pěti zavěšení analogicky.

Na obrázku 4.5 je zobrazena výstupní obrazovka programu *Těžiště 2.0*. Na pozici **7** se zobrazí vypočtené souřadnice těžiště r_x , r_y a r_z . Následuje výpis mezivýsledků. Na pozici **8** program ukáže souřadnice vypočtených dílčích poloh těžišť; údaj v závorce říká, které kombinaci svislíc zavěšení odpovídá daná dílčí poloha těžiště. Program dále spočítá vzdálenost jednotlivých dílčích poloh těžišť od výsledné hodnoty a zobrazí je na pozici **9**. Vypočtené výsledky lze uložit do souboru po kliknutí na tlačítko **11**.

4.6. Odhad chyby měření polohy těžiště

Důležitou informaci ve výstupu programu *Těžiště 2.0* dává údaj na pozici **10**. Jedná se o vzdálenost jednotlivých svislíc zavěšení definovaných vstupními body od vypočtené polohy těžiště zobrazené na pozici **8**. Platí, že čím nižší čísla se zde objeví, tím přesnějších výsledků měření dosáhlo. Pro potřeby určení přesnosti, jaké jsme měřením dosáhli, je potřeba použít vztah pro *střední kvadratickou chybu vypočtené hodnoty* $\bar{\sigma}$ [21]:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2} \quad (4.6)$$

Hodnota $\bar{\sigma}$ určuje, s jakou přesností odpovídá vypočtená poloha skutečné poloze těžiště. Těžiště součástí se bude nacházet v prostoru tvaru koule – tzv. *koule přesnosti* se středem ve vypočtené poloze (r_x, r_y, r_z) a s poloměrem R_p . Hodnotu R_p zjistíme jako násobek střední kvadratické chyby a tzv. *studentova součinitele* k [23]:

$$R_p = k \cdot \bar{\sigma} \quad (4.7)$$

Koeficient k je určen pravděpodobností, s jakou požadujeme, aby se skutečná poloha těžiště nacházela uvnitř této koule, a počtem měření (resp. zavěšení). Typické hodnoty pro počet zavěšení n a požadovanou pravděpodobnost P ukazuje tabulka 4.1 [20]. Je vidět, že s rostoucím počtem zavěšení se poloměr koule přesnosti zmenšuje.

Uvedený postup odhadu chyby měření počítá se skutečností, že odchylky přímk zavěšení Δ_i mají *studentovo rozdělení*. Tento předpoklad není sám o sobě zaručen; pro potřeby této práce však takovýto postup odhadu přesnosti postačuje.

| n | P = 90 % | P = 95 % | P = 99 % |
|---|----------|----------|----------|
| 2 | 6,31 | 13,82 | 63,66 |
| 3 | 2,92 | 4,50 | 9,92 |
| 4 | 2,35 | 3,29 | 5,84 |
| 5 | 2,13 | 2,86 | 4,6 |

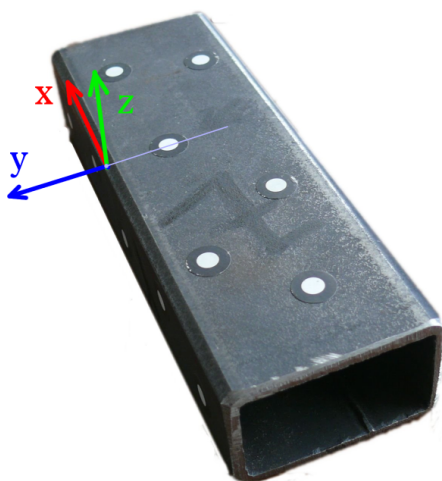
Tab. 4.1: Tabulka studentových součinitelů.

5. Realizace měření polohy těžiště součástí popsanou metodou

Bylo provedeno měření polohy těžiště popsanou metodou u několika součástí. V prvním kroku bylo potřeba ověřit přesnost metody – k tomu slouží součást **obdélníkový profil** v kapitole 5.1. Následuje ukázka aplikace této metody při měření polohy těžiště součástí podvozků automobilů, a to u **přední a zadní těhlice formule Ford** (kapitoly 5.2 a 5.3).

5.1. Obdélníkový profil

Pro měření, které mělo sloužit především k otestování použité metody, byl zvolen obdélníkový profil (obrázek 5.1). Souřadný systém byl definován prostřednictvím *3-2-1 transformace* dle obrázku.



Obr. 5.1: Měřený obdélníkový profil. Souřadný systém definuje horní rovina (označená písmenem Z), levá boční rovina a bod, kterým prochází záporná část osy y).

Bylo provedeno pět zavěšení. Podle postupu popsaného v kapitole 4.4 byly systémem Tritop získány souřadnice deseti bodů, které definují pět svislic vzniklých při pěti měřeních (tabulka 5.1).

Program *Těžiště 2.0* na základě dat naměřených systémem Tritop spočítá polohu těžiště. Vypočtené souřadnice polohy těžiště měřené součásti vůči souřadnému systému zobrazenému na obrázku 5.1 jsou rovny:

$$\begin{aligned} r_x &= -10,008 \text{ mm} \\ r_y &= -24,926 \text{ mm} \\ r_z &= -15,000 \text{ mm} \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.2. PŘEDNÍ TĚHLICE A LOŽISKOVÁ SKUPINA FORMULE FORD

| Číslo zavěšení | Bod | x/mm | y/mm | z/mm | Odchylka/mm |
|----------------|-------|----------|----------|---------|-------------|
| Zavěšení č. 1 | bod A | -88,4548 | 195,759 | 88,0637 | 0,058 |
| | bod B | -34,3025 | 43,7667 | 17,0502 | |
| Zavěšení č. 2 | bod A | 29,7763 | 33,6267 | 26,3995 | 0,025 |
| | bod B | 114,695 | 158,605 | 114,826 | |
| Zavěšení č. 3 | bod A | 78,5926 | 21,1227 | 7,5137 | 0,008 |
| | bod B | 231,566 | 100,629 | 46,3692 | |
| Zavěšení č. 4 | bod A | -59,3384 | -57,3538 | 38,9577 | 0,062 |
| | bod B | -168,009 | -128,942 | 157,826 | |
| Zavěšení č. 5 | bod A | -285,988 | -59,9731 | 33,2192 | 0,094 |
| | bod B | -116,794 | -38,5446 | 3,6661 | |

Tab. 5.1: Obdélníkový profil – souřadnice bodů naměřené systémem Tritop, které určují svislice vedené bodem zavěšení.

Vzdálenosti přímek zavěšení od vypočtené polohy těžiště se nacházejí v posledním sloupci tabulky 5.1. Z těchto hodnot byla na základě vztahu 4.6 spočítána střední kvadratická chyba $\bar{\sigma} = 0,029 \text{ mm}$. Prostřednictvím vztahu 4.7 lze stanovit poloměr koule, ve které se s danou pravděpodobností bude těžiště skutečně nacházet. Pro $P = 95 \%$ a $n = 5$ je $R_p = 2,86 \cdot \bar{\sigma} = 0,083 \text{ mm}$ a po zaokrouhlení směrem nahoru $R_p \doteq 0,09 \text{ mm}$.

Jednotlivé odchylky od vypočtené hodnoty se pohybují v řádu setin milimetru; stejně tak i střední kvadratická chyba a poloměr koule přesnosti R_p . Tloušťka obdélníkového profilu je 30 mm a šířka 50 mm (měřeno posuvným měřidlem). Teoreticky se těžiště nachází přesně uprostřed těchto vzdáleností¹; vypočtené hodnoty r_y a r_z se nacházejí velmi blízko teoretickému očekávání. Souřadnice osy x v tomto případě nelze uvažovat – bod, který definuje počátek osy x , je volen víceméně náhodně.

Vypočtená poloha těžiště tedy odpovídá teoretickým předpokladům a jednotlivé přímkové odchylky zavěšení jsou ve všech pěti případech velmi malé. Lze proto vyslovit závěr, že zvolená metoda není zatížena relevantní systematickou chybou.

5.2. Přední těhlice a ložisková skupina formule Ford

Dále byla měřena přední těhlice formule Ford. Souřadný systém byl zorientován pomocí ploch ležících na těhlici – viz obr. 5.2. Počátek souřadného systému leží v průsečíku rovin xy , xz a yz , osa y je kolmá na rovinu xz (tzn. je rovnoběžná s osou ložiska těhlice), směr osy z určuje průsečík rovin xz a yz .

Opět bylo provedeno pět zavěšení a prostřednictvím programu *Těžiště 2.0* byla určena poloha těžiště. Souřadnice bodů vzniklé při těchto zavěšení ukazují tabulka 5.2.

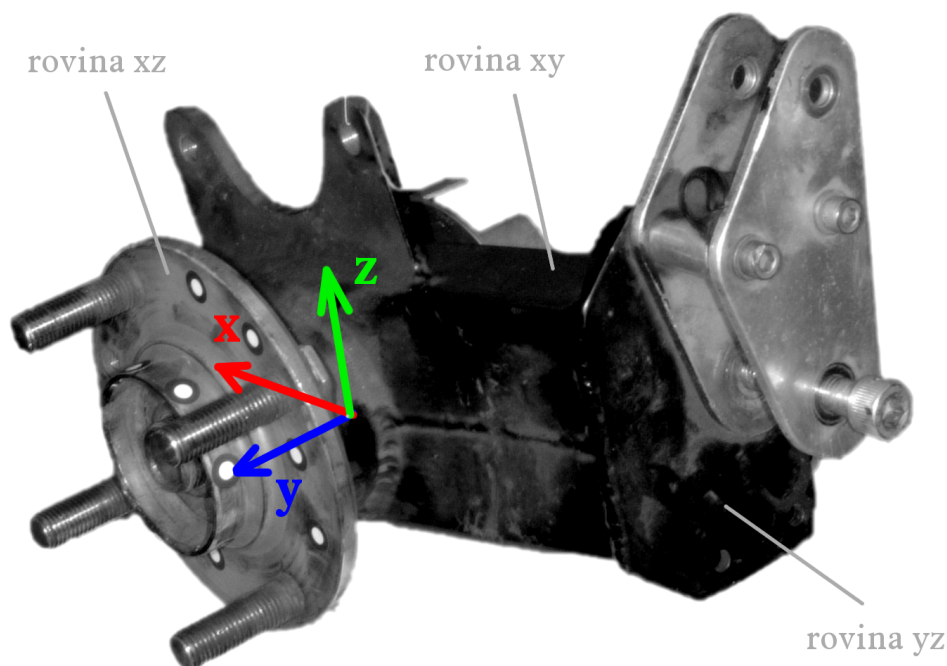
¹Pozn.: Ve skutečnosti to samozřejmě neplatí zcela přesně kvůli výrobním nedokonalostem – zejména švu na vnitřní straně profilu.

5.2. PŘEDNÍ TĚHLICE A LOŽISKOVÁ SKUPINA FORMULE FORD

Vypočtené souřadnice polohy těžiště jsou

$$\begin{aligned} r_x &= 96,993 \text{ mm} \\ r_y &= -43,456 \text{ mm} \\ r_z &= -35,534 \text{ mm} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Na základě přímkových odchylek Δ_i jednotlivých zavěšení (poslední sloupec v tabulce 5.2) byla spočítána střední kvadratická chyba $\bar{\sigma} = 0,087 \text{ mm}$ a z ní poloměr koule



Obr. 5.2: Přední těhlice formule Ford. Směr osy y určuje rovina xz , průsečík této roviny s rovinou yz určuje polohu osy z .

| Číslo zavěšení | Bod | x/mm | y/mm | z/mm | Odchylka/mm |
|----------------|-------|----------|----------|----------|-------------|
| Zavěšení č. 1 | bod A | 22,0658 | -58,096 | 296,121 | 0,034 |
| | bod B | 70,5929 | -48,6148 | 81,2242 | |
| Zavěšení č. 2 | bod A | -49,4364 | -129,171 | 73,7947 | 0,327 |
| | bod B | -137,797 | -180,911 | 139,539 | |
| Zavěšení č. 3 | bod A | 333,092 | -56,9237 | 187,916 | 0,112 |
| | bod B | 38,8545 | -40,0681 | -90,7257 | |
| Zavěšení č. 4 | bod A | 116,539 | -78,5437 | 320,105 | 0,022 |
| | bod B | 94,0753 | -38,1866 | -89,0333 | |
| Zavěšení č. 5 | bod A | -158,813 | 24,504 | -200,377 | 0,177 |
| | bod B | 46,8126 | -30,2298 | -67,9707 | |

Tab. 5.2: Těhlice formule Ford – souřadnice bodů naměřené systémem Tritop, které určují svislíce vedené bodem zavěšení.

přesnosti. Pro pravděpodobnost $P = 95 \%$ a počet zavěšení $n = 5$ je $R_p = 2,86 \cdot \bar{\sigma} = 0,248 \text{ mm}$ a po zaokrouhlení $R_p \doteq 0,25 \text{ mm}$.

Je vidět, že přímka číslo 2 má poměrně velkou odchylku; dvojnásobnou oproti další v pořadí. Pokud polohu těžiště spočítáme jen z přímek 1 a 3–5, získáme polohu těžiště:

$$\begin{aligned} r_x &= 96,931 \text{ mm} \\ r_y &= -43,462 \text{ mm} \\ r_z &= -35,724 \text{ mm} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Souřadnice bodů určujících jednotlivé přímky zůstanou stejné, změní se však jednotlivé přímkové odchylky:

| Δ_1 | Δ_3 | Δ_4 | Δ_5 |
|------------|------------|------------|------------|
| 0,07 | 0,066 | 0,073 | 0,105 |

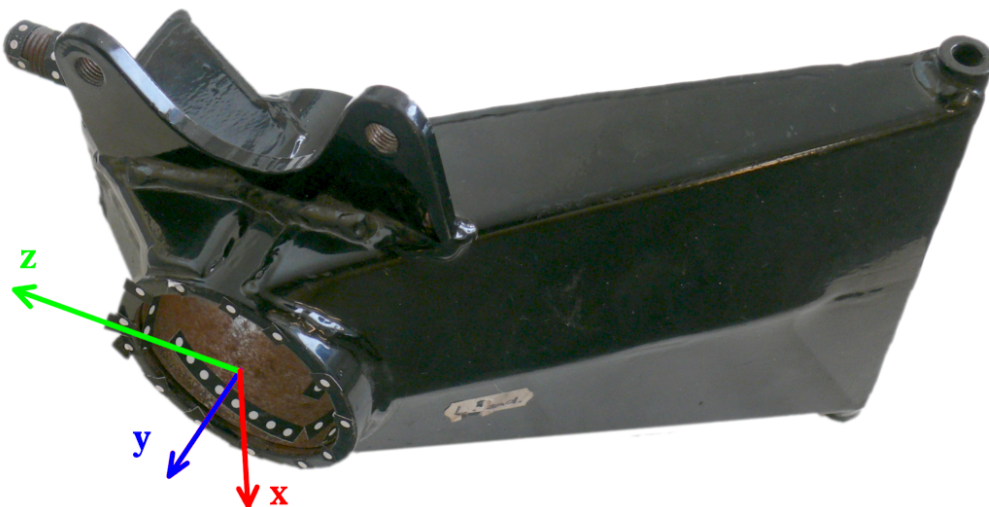
Tab. 5.3: Těhlice formule Ford – přímkové odchylky počítané jen ze čtyř zavěšení.

Střední kvadratická chyba z těchto odchylek má hodnotu $\bar{\sigma} = 0,046 \text{ mm}$ a odpovídající koule přesnosti má pro pravděpodobnost $P = 95 \%$ a počet zavěšení $n = 4$ poloměr $R_p = 3,29 \cdot \bar{\sigma} = 0,15 \text{ mm}$.

Můžeme usuzovat, že byla hodnota druhé přímkové odchylky z tabulky 5.2 ovlivněna (hrubou) chybou. Jak je vidět, vhodnou eliminací takovýchto hodnot výrazně se lišících od ostatních lze docílit vyšší přesnosti.

5.3. Zadní těhlice formule Ford

V tomto případě bylo měřeno pouze samotné těleso těhlice a nikoli celá skupina těhlice s ložiskem a diskem jako v předchozím případě. Souřadný systém byl též volen poněkud vhodněji – osu y tvoří osa otáčení (náboj ložiska); počátek leží v průsečíku s rovinou



Obr. 5.3: Zadní těhlice formule Ford a souřadný systém.

5.3. ZADNÍ TĚHLICE FORMULE FORD

| Číslo zavěšení | Bod | x/mm | y/mm | z/mm | Odchylka/mm |
|----------------|-------|----------|----------|---------|-------------|
| Zavěšení č. 1 | bod A | -5,586 | -62,524 | -26,650 | 0,133 |
| | bod B | -252,985 | 42,823 | 250,877 | |
| Zavěšení č. 2 | bod A | -8,760 | -104,392 | 141,690 | 0,024 |
| | bod B | -14,745 | -161,100 | 375,143 | |
| Zavěšení č. 3 | bod A | 24,287 | 62,091 | -0,749 | 0,132 |
| | bod B | 71,577 | 267,451 | 44,266 | |
| Zavěšení č. 4 | bod A | 116,741 | 10,527 | -55,208 | 0,054 |
| | bod B | 297,684 | 120,578 | -95,571 | |

Tab. 5.4: Zadní těhlice formule Ford – souřadnice bodů naměřené systémem Tritop, které určují svislice vedené bodem zavěšení.

osazení otvoru pro ložisko, osa z směřuje se směru šrobu ve vrchní části těhlice, jak ukazuje obrázek 5.3.

Stejně jako v předchozích dvou případech byly změřeny rovnice přímk zavěšení² – viz tab. 5.4. Na základě těchto dat byla spočítána poloha těžiště:

$$\begin{aligned}
 r_x &= -4,414 \text{ mm} \\
 r_y &= -63,112 \text{ mm} \\
 r_z &= -28,151 \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Střední kvadratická chyba vypočtená z jednotlivých přímkových odchylek Δ_1 – Δ_4 je rovna $\bar{\sigma} = 0,057 \text{ mm}$. Při požadované pravděpodobnosti $P = 95 \%$ a počtu měření $n = 4$ je potom poloměr koule přesnosti $R_p = 3,29 \cdot \bar{\sigma} = 0,186 \text{ mm}$ a po zaokrouhlení $R_p \doteq 0,2 \text{ mm}$.

²Pozn. bylo provedeno pět zavěšení, z nichž jedno bylo zatíženo velkou chybou – jeho odchylka se výrazně odlišovala od ostatních; v tabulce 5.4 jsou proto ponechána jen ostatní čtyři.

6. Celkové zhodnocení navržené metody měření polohy těžiště

Navržená metoda měření polohy těžiště součástí má své výhody i nedostatky. Za hlavní přednost lze označit její **přesnost**. I u relativně malých těles, jakými často bývají součásti podvozků, lze opakovaným měřením docílit přesnosti i pod $0,1\text{ mm}$ (tzn. *koule přesnosti* má pro danou pravděpodobnost poloměr menší než $0,1\text{ mm}$). Jen velmi obtížně by šlo určit takto přesně polohu těžiště jinou metodou, pokud by to vůbec bylo možné.

Za další důležitou výhodu této metody můžeme považovat poměrně snadný způsob, kterým lze ověřit, do jaké míry jsou výsledky zatíženy hrubou chybou. Pokud provedeme 5 zavěšení, získáme 10 dílčích poloh těžišť; pokud se některé z nich nachází výrazně mimo ostatní, lze rozbořem kombinací jednotlivých přímek určit, ve kterém případě se stala chyba. Stejně to platí opačně – pokud všechny přímký zavěšení procházejí velmi blízko vypočtené výsledné polohy těžiště, lze usoudit, že jsme se hrubé chyby nedopustili.

Naopak největší nedostatek této metody je její **pracnost**. Příprava jednotlivého zavěšení zabere poměrně velké množství času – je nutné vybrat vhodné vlákno, stojan, rozmístit kódované a nekódované body Tritopu, umístit za vlákno vhodné bílé pozadí, přičemž neustále musíme zohledňovat požadavky popsané v kapitole 4.4. Následuje fotoграфování součásti a výpočet v software Tritop. Celkový čas potřebný k změření polohy těžiště součásti se odvíjí od přesnosti, které požadujeme docílit, a tedy i od počtu zavěšení, která musíme provést. Obvykle lze počítat s časem 3–5 hodin na součást. Samotný konečný výpočet polohy těžiště z jednotlivých přímek zavěšení výrazně zrychluje program *Těžiště 2.0*, který byl vytvořen pro potřeby této práce.

Tato metoda se omezuje jen na tělesa, která při různém natočení nemění svůj tvar nebo vnitřní rozložení hmotnosti. Tento požadavek vylučuje, abychom touto metodou měřili například polohu těžiště motoru i s olejem nebo součásti podstatně se deformující vlivem gravitační síly.

S ohledem na zde uvedené nedostatky lze vyslovit závěr, že je metoda dobře použitelná v praxi, a to zejména pro případy, kdy požadujeme znát polohu těžiště s velkou přesností.

7. Měření momentu setrvačnosti

K měření momentů setrvačnosti se nejčastěji používá *metoda torzního kyvadla* (kapitola 3.2.1) a *metoda fyzikálního kyvadla* (kapitola 3.2.2). První metodu podrobně rozpracovala firma Space Electronic [6]. Tato práce se zaměřuje na druhou z nich.

7.1. Rozbor metody fyzikálního kyvadla

Tenzor setrvačnosti obsahuje šest nezávislých složek. K jeho výpočtu potřebujeme spočítat momenty setrvačnosti k šesti různým (nerovnoběžným) osám. Pro každé těleso tedy bude potřeba uskutečnit šest měření.

Metoda fyzikálního kyvadla vychází z klíčového vztahu 3.22 pro výpočet momentu setrvačnosti I . Ve vztahu figuruje vlastní perioda netlumeného kmitání (perioda kyvu) T , hmotnost m a vzdálenost těžiště měřeného tělesa od osy kývání l .

Jen v některých případech umožňuje tvar těleso vhodně podepřít a nechat kývat samotné. Pokud tvar tělesa přímé měření neumožňuje, umístí se těleso na vhodný rám umožňující volné kývání a měří se perioda kyvu celku těleso + rám a poté perioda kyvu samotného rámu. Hledaný moment setrvačnosti bude roven rozdílu odpovídajících vypočtených momentů setrvačnosti – platí vztah analogický k rovnici 3.12. V takovém případě potřebujeme při měření zjistit tyto veličiny:

- hmotnost rámu
- hmotnost dvojice měřené těleso + rám
- vzdálenost těžiště rámu od osy kývání
- vzdálenost těžiště dvojice měřené těleso + rám od osy kývání
- periodu kyvu rámu
- periodu kyvu dvojice měřené těleso + rám

K určení momentu setrvačnosti samotného rámu a posléze momentu setrvačnosti dvojice rám + těleso použijeme upravený vztah 3.22:

$$I_{co} = T_c^2 \frac{(m_t + m_r) g l_c}{4 \pi^2} \quad (7.1)$$

$$I_{ro} = T_r^2 \frac{m_r g l_r}{4 \pi^2} \quad (7.2)$$

kde I_{co} a I_{ro} jsou momenty setrvačnosti dvojice těleso + rám a samotného rámu k ose kývání, m_r a m_t jsou hmotnosti rámu a tělesa, l_r vzdálenost těžiště rámu od osy kývání a l_c vzdálenost těžiště dvojice rám + těleso od osy kývání.

7.1. ROZBOR METODY FYZIKÁLNÍHO KYVADLA

Hledaný moment setrvačnosti tělesa k ose kývání I_{to} bude roven rozdílu hodnot 7.1 a 7.2:

$$I_{to} = I_{co} - I_{ro} \quad (7.3)$$

Po dosazení:

$$I_{to} = \left[T_c^2 \frac{(m_t + m_r) g l_c}{4 \pi^2} \right] - \left(T_r^2 \frac{m_r g l_r}{4 \pi^2} \right) \quad (7.4)$$

a úpravou

$$I_{to} = \frac{g}{4 \pi^2} [T_c^2 (m_t + m_r) l_c - T_r^2 m_r l_r] \quad (7.5)$$

Z momentu setrvačnosti I_{to} vůči ose kývání můžeme podle Steinerovy věty [13] vyjádřit I_{tt} , neboli moment setrvačnosti tělesa vůči ose rovnoběžné s osou kývání a procházející těžištěm:

$$I_{tt} = I_{to} - m_t l_t^2 \quad (7.6)$$

l_t je vzdálenost těžiště měřeného tělesa od osy kývání. Po dosazení:

$$I_{tt} = \frac{g}{4 \pi^2} (T_c^2 m_t l_c + T_c^2 m_r l_c - T_r^2 m_r l_r) - m_t l_t^2 \quad (7.7)$$

Tato rovnice, kterou lze zjistit moment setrvačnosti k ose rovnoběžné s osou kývání a procházející těžištěm, je základním vztahem, ze kterého bude vycházeno v této práci. Obsahuje sedm veličin, jež potřebujeme zjistit: m_t – hmotnost měřené součásti, m_r – hmotnost rámu, T_r periodu kyvu samotného rámu, T_c – periodu kyvu rámu spojeného s měřenou součástí, l_r – vzdálenost těžiště rámu od osy kývání, l_c – vzdálenost těžiště celku rám + měřené těleso od osy kývání a l_t – vzdálenost těžiště tělesa od osy kývání.

Problém měření momentu setrvačnosti lze na základě předchozích úvah rozdělit do těchto základních kroků: Je nutné

- vytvořit vhodný rám, na kterém lze nechat součást kývat
- vypracovat metodu, kterou lze přesně měřit periodu kyvu
- vypracovat metodu, kterou lze přesně měřit vzdálenost těžiště od osy kývání
- zjistit, jakým způsobem lze přesně měřit hmotnost součásti
- optimalizovat měřicí metody s ohledem na výslednou chybu měření
- provést jednotlivá měření a spočítat moment setrvačnosti
- na základě dat z měření vypočítat tenzor setrvačnosti (rovnice 2.3)

7.2. Analýza chyb měření

Ve vztahu 7.7 figuruje sedm veličin, které je potřeba změřit, aby bylo možné spočítat moment setrvačnosti – T_c , T_r , m_t , m_r , l_t a l_r a l_c . Analýza chyb měření má za cíl určit, s jakou přesností potřebujeme jednotlivé vstupní veličiny změřit, abychom dosáhli požadované přesnosti výsledku.

Jedná se o problém *určení chyby nepřímou měřené veličiny*. Hledaná veličina je funkcí měřených (vstupních) veličin, neboli

$$y = f(x_1, x_2, \dots) \quad (7.8)$$

přičemž jednotlivé veličiny x_1, x_2, \dots známe jako

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm \Delta x_1, \quad x_2 = \bar{x}_2 \pm \Delta x_2, \quad \dots \quad (7.9)$$

kde $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ jsou (absolutní) chyby měření jednotlivých vstupních veličin od změřených hodnot $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$

Celkovou (absolutní) chybu měření lze pro malé hodnoty $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ dostatečně přesně aproximovat totálním diferenciálem ([23], [14]) funkce y^1 :

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y(x_1, x_2, \dots)}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y(x_1, x_2, \dots)}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots \quad (7.10)$$

Relativní chyba je poté rovna

$$\delta = \frac{\Delta y}{\bar{y}} = \frac{\Delta y}{y(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)} \cdot 100 \text{ [%]} \quad (7.11)$$

Obvykle se uvádí požadavek relativní chyby výsledku do 3 procent.

Chybu vztahu 7.7 lze určit analogicky. Moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm rovnoběžné s osou kyvu je funkcí $I_{tt} = f(T_c, T_r, m_t, m_r, l_t, l_r, l_c)$. Celková chyba je dána součtem jednotlivých *parciálních diferenciálů*:

$$\Delta I_{tt} = \left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial T_c} \right| \Delta T_c + \left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial T_r} \right| \Delta T_r + \left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial m_t} \right| \Delta m_t + \left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial m_r} \right| \Delta m_r + \left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial l_t} \right| \Delta l_t + \left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial l_r} \right| \Delta l_r + \left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial l_c} \right| \Delta l_c \quad (7.12)$$

Tyto diferenciály určíme z parciálních derivací vztahu 7.7 podle jednotlivých veličin:

$$\left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial T_c} \right| \Delta T_c = \left| \frac{T_c g l_c (m_t + m_r)}{2 \pi^2} \right| \Delta T_c \quad (7.13)$$

$$\left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial T_r} \right| \Delta T_r = \left| -\frac{T_r m_r g l_r}{2 \pi^2} \right| \Delta T_r \quad (7.14)$$

$$\left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial m_t} \right| \Delta m_t = \left| \left(\frac{T_c^2 g l_c}{4 \pi^2} - l_t^2 \right) \right| \Delta m_t \quad (7.15)$$

¹Absolutní hodnoty ve vztahu 7.10 slouží k tomu, aby se sčítaly "méně příznivé" případy – tedy aby všechny chyby od jednotlivých parciálních derivací posouvaly výsledek stejným směrem.

7.3. NÁVRH RÁMU UMOŽŇUJÍCÍHO KMITÁNÍ VLASTNÍMI KMITY

$$\left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial m_r} \right| \Delta m_r = \left| \frac{(T_c^2 l_c - T_r^2 l_r) g}{4 \pi^2} \right| \Delta m_r \quad (7.16)$$

$$\left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial l_t} \right| \Delta l_t = |-2 m_t l_t| \Delta l_t \quad (7.17)$$

$$\left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial l_r} \right| \Delta l_r = \left| -\frac{T_r^2 g m_r}{4 \pi^2} \right| \Delta l_r \quad (7.18)$$

$$\left| \frac{\partial I_{tt}}{\partial l_c} \right| \Delta l_c = \left| \frac{T_c^2 g (m_t + m_r)}{4 \pi^2} \right| \Delta l_c \quad (7.19)$$

Dosazením vztahů 7.13–7.19 do 7.12 získáme vztah pro výpočet absolutní chyby vypočteného momentu setrvačnosti z naměřených hodnot T_c , T_r , m_t , m_r , l_t , l_r a l_c s chybami měření ΔT_c , ΔT_r , Δm_t , Δm_r , Δl_t , Δl_r a Δl_c . Relativní chyba je rovna

$$\delta = \frac{\Delta I_{tt}}{\bar{I}_{tt}} \cdot 100 [\%] \quad (7.20)$$

kde \bar{I}_{tt} je moment setrvačnosti vypočtený z naměřených hodnot podle vztahu 7.7.

Cílem dalšího postupu bude vypracovat takové metody měření periody kyvu, vzdálenosti těžiště od osy kyvu a hmotnosti, které budou dostatečně přesné – tak, aby při naměřených hodnotách typických pro součásti podvozků automobilů, na které se tato práce zaměřuje, zůstala relativní chyba menší než 3 %. Zároveň by bylo vhodné, aby všechny parciální diferenciály 7.13–7.19 měly podobnou velikost, resp. stejný řád. Důsledek nepřesností jednotlivých měření má být blízký, abychom některou veličinu neměřili zbytečně přesně ve srovnání s chybou jiného měření. Výpočty chyby měření byly prováděny pomocí programu Mathcad. Výpočtové soubory ve formátu *.mcd* lze nalézt na příloženém CD.

Tento způsob určení přesnosti měření je konzervativní; počítá s nejhorší možnou situací, kdy by se sečetly projevy chyb ze všech sedmi měření. Ve skutečnosti se tyto chyby do určité míry vzájemně vyruší. Pokud bychom znali rozdělení naměřených hodnot, bylo by možné spočítat interval, ve kterém se s určenou pravděpodobností bude výsledný moment setrvačnosti nacházet.

7.3. Návrh rámu umožňujícího kmitání vlastními kmity

Pro potřeby měření momentů setrvačnosti byl vyroben stojan a tři různé rámy sloužící ke kývání měřené součásti.

Na obrázku 7.1 je vidět stojan a první verze rámu². Rám je podepřen ve dvou bodech na ostrých hrotech – pozice **1**. Osu, okolo které se rám kýve, tvoří spojnice těchto dvou hrotů. Hroty zapadají do mělké drážky ve vodorovném rameni rámu (obr. 7.2). Polohu

²Rám prošel v průběhu měření několika drobnými modifikacemi v konstrukci, především z důvodu optimalizace metody měření periody kyvu (kapitola 7.4).

7.3. NÁVRH RÁMU UMOŽŇUJÍCÍHO KMITÁNÍ VLASTNÍMI KMITY



Obr. 7.1: Stojan a první verze rámu.



Obr. 7.2: Detail – ostrý hrot stojanu zapadá do drážky ve vodorovném rameni rámu.

této drážky lze zjistit systémem Tritop, což umožňuje spočítat vzdálenost osy kývání od těžiště (viz dále). Měřená součást je umístěna na vodorovnou část rámu (pozice **2**). Svislá odrazná plocha **3** slouží k měření periody kyvu ultrazvukovým měřičem – viz kapitola 7.4.

Pokusná měření ukázala, že se tento rám hodí jen k měření těles s velkým momentem setrvačnosti. Moment setrvačnosti samotného rámu vůči ose kývání je velký – u menších měřených těles tak tvoří hlavní složku, která ovlivňuje periodu kyvu dvojice těleso + rám

7.3. NÁVRH RÁMU UMOŽŇUJÍCÍHO KMITÁNÍ VLASTNÍMI KMITY



Obr. 7.3: Stojan, druhá verze rámu a pokusné měřené těleso – ocelové kolečko.



Obr. 7.4: Stojan a třetí verze rámu. Ve srovnání je upevněno měřené těleso, zde ocelové kolečko.

a vliv samotného měřeného tělesa zůstává malý. Navíc vzdálenost těžiště od osy kývání tělesa umístěného na tomto rámu obvykle dosahuje vysokých hodnot, takže se ve vztahu 7.6 projevuje více člen $m_t l_t^2$ než samotný změřený moment setrvačnosti I_{to} .

Při návrhu druhé verze rámu (obrázek 7.3) byl proto kladen důraz zejména na snížení hmotnosti rámu (a tím i jeho momentu setrvačnosti) a na co největší zkrácení předpokládané vzdálenosti těžiště měřeného tělesa od osy kývání. Jako materiál byly použity tenkostěnné mosazné trubky.

Rám se hodí především k měření malých součástí – je nutné zajistit, aby se těžiště měřeného tělesa nacházelo pod osou kývání; to lze v tomto případě zaručit jen u málo rozměrných těles.

Jako univerzální řešení, které vyhovuje většině součástí uvažovaných v této práci, se proto ukázala třetí verze rámu. Bylo přistoupeno k poněkud odlišné koncepci (obr. 7.4). Měřené těleso není na rám pokládáno. Základ tvoří rameno s profilem ve tvaru písmene L, na které je upevněna svorka a opět svislá plocha sloužící k měření periody. Toto řešení má jednu zásadní výhodu – je zajištěno, že se těžiště měřeného tělesa bude nacházet relativně blízko osy kývání, navíc má takovýto rám malý moment setrvačnosti. Jako materiál pro vodorovné rameno byla zvolena ocel a pro svislou odraznou desku dřevo kvůli nízké hmotnosti.

7.4. Měření periody kyvu

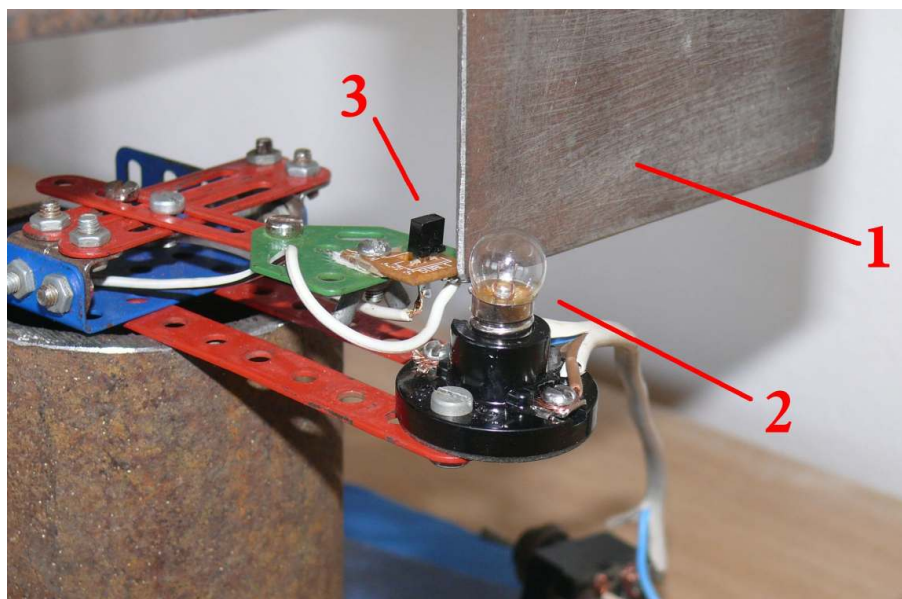
Určit přesně periodu kyvu patří mezi problémy, jejichž řešení bylo pro tuto práci klíčové. V laboratorních podmínkách se nejčastěji perioda kyvu měří pomocí stopek – změříme dobu trvání několika kyvů a následně tuto dobu podělíme jejich počtem. Přesnost této metody je tím vyšší, čím více kyvů takto změříme. Pokud však budeme měřit moment setrvačnosti jako rozdíl momentu měřeného tělesa a setrvačnosti rámu, potřebujeme znát periodu kyvu s přesností nejméně na tisícinu sekundy; a stopkami této přesnosti obvykle docílit nelze (z hlediska reprodukovatelnosti výsledků), protože se v měření projeví chyba lidského faktoru – prodleva reakce měřiče apod.

Pro potřeby této práce byly postupně vypracovány tři metody sloužící k přesnému měření periody kyvu. První využívá principu optické závory. Druhá vychází z měření průběhu výchylky kyvadla a prokládání záznamu sinusovkou. Třetí vznikla jako optimalizace metody druhé, zohledňujíc přitom různé příčiny způsobující nepřesnosti.

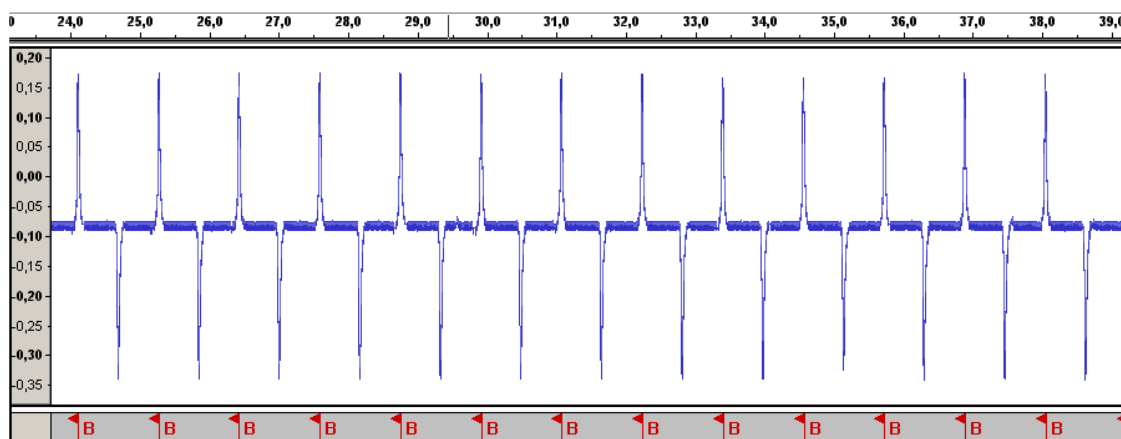
7.4.1. Optická závora

Princip první navržené metody měření periody kyvu vychází ze změny odporu fotorezistoru při změně osvětlení. Konkrétní řešení ukazuje obrázek 7.5. K rámu³ je připevněno

³Tato metoda byla zkoušena jen s první verzí rámu.



Obr. 7.5: Zařízení sloužící k měření periody kyvu – optická závora (1), žárovka (2) a fotorezistor (3).



Obr. 7.6: Záznam signálu z fotorezistoru v programu Audacity.

stínítko (pozice 1) na maximálním možném rameni od osy kývání, a to tak, aby normála jeho plochy byla s touto osou rovnoběžná. V místě nulové úhlové výchylky rámu je umístěna žárovka (pozice 2) a fotorezistor⁴ (pozice 3). Stínítko svým pohybem při kývání rámu fotorezistor zakrývá a odkrývá; signál se změní vždy při průchodu hrany stínítka prostorem mezi fotorezistorem a žárovkou.

Signál z fotorezistoru zaznamenává počítač. K záznamu byla použita snadno dostupná měřicí karta – zvuková karta notebooku pracující s vzorkovací frekvencí 44,1 kHz – a program *Audacity*⁵. Typický průběh naměřeného signálu z fotorezistoru ukazuje graf na obrázku 7.6. Na vstupu zvukové karty bývá umístěn kondenzátor, který eliminuje stejnosměrnou část signálu – karta tak zaznamenává jen změnu na vstupu, nikoli aktuální

⁴Pozn. byl použit fotorezistor z kuličkové myši.

⁵Program *Audacity* je určen k editaci zvuku. Počítač skutečně považuje signál přicházející do zvukové karty za zvuk a jako s takovým s ním i pracuje.

hodnotu; pro naši potřebu to však nevádí. Signál zůstává na konstantní hodnotě, pokud je fotorezistor zastíněný nebo osvětlený. V okamžiku přechodu signál prudce stoupne (resp. poklesne), což se projeví jako ostrý extrém průběhu signálu. Program *Audacity* umí nalézt časy extrémů příkazem *Beat Finder* – viz červené praporky ve spodní části grafu 7.6. Čas mezi jednotlivými extrémy představuje periodu kyvu. Obvykle je odečten čas mezi více extrémy a podělen počtem odpovídajících kyvů.

Bylo provedeno měření s cílem ověřit spolehlivost metody. V tabulce 7.1 jsou hodnoty změřené periody samotného rámu (první verze).

| Č. měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Perioda/s | 1,1684 | 1,17000 | 1,1673 | 1,1691 | 1,1595 | 1,1724 | 1,1681 | 1,1605 |

Tab. 7.1: Změřené periody pomocí optické závory.

Z hodnot byla vypočítána průměrná hodnota $\bar{T} = 1,1669$ s. Absolutní chybu měření můžeme odhadnout⁶ postupem, který je analogický ke kapitole 4.6. Střední kvadratická chyba průměru je rovna $\bar{\sigma} = 0,00161$. Pro pravděpodobnost $P = 95$ % a počet měření $n = 8$ je studentův součinitel roven $k = 2,42$ [20]. Absolutní chyba tohoto postupu určování periody je tedy rovna $\Delta T = 2,42 \cdot \bar{\sigma} = 0,0039$ s. Z hlediska vztahu 7.12 a porovnáním možností dalších dílčích měření se ukázalo, že tato metoda měření může vyhovovat velkým tělesům, u kterých milisekundová chyba nehraje roli. Pro potřeby této práce však bylo nutné přistoupit k dalším, přesnějším postupům.

7.4.2. Měření úhlové výchylky a prokládání sinusovkou

Tato metoda měření periody kyvu byla inspirována diplomovou prací M. Volejníka [26]. Volejník měří periodu kyvu torzního kyvadla (pošiny určené k měření momentu setrvačnosti automobilu). Zaznamenává snímačem M-Box úhlové zrychlení a průběhem změřené hodnoty prokládá tlumenou sinusovkou, jejíž periodu považuje za hledanou periodu vlastních kmitů kyvadla.

Pro potřeby této práce tento postup vyhovuje jen částečně – snímač úhlového zrychlení M-Box nelze vhodně spojit s rámem kvůli hmotnosti, kterou by ovlivňoval měření, navíc by bylo obtížné zajistit datové spojení snímače s počítačem. Proto bylo nutné zvolit jinou měřenou veličinu a jiný druh snímače. Též existuje důležitý rozdíl mezi kýváním torzního a fyzikálního kyvadla. Všechny tyto detaily budou diskutovány dále v textu.

Volba snímače

Je nutné zvolit takový snímač, který neovlivňuje vlastní kmitání kyvadla. Nabízejí se tři možnosti – měření snímačem kapacitním (pohyb kyvadla způsobuje změnu plochy desek

⁶Opět předpokládáme, že mají změřené periody studentovo rozdělení, což samo o sobě není zaručeno.



Obr. 7.7: Snímač 945-LAY-AD-1C0 firmy Honeywell.

kondenzátoru a tím i jeho kapacity, kterou měříme), optickým (snímač měří rychlost pohybu na principu, který je podobný jako u optické myši PC) nebo ultrazvukovým.

S ohledem na možnosti vybavení laboratoří ÚADI byl vybrán ultrazvukový snímač 945-LAY-AD-1C0 firmy Honeywell (obr. 7.7). Vysílá ultrazvukové pulzy v kuželovitém paprsku, které se odrážejí od cíle a vracejí se zpět. Z časové prodlevy mezi vysláním pulzu a příjmem jeho odrazu snímač spočítá vzdálenost cíle od snímače a převede ji na výstupní napětí, které lze zaznamenávat počítačem.

K rámu, na kterém je umístěno měřené těleso, je připevněna vhodná odrazná plocha, která kmitá společně s rámem (viz např. obrázek 7.1, pozice **3**). Snímač snímá měnící se vzdálenost odrazné plochy v průběhu kývání. Je proto vhodné, aby se tato plocha nacházela na maximálním možném poloměru od osy kývání, což však odporuje požadavku co nejmenšího momentu setrvačnosti rámu. Výsledné řešení je určitým kompromisem – u třetí verze rámu je jako odrazná plocha volena úzká a zároveň lehká dřevěná lišta.

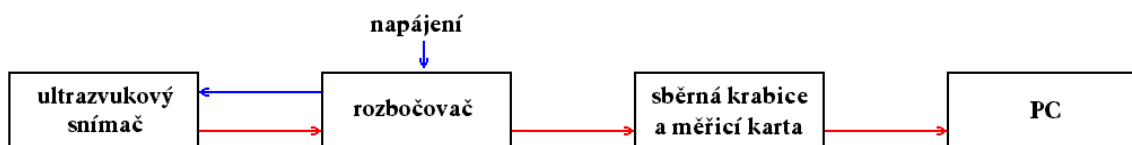
Důležité technické parametry snímače [29]:

| | |
|------------------|--------------|
| měřicí rozsah | 100–600 mm |
| výstupní napětí | 1–6 V |
| přesnost | $\pm 0,5$ mm |
| úhel paprsku | 10° |
| pracovní teplota | 0–50°C |

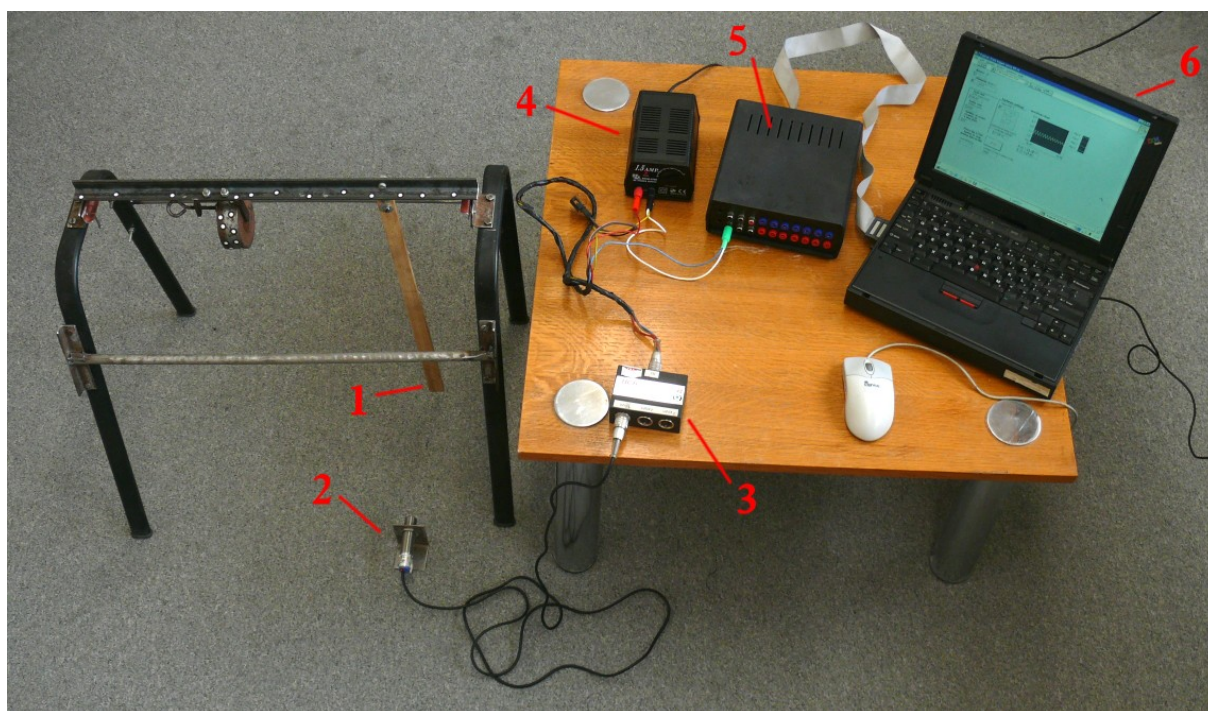
Uspořádání měřicího řetězce

Snímač byl propojen s rozbočovačem, zdrojem napětí, sběrnici měřicí karty a kartou a přenosným počítačem – obr. 7.8. Použita byla 12bitová měřicí karta DAQCard-1200 firmy National Instruments se sběrnici zabudovanou do sběrné krabice.

Uspořádání měření ukazuje obrázek 7.9. Odrazná plocha **1** se kýve spolu s rámem a snímač **2** měří měnící se vzdálenost. Rozbočovač **3** umožňuje zapojit více snímačů a



Obr. 7.8: Schéma měřicího řetězce.



Obr. 7.9: Uspořádání měření.

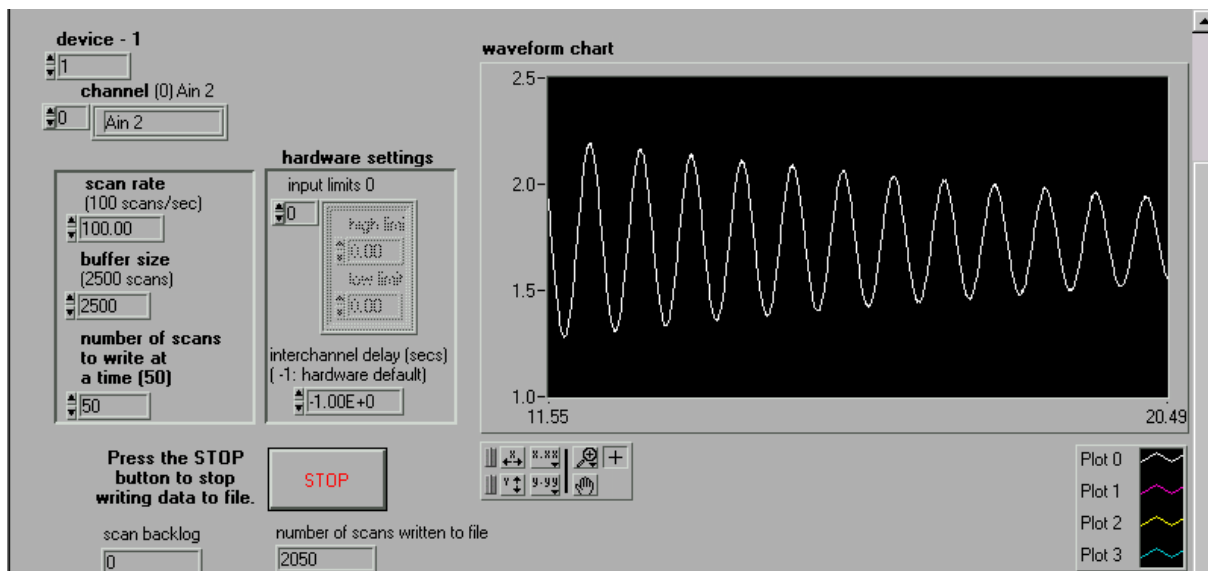
propojuje snímač se zdrojem napětí 4. Signál je přiváděn do sběrné krabice 5 obsahující sběrnici měřicí karty, která data převádí z analogové podoby do digitální podoby a ukládá je do počítače 6.

Vzdálenost snímače 2 od odrazné plochy 1 je vhodné volit s rozmyslem. P. Majerech v diplomové práci [25] zjistil, že výstup snímače není zcela lineární pro všechny vzdálenosti – při použití 12voltového zdroje napětí (místo doporučeného 19–30voltového) se pásmo lineární odezvy nachází v rozmezí 150–550 mm, ve zbytku rozsahu udávaného výrobcem se objevuje nepřesnost. Linearita odezvy je výhodná především proto, aby bylo snazší proložit signál vhodnou křivkou. Pro potřebu měření periody nemá přepočtení hodnot na vzdálenost význam – zajímá nás výhradně perioda signálu. Z toho důvodu budeme v dalších výpočtech hledat pouze periodu signálu $U [V] = f(t)$ a nikoli $l [mm] = f(t)$.

Záznam dat počítačem

K záznamu dat byl vytvořen program v prostředí systému LabView firmy National Instruments. Vznikl modifikací šablony *DAQ High-speed Logger* z archivu LabView. Přední panel výsledné aplikace zobrazuje obrázek 7.10.

Program zaznamenává 100 x za sekundu hodnotu napětí na vstupu měřicí karty a výsledky zapisuje do zvoleného souboru ve formátu *.txt*. Přednastavenou hodnotu snímací frekvence lze měnit; 100 Hz se však ukázalo být ideální.



Obr. 7.10: Přední panel aplikace v prostředí LabView.

Zpracování výsledků v programu Mathcad

K zpracování výsledků byl vytvořen program v prostředí Mathcad. Jako základ posloužil program M. Volejníka [26]. Část průběhu typického signálu zaznamenaného programem LabView zobrazeného v Mathcadu ukazuje obrázek 7.11.

Tímto změřeným signálem potřebujeme proložit vhodnou křivku. Řešením diferenciální rovnice tlumeného kmitání dostáváme vztah pro úhlovou výchylku jako funkci času:

$$\varphi(t) = \varphi_m e^{-bt} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right) + \varphi_s \quad (7.21)$$

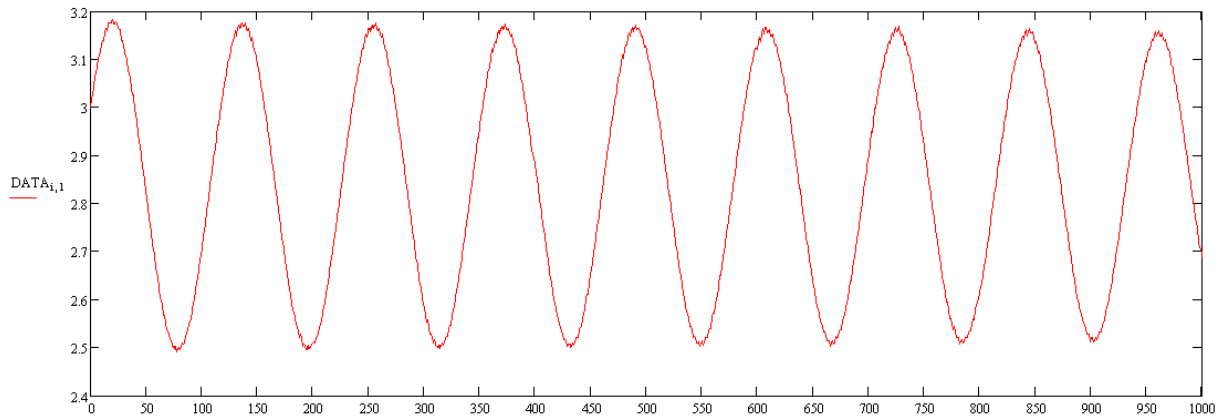
kde A_m je počáteční amplituda kmitání, b součinitel útlumu, $\omega = 2\pi/T$ vlastní úhlová frekvence (tlumeného) oscilátoru, T perioda, φ_0 počáteční výchylka a φ_s střední hodnota výchylky, o kterou je kmitání posunuto vůči počátku. Rovnici lze upravit na tvar:

$$\varphi(t) = \varphi_m e^{-b(t+t_0)} \sin\left(\frac{2\pi}{T} (t + t_0)\right) + \varphi_s \quad (7.22)$$

Pokud rám idealizujeme jako fyzikální kyvadlo, lze jej považovat za tlumený oscilátor, který je vztahem 7.22 vhodně popsán.

Prostřednictvím *metody nejmenších čtverců* se pokusíme zjistit parametry φ_m , t_0 , b , T a φ_s . Metoda nejmenších čtverců se snaží nalézt parametry tak, aby součet druhých mocnin chyb nalezeného řešení byl co nejmenší [20]. Tzn.:

$$\sum_i [f(t_i, x_1, x_2, \dots) - y_z(t_i)]^2 = \min \quad (7.23)$$



Obr. 7.11: Ukázka zaznamenaného signálu – zobrazení grafu v programu Mathcad. Na ose x je číslo zaznamenaného údaje a tedy i čas v setinách sekundy, na ose y je napětí naměřené na snímači.

kde $f(t_i, x_1, x_2, \dots)$ je funkce s hledanými parametry x_1, x_2, \dots a $y_z(t_i)$ je změřená hodnota hledané veličiny v čase t_i . V případě použití rovnice 7.22 bude mít metoda nejmenších čtverců tvar:

$$\sum_i \left[\left(\varphi_m e^{-b(t_i+t_0)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t_i+t_0)\right) + \varphi_s \right) - \varphi_z(t_i) \right]^2 = \min \quad (7.24)$$

V našem případě však nemáme změřené hodnoty výchylky φ_z , ale vzdálenosti, kterou počítač zaznamenal jako průběh napětí. Změřený signál tedy máme v hodnotách napětí U a namísto rovnice 7.24 použijeme vztah:

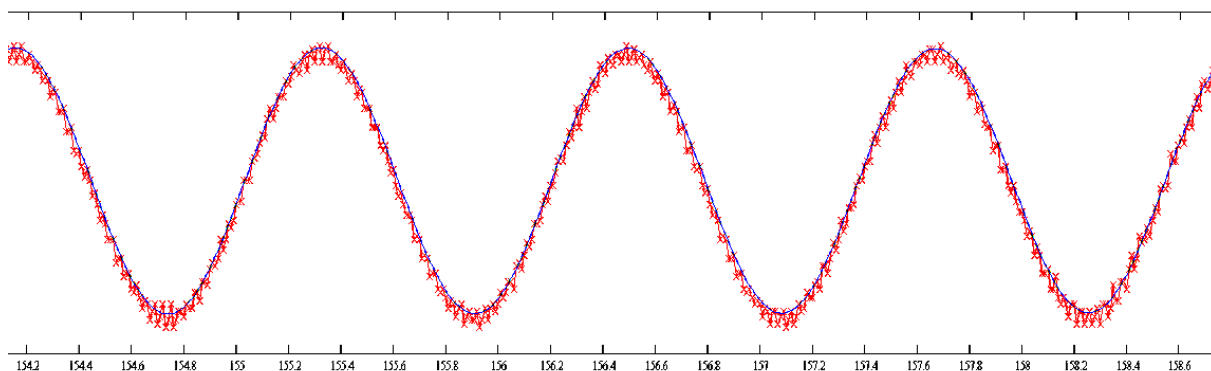
$$\sum_i \left[\left(U_m e^{-b(t_i+t_0)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t_i+t_0)\right) + U_s \right) - U_z(t_i) \right]^2 = \min \quad (7.25)$$

ve kterém hledáme parametry U_m, t_0, b, T a U_s prokládáním křivky změřenými hodnotami $U_z(t_i)$.

V programovém prostředí Mathcad položíme vztah 7.25 roven nule a hledáme parametry, které tomuto vztahu nejlépe vyhovují. Konkrétní provedení je vidět na obr. 7.12.

| | |
|---|--|
| $\text{odezva}(t, A, b, T, t_0, Y_0) := \left[A \cdot \exp[b \cdot (t + t_0)] \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{T} \cdot (t + t_0)\right] \right] + Y_0$ | Rovnice, kterou prokládáme. |
| <p>Given</p> $\sum_{i=1}^n \left(\text{odezva}(\text{DATA}_{i,0}, A, b, T, t_0, Y_0) - \text{DATA}_{i,1} \right)^2 = 0$ | Vztah pro metodu nejmenších čtverců |
| $\text{reg}(A, b, T, t_0, Y_0, n) := \text{Minerr}(A, b, T, t_0, Y_0)$ | Definice funkce reg. Prostřednictvím funkce Minerr hledá nejmenší odchylku parametrů |
| $\begin{pmatrix} A \\ b \\ T \\ t_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} := \text{reg}(\text{odhA}, \text{odhb}, \text{odhT}, \text{odht0}, \text{odhY0})$ | Do matice zapíše výsledky na základě odhadů |

Obr. 7.12: Výpočet – metoda nejmenších čtverců v programu Mathcad.



Obr. 7.13: Část křivky proložené prostřednictvím metody nejmenších čtverců. Červené body představují změřené hodnoty, modrá je proložená sinusovka.

Funkce Mathcadu **Minerr** pracuje na iteračním principu. Aby metoda nejmenších čtverců fungovala – tzn. aby výsledek 7.25 konvergoval k minimu, je nutné zadat co nej- přesnější odhady. Ukázka řešení tohoto problému je v příloze této práce.

Byla provedena řada měření, která měla za cíl ověřit, do jaké míry lze použít takovýto postup. Na obrázku 7.13 je vidět část změřeného signálu (červeně) a odpovídající proloženou funkci (modře). Změřené hodnoty ukazuje tabulka 7.2. Jedná se o měření prázdného rámu⁷ za pokaždé stejných podmínek s použitím výpočtového postupu uvedeného na obr. 7.12.

Z hodnot byla vypočítána průměrná hodnota $\bar{T} = 1,1749$ s. Střední kvadratická chyba průměru je rovna $\bar{\sigma} = 0,00069$. Pro pravděpodobnost $P = 95\%$ a počet měření $n = 8$ je absolutní chyba tohoto postupu rovna $\Delta T = 2,42 \cdot \bar{\sigma} = 0,0017$ s

| Č. měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Perioda/s | 1,1763 | 1,1749 | 1,1772 | 1,1752 | 1,1716 | 1,1736 | 1,1731 | 1,1769 |

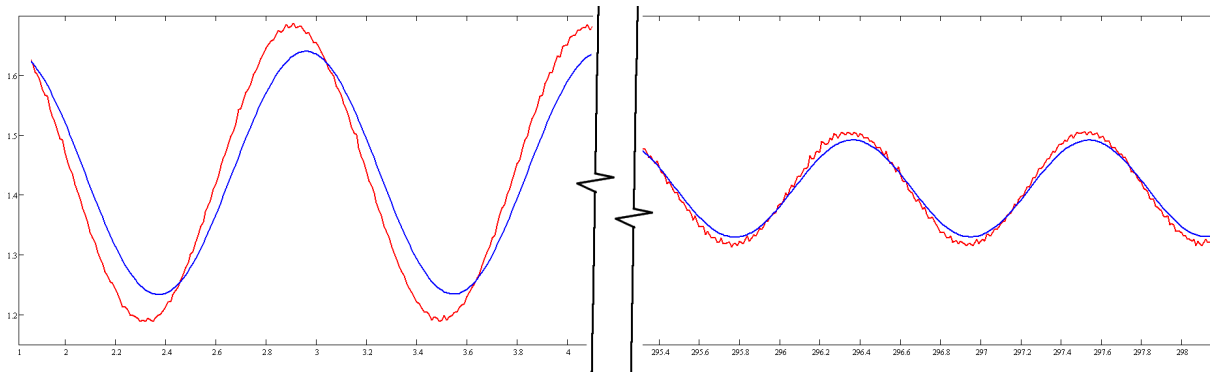
Tab. 7.2: Změřené periody pomocí metody prokládání sinusovky.

Diskuse nad získanými výsledky

Výsledky v tabulce 7.2 jsou přesnější než v případě použití metody optické závory (tabulka 7.1). I zde chyby jednotlivých měření dosahují několika tisícín sekundy.

Bylo zjištěno, že je použití této metody do určité míry omezené. Pokud provádíme měření signálu v delším časovém úseku – déle než cca 100 sekund, ukáže se, že Mathcad není v takovém případě schopen naměřenými hodnotami proložit funkci ze vztahu 7.25 s dostatečnou přesností. Hodnoty proložené křivky a změřeného signálu se zpravidla

⁷Měřena byla opět první verze rámu, avšak v jiné modifikaci – namísto stínítka, potřebného pro metodu optické závory, byla k rámu připevněna odrazná deska kvůli ultrazvukovému snímači. Tím lze vysvětlit rozdíl v takto změřených periodách oproti měření optickou závorou.



Obr. 7.14: Nepřesnost proložení křivky při dlouhotrvajícím měření – zde 300 s. Změřené hodnoty jsou červeně, proložená křivka modře. Výšek vlevo ukazuje hodnoty v počátku měření (1–4 s), vpravo na konci téhož měření (295–298 s).

začnou s prodlužující se délkou měření rozcházet, a to jak co se týče velikosti amplitudy, tak periody – viz obr. 7.14.

Existuje proto důvodné podezření, že se při měření projevuje nějaké důležité zkreslení, které je nutné zohlednit, a tedy že výsledky v tabulce 7.2 vzniklé proložením tlumené sinusovky nedávají smysl. Z tohoto důvodu bylo přikročeno k optimalizaci výpočetních vztahů a celé metody s cílem provést potřebné korekce a docílit tak požadované přesnosti.

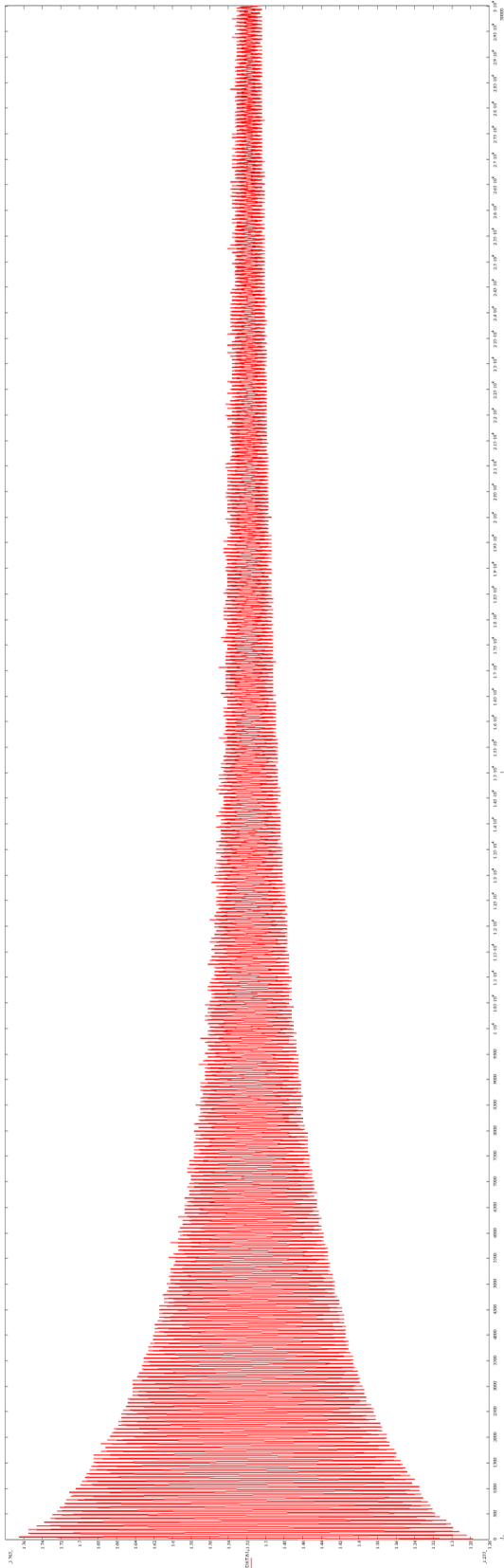
7.4.3. Průběh funkce $\tau = f(t)$

Sérií měření bylo zjištěno, že změřený signál nemá přesně harmonický charakter. Dvě po sobě následující maximální výchylky nejsou vůči sobě posunuty pokaždé o stejnou dobu. Jinak řečeno perioda není po celou dobu měření konstantní. Hovořit o *periodě* tak zde již není přesné, protože se v průběhu měření mění – vhodnější bude používat pro časový interval mezi dvěma maximálními výchylkami pojem *doba kyvu* τ .

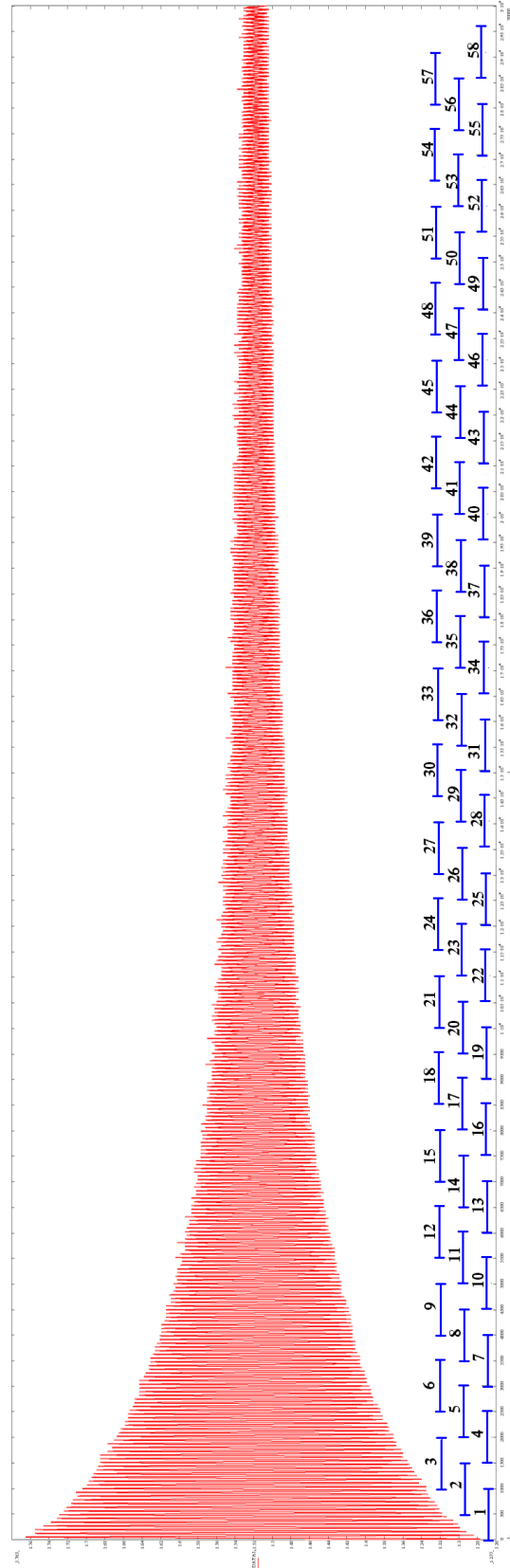
Změřená hodnota doby kyvu se mění podle toho, v kterém úseku zaznamenaných hodnot ji počítáme – pokud proložíme tlumenou sinusovku změřenými hodnotami například v čase 0–10 s, poté 50–60 s a nakonec 100–110 s (ze stejného měření), získáme pokaždé jinou dobu kyvu, přičemž první bude největší a třetí nejmenší. Cílem dalšího postupu je zjistit, jakým způsobem se mění hodnota okamžité doby kyvu τ během měření.

Měření byla prováděna v dlouhém časovém intervalu (300 a více sekund), přičemž počáteční výchylka byla záměrně nastavena tak, aby se rám v počátku kýval s výchylkou větší než obvykle požadovaných 5° . Kývání poté obvykle pokračovalo až prakticky do úplného zastavení. Typický tvar naměřených hodnot ukazuje graf na obr. 7.15.

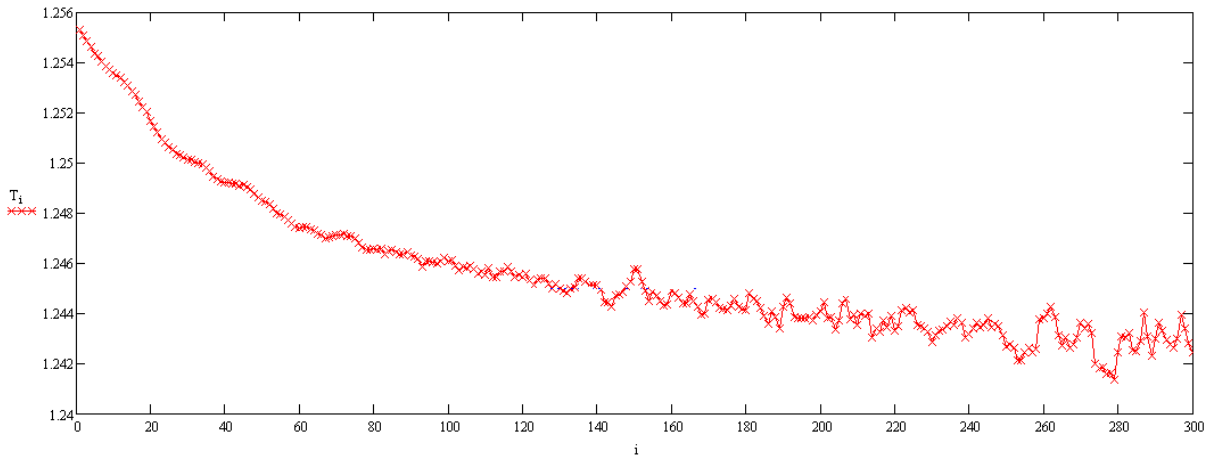
Takovýto signál byl rozdělen do samostatných bloků. Každý blok má určenou délku (v programu Mathcad přiřazujeme parametr *delkauseku*); obvykle 5, 10 nebo 20 sekund. Jednotlivé bloky se překrývají o hodnotu parametru *offset* (nejčastěji 9 nebo 19 sekund, případně bez překrytí). Celkem je takovýchto bloků n (parametr *pocetuseku*), a to podle



Obr. 7.15: Ukázka záznamu signálu u dlouhotrvajícího měření – zde 300 s.



Obr. 7.16: Rozdělení změřeného signálu do bloků – zde 10sekundové bloky.



Obr. 7.17: Průběh okamžité doby kyvu τ v závislosti na čase u měření trvajících 300 sekund. Zde $delkauseku = 10\text{ s}$, $offset = 9\text{ s}$ a tedy $krok = 1\text{ s}$.

celkové délky měření. Obrázek 7.16 ukazuje příklad takového rozdělení s parametry $delkauseku = 10\text{ s}$, $offset = 5\text{ s}$, $pocetuseku = 58$.

V každém z takovýchto bloků je proložena tlumená sinusovka zvlášť podle vztahu 7.25. Získáme soubor n hodnot $\tau =$ okamžitých dob kyvu odpovídajících n -tému úseku, které jsou od sebe vzdálené o čas $krok = delkauseku - offset$.

Záznam obvyklého průběhu měnicí se hodnoty okamžité doby kyvu τ ukazuje obrázek 7.17. Na svislé ose je vidět hodnota okamžité doby kyvu τ , na vodorovné ose je číslo měřeného úseku, který pro případ sekundového kroku odpovídá času v sekundách. Z grafu je vidět, že hodnota τ klesá přibližně exponenciálně.

Je nutné zjistit, co způsobuje takovýto průběh okamžité doby kyvu τ . Dále je potřeba na základě těchto poznatků z naměřených dat spočítat odpovídající periodu kyvu ideálního fyzikálního kyvadla T_0 , případně potřebujeme zjistit, jak upravit postup měření, abychom těchto výsledků dosáhli.

7.4.4. Příčiny nekonstantního průběhu změřeného τ

R. Nelson a M. G. Olsson v [16] předkládají přehled důležitých korekcí, které je při měření skutečné periody kyvu (tzn. periody kyvu odpovídající ideálnímu fyzikálnímu kyvadlu) potřeba uvažovat. Hledání přesných matematicko-fyzikálních vztahů, kterými se řídí pohyb skutečného kyvadla, je až nečekaně složitý problém. V dalším textu budou popsány nejdůležitější faktory, které ovlivňují měření periody kyvu podstatným způsobem a které mají za důsledek, že doba kyvu získaná analýzou změřeného signálu není po celou dobu měření konstantní, jak by odpovídalo teorii.

Odchyłka způsobená nenulovou amplitudou

Ve vztahu 3.18 jsme položili zjednodušení $\sin \varphi = \varphi$. To nám umožnilo zlinearizovat pohybovou diferenciální rovnici kyvadla 3.16. Ve skutečnosti je doba kyvu skutečného kyvadla funkcí amplitudy. Chyba způsobená uvedeným zjednodušením s klesající amplitudou φ_m klesá k nule [2].

Přesné řešení diferenciální rovnice fyzikálního kyvadla 3.16 vede na *eliptický integrál*, jehož řešení rozvinutím v řadu určuje vztah mezi okamžitou dobou kyvu τ a okamžitou amplitudou φ_m : Tento vztah je roven ([2], [24]):

$$\tau(\varphi_m) = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_m}{2} + \dots \right] \quad (7.26)$$

Jedná se o funkci, která s klesající amplitudou výchylky φ_m konverguje k periodě T_0 , což je hodnota, která odpovídá fyzikálnímu kyvadlu (bez uvažování dalších korekcí). Odchyłka hodnot okamžité periody kyvu τ určené podle vztahu 7.26 od hodnot určených z obvyklých zjednodušených vztahů je pro úhel $\varphi_m = 5^\circ$ rovna 0,05 %, což při periodách typických pro většinu měření (0,5–2 s) představuje chybu 0,00025–0,001 s. Optimální by bylo amplitudu udržovat v minimálních hodnotách; změřený signál je však do určité míry zatížen šumem, což při příliš malých amplitudách znemožní prokládání sinusovkou.

Odchyłka způsobená nelinearitou tlumení

Diferenciální rovnice ve tvaru 3.24 (resp. 3.25) a následná korekce ve tvaru rovnice 3.23 předpokládají, že je tlumení přímo úměrné okamžité rychlosti; z čehož vyplývá, že amplituda φ_m bude klesat exponenciálně. Ve skutečnosti se ukazuje, že tomu tak není, exponenciální změna amplitudy je pouze ideální případ.

Skutečné tlumení vzniká jako součet řady vlivů (tření v závěsu, vzdušný odpor...) Součinitel tlumení proto není konstantní, ale má charakter kombinace lineární a kvadratické složky okamžité rychlosti, což se projeví tak, že pokles amplitudy v průběhu měření není exponenciální ([17], [18]), konstantní není ani součinitel útlumu používaný ve vztahu pro korekci 3.23. Změna amplitudy se bude rovnat [16]:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = -\alpha\varphi_0 - \beta\varphi_0^2 \quad (7.27)$$

Odsud lze vyjádřit průběh amplitudy:

$$\varphi_0(t) = \frac{\alpha_\varphi \varphi_{poc} e^{-\alpha_\varphi(t+t_0)}}{\beta_\varphi \varphi_{poc} (1 - e^{-\alpha_\varphi(t+t_0)}) + \alpha_\varphi} \quad (7.28)$$

kde $\varphi_0(t)$ je průběh okamžité úhlové amplitudy v závislosti na čase t , α_φ a β_φ jsou koeficienty lineární a kvadratické složky tlumení a φ_{poc} je amplituda v čase t_0 . Vztah lze přepsat pro změřené hodnoty napětí:

$$U_m(t) = \frac{\alpha_U U_{poc} e^{-\alpha_U(t+t_0)}}{\beta_U U_{poc} (1 - e^{-\alpha_U(t+t_0)}) + \alpha_U} \quad (7.29)$$

s analogickými veličinami $U_m(t)$, α_U , β_U a U_{poc} .

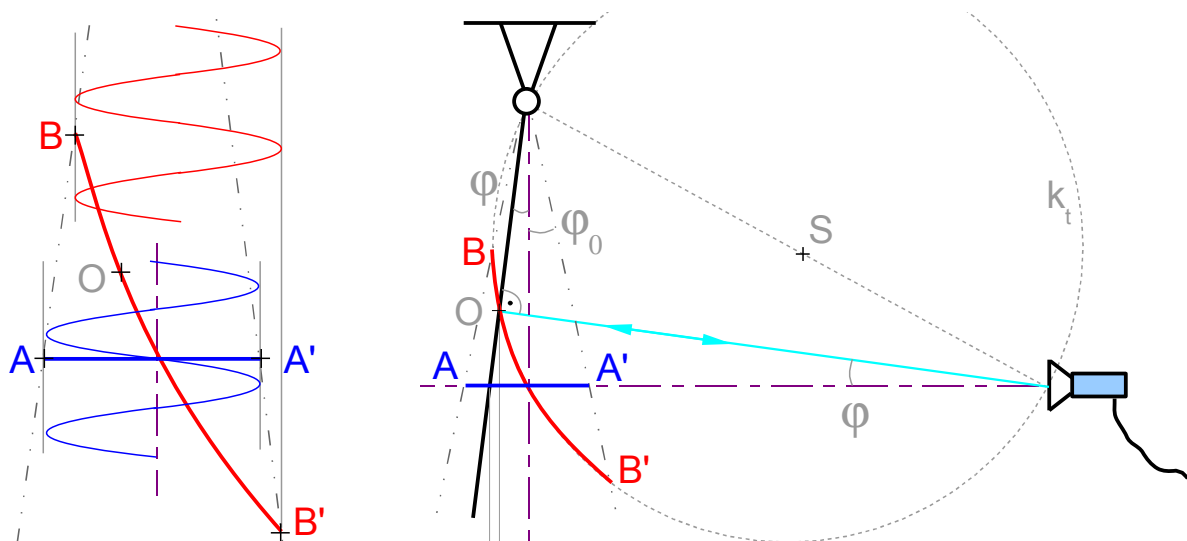
Vliv této chyby na periodu bude malý – méně než 0,0001 sekundy pro typické hodnoty. Linearita předpokládaná ve vztahu 7.25 však způsobí, že se tlumená sinusovka proložená program Mathcad bude od skutečných změřených hodnot co se týče okamžité amplitudy poněkud lišit.

Odchyłka způsobená geometrickými vztahy a charakterem snímače

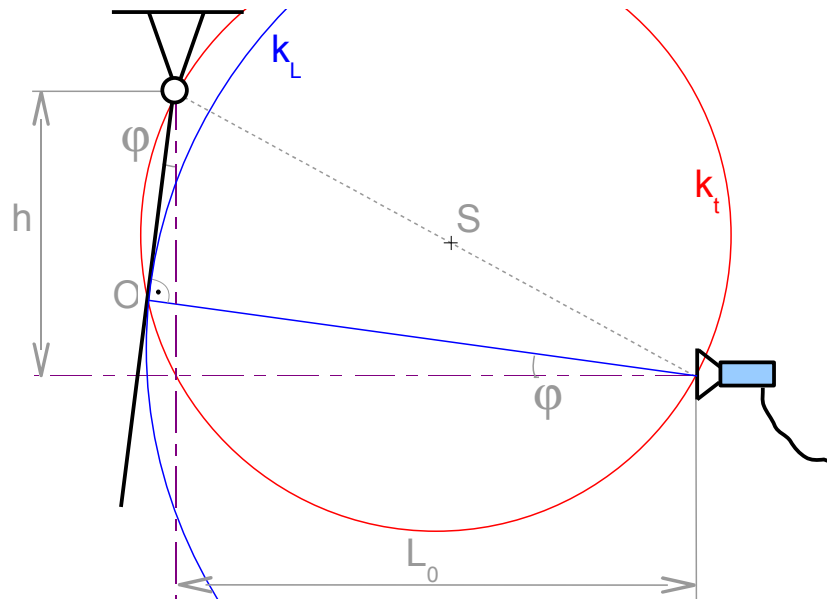
Jako hlavní faktor, kvůli kterému má změřená doba kyvu τ obvykle průběh jako na obrázku 7.17, se ukázala být chyba způsobená charakterem použitého snímače a principem snímání. Při hledání periody bylo vycházeno z hodnot napětí U_z na snímači (viz str. 40). Avšak jak bude vysvětleno níže, změřená hodnota napětí U_z není přímo úměrná úhlové výchylce φ . Doba kyvu τ_U takového změřeného signálu tak není rovna době kyvu τ_φ průběhu úhlové výchylky. Je proto nezbytné provést příslušné korekce.

Snímač *945-LAY-AD-1C0* vysílá paprsek zvuku o vysoké frekvenci a měří čas, za který se vrátí jeho odraz – na základě prodlevy mezi vysláním a příjmem spočítá vzdálenost od snímače a převede na napětí. Zásadní význam má skutečnost, že snímač snímá odraz v určitém úhlu [29] – vysle paprsek v kuželu o šířce 10° a určí vzdálenost prvního předmětu, od kterého se paprsek odrazí.

Na obrázku 7.18 je vidět schéma, jak vypadá situace v našem případě. Rám je zde modelován jako odrazná deska kývající se s amplitudou φ_0 a s okamžitou výchylkou φ . V ideálním případě by snímač měřil průběh vzdálenosti v ose snímače – tedy výchylku na úsečce A–A'. Vyslaný paprsek se však od odrazné desky neodrazí v bodě ležícím na úsečce A–A', ale v místě, které má v danou chvíli od snímače nejmenší vzdálenost. Takové místo bude ležet na přímce, která prochází snímačem a je kolmá na rovinu odrazné desky.



Obr. 7.18: Schéma geometrické korekce. Snímač nezaznamenává výchylku na úsečce A–A', ale vzdálenost bodu O pohybujícího se po trajektorii B–B'.



Obr. 7.19: Schéma geometrické korekce – důležité rozměry.

Tento bod odrazu O se pohybuje po části Thaletovy kružnice k_t . Na obr. 7.18 je červenou barvou zobrazena trajektorie bodu odrazu (z bodu B do bodu B') v průběhu jednoho kmitu s amplitudou φ_0 . Skutečný průběh výchylky měřený na úsečce $A-A'$ by měl tvar modré sinusovky; signál ze snímače však má (přibližně⁸) tvar zobrazený červenou křivkou. Takovýto signál není harmonický – nekmitá okolo stále stejné střední hodnoty a především se doba kyvu tohoto signálu mění s měnící se amplitudou φ_0 .

Podle této úvahy nám snímač ve skutečnosti určuje vzdálenost, ve které se nachází bod odrazu O od snímače, a nikoli vzdálenost na přímce $A-A'$. Jak je vidět z obrázku 7.19, bod O se nachází na průsečíku Thaletovy kružnice k_t (se středem v polovině úsečky spojující snímač a osu kývání) a kružnice k_L , která má střed v snímači a poloměr změřenou hodnotu vzdálenosti L_z . Pokud bychom znali hodnoty h (výška osy kývání nad osou snímače) a L_0 (vzdálenost střední hodnoty, okolo které bude signál kmitat), bylo by možné ze změřené hodnoty L_z zjistit polohu bodu O jakožto průsečík zmíněných dvou kružnic a následně triviálním způsobem dopočítat úhlovou výchylku φ . Hledaná perioda by v takovém případě byla zjištěna prokládáním sinuovky přepočítaným průběhem $\varphi(t) = f(U_z(t))$. Jak bude vysvětleno dále, skutečnost je poněkud složitější a takto určené vztahy neplatí zcela přesně⁹.

Další faktory ovlivňující periodu

Mezi další faktory, které ovlivňují periodu kyvu, patří korekce odstraňující vliv vztlaku vzduchu a korekce počítající s *přidanou hmotností* (*added mass*) odpovídající vzduchu

⁸V pravoúhlých souřadnicích není možné průběh znázornit jako záznam průvodiče; červená křivka na obrázku 7.18 je proto jen přibližná.

⁹Pozn.: Bylo skutečně realizováno měření, jehož cílem bylo ověřit tento postup – k další analýze bylo přistoupeno poté, co se ukázalo, že takovýto postup k dostatečné přesnosti nevede.

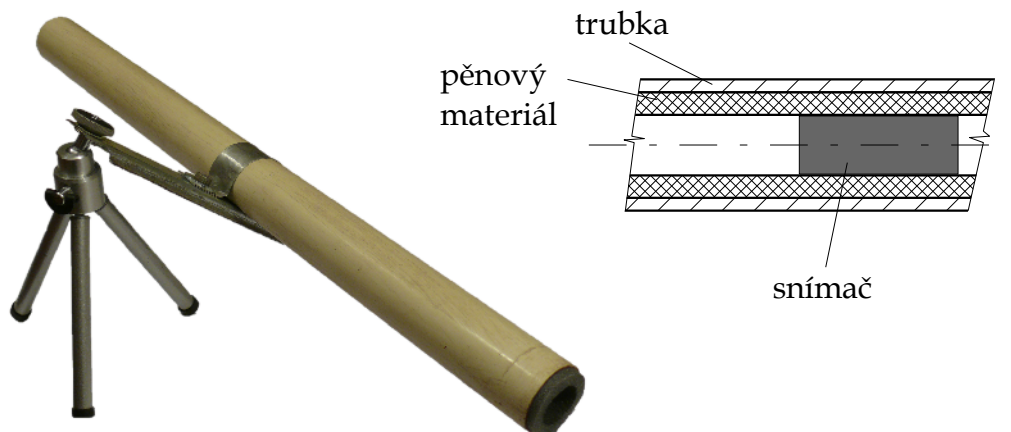
proudícímu spolu s kývající se součástí. Tyto a další vlivy, podrobně vysvětlené v [16], nebyly při měření periody kyvu uvažovány. Další chyba může být způsobená nedokonalou tuhostí rámu a stojanu. Rám, stojan ani odrazná plocha nejsou zcela tuhé a pohybová rovnice 3.24 tento vliv nezahrnuje. Je proto vhodné zajistit, aby byly v průběhu měření deformace rámu pokud možno co nejmenší – zejména z hlediska jeho konstrukce.

7.4.5. Optimalizovaná metoda měření periody

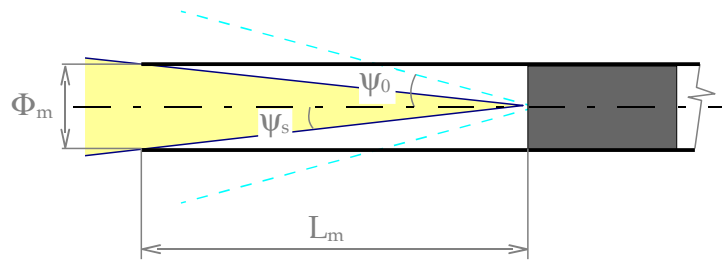
Na základě výše uvedených poznatků byla optimalizována metoda měření. Při výpočtech geometrické korekce prostřednictvím hledání průniku kružnice k_L a Thaletovy kružnice k_T se však vyskytl další problém. Snímač *945-LAY-AD-1C0* určitým způsobem zohledňuje směr, ze kterého přichází odraz, resp. preferuje odraz nacházející se blíže ose snímače oproti odrazu poblíž okraje vysílaného paprsku – snímač vysílá paprsek ve směru osy a je proto zřejmé, že i odraz tohoto signálu bude mít ve směru osy snímače větší intenzitu než v okrajové oblasti. Tato skutečnost způsobí, že ani výpočet popsáný v kapitole 7.4.4 nevede k cíli – periody kyvu získané prokládáním sinusovky přepočítaným průběhem $\varphi(t)$ se při opakovaném měření navzájem lišily o několik tisícín sekundy; pro naše potřeby je však nezbytné docílit přesnosti vyšší.

Požadované přesnosti bylo po sérii experimentů docíleno prostřednictvím jednoduchého zařízení – *válcového stínidla*, zobrazeného na obrázku 7.20. Toto stínidlo zmenšuje úhel vysílaného paprsku – jak je zřejmé z obrázku 7.21, bude mít tento nový úhel velikost $\psi_s = \arctan(\Phi_m/2L_m)$. Od určité velikosti vzdálenosti L_m již není snímač schopný rozpoznat cíl a měřit vzdálenost, maximální hodnota L_m bývá obvykle cca 200 mm. Pro průměr $\Phi_m = 20 \text{ mm}$ a vzdálenost $L_m = 200 \text{ mm}$ vychází úhel $\psi_s = 2,86^\circ \doteq 3^\circ$.

Měření bude uspořádáno tak, aby byla osa snímače orientována vůči odrazné desce rámu (v klidové poloze) s úhlem různým od 90° , jak ukazuje obr. 7.22. Pokud by byl snímač orientován s úhlem 90° , měřil by snímač vzdálenost na křivce B–B' (ne zcela přesně,



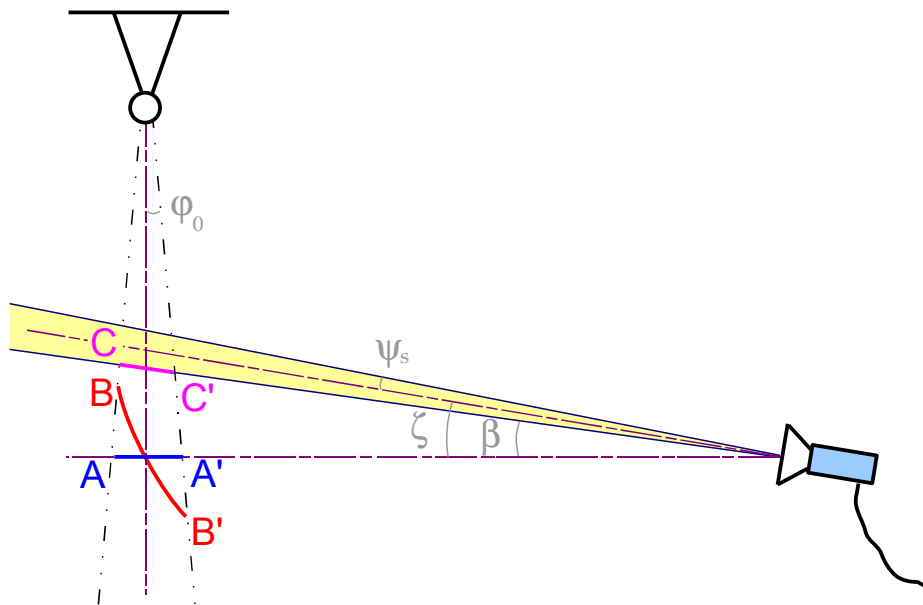
Obr. 7.20: Válcové stínidlo – ultrazvukový snímač je umístěn uvnitř. Pěnový materiál omezuje nežádoucí odrazy ultrazvukového signálu.



Obr. 7.21: Úhel vysílaného paprsku s použitím válcového stínidla.

jak bylo vysvětleno výše). Snímač vychýlíme o úhel ζ , aby paprsek (omezený válcovým stínidlem) křivku B–B' mýjel¹⁰. Snímač bude měřit vzdálenost nejbližšího bodu, na který paprsek narazí – v tomto případě to bude bod ležící na přímce vzniklé omezením paprsku hranou stínidla. Ta je odkloněna o úhel β . Snímač při takovémto uspořádání bude měřit vzdálenost bodu ležícího na úsečce C–C'. Tu lze se znalostí úhlu β přepočítat goniometrickými funkcemi tak, abychom získali průběh výchylky na přímce A–A'. Přepočítaným signálem lze výše uvedeným postupem prokládat sinusovku a určit tak periodu kyvu.

Úhel β nesmí být větší než 10° – pro větší úhly snímač již není schopen zachytit odražený paprsek a tedy i měřit vzdálenost, jak je vysvětleno v [29]. Úhel β však zároveň musí být natolik velký, aby snímač měřil vzdálenost skutečně na úsečce C–C' – tzn. aby se neprojevila vlastnost snímače, kvůli které preferuje předměty v blízkosti osy snímače.



Obr. 7.22: Princip optimalizované metody měření periody – odklonění osy snímače.

¹⁰Poloha bodů B a B' je určena okamžitou amplitudou φ_0 , je tedy nutné uvažovat počáteční amplitudu φ_{poc} , aby paprsek mýjel křivku B–B' po celou dobu měření.

Přesnost optimalizované metody

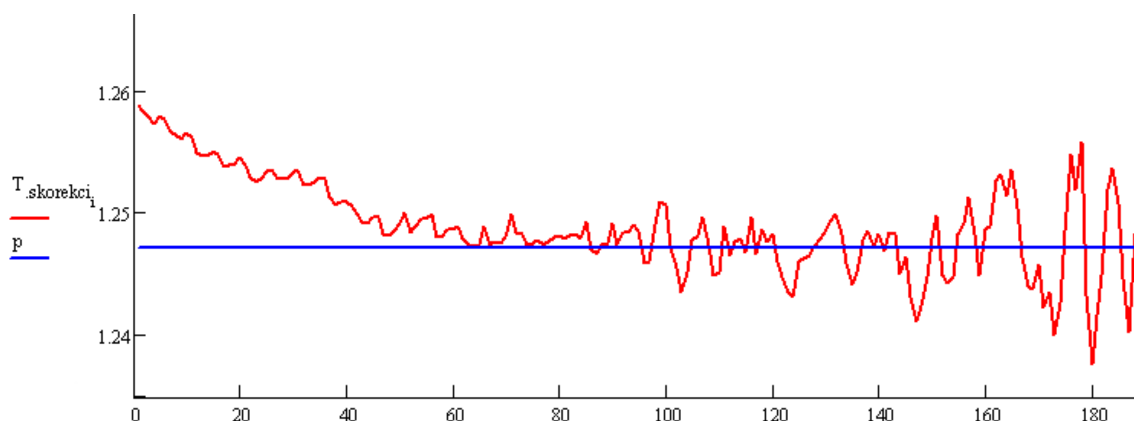
Byla provedeno měření periody kyvu součásti s cílem ověřit přesnost této metody. Tabulka 7.3 ukazuje změřené hodnoty periody při použití této metody. Uspořádání měření (tzn. úhel odklonění snímače ζ , vzdálenost snímače od odrazné desky L_0 a míru zastínění šířky paprsku danou úhlem ψ) bylo voleno náhodně, aby se ve výsledcích tento případný náhodný vliv projevil. Jedná se o měření periody kyvu třetí verze rámu.

| Č. měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Perioda/s | 1,1651 | 1,1658 | 1,1647 | 1,1659 | 1,1669 | 1,1655 | 1,1647 | 1,1670 |

Tab. 7.3: Změřené periody pomocí optimalizované metody měření ultrazvukovým snímačem.

Z těchto hodnot byla spočítána průměrná hodnota $\bar{T} = 1,1657$ s. Střední kvadratická chyba průměru je rovna $\bar{\sigma} = 0,00032$ s. Pro pravděpodobnost $P = 95\%$ a počet měření $n = 8$ je absolutní chyba vypočtené hodnoty rovna $\Delta T = 2,42 \cdot \bar{\sigma} = 0,00076$ s $\doteq 0,0008$ s. Takováto přesnost pro účely této práce postačuje.

Prostřednictvím postupu popsaného na straně 46 byl zjištěno, zda a jak se mění okamžitá doba kyvu τ v případě, že postupujeme zde uvedeným optimalizovaným postupem. Typický průběh průběhu $\tau(t)$ v takovém případě ukazuje obrázek 7.23. V počátku signálu je vidět určitý pokles okamžité doby kyvu, od určitého okamžiku (zde cca 60. sekunda měření) zůstává přibližně konstantní. Ke konci měření (zde cca od 140. sekundy) se projevuje vliv zašumění signálu – Mathcad již není schopen proložit signálem tlumenou sinusovku dostatečně přesně, a tak se projeví určité roztřesení okamžité doby kyvu. Toto roztřesení je ve střední části (60–140 s) přijatelně malé, proto je nejvhodnější prokládat sinusovku právě v této střední části. Důležitý rozdíl průběhu 7.23 oproti 7.17 spočívá v tom, že se hodnota τ u optimalizované metody pohybuje (od určitého okamžiku) okolo stále stejné hodnoty – a neklesá jako v případě 7.17.



Obr. 7.23: Průběh okamžité doby kyvu τ u optimalizované metody.

7.5. Měření vzdálenosti těžiště od osy kývání

Ve vztahu 7.7 figurují tři délkové veličiny – l_r (vzdálenost těžiště rámu od osy kývání), l_t (vzdálenost těžiště měřeného tělesa od osy kývání) a l_c (vzdálenost těžiště dvojice rám + měřené těleso od osy kývání). Při měření momentu setrvačnosti je nezbytné tyto tři hodnoty zjistit s dostatečnou přesností. K tomuto účelu opět poslouží fotogrammetrický systém Tritop.

Všechny tři používané rámy (obr. 7.1, 7.3 a 7.4) obsahují důležitý společný prvek – vodorovné rameno, které má na svém povrchu mělké drážky, do kterých zapadají ostré hroty stojanu. Postup, který bude uveden dále, se vztahuje ke třetí verzi rámu (obr. 7.4), principiálně by jej však bylo možné s drobnými modifikacemi použít i u předchozích dvou verzí.

Měření l_t i l_r je založené na stejném principu. Oproti tomu zjišťování l_c je odlišné – bude určeno výpočtem.

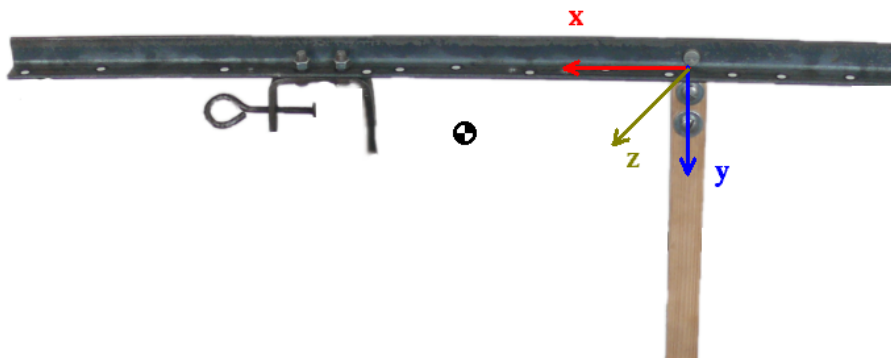
7.5.1. Vzdálenost těžiště rámu od osy kývání – l_r

S rámem byl spojen souřadný systém – tak, jak je vidět na obrázku 7.24. V tomto případě není podstatné, jakým způsobem je souřadný systém s rámem spojen – jde nám výhradně o relativní vzdálenosti. Vůči tomuto souřadnému systému byla určena poloha těžiště metodou zavěšení popsanou v kapitole 4. Souřadnice polohy těžiště rámu vůči danému souřadnému systému se rovnají:

$$\begin{aligned} r_x &= 140,234 \text{ mm} \\ r_y &= 19,363 \text{ mm} \\ r_z &= 5,813 \text{ mm} \end{aligned} \quad (7.30)$$

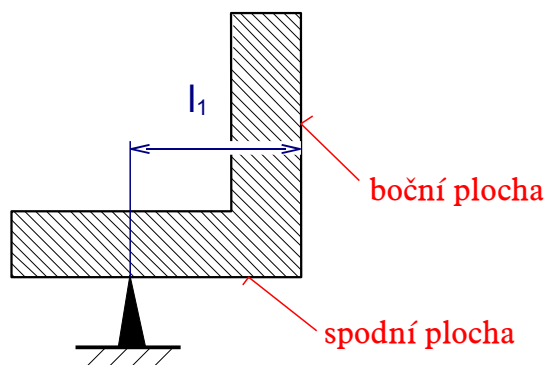
Odpovídající střední kvadratická chyba $\bar{\sigma} = 0,027 \text{ mm}$. Pro pravděpodobnost $P = 95 \%$ a počet měření $n = 5$ je poloměr koule přesnosti $R_p \doteq 0,076 \text{ mm}$.

Nyní je nutné k tomuto souřadnému systému určit rovnici osy kývání. Vzhledem k tomu, že byla drážka ve vodorovném rameni, do níž zapadají ostré hroty stojanu, vyro-



Obr. 7.24: Souřadný systém spojený s rámem a odpovídající poloha těžiště.

7.5. MĚŘENÍ VZDÁLENOSTI TĚŽIŠTĚ OD OSY KÝVÁNÍ

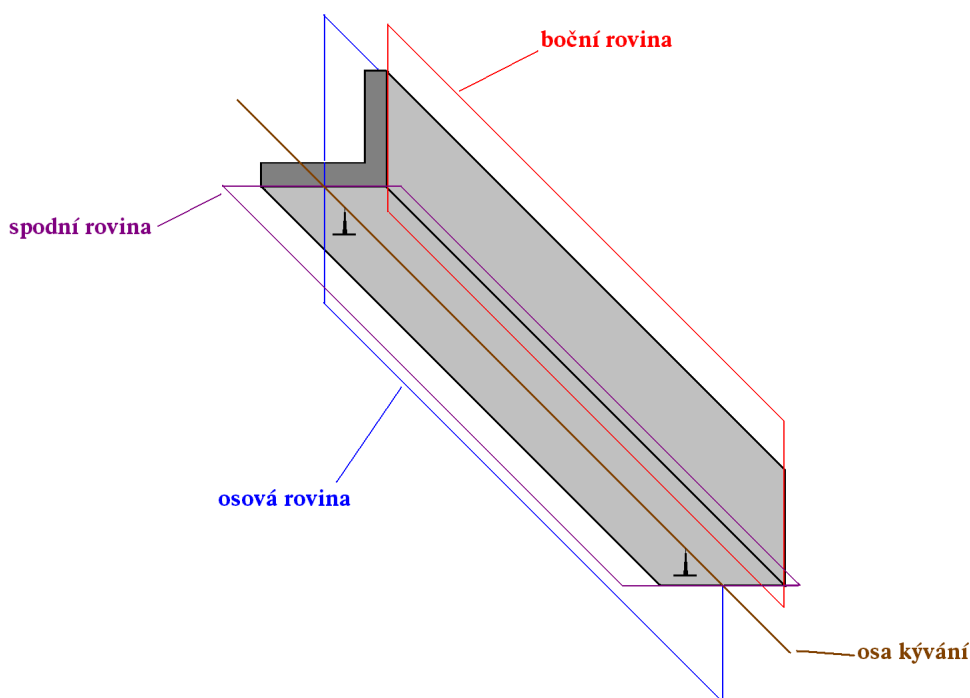


Obr. 7.25: Rameno rámu – pohled ze směru osy kývání.

bená tak, aby tvořila po celé délce ramena jednu přímku, lze tuto drážku považovat právě za hledanou osu kývání.

Geometrický popis ramena ukazuje obrázek 7.25. Rameno má profil ve tvaru písmene L. Drážka, nacházející se ve *spodní ploše*, je rovnoběžná s *boční plochou* a leží ve vzdálenosti l_1 .

Spodní i *boční plocha* jsou označeny nekódovanými referenčními body. Systémem Tritop je zjištěna jejich poloha a následně je body ležícími na *boční ploše* proložena *boční rovina* a body ležícími na *spodní ploše* je proložena *spodní rovina*¹¹ – viz obr. 7.26. Ve vzdálenosti l_1 od takto vzniklé *boční roviny* vytvoříme rovnoběžnou *osovou rovinu*¹². Hledaná osa kývání je průsečnicí¹³ *spodní* a *osové roviny*.



Obr. 7.26: Vysvětlení postupu hledání osy kývání – prokládání rovin v systému Tritop.

¹¹Příkazem *Primitives – Plane – Best-Fit Plane*.

¹²Příkazem *Primitives – Plane – Parallel Plane*.

¹³Příkaz *Primitives – Line – Intersection Line*.

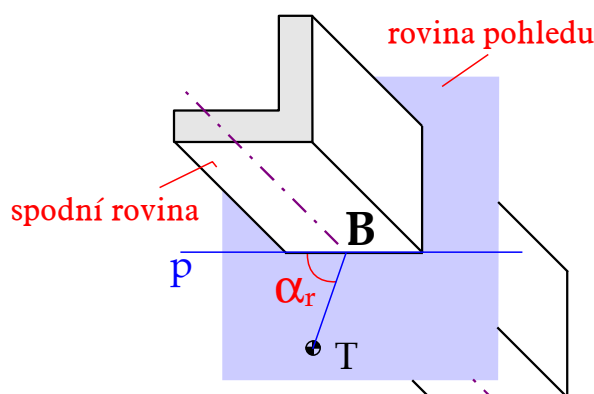
7.5. MĚŘENÍ VZDÁLENOSTI TĚŽIŠTĚ OD OSY KÝVÁNÍ

Nyní již Tritop zná polohu osy kývání i polohu těžiště vůči souřadnému systému. V těžišti vytvoříme bod *Point teziste* příkazem *Primitives – Point – Point* se souřadnicemi danými rovnicemi 7.30. Vzdálenost tohoto bodu od osy kývání určíme příkazem *Dimensions – Distances – Projected-Point Distance*.

Vzdálenost osy kývání (tzn. drážky ve spodní ploše vodorovného ramena rámu) od těžiště rámu je pro případ zde uvažovaného rámu rovna $l_r \doteq 19,45 \text{ mm}$.

Pro potřeby určení vzdálenosti l_c , tzn. vzdálenosti těžiště dvojice rám + těleso od osy kývání, potřebujeme ještě určit úhel α_r – úhel mezi *spodní rovinou* a úsečkou spojující osu kývání s těžištěm (bude vysvětleno v kapitole 7.5.3). Schéma ukazuje obrázek 7.27. V systému Tritop vytvoříme *rovinu pohledu*, která je kolmá na osu kývání a prochází těžištěm¹⁴. Dále vytvoříme úsečku *BT*¹⁵, která spojuje těžiště s průsečíkem osy a roviny pohledu¹⁶. Přímka *p* vznikne jako průsečnice *roviny pohledu* a *spodní roviny*. Hledaný úhel α_r zjistíme příkazem *Dimensions – Angles – Line-Line Angle* jakožto úhel mezi přímkou *p* a úsečkou *BT*.

Pro případ třetí verze rámu je hodnota α_r rovna $\alpha_r = 94,9^\circ$.



Obr. 7.27: Schéma zjišťování úhlu α_r .

7.5.2. Vzdálenost těžiště měřeného tělesa od osy kývání – l_t

Postup je obdobný jako v předchozí kapitole. S měřenou součástí spojíme souřadný systém a nejprve vůči němu zjistíme metodou popsanou v kapitole 4 souřadnice polohy těžiště.

Poté těleso umístíme na rám a měříme periodu kyvu celku rám + těleso (T_c). Systémem Tritop určíme k tomuto souřadnému systému (spojenému se součástí) polohu osy kývání – stejným postupem, jako v předchozí kapitole. A protože známe k tomuto souřadnému systému polohu těžiště součástí, můžeme opět příkazem *Dimensions – Distances – Projected Point Distance* zjistit hledanou vzdálenost těžiště tělesa od osy kývání – l_t .

¹⁴Příkaz *Primitives – Plane – Point-Normal Plane*.

¹⁵Příkazem *Primitives – Line – Point-Point Line*.

¹⁶Příkazem *Primitives – Point – Intersection Point*.

7.5. MĚŘENÍ VZDÁLENOSTI TĚŽIŠTĚ OD OSY KÝVÁNÍ

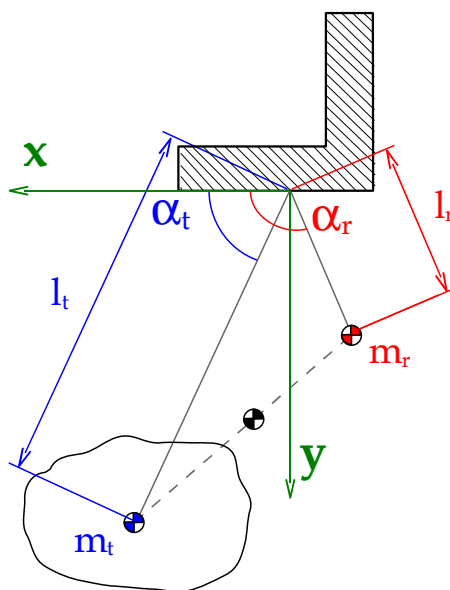
Analogicky k minulému případu určíme úhel mezi spodní rovinou rámu (obr. 7.27) a úsečkou spojující osu kývání a těžiště tělesa – získáme tak úhel α_t , který využijeme při výpočtu vzdálenosti l_c .

Pro potřeby výpočtu tenzoru setrvačnosti je nakonec potřeba určit i dva body, které leží na ose kývání, abychom z nich mohli spočítat směrové kosiny. Učiníme tak příkazem *Primitives – Points – Points From Line*. Získáme tak souřadnice dvou bodů, které definují osu kývání.

7.5.3. Vzdálenost těžiště dvojice rám + měřené těleso od osy kývání – l_c

Zjistit polohu těžiště rámu, se kterým je spojena měřená součást, lze v principu i postupem popsáním v kapitole 4 a vzdálenost od osy kývání l_c můžeme zjistit analogicky k předchozím dvěma případům. Takový postup má však několik nedostatků – součást umísťujeme na rám při každém měření jinak a bylo by nezbytné pokaždé měřit polohu těžiště znovu, což by velmi výrazně prodloužilo čas potřebný k měření (viz kapitola 7.5.5). Navíc lze takovýto postup použít jen v případě třetí verze rámu, resp. takového rámu, u kterého je součást s rámem pevně spojena.

Vzdálenost l_c proto bude výhodnější určit výpočtem. V předchozích dvou kapitolách jsme zjistili vzdálenosti l_t (vzdálenost těžiště součásti od osy kývání), l_r (vzdálenost rámu od osy kývání) a úhly α_r a α_t , což jsou úhly mezi *spodní rovinou* rámu a úsečkou spojující osu kývání a těžiště rámu, resp. tělesa. Vzdálenost l_c odvodíme v pohledu ve směru osy kývání – viz obrázek 7.28. Těžiště celku rám + měřené těleso bude ležet na spojnici těžišť obou samostatných částí ve vzdálenosti, která bude v opačném poměru hmotností.



Obr. 7.28: Určování polohy těžiště celku rám + měřené těleso (l_c).

7.5. MĚŘENÍ VZDÁLENOSTI TĚŽIŠTĚ OD OSY KÝVÁNÍ

Polohu těžiště a následně vzdálenost od osy jsme určovali pokaždé v jiném souřadném systému (u určování l_r v souřadném systému spojeném s rámem a l_t v souřadném systému spojeném s tělesem). Zavedeme proto nový souřadný systém (x, y) , jehož počátek leží na ose kývání a osa y je kolmá na *spodní rovinu* – viz obr. 7.28. Známé vzdálenosti l_r a l_t jsou potom vzdálenosti od počátku tohoto souřadného systému, úhly α_r a α_t se zobrazí jako úhel od osy x .

Uurčíme souřadnice těžiště rámu i souřadnice těžiště tělesa vůči tomuto souřadnému systému:

$$T_t = [l_t \cos \alpha_t; l_t \sin \alpha_t] \quad (7.31)$$

$$T_r = [l_r \cos \alpha_r; l_r \sin \alpha_r] \quad (7.32)$$

Souřadnice hledaného těžiště určíme na základě vztahu pro polohu těžiště [10]:

$$\vec{r}_t = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} \quad (7.33)$$

Pro náš případ dostaneme souřadnice polohy těžiště celku rám + měřená součást:

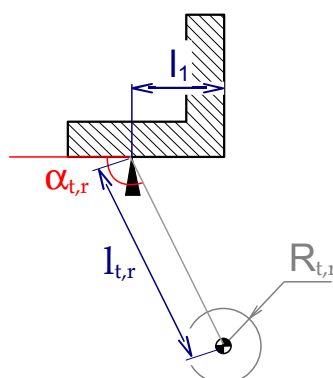
$$\vec{r}_t = \left[\frac{m_t l_t \cos \alpha_t + m_r l_r \cos \alpha_r}{m_t + m_r}; \frac{m_t l_t \sin \alpha_t + m_r l_r \sin \alpha_r}{m_t + m_r} \right] \quad (7.34)$$

a odsud hledanou hodnotu l_c jako vzdálenost od počátku souřadného systému:

$$l_c = \sqrt{\left(\frac{m_t l_t \cos \alpha_t + m_r l_r \cos \alpha_r}{m_t + m_r} \right)^2 + \left(\frac{m_t l_t \sin \alpha_t + m_r l_r \sin \alpha_r}{m_t + m_r} \right)^2} \quad (7.35)$$

7.5.4. Odhad chyby měření vzdálenosti

Abychom mohli určit celkovou chybu měření vztahem 7.12, potřebujeme znát absolutní chybu, se kterou jsme zjistili jednotlivé vzdálenosti.



Obr. 7.29: Určení chyby měření vzdálenosti. Pozn. poloměr $R_{t,r}$ je záměrně několikanásobně zvětšen.

7.5. MĚŘENÍ VZDÁLENOSTI TĚŽIŠTĚ OD OSY KÝVÁNÍ

Chybu měření l_t a l_r lze odhadnout v pohledu v normálové rovině osy kývání – obr. 7.29. Koule přesnosti polohy těžiště (viz str. 23) se promítne jako kruh o poloměru $R_{t,r}$. Pro případ měření vzdálenosti těžiště rámu od osy kývání je $R_r = 0,076 \text{ mm}$.

Vzdálenost l_1 na obrázku 7.25 byla určena posuvným měřidlem, chyba měření je tedy $\Delta l_1 = 0,05 \text{ mm}$. Tato vzdálenost se do směru vzdálenosti $l_{t,r}$ projeví jako $\Delta l_1 \cos \alpha_{t,r}$. Pro velikost úhlu α_r v případě třetí verze rámu je průmět této chyby do směru l_r roven $\Delta l_{1r} = 0,003 \text{ mm}$.

Celková chyba měření vzdálenosti pro případ l_r tak bude rovna

$$\begin{aligned}\Delta l_r &= \Delta l_{1r} + r = 0,003 \text{ mm} + 0,076 \text{ mm} \\ \Delta l_r &\doteq 0,08 \text{ mm}\end{aligned}\tag{7.36}$$

Stejným postupem odhadneme chybu měření pro případ l_t . Chyba vypočtené hodnoty l_c byla odhadnuta jako součet chyb $\Delta l_c = \Delta l_r + \Delta l_t$ ¹⁷.

Velikost chyb se ukazuje být přijatelně malá pro většinu měřených součástí.

7.5.5. Časová náročnost uvedeného postupu

Uvažujme, že je k určení polohy těžiště vůči souřadnému systému při použití metody popsané v kapitole 4 potřeba provést 4–5 měření¹⁸ v systému Tritop. Pokud budeme určovat hodnoty l_r , l_t a l_c postupem popsaným v této kapitole, je potřeba k zjištění momentu setrvačnosti k jedné ose provést:

1. 4–5 měření Tritopem k zjištění polohy těžiště rámu vůči souřadnému systému spojenému s rámem a k zjištění l_r (a α_r)
2. 4–5 měření k zjištění polohy těžiště součásti vůči souřadnému systému spojenému se součástí
3. 1 měření k zjištění l_t a α_t ; ze známých hodnot lze dopočítat vzdálenost l_c

Pokud bychom vzdálenost l_c neurčovali výpočtem, ale stejným postupem jako v případě l_t a l_r , potřebovali bychom i v třetím bodě namísto jednoho provést 4–5 měření – kvůli hledání polohy těžiště celku rám + měřená součást.

Jak bude popsáno v kapitole 9, budeme u jedné součásti provádět měření k několika osám (6 a více). Body 1 a 2 tak provedeme jen jednou, opakovat se bude pouze bod 3. Zjišťování polohy l_c výpočtem namísto měření v takovém případě velmi zkrátí čas potřebný k uskutečnění celého měření. Pro případ měření tenzoru setrvačnosti těhlice (kapitola 10) potřebujeme zde uvedeným postupem provést cca $4 + 4 + 9 \cdot 1 = 17$ měření v Tritopu. Pokud bychom vzdálenost l_c nepočítali, ale přímo měřili, bylo by to $4 + 4 + 9 \cdot 4 = 44$. Zvolený postup je tedy výrazně rychlejší.

¹⁷Pozn. Tento odhad není zcela přesný, pro prvotní odhad chyby však dostačuje.

¹⁸Tím je míněno nafotit jednu sadu fotografií a provést výpočet v software Tritop.

7.6. Měření hmotnosti součástí

Posledními veličinami, které je nutné zadat do vztahu 7.7, jsou hmotnosti rámu m_r a hmotnost měřeného tělesa m_t . K jejich určení byly použity laboratorní váhy.

Hmotnost, kterou bylo potřeba určit, se pohybovala v rozmezí cca 0,2–8 kg. K dispozici byly váhy s různou přesností a zejména různým měřicím rozsahem. Proto bylo pro každou součást vždy vybrána nejpřesnější dostupná váha, která svým měřicím rozsahem dostačovala.

Byly používány dvě váhy – pro hmotnosti 0–5 kg digitální váha *Eta 1770* a pro vyšší hmotnosti (5–10 kg) váha *Transporta 5567/II*.

Opět je nezbytné určit absolutní chybu měření, a to na základě manuálu a výrobních štítků vah. Manuál váhy *Eta 1770* uvádí přesnost měření (tedy chybu měření) $\Delta m = 0,001 \text{ g}$. Výrobní štítek váhy *Transporta 5567/II* uvádí přesnost $\Delta m = 0,002 \text{ g}$. Tyto hodnoty byly dosazovány do vztahů 7.15 a 7.16 jakožto hodnoty Δm_t a Δm_r .

8. Ověření přesnosti metody měření momentu setrvačnosti

Byla provedena měření, jejichž cílem bylo ověřit, do jaké míry se změřené hodnoty momentu setrvačnosti shodují s teorií, aby bylo možné odpovědět na otázku, zda metoda není zatížená důležitou systematickou chybou. Pro tyto potřeby byla vybrána dvě modelová tělesa – ocelový kroužek a ocelová koule.

8.1. Měření momentu setrvačnosti ocelového kroužku

Jedná se o dutý válec (obr. 8.1) s vnějším průměrem $D = 75,8\text{ mm}$, vnitřním průměrem $d = 32\text{ mm}$ a výškou $v = 29,5\text{ mm}$. Kroužek byl umístěn na rám tak, aby jeho osa byla rovnoběžná s osou kývání.

Byly změřeny všechny hodnoty potřebné k tomu, abychom mohli vypočítat moment setrvačnosti – viz tabulka 8.1¹.



Obr. 8.1: Ocelový kroužek sloužící k ověření přesnosti metody měření momentu setrvačnosti.

| Měřená veličina | Symbol | Hodnota | Absolutní chyba |
|---------------------------------------|--------|----------|--------------------------------|
| Hmotnost rámu | m_r | 0,693 kg | $\Delta m_r = 0,001\text{ kg}$ |
| Hmotnost tělesa | m_t | 0,843 kg | $\Delta m_t = 0,001\text{ kg}$ |
| Vzdálenost těžiště rámu od osy kyvu | l_r | 19,45 mm | $\Delta l_r = 0,08\text{ mm}$ |
| Vzdálenost těžiště tělesa od osy kyvu | l_t | 47,75 mm | $\Delta l_t = 0,05\text{ mm}$ |
| Perioda kyvu samotného rámu | T_r | 1,1657 s | $\Delta T_r = 0,0008\text{ s}$ |
| Perioda kyvu dvojice rám + těleso | T_c | 0,7330 s | $\Delta T_c = 0,0005\text{ s}$ |

Tab. 8.1: Změřené hodnoty ocelového kroužku.

¹Těžiště kroužku bylo uvažováno v jeho středu; chyba Δl_t byla odhadnuta na základě přesnosti měření Tritopem [28].

8.1. MĚŘENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI OCELOVÉHO KROUŽKU

Dále byla změřena velikost α_t – úhlu mezi spodní rovinou a úsečkou spojující těžiště součásti (kroužku) s osou kývání: $\alpha_t = 89,2^\circ$. Z předchozích měření známe $\alpha_r = 94,8^\circ$. Vztahem 7.35 byla určena vzdálenost $l_c = 34,95 \text{ mm}$ a odpovídající chyba $\Delta l_c = 0,13 \text{ mm}$.

Prostřednictvím vztahu 7.7 byla z hodnot T_c , T_r , m_t , m_r , l_t a l_r a l_c spočítána velikost momentu setrvačnosti vůči ose rovnoběžné s osou kývání, procházející těžištěm:

$$I_{ts} = 692,87 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \quad (8.1)$$

Důležité bude porovnání s teoretickými hodnotami. Pro moment setrvačnosti dutého válce vůči ose válce platí vztah:

$$I_{teor} = \frac{1}{2} m_t (R^2 + r^2) \quad (8.2)$$

Dosazením $R = 75,8/2 \text{ mm}$ a $r = 32/2 \text{ mm}$ získáme:

$$I_{teor} = 713,35 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

Rozdíl teoretické a změřené hodnoty:

$$\Delta_{teor} = |I_{teor} - I_{ts}| = 20,48 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

Procentuální podíl Δ_{teor}/I_{teor} je roven

$$\frac{\Delta_{teor}}{I_{teor}} = 2,87 \%$$

Jak je vidět, teoretická a změřená hodnota momentu setrvačnosti se do značné míry shodují. Rozdíl mezi změřenou a teoretickou hodnotou momentu setrvačnosti může být mimo jiné způsoben skutečností, že osa válce nebyla při měření zcela přesně rovnoběžná s osou kývání – toho nelze docílit. I tak můžeme výsledek považovat za přijatelně přesný.

Prostřednictvím vztahů 7.12–7.19 byla stanovena absolutní a relativní chyba měření:

$$\Delta I_{ts} = 33,87 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \quad (8.3)$$

$$\delta I_{ts} = 4,61 \% \quad (8.4)$$

Relativní chyba měření δI_{ts} je větší než obvykle požadovaná 3 %. Jak však bylo zmíněno, tento postup odhadu chyby měření je konzervativní. U těles s větším momentem setrvačnosti se absolutní chyba projeví menší relativní chybou – většina běžných součástí podvozků má moment setrvačnosti dostatečně velký, takže se relativní chyba měření bude pohybovat pod požadovanými třemi procenty, jak bude ukázáno dále.

8.2. Měření momentu setrvačnosti ocelové koule

V předchozím případě byl kroužek spojen s rámem tak, aby jeho osa byla rovnoběžná s osou kývání – to však není možné zcela přesně zaručit, mezi osou válce a osou kývání bude ve skutečnosti vždy nenulový úhel. Pro druhé kontrolní měření proto byla vybrána součást, u které na orientaci vůči ose kývání nezáleží; tento požadavek splňuje pouze *koule* – moment setrvačnosti koule je vůči všem osám procházejícím středem stejný. Byla použita ocelová koule zobrazená na obr. 8.2. Jednotlivé dílčí změřené hodnoty shrnuje tabulka 8.2.



Obr. 8.2: Ocelová koule sloužící k ověření přesnosti metody měření momentu setrvačnosti.

| Měřená veličina | Symbol | Hodnota | Absolutní chyba |
|---------------------------------------|--------|----------|-------------------------|
| Hmotnost rámu | m_r | 0,693 kg | $\Delta m_r = 0,001$ kg |
| Hmotnost tělesa | m_t | 0,443 kg | $\Delta m_t = 0,001$ kg |
| Vzdálenost těžiště rámu od osy kyvu | l_r | 19,45 mm | $\Delta l_r = 0,08$ mm |
| Vzdálenost těžiště tělesa od osy kyvu | l_t | 30,89 mm | $\Delta l_t = 0,05$ mm |
| Perioda kyvu samotného rámu | T_r | 1,1657 s | $\Delta T_r = 0,0008$ s |
| Perioda kyvu dvojice rám + těleso | T_c | 0,8685 s | $\Delta T_c = 0,0003$ s |

Tab. 8.2: Změřené hodnoty ocelové koule.

Velikost úhlu α_t je rovna $\alpha_t = 88,2^\circ$, úhel α_r známe z předchozích měření – $\alpha_r = 94,8^\circ$. Odpovídající vzdálenost l_c zjištěná vztahem 7.35 je $l_c = 23,87$ mm.

Vztahem 7.7 byla spočítána velikost momentu setrvačnosti vůči ose procházející středem:

$$I_{ts} = 108,41 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \quad (8.5)$$

Pro moment setrvačnosti koule platí vztah:

$$I_{teor} = \frac{2}{5} m_t r^2 \quad (8.6)$$

Dosazením poloměru $r = 24,5$ mm získáme:

$$I_{teor} = 106,36 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

8.2. MĚŘENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI OCELOVÉ KOULE

Rozdíl teoretické a změřené hodnoty je roven:

$$\Delta_{teor} = |I_{teor} - I_{ts}| = 2,04 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

Procentuální podíl Δ_{teor}/I_{teor} je roven

$$\frac{\Delta_{teor}}{I_{teor}} = 1,92 \%$$

Je vidět, že přesnost, se kterou umíme měřit periodu kyvu, vzdálenost těžiště od osy kývání a hmotnost, vyhovuje spíše větším tělesům. Určitý podíl na chybě měření může mít i skutečnost, že vztah 8.6 platí pro přesnou kouli; skutečná koule se od modelového ideálu bude vždy poněkud lišit.

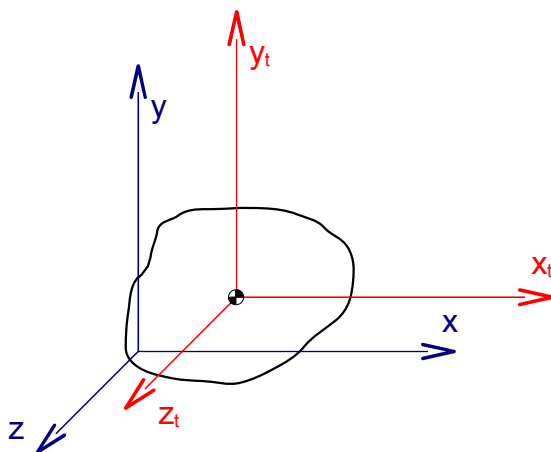
Na základě výsledků a srovnáním s teoretickými hodnotami můžeme vyslovit závěr, že metoda **není zatížená relevantní systematickou chybou** a že přináší dostatečně přesné výsledky.

9. Výpočet tenzoru setrvačnosti z naměřených hodnot

Jak bylo zmíněno v kapitole 7.1, tenzor setrvačnosti ve tvaru 2.3 obsahuje šest nezávislých složek – tři momenty setrvačnosti k osám daného kartézského souřadného systému I_x , I_y a I_z a tři deviační momenty D_{xy} , D_{xz} a D_{yz} . K určení tenzoru setrvačnosti jednoho tělesa proto potřebujeme provést šest měření a zjistit tak moment setrvačnosti k šesti různým osám. Z těchto šesti hodnot je poté nutné jednotlivé složky tenzoru setrvačnosti dopočítat – v této kapitole bude popsáno jak¹.

Vztahem 7.7 je vypočítán I_{tt} – moment setrvačnosti vůči ose, která prochází těžištěm, přičemž toto těžiště obecně není totožné s počátkem souřadného systému. Zavedeme proto nový souřadný systém (x_t, y_t, z_t) , jehož počátek se nachází v těžišti tělesa a jehož osy jsou rovnoběžné k osám původního souřadného systému (x, y, z) , který jsme používali při jednotlivých měřeních – viz obr. 9.1.

Tenzor setrvačnosti budeme určovat k osám tohoto souřadného systému (x_t, y_t, z_t) . Osy tohoto systému jsou *centrálními osami setrvačnosti* [13].



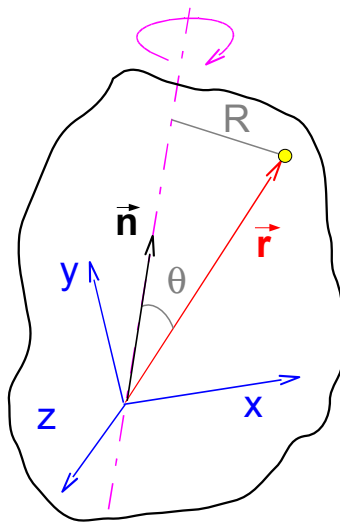
Obr. 9.1: Souřadný systém (x_t, y_t, z_t) , vůči němuž je určován tenzor setrvačnosti. Počátek se nachází v těžišti.

9.1. Odvození vztahu pro výpočet složek tenzoru setrvačnosti

Na obrázku 9.2 je obecné těleso s obecně orientovaným souřadným systémem (x, y, z) a osou rotace určenou jednotkovým vektorem \vec{n} :

$$\vec{n} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)^T \quad (9.1)$$

¹Původní myšlenka výpočtů čerpá z [15].



Obr. 9.2: Výpočet tenzoru setrvačnosti z naměřených hodnot.

kde $\cos \alpha$, $\cos \beta$ a $\cos \gamma$ jsou směrové kosiny osy rotace vůči osám souřadného systému. Hodnoty α , β a γ lze triviálním způsobem dopočítat ze souřadnic bodů definujících osu kývání – viz strana 56.

Moment setrvačnosti tělesa vůči této ose (I_{to}) můžeme vyjádřit jako integrál přes hmotnost tělesa podle vztahu:

$$\begin{aligned} I_{to} &= \int R^2 dm \\ &= \int (\vec{r} \sin \phi)^2 dm \\ &= \int |\vec{r} \times \vec{n}|^2 dm \end{aligned} \quad (9.2)$$

přičemž \vec{r} je polohový vektor elementu o hmotnosti dm . Takový element má souřadnice:

$$\vec{r} = (x, y, z)^T \quad (9.3)$$

Dosazením 9.1 a 9.3 do 9.2 a poté vektorovým a skalárním součinem lze získat:

$$\begin{aligned} I_{to} &= \int (y \cos \gamma - z \cos \beta, z \cos \alpha - x \cos \gamma, x \cos \beta - y \cos \alpha)^2 dm \\ &= \int [(y \cos \gamma - z \cos \beta)^2 + (z \cos \alpha - x \cos \gamma)^2 + (x \cos \beta - y \cos \alpha)^2] dm \end{aligned}$$

Tuto rovnici lze upravit na vztah:

$$I_{to} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2D_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2D_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2D_{xz} \cos \alpha \cos \gamma \quad (9.4)$$

kde I_x , I_y a I_z jsou hlavní momenty setrvačnosti ve tvaru definovaném vztahem 2.4 a D_{xy} , D_{yz} a D_{xz} jsou deviační momenty ve tvaru 2.5. Rovnice 9.4 udává vztah mezi **jednotlivými složkami tenzoru setrvačnosti, momentem setrvačnosti vůči ose rotace procházející počátkem souřadného systému a směrovými kosiny této osy.**

K rovnici 9.4 lze dospět i na základě vztahů pro transformaci tenzoru setrvačnosti do souřadného systému s pootočenými osami (viz např. [12]).

9.2. Postup měření a výpočtů

Při měření tenzoru setrvačnosti změříme momenty setrvačnosti tělesa vůči šesti různým osám prostřednictvím výše uvedeného postupu. Orientace těchto os je do určité míry náhodná – jsme omezeni tvarem tělesa, protože potřebujeme součást vhodně (tzn. dostatečně pevně) upevnit do svorky rámu. Je však nezbytné se snažit zohlednit požadavky na vhodnou orientaci os – šest změřených momentů setrvačnosti by mělo co nejkompaktněji popisovat setrvačné vlastnosti součásti, resp. setrvačné vlastnosti za rotace ve všech směrech. Osy by měly proto být vůči sobě orientovány s pokud možno co největším úhlem².

V našem případě získáme měřením šest momentů setrvačnosti k šesti osám procházejícími těžištěm I_{t1} – I_{t6} a směrové kosiny těchto os $\cos \alpha_1$ – $\cos \alpha_6$, $\cos \beta_1$ – $\cos \beta_6$ a $\cos \gamma_1$ – $\cos \gamma_6$. Pro každou osu a odpovídající moment setrvačnosti platí rovnice 9.4. Získáme tak šest rovnic ve tvaru 9.4:

$$\begin{aligned}
 I_{t1} &= I_x \cos^2 \alpha_1 + I_y \cos^2 \beta_1 + I_z \cos^2 \gamma_1 - 2D_{xy} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - 2D_{yz} \cos \beta_1 \cos \gamma_1 - 2D_{xz} \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 \\
 I_{t2} &= I_x \cos^2 \alpha_2 + I_y \cos^2 \beta_2 + I_z \cos^2 \gamma_2 - 2D_{xy} \cos \alpha_2 \cos \beta_2 - 2D_{yz} \cos \beta_2 \cos \gamma_2 - 2D_{xz} \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 \\
 I_{t3} &= I_x \cos^2 \alpha_3 + I_y \cos^2 \beta_3 + I_z \cos^2 \gamma_3 - 2D_{xy} \cos \alpha_3 \cos \beta_3 - 2D_{yz} \cos \beta_3 \cos \gamma_3 - 2D_{xz} \cos \alpha_3 \cos \gamma_3 \\
 I_{t4} &= I_x \cos^2 \alpha_4 + I_y \cos^2 \beta_4 + I_z \cos^2 \gamma_4 - 2D_{xy} \cos \alpha_4 \cos \beta_4 - 2D_{yz} \cos \beta_4 \cos \gamma_4 - 2D_{xz} \cos \alpha_4 \cos \gamma_4 \\
 I_{t5} &= I_x \cos^2 \alpha_5 + I_y \cos^2 \beta_5 + I_z \cos^2 \gamma_5 - 2D_{xy} \cos \alpha_5 \cos \beta_5 - 2D_{yz} \cos \beta_5 \cos \gamma_5 - 2D_{xz} \cos \alpha_5 \cos \gamma_5 \\
 I_{t6} &= I_x \cos^2 \alpha_6 + I_y \cos^2 \beta_6 + I_z \cos^2 \gamma_6 - 2D_{xy} \cos \alpha_6 \cos \beta_6 - 2D_{yz} \cos \beta_6 \cos \gamma_6 - 2D_{xz} \cos \alpha_6 \cos \gamma_6
 \end{aligned}
 \tag{9.5}$$

Vystupuje zde šest neznámých – I_x , I_y , I_z , D_{xy} , D_{yz} a D_{xz} , což je šest nezávislých složek tenzoru setrvačnosti. Řešením lze tyto neznámé dopočítat, čímž získáme všech devět hledaných složek tenzoru setrvačnosti ve vztahu 2.3.

9.3. Odhad chyby při určování tenzoru setrvačnosti

Měření samotné je náročné na přesnost a náchylné k chybě – ve vztazích vystupuje množství měřených veličin a chyba v jediné z nich znehodnotí výsledky. Potřebujeme ověřit, zda jsme se této (hrubé) chyby nedopustili.

Do určité míry lze přesnost ověřit tak, že změříme moment setrvačnosti k další (kontrolní) ose. Získáme tak hodnotu I_k a směrové kosiny $\cos \alpha_k$, $\cos \beta_k$ a $\cos \gamma_k$. Vztahem 9.4 určíme, kolik by se měl moment setrvačnosti k této kontrolní ose rovnat podle tenzoru

²Můžeme ilustrovat na příkladu: Mějme změřený moment k pěti osám setrvačnosti a nyní řešíme, jak orientovat osu šestou. Pokud bude úhel mezi šestou osou a jednou z pěti předchozích os například 5° , bude množství nové informace, které získáme měřením momentu setrvačnosti k této šesté ose, poměrně malé. Jestliže však bude úhel vůči kterékoli další ose roven např. nejméně 45° , bude množství nové informace získané tímto šestým měřením výrazně větší. Pokud bychom byli schopni změřit moment setrvačnosti zcela přesně, nehrálo by to roli. V reálném měření však vhodná orientace os omezí vliv nepřesností a tím i chyb.

setrvačnosti (který jsme získali výpočtem z předchozích šesti měření) – získáme hodnotu I_{teor} . Porovnáme ji se změřeným momentem setrvačnosti I_k :

$$\delta = \frac{I_k - I_{teor}}{I_{teor}} \cdot 100 \text{ [%]} \quad (9.6)$$

Snažíme se, aby měla *kontolní osa* co největší úhel vůči osám souřadného systému (x_t, y_t, z_t) . Výsledná chyba je do určité míry ovlivněna náhodou, proto kontrolu obvykle provedeme ve více než jednom případě a odhadneme procentuální chybu jako největší ze vzniklých δ_i .

Tento postup odhadu chyby dává základní představu o tom, zda jsme se nedopustili hrubé chyby v jednotlivých měřeních. Procentuální odchylka δ je částečně způsobena chybou konkrétního kontrolního měření a jen částečně chybou vypočteného tenzoru setrvačnosti, která nás ve skutečnosti zajímá. Postup též neumožňuje odhalit systematické chyby, které by se projevíly stejným dílem ve všech měřeních a ovlivnily tak celý tenzor setrvačnosti.

9.4. Transformace tenzoru setrvačnosti

Výše popsaným postupem jsme získali tenzor setrvačnosti k souřadnému systému (x_t, y_t, z_t) . Pokud bychom potřebovali přepočítat tenzor do jiného souřadného systému, je potřeba použít transformačních vztahů. Postup výpočtů čerpá z [12] a [13], kde je také provedeno odvození.

Tenzor setrvačnosti vůči posunutým osám

Máme tenzor setrvačnosti \mathbf{I}_t vůči souřadnému systému s počátkem v těžišti. Pro tenzor setrvačnosti \mathbf{I}_2 nacházející se v souřadném systému (x_2, y_2, z_2) , jehož osy jsou posunuty oproti souřadnému systému v těžišti (x_t, y_t, z_t) o vektor (d_x, d_y, d_z) , platí:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_t + \mathbf{I}_m \quad (9.7)$$

kde \mathbf{I}_m je tenzor setrvačnosti hmotného bodu umístěného v těžišti, ve kterém je soustředěna celá hmotnost tělesa [12]:

$$\mathbf{I}_m = \begin{pmatrix} m(d_y^2 + d_z^2) & -m d_x d_y & -m d_x d_z \\ -m d_x d_y & m(d_x^2 + d_z^2) & -m d_y d_z \\ -m d_x d_z & -m d_y d_z & m(d_x^2 + d_y^2) \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Tenzor setrvačnosti vůči pootočeným osám

Máme tenzor setrvačnosti \mathbf{I}_1 vůči souřadnému systému (x_1, y_1, z_1) a druhý souřadný systém (x_2, y_2, z_2) s počátkem ve stejném bodě, ale jinou orientací os. Pro tyto dva souřadné systémy vytvoříme *transformační matici* složenou ze směrových kosinů:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_x & \cos \alpha_y & \cos \alpha_z \\ \cos \beta_x & \cos \beta_y & \cos \beta_z \\ \cos \gamma_x & \cos \gamma_y & \cos \gamma_z \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

kde $\cos \alpha_x$, $\cos \beta_x$ a $\cos \gamma_x$ jsou směrové kosiny osy x_2 vůči souřadnému systému (x_1, y_1, z_1) , dále analogicky.

Tenzor setrvačnosti \mathbf{I}_2 vůči souřadnému systému (x_2, y_2, z_2) je roven [12]:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{T} \quad (9.10)$$

Hlavní osy setrvačnosti

Hlavní osy setrvačnosti jsou takové osy, ke kterým jsou nulové deviační momenty – viz rovnice 2.6. S použitím vztahu 9.10 můžeme psát:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{T} \quad (9.11)$$

což je v podstatě problém hledání vlastních hodnot a vlastního vektoru tenzoru setrvačnosti ([12], [15]). Podmínka řešení:

$$\begin{vmatrix} (I_x - \lambda) & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & (I_y - \lambda) & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & (I_z - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (9.12)$$

vede na rovnici ve tvaru

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (9.13)$$

kde a , b a c jsou konstanty³. Reálné kořeny rovnice 9.13 jsou hledanými hlavními momenty setrvačnosti, směrové kosiny os získáme jako vlastní vektory tenzoru setrvačnosti.

V programovém prostředí Mathcad výpočet vlastních hodnot provedeme příkazem **eigenvals(I)**. Směrové kosiny hlavních os lze získat příkazem **eigenvecs(I)**.

³Lze je získat vyjádřením determinantu 9.12 a úpravou.

10. Realizace měření tenzoru setrvačnosti součásti

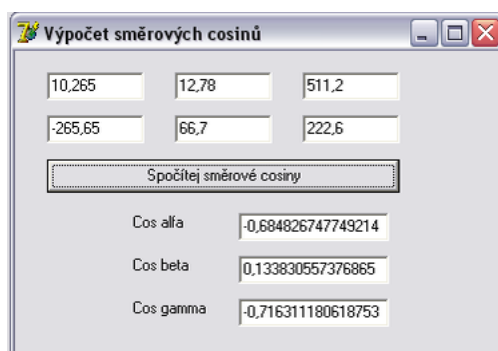
V této kapitole bude popsána praktická aplikace výše uvedeného postupu měření (a výpočtu) tenzoru setrvačnosti součásti – měřena byla těhlice formule Ford zobrazená na obrázku 5.3. Jako souřadný systém, ke kterému byl tenzor setrvačnosti určován, byl zvolen systém rovnoběžný se souřadným systémem zobrazeném na obr. 5.3 nacházející se v těžišti tělesa (tzn. počátek nového systému (x_t, y_t, z_t) leží v souřadnicích $(-4, 414 \text{ mm}; -63, 112 \text{ mm}; -28, 151 \text{ mm})$ původního souřadného systému – viz kapitola 5.3).

K určení tenzoru setrvačnosti je potřeba určit momenty setrvačnosti k šesti osám. Ve všech případech budeme používat stejný rám (verze 3), proto i hodnoty vztahující se k rámu jsou pro všech šest měření stejné. Společné hodnoty shrnuje tabulka 10.1.

| Měřená veličina | Symbol | Hodnota | Absolutní chyba |
|-------------------------------------|------------|----------|---------------------------------|
| Hmotnost rámu | m_r | 0,693 kg | $\Delta m_r = 0,001 \text{ kg}$ |
| Hmotnost těhlice | m_t | 2,149 kg | $\Delta m_t = 0,001 \text{ kg}$ |
| Vzdálenost těžiště rámu od osy kyvu | l_r | 19,45 mm | $\Delta l_r = 0,08 \text{ mm}$ |
| Perioda kyvu samotného rámu | T_r | 1,1657 s | $\Delta T_r = 0,0008 \text{ s}$ |
| Úhel úsečky BT | α_r | 94,9° | $\Delta \alpha_r = 0,1^\circ$ |

Tab. 10.1: Společné hodnoty při měření tenzoru setrvačnosti těhlice formule Ford.

Těhlici budeme spojovat s rámem tak, abychom zohlednili požadavky popsané v kapitole 9.2. Změříme momenty setrvačnosti vůči šesti různým osám. V každém jednotlivém měření zjistíme tyto dílčí hodnoty: **vzdálenost těžiště těhlice od osy kývání** při dané orientaci těhlice ($l_{t1}-l_{t6}$), **úhel mezi spodní rovinou a úsečkou spojující těžiště těhlice s osou** ($\alpha_{t1}-\alpha_{t6}$), **periodu kyvu dvojice rám + těhlice** při dané orientaci těhlice ($T_{c1}-T_{c6}$) a **směrové kosiny i-té osy kývání** ($\cos \alpha_i, \cos \beta_i$ a $\cos \gamma_i$).



Obr. 10.1: Program *Výpočet směrových kosinů*.

| Osa | l_{ti}/mm | $\alpha_{ti}/^\circ$ | T_{ci}/s | $\cos \alpha_i$ | $\cos \beta_i$ | $\cos \gamma_i$ |
|-----|-------------|----------------------|------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 1 | 170,701 | 81,3 | 0,9273 | 0,05394 | -0,99800 | -0,03290 |
| 2 | 172,470 | 84,5 | 0,9310 | 0,63102 | 0,77399 | 0,05231 |
| 3 | 80,135 | 88,0 | 0,7142 | 0,02431 | 0,04138 | -0,99885 |
| 4 | 86,524 | 80,7 | 0,7512 | 0,44288 | -0,01578 | 0,89644 |
| 5 | 93,822 | 108,8 | 0,7686 | 0,08041 | 0,81478 | 0,57317 |
| 6 | 79,298 | 100,3 | 0,8470 | -0,67317 | -0,73652 | 0,06619 |

Tab. 10.2: Vzdálenosti těžiště těhlice od osy kývání, úhly úseček BT spojující těžiště těhlice s osou kývání, priody kyvu dvojice rám + těhlice a směrové kosiny os.

K výpočtu směrových kosinů z dvojic bodů určujících osu kývání (získáme je z měření Tritopem) byl vytvořen jednoduchý program v prostředí Delphi, který tento výpočet značně zrychluje – viz obr. 10.1.

Hodnoty získané z šesti měření ukazuje tabulka 10.2. Na základě znalosti jednotlivých úhlů α_{ti} byla vztahem 7.35 zjištěna vzdálenost těžiště dvojice rám + těhlice při jednotlivých měřeních – viz tabulka 10.3.

| l_{c1}/mm | l_{c2}/mm | l_{c3}/mm | l_{c4}/mm | l_{c5}/mm | l_{c6}/mm |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 133,692 | 135,083 | 65,307 | 70,034 | 75,558 | 64,686 |

Tab. 10.3: Jednotlivé vzdálenosti l_c .

Z souboru získaných hodnot spočítáme vztahem 7.7 momenty setrvačnosti $I_{t1}-I_{t6}$ odpovídající jednotlivým osám – viz tabulka 10.4.

| I_{t1} | I_{t2} | I_{t3} | I_{t4} | I_{t5} | I_{t6} |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $[10^{-3}kg m^2]$ | $[10^{-3}kg m^2]$ | $[10^{-3}kg m^2]$ | $[10^{-3}kg m^2]$ | $[10^{-3}kg m^2]$ | $[10^{-3}kg m^2]$ |
| 14,012 | 14,212 | 5,170 | 7,271 | 8,057 | 14,707 |

Tab. 10.4: Jednotlivé momenty setrvačnosti.

Z hodnot $I_{t1}-I_{t6}$ a směrových kosinů os získáme šest rovnic o šesti neznámých ve tvaru 9.5, ve kterých figuruje šest neznámých – I_x , I_y , I_z , D_{xy} , D_{yz} a D_{xz} . Řešením dostaneme všech devět složek tenzoru setrvačnosti. Vypočtený tenzor je roven:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 14,030 & 0,301 & 0,618 \\ 0,301 & 14,284 & -3,448 \\ 0,618 & -3,448 & 4,893 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} kg m^2 \quad (10.1)$$

Pro potřeby ověření přesnosti byla provedena další tři dílčí měření momentu setrvačnosti. Těhlice byla umístěna na rám v dalších třech (tentokrát náhodných) orientacích – *kontrolní osy* k_1-k_3 . Byly opět změřeny všechny potřebné hodnoty vůči těmto osám – viz tabulka 10.5.

| Osa | l_{tk}/mm | $\alpha_{tk}/^\circ$ | T_{ck}/s | $\cos \alpha_k$ | $\cos \beta_k$ | $\cos \gamma_k$ |
|----------------|-------------|----------------------|------------|-----------------|----------------|-----------------|
| k ₁ | 168,318 | 91,5 | 0,9206 | 0,46652 | -0,88009 | -0,08827 |
| k ₂ | 175,414 | 96,6 | 0,9311 | -0,99315 | 0,11379 | 0,02653 |
| k ₃ | 59,124 | 73,5 | 0,8520 | -0,38876 | 0,91520 | 0,10618 |

Tab. 10.5: Jednotlivé hodnoty při kontrolních měřeních.

Odpovídající vzdálenosti l_{ck} shrnuje tabulka 10.6

| l_{ck1}/mm | l_{ck2}/mm | l_{ck3}/mm |
|--------------|--------------|--------------|
| 132,011 | 137,382 | 49,154 |

Tab. 10.6: Jednotlivé vzdálenosti l_{ck} .

Z těchto hodnot byly zjištěny momenty setrvačnosti vztahem 7.7 – získáme tak hodnoty I_{k1} – I_{k3} . Ke stejným osám byly spočítané i teoretické hodnoty na základě výsledného tenzoru 10.1 prostřednictvím vztahu 9.4 – získáme tak hodnoty I_{teor1} – I_{teor3} . Pokud bychom se při měření nedopustili žádné chyby, tyto hodnoty by se shodovaly. A naopak, chyba v některé z hodnot v tabulkách 10.2 a 10.5 se projeví tak, že se hodnoty změřené vůči náhodným osám a odpovídající spočítané z tenzoru setrvačnosti shodovat nebudou. Byly spočítány procentuální odchylky δ_1 – δ_3 vztahem 9.6. Hodnoty shrnuje tabulka 10.7.

| Osa | $I_k [10^{-3}kg m^2]$ | $I_{teor} [10^{-3}kg m^2]$ | δ [%] |
|----------------|-----------------------|----------------------------|--------------|
| k ₁ | 13,580 | 13,322 | -1,93 |
| k ₂ | 13,435 | 13,905 | 3,38 |
| k ₃ | 13,134 | 13,205 | 0,54 |

Tab. 10.7: Kontrolní měření. I_k – změřené hodnoty momentu setrvačnosti, I_{teor} – hodnoty získané z vypočteného tenzoru setrvačnosti 10.1, δ – procentuální odchylka.

Jak je vidět, procentuální odchylky δ všech tří kontrolních měření jsou malé; to dává předpoklad, že jsme se nedopustili důležité náhodné (hrubé) chyby. Procentuální odchylka druhého kontrolního měření nicméně přesahuje obvykle požadovaná 3 %.

Vhodné by bylo změřit tenzor setrvačnosti vícekrát, a to včetně všech dílčích měření (tzn. znovu zvážit rám i těleso, určit polohu těžiště rámu i tělesa, provést jednotlivá měření period kyvu při různých polohách a změřit odpovídající vzdálenosti těžiště od osy kývání a následně znovu vypočítat tenzor setrvačnosti). Takto bychom získali několik tenzorů setrvačnosti, které bychom mohli vzájemně porovnat a případně i statisticky zpracovat. Vzhledem k rozsáhlosti nebylo toto několikanásobné měření v této práci realizováno. Optimalizace postupu, kterým lze odhadnout přesnost změřeného tenzoru setrvačnosti, zůstává otevřená dalšímu výzkumu.

11. Zhodnocení metody měření momentu setrvačnosti

Navržená metoda slouží k zjišťování momentu setrvačnosti a umožňuje i výpočet všech šesti nezávislých složek tenzoru setrvačnosti. Vzhledem k tomu, že se jedná o komplexní problém, je vhodné zhodnotit zvlášť každou důležitou část.

11.1. Koncepce měření

Metoda vychází z principu měření periody kyvu fyzikálního kyvadla a následného výpočtu momentu setrvačnosti z pohybové rovnice. Z metod popsaných v kapitole 3.2 je tato metoda nejnáze realizovatelná v laboratorních podmínkách – většinu potřebných pomůcek bylo možné zhotovit v běžně vybaveném dílenském prostředí. Např. u metody torzního kyvadla by bylo potřeba složitě řešit, jak zaručit, aby při měření zůstávala stále stejná osa kývání.

Tvar těles obvykle neumožňuje přímé měření – součástí proto musíme spojit s rámem a moment setrvačnosti součásti řešit jako rozdíl $I_{co} - I_{ro}$. Při návrhu vhodného rámu byl kladen důraz především na univerzálnost, aby mohl být rám použit v co největším množství případů. Ukázalo se, že univerzální rám prakticky zhotovit nejde; čím univerzálnější rám totiž navrhne, tím větší bude mít vlastní moment setrvačnosti a tím více se ve výsledné periodě T_c projeví jeho vliv, což zneprěsí výsledky. Rám č. 3 (obr. 7.4) je tak kompromisem, který se však nehodí pro rozměrnější součásti.

Pokud by tato metoda byla použita pro rozměrnější součásti, zřejmě by bylo nezbytné zhotovit více rámu, které by umožňovaly zavěšení součásti v různých polohách. U každého rámu zvlášť bychom však museli měřit periodu kyvu T_r a zejména určovat polohu těžiště, což výrazně prodlouží celkový čas měření.

11.2. Měření periody kyvu

Tato část práce se ukázala být nejvíce problematická. Ultrazvukový snímač způsobuje svým charakterem důležitou odchylku, kterou je nutné zohlednit. Navrženým postupem se podařilo vliv této odchylky eliminovat a docílit tak dostatečně přesných výsledků. Postup je nicméně poměrně náročný na správné nastavení (zejména úhlu ζ a vzdálenosti L_m na obrázku 7.22).

V dalších experimentech by bylo vhodné vyzkoušet jiný druh bezkontaktního snímače – takového, kde bychom nemuseli zohledňovat geometrickou korekci (tzn. například laserový snímač apod.) Pokud bychom se pokusili optimalizovat metodu optické závory,

zřejmě bychom nakonec docílili i zde dostatečně přesných výsledků – zřejmě by pomohla náhrada žárovky laserovým paprskem.

11.3. Měření vzdálenosti těžiště součásti od osy kývání

Tato část úzce souvisí s měřením polohy těžiště součásti – je nezbytné nejprve určit polohu těžiště a teprve poté zjišťovat hledanou vzdálenost těžiště od osy. Bylo by pravděpodobně velmi složité navrhnout postup založený na zcela odlišném principu, který by při měření vzdálenosti těžiště od osy kývání umožňoval dosáhnout srovnatelné přesnosti.

V práci byla vzdálenost těžiště dvojice rám + měřená součást (l_c) určována výpočtem ze známých hodnot l_t , l_r , α_t a α_r vztahem 7.35. Teoreticky by bylo možné určovat polohu těžiště přímo metodou zavěšení a vzdálenost l_c určit stejným postupem jako v případě l_t a l_r . Docílili bychom tak sice větší přesnosti, avšak za cenu, že by se měření stalo výrazně zdoluhavějším, jak vysvětluje kapitola 7.5.5. Takovýto postup by byl navíc možný pouze s třetí verzí rámu, resp. s takovými rámy, kde je těleso s rámem pevně spojeno.

11.4. Výpočet tenzoru setrvačnosti

Navržená metoda pracuje s výpočtem tenzoru setrvačnosti ze znalosti momentů setrvačnosti k šesti osám, jejichž poloha je do určité míry volena náhodně. Ukázalo se, že tímto postupem skutečně lze tenzor setrvačnosti měřit a že lze docílit přijatelných výsledků.

Další výzkum by se měl v budoucnu zaměřit na zdokonalení postupu odhadu chyby měření tenzoru setrvačnosti. Celkově se metoda měření tenzoru setrvačnosti potýká s jedním problémem, kterým je časová náročnost – např. měření tenzoru setrvačnosti těhlice formule Ford, popsané v kapitole 10, zabralo včetně určování poloh těžiště rámu a těhlice více než 20 hodin práce. I z hlediska trvání měření tak nabízí tato metoda prostor k další optimalizaci.

12. Shrnutí a závěr

Cílem této práce bylo vypracovat pilotní studii metody, kterou lze u součástí podvozků vozidel měřit důležité mechanické veličiny – polohu těžiště a momenty setrvačnosti, resp. tenzor setrvačnosti. Práce ukazuje, jak lze pro tento účel použít fotogrammetrický systém Tritop a další specializované vybavení laboratoří ÚADI. Řešení bylo uvažováno pro případy, kdy nemáme k dispozici počítačový model měřené součásti a nemůžeme tedy tyto hledané mechanické veličiny získat výpočtem.

První část práce předkládá přehled metod, kterými se obvykle poloha těžiště a momenty setrvačnosti měří. Je poukázáno na typické problémy, které se při použití jednotlivých postupů mohou naskytnout.

V další části práce je navržena metoda měření polohy těžiště součástí. Vychází z předpokladu, že se těleso volně zavěšené na pružném vlákně ustálí v poloze, ve které se bude těžiště nacházet na svislé přímce vedené bodem zavěšení. Systém Tritop umožňuje vyřešit problém, jak určit dostatečně přesně polohu součásti, aniž by toto měření ovlivňovalo polohu zavěšeného tělesa. Navrženou metodou lze dosáhnout velmi dobré přesnosti – při několikanásobném měření jsme schopni určit polohu těžiště s přesností na desetinu milimetru, i lépe.

Druhou stěžejní částí této práce je návrh metody sloužící k měření momentů setrvačnosti, a to na základě měření periody kyvu fyzikálního kyvadla. Byly odvozeny potřebné výpočetní vztahy, proveden odhad výsledné chyby měření a poté navrženy postupy, jimiž lze měřit periodu kyvu a vzdálenost těžiště od osy kývání. K měření periody byl použit ultrazvukový snímač vzdálenosti a k měření vzdálenosti těžiště od osy kývání opět systém Tritop. Následovalo měření součástí, které ukázalo, že se u modelových součástí výsledky získané touto metodou dostatečně přesně shodují s teoretickými předpoklady.

V další části bylo ukázáno, jak lze měření momentů setrvačnosti k jednotlivým osám využít k určování tenzoru setrvačnosti. Bylo provedeno měření skutečné součásti (těhlice formule Ford) a následně byla odhadnuta chyba měření. V závěru byly shrnuty přednosti a nedostatky jednotlivých postupů a bylo navrženo, jakým směrem by se mohly experimenty ubírat dále.

★ ★ ★

Na tomto místě se můžeme vrátit k myšlence z úvodu. Počítače se skutečně prosazují prakticky ve všech oblastech lidské činnosti, automobilový průmysl nevyjímaje. Tato práce ukazuje, jak lze vyřešit jeden z problémů, na který může inženýr při matematickém modelování dynamiky vozidel narazit. I přes obdivuhodné schopnosti počítačů totiž platí, že pokud neznají 3D model součásti, polohu těžiště a momenty setrvačnosti samy od sebe spočítat neumějí.

Seznam použité literatury a zdrojů

Internetové stránky

- [1] *Physics Laboratory 8 - Analyzing a mechanical system* [online]. University of Tennessee: Department of Physics and Astronomy. Poslední revize 16. 4. 2008. URL: <<http://electron9.phys.utk.edu/phys135d/laboratories/Lab8.htm>>.
- [2] *The Physical Pendulum with Large Amplitudes* [online]. New Jersey's Science & Technology University. Poslední revize 18. 4. 2008. URL: <http://web.njit.edu/phys_lab/Laboratory%20Manual/laboratory231/lab0/lab0.html>.
- [3] *FyzWeb - Srážky a rotace* [online]. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy: Katedra didaktiky fyziky. Poslední revize 2. 3. 2008. URL: <http://fyzweb.cuni.cz/new/materialy/srazky_a_rotace/k41.php>
- [4] *Introduction to Photogrammetry* [online]. Universität Wien. Poslední revize: 29. 3. 2008. URL: <<http://www.univie.ac.at/Luftbildarchiv/wgv/intro.htm>>
- [5] *The Basics of Photogrammetry* [online]. Geodetic Systems – 3D Industrial Measurement Systems. Poslední revize: 29. 3. 2008. URL: <<http://www.geodetic.com/Whatis.htm>>
- [6] *Space Electronics* [online]. Poslední revize: 19. 4. 2008. URL: <<http://www.space-electronics.com>>

Knihy, články, publikace (tištěné i elektronické)

- [7] BOYNTON, R – WIENER, K. *Mass Properties Measurement Handbook* [online verze]. Berlin (Connecticut): Space Electronics Inc., 1998. Poslední revize 3. 4. 2008. URL: <<http://www.space-electronics.com/literature/literature.php>>
- [8] CIKL, D. *Rotační pohyb tělesa v rovině – Fyzické kyvadlo* [online verze]. In: *Dynamika – příklady*. E-learning Technické univerzity v Liberci. Poslední revize 3. 4. 2008. URL: <<http://e-learning.tul.cz>>.
- [9] ČERMÁK, J. – ŽENÍŠEK, A. *Matematika III*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006.
- [10] HALLIDAY, D. – RESNICK, R. – WALKER, J. *Fyzika. Část 1 – Mechanika*. Brno: Vysoké učení technické, 2000.

- [11] HORÁKOVÁ, R. – ŠEDIVÝ, P. – VOLF, I. *Harmonické kmity mechanických soustav* [online verze]. Hradec Králové: Ústřední výbor fyzikální olympiády, 2000. Poslední revize 15. 4. 2008. <<http://fo.cuni.cz/texty/kmity.pdf>>
- [12] HOUFEK, L. – MALENOVSKÝ, E. – ŠVANCARA, P. *Mechanika těles – Dynamika* [online verze]. Studijní opora. Brno: Fakulta strojního inženýrství, 2005. Poslední revize 12. 5. 2008. <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/index.html>>
- [13] KRATOCHVÍL, C. – SLAVÍK, K. *Mechanika těles – Dynamika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2002.
- [14] KŘIVÁNKA, D. *Vyhodnocení chyby měření* [online verze]. Plzeň: Západočeská univerzita, 2007. Poslední revize 9. 5. 2008. URL: <<http://home.zcu.cz/~krivanka/chyby.pdf>>.
- [15] KWON, Y. *Rigid Body Dynamics* [online verze]. Visol Kwon3D XP Motion Analysis System. Poslední revize 15. 4. 2008. URL: <www.kwon3d.com/theory/rigid.html>.
- [16] NELSON, R. A. – OLSSON, M. G. *The Pendulum – Rich Physics from a Simple System*. American Journal of Physics, Volume 54, Issue 2/1986.
- [17] PETERS, R. D. *Nonlinear Damping of the 'Linear' Pendulum* [online verze]. Macon, Georgia: Department of Physics at Mercer University, 2002. Poslední revize 18. 4. 2008. URL: <<http://arxiv.org/pdf/physics/0306081>>.
- [18] PETERS, R. D. *The Pendulum in the 21st Century – Relic or Trendsetter?* [online verze]. Macon, Georgia: Department of Physics at Mercer University, 2002. Poslední revize 18. 4. 2008. URL: <<http://arxiv.org/html/physics/0207001>>.
- [19] PORTEŠ, P. *Virtuální prototypy*. Texty přednášek. Brno: Vysoké učení technické, 2007.
- [20] ŠTASTNÝ, F. *Zpracování experimentálních dat* [online verze]. Brno: Masarykova univerzita, 1998. Poslední revize: 19. 4. 2008. URL: <http://amper.ped.muni.cz/jenik/nejistoty/frst_zed.pdf>
- [21] TÖGL, T. a kol. *Fyzikální praktikum – Chyby měření* [online verze]. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002. Poslední revize 2. 5. 2008. URL: <http://www.kfy.zcu.cz/prakt/Skripta/chyby_mereni.pdf>.
- [22] ŠTOLL, I. *Mechanika*. Praha: České vysoké učení technické, 1995.
- [23] VYBÍRAL, B. *Zpracování dat fyzikálních měření* [online verze]. Praha: Univerzita Karlova, 2000. Poslední revize 15. 4. 2008. URL: <<http://fo.cuni.cz/texty/mereni.pdf>>.

Diplomové a disertační práce

- [24] ANDRLÍK, S. *Optimální rozložení strojních skupin a ložného prostoru v odpérované hmotě sedmitunových nákladních automobilů z hlediska plynosti jízdy*. Kandidátská disertační práce. Brno: Vysoké učení technické, 1959.
- [25] MAJERECH, P. *Měření jízdní výšky vozidla*. Diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické, 2004.
- [26] VOLEJNÍK, M. *Návrh měřicího zařízení pro určení momentů setrvačnosti vozidla*. Diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické, 2006.

Manuály, katalogy, dokumentace

- [27] DUCHOŇ, F.: *Manuál systému TRITOP*. Brno: Vysoké učení technické, 2005.
- [28] *TRITOP v 5.3.0. User Manual*. Braunschweig: GOM mbH, 2004.
- [29] *Sensing and Control Interactive Catalog*. Freeport: Honeywell, 2000.