UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aplikace diferenciálních rovnic 1. řádu v ekonomii

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Jana Kolářová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2019

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Jana Kolářová

Název práce: Aplikace diferenciálních rovnic 1. řádu v ekonomii

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2019

Abstrakt: Bakalářská práce se zabývá diferenciálními rovnicemi 1. řádu a jejich aplikacemi v ekonomii. V práci jsou studovány ekonomické modely zabývající se teorií růstu, produkčních funkcí a rovnováhy mezi nabídkou a poptávkou.

Klíčová slova: obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, lineární rovnice, homogenní a nehomogenní úloha, obecné a partikulární řešení, Cobb - Douglasova produkční funkce, nabídka, poptávka

Počet stran: 43

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Jana Kolářová

Title: Applications of the 1st order differential equations in economics

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

The year of presentation: 2019

Abstract: The bachelor thesis deals with the first order differential equations and their applications in economics. In the thesis, the economic models dealing with economic growth, production functions and the equilibrium between supply and demand are studied.

Key words: ordinary differential equations, linear equations, homogenous and nonhomogenous equation, general and particular solution, Cobb - Douglas production function, supply, demand

Number of pages: 43

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní RNDr. Martiny Pavlačkové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala paní RNDr. Martině Pavlačkové, PhD. za odborné vedení mé práce, ochotu, rady a čas, který mi věnovala. Ráda bych také poděkovala své rodině a přátelům, kteří mě v průběhu celého studia velmi podporovali.

Úvod

Jak už je z názvu patrné, v této bakalářské práci se budu zabývat aplikacemi diferenciálních rovnic 1 . řádu v ekonomii. Toto téma mě zaujalo na první pohled, protože ukazuje, jak je možné teoretické poznatky získané o diferenciálních rovnicích využít v praxi.

Důležité je poznamenat, že ekonomie není rozhodně jedinou oblastí, kde se s diferenciálními rovnicemi můžeme setkat. A tak, ačkoli se v této práci budu zabývat aplikacemi v ekonomii, aspoň nastíním, v jakých vědách a odvětvích jsou diferenciální rovnice aplikovány.

Hlavním cílem mé bakalářské práce je prohloubit si znalosti z oblasti diferenciálních rovnic a představit některé významné ekonomické modely, kde se s diferenciálními rovnicemi pracuje. Věřím, že práce bude velmi dobře sloužit všem zájemcům o praktickou ukázku aplikace toho, co se během svého studia naučí pouze teoreticky.

Celá práce bude rozdělena do dvou kapitol, které budou dále děleny na podkapitoly. První kapitola - zaměřená na teorii - shrnuje základní definice a pojmy, které jsou důležité pro pochopení principu tvorby diferenciálních rovnic a pro řešení těchto rovnic. Po nich následují samotné typy diferenciálních rovnic 1. řádu, jako jsou rovnice se separovatelnými proměnnými a lineární diferenciální rovnice. U každého typu je podrobně vysvětlen obecný postup řešení, a také je uveden krátký příklad praktického využití v ekonomii.

Ve druhé kapitole podrobně rozeberu několik důležitých ekonomických modelů. Konkrétně se budu zabývat modely týkající se teorie růstu, produkčních funkcí a rovnováhy mezi nabídkou a poptávkou.

Kapitola 1

Diferenciální rovnice 1. řádu

V mnoha praktických úlohách se pracuje s myšlenkou nalezení funkce, která je popsaná pomocí svých derivací prostřednictvím tzv. *diferenciální rovnice*.

Nemusíme se omezovat pouze na oblast ekonomie. S touto myšlenkou se hojně setkáváme ve fyzice (most zavěšený na laně, vrh tělesem svisle dolů), v chemii (rozpad radioaktivního prvku v čase, tepelná výměna), mechanice, pružnosti, pevnosti, elektrotechnice a např. i v otázkách o růstu populací (logistická rovnice, exponenciální růst populace).

Diferenciální rovnice jsou dnes aplikovány v modelování pohybu a změn ve všech oblastech vědy. Teorie diferenciálních rovnic se stala nutným nástrojem ekonomické analýzy zvláště od doby, kdy se počítače staly běžně dostupnými.

Při tvorbě této úvodní kapitoly byly použity zdroje [1], [2], [5], [7], [8].

1.1. Úvodní motivační příklad

Diferenciální rovnice vyjadřuje hodnotu změny aktuálního stavu jako funkci aktuálního stavu. Jednoduše můžeme tento typ závislosti ilustrovat na hrubém domácím produktu (HDP) v průběhu času.

Uvažujme x jako stav HDP v ekonomii. Hodnota změny HDP je úměrná k současnému HDP, tj.

$$x'(t) = g \cdot x(t), \tag{1}$$

kde t znamená čas, $x'(t)$ je derivace funkce x podle proměnné t a $g = \frac{x'(t)}{x(t)}$ je rychlost (tempo) růstu HDP.

Řešení rovnice (1) lze vyjádřit ve tvaru

$$x(t) = x(0) \cdot e^{g \cdot t} \tag{2}$$

a lze jej ekonomicky interpretovat takto: Pokud je g záporné, HDP exponenciálně klesá, pokud je g kladné, HDP exponenciálně roste.

Je rozumné se domnívat, že míra růstu je v praxi ovlivněna mnoha faktory jako např. aktuálním stavem ekonomického systému, mezinárodním prostředím a mnoho dalšími podmínkami. To znamená, že míra růstu g by měla mít komplikovanější formu $g(x, t)$. Ekonomický růst je pak popsán rovnicí

$$x'(t) = g(x(t), t) \cdot x(t), \tag{3}$$

která obecně není jednoduše explicitně řešitelná.

1.2. Definice základních pojmů

V této části práce si nadefinujeme několik základních pojmů a definic z teorie diferenciálních rovnic, které se budou vyskytovat také ve druhé části této práce.

Definice 1. *Obyčejnou diferenciální rovnicí (stručně ODR, diferenciální rovnicí, DR) 1. řádu s neznámou $x(t)$ rozumíme rovnici tvaru*

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \tag{4}$$

kde F je funkce definovaná na množině $G \subset \mathbb{R}^3$ a $t \in J \subset \mathbb{R}$.

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu můžeme chápat jako rovnice, ve kterých se vyskytují neznámé funkce jedné proměnné a také první derivace těchto funkcí (žádné derivace vyšších řádů). Jejich řešením jsou funkce jedné nezávisle proměnné, kterou obvykle značíme t (ta většinou znamená *čas*). Hledané řešení $x(t)$ v námi uvažovaných případech obvykle značí ekonomickou veličinu, která se mění v čase. Z toho důvodu považujeme $x(t)$ za závisle proměnnou.

Definice 2. *Funkce $x(t)$ je řešením rovnice (4) na intervalu J, jestliže*

- *existuje derivace $x'(t)$ pro všechna $t \in J$,*
- *výraz $F(t, x(t), x'(t))$ je definován pro všechna $t \in J$,*
- *rovnice (4) platí pro všechna $t \in J$.*

Zjednodušeně můžeme říct, že funkce, která vyhovuje dané rovnici na nějakém intervalu, se nazývá řešením obyčejné diferenciální rovnice.

Poznámka 1. *Neexistují pouze obyčejné diferenciální rovnice, ale také parciální diferenciální rovnice. Jaký je mezi nimi rozdíl?*

- *Obyčejné diferenciální rovnice jsou takové rovnice, kde neznámá funkce je funkcí jedné nezávisle proměnné a derivace neznámé funkce je obyčejnou derivací.*
- *Parciální diferenciální rovnice jsou naopak takové rovnice, kde neznámá funkce je funkcí více proměnných a její derivace jsou parciálními derivacemi.*

My budeme pracovat pouze s obyčejnými diferenciálními rovnicemi, proto můžeme vynechat slovo "obyčejný" a říkat pouze "diferenciální rovnice".

Definice 3. *Nechť t_0, x_0 jsou reálná čísla. Počáteční (také Cauchyovou) úlohou nazýváme úlohu najít řešení rovnice (4), které splňuje počáteční podmínku*

$$x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Řešením počáteční úlohy (4), (5) tak rozumíme funkci, která splňuje podmínku (5) a je na nějakém intervalu obsahujícím bod t_0 řešením rovnice (4).

Poznámka 2. *(Obecné a partikulární řešení) Množinu všech řešení diferenciální rovnice (4) nazýváme obecné řešení. Obecné řešení je předpis závisející na parametru C. Volbou tohoto parametru dostaneme jedno konkrétní řešení, které nazýváme partikulární řešení.*
O obecném řešení tedy mluvíme, podaří-li se najít nějaký univerzální vzorec, který obsahuje všechna partikulární řešení.

1.3. Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy

Z předchozí kapitoly již víme, že obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu se implicitně zapíše ve tvaru (4). V některých případech lze z této rovnice osamostatnit první derivaci $x'(t)$ neznámé funkce $x(t)$ a diferenciální rovnice pak bude vyjádřena explicitně ve tvaru

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ t \in J \subset \mathbb{R}. \tag{6}$$

Jaké hlavní problémy nás zajímají v souvislosti s diferenciálními rovnicemi?

- Nejprve nás zajímá, zda má daná počáteční (Cauchyova) úloha řešení.
- Pokud má řešení, tak řešíme, zda je toto řešení určeno jednoznačně.
- Také nás vždy musí zajímat, na jakém intervalu je toto řešení definováno.
- V poslední fázi pak řešíme, jakým způsobem je možné řešení Cauchyovy úlohy nalézt.

Uvažujme tedy Cauchyovu počáteční úlohu v explicitním tvaru, tj. úlohu, kde chceme nalézt řešení problému

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ \quad x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{7}$$

Bude nás zajímat, za jakých podmínek bude mít počáteční úloha řešení a v jakém případě můžeme toto řešení považovat za jednoznačné. Kritéria, podle kterých budeme rozhodovat, nám přinášejí následující věty o podmínkách pro existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy.

Věta 1. *(Existenční) Nechť $f(t, x(t))$ je funkce spojitá na otevřené množině $M = M_1 \times M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak má Cauchyova počáteční úloha (7), kde $(t_0, x_0) \in M$, alespoň jedno řešení definované na nějakém otevřeném intervalu $J \subseteq M_1$.*

Důkaz. Důkaz této věty lze dohledat např. v [2]. □

První věta tedy popisuje, kdy existuje alespoň jedno řešení počáteční úlohy definované na nějakém intervalu. Těchto řešení může být i někonečně mnoho. V následující větě je uvedeno, co garantuje, aby byla zaručena jednoznačnost řešení.

Věta 2. *(O existenci a jednoznačnosti řešení) Nechť $f(t, x(t))$ je spojitá na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a v každém bodě (t_0, x_0) množiny M je splněna lokální Lipschitzova podmínka vzhledem ke 2. proměnné, tj. existuje $L > 0$ tak, že platí*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2| \tag{8}$$

pro každé dva body (t, x_1), (t, x_2) z nějakého okolí U bodu (t_0, x_0). Pak pro libovolný bod $(t_0, x_0) \in M$ má Cauchyova úloha (7) právě jedno řešení.

Důkaz. Důkaz této věty lze dohledat např. v [2]. □

Poznámka 3. *Má-li funkce $f(t, x)$ parciální derivaci podle proměnné x, pak je Lipschitzova podmínka implikována snáze ověřitelnou podmínkou o lokální omezenosti $\frac{\partial f}{\partial x}$.*

1.4. Typy diferenciálních rovnic 1. řádu

Existuje několik různých typů diferenciálních rovnic a každý vyžaduje trochu jiný postup. Jestliže chceme úspěšně řešit diferenciální rovnice, je třeba zejména poznat, jakého typu je daná rovnice, a také znát postup řešení.

Já se ve svém práci zaměřím na dva základní typy diferenciálních rovnic 1. řádu, o kterých se běžně přednáší na vysoké škole.

1.4.1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Separaci proměnných lze provést pouze u tzv. separovatelných rovnic. Separovatelná rovnice je taková rovnice $x'(t) = f(t, x(t))$, jejíž pravou stranu lze vyjádřit jako součin funkcí $g(t) \cdot h(x(t))$, neboli, že lze v rovnici separovat (oddělit) proměnné.

Definice 4. *Diferenciální rovnici, která je ve tvaru*

$$x'(t) = g(t) \cdot h(x(t)), \tag{9}$$

nazýváme obyčejnou diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.

Dále budeme předpokládat, že g a h jsou spojité funkce na nějakých otevřených intervalech a $h(x(t)) \neq 0$ pro každé t z daného intervalu.

Potom je zaručena existence řešení a toto řešení získáme takto:

Namísto $x'(t)$ dosadíme $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ a můžeme psát $\frac{dx(t)}{dt} = g(t)h(x(t))$.

Nyní separujeme proměnné, tedy na jednu stranu dáme všechny členy s x a na druhou stranu všechny zbylé členy a vyjde

$$\frac{dx(t)}{h(x(t))} = g(t)\,dt. \tag{10}$$

Celý tento vztah zintegrujeme:

$$\int \frac{dx(t)}{h(x(t))} = \int g(t)\,dt. \tag{11}$$

Výraz $\frac{1}{h(x(t))}$ integrujeme podle $x(t)$ a obecně vyjde primitivní funkce $H(x(t))$. Funkci $g(t)$ integrujeme podle t a obecně vyjde primitivní funkce $G(t)$. Rovnici tak můžeme přepsat takto:

$$H(x(t)) + c_1 = G(t) + c_2, \tag{12}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou integrační konstanty. Ještě přesuneme konstanty na jednu stranu a napíšeme je jako jednu novou integrační konstantu c, tj.

$$H(x(t)) = G(t) + c. \tag{13}$$

Celý postup jsme provedli za předpokladu, že $h(x(t)) \neq 0$, protože v (11) jsme dělili touto funkcí $h(x(t))$. Musíme tedy vyšetřit, co se stane, pokud $h(x(t)) = 0$. V takovém případě dělení provést nemůžeme a do rovnice (9) dosadíme $h(x(t)) = 0$.

Pokud má rovnice $h(x(t)) = 0$ nějaké řešení $x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ (tedy $x(t)$ je na celém intervalu konstantní s hodnotou x_0), potom je konstatní funkce $x(t) = x_0$ řešením rovnice (9). To můžeme dokázat, když do (9) dosadíme:

$$x'(t) = g(t) \cdot h(x(t))$$

Místo $x(t)$ dosadíme x_0

$$x_0' = g(t) \cdot h(x_0(t))$$

Derivace konstanty (x_0) je 0 :

$$0 = g(t) \cdot 0 = 0$$

Všechny nulové body funkce h nám tedy určují konstatní řešení diferenciální rovnice.

Za obecné řešení rovnice (9) budeme považovat obecné řešení (13), které doplníme o nulové body (body, které splňují rovnici $h(x(t)) = 0$).

Jeden z možných příkladů využití separovatelných rovnic v praxi je v modelech učení.

Příklad 1. *Jakmile zaměstnanec nastoupí na novou pozici, musí se nejprve mnoho věcí naučit. Musí se seznámit s novým prostředím, vybavením i činnostmi, které se po něm budou požadovat. Každý zaměstnanec se novou práci naučí za různě dlouhou dobu. Zaměstnavatelé proto pro nové zaměstnance organizují školení.*

Předpokládejme, že $q(t) \in \langle 0, 1 \rangle$ *představuje relativní množství činností a informací, které již zaměstnanec v čase* t *na novém místě ovládá. Nyní budeme uvažovat časový interval délky* $\tau > 0$*, po který se nový zaměstnanec učí nové informace. Budeme předpokládat lineární závislost, tedy čím delší je interval, tím více látky se zaměstnanec naučí. Zároveň také čím déle se činnost učí, tím méně mu ještě zbývá se naučit, bude tedy platit nepřímá úměrnost a množství, které zbývá ještě se naučit vyjádříme jako* $1 - q(t)$*.*

Nyní vyjádříme relativní množství nově naučených informací od času t *do času* $t + \tau$

$$q(t + \tau) - q(t) = \tau \cdot (1 - q(t)) \cdot k, \tag{14}$$

kde $k > 0$ je nějaká konstanta úměrnosti. Vztah vlastně říká, že čím delší je rozestup mezi časy t a $t+\tau$, tím víc se toho zaměstnanec už naučil a množství, které mu zbývá se naučit, je menší. Aby se v rovnici (14) objevila derivace, musíme ji celou vydělit τ, protože proměnná vzrostla z t na hodnotu $t+\tau$:

$$\frac{q(t+\tau)-q(t)}{\tau} = (1-q(t)) \cdot k \tag{15}$$

a pro $\tau \to 0$ získáme diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými ve tvaru

$$q'(t) = (1-q(t)) \cdot k. \tag{16}$$

K ní ještě budeme uvažovat počáteční podmínku ve tvaru

$$q(0) = q_0, \tag{17}$$

kde $q_0 \in \langle 0, 1\rangle$ vyjadřuje množství znalostí, kterými zaměstnanec disponuje v čase 0.

Při řešení této rovnice využijeme obecného postupu, který je popsán o několik stran dříve. Nejprve si $q'(t)$ napíšeme jako $\frac{dq(t)}{dt}$ a dosadíme do vztahu (16), tj.

$$\frac{dq(t)}{dt} = (1-q(t)) \cdot k. \tag{18}$$

Poté opět budeme mít na jedné straně členy s $q(t)$ a na druhé všechny ostatní:

$$\int \frac{dq(t)}{(1-q(t))} = \int k\, dt$$

$$-\ln|(1-q(t))| = k \cdot t + C$$

$$\ln|(1-q(t))| = -k \cdot t - C$$

$$(1-q(t)) = e^{-k\cdot t} \cdot e^{-C}$$

A odsud už snadno získáme $q(t)$ jako

$$q(t) = 1 - e^{-k\cdot t} \cdot e^{-C}$$

Získaný vztah upravíme tak, že si konstantu e^{-C} označíme jako K a můžeme tak psát

$$q(t) = 1 - K \cdot e^{-k \cdot t}. \tag{19}$$

Zbývá nám ještě vyjádřit konstantu K. Využijeme toho, že platí $q(0) = q_0$, a tak dosadíme do (19) počáteční čas $t = 0$ a vznikne rovnice

$$q(0) = 1 - K \cdot e^{-k \cdot 0} = q_0,$$

ze které vyjádříme vzorec pro výpočet parametru K pomocí počátečního množství znalostí q_0:

$$1 - K = q_0$$

$$K = 1 - q_0$$

A výsledný vztah pro K dosadíme do (19) a získáme už konečné řešení počáteční úlohy

$$q(t) = 1 - (1 - q_0) \cdot e^{-k \cdot t}, t \geq 0 \tag{20}$$

Poznámka 4. *Speciální případ rovnice se separovanými proměnnými, kde na pravé straně není nezávisle proměnná, nazýváme autonomní rovnicí. Je to rovnice typu*

$$x'(t) = h(x(t)) \tag{21}$$

a setkáváme se s ní např. v aplikacích v biologii nebo technice. Tato rovnice má všechny vlastnosti diferenciálních rovnic, ale navíc má ještě jednu důležitou vlastnost - omezená řešení se pro $t \to \infty$ a pro $t \to -\infty$ v limitě blíží k některému z konstantních řešení. Jinou významnou vlastností je také to, že pokud je funkce $x(t)$ řešením autonomní rovnice, pak je také funkce $x(t + c)$, kde $c \in \mathbb{R}$, řešením autonomní rovnice. Prakticky to znamená, že když proměnnou t uvažujeme jako čas, tak nezáleží na začátku měření času.

1.4.2. Lineární diferenciální rovnice (LDR)

Lineární diferenciální rovnicí 1. řádu budeme nazývat diferenciální rovnici ve tvaru

$$x'(t) + p(t) \cdot x(t) = f(t) \tag{22}$$

Hlavním znakem, jak rozlišit, že se jedná o lineární diferenciální rovnici prvního řádu, je to, že $x'(t)$ stojí samostatně, tedy není v součinu ani podílu s $x(t)$, $x(t)$ je v první mocnině (proto lineární) a $x(t)$ je jen v první derivaci (proto prvního řádu).

Poznámka 5. *Jestliže $f(t) \equiv 0$, tj. je-li rovnice (22) ve tvaru*

$$x'(t) + p(t) \cdot x(t) = 0, \tag{23}$$

nazýváme ji homogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu. Jinak jí říkáme nehomogenní lineární rovnice.

Lineární diferenciální rovnice má některé zajímavé vlastnosti. Jednu z nich popisuje následující věta.

Věta 3. *Nechť funkce p(t) a f(t) jsou spojité na intervalu J. Nechť dále $t_0 \in J$ a $x_0 \in R$. Pak počáteční problém*

$$\begin{cases} x'(t) + p(t) \cdot x(t) = f(t), \\ \hfill x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

má právě jedno řešení $x = x(t)$, které existuje na celém intervalu J.

Poznámka 6. *Lineární diferenciální rovnice 1. řádu mají zajímavé vlastnosti, díky kterým jsou velmi důležité, protože na řešení lineárních rovnic lze převést významné praktické problémy (chemické reakce, radioaktivní rozpad, množení bakterií,...), případně můžeme jiné typy rovnic převést na lineární, a poté vyřešit jednodušeji.*

Metoda variace konstanty

Nyní si uvedeme nejznámější a nejpoužívanější metodu řešení lineárních diferenciálních rovnic.

1. Nejprve ověříme spojitost funkcí f a p. Poté řešíme separací proměnných homogenní úlohu k zadané úloze (dosadíme $f(t) \equiv 0$)

$$x'(t) + p(t) \cdot x(t) = 0,$$

což je separovatelná rovnice, a proto budeme separovat každou proměnnou zvlášť na jednu stranu a poté zintegrujeme:

$$x'(t) = -p(t) \cdot x(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -p(t) \cdot x(t)$$

$$\frac{1}{x(t)}\, dx(t) = -p(t)\, dt$$

$$\int \frac{1}{x(t)}\, dx(t) = -\int p(t)\, dt$$

$$\ln|x(t)| = -\int p(t)\, dt + C$$

Obecné řešení homogenní úlohy je tedy ve tvaru

$$\left[\begin{array}{r} x(t) = K \cdot e^{-\int p(t)\, dt}, \qquad\qquad \\ K \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \end{array}\right]$$

2. Obecné řešení nehomogenní rovnice bude v tomtéž tvaru jako u homogenní úlohy, pouze konstantu K budeme uvažovat jako funkci proměnné t, tedy $K = K(t)$.

$$\left[\begin{array}{r} x(t) = K(t) \cdot e^{-\int p(t)\, dt}, \\ t \in \mathbb{R} \end{array}\right]$$

Toto obecné řešení dosadíme do nehomogenní rovnice $x'(t)+p(t)\cdot x(t) = f(t)$ a vyjádříme si neznámou funkci $K'(t)$.

$$\left(K(t) \cdot e^{-\int p(t)\, dt}\right)' + p(t) \cdot K(t) \cdot e^{-\int p(t)\, dt} = f(t)$$

$$K'(t) \cdot e^{-\int p(t)\, dt} + K(t) \cdot e^{-\int p(t)\, dt} \cdot (-p(t)) + p(t) \cdot K(t) \cdot e^{-\int p(t)\, dt} = f(t)$$

$$K'(t) \cdot e^{-\int p(t)\, dt} = f(t)$$

$$K'(t) = e^{\int p(t)\, dt} \cdot f(t)$$

3. Chceme získat vztah pro $K(t)$, proto $K'(t)$ zintegrujeme

$$\int K'(t)\,dt = \int e^{\int p(t)\,dt} \cdot f(t)\,dt$$

$$K(t) = \int e^{\int p(t)\,dt} \cdot f(t)\,dt$$

Obecné řešení nehomogenní úlohy je rovno součtu obecného řešení příslušné homogenní rovnice a partikulárního řešení dané rovnice nehomogenní:

$$x(t) = \left(\int e^{\int p(t)\,dt} \cdot f(t)\,dt + K \right) \cdot e^{\int -p(t)\,dt}$$

$$\left[\begin{array}{r} x(t) = K \cdot e^{\int -p(t)\,dt} + \int f(t)\,dt, \\ K \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right]$$

Lineární rovnice nachází velké uplatnění v praxi. Já zde uvedu jeden jednoduchý příklad, který popisuje aplikaci diferenciálních rovnic u spojitého úročení.

Příklad 2. *Ze života známe pojem úročení. Když si od banky půjčíme peníze (úvěr), nesplatíme jí jen půjčenou částku, ale také úrok. Pokud si tedy např. půjčíme od banky 100 000 Kč s úrokovou mírou 1% p.a. na dobu 1 roku, tak za rok vrátíme bance půjčenou částku 100 000 Kč a navíc ještě 0,01·100 000=1000 Kč. Celkově tedy bance vrátíme 101 000 Kč.*

Již v předmětu Finanční matematika 1, případně ve finanční gramotnosti na středních školách se studenti setkávají s typem úročení, kdy se peníze připisují klientovi na účet pravidelně po určitou dobu. Celková připsaná částka se pak vyjadřuje pomocí geometrické posloupnosti. Na některých účtech dochází k připisování částky každý den a někdy je teoreticky možné to zjednodušit na situaci, kdy připisujeme peníze na účet každým okamžikem. Tento typ úročení pak nazýváme spojité úročení.

Pro detailnější popis spojitého úročení budeme předpokládat konstantní úrokovou míru $i \in \langle 0, 1 \rangle$. Zvolíme si základní okamžik v čase $t \in \langle 0, \infty)$, kterým může být např. začátek roku. V čase t je na účtu nějaká částka $B(t) > 0$. Dále budeme *uvažovat krátký časový interval, který uplyne od základního okamžiku* t*, označíme si jeho délku* $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$*. V čase* $t + \tau$ *se na účet připíše úrok ve výši*

$$B(t) \cdot i \cdot \tau.$$

S částkou, která byla na účtu na začátku roku, tak bude hodnota peněz na účtu

$$B(t + \tau) = B(t) + B(t) \cdot i \cdot \tau. \tag{24}$$

Po úpravách rovnice (24)

$$\frac{B(t + \tau) - B(t)}{\tau} \cdot \frac{1}{B(t)} = i \tag{25}$$

a uplatněním vztahu

$$B'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{B(t + \tau) - B(t)}{\tau}$$

můžeme rovnici (25) *přepsat pro* $\tau \to 0$ *do tvaru*

$$\tfrac{B'(t)}{B(t)} = i, \quad B(0) = A, \tag{26}$$

kde $A > 0$ *je hodnota vkladu B(t) v čase* 0*.*

Získali jsme počáteční úlohu pro homogenní lineární diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných:

$$B'(t) = i \cdot B(t)$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = i \cdot B(t)$$

$$\frac{1}{B(t)}\, dB(t) = i\, dt$$

$$\int \frac{1}{B(t)}\, dB(t) = \int i\, dt$$

$$ln\, |B(t)| = it + C$$

$$B(t) = e^{i \cdot t + C}$$

$$B(t) = e^{i \cdot t} \cdot e^C$$

Z počáteční podmínky (26) *lze snadno odvodit, že* $e^C = A$, *neboť*

$$B(0) = e^{i \cdot 0} \cdot e^C$$

$$A = B(0) = e^C.$$

A proto má Cauchyova úloha jediné řešení ve tvaru

$$\begin{bmatrix} B(t) = A \cdot e^{i \cdot t}, & \\ \quad t \in \langle 0, \infty) & \end{bmatrix} \tag{27}$$

Hodnotu $B(t)$ *můžeme interpretovat jako budoucí hodnotu počátečního vkladu* A *v čase* t.

Nyní si ukážeme, že nehomogenní lineární diferenciální rovnice se vyskytují např. v ekonomických aplikacích zabývajících se nabídkou a poptávkou po určitém produktu.

Příklad 3. *Nechť* p *je jednotková cena a nechť* $D(p)$ *a* $S(p)$ *jsou funkce popisující poptávku, resp. nabídku po určitém produktu (při ceně* p*).*
Z ekonomické interpretace těchto funkcí je zřejmé, že funkce D *musí být nerostoucí a funkce* S *neklesající. V nejjednodušším případě jsou jejich funkční předpisy ve tvaru*

$$\begin{aligned} D(p) &= \max\{0, a_1 - b_1 \cdot p\} \\ S(p) &= \max\{0, -a_2 + b_2 \cdot p\}, \end{aligned} \tag{28}$$

kde $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$.
Trh se dostane do rovnováhy, pokud se poptávka vyrovná nabídce, tzn.

$$D(p^*) = S(p^*), \tag{29}$$

kde p^* *nazýváme rovnovážná cena.*
Dosazením vztahů (28) *do vztahu* (29) *můžeme snadno určit hodnotu rovnovážné ceny* p^*

$$a_1 - b_1 \cdot p^* = -a_2 + b_2 \cdot p^*$$

$$a_1 + a_2 = (b_2 + b_1) \cdot p^*$$

$$p^* = \frac{a_1 + a_2}{b_2 + b_1}. \tag{30}$$

Dojde-li k odchýlení aktuální ceny p od rovnovážné ceny p^*, dochází k převisu poptávky nad nabídkou (nebo nabídky nad poptávkou). V takovém případě se tržní cena mění v závislosti na rozdílu mezi poptávkou a nabídkou a v nejjednodušších modelech je tato závislost lineární, tj.

$$p'(t) = \alpha \cdot (D(p(t)) - S(p(t))).$$

Je-li $p(t) \in \left\langle \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1} \right\rangle$, pak lze dosadit konkrétní funkční předpisy

$$p'(t) = \alpha \cdot (a_1 - b_1 \cdot p(t) + a_2 - b_2 \cdot p(t)).$$

Roznásobením a vhodným přeuspořádáním členů v rovnici

$$p'(t) = -\alpha \cdot (b_1 + b_2) \cdot p(t) + \alpha \cdot (a_1 + a_2)$$

získáme nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu

$$p'(t) + \alpha \cdot (b_1 + b_2) \cdot p(t) = \alpha \cdot (a_1 + a_2), \tag{31}$$

kterou lze vyřešit metodou variace konstant.
Nejprve si vytvoříme příslušnou homogenní rovnici

$$p'(t) + \alpha \cdot (b_1 + b_2) \cdot p(t) = 0, \tag{32}$$

kterou vyřešíme separací proměnných:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\alpha \cdot (b_1 + b_2) \cdot p(t)$$

$$\frac{1}{p(t)}\, dp(t) = -\alpha \cdot (b_1 + b_2)\; dt$$

$$\int \frac{1}{p(t)}\, dp(t) = \int -\alpha \cdot (b_1 + b_2)\; dt$$

$$\ln|p(t)| = -\alpha \cdot (b_1 + b_2) \cdot t + c$$

$$p(t) = e^{-\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t + c},$$

kde $c \in \mathbb{R}$ *je integrační konstanta. Označíme-li si* $e^c = K$*, pak lze psát*

$$p(t) = e^{-\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} \cdot K. \tag{33}$$

Nyní provedeme variaci konstanty, tedy $K = K(t)$*:*

$$p(t) = e^{-\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} \cdot K(t) \tag{34}$$

Toto zderivujeme

$$p'(t) = e^{-\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} \cdot (-\alpha \cdot (b_1 + b_2)) \cdot K(t) + e^{-\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} \cdot K'(t).$$

Dosadíme-li do (31)*, získáme*

$$e^{-\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} \cdot (-\alpha \cdot (b_1 + b_2)) \cdot K(t) + e^{-\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} \cdot K'(t) + \alpha \cdot (b_1 + b_2) \cdot e^{-\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} \cdot K(t) =$$

$$= \alpha \cdot (a_1 + a_2)$$

A po úpravách

$$e^{-\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} \cdot K'(t) = \alpha \cdot (a_1 + a_2)$$

vyjádříme $K'(t)$

$$K'(t) = e^{\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} \cdot \alpha \cdot (a_1 + a_2),$$

které budeme integrovat:

$$K(t) = \int e^{\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} \cdot \alpha \cdot (a_1 + a_2) \, dt$$

$$K(t) = \frac{\alpha \cdot (a_1 + a_2)}{\alpha \cdot (b_1 + b_2)} \cdot e^{\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} + K,$$

kde $C \in \mathbb{R}$*. Využijeme toho, co platí v rovnici* (30) *a můžeme psát*

$$K(t) = p^* \cdot e^{\alpha \cdot (b_1+b_2) \cdot t} + K.$$

Dosadíme K(t) do (34) a využijeme toho, že obecné řešení nehomogenní rovnice (31) lze vyjádřit jako součet obecného řešení příslušné homogenní rovnice (32) a partikulárního řešení nehmogenní úlohy (31):

$$p(t) = e^{-\alpha\cdot(b_1+b_2)\cdot t} \cdot p^* \cdot e^{\alpha\cdot(b_1+b_2)\cdot t} + K \cdot e^{-\alpha\cdot(b_1+b_2)\cdot t}$$

$$p(t) = p^* + K \cdot e^{-\alpha\cdot(b_1+b_2)\cdot t},$$

kde $C \in \mathbb{R}$*. Pro* $t \to +\infty$ *platí, že* $\lim_{t\to+\infty} p(t) = p^*$*. Z toho plyne, že se cena se zvyšujícím se časem blíží rovnovážné ceně, což jsme očekávali.*

Kapitola 2

Aplikace v ekonomii

Druhá kapitola mé bakalářské práce bude již zaměřená na podrobnější popis některých ekonomických modelů, ve kterých se pracuje s diferenciálními rovnicemi.

Oblastí, ve které lze hojně aplikovat diferenciální rovnice, jsou makroekonomické modely. Makroekonomie je oblast ekonomie, která zkoumá ekonomiku jako celek. Lze tedy rozlišit ekonomiku regionální, národní nebo globální. Je to opak vůči mikroekonomii, která se zabývá ekonomikou firem. V této kapitole jsem čerpala z [3], [4], [6], [7].

2.1. Harrodův - Domarův model ekonomického růstu

Mezi nejznámější modely hospodářského růstu patří model R. Harroda a E. Domara, pojmenovaný po následovnících J. M. Keynese, významného světového ekonoma, zakladatele keynesiánství. Keynesiánství lze jednoduše definovat jako ekonomický směr, který nepovažuje státní zásahy do veřejné ekonomické sféry jako něco špatného a omlouvá je. Je to protipól klasické a neoklasické ekonomie.

V ekonomii lze uvažovat tři ekonomické ukazatele, které jsou závislé na čase - produkci $P = P(t)$, kapitál $K = K(t)$ a investice $I = I(t)$. Proč jsou to zrovna tyto tři ukazatele, lze vysvětlit takto: Aby subjekt prosperoval, musí něco produkovat. Produkovat může ale jen tehdy, vlastní-li kapitál. Kapitál zde tvoří jak peníze, tak také dlouhodobý hmotný majetek jako např. stroje, budovy nebo zařízení. A žádný subjekt se neobejde bez investic, protože kapitál postupem času zastarává nebo přestává fungovat a musí se obnovovat nebo úplně nahradit novým.

Každý subjekt, který vyvíjí ekonomickou aktivitu, něco produkuje, proto je veličina P kladná. A když máme produkci, máme také kapitál, a tedy také veličina K je kladná.

Sestavíme si tři předpoklady, na jejichž základě vznikne první model dynamiky:

Předpoklad 1. *Kapitál vzniká investicemi a mizí amortizací.*

Předpoklad 2. *Do tvorby kapitálu je investován stálý podíl produktu.*

Předpoklad 3. *Relativní přírůstek kapitálu se projevuje relativním přírůstkem produkce.*

Tyto předpoklady si postupně matematicky vyjádříme.

Začneme s **prvním předpokladem**. Abychom mohli tento předpoklad matematicky zapsat, označíme si symbolem γ podíl kapitálu, který se za časovou jednotku znehodnotí amortizací a symbolem τ čas, který je potřeba k přeměně investicí na kapitál.

Hodnotu kapitálu v čase $t + \Delta t$ můžeme vyjádřit jako hodnotu kapitálu v čase t, od níž odečteme podíl kapitálu, který se za Δt znehodnotí amortizací a přičteme podíl investic přeměněných na kapitál. Tyto úvahy lze shrnout do následující rovnice:

$$K(t + \Delta t) = K(t) - \gamma \cdot K(t) \cdot \Delta t + \frac{1}{\tau} \cdot I(t) \cdot \Delta t \tag{1}$$

Odečtením K(t) a vydělením Δt získáme tvar

$$\frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = -\gamma \cdot K(t) + \frac{1}{\tau} \cdot I(t) \tag{2}$$

Za předpokladu spojitosti času a diferencovatelnosti veličiny K můžeme limitním přechodem $\Delta t \to 0$ vyjádřit **první předpoklad** pomocí diferenciální rovnice

$$K'(t) = -\gamma \cdot K(t) + \frac{1}{\tau} \cdot I(t), t \geq 0. \tag{3}$$

Druhý předpoklad můžeme vysvětlit tak, že budeme investovat konstantní část produkce. Část produkce, která bude spotřebována nebo uspořena, si označíme q a bude platit, že $q \in (0, 1)$. Odtud plyne, že $q < 1$ a společně s tím, že už jsme dříve odvodili, že veličina P je kladná, můžeme říct, že také veličina I je kladná. Matematicky **druhý předpoklad** napíšeme pro každé $t \geq 0$ takto:

$$I(t) = (1 - q) \cdot P(t). \tag{4}$$

Třetí předpoklad můžeme zapsat jako rovnost

$$\frac{K'(t)}{K(t)} = \frac{P'(t)}{P(t)}. \tag{5}$$

Tuto rovnost budeme dále upravovat

$$0 = \frac{K'(t)}{K(t)} - \frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{K'(t) \cdot P(t) - K(t) \cdot P'(t)}{K(t) \cdot P(t)}.$$

Zlomek rozšíříme výrazem $\frac{P(t)}{P(t)}$

$$0 = \frac{K'(t) \cdot P(t) - K(t) \cdot P'(t)}{K(t) \cdot P(t)} \cdot \frac{P(t)}{P(t)}$$

a upravíme do tvaru

$$0 = \frac{K'(t) \cdot P(t) - K(t) \cdot P'(t)}{P^2(t)} \cdot \frac{P(t)}{K(t)},$$

kde první činitel lze zjednodušit a dostaneme výslednou rovnost ve tvaru

$$0 = \left(\frac{K(t)}{P(t)}\right)' \cdot \frac{P(t)}{K(t)}. \tag{6}$$

Z předchozího textu již víme, že veličiny K a P jsou kladné, jejich poměr je proto $\frac{K(t)}{P(t)} > 0$. Aby rovnost (6) platila, je nutné, aby $\left(\frac{K(t)}{P(t)}\right)' = 0$. To nastane v případě, že podíl $\frac{K(t)}{P(t)}$ je roven konstantě. Existuje tedy konstanta $r \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $t \geq 0$ platí

$$\frac{K(t)}{P(t)} = r, \tag{7}$$

jinak řečeno

$$K(t) = r \cdot P(t). \tag{8}$$

Třetí předpoklad tedy můžeme jednak vyjádřit rovností (5) nebo ekvivalentně také rovností (8).

Upravíme rovnost (5) tak, že do ní budeme postupně dosazovat vztahy (3), (4) a (7), a vznikne

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{K'(t)}{K(t)} = \frac{\frac{1}{\tau} \cdot I(t) - \gamma \cdot K(t)}{K(t)} = \frac{\frac{1}{\tau} \cdot (1-q) \cdot P(t)}{K(t)} - \gamma =$$

$$= \frac{\frac{1}{\tau} \cdot (1-q) \cdot P(t)}{r \cdot P(t)} - \gamma = \frac{(1-q)}{r\tau} - \gamma.$$

Dohromady tedy platí

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{(1-q)}{r \cdot \tau} - \gamma. \tag{9}$$

Protože jsme si poměr $\frac{P'(t)}{P(t)}$ vyjádřili jako rozdíl konstant, lze tento poměr označit např. jako g a získáme rovnici pro každé $t \geq 0$

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = g, \tag{10}$$

kterou lze interpretovat tak, že relativní rychlost růstu produkce je za předpokladů, které jsme stanovili na začátku modelu, konstantní.

Rovnici (10) lze vyřešit separací proměnných:

$$\frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} = g$$

$$\frac{1}{P(t)}\,dP(t) = g\,dt$$

$$\int \frac{1}{P(t)}\,dP(t) = \int g\,dt$$

$$\ln|P(t))| = g \cdot t + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Protože $P(t) \geq 0$, platí, že

$$P(t) = e^{g \cdot t} \cdot C, \tag{11}$$

kde $e^c = C$. Je-li počáteční produkce rovna P_0, pak

$$P_0 = P(0) = e^{g \cdot 0} \cdot C = C.$$

Řešení (11) diferenciální rovnice (10) s počáteční podmínkou tedy po této úpravě bude ve tvaru

$$P(t) = P_0 \cdot e^{g \cdot t}. \tag{12}$$

Konstanta g vyjadřuje relativní rychlost růstu produkce. Z povahy exponenciální funkce je zřejmé, že je-li znaménko konstanty g kladné, pak produkce roste, je-li záporné, pak produkce klesá.

Druhá konstanta, kterou jsme zavedli, konstanta r, byla podle (7) poměrem kapitálu a produkce, jinak řečeno vyjadřovala, kolik jednotek kapitálu je potřeba na jednotku produkce.

Pokud by produkce stagnovala, pak by $P'(t) = 0$ a z (9) bychom získali:

$$\frac{1-q}{r \cdot \tau} - \gamma = 0$$

$$1 - q - \gamma \cdot \tau \cdot r = 0$$

$$1 - q = r \cdot \tau \cdot \gamma$$

$$r = \frac{1-q}{\gamma \cdot \tau}.$$

Pokud by produkce rostla, pak $P'(t) > 0$ a v (9) platí

$$\frac{1-q}{r \cdot \tau} - \gamma > 0,$$

neboli

$$r < \frac{1-q}{\gamma \cdot \tau}.$$

Pokud by produkce klesala, pak $P'(t) < 0$ a z (9) vyplývá, že

$$\frac{1-q}{r \cdot \tau} - \gamma < 0,$$

neboli

$$r > \frac{1-q}{\gamma \cdot \tau}.$$

2.2. Solowův růstový model s Cobb - Douglasovou produkční funkcí

Autorem tohoto modelu je americký ekonom R. M. Solow, který je známý hlavně pro svou práci v oblasti ekonomického růstu, a právě za ni získal Nobelovu cenu za ekonomii.

V tomto modelu budeme uvažovat uzavřenou ekonomiku, tedy takovou ekonomiku, která nespolupracuje s ekonomikami okolními států a vyskytují se v ní tedy pouze produkční faktory kapitál a práce, a nikoli zahraniční obchod.

Dále budeme uvažovat trh s agregovaným zbožím, tedy se budeme zabývat nejen jedním konkrétním zbožím, ale všemi druhy zboží, které se na trhu mohou vyskytovat. Faktory, které se budou v úvahách vyskytovat, jsou kapitál $K = K(t)$, a dále také investice $I = I(t)$, na jejichž základě kapitál vzniká. Množství produkce vytvořené pomocí kapitálu si označíme $P(K)$. Model se opírá o několik předpokladů:

Předpoklad 1. *Přírůstek hodnoty kapitálu $K(t)$ za malý okamžik $\Delta t > 0$ odpovídá hodnotě investic.*

Pro $\Delta t > 0$ lze tedy psát

$$K(t + \Delta t) = K(t) + I(t) \cdot \Delta t, \tag{13}$$

kde $I(t)$ je hodnota investic v čase t. Rovnici lze interpretovat tak, že kapitál v čase $t+\Delta t$ je roven součtu kapitálu v čase t a investic, které jsou investovány po dobu Δt.

Rovnici (13) upravíme do tvaru

$$\frac{K(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t}=I(t). \tag{14}$$

Pokud pro $\Delta t \to 0$ existuje limita výrazu na levé straně rovnice, pak můžeme rovnici upravit do tvaru

$$K'(t)=I(t). \tag{15}$$

Předpoklad 2. *Produkce vytvořená prostřednictvím kapitálu je přímo úměrná hodnotě kapitálu.*

Toto tvrzení lze zapsat

$$P(K(t))=T\cdot K(t), \tag{16}$$

kde T je konstanta úměrnosti vyjadřující úroveň technologie.

Předpoklad 3. *Produkce $P(t)$ je v uzavřené ekonomice rozdělena mezi spotřebu $C(t)$ a soukromé investice $I(t)$.*

Jinak řečeno to, co je v dané ekonomice vyprodukováno, je buď spotřebováno, anebo investováno v dané ekonomice. Nic není investováno do zahraničního obchodu.

Předpoklad můžeme matematicky zapsat tak, že v každém okamžiku t platí:

$$P(t)=C(t)+I(t). \tag{17}$$

Spotřební funkci můžeme vyjádřit jako

$$C(t)=c\cdot P(t), \tag{18}$$

kde $c\in(0,1)$ je podíl spotřeby z toho, co jsme vyprodukovali. Můžeme si ještě doplnit podíl úspor $s=1-c\in(0,1)$ a rovnici (18), tak můžeme upravit

$$C(t)=(1-s)\cdot P(t). \tag{19}$$

Dosazením do (17) můžeme vyjádřit, jaký vztah platí pro investice:

$$P(t) = (1 - s) \cdot P(t) + I(t)$$

$$P(t) = P(t) - s \cdot P(t) + I(t)$$

$$I(t) = s \cdot P(t). \tag{20}$$

Předpoklad 4. *Pracovní síla $L = L(t)$ roste podle Malthausova zákona.*

Tento předpoklad lze vyjádřit jako

$$\tfrac{L'(t)}{L(t)} = m,\ L(0) = L_0, \tag{21}$$

kde $m > 0$ je míra růstu pracovní síly.

V tomto modelu dále připustíme, že při produkci dochází ke vzájemné substituci práce $L(t)$ a kapitálu $K(t)$, produkční funkce P tak bude obsahovat oba tyto faktory (nejen kapitál).

Dále budeme uvažovat Cobb-Douglasovu produkční funkci

$$P(K(t), L(t)) = T \cdot K^{\alpha}(t) \cdot L^{1-\alpha}(t), \tag{22}$$

která nám říká, že objem celkové produkce (objem celkové peněžní hodnoty všech statků vytvořených za dané období) je určen T-násobkem geometrického váženého průměru indexů kapitálu a práce. Číslo $T > 0$ je konstanta úměrnosti, která vyjadřuje úroveň technologie a $\alpha \in (0, 1)$ je konstantní koeficient elasticity produkce vzhledem ke kapitálu, který udává, o kolik procent se změní produkt při změně kapitálu o 1% a zároveň při neměnné hodnotě ostatních faktorů. Cobb-Douglasova produkční funkce podle vztahu výše vyjadřuje funkční závislost růstu produktu na růstu pracovní síly a růstu kapitálu.

Předpokládejme platnost předpokladu, že pracovní síla roste podle Mallthausova zákona, který je ilustrován rovnicí (21).

Budeme řešit kapitálovou intenzitu, tedy budeme zkoumat, jaký objem kapitálu připadá v čase t na jednotku práce (např. na jednoho pracovníka). Symbolicky jde o o podíl $\frac{K(t)}{L(t)}$. Tento vztah budeme derivovat, protože tak po několika úpravách získáme rovnici s jednou neznámou.

$$\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)' = \frac{K'(t) \cdot L(t) - K(t) \cdot L'(t)}{L^2(t)} =$$

$$= \frac{K'(t)}{L(t)} - \frac{K(t) \cdot L'(t)}{L^2(t)} = \frac{I(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} \cdot \frac{L'(t)}{L(t)} =$$

$$= \frac{s \cdot P(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} \cdot m, \tag{23}$$

kde jsme využili postupně vztahy (15), (20) a (21). Podíl $\frac{K(t)}{L(t)}$ vyjadřující kapitálovou intenzitu si označíme je $k(t)$ a rovnici (23) tak upravíme do podoby:

$$k'(t) = \frac{s \cdot P(t)}{L(t)} - k(t) \cdot m, \tag{24}$$

kde $P(t) = P(K(t), L(t))$ je definována vztahem (22).

Dále pokračujeme s úpravami vztahu (24):

$$k'(t) = \frac{s \cdot T \cdot K^{\alpha}(t) \cdot L^{1-\alpha}(t)}{L(t)} - k(t) \cdot m =$$

$$= \frac{s \cdot T \cdot \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} \cdot L(t)}{L(t)} - k(t) \cdot m =$$

$$= T \cdot s \cdot k^{\alpha}(t) - k(t) \cdot m. \tag{25}$$

Ještě můžeme zavést značení $\Gamma = T \cdot s > 0$.

Pak celá diferenciální rovnice (25) spolu s počáteční podmínkou má tvar:

$$k'(t) = \Gamma \cdot k^{\alpha}(t) - k(t) \cdot m,\ k(0) = k_0. \tag{26}$$

Pokud budeme uvažovat nulovou derivaci v rovnici (26), pak můžeme určit konstantní (stacionární) řešení k^o této rovnice

$$0 = \Gamma \cdot k^{\alpha}(t) - k(t) \cdot m$$

$$\Gamma \cdot k^{\alpha}(t) = k(t) \cdot m$$

$$\frac{\Gamma}{m} = \frac{k(t)}{k^{\alpha}(t)}$$

$$\frac{\Gamma}{m} = k^{1-\alpha}(t)$$

$$k(t) = \left(\tfrac{\Gamma}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ t \geq 0. \tag{27}$$

Rovnice (26) se nazývá Bernoulliho rovnice a pomocí vhodné úpravy lze nalézt její analytické řešení. Položíme-li

$$z(t) = k^{1-\alpha}(t), \tag{28}$$

pak

$$z'(t) = (1-\alpha) \cdot k^{-\alpha}(t) \cdot k'(t). \tag{29}$$

Pokud vynásobíme rovnici (26) členem $(1-\alpha) \cdot k^{-\alpha}(t)$, získáme po několika úpravách

$$(1-\alpha) \cdot k^{-\alpha}(t) \cdot k'(t) = (1-\alpha) \cdot k^{-\alpha}(t) \cdot \Gamma \cdot k^{\alpha}(t) - (1-\alpha) \cdot k^{-\alpha}(t) \cdot k(t) \cdot m$$

$$(1-\alpha) \cdot k^{-\alpha}(t) \cdot k'(t) = (1-\alpha) \cdot \Gamma - (1-\alpha) \cdot k^{1-\alpha}(t) \cdot m$$

$$z'(t) = (1-\alpha) \cdot \Gamma - (1-\alpha) \cdot z(t) \cdot m$$

a po přeskupení členů nehomogenní lineární diferenciální rovnici

$$z'(t) + (1-\alpha) \cdot z(t) \cdot m = (1-\alpha) \cdot \Gamma \tag{30}$$

s počáteční podmínkou $z(0) = k_0^{1-\alpha}$.

Tuto rovnici řešíme nejprve jako homogenní pomocí separace proměnných:

$$z'(t) + (1-\alpha) \cdot z(t) \cdot m = 0 \tag{31}$$

$$z'(t) = -(1-\alpha) \cdot z(t) \cdot m$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -(1-\alpha) \cdot z(t) \cdot m$$

$$\frac{dz(t)}{z(t)} = -(1-\alpha) \cdot m\, dt$$

$$\int \frac{dz(t)}{z(t)} = \int -(1-\alpha) \cdot m \, dt$$

$$\ln |z(t)| = -(1-\alpha) \cdot m \cdot t + C$$

Obecné řešení homogenní úlohy tedy získáme ve tvaru

$$z(t) = e^{-(1-\alpha)\cdot m \cdot t} \cdot K, \; K \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

V druhém kroku provedeme variaci konstanty, tj. konstantu K bereme jako funkci proměnné t, tedy $K = K(t)$. Obecné řešení tak bude ve tvaru

$$z(t) = K(t) \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot m \cdot t}. \tag{33}$$

Toto dosadíme do původní nehomogenní diferenciální rovnice (30) a budeme se snažit vyjádřit $K(t)$:

$$K'(t) \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot m\cdot t} - (1-\alpha) \cdot m \cdot K(t) \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot m\cdot t} + (1-\alpha) \cdot m \cdot K(t) \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot m\cdot t} =$$

$$= (1-\alpha) \cdot \Gamma$$

$$K'(t) = (1-\alpha) \cdot \Gamma \cdot e^{(1-\alpha)\cdot m\cdot t}. \tag{34}$$

Vztah (34) zintegrujeme, abychom získali předpis pro $K(t)$

$$K(t) = \int (1-\alpha) \cdot \Gamma \cdot e^{(1-\alpha)\cdot m\cdot t} \, dt$$

$$K(t) = (1-\alpha) \cdot \Gamma \cdot \int e^{(1-\alpha)\cdot m\cdot t} \, dt$$

$$K(t) = (1-\alpha) \cdot \Gamma \cdot \frac{1}{(1-\alpha) \cdot m} \cdot e^{(1-\alpha)\cdot m\cdot t} + C, \tag{35}$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

Vztah (35) pro konkrétní volbu $C = 0$ dosadíme do (33) a získáme partikulární řešení nehomogenní rovnice (31) ve tvaru

$$z(t) = (1-\alpha) \cdot \Gamma \cdot \frac{1}{(1-\alpha) \cdot m} \cdot e^{(1-\alpha)\cdot m\cdot t} \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot m\cdot t}$$

$$z(t) = \frac{\Gamma}{m}. \tag{36}$$

Obecné řešení nehomogenní úlohy (30) získáme jako součet obecného řešení (32) homogenní úlohy (31) a partikulárního řešení (36) nehomogenní úlohy:

$$z(t) = K \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot m \cdot t} + \frac{\Gamma}{m}, \tag{37}$$

kde $K \in \mathbb{R}$.

Vyřešíme ještě počáteční podmínku pro $t = 0$ a vyjádříme K:

$$z(0) = K \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot m \cdot 0} + \frac{\Gamma}{m} = k_0^{1-\alpha}$$

$$K = k_0^{1-\alpha} - \frac{\Gamma}{m}.$$

A pak můžeme obecné řešení (37) nehomogenní úlohy upravit do tvaru

$$z(t) = \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\Gamma}{m}\right) \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot m \cdot t} + \frac{\Gamma}{m}. \tag{38}$$

Ještě musíme provést návrat prostřednictvím substituce (28):

$$z(t) = k^{1-\alpha}(t)$$

$$\left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\Gamma}{m}\right) \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot m \cdot t} + \frac{\Gamma}{m} = k^{1-\alpha}(t)$$

Celou rovnici umocníme na $\frac{1}{1-\alpha}$ a získáme obecné řešení diferenciální rovnice (26)

$$k(t) = \left((k_0^{1-\alpha} - \tfrac{\Gamma}{m}) \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot m \cdot t} + \tfrac{\Gamma}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \; t \geq 0. \tag{39}$$

Odtud ihned plyne, že

$$\lim_{t \to +\infty} k(t) = \left(\frac{\Gamma}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{40}$$

a tedy se s rostoucím časem řešení diferenciální rovnice (26) přibližuje ke konstantnímu stacionárnímu řešení této rovnice dané předpisem (27). Jinak řečeno se kapitálová intenzita s rostoucím časem ustaluje na konstantní hodnotě.

2.3. Matematické modelování dynamické rovnováhy - spojitý pavučinový model

Zatím jsem se zabývala v předchozím textu makroekonomickými modely, nyní budu modelovat hledání rovnováhy na trhu zboží, což je jedna ze základních otázek mikroekonomie. Jde o hledání rovnováhy mezi nabídkou a poptávkou na trhu jednoho konkrétního zboží. Modely, které řeší problém hledání rovnováhy, nazýváme pavučinovými modely. Je obvyklé uvažovat dvě situace, jak se na daný pavučinový model budeme dívat.

Pokud předpokládáme, že čas nabývá diskrétních hodnot $t = 1, 2, 3, \ldots$, pak nazýváme tento model diskrétní pavučinový. Pokud připouštíme spojitou změnu času, pak se model nazývá spojitý pavučinový. A právě spojitým pavučinovým modelem se budu dále zabývat.

Nejprve si označíme poptávku písmenem D (z anglického *demand*) a v tomto modelu bude popsána funkcí $D : Q_D(t) = f_1(P(t))$, kde Q označuje množství a P označuje cenu. Obdobně nabídka S (z anglického *supply*) bude popsána funkcí $S : Q_S(t) = f_2(P(t))$.

Pro jednoduchost předpokládejme lineární závislosti poptávkové a nabídkové funkce na ceně a také standardní sklon funkcí poptávky a nabídky (poptávka bude nerostoucí, nabídka neklesající).

Existují dva typy spojitých pavučinových modelů:

- spojitý dynamický pavučinový model se zpožděním na straně nabídky, kde jsou poptávka a nabídka popsány funkcemi:

$$\begin{gathered} D : Q_D(t) = \max\{0, a - b \cdot P(t) \pm \alpha \cdot P'(t)\} \\ S : Q_S(t) = \max\{0, -c + d \cdot P(t)\} \end{gathered} \tag{41}$$

- spojitý dynamický pavučinový model se zpožděním na straně poptávky, kde jsou poptávka a nabídka popsány funkcemi:

$$\begin{gathered} D : Q_D(t) = \max\{0, a - b \cdot P(t)\} \\ S : Q_S(t) = \max\{0, -c + d \cdot P(t) \pm \alpha \cdot P'(t)\} \end{gathered} \tag{42}$$

Absolutní člen $a > 0$ udává množství, které je poptáváno při nulové ceně $P(t)$. Protože také absolutní člen $c > 0$, ale před c je záporné znaménko, bude nabízené množství při nulové ceně rovno $\max\{0, -c\}$, tj. 0.

Lineární členy $b > 0$, $d > 0$ udávají sklon funkce - poptávková funkce klesá, proto je u b záporné znaménko, nabídková funkce roste, proto je u d kladné znaménko. Oba modely jsou definovány pro $t \geq 0$ a $\alpha > 0$.

Z předpisů funkcí je zřejmé, že zpoždění na straně poptávky, resp. nabídky je dáno tím, že ve funkci poptávky, resp. nabídky není obsažen člen $P'(t)$. O straně, která naopak tento člen obsahuje, říkáme, že je "napřed".

Nyní se budeme zabývat tím, jak postupovat při řešení výše uvedených modelů.

1. Vyřešíme statickou rovnováhu, zanedbáme tedy čas. Řešíme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých Q a P:

$$D : Q = a - b \cdot P$$

$$S : Q = -c + d \cdot P$$

   Aby nastala rovnováha, musí se poptávané a nabízené množství rovnat, tedy $Q = Q$, a proto

$$a - b \cdot P = -c + d \cdot P,$$

   odtud plyne, že $P^* = \frac{a+c}{b+d}$. Druhou neznámou Q^* dopočítáme tak, že vypočtené P^* dosadíme do jedné z rovnic statické rovnováhy: $Q* = a - b \cdot \frac{a+c}{b+d}$. Vyřešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých jsme získali statické, neboli konstantní řešení $[P^*, Q^*]$.

2. Nyní už budeme uvažovat faktor času, vyřešíme tedy dynamickou rovnováhu. Obdobně budeme porovnávat nabídku $Q_S(t)$ s poptávkou $Q_D(t)$ jako v předchozím kroku. Jen už budeme pracovat s původními předpisy funkcí (41) nebo (42) (v konkrétním příkladu bude zadán jeden předpis a budeme tak vědět, jestli je zpoždění na straně poptávky nebo na straně

nabídky). Tento typ modelů povede na řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice, kde bude obsažena funkce $P(t)$ a její derivace. Dostaneme obecné řešení této rovnice.

3. Ještě připojíme počáteční podmínku $P(0) = P_0$ a budeme tak mít konečné řešení diferenciální rovnice.

Jak už jsem zmínila, v rovnici je obsažena funkce $P(t)$, proto řešením tohoto modelu bude spojitá funkce vývoje ceny v čase.

Řešení uvedené diferenciální rovnice může (ale nemusí) konvergovat k rovnovážné ceně P^* a podle toho poznáme, jestli se ekonomika v průběhu času dostane do rovnováhy, nebo ne. To, zda řešení bude konvergovat, vyplývá z obecných pravidel konvergence funkce. Lze ukázat, že to, co rozhodne o konvergenci, je znaménko u symbolu α v rovnicích (41) nebo (42). Pokud je znaménko stejné jako u $P(t)$ (tj. u modelu se zpožděním na straně poptávky je $+\alpha$ a u modelu se zpožděním na straně nabídky je $-\alpha$), pak řešení konverguje k rovnovážné ceně P^*.

Obecný postup budeme ilustrovat na konkrétním příkladě, kde si také ukážeme, jak poznat, jestli řešení konverguje.

Příklad 1. *Uvažujme spojitý dynamický pavučinový model s následující nabídkovou a poptávkovou funkcí.*

$$D : Q_D(t) = \max\{0, 20 - 5 \cdot P(t) - 3 \cdot P'(t)\}$$

$$S : Q_S(t) = \max\{0, -7 + 4 \cdot P(t)\}$$

Cena v počátečním stavu $P_0 = 5$ peněžních jednotek. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky nebo poptávky. Nalezněte řešení a určete, zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje nebo ne.

Zda se jedná o model se zpožděním na straně poptávky nebo nabídky, poznáme přímo ze zadání. Protože se člen $P'(t)$ nevyskutuje na straně nabídky, jde o zpoždění na straně nabídky. Poptávka je naopak "napřed".

Nejprve zanedbáme faktor času a řešíme statickou rovnováhu:

$$\begin{gathered} Q = 20 - 5 \cdot P \\ Q = -7 + 4 \cdot P \end{gathered} \tag{43}$$

Porovnáme nabízené a poptávané množství a určíme tak optimální (rovnovážnou) cenu:

$$20 - 5 \cdot P = -7 + 4 \cdot P$$

$$9 \cdot P = 27$$

$$P^* = 3 \tag{44}$$

Rovnovážná cena je na úrovni 3 jednotek.

Zjištenou rovnovážnou cenu dosadíme do jedné z rovnic v (43)

$$Q = -7 + 4 \cdot 3 = 5$$

Při rovnovážné ceně je nabízeno a poptáváno množství 5 jednotek.

Nyní řešíme dynamickou rovnováhu, tj. už nezanedbáme faktor času.

$$\begin{gathered} Q_D(t) = 20 - 5 \cdot P(t) - 3 \cdot P'(t) \\ Q_S(t) = -7 + 4 \cdot P(t) \end{gathered} \tag{45}$$

Porovnáme $Q_D(t)$ a $Q_S(t)$:

$$20 - 5 \cdot P(t) - 3 \cdot P'(t) = -7 + 4 \cdot P(t)$$

$$3 \cdot P'(t) + P \cdot P(t) = 27$$

$$P'(t) + 3 \cdot P(t) = 9. \tag{46}$$

Rovnice (46) je nehomogenní lineární diferenciální rovnice, kterou budeme řešit nejprve jako homogenní pomocí metody separace proměnných:

$$P'(t) + 3 \cdot P(t) = 0 \tag{47}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -3 \cdot P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = -3\,dt$$

$$\int \frac{dP(t)}{P(t)} = \int -3\,dt$$

$$\ln|P(t)| = -3 \cdot t + C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

$$P(t) = e^{-3\cdot t+C}$$

Obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice bude ve tvaru

$$P(t) = K \cdot e^{-3\cdot t}, \;\; K = e^{C} \in \mathbb{R}^{+}. \tag{48}$$

Nyní bychom konstantu K vzali jako funkci $K(t)$ a pokračovali v řešení rovnice metodou variace konstanty. Ale protože už jsme určili výše v (44) hodnotu rovnovážné ceny $P^* = 3$, považujeme toto jako partikulární řešení nehomogenní diferenciální funkce (46) a obecné řešení nehomogenní úlohy tak můžeme určit pouhým součtem obecného řešení homogenní úlohy a partikulárního řešení nehomogenní úlohy:

$$P(t) = K \cdot e^{-3\cdot t} + 3, \;\; K = e^{C} \in \mathbb{R}^{+}. \tag{49}$$

V této chvíli zahrneme do řešení počáteční podmínku $P_0 = 5$ ze zadání:

$$P(0) = 5 = P(t) = K \cdot e^{-3\cdot 0} + 3$$

$$5 = K + 3$$

$$K = 2.$$

S využitím $K = 2$ tak můžeme psát řešení počáteční úlohy ve tvaru

$$P(t) = 2 \cdot e^{-3\cdot t} + 3, \;\; K = e^{C} \in \mathbb{R}^{+}. \tag{50}$$

Nakonec vyšetříme konvergenci řešení (50) k rovnovážné ceně $P^* = 3$. Pro $t \to +\infty$ bude výraz $e^{-3\cdot t} \to 0$ a tedy $P(t) \to 3$, což nám říká, že řešení (50) k rovnovážné ceně konverguje.

Pro ověření konvergence můžeme využít i pomůcky se znaménkem u $\alpha = 3$ v obecném tvaru poptávkové funkce (45). U α je mínus, tedy stejné znaménko jako u $P(t)$ a tím máme konvergenci k rovnovážné ceně také zaručenu.

Závěr

Ve své práci jsem se snažila ukázat, že využití diferenciálních rovnic v ekonomických aplikacích je velmi široké. Považuji tak za určitou výhodu, když se ekonomové aspoň trochu orientují v matematickém pozadí ekonomických modelů. Dává jim to jistý náskok oproti konkurenci.

V první části práce jsem shrnula důležité základní pojmy z oblasti diferenciálních rovnic, uvedla dva základní typy diferenciálních rovnic, popsala jejich řešení a to demonstrovala také na jednoduchých příkladech z praxe - spojité úročení, učení zaměstnance,. . . .

Ve druhé části jsem pak detailně popsala tři vybrané ekonomické modely - Harrodův - Domarův model ekonomického růstu, Solowův model s Cobb - Douglasovou produkční funkcí a Modelovaní dynamické rovnováhy - spojitý pavučinový model. Každý model popisoval jinou oblast ekonomie, ale všechny velmi pěkně ukázaly, jak lze diferenciální rovnice najít i tam, kde by to člověk ani nečekal.

Pro mě osobně bylo tvoření této práce velkým přínosem. Zdokonalila jsem se v řešení dvou základních typů diferenciálních rovnic 1. řádu pomocí metody variace konstanty. Také se mi propojily teoretické poznatky z předmětů Ekonomie 1 a Ekonomie 2, kde jsme sice řešili některé jednoduché příklady pomocí lineárních rovnic, ale diferenciální rovnice byly nad rámec.

Vypracovávání této práce mě velmi bavilo, řešení diferenciálních rovnic mě naučilo trpělivosti a vytrvalosti se nevzdat a vydržet až do konce. Když jsem se pak dopočítala správného výsledku, byl to nepopsatelný pocit.

V neposlední řadě považuji za velký osobní přínos, že jsem se zdokonalila v sázení textu pomocí typografickém programu TeX.

Literatura

[1] Fišer, J.: *Úvod do teorie obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic.* Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2013.

[2] Kuben, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 1995

[3] Pospíšil, Z.: *Spojité deterministické modely I.* Masarykova univerzita, Brno, 2015.

[4] Pražák, P.: *Diferenciální rovnice a jejich použití v ekonomii.* Disertační práce, MFF Univerzity Karlovy, Praha, 2006.

[5] Vlček, J., Vrbický, J.: *Diferenciální rovnice: matematika IV.* VŠB-Technická univerzita, Ostrava, 1997.

[6] Volná, B., Smítalová, K.: *Matematika v ekonomii.* Slezská univerzita v Opavě, Opava, 2013.

[7] Zhang, W.-B.: *Differential equations, bifurcations, and chaos in economics.* World Scientific, Hackensack, NJ, 2005.

[8] Mařík, R.: *Inženýrská matematika – diferenciální rovnice.* [online]. [cit. 2018-08-03]. dostupné z http://docplayer.cz/33703635-Inzenyrska-matematika-diferencialni-rovnice.html.