Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Markovovy řetězce a procesy

Bakalářská práce

Autor: Barbora Sejkorová
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Vedoucí práce: Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Hradec Králové Květen 2016

Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor:	**Barbora Sejkorová**
Studijní program:	B 1103 Aplikovaná matematika
Název práce:	Markovovy řetězce a procesy
Název práce v AJ:	Markov chains and processes
Cíl a metody práce:	Cílem bakalářské práce je popsat Markovovy řetězce. V první části budou rozebrány vlastnosti stochastických matic a popíší se Markovovy řetězce s diskrétním časem. Ve druhé části bude práce zaměřena na vlastnosti těchto řetězců a jejich aplikace.
Garantující pracoviště:	Katedra matematiky Přírodovědecké fakulty UHK
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D.
Konzultant:	
Oponent:	Mgr. Tomáš Zuščák, Ph.D.
Datum zadání práce:	28. 2. 2015
Datum odevzdání práce:	16. 5. 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a s použitím uvedené literatury.

V Hradci Králové dne 10. května 2016 Barbora Sejkorová

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí této práce Mgr. Jitce Kühnové, Ph.D. za její čas, připomínky a cenné rady, které mi pomohly k úspěšnému dokončení této práce.

Anotace

Tato práce se zabývá Markovskými řetězci a jejich aplikacemi. V úvodní části jsou popsány základy náhodných procesů, které jsou důležité pro následné pochopení dané problematiky. Dále práce definuje základní pojmy a vztahy mezi nimi. V první části jsou popsány přímo řetězce s diskrétním časem, matice pravděpodobností a pravděpodobnosti přechodu. Po stručném úvodu do Markovských procesů se spojitým časem jsou v další části práce zavedeny vlastnosti řetězců a jejich vysvětlení na krátkých příkladech. Poslední část práce se zabývá vybranými aplikacemi Markovských řetězců v genetice a v ekonomii.

Klíčová slova

Markovský řetězec, pravděpodobnost přechodu, matice pravděpodobností přechodu, stacionární rozložení, absorpční řetězec

Annotation

Title: Intelligent search of image information

The main topic of the thesis is Markov Chains and their application. Since the random processes are necessary for understanding the issue, their background is dealt with in the introductory part of the work. After that, fundamental definitions are noted and their mutual relations explained. In the first part of the work are presented discrete time chains, probability matrices and transition probabilities. After the brief introduction to Continuous-time Mark processes, the features of chains are presented together with their explanation supported by examples. The final part of the thesis depicts the application of Markov chains in the field of genetics and economy.

Keywords

Markov chains, transition probability, transition matrix, stationary distribution, absorbing chain

Obsah

Úvod

Teorie náhodných procesů vznikla jako reakce na tvorbu matematických modelů fyzikálních procesů. V teorii pravděpodobnosti je náhodný, nebo též stochastický, proces opak k deterministickému procesu, u kterého je pouze jediná možnost vývoje procesu v čase. Ve vývoji náhodných procesů se však vyskytuje jistá neurčitost v budoucím vývoji, která je popsána pomocí rozdělení pravděpodobností. Zjednodušeně můžeme říci, že i když je známa počáteční podmínka (nebo počáteční stav systému), je zde mnoho různě pravděpodobných možností, kterými se proces může vydat. Tato teorie je dnes důležitou součástí teorie pravděpodobnosti a nachází uplatnění v širokém okruhu aplikací. Součástí teorie náhodných procesů jsou Markovské řetězce s diskrétním časem a Markovské procesy se spojitým časem. Tato práce se zabývá podrobně právě Markovskými řetězci.

Základy Markovských řetězců položil ruský matematik A. A. Markov žijící v letech 1856–1932. Samotné Markovské řetězce nachází uplatnění v biologii, ekologii, fyzice, ekonomii a v dalších odvětvích. Práce se zabývá zajímavými aplikacemi nejen v ekonomii a statistice, ale také např. v genetice. Motivací k výběru tohoto tématu byla snaha o podrobné nastudování Markovských řetězců, které se využívají právě ve statistice. Ke správnému pochopení problematiky je zapotřebí zavést rozsáhlý teoretický základ, objasnit vlastnosti a klasifikace řetězců. Práce se snaží jednotlivé pojmy objasnit na příkladech. Veškeré obrázky jsou pořízeny vlastním zpracováním. Poslední kapitola je zaměřena na aplikaci řetězců v odvětví genetiky a ekonomie. Z důvodu rozsahu práce jsou Markovské procesy zavedeny pouze jednoduše. Většina potřebných definic a vět je převzata z [1] a [2].

Kapitola 1

Stochastické procesy

V této kapitole si zavedeme základní definici stochastických procesů a jejich hlavní rozdělení. Ke každému konkrétnímu typu procesu uvedeme příklad. Stochastické neboli náhodné procesy jsou klíčové k pochopení problematiky Markovských řetězců.

1.1 Úvod do stochastických procesů

Náhodný proces si můžeme představit jako zobecnění pojmu náhodná veličina. Hlavním rozdílem mezi těmito pojmy je výsledek jejich realizace. Realizací náhodné veličiny dostaneme jedno konkrétní číslo, např. výsledek hodu kostkou, avšak realizací náhodného procesu dostaneme funkci jedné proměnné nebo posloupnost.

Definice 1.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $\mathbb{R}$ množina reálných čísel a $T \neq \emptyset$ neprázdná množina, které budeme přisuzovat význam času. Nechť zobrazení $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ má tyto dvě vlastnosti:

1. $\forall\, t \in T$ je $X(.,t)$ náhodná veličina vzhledem k jevovému poli $\mathcal{A}$. Značí se X_t.
2. $\forall\, \omega \in \Omega$ je $X(\omega,.)$ prvkem množiny všech reálných funkcí definovaných na T.

Zobrazení X s těmito dvěma vlastnostmi se nazývá stochastický proces definovaný na T. Značí se $\{X_t : t \in T\}$.

Hlavním problémem každého stochastického procesu je jeho neurčitý vývoj v budoucnosti. I když je známa počáteční podmínka, existuje mnoho možností, jak se bude daný proces vyvíjet. Každá z těchto možností může nastat s odlišnou pravděpodobností.

Definice 1.2. Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

a) Je-li množina T spočetná a lineárně uspořádaná, tj. $t_1 < t_2 < \dots$, jde o stochastický proces s diskrétním časem (tj. o časovou řadu).

b) Je-li množina T interval, jde o stochastický proces se spojitým časem (tj. o náhodnou funkci).

Tato práce se bude zabývat náhodnými posloupnostmi, tj. náhodnými procesy s diskrétním časem. Tyto posloupnosti s určitými, dále specifikovanými, vlastnostmi nazýváme řetězci.

Definice 1.3. Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

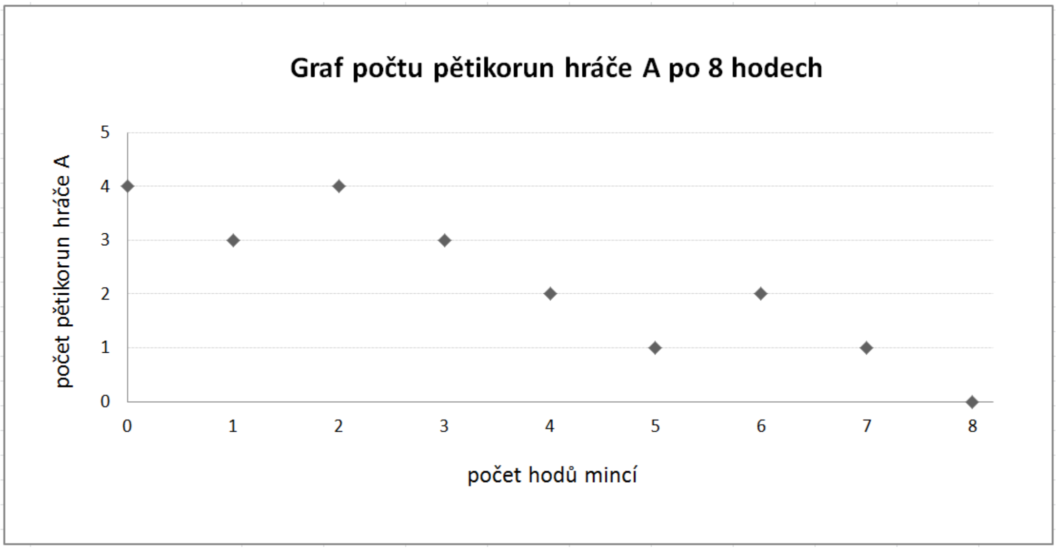
a) Jestliže $\forall t \in T$ je náhodná veličina X_t diskrétní, jde o stochastický proces s diskrétními stavy.

b) Jestliže $\forall t \in T$ je náhodná veličina X_t spojitá, jde o stochastický proces se spojitými stavy.

Množina všech hodnot, jichž může náhodná veličina X_t nabývat, se nazývá množina stavů a značí se S.

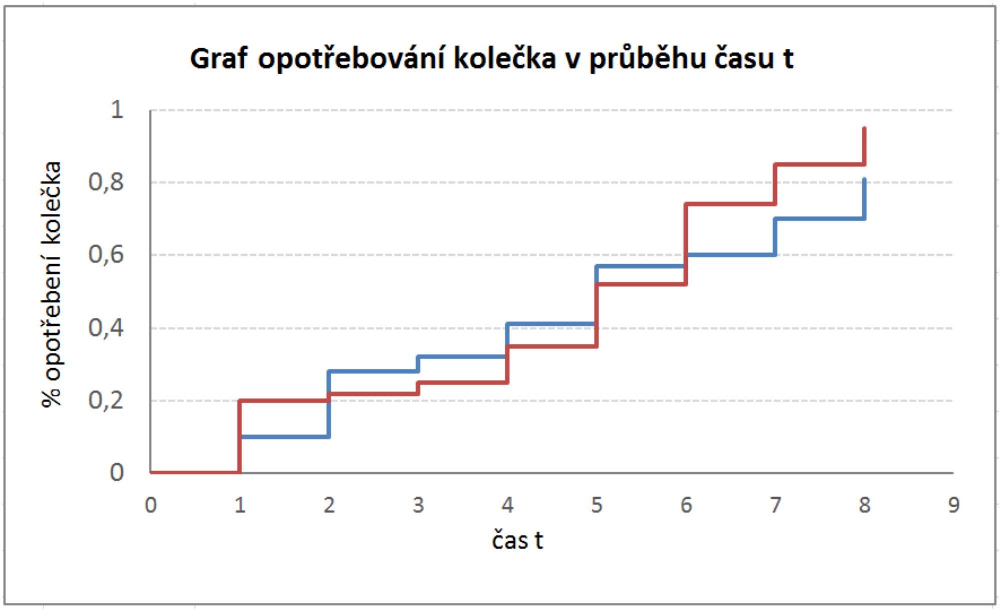
Pro lepší představu stochastického procesu v reálné situaci uvedeme ke každému typu procesu příklad, který doplníme grafem. Grafy jsou utvořeny v programu MS Excel a data jsou zvolena náhodně.

Příklad 1.1. (Stochastický proces s diskrétním časem a stavem.) Dva hráči A a B hrají o pětikoruny. Na začátku hry má hráč A čtyři pětikoruny a hráč B sedm pětikorun. Hráč A hází mincí. Pokud padne panna, hráč A vyhrává a získává soupeřovu pětikorunu. Pokud padne orel, hráč A prohrává a o pětikorunu přichází. Hra končí, pokud jeden z hráčů přijde o všechen svůj kapitál. Zavedeme tedy stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $t = 1, 2, \dots$ je pořadové číslo hodu mincí a $X_t = j$ značí, pokud hráč A má po t-tém hodu j pětikorun, tedy $S = \{0, 1, \dots, 11\}$. Jeden z možných průběhů daného stochastického procesu můžeme vidět na obrázku 1.1.



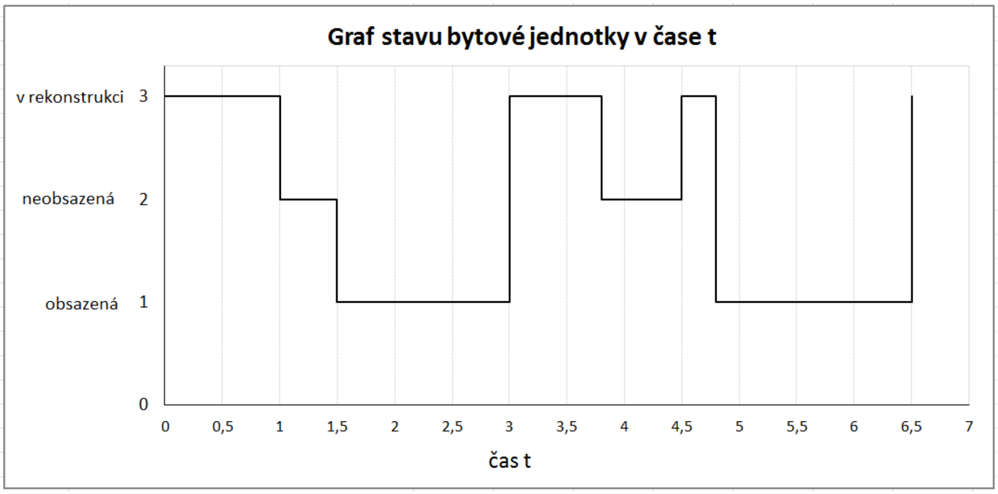
Obrázek 1.1: Stochastický proces s diskrétním časem a stavem.

Příklad 1.2. (Stochastický proces s diskrétním časem a spojitým stavem.) Součástí výrobního stroje jsou ozubená kolečka. Při výrobním procesu dochází k opotřebování jednotlivých koleček. Kolečko se po n výrobních procesech vymění. Máme tedy stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde t je pořadové číslo výrobní operace a $T = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina výrobních procesů. Množina stavů $S = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq a\}$ nabývá hodnot, které zaznamenávají opotřebení kolečka (a je maximální hodnota opotřebení). V našem případě je $a = 1$. Pro ukázku náhodnosti jsou zobrazeny dva různé případy. Interpretace je graficky zobrazena na obrázku 1.2.



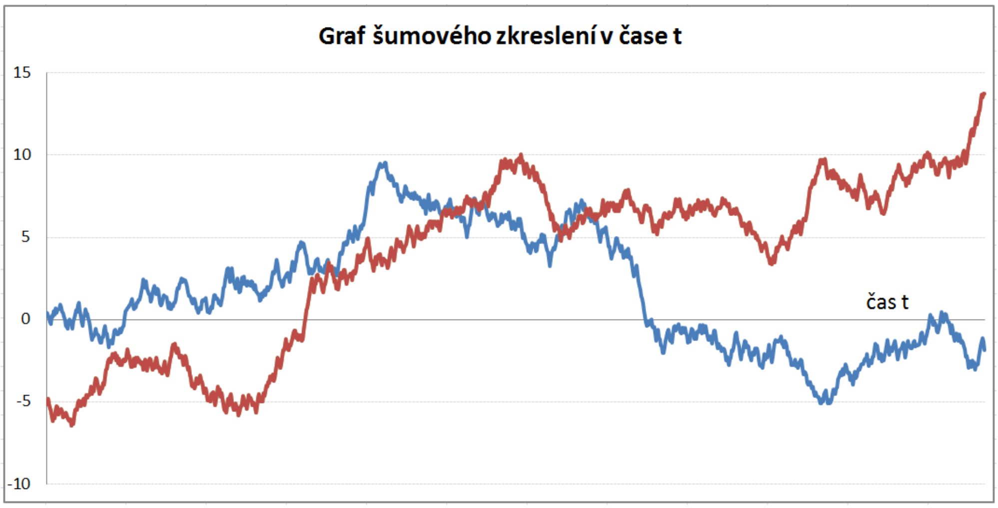
Obrázek 1.2: Stochastický proces s diskrétním časem a spojitým stavem.

Příklad 1.3. (Stochastický proces se spojitým časem a diskrétním stavem.) Sledujeme stav bytové jednotky v panelovém domě. Jednotka může být pronajatá, volná nebo v rekonstrukci. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde t je libovolný časový okamžik a $X_t = j$ znamená, že v okamžiku t je bytová jednotka ve stavu j. Pronajaté jednotce přiřadíme 1, volné 2 a jednotce v rekonstrukci 3. Množina stavů je tedy $S = \{1, 2, 3\}$. Situace je znázorněna na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Stochastický proces se spojitým časem a diskrétním stavem.

Příklad 1.4. (Stochastický proces se spojitým časem a stavem.) Sledujeme šumové zkreslení zvukového zesilovače, např. na elektrické kytaře. Stochastický proces nabývá hodnot odpovídajících tomuto šumovému zkreslení. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $T = \{t; t \geq 0\}$, $X_t \in S$, kde $S = \{x, -\infty < x < \infty\}$. Dva různé průběhy jsou zobrazeny na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: Stochastický proces se spojitým časem a spojitým stavem.

Kapitola 2

Úvod do Markovských řetězců

2.1 Základní vztahy

Tato kapitola se zabývá řetězci (tj. náhodnými procesy s diskrétními stavy), které mají tzv. markovskou vlastnost, kterou popisuje následující definice. Řetězce s touto vlastností nazýváme *Markovské* popř. *Markovovy*. Markovův řetězec můžeme blíže specifikovat jako náhodný proces, který nemá paměť. To znamená, že stav systému v budoucnu nezávisí na minulosti, ale pouze na současném stavu tohoto systému. Stavy minulé si tedy řetězec nepamatuje. U Markovských řetězců předpokládáme diskrétnost času. Diskrétnost znamená, že ke změně může dojít pouze skokem v určitých okamžicích.

Definice 2.1. Posloupnost celočíselných náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ se nazývá *Markovův řetězec s diskrétním časem* a množinou stavů S, jestliže

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{2.1}$$

pro všechna $n = 0, 1, \dots$ a všechna $i, j, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S$ taková, že $P(X_n = i, X_{n-1} =$ $= i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$.

Výše uvedená vlastnost (2.1) se nazývá *markovská*. Markovská vlastnost znamená, že budoucí stav řetězce nezáleží na stavech minulých, ale pouze na stavu přítomném (vyjádřeno ve zjednodušení podmíněné pravděpodobnosti). Z definice tedy vyplývá, že stavový systém sledujeme v časových okamžicích $n = 0, 1, \dots$ Stavový systém se z náhodných příčin může nacházet v množině stavů S. Náhodná veličina X_n nám popisuje stav tohoto systému v čase n. Pokud se systém v čase n nachází ve stavu $k \in S$, říkáme, že nastal náhodný jev ($X_n = k$). Změní-li se časový okamžik o jednotku, tedy z n na např. $n + 1$, mluvíme o přechodu za jeden krok. Pro označení řetězců budeme dále používat pouze zjednodušený zápis $\{X_n\}$.

Definice 2.2. Podmíněná pravděpodobnost (je-li definována)

$$p_{ij}(n, n+1) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad i, j \in S, \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.2}$$

se nazývá *pravděpodobnost přechodu prvního řádu* neboli pravděpodobnost přechodu za jeden krok. Podmíněné pravděpodobnosti (jsou-li definovány)

$$p_{ij}(n, n+m) = P(X_{n+m} = j \mid X_n = i) \tag{2.3}$$

pro $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, se nazývají pravděpodobnosti přechodu m-tého řádu.

Obecně pravděpodobnosti přechodu závisí na čase n. Např. pokud bychom pravidelně sledovali počet projíždějících aut (např. každých 10 min.) hlavní křižovatkou města Chrudim (stav systému je počet aut), pravděpodobnost přechodu ze stavu 40 na 45 bude jiná v ranních hodinách, kdy je velký provoz, než např. v poledne, kdy aut projíždí méně.

Definice 2.3. Markovský řetězec s diskrétním časem se nazývá *homogenní*, jestliže pravděpodobnosti přechodu nezávisí na čase n (na čase, ve kterém přechod nastává). Pak *pravděpodobnosti přechodu Markovova řetězce ze stavu i do stavu j za m kroků* (tzv. pravděpodobnost přechodu m-tého řádu) značíme

$$p_{ij}^{(m)} = p_{ij}(n, n+m) \quad i, j \in S, m \in \mathbb{N}_0. \tag{2.4}$$

Poznámka 2.1. Máme-li homogenní Markovský řetězec $\{X_n\}$ s pravděpodobnostmi přechodu $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, pak nám tento vztah říká, jaká je pravděpodobnost, že daný řetězec, který se nyní nachází ve stavu i přejde do stavu j. Pokud jsou definovány, jsou tyto pravděpodobnosti nezávislé na n a značíme je p_{ij}. Přívlastek prvního řádu je vynechán, tedy $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$.

Je zvykem definovat

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ je-li } i = j \\ 0, \text{ je-li } i \neq j \end{cases} \tag{2.5}$$

Věta 2.1. *Pro pravděpodobnosti přechodu homogenního řetězce platí:*

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad i, j \in S, \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i \in S \tag{2.6}$$

Důkaz. Viz [1, str. 10] □

Pro každé $i \in S$ existuje $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $P(X_n = i) > 0$. Podmíněné pravděpodobnosti $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ jsou tedy definovány a můžeme je sestavit do tzv. *matice pravděpodobností přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{00}, & p_{01}, & p_{02}, & \cdots \\ p_{10}, & p_{11}, & p_{12}, & \cdots \\ p_{20}, & p_{21}, & p_{22}, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (p_{ij})_{i,j \in S}$$

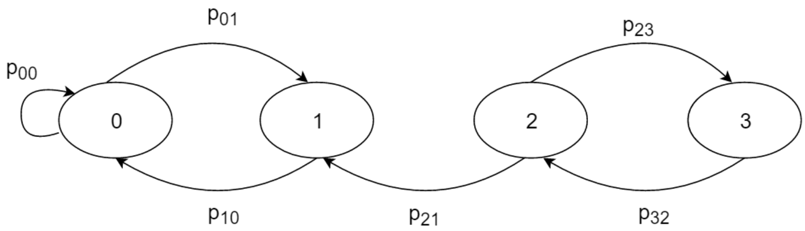
Řádkové indexy u jednotlivých prvků odpovídají výchozím stavům a sloupcové indexy stavům budoucím, do nichž s příslušnou pravděpodobností řetězec přejde. Tato matice je čtvercová, její prvky jsou nezáporná čísla a součet každého řádku je roven jedné (viz vztah (2.6)). Matice s těmito vlastnostmi se nazývá *stochastická*. Uveďme, co by se stalo, pokud by součet roven jedné platil i pro sloupce této matice. Pokud by např. součet pravděpodobností v prvním sloupci dával číslo 1, znamenalo by to, že se řetězec musí dostat zpět do stavu 0 s pravděpodobností 1 (s jistotou).

Stochastické matice hrají v teorii stochastických procesů a Markovských řetězců důležitou roli, proto si uvedeme alespoň některé základní vlastnosti těchto matic. Vlastnosti matice přechodu, tedy vztah (2.6), lze přepsat jako $\boldsymbol{Pe} = \boldsymbol{e}$, kde $\boldsymbol{e}$ je vektor $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$. Dostáváme tedy, že stochastická matice je matice nezáporná s vlastním vektorem $\boldsymbol{e}$, jemuž odpovídá vlastní číslo 1.

Věta 2.2. *Součin stochastických matic téhož řádu je opět stochastická matice.*

Důkaz. Viz [3, str. 99] □

Ke grafickému zobrazení přechodů v homogenním Markovském řetězci s konečným počtem stavů se používá tzv. *přechodový diagram*. Každý stav označíme oválem a pro časové okamžiky $n \in S$ vyneseme možné přechody mezi jednotlivými stavy. Tyto přechody se znázorní pomocí spojnice s připsanými pravděpodobnostmi přechodu. Pro přechody s nulovou pravděpodobností se spojnice nevyznačuje. Příklad přechodového diagramu pro 4 stavy můžeme zakreslit následovně



Obrázek 2.1: Obecný přechodový diagram se čtyřmi stavy.

Tomuto přechodovému diagramu odpovídá následující matice pravděpodobností přechodu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 & 0 \\ p_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{21} & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Dále označme

$$p_i(n) = P(X_n = i)$$

a pravděpodobnost rozdělení v n-tém kroku jako:

$$\boldsymbol{p}(n) = (p_0(n), p_1(n), \ldots, p_N(n)) \tag{2.7}$$

Vektor definovaný vztahem (2.7) nazýváme vektorem absolutních pravděpodobností. Jednotlivé složky tohoto vektoru nám říkají, jaká je pravděpodobnost výskytu určitého stavu v n-tém kroku. Nyní můžeme jednoduše odvodit rekurentní vztah a vztah pro n-tý člen. Uvažujme matici pravděpodobností přechodu Markovského řetězce s množinou stavů $S = \{0, 1, \ldots N\}$. Potom pro pravděpodobnost přechodu do stavu i v čase $n+1$ podle vztahu pro úplnou pravděpodobnost platí:

$$p_i(n+1) = p_0(n) \cdot p_{0i} + p_1(n) \cdot p_{1i} + \ldots + p_N(n) \cdot p_{Ni}$$

Obecně tedy pro všechny pravděpodobnosti přechodu v čase $n+1$ platí:

$$\begin{aligned}
p_0(n+1) &= p_0(n)\cdot p_{00} + p_1(n)\cdot p_{10} + \ldots + p_N(n)\cdot p_{N0}\\
p_1(n+1) &= p_0(n)\cdot p_{01} + p_1(n)\cdot p_{11} + \ldots + p_N(n)\cdot p_{N1}\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
p_N(n+1) &= p_0(n)\cdot p_{0N} + p_1(n)\cdot p_{1N} + \ldots + p_N(n)\cdot p_{NN}
\end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme přepsat pomocí matice pravděpodobností přechodů

$$(p_0(n+1),\ldots,p_N(n+1)) = (p_0(n),p_1(n),\ldots p_N(n))\cdot \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0N}\\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{N0} & p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

Z této rovnice nám plyne rekurentní vztah:

$$\boldsymbol{p}(n+1) = \boldsymbol{p}(n)\cdot \boldsymbol{P} \tag{2.8}$$

Nyní se vraťme zpět k Markovským řetězcům. Dále je nutné znát tzv. počáteční rozdělení řetězce, tedy stav, ve kterém řetězec začal. Počáteční rozdělení nám pomůže určit, s jakou pravděpodobností se homogenní Markovský řetězec nachází v daném čase v určitém stavu.

Označme

$$p_i = P(X_0 = i), \quad i \in S. \tag{2.9}$$

Náhodné jevy $A_i = (X_0 = i)$, $i \in S$ tvoří úplný systém jevů a platí tedy vztahy

$$0 \le p_i \le 1, \quad i \in S; \quad \sum_{i\in S} p_i = 1. \tag{2.10}$$

Pro zjednodušení můžeme počáteční pravděpodobnosti pokládat za složky tzv. pravděpodobnostního vektoru, který určuje pravděpodobnost toho, v jakém stavu se systém nachází v okamžiku 0 (tedy rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X_0), označujeme $\boldsymbol{p}(0)$.

Pokud se vrátíme k výše odvozenému rekurentnímu vztahu (2.8), můžeme tento vztah přepsat pomocí definovaného vektoru absolutních pravděpodobností.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(1) &= \boldsymbol{p}(0) \cdot \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{p}(2) &= \boldsymbol{p}(1) \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}(0) \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}(0) \cdot \boldsymbol{P}^2 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{p}(n) &= \boldsymbol{p}(n-1) \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}(n-2) \cdot \boldsymbol{P}^2 = \ldots = \boldsymbol{p}(0) \cdot \boldsymbol{P}^n \end{aligned} \tag{2.11}$$

Věta 2.3. *Nechť $n \geq 2$ je libovolné přirozené číslo, $i, j \in S$ libovolné stavy homogenního Markovského řetězce. Pro pravděpodobnosti přechodu za n kroků platí*

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j \in S} = \boldsymbol{P}^n, \tag{2.12}$$

kde $\boldsymbol{P}^n$ je n-tá mocnina matice pravděpodobností přechodu za jeden krok.

Důkaz. Plyne ze vztahu (2.11). □

Věta 2.4. *Pro libovolná nezáporná celá čísla m, n a libovolné $i, j \in S$ platí*

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \tag{2.13}$$

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \tag{2.14}$$

Důkaz. Důkaz nalezneme v [1, str.15]. □

Výše zmíněné vztahy ve větě 2.4 se nazývají *Chapman-Kolmogorovy rovnosti.* Přechod ze stavu i do stavu j uvedený ve vztahu (2.14) lze uskutečnit tak, že se nejprve v m krocích přejde do nějakého stavu k a následně v n zbývajících krocích ze stavu k do stavu j.

Chapman-Kolmogorovy rovnosti můžeme také vyjádřit maticově a to vztahem

$$\boldsymbol{P}^{(m+n)} = \boldsymbol{P}^{(m)} \boldsymbol{P}^{(n)}.$$

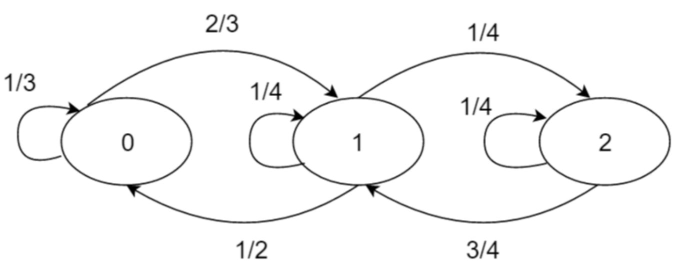
Příklad 2.1. Je dán homogenní Markovský řetězec $\{X_n\}$ s maticí pravděpodobností $\boldsymbol{P}$, množinou stavů $S = \{0, 1, 2\}$ a s vektorem počátečních pravděpodobností $\boldsymbol{p}(0)$.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}(0) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{6})$$

Určete vektor absolutních pravděpodobností řetězce po 20 krocích a zakreslete přechodový diagram.

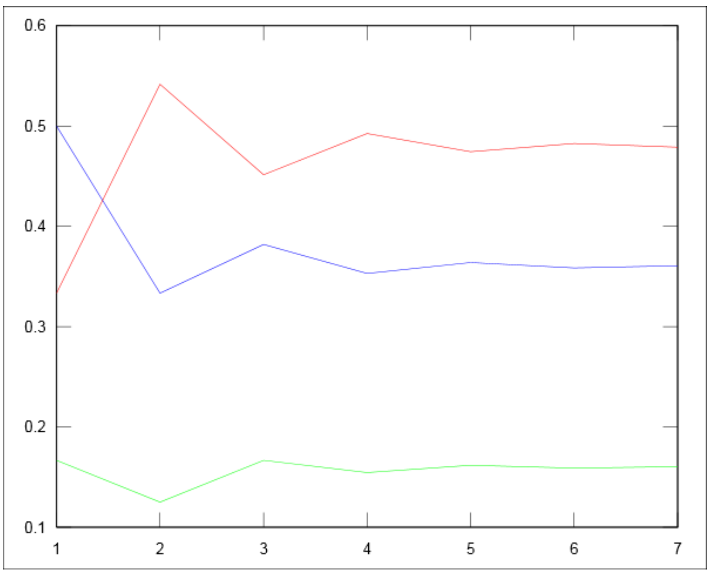
Řešení:

Zobrazení řetězce pomocí přechodového diagramu



Obrázek 2.2: Přechodový diagram Markovova řetězce.

Vektor absolutních pravděpodobností určíme pomocí programu Octave ze vztahů (2.11). Jak můžeme vidět na následujícím obrázku, řetězec se zhruba po 6 krocích ustálil. Po výsledných 20 krocích jsme zjistili, že řetězec se s pravděpodobností 0.36 bude nacházet ve stavu 0, s pravděpodobností 0.48 ve stavu 1 a s pravděpodobností 0.16 ve stavu 2.



Obrázek 2.3: Homogenní Markovský řetězec od 1. do 7. kroku.

Pro ukázku změn pravděpodobností mezi jednotlivými kroky uveďme vektor absolutních pravděpodobností po 2, 3, 6 a 20 krocích.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}(2) &= (0.38194, 0.45139, 0.16667) \\
\boldsymbol{p}(3) &= (0.35301, 0.49248, 0.15451) \\
\boldsymbol{p}(6) &= (0.36074, 0.47888, 0.16038) \\
&\vdots \\
\boldsymbol{p}(20) &= (0.36000, 0.48000, 0.16000)
\end{aligned}$$

Kapitola 3

Markovské procesy se spojitým časem

Druhým typem stochastických procesů jsou Markovské procesy se spojitým časem. Rozdíl oproti Markovským řetězcům je právě v čase. U Markovských procesů čas plyne spojitě a ke změnám tedy nedochází skokově, ale "kdykoliv". Při studiu Markovských procesů se vychází z výše uvedené teorie Markovských řetězců. Markovovy procesy se využívají například k modelování dynamiky populací, v systémech hromadné obsluhy nebo také v ekonomii.

Definice 3.1. Systém celočíselných nezáporných náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá *Markovův proces se spojitým časem* a spočetnou množinou S, jestliže

$$P(X_t = j | X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots X_{t_1} = i_1) = P(X_t = j | X_s = i), \tag{3.1}$$

pro všechna $i, j, i_1, \dots, i_n \in S$ a pro všechna $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < s < t$, pro která $P(X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) > 0$.

Rovnice vyjádřená vztahem (3.1) vyjadřuje *markovskou vlastnost.* Vývoj těchto typů procesů je obdobný jako u Markovských řetězců. Potíže nastávají až při zjišťování pravděpodobností přechodů mezi jednotlivými stavy. Při diskrétním čase můžeme tyto pravděpodobnosti sepsat do stochastické matice $\boldsymbol{P}$, která se nazývá matice pravděpodobností přechodu. V případě spojitého času však neexistuje alternativa této matice. U Markovských procesů nemůžeme odhadnout, kdy bude řetězec přecházet z jednoho stavu do druhého. Při analyzování Markovského procesu se z tohoto důvodu využívají jiné metody, např. Kolmogorovy diferenciální rovnice a intenzita přechodu. Z důvodu rozsahu práce se těmito procesy a metodami jejich analyzování nebudeme dále zabývat a uvedeme pouze některé situace, kdy se jedná o Markovský proces.

Příklad 3.1. Na informační linku společnosti X přijdou do call centra v průměru 4 hovory za hodinu. Stochastický proces popisuje počet příchozích hovorů během dne do call centra.

Příklad 3.2. Mějme proud zákazníků směřujících do banky Y. Z dlouhodobého pozorování je známo, že v průměru přijdou do banky 3 zákazníci během jedné hodiny. Stochastický popis popisuje počet příchozích zákazníků od hodiny, kdy má banka otevřeno.

Příklad 3.3. Benzínová pumpa má dvě čerpadla. U každého čerpadla může tankovat pouze jeden automobil. Pokud jsou obě čerpadla obsazená, další přijíždějící auta nečekají a rovnou odjíždějí jinam. Průměrná doba čerpání benzínu je 2 minuty a průměrně k pumpě přijíždí 30 aut za hodinu. Stochastický proces popisuje počet přijíždějících aut k jednotlivým čerpadlům, dobu obsluhy a jejich případné čekání ve frontě.

Kapitola 4

Vlastnosti Markovských řetězců s diskrétním časem

V této kapitole se budeme věnovat základním vlastnostem homogenních Markovských řetězců a jejich stavům. Následně si na výpočtech jednoduchých příkladů ukážeme využití těchto vlastností. Tato kapitola čerpá především z [1] a [4].

4.1 Klasifikace stavů Markovského řetězce

Klasifikace Markovského řetězce je důležitá, abychom určili, zda je řetězec vhodný pro další studium a aplikace. Tato podkapitola je čerpána z [2].

Definice 4.1. Čas prvního návratu do určitého stavu j definujeme jako:

$$\tau_j(1) = \inf\{n > 0 : X_n = j\} \tag{4.1}$$

přičemž platí, že $\inf\{\emptyset\} = \infty$ a $\tau_j(0) = 0$.

$\tau_j(1)$ je tedy náhodná veličina, která označuje náhodný okamžik, ve kterém Markovský řetězec po té, co opustil počáteční stav, poprvé vstoupí (vrátí se) do stavu j. Tato veličina může pak nabývat hodnot 1,2, … nebo hodnoty ∞. Vezměme nyní příklad (1.1), v tomto případě je $\tau_2(1) = 4$. Toto vyjádření nám říká, že se Markovský řetězec ocitl poprvé ve stavu $j = 2$ po 4 krocích.

Časy dalších návratů do stavu j můžeme definovat podobně:

$$\tau_j(k+1) = \inf\{n > \tau_j(k) : X_n = j\}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.2}$$

pokud $\tau_j(k) < \infty$.

Pokud Markovův řetězec $\{X_n\}$ vychází z počátečního stavu j, budeme podmíněné pravděpodobnosti $P(.|X_0 = j)$ značit jako

$$P_j(.) = P(.|X_0 = j).$$

Definice 4.2. Stav j Markovského řetězce se nazývá *trvalý*, jestliže řetězec, který vychází z j, se do j vrátí s pravděpodobností 1 po konečně mnoha krocích, tj.

$$P_j(\tau_j(1) < \infty) = 1. \tag{4.3}$$

Stav j se nazývá *přechodný* (transientní), jestliže řetězec, který vychází z j se s kladnou pravděpodobností do j nikdy nevrátí, tj.

$$P_j(\tau_j(1) = \infty) > 0. \tag{4.4}$$

Pro trvalé stavy dále ještě definujeme následující vztahy.

Věta 4.1. *Stav j je trvalý, právě když*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty. \tag{4.5}$$

Důkaz. Tento důkaz můžeme nalézt v [2, str. 29]. □

Poznámka 4.1. Stav j je přechodný, právě když

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty. \tag{4.6}$$

Předchozí vztahy (4.5) a (4.6) nám umožňují rozhodnout o stavu systému pouze na základě pravděpodobnosti $p_{jj}^{(n)}$ přechodu n-tého řádu, což je v řadě případů výhodné.

Dále označme symbolem $f_{ij}^{(n)}$ podmíněnou pravděpodobnost toho, že se řetězec začínající ve stavu i objeví poprvé ve stavu j po n krocích.

Platí:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(0)} &= 0, \\ f_{ij}^{(n)} &= P_i(\tau_j(1) = n), \quad n \geq 1 \\ f_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P_i(\tau_j(1) < \infty). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Vztah (4.7) nám určuje pravděpodobnost toho, že systém vůbec někdy přejde do stavu j. Můžeme vidět, že stav j je trvalý, jestliže $f_{jj} = 1$. Dále označme $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ jako střední dobu prvního návratu do stavu j. Trvalý stav je nenulový, pokud tato řada konverguje, a nulový, pokud tato řada diverguje. Je-li $f_{jj} < 1$, stav j je přechodný. Tyto vlastnosti jsou užitečné pro klasifikaci stavu řetězce.

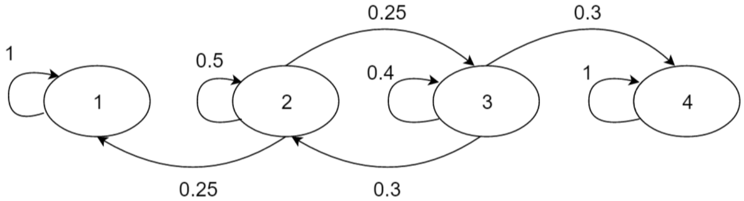
Nyní si zavedeme náhodnou veličinu N_j, která udává, kolikrát řetězec projde po opuštění počátečního stavu stavem j, tj.

$$N_j = \sum_{n=1}^{\infty} I(X_n = j) \tag{4.8}$$

Tato náhodná veličina nabývá hodnot $0, 1, 2, \ldots$

Příklad 4.1. Nechť je dán homogenní Markovský řetězec s množinou stavů $S = \{1, 2, 3, 4\}$ a maticí přechodu $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nakreslete přechodový diagram a klasifikujte stavy na trvalé a přechodné.

Řešení:



Obrázek 4.1: Přechodový diagram homogenního Markovského řetězce

Již z přechodového diagramu vyplývá, že pokud řetězec vstoupí do stavu 1 nebo do stavu 4, již z tohoto stavu nevystoupí. Stavy 1 a 4 jsou tedy trvalé, stavy 2 a 3 jsou přechodné. Tato tvrzení lze odvodit i na základě výše definovaných vztahů. Vyjde-li systém ze stavu 1 (tj. $p_1 = 1, p_j = 0, \forall j \neq 1$), vrátí se s pravděpodobností 1 po prvním kroku opět do tohoto stavu, tj.

$$
\begin{aligned}
f_{11}^{(1)} &= 1 \\
f_{11}^{(n)} &= 0, \quad \forall n \geq 2\,.
\end{aligned}
$$

Tedy $f_{11} = 1$ a stav 1 je proto trvalý.
Je-li systém v čase 0 ve stavu 2 (tj. $p_2 = 1$, $p_j = 0$, $\forall j \neq 2$), potom

$$
\begin{aligned}
f_{22}^{(1)} &= p_{22} = 0.5 \\
f_{22}^{(2)} &= P(X_2 = 2 | X_0 = 2 \wedge X_1 \neq 2) = P(X_2 = 2 \wedge X_1 = 3 \wedge X_0 = 2) \\
&= p_2 \cdot p_{23} \cdot p_{32} = 1 \cdot 0.25 \cdot 0.3 = 0.075 \\
f_{22}^{(3)} &= P(X_3 = 2 | X_0 = 2 \wedge X_1 \neq 2 \wedge X_2 \neq 2) = P(X_3 = 2 \wedge X_2 = 3 \wedge X_1 = 3 \wedge X_0 = 2) \\
&= p_2 \cdot p_{23} \cdot p_{33} \cdot p_{32} = 1 \cdot 0.25 \cdot 0.4 \cdot 0.3 = 0.075 \cdot 0.4
\end{aligned}
$$

Obdobně návrat do stavu 2 po čtyřech krocích je možný pouze po trase:

$$2 \to 3 \to 3 \to 3 \to 2$$

a tedy $f_{22}^{(4)} = 0.075 \cdot 0.4^2$
Stav 2 je tedy přechodný, protože

$$f_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} = 0.5 + 0.075 + 0.075 \cdot 0.4 + 0.075 \cdot 0.4^2 + \ldots = 0.5 + \frac{0.075}{1 - 0.4} = 0.625 < 1$$

Stejným postupem bychom mohli klasifikovat i zbylé dva stavy. Po výsledném výpočtu získáme, že $f_{33} = 0.55 < 1$, stav 3 je tedy přechodný. Pro stav 4 platí, že $f_{44} = f_{44}^{(1)} = 1$. Stav 4 je tedy trvalý.

4.2 Rozklad množiny stavů

V předchozí podkapitole jsme zmínili důležitost klasifikace stavu Markovského řetězce. V následující části se budeme zabývat rozkladem množiny stavů. Klasifikace stavu příslušného Markovova řetězce nám umožní rozčlenit tyto řetězce na dvě skupiny, řetězce rozložitelné a nerozložitelné, podle kritéria návratnosti dříve či později do libovolně zvoleného stavu. Pomocí tohoto rozdělení docílíme úplné klasifikace stavů z předcházející části této práce.

Definice 4.3. Řekneme, že stav j je *dosažitelný* ze stavu i, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Jestliže $p_{ij}^{(n)} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, říkáme, že j je *nedosažitelný* z i.

Poznámka 4.2. Každý stav je dosažitelný ze sebe samého, jelikož $p_{jj}^{(0)} = 1$.

Věta 4.2. *Nechť i,j,k $\in S$. Je-li stav j dosažitelný ze stavu i a stav k dosažitelný ze stavu j, je stav k dosažitelný ze stavu i.*

Definice 4.4. Stavy vzájemně dosažitelné nazýváme *sousledné*.

Z výše uvedené poznámky, věty a definice vyplývá, že souslednost stavů splňuje podmínky relace ekvivalence na množině S a můžeme tedy zavést tzv. *uzavřenou množinu stavů*.

Definice 4.5. Neprázdná množina stavů C se nazývá *uzavřená*, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C, tj. $p_{ij}^{(n)} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in C$ a $j \notin C$. Nejmenší uzavřená množina obsahující množinu C se nazývá *uzávěr* množiny C. Uzavřená množina stavů se nazývá *nerozložitelná*, jestliže neobsahuje žádnou uzavřenou vlastní podmnožinu.

Věta 4.3. *Množina stavů C je uzavřená tehdy a jen tehdy, když $p_{ij} = 0$ pro všechna $i \in C$, $j \notin C$.*

Důkaz. Tento důkaz můžeme nalézt v [2, str. 38]. □

Jestliže Markovský řetězec nabude hodnoty z uzavřené množiny stavů C, pak již nikdy neopustí tuto množinu. Jednoprvková uzavřená množina $C = \{i\}$, která obsahuje pouze 1 stav, se nazývá absorpční (pohlcující). Uveďme zde konkrétní příklad.

Příklad 4.2. Uvažujme částici, která se náhodně pohybuje na reálné přímce po celočíselných bodech $C = \{0, 1, \dots m\}$. V každém pohybu se částice přemístí o jednotku vpravo s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ nebo s pravděpodobností $q = 1 - p$ o jednotku vlevo. Jednotlivé kroky na sobě nezávisí. Pokud se částice dostane do stavu 0 nebo m, již se z tohoto stavu nedostane. Stavy $1, 2, \dots m - 1$ jsou všechny navzájem dosažitelné v S. Ze stavu 0 můžeme dosáhnout pouze stavu 0 a stejně tak ze stavu m je dosažitelný pouze stav m. Stavy 0 a m jsou absorpční neboli pohlcující.

Definice 4.6. Markovův řetězec se nazývá *nerozložitelný* (někdy označován jako ergodický), jestliže v něm neexistuje jiná uzavřená množina stavů než množina S všech stavů. V opačném případě je řetězec *rozložitelný*.

Věta 4.4. *Řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný právě tehdy, má-li matice pravděpodobností přechodu (po případném přečíslení stavů) tvar*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

kde $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{B}$ jsou čtvercové matice.

Důkaz. [2, str. 37] □

Množina stavů příslušná k $\boldsymbol{P}_1$ je uzavřená a řetězec je tedy rozložitelný. Stavy řetězce přečíslíme tak, aby jako první byly stavy z uvažované uzavřené množiny. Pokud přepíšeme odpovídajícím způsobem řádky a sloupce matice přechodu $\boldsymbol{P}$, získáme matici ve tvaru (4.9).

Pokud je množina S konečná, potom má matice přechodu (po přečíslení) následující tzv. *kanonický* tvar:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{P}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_2 & \cdots & \boldsymbol{Q}_r & \boldsymbol{R} \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

kde $\boldsymbol{P}_1, \ldots \boldsymbol{P}_r$ jsou čtvercové matice pravděpodobností přechodu mezi trvalými stavy v podřetězcích $C_1, \ldots C_r$, matice $\boldsymbol{Q}_1, \ldots \boldsymbol{Q}_r$ obsahují pravděpodobnosti přechodu z přechodných do trvalých stavů a $\boldsymbol{R}$ obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy. $C_1, \ldots C_r$ tvoří disjunktní rozklad množiny trvalých stavů na nerozložitelné množiny. Pro upřesnění, množina C_1 je množina všech stavů, kterých lze dosáhnout z trvalého stavu S nejnižším indexem tj. j_1. Pro řetězce s nekonečně mnoha stavy můžeme zapsat rozklad pro matice pravděpodobností přechodu analogicky. Množinu S lze zapsat ve tvaru:

$$S = Z \cup C_1 \cup C_2 \ldots, \tag{4.11}$$

kde Z je množina přechodných stavů a C_i jsou nerozložitelné uzavřené disjunktní množiny trvalých stavů. Množinu přechodných stavů budeme tedy značit S_Z a množinu stavů trvalých S_T.

Příklad 4.3. Nechť je dán Markovský řetězec $\{X_n\}$ z předchozího příkladu 4.1 s maticí přechodů $\boldsymbol{P}$. Najděte kanonický tvar této matice.

Řešení:

V předchozím příkladě jsme určili, že stavy 1 a 4 jsou trvalé a stavy 2 a 3 jsou přechodné. Podle definice kanonické matice tedy přečíslíme stavy podle nejnižších indexů a jako první budou stavy trvalé, následně pak stavy přechodné. Přesunutím stavů na pořadí 1, 4, 2, 3 dostaneme matici:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix},$$

Vidíme tedy, že $\boldsymbol{P}_1 = (1), \boldsymbol{P}_2 = (1), \boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$
Stavy 1 a 4 jsou sousledné pouze samy se sebou. Řetězec je tedy rozložitelný a $S_T = \{1\} \cup \{4\}$, $S_Z = \{2, 3\}$.

4.3 Absorpční homogenní Markovské řetězce

V předchozí podkapitole jsme se zabývali klasifikací stavů a rozkladem možiny stavů Markovských řetězců. Ukázali jsme, že platí vztah

$$S = Z \cup C_1 \cup C_2 \ldots, \tag{4.12}$$

kde Z je množina přechodných stavů a C_i jsou nerozložitelné uzavřené disjunktní množiny. Pokud tyto množiny budou obsahovat pouze jeden prvek, odpovídají tzv. *absorpčním stavům.*

Definice 4.7. Nechť $\{X_n\}$ je homogenní Markovský řetězec s množinou stavů S. Řekneme, že stav $j \in S$ je absorpční stav, jestliže $p_{jj} = 1$ (tzn., že ze stavu j není dosažitelný žádný jiný stav).

Poznámka 4.3. Když řetězec vstoupí do absorpčního stavu, řekneme, že je absorbován.

Z definice trvalého stavu 4.2 vyplývá, že každý absorpční stav je trvalým stavem.

Definice 4.8. Homogenní Markovský řetězec s konečnou množinou stavů se nazývá absorpční, jestliže každý jeho trvalý stav je absorpční.

Nyní uvažujme řetězec $\{X_n\}$ s množinou přechodných stavů S_Z a definujme náhodnou veličinu

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin S_Z\}, \tag{4.13}$$

která označuje čas výstupu z množiny přechodných stavu S_Z. Tato náhodná veličina nabývá hodnot $0, 1, \ldots$ a s kladnou pravděpodobností také hodnoty $\tau = \infty$. Tato situace může nastat, pokud $S_Z = S$. V tomto případě je $P_i = (\tau = \infty) = 1$ pro každé $i \in S$. Dále budeme předpokládat, že řetězec po konečně mnoha krocích vystoupí z množiny přechodných stavů S_Z a vstoupí do množiny stavů trvalých. To znamená, že $P_i = (\tau < \infty)$ pro všechna i. V této množině poté řetězec zůstane.

Nechť X_τ je stav, do kterého řetězec vstoupí po opuštění množiny přechodných stavů S_Z. Definujme pravděpodobnosti

$$b_{ij} = P_i(X_\tau = j), \ i \in S_Z, j \notin S_Z. \tag{4.14}$$

Pokud je j absorpční stav, potom b_{ij} je pravděpodobnost, že řetězec začínající v přechodném stavu i je stavem j absorbován. Nechť C_k je nějaká uzavřená nerozložitelná množina trvalých stavů, pravděpodobnost toho, že řetězec setrvá v této množině, je

$$b_i(C_k) = P_i(X_\tau \in C_k) = \sum_{j \in C_k} b_{ij} \tag{4.15}$$

Nyní si definujeme fundamentální matici absorpčního Markovského řetězce, která se využívá při výpočtu matice přechodu do absorpčních stavů $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$. Tato matice je složená z pravděpodobností, které určují, jaká je šance, že řetězec, který začal ve stavu i, skončí v absorpčním stavu j.

Definice 4.9. Nechť $\{X_n\}$ je absorpční řetězec s konečnou množinou stavů, který má r absorpčních a s neabsorpčních stavů. Stavy přečíslujeme tak, aby po r absorpčních stavech následovalo s neabsorpčních. Matice pravděpodobností přechodu má potom kanonický tvar $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice řádu r, $\boldsymbol{O}$ je nulová matice řádu $r \times s$, $\boldsymbol{R}$ je matice typu $s \times r$, která obsahuje pravděpodobnosti přechodu z neabsorpčních do absorpčních stavů. $\boldsymbol{Q}$ je čtvercová matice řádu s obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy.

Věta 4.5 (Věta o pravděpodobnostech přechodu do absorpčních stavů)**.** *Označme b_{ij} pravděpodobnost, že řetězec vycházející z neabsorpčního stavu i bude absorbován ve stavu j. Sestavíme matici $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{i \in J_N, j \in J_A}$. Potom platí, že $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{MR}$, kde $\boldsymbol{M}$ je tzv. fundamentální matice a $\boldsymbol{R}$ obsahuje pravděpodobnosti přechodu z neabsorpčních do absorpčních stavů.*

Důkaz. Nechť i je neabsorpční stav a j absorpční. Stavu j může být dosaženo 1. krokem s pravděpodobností p_{ij} nebo přechodem do neabsorpčního stavu k s pravděpodobností p_{ik} a odtud přechodem do absorpčního stavu j s pravděpodobností b_{kj}. Tedy

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in J_N} p_{ik} \, b_{kj}$$

Maticově zapsáno jako

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{R} + \boldsymbol{QB}, \\ \boldsymbol{B} - \boldsymbol{QB} &= \boldsymbol{R}, \\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{MR} \end{aligned}$$

□

Poznámka 4.4. Matice $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice řádu s, se nazývá *fundamentální matice absorpčního řetězce.* Prvek m_{ik} matice $\boldsymbol{M}$ nám udává střední hodnotu počtu kroků, které řetězec vycházející z neabsorpčního stavu i stráví ve stavu k předtím, než bude absorbován. Matice $\boldsymbol{M}$ se také nazývá *matice středních dob přechodu.* Střední hodnotu počtu kroků, které řetězec vycházející z neabsorpčního stavu i a končící v absorpčním stavu j stráví v neabsorpčních stavech, vypočítáme jako součet prvků v i-tém řádku fundamentální matice $\boldsymbol{M}$. Maticově tento vztah můžeme zapsat jako $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{e}$, kde $\boldsymbol{e}$ je sloupcový jednotkový vektor.

4.4 Stacionární rozdělení Markovského řetězce

Nerozložitelné Markovské řetězce generují za určitých podmínek v čase $n \to \infty$ jediné rozdělení pravděpodobnosti. Toto rozdělení se nazývá *stacionární* a popisuje chování řetězce v jeho ustálené podobě po dostatečně dlouhém sledování. Stacionární rozdělení představuje jednu z klíčových charakteristik Markovských řetězců a vyskytuje se tak velice často v praktických úlohách.

Definice 4.10. Pokud jsou všechny stavy řetězce vzájemně dosažitelné, tzn. je možné se dostat z jednoho stavu do druhého po nějakém počtu kroků, nazýváme tento řetězec *regulárním.*

Z definice regulárního řetězce vyplývá, že do původního stavu řetězce se můžeme kdykoliv vrátit. Pro regulární řetězce existuje

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \end{pmatrix}$$

Výše uvedený vztah znamená, že nezávisle na stavu v čase $t = 0$, skončí řetězec s pravděpodobností a_1 ve stavu 1, s pravděpodobností a_2 ve stav 2, ...

Definice 4.11. Nechť existuje pravděpodobnostní vektor Markovského řetězce $\boldsymbol{p}(n)$, potom stochastický vektor $\boldsymbol{a}$, pro který platí

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}(n) = \lim_{n\to\infty} (p_1(n), p_2(n), \dots p_N(n)) = (a_1, a_2, \dots a_N) = \boldsymbol{a},$$

je tzv. *stacionární rozložení daného Markovského řetězce.* Vektor $\boldsymbol{a}$ také někdy nazýváme *limitním (stacionárním) vektorem.*

Výpočet limitního vektoru můžeme odvodit z dříve uvedeného rekurentního vztahu (2.8). Pokud $n \to \infty$ potom

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}, \tag{4.16}$$

kde $\boldsymbol{P}$ je matice pravděpodobností přechodu daného Markovského řetězce.

Pro stacionární rozdělení daného řetězce tedy platí:

$$a_j = \sum_{k \in S} a_k\, p_{kj}, \quad j \in S. \tag{4.17}$$

Poznámka 4.5. Vektor $\boldsymbol{a}$ ukazuje, s jakými pravděpodobnostmi se systém dostane do jednotlivých stavů, budeme-li tento systém pozorovat dostatečně dlouhou dobu.

Věta 4.6. *Nechť je dán nerozložitelný Markovův řetězec. Potom platí:*

1. Jsou-li všechny jeho stavy přechodné nebo všechny trvalé nulové, stacionární rozdělení neexistuje.

2. Jsou-li všechny jeho stavy trvalé nenulové, stacionární rozdělení existuje a je jediné.

Důkaz. Důkaz nalezneme v [2, str. 51–53]. □

Příklad 4.4. Vypočtěte stacionární rozdělení Markovského řetězce z příkladu 2.1.

Řešení:

Výpočet limitního vektoru $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}$$

$$(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3}\, a_1 + \frac{1}{2}\, a_2 + 0\, a_3 \\ a_2 &= \frac{2}{3}\, a_1 + \frac{1}{4}\, a_2 + \frac{3}{4}\, a_3 \\ a_3 &= 0\, a_1 + \frac{1}{4}\, a_2 + \frac{1}{4}\, a_3 \end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Z násobení vektoru a matice nám plynou pouze tři rovnice. Dále však musíme uvažovat, že součet jednotlivých složek stacionárního vektoru je roven jedné, jelikož se jedná o stochastický vektor. Bez této podmínky by měla soustava nekonečně mnoho řešení. Přidáním této podmínky prostřednictvím čtvrté rovnice zafixujeme právě jedno řešení.

Po vyřešení soustavy dostáváme jednotlivé složky limitního vektoru:

$$a_1 = 0.36$$

$$a_2 = 0.48$$

$$a_3 = 0.16$$

Stacionární rozdělení řetězce je tedy $\boldsymbol{a} = (0.36, 0.48, 0.16)$. Tohoto rozdělení by řetězec dosáhl po dostatečné době sledování. V našem případě odpovídá výše uvedenému výpočtu pravděpodobnostího vektoru po 20 krocích a tento počet kroků byl tedy dostatečný.

Kapitola 5

Aplikace Markovských řetězců

Doposud uvedené příklady měly spíše ilustrativní charakter a jejich účelem bylo zejména objasnění základních pojmů a teorie. V následující části práce ukážeme, že se Markovské řetězce využívají i pro řešení praktických problémů např. z oblasti genetiky a ekonomie. Vzhledem k rozsahu této práce jsou proto zpracovány pouze dvě oblasti, i když možnost uplatnění Markovských řetězců je mnohem širší. Následující kapitola je mimo jiné zpracována především podle [5] a [6].

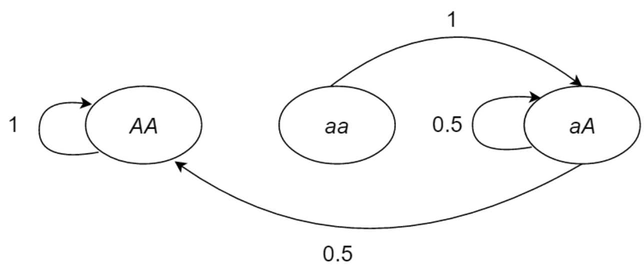
5.1 Využití Markovských řetězců v genetice

U jedinců určitého typu je dán výskyt sledované vlastnosti dvojicí alel A, a. Každý jedinec může mít dvojici alel aa (recesivní homozygot), AA (dominantní homozygot) a $aA = Aa$ (hybridní jedinec). Základním genetickým předpokladem je, že při křížení dostává potomek jednu alelu od každého z rodičů. Tyto alely se vybírají náhodně a nezávisle na sobě.

Příklad 5.1. Pomocí homogenního Markovského řetězce modelujte zkřížení diploidní cizosprašné rostliny s dominantním homozygotem. Diploidní rostlina má dvě sady chromozomů. Jednoduše můžeme vysvětlit, že cizosprašná rostlina potřebuje v době květu pro opýlení přítomnost jiné kvetoucí odrůdy, tzv. opylovače. Najděte matici přechodu a stacionární rozložení daného řetězce. Pokud se bude jednat o absorpční řetězec, najděte fundamentální matici a matici přechodu do absorpčních stavů.

Řešení:
Zaveďme homogenní Markovský řetězec $\{X_n\}$ s množinou stavů $S = \{1, 2, 3\}$, kde $X_n = 1$, pokud v n-tém kroku pokusu získáme dominantního jedince, $X_n = 2$, pokud v n-tém kroku pokusu dostaneme recesivního jedince a $X_n = 3$, když v n-tém kroku pokusu získáme hybridního jedince. V prvním sloupci jsou tedy tři různé možnosti dvojicí alel původní rostliny, kterou křížíme s dominantním homozygotem, tedy s dvojicí alel AA. Stanovení matice přechodu:

$$AA \times AA \Rightarrow AA, AA, AA, AA$$
$$aa \times AA \Rightarrow aA, aA, aA, aA$$
$$aA \times AA \Rightarrow aA, AA, aA, AA$$



$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Obrázek 5.1: Přechodový diagram homogenního Markovského řetězce a matice pravděpodobností přechodu – křížení s dominantním homozygotem.

Z přechodového diagramu můžeme určit, že stavy 2 a 3 jsou přechodné a stav 1 je trvalý. Ze stavu 1 není dosažitelný žádný jiný stav tzn. že stav 1 absorpční a jde tedy o absorpční řetězec. Stacionární rozložení můžeme spočítat pomocí vztahu $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}$, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Řešíme soustavu rovnic:

$$a_1 = a_1 + \frac{1}{2} a_3$$
$$a_3 = a_2 + \frac{1}{2} a_3$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Po vyřešení soustavy získáváme jednotlivé složky vektoru:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0$$

Stacionární rozložení daného řetězce je tedy $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)$. Toto rozložení nám říká, že při křížení diploidní cizosprašné rostliny s dominantním homozygotem po dostatečném počtu kroků získáme vždy dominantního homozygota.

Výpočet fundamentální matice:

Matice $\boldsymbol{P}$ je již převedena do kanonického tvaru $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}$, kde $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$. Fundamentální matici spočítáme pomocí vztahu $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$.

$$\boldsymbol{M} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

První řádek matice $\boldsymbol{M}$ můžeme interpretovat tak, že pokud se řetězec v daném okamžiku nachází ve stavu 2 (tj. recesivní homozygot), tak se před absorpcí ve stavu dominantního homozygota (stavu 1) ocitne průměrně jednou ve stavu recesivního homozygota a dvakrát ve stavu hybrida. Obdobně můžeme interpretovat druhý řádek.

Výpočet matice přechodu do absorpčních stavů:

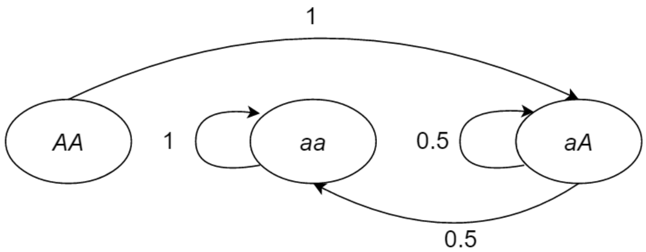
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{MR} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Je-li řetězec v daném okamžiku ve stavu 2, tzn. recesivní homozygot, nebo ve stavu 3, tzn. hybrid, tak s pravděpodobností 1 bude absorbován ve stavu dominantního homozygota.

Příklad 5.2. Obdobně postupujte, pokud byste cizosprašnou rostlinu křížili s recesivním homozygotem, tedy s dvojicí alel aa.
Řešení:

$$AA \times aa \Rightarrow Aa, Aa, Aa, Aa$$
$$aa \times aa \Rightarrow aa, aa, aa, aa$$
$$aA \times aa \Rightarrow aa, aa, Aa, Aa$$

Přechodový diagram a matice pravděpodobností přechodu by vypadaly následovně:



$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Obrázek 5.2: Přechodový diagram homogenního Markovského řetězce a matice pravděpodobností přechodu – křížení s recesivním homozygotem.

Tento řetězec má stavy 1 a 3 přechodné a stav $2 = aa$ trvalý. Stav 2 je navíc absorpční, jelikož z tohoto stavu nelze dosáhnout žádného jiného. Jedná se tedy také o absorpční řetězec. Pokud bychom si podle předchozího řešení sestavili příslušnou soustavu rovnic, získali bychom po jejím vyřešení stacionární rozložení řetězce $\boldsymbol{a} = (0, 1, 0)$. To znamená, že po dostatečném počtu opakování křížení diploidní cizosprašné rostliny s recesivním homozygotem získáme vždy recesivního homozygota.

Pro výpočet fundamentální matice řetězce je nejprve zapotřebí převést matici do kanonického tvaru. Matice $\boldsymbol{P}$ bude po přečíslování stavů vypadat následovně:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \text{kde } \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \text{ a } \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

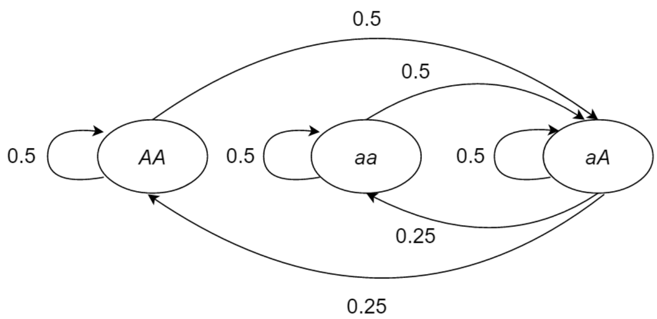
Po příslušném výpočtu získáme fundamentální matici $\boldsymbol{M}$ a matici přechodu do absorpčních stavů $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fundamentální matice vypadá stejně jako v předchozím případě, je však nutné si uvědomit přečíslování stavů. Řádky této matice můžeme tedy interpretovat tak, že pokud se řetězec v daném okamžiku nachází ve stavu 1 (tj. dominantní homozygot), tak se v průměru jedenkrát ocitne ve stavu dominantního homozygota a dvakrát ve stavu hybrida před absorpcí recesivním homozygotem. Obdobně, pokud se řetězec nachází v daném okamžiku ve stavu 3 (tj. hybrid), tak se v průměru před absorpcí recesivním homozygotem ocitne dvakrát ve stavu hybrida. Matice $\boldsymbol{B}$ nám říká, že pokud se řetězec nachází ve stavu 1 nebo 3, tak s pravděpodobností 1 bude absorbován ve stavu 2 (tj. recesivní homozygot).

Příklad 5.3. Stejným způsobem výpočtu postupujte i u třetí možnosti, a to křížení diploidní cizosprašné rostliny s hybridem.

Řešení:



$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Obrázek 5.3: Přechodový diagram homogenního Markovského řetězce a matice pravděpodobností přechodu – křížení s hybridem.

Již z přechodového diagramu můžeme odvodit, že tento řetězec nemá žádné absorpční stavy. Nejedná se tedy o absorpční řetězec a nelze určit fundamentální matici. Proto zde uvedeme pouze výpočet stacionárního rozložení daného řetězce a jeho význam. Podle vzorce $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}$ získáme soustavu rovnic:

$$a_1 = 0.5\,a_1 + 0.25\,a_3$$

$$a_2 = 0.5\,a_2 + 0.25\,a_3$$

$$a_3 = 0.5\,a_1 + 0.5\,a_2 + 0.25\,a_3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1,$$

kde

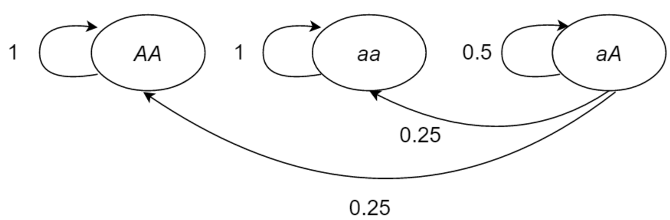
$$a_1 = 0.25$$
$$a_2 = 0.25$$
$$a_3 = 0.5$$

Stacionární rozložení tohoto řetězce nám říká, že po dostatečně velkém počtu kroků křížení diploidní cizosprašné rostliny s hybridním jedincem získáme s pravděpodobností 0.25 dominantního jedince, s pravděpodobností 0.25 recesivního jedince a s pravděpodobností 0.5 hybridního jedince.

Příklad 5.4. Nyní vezměte situaci odlišnou. Budete křížit diploidní samosprašnou rostlinu. Vezměte tedy jedince z této populace a samospraště ho (tzn. zkřižte ho se stejnou dvojicí alel). Následně vezměte jedince z jeho populace a opět ho samospraště, atd.

Řešení:
Možné výsledky budou tedy:

$$AA \times AA \Rightarrow AA, AA, AA, AA$$
$$aa \times aa \Rightarrow aa, aa, aa, aa$$
$$aA \times aA \Rightarrow aa, aA, aA, AA$$



$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Obrázek 5.4: Přechodový diagram homogenního Markovského řetězce a matice pravděpodobností přechodu - křížení samosprašné rostliny.

Řetězec má dva trvalé stavy a to stav 1 a 2, které jsou absorpční. Jedná se tedy o absorpční řetězec. Pokud bychom se snažili vypočítat stacionární rozložení, zjistili bychom, že neexistuje. Daná soustava má nekonečně mnoho řešení. Matice $\boldsymbol{P}$ je již v kanonickém tvaru a fundamentální matici $\boldsymbol{M}$ vypočteme jako:

$$\boldsymbol{M} = (1 - 0.5)^{-1} = 2$$

To znamená, že pokud je v dané chvíli řetězec ve stavu hybrida, tak v něm setrvá v průměru 2 kroky, než bude absorbován ve stavu dominantního nebo recesivního homozygota. Matici $\boldsymbol{B}$ vyjádříme jako:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{MR} = 2 \cdot (0.25\ 0.25) = (0.5\ 0.5)$$

Je-li řetězec ve stavu 3 (tj. hybrid), bude s pravděpodobností 0.5 absorbován ve stavu recesivního či dominantního homozygota.

5.2 Markovovy řetězce s výnosy

Díky teorii Markovských řetězců jsme schopni z pravděpodobnostního hlediska určit, v jakém stavu se proces s výše definovanou markovskou vlastností, v daném časovém okamžiku (kroku) nachází. Pokud hovoříme o rozhodování v ekonomické oblasti, je zapotřebí zavést určitá ocenění. Zde se nabízejí dvě možnosti, *ocenit stavy nebo ocenit přechody.* Pokud zavedeme tato ocenění, můžeme hledat možné kombinace průchodů systémů, tzv. *cesty vývoje systému* jednotlivými stavy, které pro nás budou z daných hledisek optimální.

Předpokládejme, že s přechodem systému ze stavu i do stavu j je spojen výnos (zisk, náklady, ztráty apod.) označovaný r_{ij}. Výnosy pro všechny dvojice stavů tvoří matici hodnocení přechodů $\boldsymbol{R}$, kde

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix}.$$

Dále označíme $v_i(n)$ jako *střední hodnotu celkového výnosu procesu po n krocích podmíněnou počátečním stavem i.* Pro $v_i(n)$ platí rekurentní vztah

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(r_{ij} + v_j(n-1)) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1), \text{ kde } q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij} \qquad (5.1)$$

Maticově můžeme tento vztah vyjádřit následovně:

$$\boldsymbol{v}(n) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{v}(n-1)$$

Poznámka 5.1. Je-li $\{X_n\}$ homogenní Markovský řetězec s množinou stavů $S = \{0, 1 \dots N\}$ s oceněním přechodů nerozložitelný, pak existuje jeho stacionární rozložení $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty} (v_i(n+1) - v_i(n)) = \sum_{j=0}^{N} a_j q_j = g$$

Konstanta g se nazývá *zisk řetězce.*

Příklad 5.5. Firma dala do prodeje výrobek, který z hlediska další výroby charakterizujeme jako tržně úspěšný, pokud se ho prodá alespoň stanovený počet kusů, a naopak jako tržně neúspěšný, pokud se ho prodá méně než stanovený počet kusů. Sledování vývoje spotřeby ukázalo, že je-li výrobek tržně úspěšný v jednom období, pak v dalším období ze 40 % zůstane úspěšným a z 60 % se stane neúspěšným. Výrobek, který je tržně neúspěšný v jednom období, zůstane v dalším období z 50 % neúspěšný a z 50 % se stane úspěšným. Pro $i = 1, 2$ položíme $v_i(0) = 0$. Pro oba stavy vypočtěte střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za $n = 1, 2, \dots, 5$ a určete zisk řetězce. Matice ocenění $\boldsymbol{R}$, která jednotlivým přechodům přiřazuje výnosy, popř. ztráty (v CZK), je dána jako:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Uvažujeme 2 stavy systému, tedy $S = \{1; 2\}$:

- výrobek je tržně úspěšný: $s_1 = 1$
- výrobek je tržně neúspěšný: $s_2 = 2$

Matice pravděpodobností přechodu má tvar:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Podle vztahu (5.1) vypočteme střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu 1 resp. 2 jako:

$$q_1 = \sum_{j=1}^{2} p_{1j} r_{1j} = p_{11} r_{11} + p_{12} r_{12} = 0.4 \cdot 9 + 0.6 \cdot 3 = 5.4$$
$$q_2 = \sum_{j=1}^{2} p_{2j} r_{2j} = p_{21} r_{21} + p_{22} r_{22} = 0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot (-7) = -2$$

Nyní vypočítáme $\boldsymbol{v}(1)$ a $\boldsymbol{v}(2)$ jako

$$\boldsymbol{v}(1) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} 5.4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.4 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{v}(2) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}(1) = \begin{pmatrix} 5.4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.36 \\ -0.3 \end{pmatrix}$$

n	1	2	3	4	5
$v_0(n)$	5.4	6.36	7.764	9.1236	10.48764
$v_1(n)$	-2	-0.3	1.03	2.397	3.7603
$v_0(n+1) - v_0(n)$	0.96	1.404	1.3596	1.36404	$\cdots$
$v_1(n+1) - v_1(n)$	1.7	1.33	1.367	1.3633	$\cdots$
$v_0(n) - v_1(n)$	7.4	6.66	6.734	6.7266	6.72734

Tabulka 5.1: Střední hodnoty celkových výnosů pro $n = 1, 2, \dots 5$

Z výpočtů vidíme, že s rostoucím n se rozdíl $v_0(n) - v_1(n)$ blíží konstantě 6,727. Znamená to, že když je výrobek na počátku sledovaného období tržně úspěšný, tak po dostatečně dlouhé době získá výnos o 6.727 jednotek vyšší než v případě, kdy je výrobek na počátku tržně neúspěšný. Dále můžeme pozorovat rozdíl mezi $v_i(n+1) - v_i(n)$, který se v našem případě blíží k 1.364. To souvisí s limitními vlastnostmi řetězce.

K výpočtu zisku řetězce je nutné znát stacionární rozložení. Řešením příslušné soustavy rovnic získáme $\boldsymbol{a} = \left(\frac{4}{11}, \frac{6}{11}\right)$. Zisk řetězce pak můžeme spočítat jako

$$g = \frac{4}{11} \cdot 5.4 + \frac{6}{11} \cdot (-2) = 0.8\overline{72}$$

Závěr

Cílem této práce bylo podat přehled vlastností Markovských řetězců s využitím stochastických matic a ukázat některé jejich aplikace. První část práce zavádí obecně stochastické procesy. Na příkladech s grafy je přehledně ukázáno, jaký je rozdíl mezi diskrétním a spojitým časem a stavem. Toto rozlišení je klíčové k následnému zavedení Markovských řetězců a procesů. Druhá kapitola se zabývá základními vztahy, popř. jejich odvozeními. Dále se práce z důvodu rozsahu pouze stručně zmiňuje o Markovských procesech se spojitým časem. Čtvrtá kapitola podrobně rozebírá jednotlivé vlastnosti Markovských řetězců. Na příkladech je ukázáno využití zavedených definic a vět. Poslední kapitola práce zpracovává vybrané aplikace. Aplikace byly zaměřeny na Markovské řetězce s využitím v genetice a Markovské řetězce s výnosy.

Aplikacím Markovských řetěců by se samozřejmě dalo věnovat i podrobněji, např. prostřednictvím metod Monte Carlo. To by však bylo již nad rámec této bakalářské práce. Na tuto práci by bylo vhodné navázat studiem Markovských procesů se spojitým časem.

Literatura

[1] HRON Karel a KUNDEROVÁ Pavla. *Markovovy řetězce a jejich aplikace.* 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 135 s., 2012, ISBN 978-80-244-3132-1.

[2] LACHOUT Petr a PRÁŠKOVÁ Zuzana. *Základy náhodných procesů I.* 2. vyd., V Matfyzpressu 1. vyd Praha: Matfyzpress, 158 s., 2012, ISBN 978-80-7378-210-8.

[3] FIEDLER Miroslav. *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice.* 1. vyd., SNTL: Nakladatelství technické literatury, 272 s., 1981.

[4] BUDÍKOVÁ Marie. *Cvičení k předmětu Markovské řetězce (M5444),.* [online][cit. 2016-03-15]. Dostupné z `https://is.muni.cz/el/1431/podzim2015/M5444/um/58989404/`.

[5] LUKÁŠ Ladislav. *Pravděpodobnostní modely v managementu (Markovovy řetězce a systémy hromadné obsluhy).* 1. vyd., Česká matice technická: Nakladatelství Academia, 135 s., 2009, ISBN 978-80-200-1704-8.

[6] BUDÍKOVÁ Marie. *Přednášky k předmětu Markovské řetězce (M5444),.* [online][cit. 2016-03-10]. Dostupné z `https://is.muni.cz/el/1431/podzim2015/M5444/um/58989323/`.