VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

KOOPERATIVNÍ TEORIE HER V LOKÁLNÍCH KONFLIKTECH

COOPERATIVE GAME THEORY IN LOCAL CONFLICTS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE — Mgr. Bc. Adriana Ilavská

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

SUPERVISOR

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Mgr. Bc. Adriana Ilavská**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Kooperativní teorie her v lokálních konfliktech

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Kooperativní teorie hry je schopna kvantifikovat vyjednávací schopnosti jednotlivých aktérů rozhodovacího procesu. Tato kvantifikace umožňuje následné rozdělení případného společného zisku.

Cíle diplomové práce:

Nastudování pokročilých partií kooperativní teorie her.
Nastudování teorie hierarchických struktur pro kooperativní hry.
Vytvoření série modelů s přihlédnutím k metodikám standardním v teorii lokálního konfliktu.
Implementace algoritmů a diskuze výsledků.

Seznam doporučené literatury:

GILLES, Robert P. The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies. Heidelberg: Springer, 2010.

OWEN, Guillermo. Game Theory. Philadelphia: W. B. Saunders, 1968.

PETERS, Hans. Game Theory - A Multi-Leveled Approach, Springer 2008.

WEBB, James N. Game Theory - Decisions, Interaction and Evolution, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2007.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Kooperatívna teória hier je vedecká disciplína, ktorá ponúka široký matematický aparát vhodný na zachytenie komplexných situácií v sociálnej realite. Vďaka tomu, že dokáže popísať aj hierarchické štruktúry, môže byť aplikovaný na množstvo výskumných problémov z oblasti medzinárodných vzťahov. Avšak tento aparát je využívaný veľmi zriedka. Hlavným cieľom práce je preto demonštrovať na výskumnom probléme z oblasti lokálnych konfliktov, aké prínosné výsledky môžu byť pomocou kooperatívnej teórie hier dosiahnuté. V prvej časti práce sú položené teoretické základy a predstavené základné koncepty. Druhá časť sa zameriava na zostavenie modelov kooperatívnych hier s hierarchickými štruktúrami popisujúcich štyri situácie lokálnych konfliktov, na ktoré je následne zavedená reštrikcia vyjadrujúca štruktúru autoritatívnych vzťahov. Ďalej je v práci nájdené riešenie pre hry s reštrikciou a výsledky sú interpretované, nasleduje zhodnotenie toho, či výsledky môžu pomôcť pri zodpovedaní výskumného problému.

Abstract
The Cooperative Game Theory is a scientific discipline which offers rich mathematical apparatus for describing complex situations in the social reality. Its apparatus includes an extension to hierarchical structures and therefore can be applied to numerous research problems from the International Relations field. However, a cooperative game theoretical approach is very scarcely used. The main goal of the diploma thesis is to demonstrate, on the research problem of decision making in participation in local conflicts, the benefits of results that can be achieved by the application of the Cooperative Game Theory. In the first part of the thesis, theoretical foundations are laid and basic concepts are introduced. The second part is focused on forming a series of models of cooperative games with hierarchical structures from four local conflict situations, which are subsequently restricted in order to describe authoritative relations in structure. Restricted games are solved, the results are interpreted and evaluation of how these results can contribute to addressing the research problem follows.

kľúčové slová
kooperatívna teória hier, hierarchické štruktúry, konjunktívna reštrikcia, disjunktívna reštrikcia, lokálne konflikty

keywords
cooperative game theory, hierarchical structures, conjunctive restriction, disjunctive restriction, local conflicts

Bibliografická citácia
ILAVSKÁ, Adriana: *Kooperativní teorie her v lokálních konfliktech*. Brno, 2019. Dostupné také z: https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117458. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Jaroslav Hrdina.

Čestné prehlásenie
Prehlasujem, že predložená diplomová práca je pôvodná a spracovala som ju samostatne. Prehlasujem, že citácie použitých prameňov sú úplné, že som v svojej práci neporušila autorské práva (v zmysle Zákona č. 121/2000 Sb., o práve autorskom a o právach súvisiacich s právom autorským).

V Brne dňa 22.mája 2019

....
Adriana Ilavská

Na tomto mieste by som rada poďakovala vedúcemu mojej diplomovej práce doc.Mgr. Jaroslavovi Hrdinovi, Ph.D. za odborné vedenie, cenné rady, podnetné postrehy a trpezlivý prístup, bez ktorých by práca nemohla vzniknúť.

Obsah

Úvod

Teória hier je matematická disciplína, ktorá sa sústredí na rozhodovacie situácie. Keďže rozhodovanie je prítomné v mnohých oblastiach bežného života aj v bádateľskej činnosti, teória hier má využitie v širokom spektre oblastí z prírodných aj sociálnych vied. Jej aplikácie sú bežné v ekonómii, v energetike, v telekomunikáciách či v poľnohospodárstve. Jednou z rozsiahlych oblastí využitia sú aj medzinárodné vzťahy, kde je teória hier účinným nástrojom na formalizáciu rozhodovacích situácií najmä v jadrovej bezpečnosti a pri volebných a hlasovacích stratégiách. Oba tieto príklady sú typickou aplikáciou nekooperatívnych hier, kde sa o aktéroch uvažuje ako o protivníkoch snažiacich sa maximalizovať svoj zisk na úkor oponenta.

Kooperatívna teória hier k aktérom pristupuje odlišne, predpokladá možnosť hráčov spolupracovať pri snahe maximalizovať svoj zisk. Stále platí, že hra reprezentuje komplexnú rozhodovaciu situáciu, ale mení sa spektrum javov, na ktoré sa dá aplikovať. V oblasti medzinárodných vzťahov je množstvo reálnych situácií, ktoré by sa dali kooperatívnou teóriou hier popísať. Povaha súčasného systému vytvára širokú platformu na kooperáciu aktérov a formalizácia ich interakcií matematickým aparátom môže priniesť zaujímavé výsledky. Keďže aj napriek tomu nie je kooperatívna teória hier v oblasti medzinárodných vzťahov využívaná, hlavnou motiváciou k napísaniu diplomovej práce bola snaha poukázať na to, ako môže byť tento matematický aparát prínosný v riešení výskumných problémov, na ktoré nebol doposiaľ aplikovaný.

Dôležitým faktom však je, že aktéri si nie sú vždy rovní a existujú medzi nimi vzťahy nadriadenosti a podriadenosti. Dokonca vzťahy medzi nerovnými aktérmi, resp. vzťahy s prítomnosťou nejakej autority predstavujú väčšiu časť interakcií v sociálnej realite. Kooperatívna teória hier dokáže popísať aj takéto situácie a dajú sa v nej zaviesť hierarchické štruktúry. Jedným z aktuálnych výskumných problémov, v ktorom vystupujú aktéri s hierarchickými vzťahmi, sú lokálne konflikty. Táto téma sa stáva v poslednom období čoraz relevantnejšou a stále sa hľadajú nové metodologické prístupy na jej analýzu. Práca má ambíciu prostredníctvom kooperatívnej teórie hier aplikovanej na lokálne konflikty ukázať, že tento prístup by mohol do problematiky vniesť nové svetlo.

Hlavným cieľom práce bude naštudovať v rámci kooperatívnej teórie hier hierarchické štruktúry a následne z reálnych situácií - konkrétnych lokálnych konfliktov vytvoriť sériu herných modelov. V rámci teoretickej časti budú predstavené algoritmy na riešenie kooperatívnych hier, prostredníctvom ktorých sa hľadá vhodné rozdelenie zisku. Následne budú implementované a pomocou nich bude možné zisk v jednotlivých modeloch kvantifikovať.

V prvej kapitole budú zavedené pojmy a koncepty z kooperatívnej teórie hier, ktoré sú nevyhnutné pre ďalšiu prácu s hierarchickými štruktúrami. Druhá kapitola sa bude venovať už samotnému popisu hierarchických štruktúr. Keďže je na ne možné nahliadať cez konjunktívny alebo cez disjunktívny prístup, oba prístupy budú predstavené a s prihliadnutím na ich spoločné znaky aj na základné rozdiely. V závere teoretickej časti bude popísané, ako sa na kooperatívne hry v závislosti na zvolenom prístupe zavádza reštrikcia a ako sa hry s reštrikciou ďalej riešia.

Tretia kapitola sa zameria na popis výskumného problému z oblasti medzinárodných vzťahov, ktorý bude ďalej adresovaný. Budú v nej zavedené modely hier, kde budú presne špecifikovaní aktéri, ich možné zisky a hierarchická štruktúra podľa konkrétnych popisovaných reálnych situácií. V poslednej kapitole bude na modely aplikovaný zavedený matematický aparát a výsledky budú interpretované s ohľadom na predstavený výskumný problém.

1 Kooperatívne hry

Teória hier popisuje interaktívne rozhodovacie situácie. K tomuto popisu existujú dva rôzne, fundamentálne odlišné prístupy. Prvý predstavuje *nekooperatívna teória hier* založená na princípe toho, že hráči v rozhodovacích situáciách robia rozhodnutia bez toho, aby ich museli riadiť nejakou záväznou dohodou. Každý z hráčov sleduje svoje vlastné ciele formalizované v podobe výplatnej funkcie hráča. Výplatná funkcia priradí každému výstupu[1] jeho zisk a jednotliví hráči následne volia svoje akcie tak, aby maximalizovali vlastný zisk. Naproti tomuto prístupu stojí *kooperatívna teória hier*, ktorú od tej nekooperatívnej radikálne odlišuje možnosť uzatvárať záväzné dohody. Zásadne sa tým zmení interpretácia hry, pretože hráči v hrách síce stále sledujú maximalizáciu vlastného zisku, ale robia to prostredníctvom snahy dosiahnuť čo najväčší kolektívny zisk. Hráč sa svojimi akciami snaží zvýšiť (a nie znížiť) zisk ostatných hráčov, lebo to aj jemu prinesie zvýšenie zisku v miere dohodnutej záväznou dohodou. Cieľom je teda nadobudnúť čo najväčší kolektívny zisk a riešiť kooperatívnu hru znamená hľadať vyhovujúce prerozdelenie zisku.

Koncept kooperatívnych hier predstavili a základy položili von Neumann a Morgenstern vo svojom článku z roku 1953 (viď. [37]). Autori pracovali s koaličnou hrou s prenosným úžitkom (TU-hra[2]). Okrem TU-hier však môžu byť kooperatívne hry aj vo forme NTU-hier, kde nie je možné prenášať zisk z jedného hráča na druhého a preto v nich má individuálny aktér preferenciu pred koalíciou. Koncepty riešenia NTU-hier vychádzajú z podobných základov ako tie pre riešenie TU-hier a sú často ich modifikáciami. Bližšie sa im venujú napr. Bezalel a Sudhölter (viď. [22]) či Robert Aumann (viď. [1]). Práca sa však bude ďalej zaoberať výhradne TU-hrami.

V nasledujúcej kapitole budú definované pojmy a koncepty z kooperatívnej teórie hier potrebné na to, aby sme v hre mohli zaviesť štruktúru povolení generujúcu hierarchickú štruktúru, ktorej zachytenie je hlavným cieľom práce. Nasledujúce kapitolu predpokladajú znalosť základným pojmov z teórie hier.

1.1 Kooperatívna hra v tvare charakteristickej funkcie

Kooperatívne hry sa vyjadrujú v tvare charakteristickej funkcie. V nasledujúcej časti budú hry zavedené a pozornosť bude venovaná aj ich vybraným vlastnostiam, ktoré budú podstatné pri ďalšom postupe k hierarchickým štruktúram. Kapitola vychádza primárne z [11] a [19].

Vo všeobecnosti môžu byť rozhodovacie situácie (reprezentované hrou) vyjadrené v troch formách: extenzívnej, normálnej a vo forme charakteristickej funkcie. *Extenzívna forma* predstavuje najdetailnejší popis hry, ktorý pokrýva všetky rozhodovacie situácie. Aby bola hra popísaná v extenzívnom tvare, musíme poznať množinu hráčov, poradie udalostí, poradie ťahov, množinu dostupných akcií, informačnú množinu a zisky. Ústupok od tejto komplexnosti predstavuje *strategická forma* hry, ktorá sa obmedzuje na popis strategickej štruktúry interakcií. To znamená, že pre každého hráča je známa jeho stratégia - kompletný súbor podmienených volieb, ktoré popisujú, čo má hráč robiť v každom možnom prípade, ktorý nastane na základe volieb oponenta. Stratégie sú závislé na informačných množinách ale nie na konkrétnych rozhodovacích uzloch, čiže narozdiel od hry v extenzívnej forme, hra v strategickej forme neobsahuje sekvenčnú informáciu [36].

[1] Výstup je výsledkom rozhodnutí a akcií jednotlivých hráčov.

[2] Z angl. transferable utility. Už intuitívne je zrejmé, že pôjde o hru, kde sa dá zisk jedného hráča preniesť aj na iného hráča.

Hra vo forme charakteristickej funkcie obsahuje ešte menej informácií, keďže popisuje len výsledný zisk, ktorý môžu získať hráči v koalícii. Takáto forma vyjadrenia už nepokrýva interaktívne rozhodovanie, ale sústredí sa na jeho výsledky. Charakteristická funkcia skôr potom reprezentuje proces vyjednávania o prerozdeľovaní výsledného zisku, ktorý nasleduje po samotnom rozhodovacom procese. Stručne povedané, táto forma vyjadrenia hry považuje nadobudnutie zisku za čiernu skrinku, popisuje hru od okamihu, kedy je známy zisk.

Radikálnym rozdielom medzi hrou v extenzívnom alebo strategickom tvare a hrou popísanou charakteristickou funkciou je, že v prípade charakteristickej funkcie sa stáva hlavným nástrojom analýz koncept equilibria. Naproti tomu, hry v extenzívnom a strategickom tvare používajú ako hlavný analytický koncept interaktívne rozhodovanie. Pri existencii záväznej dohody už nie je podstatné ako bol zisk dosiahnutý a popis výberu akcií na jeho dosiahnutie je irelevantný. Preto je zápis hry vo forme charakteristickej funkcie preferovaný spôsob pri popise koaličných hier [11]. V práci teda budeme ďalej uvažovať hru vo forme charakteristickej funkcie, ktorá bude v nasledujúcej časti definovaná a budú uvedené jej základné vlastnosti.

Definícia 1.1. Nech N je konečná množina hráčov. Podmnožinu hráčov $S \subset N$ nazveme *koalícia*.
Špeciálne prípady $S = \emptyset$ a $S = N$ nazveme *prázdna koalícia* a *veľká koalícia*. Množina všetkých koalícií sa označuje $2^N = \{S | S \subset N\}$.

Definícia 1.2. *Kooperatívnou hrou v tvare charakteristickej funkcie* nazveme dvojicu (N, v), kde N je konečná množina hráčov a $v : 2^N \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkcia, ktorá priradí každej koalícií $S \subset N$ jej dosiahnuteľný zisk $v(S)$, taký, že $v(\emptyset) = 0$.
Pre každú množinu hráčov N označíme $\mathscr{G}^N$ triedu všetkých charakteristických funkcií pre N.

Kooperatívne hry v tvare charakteristickej funkcie neobsahujú žiadne informácie o dostupných ťahoch hráča, ani žiaden popis rozhodovacej situácie. Sú vyjadrené ako dosiahnuteľné zisky pre jednotlivé koalície, ktoré získali vďaka kooperácii.

1.1.1 Vybrané vlastnosti kooperatívnych hier

Aby sme pre koaličnú hru zaistili existenciu riešenia a jeho dobré vlastnosti, môžeme klásť na charakteristickú funkciu isté požiadavky:

- ***Superadditivita***
  Požaduje sa, aby skupina koalícií bola vždy schopná generovať väčší alebo nanajvýš rovný zisk ako jednotlivé koalície.
  $$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \qquad \text{pre} \quad \forall S, T \in 2^N, S \cap T = \emptyset \tag{1.1}$$
- ***Additivita***
  Špeciálnym prípadom je rovnosť zisku generovaného jednotlivými koalíciami a skupinou koalícií.
  $$v(S) + v(T) = v(S \cup T) \qquad \text{pre} \quad \forall S, T \in 2^N, S \cap T = \emptyset \tag{1.2}$$
- ***Monotónnosť***
  Požiadavok monotónie, že keď sa k existujúcej koalícii S pridá ďalší hráč/ďalší hráči a

vznikne koalícia T a jej zisk bude vyšší, prinajmenšom rovný ako tej predchádzajúcej.

$$S \subset T \Longrightarrow v(S) \leq v(T) \qquad \text{pre} \quad \forall S, T \in 2^N \tag{1.3}$$

- ***Jednoduchosť***
  Povieme, že kooperatívna hra je jednoduchá, ak jej charakteristická funkcia nadobúda len hodnoty $\{0, 1\}$.
  $$v(S) = 0, \quad \text{alebo} \quad v(S) = 1 \tag{1.4}$$
- ***Symetria***
  Hra je symetrická, ak hodnota $v(S)$ závisí len na počte hráčov S v koalícii S, t.j. existuje funkcia $f : \{1, ..., N\} \to \mathbb{R}$, taká že:
  $$v(S) = f(|S|) \qquad \text{pre} \quad S \subset N \tag{1.5}$$

Ak máme dve kooperatívne hry $v, w \in \mathscr{G}^N$, potom je ich sumou kooperatívna hra

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S) \qquad \text{pre} \quad S \subset N \tag{1.6}$$

Na základe vyššie popísaných vlastností bude možné neskôr hry upraviť do tvaru, v ktorom bude zreteľnejšia hierarchická štruktúra a vďaka tomu bude sa s ňou bude dať ďalej pracovať.

1.1.2 Bázy kooperatívnych hier

Kooperatívne hry sa dajú rozložiť na jednoduché hry (definované v 1.4), pričom tento rozklad popisuje hru ako konfiguráciu s jasnou výplatnou štruktúrou. Aby sme mohli hry systematicky riešiť, je pre náš najvýhodnejšie hry zapísať v tvare po príslušnej dekompozícii.
Ukážeme, že priestor kooperatívnych hier je viacrozmerný euklidovský vektorový priestor a rozklad na jednoduché hry tak prejde na úlohu hľadania bázy.

Podľa definícií 1.1 a 1.2 vidíme, že priestor kooperatívnych hier $\mathscr{G}^N$ je konečne rozmerný a reálny. Neutrálnym prvkom pre sčítanie je nulová hra $\eta(S) = 0, \forall S \subset N$.
Pre všetky hry $\forall v, w \in \mathscr{G}^N$ a pre všetky skaláry $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ definujeme lineárnu kombináciu $\lambda v + \mu w \in \mathbb{R}$ ako

$$(\lambda v + \mu w)(S) = \lambda v(S) + \mu w(S), \tag{1.7}$$

potom môžeme tvrdiť, že priestor kooperatívnych hier $\mathscr{G}^N$ je Euklidovský priestor.

Každý Euklidovský priestor je izomorfný s $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ a vzhľadom na dimenzionalitu $\mathscr{G}^N$ pre $N = \{1, 2, ..., n\}$ sa dostávame k ekvivalencii s Euklidovským priestorom dimenzie $2^n - 1$. Je tomu tak vďaka faktu, že charakteristická funkcia je zoznam čísel predstavujúci zisk jednotlivých možných koalícií, týchto možných koalícií je 2^n a teda má zoznam dĺžkou 2^n. K zníženiu o 1 dôjde, lebo nesmieme zabúdať na obmedzenie dané požiadavkou $v(\emptyset) = 0$ plynúcou z definície 1.2. Z toho vyplýva, že $\mathscr{G}^N \sim \mathbb{R}^{2^{\mathrm{n}}-1}$.

Štandardná báza v euklidovskom priestore zodpovedá v priestore kooperatívnych hier $\mathscr{G}^N$ množine nazývanej *štandardné bázové hry*.

Definícia 1.3. Pre každú koalíciu $S \in N$, kde $S \neq \emptyset$, definujeme *štandardnú bázovú hru* $b_S \in \mathscr{G}^N$ ako

$$b_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad T = S \\ 0 & \text{ak} \quad T \neq S \end{cases} \tag{1.8}$$

Množina $\mathscr{B} = \{b_S | S \in N, S \neq \emptyset\}$ je množina všetkých bázových prvkov v lineárnom vektorovom priestore $\mathscr{G}^N$, ktoré predstavujú $2^n - 1$ charakteristických funkcií príslušných bázových hier.

Veta 1.4. *Každú hru $v \in \mathscr{G}^N$ môžeme pomocou štandardnej bázovej hry zapísať ako*

$$v = \sum_{S \neq \emptyset} v(S) b_s, \quad v(\emptyset) = 0. \tag{1.9}$$

V diskusii o najdôležitejších konceptoch riešenia sa však užitočnejšou ako štandardná báza $\mathscr{B}$ ukázala byť tzv. jednotná báza (ďalej len báza) $\mathscr{U}$.

Definícia 1.5. Pre každú koalíciu $S \in N$, kde $S \neq \emptyset$, definujeme jednotnú bázovú hru (ďalej len *bázová hra*) $u_s \in \mathscr{G}^N$ ako

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad S \subset T \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \tag{1.10}$$

Dôležitým konceptom pre ďalšie úvahy sú aj Harsanyiho dividendy. Pre dekompozíciu hry a jej následné riešenie sú kľúčové. Harsanyi predstavil dividendy vo svojom článku z roku 1963 (viď. [12]), kde sa prostredníctvom nich pokúšal zachytiť hodnotu koalície, ktorá je dosiahnutá výhradnou spoluprácou všetkých hráčov v rámci koalície. Každá dividenda koalície S by potom bola výplatným vektorom rozdelená medzi členov koalície S. Harsanyi predstavil svoj koncept tzv. sharing systému kde definoval vlastný výplatný vektor. V práci však nebude ďalej rozoberaný, pozornosť bude venovaná len jednej jeho časti - samotným dividendám.

Definícia 1.6. *Harsanyiho dividendou* koalície S nazveme

$$\Delta_v(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T), \tag{1.11}$$

kde $s = |S|$ a $t = |T|$.

Dividendy sa dajú spočítať jednoducho - nasledujúcou rekurziou:
1. $\Delta_v(\emptyset) = 0$
2. pre každú koalíciu $S \neq \emptyset$: $\Delta_v(S) = v(S) - \sum_{R \subsetneqq S} \Delta_v(R)$

Príklad 1.7. Na trojprvkovej množine hráčov $N = \{1, 2, 3\}$ ukážeme, že pomocou uvedenej rekurzie dostaneme v každom jej kroku (1-8) hodnotu zodpovedajúcu definícii Harsanyiho dividendy.

1. $\Delta_v(\emptyset)$=0
2. $S = \{1\}, R \subsetneqq S : R = \emptyset; \Delta_v(S) = v(\{1\}) - \Delta_v(\emptyset) = v(\{1\})$
3. $S = \{2\}, R \subsetneqq S : R = \emptyset; \Delta_v(S) = v(\{2\}) - \Delta_v(\emptyset) = v(\{2\})$
4. $S = \{3\}, R \subsetneqq S : R = \emptyset; \Delta_v(S) = v(\{1\}) - \Delta_v(\emptyset) = v(\{3\})$
5. $S = \{1, 2\}, R \subsetneqq S : R = \emptyset, \{1\}, \{2\}; \Delta_v(S) = v(\{1, 2\}) - \Delta_v(\emptyset) - \Delta_v(\{1\}) - \Delta_v(\{2\}) = v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})$

6. $S = \{1,3\}, R \subsetneq S : R = \emptyset, \{1\}, \{3\}; \Delta_v(S) = v(\{1,3\}) - \Delta_v(\emptyset) - \Delta_v(\{1\}) - \Delta_v(\{3\}) = v(\{1,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\})$
7. $S = \{2,3\}, R \subsetneq S : R = \emptyset, \{2\}, \{3\}; \Delta_v(S) = v(\{2,3\}) - \Delta_v(\emptyset) - \Delta_v(\{2\}) - \Delta_v(\{3\}) = v(\{2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\})$
8. $S = \{1,2,3\}, R \subsetneq S : R = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}; \Delta_v(S) = v(\{1,2,3\}) - \Delta_v(\emptyset) - \Delta_v(\{1\}) - \Delta_v(\{2\}) - \Delta_v(\{3\}) - \Delta_v(\{1,2\}) - \Delta_v(\{1,3\}) - \Delta_v(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}) - (v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})) - (v(\{1,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\})) - (v(\{2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\})) = v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}) - (v(\{1,2\}) + v(\{1\}) + v(\{2\}) - v(\{1,3\}) + v(\{1\}) + v(\{3\}) - v(\{2,3\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})) = v(\{1,2,3\}) + v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) - (v(\{1,2\}) - (v(\{1,3\}) - (v(\{2,3\})$

Ďalej budú (opäť v bodoch 1-8) vyjadrené Harsanyiho dividendy tak, ako sú definované v 1.11.

1. $S = \emptyset, T \subset S : T = \emptyset; \Delta_v(\emptyset) = (-1)^{0-0} v(\emptyset) = 0$
2. $S = \{1\}, T \subset S : T = \emptyset, \{1\}; \Delta_v(\{1\}) = (-1)^{1-0} v(\emptyset) + (-1)^{1-1} v(\{1\}) = v(\{1\})$
3. $S = \{2\}, T \subset S : T = \emptyset, \{2\}; \Delta_v(\{2\}) = (-1)^{1-0} v(\emptyset) + (-1)^{1-1} v(\{2\}) = v(\{2\})$
4. $S = \{3\}, T \subset S : T = \emptyset, \{3\}; \Delta_v(\{3\}) = (-1)^{1-0} v(\emptyset) + (-1)^{1-1} v(\{3\}) = v(\{3\})$
5. $S = \{1,2\}, T \subset S : T = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}; \Delta_v(\{1,2\}) = (-1)^{2-0} v(\emptyset) + (-1)^{2-1} v(\{1\}) + (-1)^{2-1} v(\{2\}) + (-1)^{2-2} v(\{1,2\}) = v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})$
6. $S = \{1,3\}, T \subset S : T = \emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}; \Delta_v(\{1,3\}) = (-1)^{2-0} v(\emptyset) + (-1)^{2-1} v(\{1\}) + (-1)^{2-1} v(\{3\}) + (-1)^{2-2} v(\{1,3\}) = v(\{1,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\})$
7. $S = \{2,3\}, T \subset S : T = \emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}; \Delta_v(\{2,3\}) = (-1)^{2-0} v(\emptyset) + (-1)^{2-1} v(\{2\}) + (-1)^{2-1} v(\{3\}) + (-1)^{2-2} v(\{2,3\}) = v(\{2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\})$
8. $S = \{1,2,3\}, T \subset S : T = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}; \Delta_v(\{1,2,3\}) = (-1)^{3-0} v(\emptyset) + (-1)^{3-1} v(\{1\}) + (-1)^{3-1} v(\{2\}) + (-1)^{3-1} v(\{3\}) + (-1)^{3-2} v(\{1,2\}) + (-1)^{3-2} v(\{1,3\}) + (-1)^{3-2} v(\{2,3\}) + (-1)^{3-3} v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2,3\}) + v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) - v(\{1,2\}) - v(\{1,3\}) - v(\{2,3\})$

Vidíme, že výrazy vyjadrujúce Harsanyiho dividendu podľa definície aj tie získané rekurziou sú pre každú podkoalíciu $S \subset N$ rovnaké.

Po uvedení konceptu Harsanyiho dividend sa vrátime naspäť k štandardným bázovým hrám. Keďže aj množina $\mathscr{U} = \{u_S | S \in N, S \neq \emptyset\}$ (u_S sú funkcie definované v 1.10) je bázou priestoru $\mathscr{G}^N$, bude ukázaný ňou určený rozklad hry na bázovú hru a Harsanyiho dividendu.

Veta 1.8. *Každú hru $v \in \mathscr{G}^N$ môžeme pomocou bázovej hry u_S zapísať ako*

$$v = \sum_{S \subset N, S \neq \emptyset} \Delta_v(S) u_s, \tag{1.12}$$

pričom u_S je bázová hra a $\Delta_v(S) \in \mathbb{R}$ je Harsanyiho dividenda koalície S.

Dôkaz. Vyjdeme priamo zo vzťahu 1.12 pre ľubovolnú koalíciu $T \subset N$ a z definície bázovej hry (1.10). Keďže všetky členy sumy také, že neplatí $S \subset T$, budú nulové, platí

$$\sum_{S,T \subset N} \Delta_v(S) u_S(T) = \sum_{S \subset T} \Delta_v(S)$$

V ďalšom kroku použijeme definíciu Harsanyiho dividendy 1.11.

$$= \sum_{S \subset T} \left(\sum_{R \subset S} (-1)^{s-r} v(R) \right)$$

Keďže R je podmnožina množiny S a teda aj množiny T, môžeme upraviť sumy.

$$= \sum_{R \subset T} \left(\sum_{R \subset S \subset T} (-1)^{s-r} \right) v(R)$$

Vzhľadom na množinové vzťahy medzi S, T a R, pre ich mohutnosti s, t, r, platí: $r \leq s \leq t$. Teda v sume $\sum_{R \subset S \subset T}$ budeme mať $\binom{t-r}{t-s}$ množín S takých, že $R \subset S \subset T$. Výrazom nahradíme vnútornú zátvorku.

$$= \sum_{R \subset T} \left(\sum_{s=r}^{t} \binom{t-r}{t-s} (-1)^{s-r} \right) v(R)$$

Vidíme, že výraz v zátvorke je výsledkom binomického rozvoja výrazu $(1-1)^{t-r}$

$$= \sum_{R \subset T} \left((1-1)^{t-r} \right) v(R)$$

A keďže tento výraz je nulový pre $\forall r < t$ a len pre $t = r$ je rovný 1, dostávame

$$\sum_{R=T} 1 \cdot v(R) = v(T)$$

čím sme dokázali, že

$$\sum_{S \subset N} \Delta_v(S) u_S(T) = v(T)$$

□

1.2 Riešenie kooperatívnych hier

V predchádzajúcej časti boli popísané vlastnosti charakteristickej funkcie a priestoru všetkých charakteristických funkcií, vďaka ktorým sa dajú hry zapísať veľmi transparentným spôsobom, čo uľahčí ďalší postup pri ich riešení. Ako bolo vyššie spomenuté, riešiť hru znamená hľadať vhodné prerozdelenie zisku koalície medzi jej členov. Samotné riešenie hier, bez reštrikcie na vznik koalícií, pozostáva z viacerých častí, ktoré budú popísané. Následne budú vysvetlené špecifiká a modifikácie pri hľadaní riešenia pre hry s obmedzeniami na vznik koalícií, ktoré nás zaujímajú.

Riešenie TU-hry v tvare charakteristickej funkcie pozostáva z:

(i) z popisu rozdelenia množiny hráčov N do koalícií, tzv. *koaličnej štruktúry*;

(ii) *výplatného vektoru*, ktorý určí rozdelenie zisku medzi členov koalície.

Definícia 1.9. *Koaličnou štruktúrou* nazveme neprázdnu množinu podmnožín N, $KS = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$, $S_i \subset N, \forall i = 1, ..., k$ takú, že

$$\cup_{i=1}^{k} = N, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{ak} \quad i \neq j.$$

Hlavným nástrojom na prerozdelenie zisku je n-rozmerný vektor, ktorý prideľuje hráčom časť zisku a nazýva sa *imputácia*.

Definícia 1.10. *Imputácia* v kooperatívnej hre $v \in \mathscr{G}^N$ je vektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$ taký, že platí

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \qquad \text{(efektivita reps. kolektívna racionalita)} \tag{1.13}$$

$$x_i \geq v(i) \quad \text{pre } \forall i \in N \qquad \text{(individuálna racionalita)} \tag{1.14}$$

Množinu všetkých imputácií značíme $E(v) \subset \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$.

Poznámka. Ak je výplatný vektor imputácia, každý hráč bude preferovať pripojenie sa ku koalícii pred individuálnymi akciami.[3] Tento záver je zrejmý z oboch vlastností imputácií. Splnenie efektivity zaistí rozdelenie celého zisku medzi hráčov. Zisk je vďaka vlastnosti individuálnej racionality rozdelený tak, že žiadny z hráčov nedostane menej, ako by získal samostatne a teda je pre neho výhodné pripojiť sa ku koalícií.

1.2.1 Transformácia kooperatívnych hier

Pre nájdenie vhodného prerozdelenia zisku je potrebné previesť si hru na formu, v ktorej sa bude ľahšie analyzovať. Na transformáciu využije to, že sme vďaka ekvivalencii priestoru hier $\mathscr{G}^N$ a euklidovského priestoru dimenzie $2^n - 1$ našli možný rozklad hier na bázové hry.
Najskôr na základe 1.6 a 1.10 definujeme pojem ekvivalencie v priestore $\mathscr{G}^N$.

Definícia 1.11. Povieme, že hry $v, w \in \mathscr{G}^N$ sú S-*ekvivalentné* ak existuje kladné číslo $\lambda > 0$ a n reálnych konštánt $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathrm{I\!R}$, takých že

$$v = \lambda w + \sum_{i \in N} \mu_i u_i, \tag{1.15}$$

kde $u_i \in \mathscr{G}^N$ je definovaná ako $u_i(S) = 1$ ak $i \in S$ a $u_i(S) = 0$ ak $i \notin S$.

Inak povedané, hry $v, w \in \mathscr{G}^N$ sú ekvivalentné, ak pre $\forall S \subset N$ platí

$$v(S) = \lambda w(S) + \sum_{i \in S} \mu_i.$$

Ak sú dve hry ekvivalentné, jednu z druhej dostaneme lineárnou transformáciu priestorov ziskov jednotlivých hráčov. Ďalej nás budú zaujímať hry, ktorých štruktúra umožňuje netriviálne transformácie, tzv. podstatné hry.

Definícia 1.12. Hru $v \in \mathscr{G}^N$ nazveme *podstatnou*, ak

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(i) \tag{1.16}$$

[3] Tvrdenie vychádza zo základného predpokladu teórie hier, že všetci hráči sú racionálni aktéri.

Ak je hra podstatná, hráči vždy v koalícii získajú viac v ako by získali každý jednotlivo. Kladný rozdiel medzi potenciálnymi ziskami jednotlivcov osobitne a ziskom koalície môže byť prerozdelený medzi hráčov. Prevyšujúci zisk označíme ϵ:

$$\epsilon(v) = v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\}) > 0. \tag{1.17}$$

Keďže sme v priestore $\mathscr{G}^N$, ktorý je euklidovský priestor, podstatné hry je možné normalizovať jednoduchou lineárnou transformáciou bez ujmy na všeobecnosti. Hlavnou normalizáciou je tzv. *(0,1)-normalizácia*.

Definícia 1.13. Hra $v \in \mathscr{G}^N$ je *(0,1)-normálna*, ak $v(\{i\}) = 0$ pre každého individuálneho hráča $i \in N$ a $v(N) = 1$.

Tvrdenie 1.14. *Ak $v \in \mathscr{G}^N$ je podstatná, potom v je S-ekvivalentná práve s jednou (0,1)-normálnou hrou $w_v \in \mathscr{G}^N$ danou*

$$w_v(S) = \frac{1}{\epsilon(v)} \left[v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\}) \right] \tag{1.18}$$

pre každú koalíciu $S \in N$.

Tvrdenie 1.14 nám hovorí, že si môžeme pre každú triedu ekvivalencie v priestore hier vybrať práve jednu (0,1)-normalizovanú hru, ktorá ju bude reprezentovať. V takejto hre bude sila každej koalície explicitne vyjadrená hodnotou $v(S)$.

Takto zavedený matematický aparát nám umožní vyjadrovať charakteristickú funkciu transparentnejšie, čo je pre popis hierarchických štruktúr, ktoré budú popísané v nasledujúcej kapitole, kľúčové.

2 Hierarchická štruktúra

V predchádzajúcej kapitole boli zavedené základné pojmy kooperatívnych hier a tiež bolo načrtnuté ako sa pristupuje k ich riešeniu. Najznámejšie koncepty riešenia sú jadro a Shapleyho hodnota. *Jadro* predstavuje také rozdelenie zisku, ktoré by všetkých hráčov motivovalo pripojiť sa ku koalícii, pretože odpojiť sa od nej by bolo pre každého nevýhodné. Vzniká teda veľká koalícia a jej hlavnou vlastnosťou je stabilita. *Shapleyho hodnota* nesleduje primárne stabilitu, ale skôr akúsi férovosť rozdelenia zisku. Výplata jednotlivých hráčov závisí na tom, akú hodnotu majú pre každú možnú koalíciu (ako prispejú k navýšeniu jej zisku). Hráči s najväčšou hodnotou potom dostanú najväčší podiel výplaty. Tieto základné koncepty riešenia sa používajú vtedy, keď predpokladáme, že môže vzniknúť akákoľvek koalícia.

Realita je však oveľa komplexnejšia a vzniku koalícií môžu brániť najrôznejšie faktory. K situácii, že by mohli vzniknúť skutočne ľubovolné koalície, nedochádza často. Tento fakt je reflektovaný vo vývoji matematického aparátu kooperatívnej teórie hier, ktorý sa pokúša zachytiť a zohľadniť obmedzenia vyvstávajúce v reálnych situáciách.

Prvým rozvinutým konceptom na ich zachytenie bola *Myersnova hodnota*. Tento koncept berie do úvahy prekážky pri formovaní koalícií a zavádza na koaličnú štruktúru reštrikciu. Zo štruktúry sú vylúčené koalície, ktoré sa nemôžu sformovať a po úprave je spočítané riešenie. Myersnova hodnota vychádza zo Shapleyho hodnoty a preto tiež vyjadruje spravodlivé prerozdelenie zisku.

Keď sa posunieme v úvahách o realite ešte ďalej, budeme brať do úvahy, že okrem znemožnenia vzniku niektorých koalícií môže dôjsť aj ku komplikovanejšiemu štruktúrovaniu vzťahov medzi hráčmi. Myersnova hodnota zohľadňuje externé prekážky, môžu síce pramenit aj z povahy hráčov, ale svojou podstatou sa nachádzajú mimo kooperatívnej hry.[4] Nastávajú však aj situácie, kedy obmedzenie vyplýva zo samotnej podstaty hry. Niektoré problémy môžu byť naformulované tak, že v nich majú niektorí hráči možnosť ovplyvňovať aktivity ostatných hráčov priamo v hre.[5] Tieto komplexnejšie vzťahy je aj ťažšie formalizovať a matematicky popísať. Kooperatívna teória hier reflektuje túto realitu zavedením tzv. *štruktúry povolení*.

Štruktúra povolení je orientovaný graf vyjadrujúci vzťahy medzi jednotlivými hráčmi. Jedná sa o popis situácie kedy sú hráči TU-hry súčasťou hierarchickej organizácie, v ktorej niektorí potrebujú povolenie od ostatných hráčov na aktivity a kooperáciu a niektorí majú právo veta nad aktivitami ostatných hráčov. Možnosti sformovať koalíciu sú determinované pozíciou hráča v štruktúre povolení, na základe čoho je možné odvodiť predpoklady o tom, ako štruktúra povolení ovplyvňuje možnosti spolupráce [34].

Hráč, ktorý situáciu kontroluje sa nazýva *nadriadený hráč* (z angl. superior) a hráč, ktorý je subjektom práva veta nadriadeného hráča sa nazýva *podriadený hráč* (z angl. subordinate). Celkovú situáciu si môžeme predstaviť ako produkčný proces založený na výrobnej technológií. Nadriadený má možnosť obmedziť prístup podriadeného k tejto výrobnej technológii (môžeme formulovať ako to, že nadriadený má právo veta nad prístupom podriadeného k technológii). To znamená, že sám podriadený nie je schopný generovať v procese pridanú hodnotu bez súhlasu nadriadeného. K takémuto produkčnému procesu je možné pripodobniť množstvo situácií z reálneho života a ako bude v práci ukázané, aj z oblasti medzinárodných vzťahov.

[4] Napríklad ak sú hráč 1 a hráč 2 odvekí obchodní rivali, bude to brániť vytvoreniu ich koalície, ale netýka sa to podstaty hry, lebo obaja majú rovnaké možnosti usilovať o zisk, prípadne kooperovať za účelom jeho dosiahnutia.

[5] Napríklad ak je hráč 1 v pozícii, že môže hráčovi 2 obmedziť možnosť usilovať sa o zisk - napríklad vie zamedziť jeho prístup k aktívam a pod.

Vyššie popísaný princíp uvažovania o hierarchických štruktúrach bude v nasledujúcej časti zhrnutý a formalizovaný.

2.1 Základné pojmy

Situácia s hierarchickou štruktúrou pozostáva z:

(i) kooperatívnej TU-hry

(ii) zobrazenia, ktoré priradí každému hráčovi množinu jeho podriadených hráčov (popisu štruktúry povolení)

Prvý bod je známy z prvej kapitoly (definícia 1.2). Druhý bod reaguje na fakt, že koalícia sa môže sformovať len ak má každý hráč povolenie na nej participovať. Na objasnenie toho, čo si pod tým predstaviť, definujeme štruktúru povolení a podriadených a nadriadených hráčov.

Definícia 2.15. Zobrazenie $H : N \to 2^N$ je *štruktúra povolení* na množine hráčov N, ak je H ireflexívne ($i \notin H(i)$ pre $\forall i \in N$).

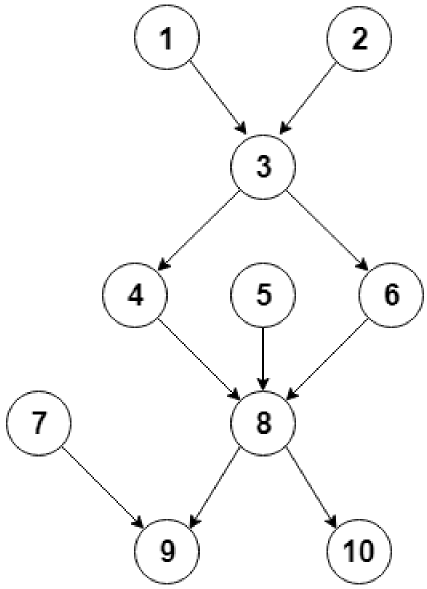
Hráči $j \in H(i)$ sa nazývajú *priamy podriadení hráči* hráča i v štruktúre povolení H. Hráči $j \in H^{-1}(i)$, kde $H^{-1}(i) = \{j \in N | i \in H(j)\}$ sa nazývajú *priamy nadriadení hráči* hráča i v H. Trieda všetkých štruktúr povolení na N sa značí $\mathscr{H}^N$.

Príklad 2.16. Uvažujme kooperatívnu hru (N, v) kde $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Príkladom štruktúry povolení na N je:

Tabuľka 1: Štruktúra povolení

i	$H(i)$	$H^{-1}(i)$
1	$\{3\}$	$\emptyset$
2	$\{3\}$	$\emptyset$
3	$\{4, 6\}$	$\{1, 2\}$
4	$\{8\}$	$\{3\}$
5	$\emptyset$	$\{8\}$
6	$\{8\}$	$\{3\}$
7	$\emptyset$	$\{9\}$
8	$\{9, 10\}$	$\{4, 5, 6\}$
9	$\emptyset$	$\{7, 8\}$
10	$\emptyset$	$\{8\}$

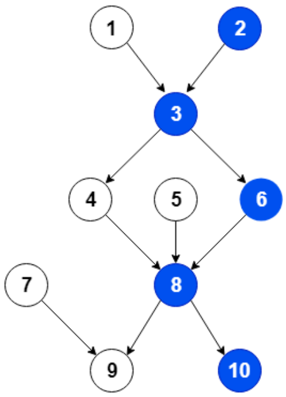
Štruktúru povolení medzi hráčmi môžeme graficky znázorniť ako orientovaný graf. Obr.1 je grafom práve popísanej štruktúry povolení.



Obr. 1: Štruktúra povolení zobrazená ako orientovaný graf

Z definície vyplýva, že keď $j \in H(i)$ hráč i má nad hráčom j priamu autoritu. Keď sa vrátime k terminológii procesu produkcie, povieme, že hráč i kontroluje produkčné aktivity hráča j.

Definícia 2.17. *Priamou autorizačnou cestou* od hráča i k hráčovi j nazveme konečnú postupnosť hráčov, pre ktorú platí $P = (i_1, i_2, ..., i_m)$ takú, že $i_1 = i, i_m = j$ a $i_{k+1} \in H(i_k)$ pre $\forall k \in \{1, 2, ..., m-1\}$.



Obr. 2: Priama autorizačná cesta od hráča 2 k hráčovi 10

Na obrázku je modrou znázornený príklad priamej autorizačnej cesty v štruktúre povolení z príkladu 2.16.

Cestu nazveme kruhom, keď vedie od hráča i naspäť k hráčovi i, $i_1 = i_m = i$. Ak štruktúra povolení neobsahuje žiadny kruh, hovorí sa jej *acyklická*.

Definícia 2.18. Nech $H : N \to 2^N$ je štruktúra povolení na N. Povieme, že H je *slabo hierarchická* ak je acyklická.

Definícia 2.19. *Tranzitívnym uzáverom* štruktúry povolení sa nazýva zobrazenie $H^+ : N \to 2^N$, ak pre každého hráča $i \in N$ platí

$$H^+(i) = \{j \in N | \text{existuje cesta z } i \text{ do } j \text{ v } H\}\,.$$

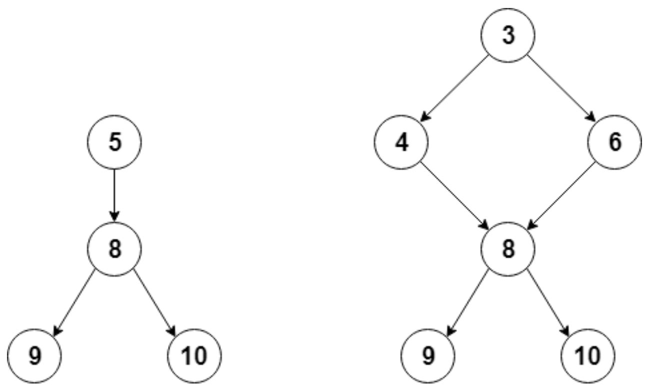
Hráč $j \in H^+(i)$ je nepriamy podriadený hráča i v štruktúre H a naopak, hráč i je nepriamy nadriadený hráča j. Ďalej v práci bude vypustený prívlastok nepriamy, hráči $j \in H^+(i)$ budú označovaní ako podriadení hráča i a hráči $j \in H^-(i)$ len ako nadriadení hráča i.

Špecifickým prípadom je hráč, tzv. *vedúci hráč* (niekedy označovaný ako "big boss"), ktorý je nadriadený všetkých hráčov v štruktúre povolení. Aby takýto hráč mohol existovať, štruktúra povolení musí byť striktne hierarchická (viď. nasledujúca definícia)

Definícia 2.20. Nech $H : N \to 2^N$ je štruktúra povolení na N. Povieme, že H je *striktne hierarchická* ak je H slabo hierarchická a existuje jediný hráč $i_H \in N$ bez nadriadených hráčov, teda $H^-(i_H) = \emptyset$ a $H^-(i_H) \neq \emptyset$ pre všetkých $j \neq i$.

Lema 2.21. *Pre každú striktne hierarchickú štruktúru platí, že $H^+(i_H) = N$ a i_H je jediný hráč s touto vlastnosťou.*

Štruktúra povolení na Obr. 2 nie je striktne hierarchická, ale môžeme z nej vybrať napríklad tieto podštruktúry, ktoré by už definícii zodpovedali:



Obr. 3: Striktne hierarchické podštruktúry

Vedúcimi hráčmi by v tomto prípade boli $i_H = \{5\}$ a $i_H = \{3\}$.

Napokon spojíme doteraz zavedené pojmy a definujeme *hru so štruktúrou povolení.*

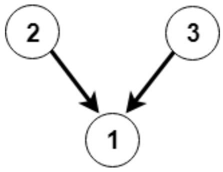
Definícia 2.22. Hra so štruktúrou povolení je trojica (N, v, H), kde N je množina hráčov, $v \in \mathscr{G}^N$ je kooperatívna hra na N a $H \in \mathscr{H}^N$ je štruktúra povolení na N.
Priestor hier so štruktúrou povolení je $\mathscr{G}^N \times \mathscr{H}^N$.

Príklad 2.23. Predstavme si proces produkcie s tromi hráčmi $N = 1, 2, 3$. Predpokladajme, že len hráč 1 je aktívny a vytvára jednu jednotku produktu prostredníctvom danej produkčnej technológie.

a) Ak by bola produkčná technológia voľne dostupná, situáciu by sme mohli popísať hrou (N, v) danou $v(S) = 1$ ak $1 \in S \subset N$, inak $v(S) = 0$.

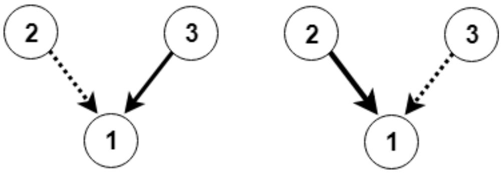
Teraz predpokladajme, že výrobná technológia nie je voľne dostupná, ale vlastnia ju hráči 2 a 3. V tomto prípade je už hra reprezentovaná hierarchickou štruktúrou, kde 2 a 3 sú nadriadení hráči 1. Existuje viac možností ako špecifikovať ich dosah na podriadeného hráča 1 a práve tu sa oddeľujú dva hlavné prístupy.

b) Prvou možnosťou je predpokladať, že každý nadriadený hráč ma bezvýhradné právo kontrolovať akcie všetkých svojich podriadených. V takomto prípade hráč 1 nemôže vyrábať produkt bez plnej spolupráce s oboma nadriadenými. Charakteristická funkcia je potom $v(N) = 1$ a $v(S) = 0$ pre $S \neq N$, pretože hráč 1 je jediný, ktorý môže produkovať zisk, ale môže ho produkovať len vtedy, keď má povolenie od oboch svojich nadriadených hráčov. Túto výslednú hru vzhľadom na popísanú hierarchickú štruktúru zaradíme pod *konjunktívny* prístup k hre.



Obr. 4: Konjunktívny prístup k štruktúre povolení

c) Druhý prístup modifikuje hypotézu o povolení od všetkých nadriadených hráčov a podriadenému hráčovi stačí povolenie aspoň od jedného. V tomto prípade je právo veta viac obmedzené a mení sa na autorizačnú cestu k výrobnej technológii. Akcia konkrétneho hráča musí byť teda autorizovaná reťazcom po sebe nasledujúcich nadriadených hráčov v rámci hierarchie. Takýto prístup sa označuje ako *disjunktívny*.



Obr. 5: Disjunktívny prístup k štruktúre povolení

V uvedenom príklade troch hráčov by aplikácia konjunktívneho prístupu znamenala, že hráč 1 musí získať povolenie na produkciu od oboch hráčov 2 a 3. Pri disjunktívnom prístupe mu stačí povolenie od hráča 2 alebo od hráča 3. Rozdiely su zrejmé aj z nasledujúcej tabuľky, v ktorej sú vyjadrené charakteristické funkcie pre jednotlivé prípady a), b), c).

Tabuľka 2: Porovnanie charakteristickej funkcie pre príklad 2.23

S	a)	b)	c)
$\emptyset$	0	0	0
1	1	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
1,2	1	0	1
1,3	1	0	1
2,3	0	0	0
1,2,3	1	1	1

2.2 Konjunktívny prístup

V nasledujúcej kapitole bude podrobnejšie vysvetlený princíp zavádzania reštrikcie prostredníctvom štruktúry povolení riadiacej sa konjunktívnym prístupom.

Aplikovaniu konjunktívneho prístupu sa intenzívne venovali a k rozvoju významne prispeli Gilles a kolektív príspevkom z roku 1992 [10] a ďalej ho rozpracovali van den Brink a Gilles v práci z roku 1996 [33]. Centrálna hypotéza o nemožnosti hráčov vytvoriť koalíciu bez toho, aby to povolili (tiež na koalícii participovali) aj ich nadriadení hráči sa dá formalizovať nasledovne:

Definícia 2.24. Nech H je štruktúra povolení na N. Koalícia $S \subset N$ sa nazýva *konjunktívne autonómna* v H ak $S \cap H(N \setminus S) = \emptyset$. Množina všetkých konjuktívne autonómnych koalícií je potom

$$\Gamma_H = \{S \subset N | S \cap H(N \setminus S) = \emptyset\} \tag{2.1}$$

Z definície je zrejmé, že autonómna[6] koalícia je taká, ktorá obsahuje všetkých potrebných nadriadených na to, aby mohla operovať. Každý člen je autorizovaný zúčastňovať sa na procese produkcie zisku. V rámci autonómnej koalície nie je žiadny hráč, ktorý by bol podriadený hráčov mimo koalície.

Príklad 2.25. Uvažujme kooperatívnu hru s hierarchickou štruktúrou (N, v, H) s v ľubovolnou a N, H z príkladu 2.16. V tejto hre sa nachádza množstvo možných **konjunktívne autonómnych koalícii**, z ktorých vyberieme nasledujúce 4 (vyznačené modrou na **Obr. 6)** a ukážeme, že spĺňajú definíciu 2.24.
Ďalej je na **Obr. 7** uvedený aj príklad koalícií, ktoré naopak **nie sú konjunktívne autonómne** (aj napriek tomu, že by sa to mohlo intuitívne zdať).

Štruktúry z Obr. 6:

a) $S = \{1, 2, 3\}$ $\qquad N \setminus S = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$\begin{aligned} H(N \setminus S) &= \{H(4), H(5), H(6), H(7), H(8), H(9), H(10)\} = \\ &= \{\{8\}, \{8\}, \{8\}, \{9\}, \{9, 10\}, \emptyset, \emptyset\} = \\ &= \{8, 9, 10\} \end{aligned}$$

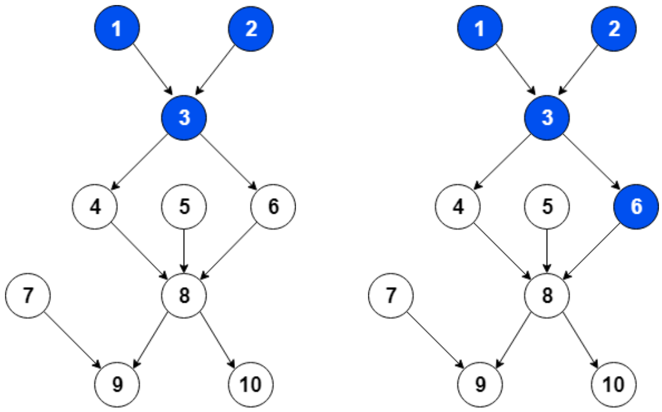
$S \cap H(N \setminus S) = \{\emptyset\}$

b) $S = \{1, 2, 3, 6\}$ $\qquad N \setminus S = \{4, 5, 7, 8, 9\}$
$H(N \setminus S) = \{8, 9, 10\}$
$S \cap H(N \setminus S) = \{\emptyset\}$

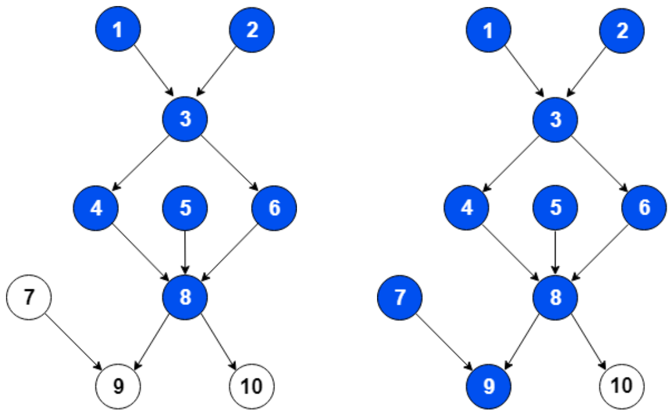
c) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ $\qquad N \setminus S = \{7, 9, 10\}$
$H(N \setminus S) = \{9\}$
$S \cap H(N \setminus S) = \{\emptyset\}$

d) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\qquad N \setminus S = \{10\}$
$H(N \setminus S) = \{\emptyset\}$
$S \cap H(N \setminus S) = \{\emptyset\}$

[6] Keďže v tejto podkapitole je aplikovaný konjunktívny prístup vo všetkých definíciách a odvodených tvrdeniach či vetách, prívlastok konjunktívny bude vypustený.



(a) $\{1, 2, 3\}$ (b) $\{1, 2, 3, 6\}$



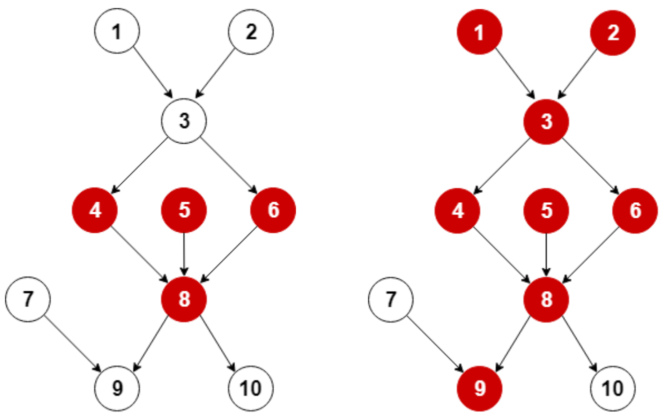
(c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ (d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Obr. 6: Príklady konjunktívne autonómnych koalícií

Štruktúry z Obr. 7:

a) $S = \{4, 5, 6, 8\}$ $\quad N \setminus S = \{1, 2, 3, 7, 9, 10\}$
$H(N \setminus S) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$S \cap H(N \setminus S) = \{4, 5, 6, 8\} \neq \emptyset$

b) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ $\quad N \setminus S = \{7, 10\}$
$H(N \setminus S) = \{8\}$
$S \cap H(N \setminus S) = \{8\} \neq \emptyset$



(a) $\{1, 2, 3\}$ (b) $\{1, 2, 3, 6\}$

Obr. 7: Príklady koalícií, ktoré nie sú konjunktívne autonómne

Lema 2.26. *Ak H je striktne hierarchická štruktúra povolení, potom*

$$\cap \{S \subset \Gamma_H | S \neq \emptyset\} = \{i_H\} \tag{2.2}$$

Lema hovorí, že vedúci hráč v striktne hierarchickej štruktúre je členom každej autonómnej koalície a opäť platí, že je to jediný hráč s touto vlastnosťou.

V nasledujúcej časti sa práca bude venovať ďalším vzťahom medzi hráčmi a koalíciami, ktoré sa v štruktúre povolení objavujú.

Pre ľubovoľnú koalíciu $S \subset N$ v štruktúre povolení H zavedieme pojem *autonómna časť koalície*, ktorá je definovaná ako

$$\gamma_H(S) = \cup \{T \in \Gamma_H | T \subset S\} \tag{2.3}$$

Keď 2.3 podrobnejšie rozpíšeme pomocou 2.24 dostaneme výraz

$$\gamma_H(S) = \cup \{T \subset S | T \cap H(N \setminus T) = \emptyset\},$$

ktorý hovorí, že autonómna časť koalície pozostáva z tých hráčov (T), ktorí nie sú podriadenými hráčmi žiadnych hráčov mimo koalície ($H(N \setminus T)$). Ak tento koncept preformulujeme a nahradíme množinu podriadených hráčov množinou nadriadených hráčov, vyššie uvedený výraz sa dá ekvivalentne vyjadriť ako

$$\gamma_H(S) = \cup \left\{T \subset S | T \setminus H^{-1}(T) \subset T\right\} \equiv \left\{i \in S | H^{-1}(i) \subset S\right\}$$

Vyššie uvedené ekvivalentné výrazy vyjadrujú, že keď do koalície pridáme všetkých hráčov, ktorých podriadení sa nachádzajú v koalícii, dostaneme autonómnu koalíciu. $\gamma_H(S)$ teda pozostáva z hráčov, ktorí nemajú žiadnych nadriadených mimo koalície S a majú tak všetky prostriedky potrebné na generovanie zisku, ktorý označíme $v(\gamma_H(S))$.

Predchádzajúci koncept autonómnej podkoalície doplníme pojmom *konjunktívny autorizujúci obal* koalície S, ktorý označíme ${\gamma_H}^-(S)$. Bude obsahovať všetkých hráčov, ktorí majú v koalícii S nejakého podriadeného hráča.

$${\gamma_H}^-(S) = \cap \{T \in \Gamma_H | S \subset T\} \equiv \left\{i \in N | H^+(i) \cap S \neq \emptyset\right\} \equiv H^-(S) \tag{2.4}$$

Čiže je to presne množina tých hráčov, od ktorých je potrebné získať autorizáciu, aby mohla koalícia dosiahnuť zisk $v(S)$. Bez autorizujúceho obalu by koalícia S nebola schopná produkovať žiadny zisk. Obal je najmenšou nadkoalíciou zaisťujúcou prístup k prostriedkom.

Z popisu konjunktívneho prístupu je zrejmé, že v hre so štruktúrou povolení (N, v, H) bude mať koalícia $S \subset N$ plný prístup k aktívam alebo technológiám potrebným na produkovanie zisku len ak v nej budú participovať všetci nadriadení hráči a teda koalícia bude autonómna. Na vyjadrenie tohto konceptu použijeme konjunktívnu reštrikciu.

Definícia 2.27. Nech $(N, v, H) \in \mathscr{G}^N \times \mathscr{H}^N$ je kooperatívna hra so štruktúrou povolení. *Konjunktívna reštrikcia* hry (N, v, H) je hra $\mathscr{R}_H(v) \in \mathscr{G}^N$ definovaná ako

$$\mathscr{R}_H(v)(S) = v(\gamma_H(S)) \tag{2.5}$$

Vlastnosti tohto zobrazenia nám umožnia vyjadriť presnú formulu, ktorá ho popíše.

Veta 2.28. *Nech $H \in \mathscr{H}^N$ je ľubovoľná štruktúra povolení. Konjunktívna reštrikcia $\mathscr{R}_H$ je lineárne zobrazenie rádu $|\Gamma_H - 1|$ (počet neprázdnych konjunktívnych autonómnych koalícií v H) na $\mathscr{G}^N$. Jeho jadro je ohraničené štandardnou bázou hry $\{b_S | S \notin \Gamma_H\}$ a obraz je ohraničený bázou hry $\{u_S | S \in \Gamma_H\}$.*

Veta 2.29. *Nech je (N, v, H) hra so štruktúrou povolení. Jej konjunktívna reštrikcia je charakterizovaná*

$$\mathscr{R}_H(v)(S) = \sum_{S \in \Gamma_H} \left(\sum_{T \subset N : \gamma_H{}^-(T) = S} \Delta_v(T) \right) \cdot u_S \tag{2.6}$$

Pre dôkazy viet viď. [11].

2.2.1 Hodnota konjunktívnej štruktúry

Konjunktívna reštrikcia je zobrazenie $\mathscr{R}_H : \mathscr{G}^N \times \mathscr{H}^N \to \mathscr{G}^N$ a po jej zavedení dostaneme modifikovanú, ale opäť koaličnú hru. Pri hľadaní riešenia teda môžeme vychádzať z konceptu používaného pre kooperatívne hry bez obmedzeného vzniku koalícií - Shapleyho hodnoty.[7] Takto upravenú hodnotu budeme nazývať *hodnota konjunktívnej štruktúry povolení* a označíme ju

$$\rho^c(v, H) = \varphi(\mathscr{R}_H(v))) \tag{2.7}$$

Pripomenieme si klasickú definíciu Shapleyho hodnoty φ, keďže samotný výpočet hodnoty reštrikcie z nej vychádza.

Definícia 2.30. *Shapleyho hodnota* je hodnota priradená funkciou $\varphi : \mathscr{G}^N \to \mathrm{I\!R}$, kde φ je pre jednotlivých hráčov určená nasledovne

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subset N : i \in S} \frac{\Delta_v(S)}{|S|} \tag{2.8}$$

Keď sa na vyššie definovanú hodnotu 2.7 pozrieme vo všeobecnosti, je to alokačné pravidlo $f : \mathscr{G}^N \times \mathscr{H}^N \to \mathrm{I\!R}$ v triede hier so štruktúrou povolení. Na to, aby sme takéto pravidlo f mohli označiť za hodnotu konjunktívnej štruktúry, musí spĺňať nasledujúcich 5 axiómov:[8]

(i) **efektivita**
Pre každú hru $\forall v \in \mathscr{G}^N$ a pre každú štruktúru povolení $\forall H \in \mathscr{H}^N$ platí:

$$\sum_{i \in N} f_i(v, H) = v(N). \tag{2.9}$$

Vlastnosť efektivity alokačného pravidla f vnímaného vo význame hodnoty konjunktívnej štruktúry hovorí, že celkový možný zisk (zisk veľkej koalície) je rovný súčtu ziskov

[7] Pod podrobným zavedením a axiomatizáciou hodnoty pre konjunktívnu aj pre disjunktívnu reštrikciu koaličnej hry, sú podpísaní Peter Gilles and René van den Brink.

[8] Existujú rôzne axiomatizácie hodnoty konjunktívnej štruktúry (napríklad podľa van den Brinka, viď. [35]). V práci je použitá axiomatizácia podľa Gillesa, 2010 [11]), ktorá vychádza z jeho predchádzajúcich prác z rokov 1992 [10] a 1996 [33].

všetkých hráčov po aplikovaní alokačného pravidla. Stručne povedané, splnenie tejto vlastnosť kladie na hodnotu konjunktívnej štruktúry kritérium toho, že zavedením konjunktívnej reštrikcie sa žiadna časť možného zisku nestratí.

(ii) **additivita**
Pre všetky hry $\forall v, w \in \mathscr{G}^N$ a pre každú štruktúru povolení $\forall H \in \mathscr{H}^N$ platí:

$$f(v + w, H) = f(v, H) + f(w, H) \tag{2.10}$$

Additivita má rovnaký význam ako v prípade klasickej Shapleyho hodnoty počítanej bez reštrikcií. Keď na hry zavedieme rovnakú štruktúru povolení, výsledná hodnota konjunktívnej štruktúry ich súčtu bude súčtom po aplikácií alokačných pravidiel na jednotlivé hry osobitne.

(iii) **vlastnosť slabého nepodstatného hráča**
Pre každú hru $\forall v \in \mathscr{G}^N$, pre každú štruktúru povolení $\forall H \in \mathscr{H}^N$ a pre každého hráča $i \in N$ takého, že každý hráč $j \in H^+(i)$ je *"dummy"* hráč[9] hry v platí

$$f_i(v, H) = 0, \tag{2.11}$$

ak je hra v normalizovaná (viď. 1.18).

Podriadení hráči hráča i sú jeho zdrojom navyšovana zisku. To znamená, že ak sú všetci podriadení hráča i "dummy"hráči, jeho zisk zostáva rovnaký (teda v normalizovanej hre je rovný 0). Na druhej strane, ak hráč i nedokáže sám produkovať zisk, ale niektorý z jeho podriadených môže, on sám prestáva byť "dummy"hráčom.

(iv) **vlastnosť nevyhnutného hráča**
Pre každú monotónnu (1.3) hru $\forall v \in \mathscr{G}^N$, štruktúru povolení $\forall H \in \mathscr{H}^N$ a hráča $i \in N$, takého, že pre e $\forall S \subset N \setminus \{i\}$ je $v(S) = 0$, platí

$$f_i(v, H) = \max_{j \in N} f_j(v, H). \tag{2.12}$$

Predpoklady vymedzia vedúceho hráča v hre a o ňom potom platí, že mu pripadne najväčšia časť hodnoty generovanej v produktívnej hierarchii, lebo bez neho by žiadny zisk nebol možný.

(v) **štrukturálna monotónnosť**
Pre každú monotónnu (1.3) hru $\forall v \in \mathscr{G}^N$, štruktúru povolení $\forall H \in \mathscr{H}^N$ a hráča $i \in N$ takého, že $H(i) \neq \emptyset$ platí, že

$$f_i(v, H) \geq \max_{j \in H(i)} f_j(v, H). \tag{2.13}$$

Táto vlastnosť je špecifikum vyplývajúce zo štruktúry povolení a klasická Shapleyho hodnota ju nespĺňa. Pojednáva o tom, že každý hráč má priradený zisk, ktorý je minimálne taký veľký ako je zisk jeho priamych podriadených, teda výplata nadriadeného hráča je vždy vyššia ako jeho podriadených.

Vlastnosti sú na sebe nezávislé (pre dôkaz viď. [11]). Axiomatizácia, tak ako bola rozpracovaná v [10] a [33], je jednou z mnohých možných a dá sa ešte ďalej rozvíjať. Robert P. Gilles svoju pôvodnú axiomatizáciu doplnil v monografii z roku 2010 [11] o ďalšie dve vlastnosti,

[9]"Dummy"hráč je hráč, ktorý nijako neprispieva k zisku koalície keď je jej členom, teda $v(S) = v(S \setminus \{i\})$.

ktoré vyjadrujú rozdiely medzi konjunktívnym a disjunktívnym prístupom a následne potom umožňujú aj axiomatizáciu disjunktívneho spôsobu v náväznosti na konjunktívny.

Axiómy teda doplníme o nasledujúce dva:

(vi) **slabá štrukturálna monotónnosť**

Najskôr si označíme triedu striktne hierarchických štruktúr povolení ako $\mathscr{S}_H^N$. Keď dvojica $(v, H) \in \mathscr{G}^N \times \mathscr{S}_H^N$ je hra so striktnou štruktúrou povolení, označíme množinu $C_H(i) \subset H^+(i)$ ako množinu hráčov, ktorí sú kompletne kontrolovaní hráčom i, v tom zmysle, že $j \in C_H(i)$ vtedy a len vtedy keď každá cesta z i_H do j zahŕňa hráča i. Množina $C_H^{-1}(i) = \{j \in N | i \in C_H(j)\}$ je množina všetkých hráčov, ktorí úplne kontrolujú hráča i, táto množina zohráva dôležitú úlohu pri autorizácii aktivít hráča i.

Pre každú monotónnu hru so striktnou štruktúrou povolení $(v, H) \in \mathscr{G}^N \times \mathscr{S}_H^N$ a hráča $i \in N$ platí, že pre všetky $\forall j \in C_H(i)$ platí:

$$f_i(v, H) \geq f_j(v, H). \tag{2.14}$$

Čiže vždy, keď je hráč i úplne kontrolovaný hráčom j, jeho zisk bude menší ako hráča j.

(vii) **vlastnosť konjunktívnej férovosti**

Pre každú hru so striktnou štruktúrou povolení $(v, H) \in \mathscr{G}^N \times \mathscr{S}_H^N$ a hráčov $i, j, g \in N$ takých, že $i \neq g$ a $j \in H(i) \cap H(g)$, pre každého hráča $h \in \{g\} \cup C_H^{-1}(g)$ platí:

$$f_h(v, H) - f_h(v, H_{-ij}) = f_j(v, H) - f_j(v, H_{-ij}), \tag{2.15}$$

kde H_{-ij} je štruktúra povolení, ktorá vznikne po odstránení hierarchického vzťahu medzi hráčmi i a j.

Vyjadruje zmenu alokovanej hodnoty, ak je hierarchický vzťah medzi podriadeným a nadriadeným hráčom odstránený. Podriadený a nadriadený hráč tým sú ovplyvnení do rovnakej miery a navyše sa táto rovnosť medzi nimi rozšíri aj na niektorých tretích hráčov.

Veta 2.31. *Alokačné pravidlo $f : \mathscr{G}^N \times \mathscr{S}_H^N \to \mathbb{R}$ v triede hier so striktne hierarchickou štruktúrou je rovné hodnote konjunktívnej štruktúry ρ^c práve vtedy keď spĺňa axiómy (i) - (vii).*

Podrobnú axiomatizáciu a ďalšie vlastnosti uvádzajú van den Brink a Gilles [33].

2.3 Disjunktívny prístup

V ďalšej časti bude rozobratý princíp zavádzania reštrikcie prostredníctvom štruktúry povolení riadiacej sa disjunktívnym prístupom. Aj týmto prístupom sa zaoberali najmä Owen, van den Brink a Gilles. Nasledujúca podkapitola vychádza z [11], kde Gilles rozvinul vlastné publikácie z roku 1999, na ktorých pracoval spolu s Owenom na univerzite vo Virginii.

Ako už bolo uvedené, disjunktívny prístup k hráčom a k štruktúre povolení znamená, že podriadený hráč musí mať povolenie aspoň od jedného svojho priameho nadriadeného (nadriadený musí byť tiež v koalícii), aby bol schopný generovať zisk. Na to, aby sme disjunktívny prístup mohli aplikovať, je nutné, aby štruktúra povolení bola aspoň slabo hierarchická.

Podobným spôsobom ako v predchádzajúcej kapitole postupne definujeme disjunktívnu reštrikciu hry a následne hodnotu disjunktívnej štruktúry. Najskôr zavedieme *množinu vedúcich hráčov*.

$$B_H = \{i \in N | H^{-1}(i) = \emptyset\} \tag{2.16}$$

Jedná sa o množinu hráčov, ktorí nemajú v hre žiadneho nadriadeného hráča. Keďže H je slabo hierarchická (teda je acyklická), je zrejmé, že $B_H \neq \emptyset$. V prípade, že je štruktúra povolení H aj striktne hierarchická platí, že $B_H = \{i_H\}$. V štruktúre povolení znázornenej na Obr. 2 je množina vedúcich hráčov $B_H = \{1, 2, 5, 7\}$.

Definícia 2.32. Nech H je štruktúra povolení na N. Koalícia $S \subset N$ sa nazýva *disjunktívne autonómna*, ak pre $\forall i \in S \setminus B_H$ platí, že $H^{-1}(i) \cap S \neq \emptyset$. Množina všetkých disjunktívne autonómnych koalícií je potom

$$\psi_H = \left\{ S \in N | \forall i \in S \setminus B_H : H^{-1}(i) \cap S \neq \emptyset \right\} \tag{2.17}$$

Koalícia je disjunktívne autonómna, ak pre jej všetkých členov (okrem vedúcich hráčov) platí, že v koalícii sa nachádza aspoň jeden ich nadriadený (teda že prienik množiny ich nadriadených a koalície, ktorej sú členmi, nie je prázdna množina).

Príklad 2.33. Uvažujme kooperatívnu hru s hierarchickou štruktúrou (N, v, H) s v ľubovolnou a N, H z príkladu 2.16. V tejto hre sa nachádza veľké množstvo možných **disjunktívne autonómnych koalícii**, z ktorých vyberieme nasledujúce 4 (vyznačené modrou na **Obr. 8**) a ukážeme, že spĺňajú definíciu 2.32.
Ďalej je na **Obr. 9** uvedený príklad koalícií, ktoré naopak **nie sú disjunktívne autonómne**.

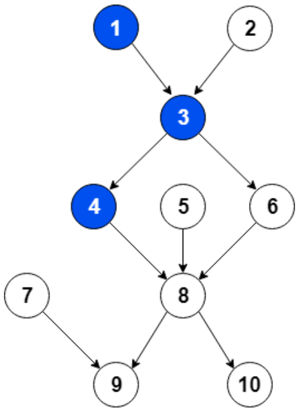
Štruktúry z Obr. 8:
a) $\{1, 3, 4\} : S \setminus B_H = \{3, 4\}$
pre $i = 3 : \{1, 2\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1\} \neq \emptyset$
pre $i = 4 : \{3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{3\} \neq \emptyset$

b) $\{5, 8, 9\} : S \setminus B_H = \{8, 9\}$
pre $i = 8 : \{4, 5, 6\} \cap \{5, 8, 9\} = \{5\} \neq \emptyset$
pre $i = 9 : \{7, 8\} \cap \{5, 8, 9\} = \{8\} \neq \emptyset$

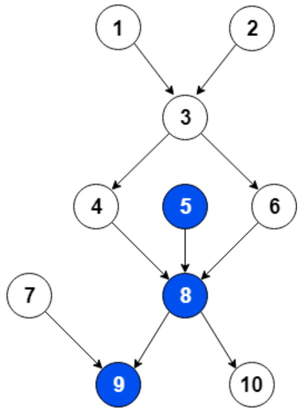
c) $\{1, 3, 5, 8, 9\} : S \setminus B_H = \{3, 8, 9\}$
pre $i = 3 : \{1, 2\} \cap \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{1\} \neq \emptyset$
pre $i = 8 : \{4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{5\} \neq \emptyset$
pre $i = 9 : \{7, 8\} \cap \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{8\} \neq \emptyset$

d) $\{7, 9\} : S \setminus B_H = \{9\}$
pre $i = 9 : \{7, 8\} \cap \{7, 9\} = \{7\} \neq \emptyset$

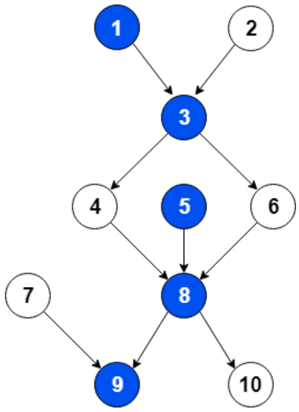
Štruktúry z Obr. 9:
a) $\{3, 4, 8, 10\} : S \setminus B_H = \{3, 4, 8, 10\}$
pre $i = 3 : \{1, 2\} \cap \{3, 4, 8, 10\} = \emptyset$
- nespĺňa podmienky disjunktívnej autonómnej koalície, ďalších hráčov v koalícii nie je potrebné analyzovať
b) $\{1, 3, 8, 9\} : S \setminus B_H = \{3, 8, 9\}$
pre $i = 3 : \{1, 2\} \cap \{1, 3, 8, 9\} = \{1\} \neq \emptyset$
pre $i = 8 : \{4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 8, 9\} = \emptyset$
- nespĺňa podmienky disjunktívnej autonómnej koalície, hráča 9 už nie je potrebné analyzovať



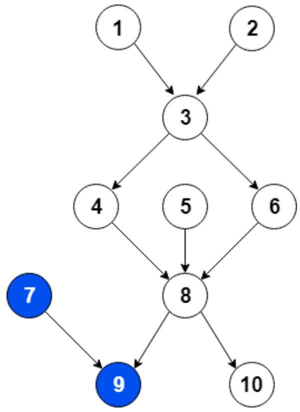
(a) $\{1, 3, 4\}$



(b) $\{5, 8, 9\}$

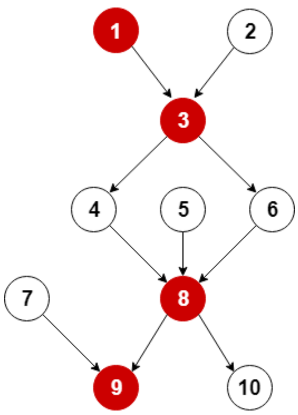


(c) $\{1, 3, 5, 8, 9\}$

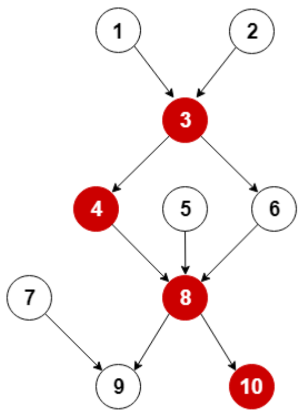


(d) $\{7, 9\}$

Obr. 8: Príklady disjunktívne autonómnych koalícií



(a) $\{1, 2, 3\}$



(b) $\{1, 2, 3, 6\}$

Obr. 9: Príklady koalícií, ktoré nie sú disjunktívne autonómne

Z toho vyplýva, že koalícia $S \subset N$ je disjunktívne autonómna len ak pre každého hráča $i \in S$ existuje množina hráčov $\{j_1, ..., j_m\} \subset S$ taká, že $j_1 \in B_H$, $j_m = i$ a pre každé $1 \leq k \leq m-1$ platí, že $j_{k+1} \in H(j_k)$ (tedá, že od hráča $j_1 \in B_H$ existuje autorizačná cesta k hráčovi i).

Je zrejmé, že ψ_H bude mať komplikovanejšiu štruktúru ako množina všetkých konjunktívne autonómnych koalícií Γ_H a preto ju nedokážeme obdobne zapísať. Vieme len dokázať, že je uzavretá voči zjednoteniu.

Tvrdenie 2.34. *Nech H je slabo hierarchická štruktúra povolení. Potom $\emptyset, N \in \psi_H$ a pre všetky $S, T \in \psi_H$ platí, že $S \cup T \in \psi_H$.*

Dôkaz.
$\emptyset, N \in \psi_H$ je zrejmé.
Pre ľubovolné $S, T \subset \psi_H$ a hráča $i \in S \setminus B_H$ z definície dostaneme

$$\emptyset \neq H^{-1}(i) \cap S \subset H^{-1}(i) \cap (S \cup T)$$

a obdobne pre hráča $i \in T \setminus B_H$ z definície dostaneme

$$\emptyset \neq H^{-1}(i) \cap T \subset H^{-1}(i) \cap (T \cup S)\,.$$

$\square$

Podobne ako pre konjunktívny prístup, aj teraz zavedieme pojem *autonómna časť koalície* v zmysle maximálne disjunktívnej podkoalície:

$$\delta_H(S) = \cup \{T \in \psi_H | T \subset S\} \tag{2.18}$$

Narážame na ďalší rozdiel medzi konjunktívnym a disjunktívnym prístupom. V druhom vymenovanom neplatí, že existuje jedinečný disjunktívny autonómny obal koalície S.

Koalíciu $T \subset N$ nazveme *disjunktívnym autorizujúcim obalom* koalície S, ak
(i) $T \in \psi_H$ a
(ii) $S \subset T$ a
(iii) neexistuje také $U \in \psi_H$, že $S \subset U \subset T$ a $U \neq T$.

Každá takáto koalícia T je autorizujúcim obalom koalície S a preto v disjunktívnom prístupe zavedieme aj pojem *množiny všetkých autorizujúcich obalov*. Označíme ju $\mathscr{V}_H(S)$, je to množina všetkých T, ktoré sú autorizujúcim obalom koalície S (teda napĺňajú vyššie uvedené body $i) - iii)$). Je zrejmé, že $\mathscr{V}_H(S) \subset \psi_H$ a platí

$$\psi_H = \bigcup_{S \subset N} \mathscr{V}_H(S) \tag{2.19}$$

To znamená, že keď máme kooperatívnu hru (v, N), predpokladáme rovnako ako pri konjunktívnom prístupe, že $S \subset N$ bude produkovať zisk $v(S)$, len ak bude možné takúto koalíciu vytvoriť, teda ak nadriadení hráči sformovanie koalície povolia. V disjunktívnom prístupe je viac možností ako zaistiť, aby koalícia mohla byť produktívna, keďže stačí povolenie jedného z nadriadených hráčov. Formálne zachytenie všetkých týchto možností je preto prirodzene komplikovanejšie ako v konjunktívnom prístupe, čo sa ukáže pri vyjadrovaní formule výpočtu obdobnej k 2.6 a tiež je to evidentné z implementácie algoritmu (viď. Príloha A.2.4).

Definícia 2.35. Nech $(N, v, H) \in \mathscr{G}^N \times \mathscr{H}^N$ je hra so štruktúrou povolení. *Disjunktívna reštrikcia* hry (N, v, H) je hra $\mathscr{B}_H(v)(S) = v(\delta_H(S))$

Veta 2.36. *Nech H je slabo hierarchická štruktúra povolení. Disjunktívna reštrikcia $\mathscr{B}_H$ je lineárne zobrazenie rádu $|\psi_H - 1|$(počet neprázdnych disjunktívnych autonómnych koalícií v H) na $\mathscr{G}^N$. Jadro je ohraničené štandardnou bázou hry $\{b_S | S \notin \psi_H\}$ a obraz je ohraničený bázou hry $\{u_S | S \in \psi_H\}$.*

Dôkaz je obdobný k dôkazu vety 2.28 (viď. [11]).

Kľúčovú rolu v tomto prístupe zohrávajú autorizujúce obaly. Ak $S \subset N$, množinu všetkých zjednotení autorizujúcich obalov koalície S označíme ako $\mathscr{V}_H^*(S) \subset 2^N$. Teda koalícia $T \in \mathscr{V}_H^*(S)$ vtedy keď existuje $T_q \in \mathscr{V}_H(S)$, pričom $1 \leq q \leq Q$, také že $T = \cup_{q=1}^{Q} T_q$. Inak povedané, v $\mathscr{V}_H^*(S)$ budú všetky možné zjednotenia koalícií T z množiny $\mathscr{V}_H(S)$.

Na základe toho zavedieme ešte ďalšie doplňujúce značenia.
Množinu všetkých $T \in N$, ktoré sú autorizujúcimi obalmi množiny S označíme

$$\mathscr{V}_H^{-1}(S) = \{T \subset N | S \in \mathscr{V}_H(T)\}\,. \tag{2.20}$$

Množinu všetkých zjednotení autorizujúcich obalov, z ktorej vylúčime samotné pôvodné autorizujúce obaly z množiny $\mathscr{V}_H(S)$, označíme $\widehat{\mathscr{V}_H}(S)$,

$$\widehat{\mathscr{V}_H}(S) = \{T \subset N | S \in \mathscr{V}_H^*(T) \setminus \mathscr{V}_H(T)\} \tag{2.21}$$

Pre všetky $S \in \psi_H$ a $T \in \mathscr{V}_H^*(T)$ zavedieme ešte $\mu_S^H(T)$,

$$\mu_S^H(T) = \Delta_{w_T}(S) \in \mathbb{Z}, \tag{2.22}$$

kde $w_T = \mathscr{B}_H(u_T)$.[10] Teda $\mu_S^H(T)$ má hodnotu Harsanyiho dividend pre hru w_T, ktorá vznikne, keď na bázovú hru u_T tiež zavedieme disjunktívnu reštrikciu. Keďže budeme potrebovať zavedenie disjunktívnej reštrikcie na bázových hrách rôznych koalícií, zovšeobecnená formula bude v tvare:

$$w_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad S \subset \mathscr{V}_H(T) \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \,. \tag{2.23}$$

Je zrejmé, že táto hodnota nie je závislá na hre, je definovaná čisto v rámci štruktúry povolení.

Veta 2.37. *Nech je (N, v, H) kooperatívna hra so štruktúrou povolení. Jej disjunktívna reštrikcia je charakterizovaná ako*

$$\mathscr{B}_H(v)(S) = \sum_{S \in \psi_H} \left(\sum_{T \in \mathscr{V}_H^{-1}(S)} \Delta_v(T) + \sum_{T \in \widehat{\mathscr{V}_H}(S)} \mu_S^H(T) \cdot \Delta_v(T) \right) \cdot u_S \tag{2.24}$$

[10]Pre zavedenie $\mathscr{B}_H$ na hru $u_{\{1\}}$ viď. príklad 2.23, c).

2.3.1 Hodnota disjunktívnej štruktúry

Rovnako ako po aplikácii konjunktívnej reštrikcie, aj v prípade disjunktívnej dostaneme opäť kooperatívnu hru $v \in \mathscr{G}^N$ a ako koncept riešenia môžeme použiť Shapleyho hodnotu. Takto spočítaná hodnota sa nazýva *hodnota disjunktívnej štruktúry* a značíme

$$\rho^d(v, H) = \Phi(\mathscr{B}_H(v)). \tag{2.25}$$

Axiomatizácia hodnoty vychádza z rovnakých vlastností všeobecného alokačného pravidla ako konjunktívna hodnota.
Vzhľadom na rozdiely v prístupoch upravíme len vlastnosti štrukturálnej mnotónnosti (v) a konjunktívnej férovosti (vii).

Pri štrukturálnej monotónnosti musíme zobrať do úvahy, že podriadeným hráčom v tomto prístupe stačí na produkovanie zisku prítomnosť jedného nadriadeného v koalícii. Majú viac možných ciest k zisku a preto sa hodnota tohto zisku neodvíja od zisku každého ich nadriadeného, ale aspoň jedného. Inak povedané, v disjunktívnom prístupe nie je podmienkou, aby každý nadriadený hráč dostal minimálne toľko ako jeho priamy podriadení. Ak je n hráčov nadriadených pre rovnakú koalíciu podriadených hráčov, stačí, aby aspoň jeden z týchto n hráčov dosahoval zisk minimálne rovný svojim podriadeným.

Disjunktívna férovosť vyjadruje to, ako sa zmení zisk nadriadeného hráča ak je odstránený vzťah medzi ním a jedným z jeho podriadených.

(vii) **vlastnosť disjunktívnej férovosti**
Pre každú hru so striktne hierarchickou štruktúrou $(v, H) \in \mathscr{S}_H^N \times \mathscr{H}^N$ a hráčov $i, j \in N$ takých, že $j \in H(i)$ a $|H^{-1}(j)| \geq 2$ platí, že pre každé $h \in \{i\} \cup C_H(i)$:

$$f_h(v, H) - f_H(v, H_{-ij}) = f_j(v, H) - f_j(v, H_{-ij}) \tag{2.26}$$

kde H_{-ij} je štruktúra povolení po odstránení vzťahu medzi hráčmi i a j.
Hlavnou myšlienkou disjunktívnej férovosti je, že predpokladá, že nadriadený hráč je vzťahom autority ovplyvnený rovnako ako podriadený hráč. Jeho odstránenie sa teda prejaví u oboch hráčov.

Veta 2.38. *Alokačné pravidlo $f : \mathscr{G}^N \times \mathscr{S}_H^N \to \mathbb{R}$ v triede hier so striktne hierarchickou štruktúrou je rovné hodnote disjunktívnej štruktúry ρ^d práve vtedy keď spĺňa axiómy (i) - (vii).*

3 Aplikácia na lokálne konflikty

Matematický aparát kooperatívnej teórie hier s hierarchickou štruktúrou, zavedený v predchádzajúcich kapitolách sa využíva najmä vo svete ekonómie. Je dôležitým konceptom, pretože produkčné procesy sú väčšinou procesy s autoritou a disjunktívny aj konjunktívny prístup sú pre ne vhodnou formalizáciou. Medzi ďalšie oblasti využitia hier s hierarchickými štruktúrami patrí napríklad energetika (viď. napr. [24]).

Cieľom diplomovej práce je poukázať na to, že okrem vyššie spomínaných odvetví je široký priestor pre aplikáciu aparátu kooperatívnej teórie hier aj v oblasti medzinárodných vzťahov a bezpečnosti. Medzinárodné prostredie je súčasnou organizáciou a mierou inštitucionalizácie ukážkovým príkladom štruktúry s autoritami. Mnohé problémy, ktoré sa v tejto oblasti riešia, zahŕňajú hierarchické vzťahy aktérov, kedy sú akcie jedného z nich limitované rozhodnutiami a správaním sa iných. Jedným z klasických príkladov je Európska únia (EU), kde by sa dali identifikovať štruktúry povolení vo veľkom množstve procesov. V diplomovej práci budú do centra pozornosti umiestnené zahraničné vojenské operácie EU, ktoré sa s rozvojom Spoločnej zahraničnej a bezpečnostnej politiky (SZBP) stávajú čoraz diskutovanejšími aj v súvislosti s hierarchickými vzťahmi.

Pod pojmom zahraničné vojenské operácie medzinárodného spoločenstva rozumieme intervencie do krajín, kde prebieha vnútorný konflikt. Po skončení studenej vojny a dramatickej zmene medzinárodného prostredia, množstvo aj intenzita týchto konfliktov vzrástla. Medzinárodné spoločenstvo na ne musí reagovať jednak preto, lebo často ohrozujú stabilitu a bezpečnosť v regióne a tiež dochádza k ohrozovaniu civilného obyvateľstva, v niektorých prípadoch dokonca až k humanitárnym katastrofám. Téma zahraničných intervencií a ich legitimity je predmetom mnohých štúdií a aj táto diplomová práca se bude ďalej jedným z jej aspektov zaoberať.

V nasledujúcej kapitole bude bližšie predstavený výskumný problém z oblasti zahraničných intervencií EU, ktorý doposiaľ nebol zodpovedaný. Cieľom práce je pokúsiť sa ponúknuť nový náhľad do problematiky prostredníctvom vyššie zavedeného matematického aparátu. Ďalšia časť objasní, prečo je kooperatívna teória hier vhodnou metódou na skúmanie témy a ako môže byť prospešná.

3.1 Výskumný problém

Aparát kooperatívnej teórie hier je veľmi vhodný pre konflikty vo všeobecnosti, pretože aliancie predstavovali v priebehu histórie základ takmer každej vojny. Štát vstupujúci do konfliktu bez spojencov je veľmi sporadický prípad [38]. To isté platí aj o vyššie zmienených vojenských intervenciách, ktorým po ústupe medzištátnych vojen do úzadia a po tom, ako sa prevažujúcim typom konfliktu stali tie vnútroštátne (viď. Obr. 10), narástla relevancia.

Vzhľadom na mieru globalizácie, narastajúcu interdependenciu a tiež rozšírenie demokracie, vnútorné konflikty sa stávajú problémom celého medzinárodného spoločenstva. Keďže Organizácia spojených národov (OSN) po druhej svetovej vojne v Charte (Čl. 24) prijala "*primárnu zodpovednosť za zaistenie medzinárodného mieru a bezpečnosti*"[13], musela na takéto situácie reagovať. Dôležitým faktom v tejto problematike je, že Vestfálskym mierom z roku 1648 sa suverenita štátov a ich sloboda jednania v rámci ich vlastných hraníc stala medzinárodne uznávanou normou [28]. Charta OSN to berie do úvahy (Čl. 2, Ods.3,7)) a zakazuje hrozbu použitia

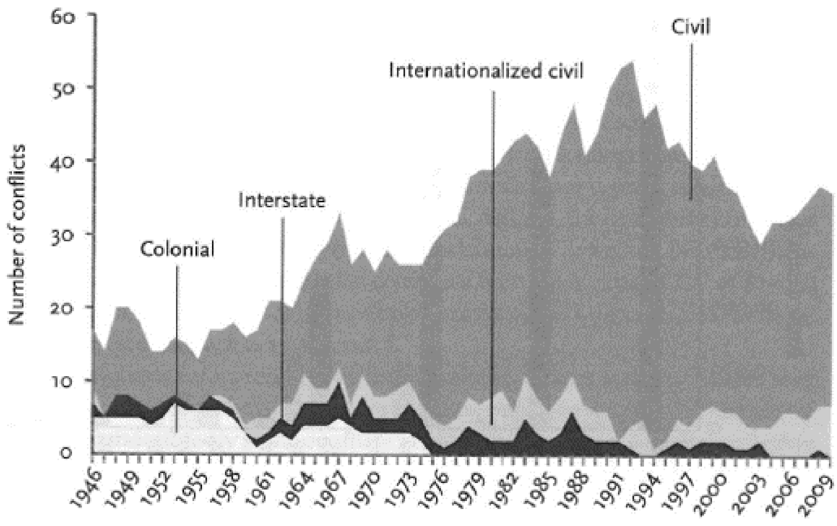


FIGURE 6–3. Number of state-based armed conflicts, 1946–2009
Sources: UCDP/PRIO Armed Conflict Dataset; see Human Security Report Project, 2007, based on data from Lacina & Gleditsch, 2005, updated in 2010 by Tara Cooper.

Obr. 10: Vývoj ozbrojených konfliktov medzi rokmi 1949 - 2009, Zdroj: PINKER, Steven. The better angels of our nature: why violence has declined. s.303 New York: Viking, 2011. ISBN 978-0-670-02295-3.

sily proti teritoriálnej integrite alebo politickej nezávislosti štátov a hovorí, že "*by nič nemalo autorizovať intervenciu do domácich záležitostí žiadneho štátu*"[13]. Avšak, aby OSN mohla splniť svoje záväzky, v Charte sú uvedené dve výnimky z tohto pravidla a to sebaobrana alebo kolektívna obrana v odpovedi na ozbrojený útok, ale v takýchto prípadoch musí byť použitie sily autorizované (podľa Hlavy 7) Radou bezpečnosti OSN [15].

Primárna zodpovednosť OSN (stojaca nad zodpovednosťou jednotlivých členských štátov) a právo veta, ktoré má Rada bezpečnosti. už samotné implikujú, že medzinárodná bezpečnosť má hierarchickú štruktúru a pri úvahách o konfliktoch ju musíme brať do úvahy. Do vzťahov nadriadenosti a podriadenosti v tejto problematike okrem jednotlivých členských štátov a OSN vstupujú aj ďalšie medzinárodné organizácie. Jedným z najdôležitejších aktérov je Severoatlantická aliancia, ale v poslednom období sa čoraz výraznejším aktérom stáva aj EU. Spočiatku členské štáty Únie odmietali integráciu v sfére vojenských záležitostí a bezpečnostných politík, ale najmä udalosti v Juhoslávii zo začiatku 90.rokov 20.storočia prispeli k postupnému prehodnocovaniu názorov. Prvým významným krokom boli tzv. Petersburské úlohy, EU nimi v roku 1992 definovala spektrum vojenských akcií a funkcií, ktoré môže prevziať v operáciách krízového manažmentu. Zahŕňali aktivity spojené s nastoľovaním aj udržiavaním mieru. Tým boli položené základy Spoločnej bezpečnostnej a obrannej politiky EU. Rozvoj pokračoval a o 10 rokov EU začala svoju prvú policajnú zahraničnú misiu v Bosne a Hercegovine a prvú vojenskú misiu v Macedónsku. Odvtedy prebehlo resp. stále prebieha 34 operácií a misií na 3 kontinentoch [6].

Vzrast významu EU ako aktéra medzinárodnej bezpečnosti však so sebou prináša aj istú nejasnosť vo veci nutnosti autorizácie akcií EU zo strany OSN. V kľúčovom dokumente *Európska bezpečnostná stratégia* (2003 a následne aktualizovaný 2008) sa hlási k dodržiavaniu medzinárodného práva, riadeniu sa základným rámcom OSN, uznáva primárnu zodpovednosť OSN a zaväzuje sa podporovať jej akcie. Avšak v samotnom dokumente nikde nezaznieva explicitný požiadavok na mandát OSN na vyslanie vojenských síl. Autori k tomu zaujali rozdielne postoje, jeden prúd hovorí o tom, že EU uznáva OSN ako autoritu a podriaďuje sa jej rozhodnutiam. V opozícii sú autori poukazujúci na to, že EU uprednostňuje efektívny multilateralizmus, čo jej otvára priestor na neautorizované akcie vtedy, keď sa EU zdá, že OSN nejednala dostatočne. V zmluvách je uvedené, že EU je silne zaviazaná princípom v Charte OSN, no táto formulácia necháva priestor na manévrovanie ohľadne procedúr.

Táto nejednoznačnosť má reflexiu aj v realite. Doposiaľ síce všetky misie EU napokon dostali autorizáciu od OSN, no niektoré z prípadov významne narúšajú týmto faktom implikovaný hierarchický vzťah medzi EU a OSN. Jedná sa o operácie DR Kongo (2008), EUFOR Libya (2011) a EUNAVFOR Sofia (2015). Prirodzene vyvstala otázka, či sa teda EU riadi autorizáciou OSN a za akých podmienok je to tak. Kedy sa EU rozhodne jednať individuálne? Za akých okolností sa EU (ne)správa ako podriadený hráč OSN? T.P. Palmová sa tejto problematike venuje v niekoľkých kapitolách v dizertačnej práci [20] a zhŕňa k akej paradigme EU inklinuje, ale konkrétne závery sa nedajú vyvodiť.

Takáto výskumná otázka v sebe implicitne obsahuje aj dotazovanie sa na hierarchickú štruktúru a teda matematický aparát, rozvinutý v predchádzajúcich dvoch kapitolách, je vhodný na riešenie výskumných problémov z tejto oblasti. Okrem **EU** a **OSN** budú aktérmi, ktorí zohrávajú významnú úlohu, **štát, kde konflikt prebieha** a **jednotlivé členské štáty medzinárodných organizácii**.

Vzhľadom na medzinárodné právo, zo suverenity vyplýva pre vládu štátu právo kontrolovať vlastné územie, teda vojenská intervencia nemôže prebehnúť na území krajiny, ak to samotná krajina nedovolí. Vláda má však zároveň aj povinnosť zaistiť bezpečnosť a blaho populácie na svojom území. Ak si vláda štátu, kde prebieha konflikt, tieto povinnosti neplní, stráca aj právo kontrolovať svoje územie. V krajných prípadoch ako sú zločiny proti ľudskosti, genocída, vojnové zločiny, etnické čistky a pod. môže medzinárodné spoločenstvo na seba prevziať zodpovednosť za ochranu obyvateľstva a teda je aj vojenská intervencia oprávnená.

Ďalšími relevantnými aktérmi sú jednotlivé členské štáty, lebo ich vojaci a technika sa predmetných operácií v skutočnosti zúčastňujú. Takáto operácia pre ne znamená aj výdavky, aj benefity zo zaistenia kolektívnej bezpečnosti. Štáty sa do operácií zapájajú pod kolektívnym velením medzinárodných organizácií alebo prípadne v rámci užšej koalície členov medzinárodných organizácií.

Nastolenú otázku o tom, kedy je pre EU autorizácia OSN kľúčová a kedy jedná individuálne, "preložíme"do jazyka teórie hier. Relevantných aktérov v hre označíme:

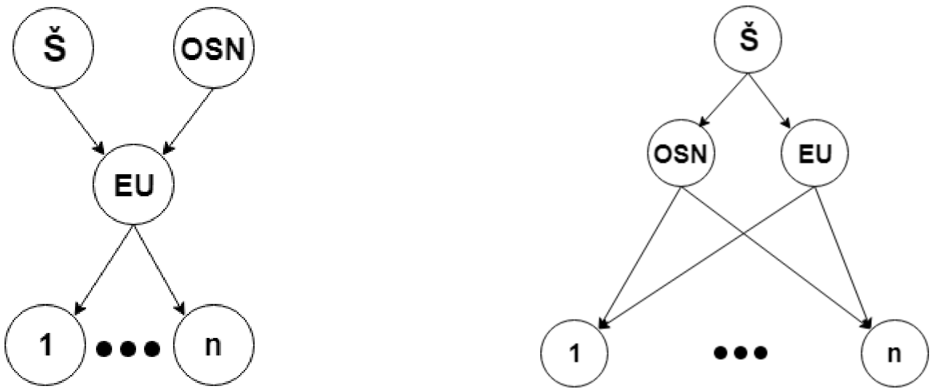
1,...,n	členské štáty
Š	štát konfliktu
OSN	Organizácia spojených národov
EU	Európska únia

Matematickou formalizáciou výskumného problému dostávame dve odlišné hierarchické štruktúry (Obr. 11).

a) EU čaká na autorizáciu OSN (Obr. 11a)
- situácia vyžaduje konjunktívny prístup
- EU na to, aby začala vojenskú operáciu potrebuje súhlas krajiny s prebiehajúcim konfliktom (resp. nastane situácia, že daná krajina nebude schopná zaistiť svojim občanom bezpečnosť)
- zároveň je pre operáciu potrebná autorizácia od OSN

- členské štáty sú závislé na rozhodnutiach medzinárodných organizácií a bez toho, aby EU začala vojenskú misiu, nedôjde z ich strany k žiadnym krokom

b) EU jedná individuálne bez autorizácie OSN (Obr. 11b)
   - situácia evokuje disjunktívny prístup
   - EU a OSN sú v procese rozhodovania o vojenskej operácii rovnocenní aktéri, členské štáty sa môžu zapojiť buď v rámci OSN alebo EU, nepotrebujú v koalícii oboch nadriadených hráčov
   - keďže bol odstránený vzťah autority medzi OSN a EU, do pozície vedúceho hráča sa dostal štát, v ktorom prebieha konflikt, pretože obe organizácie závisia na tom, či o vojenskú asistenciu požiada alebo či stratil schopnosť zaistiť bezpečnosť populácii



(a) (b)

Obr. 11: Hierarchické štruktúry popisujúce pozíciu EU a NATO

Keď takto zostavené štruktúry povolení aplikujeme na kooperatívnu hru, stane sa celkovo transparentnejšou, čo môže priniesť zaujímavý náhľad do priorít jednotlivých aktérov. Následne môžeme spočítať modifikovanú Shapleyho hodnotu. Získané hodnoty pre obe hry bude možné porovnať a na základe toho vyhodnotiť nielen to, z ktorej situácie EU resp. členské štáty viac benefitujú ale aj to, ktorý z aktérov je v procese najsilnejší.

V nasledujúcej časti bude zostavená kooperatívna hra, na ktorú takto popísanú štruktúru hry následne zavedieme.

3.2 Charakteristická funkcia

Hráči boli definovaní v predchádzajúcej kapitole, ale vzhľadom na definíciu 1.2 je potrebné určiť ešte charakteristickú funkciu hry. Zvyčajne charakteristická funkcia v kooperatívnej hre predstavuje produkčnú silu, napríklad množstvo nejakého statku, ktorý dokáže hráč vyprodukovať, alebo priamo zisk, ktorý za vyprodukovaný statok získa. Pre každú hru to je definované osobitne a charakteristická funkcia sa volí tak, aby sedela do kontextu celej modelovanej situácie.

Vo výskumnom probléme, ktorý riešime, môžeme k produkčnej sile pripodobniť schopnosť "vyprodukovať", teda zaistiť bezpečnosť, či už krajiny kde konflikt prebieha, celého ohrozovaného regiónu ale aj samotných členských štátov medzinárodných organizácií. Hlavným ziskom v hre teda bude ukončenie konfliktu a silu jednotlivých aktérov a ich prínos konceptualizujeme ako ich možnosti prispieť k tomu, aby bol nastolený mier. Dosiahnuteľný zisk tak bude vyčíslený v prostriedkoch na krízový manažment jednotlivých aktérov, čím bude dobre popísaný aj ich prínos koalícii a teda bude vyčíslená aj ich relatívna sila voči ostatným aktérom.

Aby takto navrhnutý model skutočne reflektoval výskumný problém, je potrebné zostaviť funkciu prideľujúcu hráčom zisk tak, aby čo najlepšie pokrývala rôzne faktory prispievajúce k sile jednotlivých hráčov. Treba brať do úvahy celkový kontext v akom sa budeme snažiť prostriedky štátu vyčísliť. Nepôjde len o *vojenskú silu* v zmysle počtu vojakov a vojenskej techniky, ale aj o tzv. soft power. Pri zostavovaní funkcie teda nebudú opomenuté ani *ekonomické sily*, ktoré tiež môžu prispieť k nastoleniu mieru. Otvárajú ďalší rokovací resp. manévrovací priestor na riešenie konfliktu a tiež môžu slúžiť na vyvíjanie nátlaku na bojujúce strany.

Na prvý pohľad ľahko merateľné veličiny ako vojenská či ekonomická sila, nie je jednoduché uchopiť v realite sociálneho sveta a ich samotná operacionalizácia je predmetom diskusií v odborných kruhoch. Charakteristická funkcia bude preto zostavená z viacerých premenných, ktoré boli predchádzajúcimi prácami v tejto oblasti identifikované ako najrelevantnejšie.[11]

Výsledná funkcia bude mať tvar:

$$v = \left(VV + \frac{VV}{HDP}\right) + VP + \left(\frac{IK}{IC} + \frac{EK}{EC}\right) + IZ + BG + KB \tag{3.1}$$

kde majú jednotlivé premenné nasledujúci význam a ich zahrnutie je vysvetlené nižšie:

VV - vojenské výdaje
VP - vojenský personál
IK - import daného aktéra z krajiny konfliktu
IC - celkový import krajiny konfliktu
EK - export daného aktéra do krajiny konfliktu
EC - celkový export krajiny konfliktu
IZ - index energetickej závislosti
BG - bojové skupiny EU (z angl. EU battlegroups)
KB - koaličný bonus

Funkcia je uvedená vo všeobecnom tvare, ale niektoré z vyššie popísaných premenných budú relevantné len pre vybraných aktérov, napríklad štát konfliktu sám so sebou nebude mať žiadny import ani export, OSN samotná nemá s krajinou konfliktu ekonomické vzťahy atď.

Vojenské výdaje

Vojenské výdaje sú základnou mierkou toho, ako veľmi je krajina ochotná prispievať na podporu vojenského rozvoja. Ukazovateľ vypovedá nielen o politickej vôli vojensky napredovať, ale vyššie výdaje indikujú aj vyššiu úroveň ozbrojených síl a techniky. Vzhľadom na to, že sa zaoberáme tým, ako krajina obstojí pri zapojení sa do ozbrojeného konfliktu, oba tieto faktory sú dôležité. Bez politickej vôle a dobrej úrovne vojenského vybavenia by bola krajina v slabej pozícii. Do funkcie zahrnieme celkový objem vojenských výdajov a tiež túto čiastku ako podiel hrubého domáceho produktu krajiny. Prvý údaj vypovedá o pozícii danej krajiny voči ostatným aktérom v hre a celkovej pripravenosti, druhý údaj skôr vyčísľuje politickú vôľu. V prípade EU a OSN bude druhá hodnota reprezentovaná percentuálnym podielom rozpočtu Únie venovaným obrannej a bezpečnostnej politike alebo operáciám na podporu mieru. Keby sme aj v tomto prípade uvažovali pomer vojenských výdajov a celkového HDP v krajinách EU alebo OSN (resp. priemernej hodnoty HDP) údaj by neniesol rovnakú výpovednú hodnotu ako pri

[11]Zostavovanie charakteristickej funkcie v predkladanej práci vychádza z [26] a je následne modifikované podľa zdrojov uvedených ďalej.

štátoch. Pomerom $\frac{VV}{HDP}$ je vyjadrená vôľa štátu obetovať časť svojich dostupných prostriedkov na vojenský rozvoj, sledujúc túto logiku - EU a OSN podielom rozpočtu vyčleneného na bezpečnostnú politiku tiež vypovedajú o svojej ochote investovať časť dostupných prostriedkov na vojenstvo.

Vojenský personál

Rozsiahlosť ľudských zdrojov je ďalším dôležitým ukazovateľom, ktorý ponúka dobrý náhľad do národnej sily krajiny. Aj napriek vojenskej revolúcii, ktorú priniesli do spôsobu boja vyspelé systémy C4I[12], počet príslušníkov ozbrojených síl je stále vysoko relevantný. Pridávajú sa k nemu rôzne kvalitatívne aspekty - kvalifikácia a odbornosť vojakov, schopnosť využívať sofistikované vojenské technológie. Spoločne to vypovedá o potenciálnej efektivite v konflikte, čo je pre náš výskumný problém významné. Táto premenná je relevantná aj pre aktéra EU, keďže od roku 2008 pod jej záštitou fungujú tzv. EU bojové skupiny, ktoré predstavujú ekvivalent akejsi stálej armády, vďaka tomuto vojenskému personálu bude premenná nadobúdať pre EU nenulové hodnoty. Avšak v prípade OSN bude vždy nulová, pretože OSN sa v zahraničných misiách spolieha len na príspevky členských štátov a vlastnou vojenskou ľudskou silou nedisponuje.

Ekonomické vzťahy

Je všeobecne známe, že rozvinuté obchodné vzťahy vedú štáty k tomu, aby sa vyhýbali ozbrojeným konfliktom z obavy, že poškodia prosperitu obchodu. Jeho narušenie ešte viac zvýši náklady spojené s konfliktom, čo podporuje deterenčný efekt [16]. Rovnaká logika sa dá použiť aj keď nejde o konflikt medzi štátmi, ale vnútroštátny konflikt a zásah zahraničného aktéra. V centre pozornosti ostane ekonomická interdependencia ako brzda eskalácie konfliktu, vďaka ktorej je možné obmedzovať akcie bojujúcich strán a napokon ho zmierniť až úplne potlačiť [2]. V účelovej funkcii bude tento aspekt zohľadnený ako podiel exportu z krajiny konfliktu do ekonomiky vyhodnocovaného aktéra k celkovému exportu krajiny konfliktu $\frac{EK}{EC}$, rovnaký podiel bude použitý pre vyhodnotenie importných vzťahov, teda podiel importu krajiny konfliktu z ekonomiky vyhodnocovaného aktéra a celkového importu krajiny konfliktu. $\frac{IK}{IC}$. Zahrnutím exportu je zachytené to, aký veľký vplyv má skúmaný aktér na zisky krajiny z exportu. Ich reštrikcia môže významne znížiť dostupnosť prostriedkov na vedenie konfliktu a teda prispieť k jeho ukončeniu. Import zase vyjadruje závislosť krajiny konfliktu na komoditách od skúmaného aktéra. Obmedzenie ich dodávky by opäť mohlo spôsobiť reštrikciu zdrojov na vedenie konfliktu a viesť k upokojeniu situácie. V neposlednom rade oba údaje vypovedajú o vzťahu medzi krajinou konfliktu a ostatnými aktérmi, čo samo o sebe napovedá o možnostiach skúmaných aktérov do konfliktu zasiahnuť.

Energetická závislosť

Osobitne sa budeme zaoberať kategóriou energetických zdrojov, pretože energetika zohráva kľúčovú rolu vo vykonávaní misií vo svete. Vojenská sféra prebrala vedúcu rolu vo vývoji špecifických energetických technológií. Trend v poslednom čase otázku energetických zdrojov presunul k problematike vykonateľnosti misie a tiež sa ukazuje, že možnosť odoprieť druhej strane konfliktu prístup k zdrojom je veľkou výhodou [18]. Na základe tejto logiky do charakteristickej funkcie zahrnieme aj import energetických komodít do krajiny konfliktu, keďže pre ďalší priebeh konfliktu je ich dostatok kľúčový. V tomto prípade však zachytávaná situácia bude komplikovanejšia, pretože je potrebné vyjadriť aj možnosti konkrétneho aktéra obmedziť prístup krajiny konfliktu k energetickým surovinám. Preto bude zavedená premenná index ener-

[12]Z angl. Command, Control, Communications, Computers, and Intelligence, jedná sa o integrované systémy, ktoré sú v dnešnom bezpečnostnom prostredí nevyhnutné pre úspech v konfliktoch. Do centra pozornosti sa dostali ostatnou vlnou vojensko-technologickej revolúcie.

getickej závislosti - IZ. Bude v sebe zahŕňať podiel exportu aktéra v oblasti minerálnych palív, minerálnych extraktov ropy a bituménových substancií a celkovej hodnoty svetového exportu v tejto oblasti. Druhou zložkou bude podiel importu krajiny konfliktu voči celkovej hodnote svetového exportu. Tak bude vyjadrené nielen to ako je krajina konfliktu citlivá na zmeny na svetových trhoch, ale aj to do akej miery by tieto trhy mohol ovplyvniť skúmaný aktér. Oba podiely na záver sčítame, vynásobíme 2 a tak dostaneme hodnotu indexu energetickej závislosti. Popíšeme tak, či je v konkrétnom prípade aktér môže využívať energetickú závislosť krajiny konfliktu na nastolenie mieru. Na základe indexu je možné napríklad odhadnúť, či by bolo pre účel ukončenia konfliktu efektívne uvalenie embarga.

Bojové skupiny EU

Premenná bojových skupín je špecifická, vo funkcii vystupuje vo forme akéhosi bonusu za kooperáciu štátov, no v skutočnosti v nej v niektorých prípadoch bude figurovať dvakrát. Bojové skupiny EU sú multinárodné vojenské jednotky, ktoré sa zvyčajne skladajú z 1500 vojakov a vytvárajú integrálnu súčasť vojenskej rýchlej reakcie EU na vzniknuté krízy a konflikty [9]. To znamená, že keď budeme vyhodnocovať dosiahnuteľný zisk hráča EU, EU bojové skupiny budú v premennej vojenský personál, lebo žiadny iný stály vojenský personál EU nemá a keď spúšťa vojenskú akciu je na jednotlivých členských štátoch, či do nej personál vyšlú alebo nie. Iným prípadom budú bojové skupiny u jednotlivých členov EU. Skupinu môže sformovať jeden štát, ale pravidlom je skôr multinacionálne riešenie, kľúčový je rámcový národ, ktorý zastrešuje plánovanie, tréning [17], ale zapojenie sa do bojových skupín posilňuje aj zúčastnené štáty. Pre rámcový národ je prínosné ak v danom období zaisťuje akcieschopnosť EU bojovej skupiny, pretože vojenské velenie je vtedy na vysokej úrovni a je aj do väčšej miery mobilizované. Plánovanie, cvičenia a koordinácia operačných aktivít prispievajú nielen k zvyšovaniu kvality jednotlivých ozbrojených síl, ale skupine zapojených štátov dávajú predchádzajúcou spoluprácou výhodu v efektivite a operatívnosti. Bonus bude danému aktérovi pridelený v prípade, že bol v predmetnom období súčasťou EU bojovej skupiny. Jeho hodnota bude určená tým, koľko aktérov zo skupiny skúmaných štátov (počet skúmaných štátov označíme n) je aktuálne alebo bolo v priebehu predchádzajúceho roku[13] súčasťou EU bojovej skupiny (počet zúčastnených označíme s). Môžeme formalizovať nasledovne:

$$BG = \frac{s}{n}.$$

Koaličný bonus

Posledným z faktorov, ktoré budú charakteristickou funkciou reflektované, je výhoda samotnej možnosti uzatvárať záväzné koalície. Z hľadiska matematickej teórie by podľa definovaných vlastností charakteristickej funkcie malo vytvorenie koalície vždy prinášať väčší zisk ako akcie jednotlivcov. Keď sa pozrieme na reálnu situáciu, v konfliktoch na medzinárodnej scéne, potvrdzuje sa táto logika. Vytvorenie koalície na základe záväznej dohody je bežnou praxou a prináša hneď niekoľko výhod: v prvotných fázach konfliktu môže byť účinným nástrojom skupinová diplomacia; neskôr sú obmedzenia obchodu, embargá alebo iné reštriktívne prostriedky aplikované viacerými aktérmi účinnejšie ako tie aplikované jednotlivo; v prípade vojenského zásahu spolupráca väčšieho množstva štátov spravidla zaistí viac podpory v medzinárodnom spoločenstve a zvýši legitimitu akcií. Aby charakteristická funkcia vypovedala aj o tejto výhode, každej koalícii bude pripočítaný "koaličný bonus", ktorý sa bude skladať z 2 zložiek.

Prvá zložka bude zodpovedať vyššie spomenutej vlastnosti symetrie (1.5) a hodnota pripočítaného bonusu bude počet členov koalície umocnený exponentom 1,5. Keďže aktérov ne-

[13] Bojové skupiny EU fungujú na princípe polročnej rotácie, kedy každého polroka zodpovednosť za zostavenie a udržiavania skupiny približne 1500 vojakov zodpovedá iná skupina národov.

predstavujú len štáty tretej strany, ale aj medzinárodné organizácie a štát, kde konflikt prebieha, je potrebné v charakteristickej funkcii zohľadniť rozdiely v zisku, ktorý prinesie ich zaangažovanie. Z hľadiska suverenity, znalosti pomerov a dostupnosti má štát, kde konflikt prebieha v porovnaní s ostatnými možnými participujúcimi aktérmi výhodu, preto mu v charakteristickej funkcii priradíme 20 bodov navyše. Medzinárodné organizácie OSN a EU majú na operácie na nastolenie a udržiavanie mieru vyvinutý špeciálny aparát, z hľadiska medzinárodného spoločenstva bývajú väčšinou ich akcie legitímne. Tieto dva faktory ich voči štátnym aktérom zvýhodňujú, čo bude v charakteristickej funkcii vyjadrená 15 bodmi navyše. Tretie štáty sú v situáciách zásahu do zahraničných konfliktov medzi tromi zmienenými aktérmi kde konflikt prebieha relatívne najslabšie, preto ich účasť na koalícii bude ohodnotená 10 bodmi. Aby zostavovanie charakteristickej funkcie stále sledovalo logiku popísanú v predchádzajúcom paragrafe, tento bonus bude krajinám pripísaný len v prípade ak spolupracujú (teda $|S| > 1$) a jeho výška sa bude odvíjať od toho, koľko členov má koalícia.[14]

$$KB(S) = |S|^{1,5} + B(S), \quad B(S) = \sum_{i \in S} b, \quad b = \begin{cases} 20 & \text{ak i = štát konfliktu} \\ 15 & \text{ak i = medzinárodná organizácia} \\ 10 & \text{ak i = nezaangažovaný štát} \end{cases}$$

3.3 Zostavenie modelu

Po vymedzení hráčov a zostavení charakteristickej funkcie máme definovanú kooperatívnu hru, pre ktorú máme zvolené aj štruktúry povolení. Vďaka tomu môžeme modelovať reálne situácie, kedy sa EU ako aktér zachovala rozdielne (raz ako podriadený hráč, raz ako individuálny aktér) a pomocou modifikovaných Shapleyho hodnôt budeme tieto situácie porovnávať. V nasledujúcej budú stručne popísané konkrétne misie, ktoré budú namodelované a použité na porovnanie EU ako aktéra podriadeného rozhodnutiam OSN a ako nezávisle jednajúceho aktéra.

Skupina členských štátov EU je veľmi rôznorodá, čo sa týka skúseností so zahraničnými vojenskými operáciami. Na to, aby sme dosiahli skutočne porovnateľné výsledky by bolo potrebné zostaviť oveľa podrobnejšiu charakteristickú funkciu a pridať do nej dodatočné modifikácie. Aby sa predišlo takémuto málo transparentnému postupu, charakteristická funkcia bude ponechaná vo vyššie popísanej podobe, ale vždy budeme pracovať len s konkrétnou skupinou členských štátov, ktoré zdieľajú podobné rysy v problematike, ktorou sa zaoberáme. Ak budeme v každej hre uvažovať len tú skupinu štátov, ktorá sa dá zjednotiť vo fundamentálnom prístupe k zahraničným vojenským misiám, bude väčšia šanca, že výsledky neovplyvní nejaká nepozorovaná premenná, ktorá by pre rôzne krajiny mohla mať diametrálne odlišný význam.

Vo všetkých analyzovaných prípadoch bude použitá nasledujúca skupina štátov: **Nemecko (DE), Francúzsko (FR), Veľká Británia (GB)** a **Taliansko (IT)**. Dôvodom výberu krajín je ich história európskych mocností. Každý z týchto národov zohrával vo vojenských dejinách Európy podstatnú úlohu. Boli to krajiny, ktoré sa buď v rámci kontinentu alebo v zámorských oblastiach mocensky angažovali a neraz aj vojensky zasahovali. Takéto skúsenosti, aj napriek tomu, že sa odohrali dávno, nechali svoju stopu na formovaní sa strategickej kultúry v týchto krajinách. A práve strategická kultúra je jeden z prvkov, ktoré je pri zahraničných misiách potrebné zohľadniť. Je zrejmé, že každá z krajín ju má špecifickú a aj v rámci skúmaných aktérov sú veľké odlišnosti, ale minulé skúsenosti s projekciou vlastnej moci sú podstatným aspektom pre predkladanú prácu a pre vybrané krajiny slúžia ako zjednocujúci prvok.

[14] Napríklad v prípade, že v koalícii sú spolu štát, kde konflikt prebieha, OSN a dva členské štáty OSN, k hodnote charkateristickej funkce tejto koalície bude v rámci bonusu pripočítaných 55 (20 + 15 + 10 + 10) bodov.

Zmeny v možných ziskoch, povahu a správanie hráčov v hierarchickej štruktúre budeme sledovať na 4 konkrétnych situáciách, podstatných pre adresovanie výskumnej otázky:

1. **ARTEMIS**, vojenská misia EU v Demokratickej republike Kongo, 2003
2. **neuskutočnená** misia EU v Demokratickej republike **Kongo**, 2008
3. **neuskutočnená** misia **EUFOR Líbya** v Líbyi, 2011
4. **EU NAVFOR MED SOPHIA**, námorná misia EU v Stredozemnom mori, 2015

3.3.1 DR Kongo, 2003

Operácia Artemis bola prvou vojenskou operáciou EU mimo svojho územia, ktorá prebehla nezávisle na Severoatlantickej aliancii. Jej cieľom bolo prispieť k stabilizácii bezpečnosti v Bunii, hlavnom meste Iturijskej provincie na severovýchode DR Kongo a ochrane vysídlených obyvateľov na úteku. Operácia bola vykonávaná v súlade s OSN a Rezolúciou 1484 Rady bezpečnosti OSN z mája 2003. Samotný operačný plán bol prijatý Radou 12.júna 2003. Jej mandátom bola vymedzená ako operácia, ktorá mala na krátke obdobie (3 mesiace) - kým sa neposilní operácia OSN MONUC - zaisťovať prechodnú silu [29], [8].

Z popisu situácie je teda jasné, že EU jednala v súlade s OSN a nepokúšala sa o žiadne individuálne akcie. V tomto prípade pôjde o jednoznačnú aplikáciu štruktúry povolení znázornenej na Obr. 11a a bude potrebné zvoliť konjunktívny prístup. Štruktúra povolení v tejto kooperatívnej hre s hierarchickou štruktúrou je znázornená na Obr. 12a.

Ďalej spočítame podľa 3.1 charakteristickú funkciu hry. Hráčom je pridelená hodnota na základe vyššie popísaných princípov, hodnoty charakteristickej funkcie sa nachádzajú v tabuľke 6. Po vypočítaní hodnôt overíme či spĺňa potrebné vlastnosti. Získame tak kooperatívnu hru s hierarchickou štruktúrou, pre ktorú môžeme spočítať konjunktívne povolenú Shapleyho hodnotu.

3.3.2 DR Kongo, 2008

Po prvej vojenskej misii EU v DR Kongo (2003) nasledovala ďalšia v roku 2006 na podporu operácie OSN MONUC. V roku 2008 však východ Konga zachvátila ďalšia vlna násilia a vzhľadom na predchádzajúce zaangažovanie sa v EU zazneli hlasy volajúce po novej operácii. Rovnako sa však našli oponenti takéhoto postupu a ani explicitná žiadosť prichádzajúca od generálneho tajomníka OSN ich nepresvedčila. Ďalšia vojenská operácia v DR Kongo sa napokon neuskutočnila [3], [20].

Na tomto prípade vidíme ďalšiu situáciu z reality, ktorú môžeme vyjadriť tentokrát pomocou disjunktívnej štruktúry povolení (Obr. 11b). V tomto prípade sa EU nezachovala ako hráč podriadený OSN, preto bola štruktúra povolení pre tento prípad modifikovaná. Z hľadiska teórie hier nie sú oba zmienené prípady v DR Kongo (tá z roku 2003 aj tá z roku 2008) rovnaké. Teraz nás bude zaujímať, či vďaka hodnote konjunktívnej a disjunktívnej štruktúry povolení dokážeme vysvetliť prečo sa v realite jednalo o dve rozličné situácie. Prerozdelenie zisku nám môže pomôcť osvetliť rozdiely, ktoré viedli k odlišnému vyhodnoteniu týchto dvoch prípadov. Zvýšili resp. znížili sa zisky niektorých z aktérov? Došlo k významnému posilneniu nejakého aktéra? Odpovede na tieto otázky nám tiež umožnia lepšie porozumieť tomu, ako sa ďalej vyvíjal vzťah EU a OSN v problematike zahraničných misií, čo je predmetnou výskumnou otázkou.

Modifikovaná štruktúra povolení hry zachytávajúca premenenú logiku správania sa EU voči OSN je znázornená na Obr. 12a, konkrétne hodnoty vyjadrenej charakteristickej funkcie sú v tabuľke 7.

3.3.3 Líbya, 2011

Líbya je jednou z krajín, kde sa Arabská jar prejavila najvýraznejšie. Rozsiahle protesty proti Kaddáfiho režimu, ktoré boli vládnucimi elitami brutálne potláčané prerástli do rozsiahleho konfliktu. Diskusia medzinárodného spoločenstva o tom, ako reagovať, nenechala na seba dlho čakať a bola veľmi intenzívna. Názory dôležitých aktérov sa líšili a nedokázali sa priblížiť natoľko, aby vykonali spoločné kroky. V EU bola situácia taká, že Únia bola pripravená vyslať ozbrojené sily v menšom počte (do 1000 osôb) aby zaisťovali v krajine dodávky zahraničnej pomoci. O príprave misie sa EU rozhodla v apríli a rozpracovala podrobný plán, ale jeho dokončenie bolo podmienené zo strany samotnej EU tým, že OSN musí vydať na takúto misiu požiadavku. Tým sa sama postavila do pozície podriadeného hráča závislého na akciách OSN a keďže žiadosť neprišla, operácia sa nikdy neuskutočnila [20], [30].

Kontext sa opäť čiastočne odlišuje od prechádzajúcich prípadov, ale ukážeme si, že situáciu je opäť možné zachytiť kooperatívnou hrou. Otázky, na ktoré nám tentokrát pomôže odpovedať sa týkajú toho, prečo sa EU sama postavila do pozície podriadeného hráča? Ako sa to odrazilo na možných ziskoch a relatívnej sile jednotlivých hráčov?

Táto situácia je odlišná aj v tom, že sa stretávame s prípadom kedy sa krajina konfliktu dá považovať aj za jednu z nepriateľských strán, ktoré v ňom bojujú. Hráč $\check{S}$ by tak určite vetoval zahraničný vojenský zásah v jeho neprospech, ale keďže už nedokáže zaistiť bezpečnosť svojim obyvateľom, stráca aj právo vykonávať moc nad územím. Predstaviteľmi štátu sa potom stávajú samotní občania, ktorí v tejto situácii žiadali medzinárodné spoločenstvo o zásah. Takže z hľadiska štruktúry povolení sa voči Obr. 11a nič nemení a konkrétny prípad zodpovedá Obr. 12a. Avšak opäť nastáva situácia, kedy charakteristická funkcia priradí hráčovi $\check{S}$ nulový zisk $(v(\{\check{S}\})=0)$. Ostatné hodnoty, ktoré priradí charakteristická funkcia, sú uvedené v tabuľke 8.

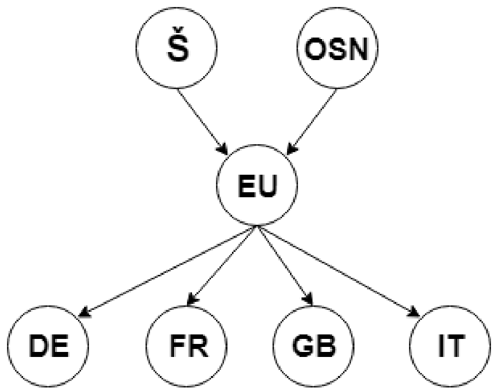
3.3.4 Stredozemné more, 2015

Ďalšia zahraničná operácia EU, ktorá úzko súvisí s Líbyou je operácia EU NAVFOR Sofia, ktorá bola spustená v lete 2015. Jej hlavným cieľom je bojovať s nelegálnou migráciou, v rámci mandátu môže zadržiavať a v istých prípadoch aj likvidovať plavidlá podozrivé z prevážania migrantov z Líbye. Prvý impulz na začatie takejto operácie prišiel už v roku 2013 zo strany Talianska, ale ostatné členské štáty EU sa stali responzívnejšie až po tom ako v roku 2015 došlo k tragédii s potopenou loďou. EU začala pripravovať plán operácie podľa vzoru EU NAVFOR Atlanta na pobreží Somálska. OSN tieto prípravy zaznamenala avšak mala k nim isté výhrady a žiadaná rezolúcia od OSN do dňa spustenia operácie neprišla. EU predpokladala, že potom ako prijala rozhodnutie operáciu začať, je pravdepodobnejšie, že aj OSN vydá rezolúciu. Avšak kým sa tak skutočne stalo, operácia sa stihla presunúť so svojej ďalšej fázy a rezolúcia bola prijatá až 9.októbra [20],[21].

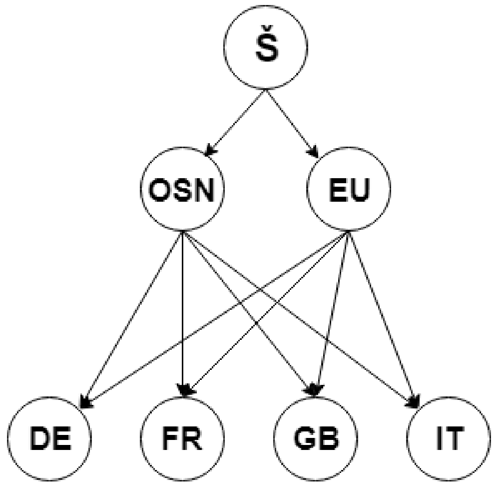
Takáto situácia už nezodpovedá štruktúre povolení, ktorá bola použitá v prípadoch 3.3.1 a 3.3.3. EU nie je podriadeným hráčom OSN a vykonáva nezávislé akcie, hierarchické usporiadanie sa zmenilo a preto je treba aplikovať namiesto konjunktívneho disjunktívny prístup. Štruktúra povolení bude mať formu ako na Obr. 11b, jej konkrétna podoba je na Obr. 12b.

V praxi to znamená, že na to, aby sa štát zúčastnil operácií prispievajúcich k zvládnutiu a potlačeniu konfliktu v Líbyi[15] tak musí urobiť na platforme medzinárodných organizácií, ale je

[15]Operácia na boj proti nelegálnej migrácii a zvládaniu migračnej krízy na prvý pohľad nemusí evokovať dojem toho, že rieši konflikt v krajine, ale je to jedna z mnohých činností, ktoré sú pre znovunastolenie mieru a stabilizáciu bezpečnostnej situácie nesmierne dôležité. Významné prepojenie misie na krajinu konfliktu je potvrdené aj jej niektorými cieľmi - výcvik líbyjského námorníctva a podpora implementácie embarga na zbrane na pobreží Líbye a pomoc pri bránení ilegálnym ropným exportom z Líbye [7].



(a) Štruktúra povolení pre prípady 3.3.1, 3.3.3



(b) Štruktúra povolení pre prípady 3.3.2,3.3.4

Obr. 12: Štruktúry povolení pre modelované situácie

jedno či sa zapojí v rámci OSN alebo EU, pričom obaja títo aktéri jednajú nezávisle na sebe, ale obaja sú stále podriadení hráči krajiny, kre prebieha konflikt. Ak teda krajina neautorizuje vojenskú operáciu, alebo nie je spochybnené jej právo vykonávať moc nad svojim územím, ani EU ani OSN nemôže podniknúť žiadne akcie.

Model zodpovedá realite, pretože v Líbyi skutočne prebieha misia OSN UNSMIL, ktorá začala v roku 2011 a je mandát bol upravený a predlžovaný doposiaľ dokopy 6-krát (v súčasnosti ju legitimizuje Rezolúcia 2434 z roku 2018). Je to politická misia, ktorá má za úlohu podporovať snahy o usporiadanie pomerov v krajine a presun moci k novým autoritám. Podstatné je, že táto misia prebieha na základe žiadosti od líbyjských autorít [32]. V tomto prípade sa teda jedná o hru, kedy aj aktér *Š* chce a má možnosti prispieť k utlmeniu a vyriešeniu konflikt, preto jeho dosiahnuteľný zisk nebude nulový. Zostavená charakteristická funkcia je uvedená v tabuľke 9

Po tom, ako boli predstavené kooperatívne hry modelujúce 4 rôzne situácie, môžeme pristúpiť v ďalšej kapitole k riešeniu hier, ktoré by malo osvetliť výskumný problém a prispieť k jeho vyriešeniu.

4 Riešenie hier a interpretácia výsledkov

V nasledujúcej kapitole budú analyzované prípady 3.3.1 - 3.3.4, v práci bude na ne referované so zachovaním poradia, teda vždy

1. **ARTEMIS**, vojenská misia EU v Demokratickej republike Kongo, 2003
2. **neuskutočnená** misia EU v Demokratickej republike **Kongo**, 2008
3. **neuskutočnená** misia **EUFOR Líbya** v Líbyi, 2011
4. **EU NAVFOR MED SOPHIA**, námorná misia EU v Stredozemnom mori, 2015.

4.1 Zostavenie charakteristickej funkcie

Prvým krokom, keď máme popísať reálnu situáciu kooperatívnou hrou, je jej zápis v tvare charakteristickej funkcie. Je nutné zozbierať údaje potrebné pre naplnenie premenných definovaných v charakteristickej funkcii pre všetkých relevantných aktérov (hráčov) v jednotlivých prípadoch (teda pre operácie v rokoch 2003, 2008, 2011 a 2015).

Tabuľka 3: Označenie hráčov pre jednotlivé prípady

	model 1	model 2	model 3	model 4
hráč 1	DR Kongo	DR Kongo	Líbya	Líbya
hráč 2	OSN	OSN	OSN	OSN
hráč 3	EU	EU	EU	EU
hráč 4	Nemecko	Nemecko	Nemecko	Nemecko
hráč 5	Francúzsko	Francúzsko	Francúzsko	Francúzsko
hráč 6	Veľká Británia	Veľká Británia	Veľká Británia	Veľká Británia
hráč 7	Taliansko	Taliansko	Taliansko	Taliansko

Údaje potrebné na výpočet charakteristickej funkcie boli získané z voľne prístupných databáz [25], [27] a sekundárnych zdrojov [5], [31], [4]. Tabuľky s hrubými dátami aj ich podrobnejší popis sa nachádza v Prílohe A.1. Na základe týchto tabuliek boli následne spočítané hodnoty charakteristickej funkcie (viď. vzorec 3.1) najskôr pre jednotlivých hráčov (viď. tabuľka 4) a následne z týchto hodnôt aj hodnoty pre všetky koalície. Hodnoty sú uvedené ďalej v texte, v tabuľkách 6 - 9.

Tabuľka 4: Hodnoty charakteristickej funkcie jednotlivých hráčov

	model 1	model 2	model 3	model 4
hráč 1	22.7855	42.1301	0.0000	25.8281
hráč 2	14.0161	26.7832	27.7556	31.0108
hráč 3	148.8005	86.8261	143.3923	139.8304
hráč 4	137.9125	177.5176	162.7706	155.5183
hráč 5	181.9970	229.4121	240.2113	211.1525
hráč 6	144.5154	159.5207	160.4370	137.9393
hráč 7	162.0896	158.0028	231.2716	198.5345

Predtým ako budeme s charakteristickou funkciou pracovať ďalej, je potrebné overiť, či spĺňa vlastnosti uvedené v kapitole 1.1.1. Ak by ich funkcia nespĺňala, pri riešení by aplikácia Shapleyho hodnoty nedávala rozumné výsledky. Potrebujeme preto ešte pred aplikáciou reštrikcií $\mathscr{R}_H$ a $\mathscr{B}_H$ vedieť, či bol zvolený správny prístup, aby boli potom výsledky použiteľné pre zodpovedanie výskumného problému.

Overenie prebehne pre všetky 4 modely pomocou z kódu v jazyku R. Všetky kódy použité v práci sú vytvorené autorkou s využitím knižnice *GameTheoryAllocation*[23], hlavné časti algoritmov sú uvedené v Prílohe A.2 a celý kód je v Prílohe A.3.

Podľa výstupov z kódu v prílohe A.2.2 **charakteristické funkcie** pre všetky 4 modely **spĺňajú vlastnosti 1.1.1**, výstupy z kódu sú priložené v textových súboroch v prílohe A.3. Môžeme teda pristúpiť k zavedeniu hierarchických štruktúr a následne reštrikcií.

4.2 Zavedenie reštrikcie

V tomto bode je sformulovaný klasický problém kooperatívnej teórie hier. Keby na vznik koalícii neexistovali žiadne obmedzenia, bežným postupom riešenia by bolo spočítať Shapleyho hodnotu a na základe nej určiť najvýznamnejšieho hráča pre koalíciu a z toho zistiť, ktorý aktér má na uskutočnení na operácie najväčší záujem. Výsledky by mohli osvetliť jednanie EU v jednotlivých prípadoch. Z popisu reálnej situácie je však jasné, že takýto prístup by bol simplifikujúci a významne by skreslil závery. V prípade riešenia prostredníctvom klasickej Shapleyho hodnoty by sme dostali nasledujúce výsledky:

Tabuľka 5: Shapleyho hodnota hier bez reštrikcie

	hráč 1	hráč 2	hráč 3	hráč 4	hráč 5	hráč 6	hráč 7
model 1 [%]	4,73	3,32	18,07	16,42	21,25	17,14	19,07
model 2 [%]	6,38	4,39	10,5	19,32	24,60	17,48	17,33
model 3 [%]	1,99	4,13	14,96	16,37	23,62	16,15	22,78
model 4 [%]	4,62	4,72	15,59	16,74	22,30	14,99	21,04

Uvedené hodnoty nie sú priamo hodnoty zisku, ale percentuálny pomer z celkového zisku, ktorý by mal konkrétnym hráčom pripadnúť podľa toho, ako významne sa na jeho generovaní podieľajú. Výsledky medzi jednotlivými prípadmi 1 - 4 sú teda porovnateľné.

Z tabuľky 5 vidíme, že keby sme hru považovali za klasickú kooperatívnu hru, štát, kde konflikt prebieha by v každom prípade vyšiel ako najslabší hráč. Z hľadiska teórie hier by to implikovalo, že by mal mať najmenší záujem na zapojení sa do koalície. Z logiky reálnych situácií však vieme, že bez jeho súhlasu (teda zapojenia sa do koalície), by žiadna operácia nemohla prebehnúť. Ďalšou chybou modelu bez reštrikcií je, že EU a členské štáty sú svojimi priradenými ziskami vo veľmi podobnej pozícii, mnohokrát štátom pripadá ešte väčšia časť ako EU, čo opäť nedáva zmysel, lebo EU (resp. OSN o ktorej ziskoch platí, že sú ešte menšie) akcie štátov zastrešujú a koordinujú ich.

Výsledky teda potvrdzujú predpoklad, s ktorým sme pracovali pri zostavovaní modelu, a teda, že na zachytenie reality nestačí klasická kooperatívna hra a je nutné brať do úvahy hierarchické vzťahy medzi aktérmi. Tieto vzťahy vychádzajú z popisu modelovaných situácií (viď.

3.3.1 - 3.3.4) a môžeme ich maticovo zapísať ako A (pre graf na obr. 12a, teda modely 1,3) a B (pre graf na obr. 12b, teda modely 2,4):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

So známou hierarchickou štruktúrou je už možné zaviesť reštrikcie tak, ako boli uvedené v druhej kapitole - viď. rovnice 2.6 a 2.24. Na základe hierarchických štruktúr bolo potrebné pre každú koalíciu vyjadriť: množinu všetkých autonómnych koalícií, autonómnu časť koalície a autorizujúci obal. Algoritmizáciu zavedenia reštrikcií je možné nájsť v prílohe A.2.3 a A.2.4.

Aby sme alokačné pravidlá $\mathscr{R}_H$ a $\mathscr{B}_H$ mohli označiť za konjunktívnu a disjunktívnu reštrikciu, musia spĺňať axiómy 2.9 - 2.13. Správnosť zavedenia $\mathscr{R}_H$ a $\mathscr{B}_H$ na pôvodnú charakteristickú funkciu overíme pomocou kódu uvedeného v prílohe A.2.5. Podľa výstupov z kódu, priložených v textových súboroch v prílohe A.3, vidíme, že **hodnoty reštrikcie spĺňajú axiómy**.

Keďže konjunktívnou aj disjunktívnou reštrikciou kooperatívnej hry dostaneme opäť kooperatívnu hru, na ktorej riešenie bude použitá Shapleho hodnota, znovu sa uistíme, že nová charakteristická funkcia spĺňa vlastnosti 1.1.1. Reštrikcie by ich mali zachovať, takže týmto spôsobom si tiež môžeme overiť, či boli aplikované správne. Overenie sa opäť vykoná pomocou kódu v prílohe A.2.2) a výsledky je možné nájsť v textových súboroch v prílohe A.3.

1. **ARTEMIS**, vojenská misia EU v Demokratickej republike Kongo, 2003
Výsledky po zavedení reštrikcie (stĺpce $\mathscr{R}_H$) spoločne s pôvodnou hodnotou charakteristickej funkcie (stĺpce $v(S)$) sú v tabuľke 6, **nová charakteristická funkcia má požadované vlastnosti**.

Z tabuľky je vidieť, že reštrikcia priradila 0 všetkým koalíciám, kde nie sú všetci nadriadení pre každého hráča v koalícii, pretože tieto koalície nedokážu samotné produkovať zisk. V terminológii výskumného problému to znamená, že tieto koalície sa nemôžu zapojiť do zahraničnej operácie. Keďže ide o konjunktívny prístup, podriadeným hráčom nestačí na umožnenie produkcie zisku účasť jedného z nadriadených, preto ak je členom koalície len jeden z nadriadených, iba on môže produkovať zisk a to je zisk celej koalície.

Pozorujeme, že v množstve prípadov to viedlo k drastickej redukcii možného zisku koalícií bez nadriadených hráčov. Tým je realita dobre zachytená, pretože v súčasnom nastavení medzinárodného systému jednotlivé štáty nemajú právo bez autorizácie medzinárodných inštitúcií zasahovať do záležitostí tretích krajín. Takéto jednanie by si v medzinárodnom spoločenstve nezískalo podporu a suverenita krajiny konfliktu by bola narušená. Teda charakteristická funkcia po reštrikcii správne hovorí o nulovej alebo veľmi malej šanci úspešne upokojiť konflikt alebo ho doviesť k mierovému riešeniu.

Tabuľka 6: Model 1: konjunktívna reštrikcia

S	$v(S)$	$\mathscr{R}_H$	S	$v(S)$	$\mathscr{R}_H$	S	$v(S)$	$\mathscr{R}_H$
0	0	0	{2,4,6}	333.64	14.02	{1,4,5,7}	558.78	22.79
{1}	22.79	22.79	{3,4,6}	468.42	0	{2,4,5,7}	545.02	14.02
{2}	14.02	14.02	{1,5,6}	391.49	22.79	{3,4,5,7}	679.8	0
{3}	148.8	0	{2,5,6}	377.72	14.02	{1,2,6,7}	402.41	72.63
{4}	137.91	0	{3,5,6}	512.51	0	{1,3,6,7}	537.19	22.79
{5}	182	0	{4,5,6}	496.62	0	{2,3,6,7}	523.42	14.02
{6}	144.52	0	{1,2,7}	246.09	72.63	{1,4,6,7}	521.3	22.79
{7}	162.09	0	{1,3,7}	380.87	22.79	{2,4,6,7}	507.53	14.02
{1,2}	72.63	72.63	{2,3,7}	367.1	14.02	{3,4,6,7}	642.32	0
{1,3}	207.41	22.79	{1,4,7}	364.98	22.79	{1,5,6,7}	565.39	22.79
{2,3}	193.65	14.02	{2,4,7}	351.21	14.02	{2,5,6,7}	551.62	14.02
{1,4}	191.53	22.79	{3,4,7}	486	0	{3,5,6,7}	686.4	0
{2,4}	177.76	14.02	{1,5,7}	409.07	22.79	{4,5,6,7}	670.51	0
{3,4}	312.54	0	{2,5,7}	395.3	14.02	{1,2,3,4,5}	581.69	581.69
{1,5}	235.61	22.79	{3,5,7}	530.08	0	{1,2,3,4,6}	544.21	544.21
{2,5}	221.84	14.02	{4,5,7}	514.2	0	{1,2,3,5,6}	588.29	588.29
{3,5}	356.63	0	{1,6,7}	371.59	22.79	{1,2,4,5,6}	572.41	72.63
{4,5}	340.74	0	{2,6,7}	357.82	14.02	{1,3,4,5,6}	707.19	22.79
{1,6}	198.13	22.79	{3,6,7}	492.6	0	{2,3,4,5,6}	693.42	14.02
{2,6}	184.36	14.02	{4,6,7}	476.71	0	{1,2,3,4,7}	561.78	561.78
{3,6}	319.14	0	{5,6,7}	520.8	0	{1,2,3,5,7}	605.87	605.87
{4,6}	303.26	0	{1,2,3,4}	387.51	387.51	{1,2,4,5,7}	589.98	72.63
{5,6}	347.34	0	{1,2,3,5}	431.6	431.6	{1,3,4,5,7}	724.77	22.79
{1,7}	215.7	22.79	{1,2,4,5}	415.71	72.63	{2,3,4,5,7}	711	14.02
{2,7}	201.93	14.02	{1,3,4,5}	550.5	22.79	{1,2,3,6,7}	568.39	568.39
{3,7}	336.72	0	{2,3,4,5}	536.73	14.02	{1,2,4,6,7}	552.5	72.63
{4,7}	320.83	0	{1,2,3,6}	394.12	394.12	{1,3,4,6,7}	687.28	22.79
{5,7}	364.92	0	{1,2,4,6}	378.23	72.63	{2,3,4,6,7}	673.51	14.02
{6,7}	327.43	0	{1,3,4,6}	513.01	22.79	{1,2,5,6,7}	596.58	72.63
{1,2,3}	237.8	237.8	{2,3,4,6}	499.24	14.02	{1,3,5,6,7}	731.37	22.79
{1,2,4}	221.91	72.63	{1,2,5,6}	422.31	72.63	{2,3,5,6,7}	717.6	14.02
{1,3,4}	356.69	22.79	{1,3,5,6}	557.1	22.79	{1,4,5,6,7}	715.48	22.79
{2,3,4}	342.93	14.02	{2,3,5,6}	543.33	14.02	{2,4,5,6,7}	701.71	14.02
{1,2,5}	265.99	72.63	{1,4,5,6}	541.21	22.79	{3,4,5,6,7}	836.5	0
{1,3,5}	400.78	22.79	{2,4,5,6}	527.44	14.02	{1,2,3,4,5,6}	738.72	738.72
{2,3,5}	387.01	14.02	{3,4,5,6}	662.23	0	{1,2,3,4,5,7}	756.3	756.3
{1,4,5}	384.89	22.79	{1,2,3,7}	411.69	411.69	{1,2,3,4,6,7}	718.82	718.82
{2,4,5}	371.12	14.02	{1,2,4,7}	395.8	72.63	{1,2,3,5,6,7}	762.9	762.9
{3,4,5}	505.91	0	{1,3,4,7}	530.59	22.79	{1,2,4,5,6,7}	747.01	72.63
{1,2,6}	228.51	72.63	{2,3,4,7}	516.82	14.02	{1,3,4,5,6,7}	881.8	22.79
{1,3,6}	363.3	22.79	{1,2,5,7}	439.89	72.63	{2,3,4,5,6,7}	868.03	14.02
{2,3,6}	349.53	14.02	{1,3,5,7}	574.67	22.79	{1,2,3,4,5,6,7}	913.64	913.64
{1,4,6}	347.41	22.79	{2,3,5,7}	560.9	14.02			

Hlavným predmetom záujmu analýzy je hráč 3 (EU) a jeho vzťah k hráčovi 2 (OSN). V prípade popísanom v 3.3.1 je EU v pozícii hráča podriadeného OSN a krajine konfliktu (hráč 1).

EU samotná teda nie je schopná produkovať zisk, čím sa stráca jej veľký potenciál, ako môžeme vidieť z pôvodnej charakteristickej funkcie (možný zisk: $148, 80$). Väčší potenciál vyriešiť konflikt ako samostatný hráč mali len Francúzsko a Taliansko, pre ktoré by bol samostatný zásah v rozpore s medzinárodným právom. Keďže EU nie je oficiálne závislá na mandáte OSN, svojim rozhodnutím riadiť sa týmto hráčom znížila schopnosť koalície $\{1, 3\}$ riešiť konflikt z hodnoty $207, 41$ na $22, 79$. Oslabenie spôsobené týmto rozhodnutím EU sa podstatne prejavilo ďalej na koalíciách $\{1, 3, 4, 5\}$,$\{1, 3, 4, 6\}$,$\{1, 3, 4, 7\}$,$\{1, 3, 5, 6\}$,$\{1, 3, 5, 7\}$,$\{1, 3, 6, 7\}$,$\{1, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 3, 4, 5, 7\}$,$\{1, 3, 5, 6, 7\}$ a najvýraznejšie na $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (z $881, 80$ na $22, 79$). EU tak ovplyvnila aj schopnosť členských štátov využiť svoj potenciál, ak nechceli alebo nemali možnosť zapojiť sa do konfliktu cez štruktúry OSN.

2. **neuskutočnená** misia EU v Demokratickej republike **Kongo**, 2008
Výsledky po zavedení reštrikcie (stĺpce $\mathscr{B}_H$) spoločne s pôvodnou hodnotou charakteristickej funkcie (stĺpce $v(S)$) sú v tabuľke 7, **nová charakteristická funkcia má požadované vlastnosti**.

V rámci disjunktívneho prístupu pre novú charakteristickú funkciu získanú aplikovaním reštrikcie platí, že je viac prípadov, kde hráči môžu produkovať zisk. Neúčasť OSN na koalícii v tomto prípade neobmedzuje štáty, ktoré by sa chceli zapojiť cez štruktúry EU. Keď sa pozrieme na konkrétne koalície spomínané v predchádzajúcom odseku, vidíme, že napríklad koalícia $\{1, 3\}$ je schopná dosiahnuť svoj plný zisk $164, 78$ a o isté platí aj ďalších vyššie vymenovaných koalíciách. Podstatným faktom zostáva, že hráč 3 je stále závislý na rozhodnutiach hráča 1 a zostáva jeho podriadeným. Preto platí, že potenciál koalícií bez hráča 1 ostáva nevyužitý (napr. $v(\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}) = 916, 76$ po aplikovaní reštrikcie klesne na 0). Zmena povahy reštrikcie je viditeľná už z tabuľky 7, ale efekt tejto zmeny budeme schopní evaluovať až po spočítaní hodnoty reštrikcie v nasledujúcej podkapitole.

Model 2 a následne aj model 3 sú špecifické v tom, že v realite sa jedná o neuskutočnené misie, to znamená, že hodnoty v tabuľke vyčísľujú silu koalícií v prípade, že by sa vojenská operácia uskutočnila. Keď prípad neuskutočnenej misie v Kongu v roku 2008 porovnáme s o 5 rokov staršou operáciou Artemis, je možné pozorovať pokles medzi hodnotami charakteristickej funkcie pre hráča 3 a teda aj všetkých koalícií, ktorých je hráč 3 súčasťou. Už toto pozorovanie naznačuje, že pokles možného zisku mohol byť jedným z dôvodov, prečo sa EU rozhodla nezapojiť do operácie.

3. **neuskutočnená** misia **EUFOR Líbya** v Líbyi, 2011
Výsledky po zavedení reštrikcie (stĺpec $\mathscr{R}_H$) spoločne s pôvodnou hodnotou charakteristickej funkcie (stĺpec $v(S)$) sú v tabuľke 8, **nová charakteristická funkcia má požadované vlastnosti.**

Táto situácia sa líši od prípadu 1 tým, že Líbya, ako štát kde konflikt prebieha, má nulový zisk. Krajina nie je schopná zaistiť bezpečnosť obyvateľstvu a nemá prostriedky alebo zlyhala v snahách zmierniť či potlačiť konflikt. Z tohto hľadiska je veľmi zaujímavá hodnota charakteristickej funkcie po reštrikcii pre koalície $\{1, 2\}$ a $\{1, 3\}$. Aj napriek tomu, že Líbya sama o sebe nemá žiadny zisk, jej spolupráca s OSN zisk ich spoločnej koalície navýši, keďže súhlas a kooperácia krajiny konfliktu umožňujú medzinárodným organizáciám jednať efektívnejšie. Na druhej strane je tu koalícia $\{1, 3\}$, kde je zisk nulový, pričom EU spoločne s Líbyou by mali bez reštrikcie zisk $180, 22$. Z tohto hľadiska utrpela rozhodnutím EU jednať v závislosti na OSN najviac Líbya. Keďže operácia napokon neprebehla pod záštitou EU, ale niektoré štáty sa zapojili do koalície vedenej NATO, nebol potenciál členských štátov premrhaný.

Tabuľka 7: Model 2: disjunktívna reštrikcia

S	$v(S)$	$\mathscr{B}_H$	S	$v(S)$	$\mathscr{B}_H$	S	$v(S)$	$\mathscr{B}_H$
{1}	42.13	42.13	{3,4,6}	461.06	0	{2,4,5,7}	640.72	0
{2}	26.78	0	{1,5,6}	473.26	42.13	{3,4,5,7}	700.76	0
{3}	86.83	0	{2,5,6}	452.91	0	{1,2,6,7}	445.44	445.44
{4}	177.52	0	{3,5,6}	512.96	0	{1,3,6,7}	505.48	505.48
{5}	229.41	0	{4,5,6}	598.65	0	{2,3,6,7}	485.13	0
{6}	159.52	0	{1,2,7}	274.11	274.11	{1,4,6,7}	591.17	42.13
{7}	158	0	{1,3,7}	334.16	334.16	{2,4,6,7}	570.82	0
{1,2}	104.74	104.74	{2,3,7}	313.81	0	{3,4,6,7}	630.87	0
{1,3}	164.78	164.78	{1,4,7}	419.85	42.13	{1,5,6,7}	643.07	42.13
{2,3}	144.44	0	{2,4,7}	399.5	0	{2,5,6,7}	622.72	0
{1,4}	250.48	42.13	{3,4,7}	459.54	0	{3,5,6,7}	682.76	0
{2,4}	230.13	0	{1,5,7}	471.74	42.13	{4,5,6,7}	768.45	0
{3,4}	290.17	0	{2,5,7}	451.39	0	{1,2,3,4,5}	638.85	638.85
{1,5}	302.37	42.13	{3,5,7}	511.44	0	{1,2,3,4,6}	568.96	568.96
{2,5}	282.02	0	{4,5,7}	597.13	0	{1,2,3,5,6}	620.85	620.85
{3,5}	342.07	0	{1,6,7}	401.85	42.13	{1,2,4,5,6}	706.54	706.54
{4,5}	427.76	0	{2,6,7}	381.5	0	{1,3,4,5,6}	766.59	766.59
{1,6}	232.48	42.13	{3,6,7}	441.55	0	{2,3,4,5,6}	746.24	0
{2,6}	212.13	0	{4,6,7}	527.24	0	{1,2,3,4,7}	567.44	567.44
{3,6}	272.18	0	{5,6,7}	579.13	0	{1,2,3,5,7}	619.33	619.33
{4,6}	357.87	0	{1,2,3,4}	397.26	397.26	{1,2,4,5,7}	705.03	705.03
{5,6}	409.76	0	{1,2,3,5}	449.15	449.15	{1,3,4,5,7}	765.07	765.07
{1,7}	230.96	42.13	{1,2,4,5}	534.84	534.84	{2,3,4,5,7}	744.72	0
{2,7}	210.61	0	{1,3,4,5}	594.89	594.89	{1,2,3,6,7}	549.44	549.44
{3,7}	270.66	0	{2,3,4,5}	574.54	0	{1,2,4,6,7}	635.13	635.13
{4,7}	356.35	0	{1,2,3,6}	379.26	379.26	{1,3,4,6,7}	695.18	695.18
{5,7}	408.24	0	{1,2,4,6}	464.95	464.95	{2,3,4,6,7}	674.83	0
{6,7}	338.35	0	{1,3,4,6}	524.99	524.99	{1,2,5,6,7}	687.03	687.03
{1,2,3}	207.94	207.94	{2,3,4,6}	504.65	0	{1,3,5,6,7}	747.07	747.07
{1,2,4}	293.63	293.63	{1,2,5,6}	516.85	516.85	{2,3,5,6,7}	726.73	0
{1,3,4}	353.67	353.67	{1,3,5,6}	576.89	576.89	{1,4,5,6,7}	832.76	42.13
{2,3,4}	333.32	0	{2,3,5,6}	556.54	0	{2,4,5,6,7}	812.42	0
{1,2,5}	345.52	345.52	{1,4,5,6}	662.58	42.13	{3,4,5,6,7}	872.46	0
{1,3,5}	405.56	405.56	{2,4,5,6}	642.23	0	{1,2,3,4,5,6}	810.89	810.89
{2,3,5}	385.22	0	{3,4,5,6}	702.28	0	{1,2,3,4,5,7}	809.37	809.37
{1,4,5}	491.26	42.13	{1,2,3,7}	377.74	377.74	{1,2,3,4,6,7}	739.48	739.48
{2,4,5}	470.91	0	{1,2,4,7}	463.43	463.43	{1,2,3,5,6,7}	791.37	791.37
{3,4,5}	530.95	0	{1,3,4,7}	523.48	523.48	{1,2,4,5,6,7}	877.06	877.06
{1,2,6}	275.63	275.63	{2,3,4,7}	503.13	0	{1,3,4,5,6,7}	937.11	937.11
{1,3,6}	335.67	335.67	{1,2,5,7}	515.33	515.33	{2,3,4,5,6,7}	916.76	0
{2,3,6}	315.33	0	{1,3,5,7}	575.37	575.37	{1,2,3,4,5,6,7}	981.71	981.71
{1,4,6}	421.36	42.13	{2,3,5,7}	555.02	0			

Tabuľka 8: Model 3: konjunktívna reštrikcia

S	$v(S)$	$\mathscr{R}_H$	S	$v(S)$	$\mathscr{R}_H$	S	$v(S)$	$\mathscr{R}_H$
$\emptyset$	0	0	{2,4,6}	388.16	27.76	{1,4,5,7}	689.25	0
{1}	1	0	{3,4,6}	503.8	0	{2,4,5,7}	711.01	27.76
{2}	27.76	27.76	{1,5,6}	443.84	0	{3,4,5,7}	826.65	0
{3}	143.39	0	{2,5,6}	465.6	27.76	{1,2,6,7}	479.46	64.58
{4}	162.77	0	{3,5,6}	581.24	0	{1,3,6,7}	595.1	0
{5}	240.21	0	{4,5,6}	595.62	0	{2,3,6,7}	616.86	27.76
{6}	160.44	0	{1,2,7}	307.22	64.58	{1,4,6,7}	609.48	0
{7}	231.27	0	{1,3,7}	422.86	0	{2,4,6,7}	631.23	27.76
{1,2}	64.58	64.58	{2,3,7}	444.62	27.76	{3,4,6,7}	746.87	0
{1,3}	180.22	0	{1,4,7}	437.24	0	{1,5,6,7}	686.92	0
{2,3}	201.98	27.76	{2,4,7}	458.99	27.76	{2,5,6,7}	708.68	27.76
{1,4}	194.6	0	{3,4,7}	574.63	0	{3,5,6,7}	824.31	0
{2,4}	216.35	27.76	{1,5,7}	514.68	0	{4,5,6,7}	838.69	0
{3,4}	331.99	0	{2,5,7}	536.43	27.76	{1,2,3,4,5}	651.31	651.31
{1,5}	272.04	0	{3,5,7}	652.07	0	{1,2,3,4,6}	571.54	571.54
{2,5}	293.8	27.76	{4,5,7}	666.45	0	{1,2,3,5,6}	648.98	648.98
{3,5}	409.43	0	{1,6,7}	434.9	0	{1,2,4,5,6}	663.35	64.58
{4,5}	423.81	0	{2,6,7}	456.66	27.76	{1,3,4,5,6}	778.99	0
{1,6}	192.27	0	{3,6,7}	572.3	0	{2,3,4,5,6}	800.75	27.76
{2,6}	214.02	27.76	{4,6,7}	586.68	0	{1,2,3,4,7}	642.37	642.37
{3,6}	329.66	0	{5,6,7}	664.12	0	{1,2,3,5,7}	719.81	719.81
{4,6}	344.04	0	{1,2,3,4}	398.92	398.92	{1,2,4,5,7}	734.19	64.58
{5,6}	421.48	0	{1,2,3,5}	476.36	476.36	{1,3,4,5,7}	849.83	0
{1,7}	263.1	0	{1,2,4,5}	490.74	64.58	{2,3,4,5,7}	871.58	27.76
{2,7}	284.86	27.76	{1,3,4,5}	606.37	0	{1,2,3,6,7}	640.04	640.04
{3,7}	400.49	0	{2,3,4,5}	628.13	27.76	{1,2,4,6,7}	654.42	64.58
{4,7}	414.87	0	{1,2,3,6}	396.58	396.58	{1,3,4,6,7}	770.05	0
{5,7}	492.31	0	{1,2,4,6}	410.96	64.58	{2,3,4,6,7}	791.81	27.76
{6,7}	412.54	0	{1,3,4,6}	526.6	0	{1,2,5,6,7}	731.86	64.58
{1,2,3}	224.34	224.34	{2,3,4,6}	548.36	27.76	{1,3,5,6,7}	847.49	0
{1,2,4}	238.72	64.58	{1,2,5,6}	488.4	64.58	{2,3,5,6,7}	869.25	27.76
{1,3,4}	354.36	0	{1,3,5,6}	604.04	0	{1,4,5,6,7}	861.87	0
{2,3,4}	376.11	27.76	{2,3,5,6}	625.8	27.76	{2,4,5,6,7}	883.63	27.76
{1,2,5}	316.16	64.58	{1,4,5,6}	618.42	0	{3,4,5,6,7}	999.26	0
{1,3,5}	431.8	0	{2,4,5,6}	640.17	27.76	{1,2,3,4,5,6}	824.26	824.26
{2,3,5}	453.56	27.76	{3,4,5,6}	755.81	0	{1,2,3,4,5,7}	895.1	895.1
{1,4,5}	446.18	0	{1,2,3,7}	467.42	467.42	{1,2,3,4,6,7}	815.32	815.32
{2,4,5}	467.93	27.76	{1,2,4,7}	481.8	64.58	{1,2,3,5,6,7}	892.76	892.76
{3,4,5}	583.57	0	{1,3,4,7}	597.43	0	{1,2,4,5,6,7}	907.14	64.58
{1,2,6}	236.39	64.58	{2,3,4,7}	619.19	27.76	{1,3,4,5,6,7}	1022.78	0
{1,3,6}	352.03	0	{1,2,5,7}	559.24	64.58	{2,3,4,5,6,7}	1044.54	27.76
{2,3,6}	373.78	27.76	{1,3,5,7}	674.88	0	{1,2,3,4,5,6,7}	1068.36	1068.36
{1,4,6}	366.4	0	{2,3,5,7}	696.63	27.76			

4. **EU NAVFOR MED SOPHIA**, námorná misia EU v Stredozemnom mori, 2015. Výsledky po zavedení reštrikcie (stĺpce $\mathscr{B}_H$) spoločne s pôvodnou hodnotou charakteristickej funkcie (stĺpce $v(S)$) sú v tabuľke 9, **nová charakteristická funkcia má požadované vlastnosti**.

Posledná tabuľka opäť znázorňuje disjunktívnu reštrikciu, kontext je však úplne odlišný od druhého modelu. Ako už bolo objasnené, jedná sa o model, kedy EU s operáciou začala aj napriek tomu, že od OSN nemala mandát (druhý model naopak popisoval situáciu, kedy EU operáciu nezačala aj napriek výzve od OSN). Čísla, ktoré sú v tabuľke 9 teda znázorňujú reálnu silu jednotlivých koalícií s ktorou vstupovali do operácie. V tomto prípade je dôležité všimnúť si koalície bez hráča 2, pretože keby sa jednalo o konjunktívny prístup, tieto koalície by mali nulovú hodnotu charakteristickej funkcie. Keby EU čakala na mandát OSN, koalície ako $\{1,3\}$, $\{1,3,4\}$, či $\{1,3,4,5,6,7\}$ sa to konfliktu nemohli zapojiť a ich prostriedky na jeho upokojenie v hodnotách $201,49$; $368,37$ a $952,5$ nezostali nevyužité.

Vďaka tomu, že matematický aparát teórie hier do analyzovaného prípadu priniesol operacionalizáciu a vyhodnotenie možných ziskov a následne ich systematickú štrukturalizáciu, problematika sa stala transparentnejšou a vidíme, že už spočítanie charakteristickej funkcie môže do problematiky vniesť viac svetla.

Na všetkých popisovaných modeloch vyjadrených v tvare charakteristickej funkcie vidíme, že v ďalšej interpretácii, po spočítaní hodnôt reštrikcií, bude potrebné brať do úvahy kontext zostavených modelov.

Tabuľka 9: Model 4: disjunktívna reštrikcia

S	$v(S)$	$\mathscr{B}_H$	S	$v(S)$	$\mathscr{B}_H$	S	$v(S)$	$\mathscr{B}_H$
0	0	0	{2,4,6}	361.66	0	{1,4,5,7}	645.03	25.83
{1}	25.83	25.83	{3,4,6}	470.48	0	{2,4,5,7}	645.22	0
{2}	31.01	0	{1,5,6}	417.12	25.83	{3,4,5,7}	754.04	0
{3}	139.83	0	{2,5,6}	417.3	0	{1,2,6,7}	452.31	452.31
{4}	155.52	0	{3,5,6}	526.12	0	{1,3,6,7}	561.13	561.13
{5}	211.15	0	{4,5,6}	536.81	0	{2,3,6,7}	561.32	0
{6}	137.94	0	{1,2,7}	302.57	302.57	{1,4,6,7}	571.82	25.83
{7}	198.53	0	{1,3,7}	411.39	411.39	{2,4,6,7}	572	0
{1,2}	92.67	92.67	{2,3,7}	411.57	0	{3,4,6,7}	680.82	0
{1,3}	201.49	201.49	{1,4,7}	422.08	25.83	{1,5,6,7}	627.45	25.83
{2,3}	201.67	0	{2,4,7}	422.26	0	{2,5,6,7}	627.64	0
{1,4}	212.17	25.83	{3,4,7}	531.08	0	{3,5,6,7}	736.46	0
{2,4}	212.36	0	{1,5,7}	477.71	25.83	{4,5,6,7}	747.14	0
{3,4}	321.18	0	{2,5,7}	477.89	0	{1,2,3,4,5}	639.52	639.52
{1,5}	267.81	25.83	{3,5,7}	586.71	0	{1,2,3,4,6}	566.31	566.31
{2,5}	267.99	0	{4,5,7}	597.4	0	{1,2,3,5,6}	621.94	621.94
{3,5}	376.81	0	{1,6,7}	404.5	25.83	{1,2,4,5,6}	632.63	632.63
{4,5}	387.5	0	{2,6,7}	404.68	0	{1,3,4,5,6}	741.45	741.45
{1,6}	194.6	25.83	{3,6,7}	513.5	0	{2,3,4,5,6}	741.63	0
{2,6}	194.78	0	{4,6,7}	524.19	0	{1,2,3,4,7}	626.9	626.9
{3,6}	303.6	0	{5,6,7}	579.82	0	{1,2,3,5,7}	682.54	682.54
{4,6}	314.29	0	{1,2,3,4}	416.19	416.19	{1,2,4,5,7}	693.22	693.22
{5,6}	369.92	0	{1,2,3,5}	471.82	471.82	{1,3,4,5,7}	802.04	802.04
{1,7}	255.19	25.83	{1,2,4,5}	482.51	482.51	{2,3,4,5,7}	802.23	0
{2,7}	255.37	0	{1,3,4,5}	591.33	591.33	{1,2,3,6,7}	609.32	609.32
{3,7}	364.19	0	{2,3,4,5}	591.51	0	{1,2,4,6,7}	620.01	620.01
{4,7}	374.88	0	{1,2,3,6}	398.61	398.61	{1,3,4,6,7}	728.83	728.83
{5,7}	430.52	0	{1,2,4,6}	409.3	409.3	{2,3,4,6,7}	729.01	0
{6,7}	357.3	0	{1,3,4,6}	518.12	518.12	{1,2,5,6,7}	675.65	675.65
{1,2,3}	248.87	248.87	{2,3,4,6}	518.3	0	{1,3,5,6,7}	784.47	784.47
{1,2,4}	259.55	259.55	{1,2,5,6}	464.93	464.93	{2,3,5,6,7}	784.65	0
{1,3,4}	368.37	368.37	{1,3,5,6}	573.75	573.75	{1,4,5,6,7}	795.15	25.83
{2,3,4}	368.56	0	{2,3,5,6}	573.93	0	{2,4,5,6,7}	795.34	0
{1,2,5}	315.19	315.19	{1,4,5,6}	584.44	25.83	{3,4,5,6,7}	904.16	0
{1,3,5}	424.01	424.01	{2,4,5,6}	584.62	0	{1,2,3,4,5,6}	789.98	789.98
{2,3,5}	424.19	0	{3,4,5,6}	693.44	0	{1,2,3,4,5,7}	850.57	850.57
{1,4,5}	434.7	25.83	{1,2,3,7}	459.2	459.2	{1,2,3,4,6,7}	777.36	777.36
{2,4,5}	434.88	0	{1,2,4,7}	469.89	469.89	{1,2,3,5,6,7}	832.99	832.99
{3,4,5}	543.7	0	{1,3,4,7}	578.71	578.71	{1,2,4,5,6,7}	843.68	843.68
{1,2,6}	241.97	241.97	{2,3,4,7}	578.89	0	{1,3,4,5,6,7}	952.5	952.5
{1,3,6}	350.79	350.79	{1,2,5,7}	525.53	525.53	{2,3,4,5,6,7}	952.68	0
{2,3,6}	350.98	0	{1,3,5,7}	634.35	634.35	{1,2,3,4,5,6,7}	1001.33	1001.33
{1,4,6}	361.48	25.83	{2,3,5,7}	634.53	0			

4.3 Hodnoty reštrikcií

Po zavedení reštrikcie na charakteristické funkcie jednotlivých modelov, dostávame pre každú popísanú situáciu novú kooperatívnu hru v tvare charakteristickej funkcie. Na vyjadrenie hodnoty reštrikcií, ktorá vypovedá o postavení hráčov v koalíciách berúc to úvahy ich hierarchické usporiadanie, je potrebné na novej hre spočítať Shapleyho hodnotu. Shapleyho hodnota bola spočítaná pomocou funkcie *Shapley_value* z knižnice *GameTheoryAllocation*.

Tabuľka 10: Hodnoty reštrikcií

	hráč 1	hráč 2	hráč 3	hráč 4	hráč 5	hráč 6	hráč 7
model 1	264,61	255,85	223,92	37,64	48,66	39,29	43,68
model 2	450,19	89,48	119,50	79,14	100,76	71,64	71,01
model 3	282,57	310,33	264,16	43,85	63,21	43,27	60,98
model 4	453,62	89,82	144,23	69,97	93,15	62,65	87,90

Tabuľka 11: Percentuálne vyjadrenie hodnôt reštrikcií

	hráč 1	hráč 2	hráč 3	hráč 4	hráč 5	hráč 6	hráč 7
model 1 [%]	28,96	28,00	24,51	4,12	5,33	4,30	4,78
model 2 [%]	45,86	9,12	12,17	8,06	10,26	7,30	7,23
model 3 [%]	26,49	29,00	24,73	4,10	5,92	4,05	5,71
model 4 [%]	45,30	8,97	14,40	6,99	9,30	6,26	8,78

Vyčíslenie hodnoty konjunktívnej a disjunktívnej reštrikcie bude hlavným vodítkom pre úvahy o výskumnom probléme. Hodnoty reštrikcií sú uvedené v tabuľke 10. Po ich vyjadrení bolo úspešne overené **splnenie axiómov** (viď. príloha A.3) a výsledok môžeme ďalej interpretovať. Pre väčšiu názornosť boli ešte konkrétne výšky zisku vyjadrené aj ako podiel hráča na celkovom zisku (tabuľka 11), prípady sú tak medzi sebou porovnateľné.

1. **ARTEMIS**, vojenská misia EU v Demokratickej republike Kongo, 2003

Zisk pripadajúci EU je v tomto prípade $24,51\%$ čo je približne o $3,5\%$ a $4,5\%$ nižšia hodnota ako zisk OSN a Konga. Keď sa pozrieme späť na tabuľku 5, v ktorej je Shapleyho hodnota bez reštrikcie, výsledky sú diametrálne odlišné - Kongu by pripadli len $4,73\%$ zisku a OSN len $3,32\%$ zisku. Na tom sa ukazuje, akú veľkú rolu zohráva hierarchická štruktúra v realite medzinárodných vzťahov. Práve štát, kde konflikt prebieha a OSN sú najdôležitejšími aktéri a ich záujem na ukončení konfliktu je najväčší.

Hráč 3 tak v tomto prípade, aj napriek tomu, že mu konjunktívna reštrikcia v mnohých koalíciách výrazne znížila zisk, získava podiel porovnateľný s EU a OSN, ktorí sú jeho nadriadení hráči. V kooperatívnych hrách je zriedkavé, že aj podriadení hráči by mohli dosiahnuť taký vysoký zisk a preto na základe týchto výsledkov nemôžeme tvrdiť, že by bol konjunktívny prístup pre EU nevýhodný. To aj napriek tomu, že z tabuľky 6 bolo zrejmé, aké veľké obmedzenia hráčovi 3 priniesol. Akceptovanie OSN ako nadriadeného hráča je pre EU dokonca výnosnejšie ako by pre ňu bola účasť v koalíciách bez akejkoľvek hierarchickej štruktúry (viď. tabuľka 5).

Zo spočítaných hodnôt pre prvý prípad však ešte nemôžeme vyvodzovať nijaké zovšeobecniteľné závery a je potrebné dať ich to kontextu s ostatnými prípadmi. Následne pri porovnávaní s hodnotami z ostatných modelov musíme pamätať aj na špecifiká jednotlivých prípadov.

2. **neuskutočnená** misia EU v Demokratickej republike **Kongo**, 2008
Neuskutočnenie misie v Kongu bolo prvým odklonom EU od role podriadeného hráča OSN. Pri interpretácii výsledkov hodnôt reštrikcie je potrebné zdôrazniť, že nimi vysvetľujeme neúčasť a nie účasť na misii z hľadiska hráča 3. Keď porovnáme zisk z modelu 1 s možným ziskom v tomto prípade, zaznamenávame jeho pokles (nielen percentuálne čo by mohlo byť zavádzajúce, ale aj v absolútnych číslach). Účasť hráča 3 v koalícii by mu v 2.modeli zaistila len $12,17\%$ zisku. Z tohto hľadiska je rozhodnutie neparticipovať možné vyhodnotiť ako rozhodnutie motivované potenciálnym ziskom - teda EU vyhodnotila svoje schopnosti prispieť k ukončeniu konfliktu za malé, resp. podstatne menšie ako v predchádzajúcej operácii v tej oblasti a preto sa do misie nezapojila.

Výsledky však prinášajú aj zaujímavé zistenie o hráčovi 1. U krajiny konfliktu došlo k nárastu zisku, čo má nepochybne veľký význam. Ukazuje sa, že zapojenie oboch medzinárodných organizácií ako rovnocenných hráčov by znamenalo zvýšenie možností samotnej krajiny konfliktu jednať. To by však zo sebou prinieslo aj prenesenie zodpovednosti na túto krajinu, čo v situáciách, kedy sa štát opiera o krehké inštitúcie, môže byť nebezpečné. Výsledky teda naznačujú aj možnosť interpretovať neparticipáciu EU ako snahu o nenarušenie stability, ktorú by mohol náhly tlak na miestne inštitúcie v krajine konfliktu ohroziť.[16]

Podstatnú zmenu môžeme pozorovať aj u hráčov $4-7$, ktorým by sa možnosti zasiahnuť do konfliktu a prispieť k jeho upokojeniu zvýšili. Takýto výsledok dáva zmysel, keďže EU a OSN stojace v rovnocennej pozícii dávajú štátom 2 rôzne platformy, cez ktoré participovať. Takéto vyjadrenie viac vypovedá o skutočnom prínose jednotlivých štátov pre koalície a otvára ďalšie interpretačné možnosti v prípade, že by sme prostredníctvom kooperatívnej teórie hier chceli analyzovať angažovanosť jednotlivých štátov v konfliktoch.[17]

3. **neuskutočnená** misia **EUFOR Líbya** v Líbyi, 2011
Z hodnoty konjunktívnej reštrikcie pre prípad neuskutočnenej misie v Líbyi vidíme, že EU pripadne veľmi podobný podiel zisku ako tomu bolo v 1. modeli. Zásadný rozdiel pri interpretácii je však v tom, že tentokrát sa jedná o neuskutočnenú misiu. Je tiež podstatné myslieť na ďalšie špecifikum tohto modelu, kedy samotná krajina konfliktu nebola schopná produkovať žiadny zisk. Výsledky je teda potrebné hodnotiť s ohľadom na to, že EU sa v situácii, kedy Líbya samotná nemala prostriedky na ukončenie konfliktu, rozhodla riadiť rozhodnutím OSN a do operácie sa neangažovať. Hlavnou otázkou zostáva, čo bolo príčinou a model 3 má pomôcť objasniť, či bolo toto rozhodnutie motivované ziskom v zmysle v akom bol definovaný pri vymedzení výskumného problému.

Tabuľka 11 ukazuje zisky jednotlivých aktérov v prípade, že by sa do operácie EU zapojila ako podriadený hráč OSN. V takom prípade, by jej zisky boli porovnateľné s modelom 1 a dosiahli by takmer 25%. To by bol, vzhľadom na predchádzajúce výsledky, dostatočný impulz

[16]V prípade, že by sa EU napokon rozhodla participovať na operácii, nebol by narušený disjunktívny prístup, lebo hlavným okamihom bolo, že v situácií, keď OSN explicitne žiadalo o účasť, nedošlo k tomu. Neskôr by sa EU zapájala do operácie ako aktér s väčšou mierou autonómneho rozhodovania, čo implikuje disjunktívny prístup.

[17]Participácia členských štátov medzinárodných organizácií v konfliktoch v zahraničí je v súčasnosti jednou z veľmi relevantných výskumných tém.

na zapojenie sa do operácie. Avšak to by platilo len za situácie, že by sa do operácie zapojila aj OSN a táto možnosť v realite nebola k dispozícii. Keď na charakteristickú funkciu pre model 3 zavedieme aj disjunktívnu reštrikciu (teda uvažujeme situáciu, že by sa EU nesprávala ako podriadený hráč OSN, ale v operácii by sa samostatne angažovala), dostaneme nasledujúce hodnoty reštrikcie:

Tabuľka 12: Model 3: hodnota disjunktívnej reštrikcie

	hráč 1	hráč 2	hráč 3	hráč 4	hráč 5	hráč 6	hráč 7
$\rho(\mathscr{B}_H(v))$	467,09	95 ,82	153,64	72,99	105,26	72,02	101,54
$\rho(\mathscr{B}_H(v))$ [%]	43,72	8,97	14,38	6,83	9,58	6,74	9,51

Z výsledkov vidíme, že takýto postup by pre EU (v porovnaní s konjunktívnym) nebol výhodný, keďže jej zisk by bol menší v absolútnych číslach o $110,52$ bodov. Jednou z príčin rozhodnutia EU teda môže byť to, že zásah v Líbyi bez podpory OSN by nebol účinný a EU by nemohla k upokojeniu konfliktu až tak výrazne prispieť. Rozhodujúce je, že v roku 2011 nemala samotná Líbya žiadne efektívne prostriedky na nastolenie mieru a EU by v prípade uskutočnenia operácie nemala žiadnu oporu v OSN a ani v krajine konfliktu. To, či nulová hodnota charakteristickej funkcie hráča 1 zohráva takú dôležitú úlohu a či ovplyvní rozhodovací proces, bude analyzované na základe komparácie s nasledujúcim modelom, kedy už aj hráč 1 disponuje samostatnými produkčnými schopnosťami.

Predchádzajúce tri modely naznačujú, že pre EU ako potenciálneho aktéra v konfliktoch je podstatné, aký by bol jeho zisk (teda berie do úvahy aký potenciál na pomoc pri riešení konfliktu má v jednotlivých situáciách) a na základe toho, či by jeho angažovanosť bola skutočne prínosná, sa operácií zúčastňuje v resp. nezúčastňuje ako podriadený hráč OSN. Preto sa teraz pri interpretácii posledného modelu zameriame práve na to, či aj on potvrdzuje túto teóriu.

4. **EU NAVFOR MED SOPHIA**, námorná misia EU v Stredozemnom mori, 2015
Výsledné hodnoty reštrikcie pre model 4 hovoria o tom, že EU v tomto prípade mohla dosiahnuť $14,40\%$-ný podiel zisku. Podľa predchádzajúcich výsledkov by takéto vyhodnotenie situácie malo viesť k tomu, že EU by sa do konfliktu nezapojila bez toho, aby dostala mandát od OSN a správala by sa ako jej podriadený hráč.

Kontext situácie je veľmi podobný ako v predchádzajúcom prípade, pretože EU vidí, že bez mandátu OSN je jej potenciál nízky a môže hroziť, že zásah nebude účinný. Ako hlavná otázka teda vyvstáva, prečo v sa EU v tomto prípade rozhodla pre jednanie aj bez autorizovania OSN. Podstatný rozdiel medzi dvomi popisovanými situáciami je hodnota charakteristickej funkcie pre hráča 1. Z tabuľky 8 pre model 3 vidíme, že hráč 1 sám nie je schopný produkovať žiadny zisk a to obmedzuje aj zisk koalície $\{1,3\}$ (viď. stĺpec $v(S)$). Keby sa EU zapojila bez OSN, len za podpory krajiny konfliktu, v prípade $\{1,3\}$ by náklady aj zodpovednosť misie boli len na nej. Aj v prípade, že by sa zapájali ďalšie krajiny[18] by hlavnú rolu po oboch stránkach zohrávala

[18]Zapojenie ďalších krajín by nebolo samozrejmosťou. Je možné, že neprítomnosť mandátu OSN by odradila členské štáty od účasti na samostatnej akcii EU, pretože EU nevznikala ako organizácia zameraná na bezpečnostné záležitosti a mnohé štáty túto jej agendu vnímajú ako agendu nad rámcom jej pôsobenia. Naopak OSN svojimi dlhoročnými aktivitami v zahraničných konfliktoch pre členské štáty predstavuje v tejto oblasti autoritu.

EU, osamotená v tejto pozícii.

Naopak v 4. modelovanej situácii už aj samotná krajina konfliktu disponovala prostriedkami na zasiahnutie (viď. tabuľku 9, $v(\{1\}) = 28,83$). Ovplyvnilo sa tým rozloženie síl v prípade účasti EU a keď sa pozrieme na zisk koalície $\{1,3\}$ sú v ňom zreteľné príspevky oboch aktérov. To platí aj pre ostatné koalície, ktorých súčasťou je hráč 1, aj on vždy prispieva k navyšovaniu sily koalície. Takáto situácia oveľa viac motivuje EU k účasti aj bez podpory OSN, lebo už nie je v snahách nastoliť mier osamotená, ale môže sa oprieť aj o krajinu, kde konflikt prebieha. V predchádzajúcich modeloch sa ukázalo, že konjunktívny prístup je prínosnejší, v tomto prípade to však neplatí, pretože konjunktívny prístup by znamenal nulový zisk pre všetkých hráčov, keďže hráč 2 by sa nezúčastnil žiadnej koalície. Preto si EU vybrala ten výhodnejší postup.

Opäť je prítomná pochybnosť predostrená už v modeli 2 ohľadne príliš veľkej zodpovednosti prenesenej na vládu krajiny konfliktu vzhľadom na vysokú hodnotu reštrikcie. Avšak tu tiež platí, že druhou možnosťou by bolo, že operácia by neprebehla a hráč 1 by v realite nemohol dosiahnuť zisk, ktorý by stačil na ukončenie konfliktu.

Na základe zostavených modelov bolo možné nájsť konzistenciu v rozhodnutiach EU o participácii na operáciách a tiež o pozícii v akej vystupuje voči OSN. Výsledky naznačujú, že správanie EU zodpovedá prístupu racionálneho aktéra uvažovaného v teórii hier, pretože jej akcie sa odvíjajú primárne od evaluovaného možného zisku. Na základe toho sa dá zhrnúť, že EU bude preferovať konjunktívny prístup, pretože dobrovoľné podriadenie sa OSN prináša celkovo rovnomernejšie rozdelenie zisku a hlavne jeho väčší podiel pripadajúci EU.

Odchýlky od konjunktívneho prístupu nastanú v prípadoch, kedy klesne množstvo prostriedkov, ktoré má Únia k dispozícii, čo by pri vyjadrení hodnoty konjunktívnej reštrikcie viedlo k oslabeniu pozície tohto hráča. Pred oslabením vlastného postavenia v hre EU uprednostní disjunktívny prístup, kde si v absolútnych číslach pohorší, ale čo sa týka pozície medzi ostatnými aktérmi, vplyv hráča vzrastie.

Ďalšou výnimkou je situácia, kedy by voľba pozície podriadeného hráča viedla k nulovým ziskom. Logika výberu najvýhodnejšej možnosti pre EU v týchto prípadoch zostáva zachovaná, pretože reálny kontext spôsobí, že konjunktívny prístup nie je prípustná možnosť.

Cieľom výsledného stručného zhrnutia interpretačných záverov kapitoly bolo ukázať, že analýza cez kooperatívnu teóriu hier vie ponúknuť transparentný náhľad do veľmi komplexných výskumných problémov z oblasti medzinárodných vzťahov. Predostretá interpretácia slúži na demonštráciu toho, aké široké spektrum informácií môže formalizácia teórie hier priniesť a aké možnosti pre ich interpretáciu sa otvárajú.

Predostretý výskumný problém, na ktorý sa zostavené modely sústredili, je skutočne relevantným problémom a na jeho zodpovedanie doposiaľ neexistuje ucelená teória. Aby bola interpretácia výsledkov v tomto bádaní prínosná, bolo by potrebné dlhšie a podrobnejšie štúdium problematiky a plastickejšia práca s kontextom a súvislosťami. Cieľom práce nebolo výskumný problém zodpovedať, ale poukázať na to, že kooperatívna teória hier ponúka matematický aparát, ktorý by v tejto oblasti mohol dopomôcť k veľkým posunom. Boli zostavené modely pre konkrétny výskumný problém a použité reálne hodnoty charakteristickej funkcie, spočítané výsledky sú relevantné, otvorenou otázkou do diskusie ostáva ich interpretácia. Je však nepochybné, že štrukturalizácia vzťahov medzi aktérmi, konceptualizácia zisku a operacionalizácia prostriedkov na jeho dosahovanie pomohla odhaliť nové súvislosti a získať do problematiky lepší náhľad.

Záver

Predkladaná diplomová práca sa zaoberala aplikáciou kooperatívnej teórie hier vo výskumných problémoch medzinárodných vzťahov, konkrétne v lokálnych konfliktoch. Riešenie konfliktov, ktoré majú dnes takmer výhradne lokálny charakter a väčšinou vyžadujú aj zásah medzinárodného spoločenstva, je v súčasnosti veľmi aktuálna téma. Samotná povaha tohto výskumného problému implikovala, že na jeho analyzovanie sa hodí matematický aparát kooperatívnej teórie hier s hierarchickými štruktúrami. Cieľom práce bolo naštudovať toto odvetvie teórie hier a na konkrétnom výskumnom probléme a zostavených modeloch demonštrovať jeho aplikáciu. Hlavným zámerom bolo detailne priblížiť z teoretického hľadiska to, ako hierarchické štruktúry v hre ovplyvnia jej vlastnosti a spôsoby riešenia, a následne zistiť, či výsledky riešenia môžu do problematiky lokálnych konfliktov vniesť lepší náhľad, a teda vyhodnotiť, či je kooperatívna teória hier s hierarchickými štruktúrami skutočne vhodnou metódou na analýzu tejto oblasti medzinárodných vzťahov.

V prvej kapitole práce boli objasnené pojmy a koncepty z kooperatívnej teórie hier, ktoré sú pre zavádzanie hierarchických štruktúr nevyhnutné. Zamerala sa najmä na vlastnosti kooperatívnych hier, ktorých zachovanie je jednou z podmienok správnej aplikácie reštrikcie na základe hierarchických štruktúr. Ďalej sa podrobne venovala bázam kooperatívnych hier, lebo pomocou nich je možné transformovať hry do tvaru, ktorý zjednoduší aplikáciu reštrikcií plynúcich z hierarchického usporiadania.

Predmetom druhej kapitoly bolo popísanie zavádzania hierarchických štruktúr prostredníctvom dvoch prístupov - konjunktívneho a disjunktívneho. V kapitole boli na príkladoch vysvetlené potrebné teoretické koncepty, ktoré s nimi súvisia. Z tohto teoretického popisu následne vychádzala implementácia algoritmov v scriptovacom jazyku R.

Tretia kapitola sa sústredila na výskumný problém, k riešeniu ktorého mala aplikácia kooperatívnej teórie hier prispieť. Kapitola v úvode priblížila jeho kontext a v rámci neho bola potom zostavená charakteristická funkcia. Pre štyri konkrétne príklady lokálnych konfliktov, dva prípady v Kongu a dva prípady v Líbyi, boli zostavené modely kooperatívnych hier a boli pre ne určené hierarchické štruktúry a typy reštrikcií.

Štvrtá kapitola sa zamerala na analýzu modelov. Prvým krokom bolo na základe zostavenej charakteristickej funkcie spočítať jej konkrétne hodnoty vychádzajúce zo zozbieraných reálnych dát. Ďalej bolo overené splnenie požadovaných vlastnosti funkcie a na jednotlivé modely boli aplikované konkrétne hierarchické štruktúry a zavedené reštrikcie. Po vyjadrení nových hodnôt charakteristickej funkcie, ktoré už zohľadňovali vzťahy nadriadenosti a podriadenosti, boli už tieto čiastkové výsledky interpretované a bola zhodnotená ich užitočnosť pre náhľad do skúmanej problematiky. Posledným krokom bolo vyjadrenie hodnoty reštrikcií, ktorá je hľadaným riešením hry a teda vhodným prerozdelením zisku. Výsledky pre jednotlivé modely boli porovnané a vyhodnotené a v záverečnej interpretácii je naznačené, aké závery pre výskumný problém sa z nich dajú odvodiť.

Cieľom práce nebolo komplexné zodpovedanie výskumného problému, na to by bolo potrebné detailnejšie skúmanie kontextu jednotlivých prípadov. Hlavným zámerom bolo použiť aparát kooperatívnej teórie hier a zistiť, či je takéto využitie účelné. Z analýzy je zrejmé, že tento prístup dokáže dobre a transparentne popísať aj komplexné situácie z medzinárodných vzťahov. Aj sprehľadnenie vzťahov medzi aktérmi a súvislostí medzi rôznymi udalosťami môže mnohokrát do problematiky lokálnych konfliktov priniesť nové poznatky. Preto už samotné zostavenie kooperatívnej hry môže byť v oblasti problémov medzinárodných vzťahov prínosné. Aj výsledky riešení hier prezentované v práci sa ukazujú ako relevantné pre adresovanie výskumného problému. Diplomová práca teda demonštruje možnosť a najmä užitočnosť použitia kooperatívnej teórie hier v problematike lokálnych konfliktov.

ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV

[1] AUMANN, Robert J. An Axiomatization of the Non-Transferable Utility Value. *Econometrica* [online]. 1985, **53**(3) [cit. 2019-02-28]. DOI: 10.2307/1911657. ISSN 00129682. Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/1911657?origin=crossref

[2] BRADDON, Derek. The Role of Economic Interdependence in the Origins and Resolution of Conflict. *Revue d'économie politique*[online]. 2012, **2**(122) [cit. 2019-03-11] s. 299-319. DOI : 10.3917/redp.218.0299. Dostupné z : https://www.cairn.info/revue-d-economie-politique-2012-2-page-299.htm

[3] ENGBERG, Katarina. *Ten years of EU military operations* [online]. European Union Institute for Security Studies, 2013 [cit. 2019-03-15]. ISSN 2315-1110. Dostupné z: https://www.iss.europa.eu/sites/default/files/EUISSFiles/Brief_41_EU_military_operations .pdf

[4] European Commission. *EU annual budget lifecycle: figures* [online]. © European Union, 1995-2019 [cit. 2019-05-21]. Dostupné z: http://ec.europa.eu/budget/graphs/annual_life_cycle.html

[5] European Union External Action. *EU Battlegroups* [online]. 2013 [cit. 2019-05-21]. Dostupné z:
https://www.consilium.europa.eu/uedocs/cms_data/docs/pressdata/en/esdp/91624.pdf

[6] European Union External Action. *EU Missions and Operations: As part of the EU's Common Security and Defence Policy (CSDP).* 2017. Dostupné z: https://eeas.europa.eu/sites/eeas/files/csdp_missions_and_operations_factsheet.pdf

[7] European Union External Action. *EUNAVOR MED operation Sophia: About us*. EUNAVOR MED operation Sophia [online]. [cit. 2019-03-20]. Dostupné z: https://www.operationsophia.eu/about-us/

[8] European External Action Service. *ARTEMIS/DRC* [online]. Archived 2015. [cit. 2019-03-17]. Dostupné z: http://www.eeas.europa.eu/archives/csdp/missions-and-operations/artemis-drc/index_en.htm

[9] European External Action Service, Press Group. *EU Battlegroups* [online]. Bruxelles: European Union EXTERNAL ACTION, 2017 [cit. 2019-03-09]. Dostupné z: https://eeas.europa.eu/headquarters/headquarters-homepage_en/33557/EU%20Battlegroups

[10] GILLES, Robert P., Guillermo OWEN a René VAN DEN BRINK. Games with permission structures: The conjunctive approach. I*nternational Journal of Game Theory* [online]. 1992, **20**(3), 277-293 [cit. 2019-02-14]. DOI: 10.1007/BF01253782. ISSN 0020-7276. Dostupné z: http://link.springer.com/10.1007/BF01253782

[11] GILLES, Robert P. *The cooperative game theory of networks and hierarchies*, Heidelberg: Springer, c2010. ISBN 978-3-642-052828.

[12] HARSANYI, John C. A Simplified Bargaining Model for the n-Person Cooperative Game. *International Economic Review* [online]. Osaka University: Wiley for the Economics Department of the University of Pennsylvania and Institute of Social and Economic Research, 1963, **4**(2), 194-220 [cit. 2019-02-07]. Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/2525487

[13] *Charter of the United Nations*. San Francisco, 1945. Dostupné z: https://treaties.un.org/doc/publication/ctc/uncharter.pdf

[14] KENNY, Coman a Sean BUTLER. The Legality of Intervention by Invitation in Situations of R2P Violations. *New York University Journal of International Law and Politics* [online]. 2018, **51**(1), 135-178 [cit. 2019-03-08]. ISSN 00287873.

[15] LENARZ, Julie, Simon SCHOFIELD, Daniel WAND, Eva BROCKSCHMIDT a Michelle MCKENNA. *Intervention: When, Why and How?* [online]. 2013 [cit. 2019-03-19]. Dostupné z: https://publications.parliament.uk/pa/cm201314/cmselect/cmdfence/writev/intervention/int10.htm

[16] MORROW, James D. *Assessing the Role of Trade as a Source of Costly Signals* [online]. January 2003 [cit. 2019-03-11]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/266496563_Assessing_the_Role_of_Trade_as_a_Source_of_Costly_Signals

[17] MAJOR, Claudia and Christian Mölling. *EU Battlegroups. What Contribution to European Defence?* Berlin: German Institute for International and Security Affairs,2011.

[18] NUTTALL, William J., Constantine SAMARAS a Morgan BAZILIAN. *Energy and the Military: Convergence of Security, Economic, and Environmental Decision-Making*. Energy Policy Research Group: EPRG Working Paper 1717 [online]. University of Cambridge, 2017 [cit. 2019-03-21]. Dostupné z: https://www.eprg.group.cam.ac.uk/wp-content/uploads/2017/11/1717-Text.pdf

[19] OWEN, Guillermo. *Game Theory*. Emerald Group Publishing Limited, Bingley: Emerald, 2013. ISBN 978-1-781-90507-4.

[20] PALM, T.P. *Normative Power and Military Means: The evolving character of the EU's international power.* Amsterdam, 2017. PhD Thesis. Vrije Universiteit Amsterdam. Vedoucí práce Crum, B.J.J; Hooghe, E.A.E.B.

[21] PAPASTAVRIDIS, Efthymios. EUNAVFOR Operation Sophia and the International Law of the Sea. *Marine Safety and Security Law Journal* [online]. 2016, (2) [cit. 2019-03-15]. ISSN 2464-9724. Dostupné z: http://www.marsafelawjournal.org/wp-content/uploads/2016/10/Issue2_PAPASTAVRIDIS_Article.pdf

[22] PELEG, Bezalel a Peter SUDHÖLTER. *Introduction to the theory of cooperative games*. Boston: Kluwer Academic Publishers, c2003. ISBN 1-4020-7784-X.

[23] SAAVEDRA-NIEVES, Alejandro. *Package 'GameTheoryAllocation': Tools for Calculating Allocations in Game Theory.* 2016. Dokumentácia dostupná z: https://cran.r-project.org/web/packages/GameTheoryAllocation/GameTheoryAllocation.pdf

[24] SHENGWEI, Lui, Wei WEI Mei a Liu FENG. *On engineering game theory with its application in power systems*. Control Theory and Technology [online]. 2017, 15(1), 1-12 [cit. 2019-03-19].

[25] *SIPRI databases* [online]. © SIPRI 2019, Stockholm International Peace Research Institute [cit. 2019-05-21]. Dostupné z: https://sipri.org/databases

[26] TELLIS, Ashley J. *Measuring national power in the postindustrial age: Measuring military capability (Chapter 7)*. Santa Monica, Calif.: RAND, 2000. ISBN 0833028030.

[27] *Trade Map: Trade statistics for international business development* [online]. © 1999-2018 International Trade Centre [cit. 2019-05-21]. Dostupné z: https://www.trademap.org/Index.aspx

[28] The UN and humanitarian intervention. *The Economist* [online]. 2008 [cit. 2019-03-19]. Dostupné z: https://www.economist.com/international/2008/05/15/to-protect-sovereignty-or-to-protect-lives

[29] TOMOLYA, János1. Operation "Artemis": The First Autonomous EU-led Operation. *Academic and Applied Research in Military and Public Management Science* [online]. 2015, 2015, **14**(1), 121-132 [cit. 2019-03-17]. Dostupné z: https://folyoiratok.uni-nke.hu/document/uni-nke-hu/aarms-2015-1-tomolya.original.pdf

[30] TRAYNOR, Ian. Libya conflict: EU awaits UN approval for deployment of ground troops. *The Guardian* [online]. 2011 [cit. 2019-03-17]. Dostupné z: https://www.theguardian.com/world/2011/apr/18/libya-conflict-eu-deployment-ground-troops

[31] United Nations. *United Nations System: Statistics* [online]. © 2016 Chief Executives Board Secretariat [cit. 2019-05-21]. Dostupné z: https://www.unsceb.org/content/FS-F00-01

[32] United Nations Support Mission in Libya: Mandate. *UN Missions* [online]. [cit. 2019-03-17]. Dostupné z: https://unsmil.unmissions.org/mandate

[33] VAN DEN BRINK, René a Robert P. GILLES. Axiomatizations of the Conjunctive Permission Value for Games with Permission Structures. *Games and Economic Behavior* [online]. 1996, **12**(1), 113-126 [cit. 2019-02-14]. DOI: 10.1006/game.1996.0008. ISSN 08998256. Dostupné z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0899825696900081

[34] VAN DEN BRINK, René. Axiomatizations of Banzhaf permission values for games with a permission structure. *International Journal of Game Theory* [online]. 2010, **39**(3), 445-466 [cit. 2019-03-21]. DOI: 10.1007/s00182-009-0221-2. ISSN 0020-7276. Dostupné z: http://link.springer.com/10.1007/s00182-009-0221-2

[35] VAN DEN BRINK, René. *Games with a Permission Structure: a survey on generalizations and applications.* Tinbergen Institute Discussion Paper [online]. Tinbergen Institute, 2017, 40 s. [cit. 2019-03-02]. Dostupné z: https://papers.tinbergen.nl/17016.pdf

[36] VEGA-REDONDO, Fernando. Theoretical framework. *Economics and the theory of games* [online]. New York: Cambridge University Press, 2003, s. 1-29 [cit. 2018-11-03]. ISBN 0521775906. Dostupné z: https://pdfs.semanticscholar.org/6ce5/f59d7d2ca0bec193a011acea005ada9cc923.pdf

[37] VON NEUMANN, John and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior* [online]. 1944. [cit. 2019-02-02].

[38] WALT, Stephen M. *The origins of alliances* 1987, Ithaca: Cornell University Press, 1987. Cornell studies in security affairs. ISBN 0-8014-9418-4.

ZOZNAM TABULIEK

ZOZNAM OBRÁZKOV

ZOZNAM PRÍLOH

A PRÍLOHY

A.1 Hrubé dáta

Aby bolo možné spočítať hodnoty charakteristickej funkcie pre jednotlivé koalície, najskôr je potrebné zozbierať dáta pre jednotlivé premenné vo vyjadrenej charakteristickej funkcii 3.1. V nasledujúcich tabuľkách sú uvedené použité dáta.

aktér	operácia	rok	VV (EUR)	VV/HDP $[10^{-2}]$	VP	BG
DE	Artemis	2003	31060000000	1.4	284500	0
FR	Artemis	2003	40684000000	2.48	360400	0
GB	Artemis	2003	42518840579.71	2.31	212600	0
IT	Artemis	2003	26795000000	1.93	454300	0
EU	Artemis	2003	47000000	0.05		0
OSN	Artemis	2003	2134580000	8.8	-	0
Kongo	Artemis	2003	69697340.67	0.88	97800	0
DE	Kongo	2008	32824000000	1.28	244000	0.5
FR	Kongo	2008	45063000000	2.26	353000	0.5
GB	Kongo	2008	45538750000	2.28	160000	0.25
IT	Kongo	2008	28156000000	1.73	436000	0
EU	Kongo	2008	285250000	0.25	4000	0
OSN	Kongo	2008	5483584800	14.85	-	0
Kongo	Kongo	2008	109869755.34	8.33	151000	0
DE	Líbya	2011	34630000000	1.28	196000	0.25
FR	Líbya	2011	46471000000	2.26	332250	0.5
GB	Líbya	2011	43227586206.9	2.31	165650	0.25
IT	Líbya	2011	27429000000	1.68	367550	0.5
EU	Líbya	2011	276840000	0.22	4220	0
OSN	Líbya	2011	5831772100	15.1	-	0
Líbya	Líbya	2011	-	-	-	-
DE	Sophia	2015	35899000000	1.18	177300	0.25
FR	Sophia	2015	49902000000	2.27	306350	0.25
GB	Sophia	2015	48023287671.23288	1.89	152350	0
IT	Sophia	2015	22808168000	1.380	356850	0.25
EU	Sophia	2015	320770000	0.22	4500	0
OSN	Sophia	2015	7970834690	14.00	-	0
Líbya	Sophia	2015	1963861573.685164	20.20	7000	0

aktér	operácia	rok	IZ - export aktéra $[10^4]$	IZ - svet export $[10^4]$	IZ - import krajiny konfliktu $[10^4]$	mena
DE	Artemis	2003	11325801	768241877	110459	USD
FR	Artemis	2003	9410536	768241877	110459	USD
GB	Artemis	2003	25714217	768241877	110459	USD
IT	Artemis	2003	6397042	768241877	110459	USD
EU	Artemis	2003	100048941	768241877	110459	USD
OSN	Artemis	2003	0	768241877	110459	USD
Kongo	Artemis	2003	0	768241877	110459	USD
DE	Kongo	2008	37529819	2827627333	402143	USD
FR	Kongo	2008	30141679	2827627333	402143	USD
GB	Kongo	2008	62694618	2827627333	402143	USD
IT	Kongo	2008	25015708	2827627333	402143	USD
EU	Kongo	2008	389031278	2827627333	402143	USD
OSN	Kongo	2008	0	2827627333	402143	USD
Kongo	Kongo	2008	0	2827627333	402143	USD
DE	Líbya	2011	36696188	3249684440	851053	USD
FR	Líbya	2011	26623973	3249684440	851053	USD
GB	Líbya	2011	66058612	3249684440	851053	USD
IT	Líbya	2011	24917682	3249684440	851053	USD
EU	Líbya	2011	402677662	3249684440	851053	USD
OSN	Líbya	2011	0	3249684440	851053	USD
Líbya	Líbya	2011	-	-	-	-
DE	Sophia	2015	29864510	1822446009	1066518	USD
FR	Sophia	2015	14599804	1822446009	1066518	USD
GB	Sophia	2015	32985991	1822446009	1066518	USD
IT	Sophia	2015	14681844	1822446009	1066518	USD
EU	Sophia	2015	268499061	1822446009	1066518	USD
OSN	Sophia	2015	0	1822446009	1066518	USD
Líbya	Sophia	2015	0	1822446009	1066518	USD

aktér	operácia	rok	IK $[10^4]$	IC $[10^4]$	EK $[10^4]$	EC $[10^4]$	mena
DE	Artemis	2003	66277	965102	12766	1090493	USD
FR	Artemis	2003	120527	965102	31489	1090493	USD
GB	Artemis	2003	13248	965102	17340	1090493	USD
IT	Artemis	2003	26329	965102	11876	1090493	USD
EU	Artemis	2003	435224	965102	835124	1090493	USD
OSN	Artemis	2003	0	965102	0	1090493	USD
Kongo	Artemis	2003	0	965102	0	1090493	USD
DE	Kongo	2008	123167	3932978	14214	3748403	USD
FR	Kongo	2008	183801	3932978	57083	3748403	USD
GB	Kongo	2008	26260	3932978	8118	3748403	USD
IT	Kongo	2008	33253	3932978	11876	3748403	USD
EU	Kongo	2008	1094978	3932978	1113570	3748403	USD
OSN	Kongo	2008	0	3932978	0	3748403	USD
Kongo	Kongo	2008	0	3932978	0	3748403	USD
DE	Líbya	2011	458604	7192244	2769199	18714735	USD
FR	Líbya	2011	316378	7192244	2779310	18714735	USD
GB	Líbya	2011	138523	7192244	668516	18714735	USD
IT	Líbya	2011	848939	7192244	5529960	18714735	USD
EU	Líbya	2011	2837592	7192244	14480553	18714735	USD
OSN	Líbya	2011	0	7192244	0	18714735	USD
Líbya	Líbya	2011	-	-	-	-	-
DE	Sophia	2015	399136	12931815	1331177	11615910	USD
FR	Sophia	2015	764199	12931815	941524	11615910	USD
GB	Sophia	2015	161518	12931815	103886	11615910	USD
IT	Sophia	2015	1649055	12931815	3793777	11615910	USD
EU	Sophia	2015	4755566	12931815	8316122	11615910	USD
OSN	Sophia	2015	0	12931815	0	11615910	USD
Líbya	Sophia	2015	0	12931815	0	11615910	USD

Dáta pre ekonomické premenné bolo potrebné prepočítať na eurá. Pri prepočtoch boli použité priemerné hodnoty výmenného kurzu za konkrétny rok.

rok	ISO kód meny	výmenný kurz
2003	GBP	0.69
2003	USD	1.2658
2003	CDF	457.8080
2008	GBP	0.8
2008	USD	1.3889
2008	CDF	814.473
2011	GBP	0.87
2011	USD	1.2987
2015	GBP	0.73
2015	USD	1.0989
2015	LYD	1.5178

Okrem ekonomických údajov je potrebné spracovať aj dáta v premenných VV, VP. Ostatné premenné zo svojej podstaty (resp. EZ a BG pretože boli tak zkonštruované) nadobúdajú hodnoty z intervalu $< 0, 1 >$ a sú s VV a VP v additívnom vzťahu (viď. 3.1). Keby sme VV a VP neprepočítali, tak by VV úplne dominovala modelu a všetky ostatné faktory by prestávali zohrávať rolu, keďže by prinášali len nepatrné navýšenie hodnoty charakteristickej funkcie. Znormalizujeme ich, aby nadobúdali hodnoty z intervalu $< 0, 1 >$, podstata toho, čo chceme povedať sa tým nestratí. To isté platí o VP a zvolíme rovnaký postup.
V nasledujúcej tabuľke sú uvedené dáta po vyššie popísanom spracovaní, z ktorých výpočet hodnôt charakteristickej funkcie pre jednotlivých hráčov vychádzal.

aktér	rok	VV	VV/HDP $[10^{-2}]$	VP	IK	IC	EK	EC	IZ $[10^{-2}]$	BG
DE	03	0.62	1.4	0.62	0.5236	7.62	0.1009	8.62	2.98	0
FR	03	0.82	2.48	0.80	0.9522	7.62	0.2488	8.62	2.48	0
GB	03	0.85	2.31	0.46	0.1047	7.62	0.1370	8.62	6.72	0
IT	03	0.54	1.93	1	0.2080	7.62	0.0938	8.62	1.69	0
EU	03	0.001	0.05	0	3.4383	7.62	6.5975	8.62	26.07	0
OSN	03	0.04	8.8	0	0	7.62	0	8.62	0.02	0
Kongo	03	0.001	0.88	0.21	0	7.62	0	8.62	0.03	0
DE	08	0.66	1.28	0.53	0.8868	28.32	0.1023	26.99	2.68	0.5
FR	08	0.90	2.26	0.78	1.3234	28.32	0.4110	26.99	2.16	0.5
GB	08	0.91	2.28	0.35	0.1891	28.32	0.0584	26.99	4.46	0.25
IT	08	0.56	1.73	0.96	0.2394	28.32	0.0855	26.99	1.8	0
EU	08	0.006	2.5	0	7.8838	28.32	8.0177	26.99	0.28	0
OSN	08	0.11	14.85	0	0	28.32	0	26.99	0.03	0
Kongo	08	0.002	8.33	0.33	0	28.32	0	26.99	0.03	0
DE	11	0.69	1.28	0.43	3.5313	55.38	21.3228	144.10	2.31	0.25
FR	11	0.93	2.26	0.73	2.4361	55.38	21.40	144.10	1.69	0.5
GB	11	0.87	2.31	0.36	1.0666	55.38	5.1476	144.10	4.12	0.25
IT	11	0.55	1.68	0.81	6.5368	55.38	42.5807	144.10	1.59	0.5
EU	11	0.006	0.22	0.001	21.8495	55.38	111.5003	144.10	0.25	0
OSN	11	0.12	0.151	0	0	55.38	0	144.10	0.05	0
Líbya	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DE	15	0.72	1.18	0.39	3.6321	117.68	12.1137	105.70	3.39	0.25
FR	15	1.001	2.27	0.67	6.9542	117.68	8.5679	105.70	1.72	0.25
GB	15	0.96	1.88	0.33	1.4698	117.68	0.9454	105.70	3.74	0
IT	15	0.46	1.38	0.78	15.0064	117.68	34.5234	105.70	1.73	0.25
EU	15	0.006	0.22	0.001	43.2757	117.68	75.6767	105.70	0.30	0
OSN	15	0.16	0.14	0	0	117.68	0	105.70	0.12	0
Líbya	15	0.04	0.20	0.007	0	117.68	0	105.70	0.12	0

Spočítané hodnoty charakteristickej funkcie pre hráčov $1 - 7$ budú použité na dopočítanie hodnôt pre všetky koalície pomocou scriptu uvedeného v prílohe A.1.

A.2 Vybrané časti kódu

V prílohe sú uvedené časti kódu s referenciou na konkrétny vzorec z teoretickej časti práce, ktorý pokrývajú. Algoritmizácia je založená na binárnom vyjadrení príslušnosti resp. neprísluš- nosti hráča ku koalícii. Všetky použité funkcie sú pôvodné, jedine funkcia *Shapley_value* je z knižnice *GameTheoryAllocation*. Súbor s funkciami *funkcie.R* je spoločne s celým kódom a výstupnými súbormi v prílohe A.3.
Program obsahuje jeden veľký cyklus, ktorý prechádza všetky modely a ich priebežné výsledky sú v jednotlivých priebehov zapísané externých súborov ako text a tabuľky. Súbory s výsledkami overenia vlastností charakteristickej funkcie a splnenia axiómov, vyjadrenými hodnotami charakteristickej funkcie po aplikovaní reštrikcie a hodnotou reštrikcie sa tiež nachádzajú v prílohe A.3.

A.2.1 Dopočítanie charakteristickej funkcie

V prílohe A.1 je možné nájsť hrubé dáta, na základe ktorých bola spočítaná hodnota pre hráčov $1-7$ (výsledky v tabuľke 4. Hodnotu charakteristickej funkcie však treba vyjadriť pre všetky koalície, ktoré sa môžu sformovať. Budú dopočítané podľa popisu v kapitole 3.2, podľa formule 3.1.

```
for (i in (1:n2)){
  for (j in (1:n)){
    if (SP_m[i,j] ==1 ) {
      v[i] <- v[i] + values[j]
    }
  }
}

for (i in (1:n2)){
  if(sum(SP_m[i,])>1){
    j<-1
    if (SP_m[i,j]==1){
      v[i]<-v[i]+20
    }
    for (j in (2:3)){
      if (SP_m[i,j]==1){
        v[i]<-v[i]+15
      }
    }
    for (j in (4:7)){
      if (SP_m[i,j]==1){
        v[i]<-v[i]+10
      }
    }
  }
}

for (i in (1:n2)){
  poc<-sum(SP_m[i,])
  v[i]<-v[i]+poc^1.5
}
```

A.2.2 Overenie splnenia vlastností charakteristickej funkcie

Pre každú zostavenú charakteristickú funkciu je potrebné overiť, že spĺňa vlastnosti popísané v kapitole 1.1.1. Výsledky overenia boli v priebehu cyklu zachovávané v premenných z_1 a z_2 a napokon zapísané spoločne s výsledkami overovania vlastností po reštrikcii a axiómov do súboru "vlastnosti_axiomy_cislo prislusneho modelu. txt".

Overenie superadditivity (1.1):

```
ci<-1
for (k in (1:nrow(SP_m))){
  T<-SP_m[k,1:n]
  for (l in (1:nrow(SP_m))){
    if (k!=l){
      S<-SP_m[l,1:n]
      if (disjunkt(S,T)){
        U<-union(n,S,T)
        u<-find_coal(SP_m,U)
        v_T<-v[k]
        v_S<-v[l]
        v_U<-v[u]
        if((v_T+v_S) > v_U){
          ci<-0
          print(l)
          print(k)
          print(u)
          z_1<-("Charakteristicka fce nie je superadditivna")
        }
      }
    }
  }
}
if(ci==1){
  z_1<-("Charakteristicka fce je superadditivna")
}
```

Overenie monotónnosti (1.3):

```
for (k in (1:nrow(SP_m))){
  T<-SP_m[k,]
  for (l in (1:nrow(SP_m))){
    if (k!=l){
      S<-SP_m[l,]
      if(if_subset(S,T)){
        v_T<-v[k]
        v_S<-v[l]
        if (v_S > v_T){
          ci<-0
          z_2<-("Charakteristicka fce nie je monotonna")
        }
      }
    }
  }
}
if(ci==1){
  z_2<-("Charakteristicka fce je monotonna")
}
```

A.2.3 Zavedenie konjunktívnej reštrikcie

Pre zavedenie konjunktívnej reštrikcie je potrebné najskôr vyjadriť množinu všetkých konjunktívnych autonómnych koalícií (2.1), výsledok bude uložený v premennej $Gamma$.

```
# Gamma_H
Gamma<-N
for ( i in (1:(n2-1)) ){
  if(!is.null(nrow(H_NS[[i]]))){

    S<-SP_m[i,]
    H_p<-H_NS[[i]]
    c<-0
    poc<-as.numeric(nrow(H_p))
    for (j in (1:poc)){
      T<-H_p[j,]
      ci<-disjunkt(S,T)
      if (ci){
        c<-c+1
      }
    }
    if (c == nrow(H_p)){
      Gamma<-rbind(Gamma,S)
    }
  } else{
    S<-SP_m[i,]
    H_p<-H_NS[[i]]
    if(disjunkt(S,H_p)){
      Gamma<-rbind(Gamma,S)
    }
  }
}
```

Ďalej je potrebný konjunktívny autorizujúci obal koalícií (2.4) po priebehu cyklu uložený v p_gamma.

```
for (i in (1:n2)){
  mat<-replicate(n,0)
  S<-SP_m[i,]
  ind<-supersets(SP_m,S)
  SP_pom<-SP_m[ind,]
  if(!is.null(nrow(SP_pom))){
    r<-nrow(SP_pom)
  } else {
    r<-1
  }
  if(r==0) {
    mat<-m1
  } else {
    for (j in (1:r)){
      if(r==1){
        Tt<-SP_pom
      } else {
        Tt<-SP_pom[j,]
      }
      if (in_coalition(Gamma,Tt)){
        mat<-rbind(mat,Tt)
      }
    }
  }
  mat<-mat[-c(1),]
  m_gamma[[i]]<-mat
}
```

```
p_gamma<-matrix(nrow=n2, ncol = n)
for (i in (1:n2)){
  pom_m<-m_gamma[[i]]
  if (is.null(nrow(pom_m))){
    p_gamma[i,]<-pom_m
  } else {
    r<-nrow(pom_m)
    S<-pom_m [1,]
    T<-pom_m [2,]
    U<-intersec(S,T)
    if (r == 2){
      p_gamma[i,]<-U
    } else {
      for (j in (3:r)){
        V<-pom_m[j,]
        U<-intersec(U,V)
      }
      p_gamma[i,]<-U
    }
  }
}
```

Reštrikcia sa zavádza podľa vzťahu 2.6.

```
R_H<-replicate(n2,0)
for (i in (1:n2)){
  S<-SP_m[i,]
  sum<-0
  pod_S<-subsets(S)
  riad<-nrow(pod_S)
  if(is.null(riad)){
    riad<-1
  }
  for (l in (1:riad)){
    if(riad==1){
      L<-pod_S
    } else {
      L<-pod_S[l,]
    }
    for (j in (1:nrow(Gamma))){
      T<-Gamma[j,]
      if (if_equal(L,T)){
        sum2<-0
        for (k in (1:n2)){
          K<-p_gamma[k,]
          if(if_equal(K,T)){
            sum2<-sum2+harsan[k]
          }
        }
        sum<-sum+sum2
      }
    }
  }
  R_H[i]<-sum
}
```

A.2.4 Zavedenie disjunktívnej reštrikcie

Najskôr je potrebné vyjadriť množinu vedúcich hráčov (2.16). V matici H_min sú uložené autorizačné cesty pre jednotlivých hráčov.

```
VH<-replicate(n,0)
for(i in (1:n2)){
  H_p<-H_min[[i]]
  r<-row_recount(H_p)
  suma<-0
  if (r==1){
    suma<-sum(H_p)
  } else {
    for (j in (1:r)){
      suma<-suma + sum(H_p[j,])
    }
  }
  if (suma == 0){
    VH<-rbind(VH,SP_m[i,])
  }
}
```

Vyjadríme množinu všetkých disjunktívne autonómnych koalícií (2.17), ktorá bude uložená v premennej *psi_H*.

```
## N\B_H
SP_min<-t(replicate(n2,m1))
for (i in (1:n2)){
  SP_min[i,]<-minus(SP_m[i,],ved_hraci)
}

## H_{-}
H_m_zjed<-replicate(n,0)
for (i in (1:n2)){
  H_p<-H_min[[i]]
  r<-row_recount(H_p)
  if (r>1){
    S<-H_p[1,]
    for (j in (2:r)){
      S<-union(n,S,H_p[j,])
    }
  } else {
    S<-H_p
  }
  H_m_zjed<-rbind(H_m_zjed,S)
}
H_m_zjed<-H_m_zjed[-1,]
```

```
psi_H<-replicate(n,0)
for (i in (1:n2)){
  patri<-TRUE
  V1<-SP_min[i,]
  T<-SP_m[i, ]
  for (j in (1:n)){
    if(V1[j]==1){
      S<-H_m_zjed[j+1,]
      U<-intersec(S,T)
      if (sum(U)==0){
        patri<-FALSE
      }
    }
  }
  if (patri){
    psi_H<-rbind(psi_H,SP_m[i,])
  }
}
w<-row_recount(psi_H)
ind<-0
if(w>1){
  for (i in (1:w)){
    if(sum(psi_H[i,])==0){
      ind<-append(ind,i)
    }
  }
  ind<-ind[2:length(ind)]
  psi_H<-psi_H[-ind,]
}
```

Z množiny všetkých disjunktívne autorizujúcich obalov sa dajú odvodiť 2.20 (v kóde *V_min*) a 2.21 (v kóde *V_str*) potrebné pre spočítanie reštrikcie.

```
# disjunktivny autorizujuci obal
V<- list (m1,m2)
V[[1]]<-replicate(n,0)
for (j in (2:n2)){
  S<-SP_m[j,]
  ind<-supersets(SP_m,S)
  nad<-SP_m[ind,]
  p<-row_recount(nad)
  ind<-0
  for (i in (1:p)){
    if(p==1){
      W<-nad
    } else {
      W<-nad[i,]
    }
    if(in_coalition(psi_H,W)){
      ind<-append(ind, i)
    }
  }
  if(length(ind)>1){
    ind<-ind[2:length(ind)]
  } else {
    nad<-replicate(n,0)
  }
  if(row_recount(nad)==1){
    nad<-nad
  } else {
    nad<-nad[ind,]
  }
  p<-row_recount(nad)
  H_p<-replicate(n,0)
```

```
  for (k in (1:p)){
    if (p==1){
      T<-nad
    } else {
      T<-nad[k,]
    }
    #overovanie podmienky iii)
    UU<-subsets(T)
    if (!is.null(nrow(UU))){
      UU<-UU[-(find_coal(UU,T)),]
    }
    r<-row_recount(UU)
    ind<-0
    for (i in (1:r)){
      if(r==1){
        U<-UU
      } else {
        U<-UU[i,]
      }
      if (in_coalition(psi_H,U)){
        ind<-append(ind,i)
      }
    }
    if(!length(ind)==1){
      ind<-ind[2:length(ind)]
    }
    if(length(ind)==1){
      UU<-UU
    } else {
      UU<-UU[ind, ]
    }
```

```
    if (nad_r == 0){
      nad<-replicate(n,0)
      nad_r<-1
    }
    UU_r<-row_recount(UU)
    if (UU_r == 0){
      UU<-replicate(n,0)
      UU_r<-1
    }

    poc_pod<-0
    for(i1 in (1:nad_r)){
      if (nad_r == 1){
        I1<-nad
      } else {
        I1<-nad[i1,]
      }
      if(in_coalition(UU,I1)){
        poc_pod<-poc_pod+1
      }
    }
    if(poc_pod==0){
      H_p<-rbind(H_p,T)
    }
  }
  if(!is.null(nrow(H_p))){
    H_p<-H_p[-1,]

  }
  V[[j]]<-H_p
}
```

```
V_min<- list (m1,m2)
for (i in (1:n2)){
  S<-SP_m[i,]
  H_p<-replicate(n,0)
  for (j in (1:n2)){
    M_p<-V[[j]]
    if(in_coalition(M_p,S)){
      H_p<-rbind(H_p,SP_m[j,])
    }
  }
  if (!is.null(nrow(H_p))){
    H_p<-H_p[-1,]
  }
  V_min[[i]]<-H_p
}
```

```
# zjednotenia autorizujucich obalov
V_str<- list (m1,m2)
for (i in (1:n2)){
  S<-SP_m[i,]
  H_p<-replicate(n,0)
  for (j in (1:n2)){
    M_p<-V_nova[[j]]
    if(in_coalition(M_p,S)){
      H_p<-rbind(H_p,SP_m[j,])
    }
    if(if_equal(M_p,S)){
      H_p<-rbind(H_p,SP_m[j,])
    }
  }
  if (!is.null(nrow(H_p))){
    H_p<-H_p[-1,]
  }
  ind<-0
  if (row_recount(H_p)>1){
    for (q in (1:nrow(H_p))){
      if (sum(H_p[q,])==0){
        ind<-append(ind,q)
      }
    }
    if (length(ind)>1){
      H_p<-H_p[-ind,]
    }
  }
  V_str[[i]]<-H_p
}
```

Na záver sa všetko prepojí vo vzorci na zavedenie reštrikcie 2.24.

```
B_H<-replicate(n2,0)
B_H[1]<-0
for (i in (2:n2)){
  indd<-0
  pod<-subsets(SP_m[i,])
  ind<-0
  for (j in (1:nrow(pod))){
    U<-pod[j,]
    if(!in_coalition(psi_H,U)){
      ind<-append(ind,j)
    }
  }
  pod<-pod[-ind,]
  M2<-0
  r<-row_recount(pod)
  if (!r==0){
    for (j in (1:r)){
      if(r==1){
        S<-pod
      } else {
        S<-pod[j,]
      }
      index<-find_coal(SP_m,S)
      M_p<-V_min[[index]]
      p<-row_recount(M_p)
      for (k in (1:p)){
        if (p==1){
          T<-M_p
        } else {
          T<-M_p[k,]
        }
        indd<-append(indd,find_coal(SP_m,T))
      }

      M_p<-V_str[[index]]
      p<-row_recount(M_p)
      for (k in (1:p)){
        if (p==1){
          T<-M_p
        } else {
          T<-M_p[k,]
        }
        h<-harsan[find_coal(SP_m,T)]
        pom<-h*mi_w[k,j]
        M2<-M2+pom
      }
    }
  }
  M1<-harsan[unique(indd)]
  B_H[i]<-sum(M1)+M2
}
```

A.2.5 Overenie axiómov

Po vyjadrení reštrikcií sa ešte overuje platnosť axiómov, výsledky sú priebežne uložené do premenných a následne zapísané do súboru "vlastnosti_axiomy_cislo prislusneho modelu.txt".

(i) (2.9)

```
if (round(sum(SH),4) == round(char_fc[n2,n+1],4)){
  z_3<-'Axiom efektivity je splneny'
} else {
  z_3<-'Axiom efektivity nie je splneny'
}
```

(ii) (2.11)

```
for (i in (2:(n+1))){
  H_p<-H[[i]]
  if (is.null(nrow(H_p))){
    r<-1
  } else {
    r<- nrow(H_p)
  }
  for (j in (1:r)){
    S<-H_p[j,]
    index<-find_coal(SP_m,S)
    suma<-suma + char_fc[index,n+1]
  }
  control<-TRUE
  if (suma == 0){
    if (nor[i]==0) {
      if (B_H[i]==0){
        control<-TRUE
      } else {
        control<-TRUE
      }
    } else {
      control<-FALSE
      z_4<-'Model je nespravny'
    }
  } else {
    control<-TRUE
  }
  if (control){
    z_4<-('Axiom slabej vlastnosti nepodstatneho hraca splneny')
  }
```

(iii) (2.12)

```
N<-SP_m[n2,1:n]
for (i in (2:(n+1))){
  T<-SP_m[i,]
  Sp<-subsets(minus(N,T))
  riad<-nrow(Sp)
  if(is.null(riad)){
    riad<-1
  }
  sum<-0
  for (j in (1:riad)){
    S<-Sp[j,]
    ind<-find_coal(SP_m, S)
    sum<-sum+B_H[ind]
  }
  control<-TRUE
  if(sum == 0){
    if(SH[(i-1)]==max(SH)){
      control<-TRUE
    } else {
      control<-FALSE
      z_5<-'Axiom vlastnosti nevyhnutneho hraca nesplneny'
    }
  } else {
    control<-TRUE
  }
  if(control){
    z_5<-'Axiom vlastnosti nevyhnutneho hraca splneny'
  }
}
```

(iv) (2.13)

```
for (i in (2:(n+1))){
  ind<-0
  pom<-H[[i]]
  riad<-row_recount(pom)
  if (riad == 1){
    if (sum(pom)==0){
      ind<-append(ind,1)
    }
  } else {
    for(j in (1:riad)){
      if (sum(pom[j,])==0){
        ind<-append(ind,j)
      }
    }
  }
  if (length(ind)>1){
    ind<-ind[2:length(ind)]
    pom<-pom[-ind,]
  }
  control<-TRUE
  riad<-row_recount(pom)
  if (riad==0){
    control<-TRUE
  } else {
    x1<-0
    x2<-0
    XX<-0
```

```
    if (riad==1){
      ii<-find_coal(SP_m,pom)
      x1<-append(x1,SH[ii-1])
      mat<-H_min[[ii]]
      r<-row_recount(mat)
      for (k in (1:r)){
        if(r==1){
          iii<-find_coal(SP_M,mat)
          x2<-append(x2,SH[[iii-1]])
        } else {
          for (l in (1:r)){
            mat_p<-mat[l,]
            iii<-find_coal(SP_M,mat_p)
            if(iii>1){
              x2<-append(x2,SH[iii-1])
            }
          }
        }
      }
    }
```

```
        } else {
          for (j in (1:riad)){
            ii<- find_coal(SP_m,pom[j,])
            x1<-append(x1,SH[ii-1])
            mat<-H_min[[ii]]
            r2<-row_recount(mat)
            for (k in (1:r2)){
              if(r2==1){
                iii<-find_coal(SP_m,mat)
                x2<-append(x2,SH[[iii-1]])
              } else {
                for (l in (1:r2)){
                  mat_p<-mat[l,]
                  iii<-find_coal(SP_m,mat_p)
                  if(iii>1){
                    x2<-append(x2,SH[iii-1])
                  }
                }
              }
            }
          }

        }
        if (length(x1)>1){
          x1<-x1[2:length(x1)]
        }



      x2<-max(x2)
      if (x2>= max (x1)){
        control<TRUE
      } else {
        z_6<-'Axiom strukturalnej monotonnosti nesplneny'
      }
    }
    if (control){
      z_6<-'Axiom strukturalnej monotonnosti splneny'
    }
  }
```

A.3 CD

- final.R
- funkcie.R
- hodnota_restrikcie_1.xlsx
- hodnota_restrikcie_2.xlsx
- hodnota_restrikcie_3.xlsx
- hodnota_restrikcie_4.xlsx
- restrikcia_1.xlsx
- restrikcia_2.xlsx
- restrikcia_3.xlsx
- restrikcia_4.xlsx
- vlastnosti_axiomy_1.txt
- vlastnosti_axiomy_2.txt
- vlastnosti_axiomy_3.txt
- vlastnosti_axiomy_4.txt