

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

## Diplomová práce

Bc. Barbora Peterková

Aplikace moderních forem výuky ve vyučování  
matematiky pro 8. ročník ZŠ

Olomouc 2023

vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

**Prohlášení:**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a použila pouze literaturu uvedenou v seznamu literatury.

V Olomouci dne \_\_\_\_\_

.....

Bc. Barbora Peterková

## **Poděkování**

Děkuji doc. RNDr. Jitce Laitochové za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady a vstřícnost při konzultacích k diplomové práci.

# Obsah

<b>Úvod</b> .....	<b>6</b>
<b>1. Matematika a její aplikace v RVP ZV</b> .....	<b>7</b>
1.1. Matematika a její aplikace .....	9
1.2. Cílové zaměření vzdělávací oblasti .....	11
1.3. Tematické celky pro 8. ročník ZŠ .....	12
<b>2. Moderní přístupy k výuce matematiky</b> .....	<b>15</b>
2.1. Konstruktivistické pojetí výuky .....	15
2.2. Aktivizační metody ve výuce .....	17
2.3. Interaktivní výuka .....	18
2.3.1. Online nástroje pro interaktivní výuku matematiky .....	20
<b>3. Vypracované tematické celky</b> .....	<b>22</b>
3.1. Druhá mocnina a odmocnina .....	24
3.2. Mocnina s přirozeným mocnitelem .....	34
3.3. Pythagorova věta .....	42
3.4. Výrazy .....	49
3.5. Lineární rovnice .....	64
3.6. Základy statistiky .....	77
3.7. Kružnice a kruh .....	84
3.8. Konstrukční úlohy .....	98
3.9. Válec .....	110
<b>4. Orientační výzkum</b> .....	<b>117</b>
4.1. Výsledky orientačního výzkumného šetření .....	118
<b>Závěr</b> .....	<b>133</b>
<b>Seznam použitých zdrojů</b> .....	<b>134</b>
Elektronické zdroje .....	136
Videa .....	139

<i>Obrázky</i> .....	140
<b>Seznam zkratk</b> .....	<b>141</b>
<b>Seznam obrázků a grafů</b> .....	<b>142</b>
<b>Seznam příloh</b> .....	<b>145</b>

# Úvod

Momentální stav vyučování matematiky v posledních letech uplatňuje nový přístup ke vzdělávání, který klade důraz na aktivní zapojení studentů a na rozvoj kritického myšlení. V současné době se také kladou větší nároky na přizpůsobení výuky jednotlivým studentům. To znamená, že výuka matematiky musí být více diferencovaná, aby byla vhodná pro studenty různých úrovní a s různými potřebami. Zároveň je důležité, aby výuka byla motivující a přístupná pro studenty s různými zájmy a talentem.

Moderní formy výuky se tak staly v poslední době nedílnou součástí vzdělávání, a to díky jejich efektivitě a zábavnosti. Tyto interaktivní prvky, jako jsou videa, prezentace, hry, interaktivní tabule a online platformy, přinášejí mnoho výhod, včetně aktivnější účasti studentů na výuce, zlepšení motivace a angažovanosti. Moderní formy výuky navíc umožňují personalizaci výuky a přizpůsobení se individuálním potřebám studentů, což je zvláště důležité při výuce matematiky, která může být pro mnoho studentů náročná.

Přestože jsou k dispozici různé materiály pro výuku, včetně pracovních listů, často nejsou tyto materiály dostupné zdarma a mnohdy neodpovídají aktuálním požadavkům na interaktivní a aktivizační výuku matematiky. Z tohoto důvodu jsem se rozhodla vytvořit pracovní listy, které by splňovaly tyto nároky a byly by zdarma dostupné pro všechny pedagogy matematiky.

V rámci diplomové práce se nebudu soustředit pouze na tvorbu aktivizačních pracovních listů, ale budu se také věnovat přehledu moderních přístupů k výuce matematiky. Budu se zabývat novými metodami výuky, které jsou založeny na interaktivitě a zapojení studentů. Dále se zaměřím na využití moderních technologií, jako jsou online platformy a aplikace, které mohou výuku matematiky zefektivnit a zpříjemnit.

Cílem této diplomové práce je tvorba pracovních listů s aktivizačními prvky, které by měly žákům usnadnit porozumění učivu a zlepšit jejich motivaci a pozitivní vztah k matematice. Pracovní listy budou strukturované, přehledné a co nejvíce přizpůsobené potřebám a schopnostem studentů. Součástí práce bude také orientační šetření zaměřené na praktické využití ve vyučování.

# 1. Matematika a její aplikace v RVP ZV

Rámcové vzdělávací programy (RVP) představují závazný rámec pro vytváření školních vzdělávacích programů ve všech vzdělávacích oblastech na různých úrovních škol. RVP stanovují konkrétní cíle, formy, délku a povinný obsah vzdělávání, podmínky průběhu a ukončení vzdělávání, profesní profil a organizační uspořádání. Dále stanovují obecné podmínky pro vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a upravují podmínky personální a materiální, podmínky bezpečnosti a ochrany zdraví.<sup>1</sup>

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV) navazuje na koncept a obsah rámcového vzdělávacího programu pro předškolní vzdělávání. RVP ZV reflektuje novou strategii vzdělávání, která klade důraz na rozvoj klíčových kompetencí a jejich propojení se vzdělávacím obsahem. RVP ZV definuje nezbytný základ povinného základního vzdělávání žáků, včetně očekávaných výstupů a učiva. Jde o otevřený dokument, který bude průběžně inovován v souladu s proměnlivými potřebami společnosti, zkušenostmi učitelů a měnícími se potřebami a zájmy žáků.<sup>2</sup>

RVP ZV byl poprvé vydán v roce 2005 v rámci implementace nového vzdělávacího systému v České republice. Od té doby byl několikrát upravován a aktualizován s ohledem na měnící se potřeby společnosti. V oblasti vzdělávání Matematika a její aplikace si od roku 2005 neprošla žádnou větší změnou v obsahu vzdělávacího oboru, avšak změnilo se znění charakteristiky vzdělávacích oblastí. V RVP ZV z roku 2010 dochází k rozšíření vzdělávací oblasti o témata významového porozumění operacím, závislostem, vztahům a práci s daty. Tato rozšířená témata umožňují studentům hlouběji porozumět matematice jako nástroji pro analýzu a interpretaci reálných situací. Momentální znění klade důraz na analýzu grafů, tabulek a dat, provádění analýzy datových sad. Tím se zvyšuje jejich schopnost aplikovat matematiku v reálném světě a rozvíjí kritické myšlení a analytické schopnosti.<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup> *Rámcové vzdělávací programy. Národní pedagogický institut České republiky [online].* Praha, 2021 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.npi.cz/ramcove-vzdelavaci-programy>

<sup>2</sup> *Rámcový vzdělávací program základního vzdělávání [online].* Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2021, s. 5-6 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://revize.edu.cz/files/rvp-zv-2021.pdf>

<sup>3</sup> *Rámcový vzdělávací program základního vzdělávání [online].* Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2010, s. 29-30 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.msmt.cz/file/21592>

V roce 2013 byl RVP ZV rozšířen o přílohu obsahující standardy pro základní vzdělávání, které představují minimální cílové požadavky na vzdělání. Tyto standardy zahrnují seznam indikátorů, tedy konkrétních dovedností, které žák musí prokázat k dosažení daného výstupu. Tímto způsobem jsou jasně definovány očekávané výstupy vzdělávání a zároveň je umožněno měřit a hodnotit úroveň dosažených dovedností žáků.<sup>4</sup>

V roce 2021 je vydáno nové RVP ZV, které je součástí tzv. „malé revize“, která proběhla na základě potřeby uplatit digitální kompetenci do již ustáleného souboru klíčových kompetencí, které by měl žák v rámci základního vzdělávání získat. Nové RVP ZV reflektuje stále se měnící potřeby společnosti a klade důraz na rozvoj digitálních dovedností žáků, které jsou v dnešní době stále důležitější.

---

<sup>4</sup> Standardy pro základní vzdělávání: Matematika a její aplikace [online]. Praha: Národní pedagogický institut České republiky, 2013 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=67490&view=9832>



## 1.1. Matematika a její aplikace

V základním vzdělávání je kladen důraz na aktivní práci s matematickými objekty a použití matematiky v reálných situacích. Matematika a její aplikace jsou nezastupitelnou součástí celého základního vzdělávání, které připravuje žáky na úspěšné studium a poskytuje jim potřebné znalosti pro praktický život a rozvoj matematické gramotnosti.

V rámci Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání je matematika zastoupena jako samostatný vyučovací předmět ve všech devíti ročnících, s minimální časovou dotací 20 vyučovacích hodin na 1. stupni a 15 vyučovacích hodin na 2. stupni. Vzdělávací oblast je dále rozdělena do čtyř tematických okruhů, které se zaměřují na různé části matematiky a rozvíjí dovednosti související s danými tématy.

Prvním tematickým okruhem je Číslo a početní operace, který na druhém stupni navazuje okruhem Číslo a proměnná. V rámci tohoto okruhu se žáci seznamují s aritmetickými operacemi, učí se rozumět algoritmům a chápat důvody, proč jsou operace prováděny daným způsobem. Dovedou aplikovat matematické operace na reálné situace a získávat údaje měřením, výpočtem, odhadem nebo zaokrouhlením. Rozumí významu proměnných při výpočtu matematických situací.

V druhém okruhu nazvaném Závislosti, vztahy a práce s daty se žáci učí rozpoznávat změny a vzájemné závislosti mezi jevy. Rozumí tomu, jak se mohou známé jevy měnit, zda rostou či klesají, nebo zda mají nulovou hodnotu. Pro analýzu využívají tabulek, diagramů a grafů, a jsou schopni je i vytvářet v jednoduchých případech. Pokud je to možné, používají vhodný grafický kalkulátor nebo jiný počítačový software k vyjádření závislostí a změn. Všechny tyto činnosti a zkoumání je vedou k správnému pochopení pojmu funkce a jejího využití v reálném světě.

V rámci vzdělávací oblasti Geometrie v rovině i v prostoru se žáci seznamují s útvary z reálného světa, které poté modelují a hledají na nich podobnosti a rozdíly. Uvědomují si vzájemné polohy útvarů v rovině a v prostoru. Učí se měřit, odhadovat a zjišťovat délku, obsah, objem, povrch a velikost úhlu. Celý tento tematický celek je zaměřen na řešení běžných situací v reálném světě.

Důležitou součástí celé vzdělávací oblasti jsou také nestandardní aplikační úlohy a problémy, které umožňují využít všechny dosud získané dovednosti, ale zároveň jsou nezávislé na znalostech školské matematiky. Žáci se učí řešit problémové situace z reálného

života, porozumět a analyzovat problémy, provádět návrhy a navrhovat optimální řešení. Řešením těchto úloh žáci procvičují své logické myšlení a jeho řešení často závisí na jejich rozumové zralosti.

Po celou dobu základního matematického vzdělání by mělo být součástí využití kalkulátorů, výpočetní techniky a dalších pomůcek. Vzdělávací oblast zdokonaluje žáka v samostatné a kritické práci se zdroji informací.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> *Rámcový vzdělávací program základního vzdělávání* [online]. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2021 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://revize.edu.cz/files/rvp-zv-2021.pdf>

## 1.2. Cílové zaměření vzdělávací oblasti

Vzdělávání v této oblasti klade důraz na rozvoj klíčových kompetencí žáků prostřednictvím matematických dovedností, jako je využívání matematických poznatků v praktických situacích, rozvíjení paměti prostřednictvím numerických výpočtů a osvojování matematických vzorců a algoritmů. Důležitý je také rozvoj logického myšlení, schopnost kriticky usuzovat a argumentovat při řešení matematických problémů. Žáci se učí abstraktnímu a exaktnímu myšlení a aplikaci základních matematických pojmů a vztahů. Navíc se snaží vybudovat si zásobu matematických nástrojů a efektivně je využívat. Důraz je kladen také na vnímání složitosti reálného světa, matematické modelování a schopnost provádět rozbor problému, plánovat řešení a vyhodnocovat výsledky. Důležitým prvkem je také schopnost přesného a stručného vyjadřování pomocí matematického jazyka a rozvoj spolupráce při řešení problémových úloh. Žáci se učí důvěřovat svým schopnostem a rozvíjet vytrvalost, přesnost a systematickosti při řešení úloh. Rovněž se učí vyslovovat hypotézy a ověřovat je na základě zkušenosti nebo pokusu.<sup>6</sup>

---

6 Rámcový vzdělávací program základního vzdělávání [online]. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2021, s. 31 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://revize.edu.cz/files/rvp-zv-2021.pdf>

### 1.3. Tematické celky pro 8. ročník ZŠ

Již v roce 2013 bylo RVP ZV doplněno o přílohu standardů pro základní vzdělávání. Tyto přílohy obsahují ke každému očekávanému výstupu seznam indikátorů, tedy konkrétních dovedností žáka prokazujících dosažení daného výstupu. V roce 2011 vydalo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy Doporučené učební osnovy předmětů ČJL, AJ a M pro základní školu, které měly za cíl upřesnit RVP ZV a poskytnout tak školám podklady pro tvorbu a realizaci školního vzdělávacího programu.

Do osmého ročníku podle Doporučených učebních osnov předmětů ČJL, AJ a M pro základní školu patří učivo Druhá mocnina a odmocnina, Mocnina s přirozeným mocnitelem, Pythagorova věta, Výrazy s proměnnou, Lineární rovnice, Kruh a kružnice, Množiny bodů dané vlastnosti a Válec.<sup>7</sup>

Zpravidla je Druhá mocnina a odmocnina prvním tématem, se kterým se žák setká v matematice. Podle RVP ZV by měl žák na konci tohoto tématu být schopen rozlišovat pojmy umocňování a odmocňování, měl by znát druhé mocniny čísel 1-20 a odmocniny těchto čísel. Dále by měl být schopen vypočítat druhé mocniny a odmocniny přirozených i desetinných čísel, a to jak bez použití matematických tabulek a kalkulátoru, tak i s jejich využitím. Žák by měl také ovládat pravidla pro umocňování a odmocňování zlomku a součinu dvou čísel. Důležitou součástí tématu je také pochopení geometrického významu druhé mocniny při řešení slovních úloh v geometrii. Toto téma je klíčové a tvoří pevný základ pro další matematická témata, která žák bude v tomto roce objevovat. Správné pochopení a ovládnutí druhé mocniny a odmocniny je nezbytné pro úspěšné zvládnutí pokročilejších matematických konceptů a dovedností.

Téma následně rozšiřuje Mocnina s přirozeným mocnitelem, ve kterém na konci žák určuje třetí mocninu a odmocninu přirozených a desetinných čísel pomocí tabulek a kalkulátoru a vypočítá mocninu libovolného čísla pomocí kalkulátoru. Upravuje výraz a určuje hodnotu číselného výrazu s mocninou a přirozeným mocnitelem podle pravidel počítání s mocninami. Zapisuje libovolné číslo rozvinutým zápisem v desítkové soustavě ve tvaru.

---

<sup>7</sup> Doporučené učební osnovy předmětů ČJL, AJ a M pro základní školu [online]. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2011, s. 61–63 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <http://www.vuppraha.rvp.cz/wp-content/uploads/2011/03/Doprocene-ucebni-osnovy-predmetu-CJL-AJ-a-M-pro-zakladni-skolu.pdf>

Na základu, vytvořeném v tématu Druhá mocnina a odmocnina, staví téma Pythagorova věta, kterou zařazujeme do okruhu geometrie v rovině a v prostoru. V ní žák objevuje vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku, dozvídá se historické pozadí objevu a dokázání Pythagorovy věty. Na konci tématu žák vysvětlí pojmy odvěsna a přepona v pravoúhlém trojúhelníku, používá Pythagorovu větu pro výpočet třetí strany pravoúhlého trojúhelníku. Vypočítá délku hrany, tělesovou a stěnovou úhlopříčku krychle a kvádrů. Řeší praktické úlohy s využitím Pythagorovy věty, situaci dokáže načrtnout, odhadnou výsledek a ověří jeho reálnost.

Tematický celek Výrazy je v osmém ročníku matematiky jedním z nejrozsáhlejších a žák se zde musí seznámit s novými pojmy, pravidly úprav a početními operacemi v relativně krátkém časovém období. Tato témata jsou klíčová pro porozumění dalším tématům, jako jsou lineární rovnice. Na konci tohoto tématu by měl žák být schopen vysvětlit pojmy jako proměnná, výraz s proměnnou, člen výrazu, jednočlen, mnohočlen, rovnost dvou výrazů. Vypočítat hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných, provádět početní operace s mnohočleny, provádět rozklad mnohočlenu na součin pomocí vytýkání a zvládat rozklad na součin a umocnění dvojčlenu pomocí vzorců.

Lineární rovnice učí žáka matematizovat reálné situace s použitím proměnné. Pro úspěšné zvládnutí tématu a pro další studium by měl žák řešit lineární rovnice pomocí ekvivalentních úprav, určit počet řešení a provádět zkoušku správnosti řešení rovnice. Sestavit rovnici ze zadaných údajů slovní úlohy, matematizovat reálné situace využitím vlastností rovnic. Učí se vyjadřovat neznámé ze vzorce a tím i odvozovat vzorce rovinných i prostorových útvarů. Tuto dovednost následně aplikuje i do dalších oblastí jako je například fyzika nebo chemie.

Prostřednictvím základů statistiky, tématem zařazeného do okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty, žák poznává základní statistické pojmy (statistický soubor, statistická jednotka, statistický znak, statistické šetření) a používá je, určí četnost, aritmetický průměr, modus i medián. Provede jednoduché statistické šetření, zapíše jeho výsledky a zvolí vhodný diagram k jejich znázornění.

Téma, které nás uvádí do okruhu geometrie v rovině a v prostoru, je Kruh a kružnice. Ač kružnice i kruhy žák používá již na první stupni, až v osmém ročníku objevuje jejich vlastnosti. Na konci je žák schopen definovat a sestavit kružnici a kruh, vysvětlit vztah mezi poloměrem a průměrem. Vypočítá obvod a obsah kruhu a délku kružnice pomocí vzorců, účelně využívá tvar zápisu Ludolfova čísla. Zvládá určovat vzájemnou polohu kružnice a přímky,

vzájemnou polohu dvou kružnic a umí je narýsovat. Využívá Thaletovu kružnici při řešení úloh, sestrojí tečnu ke kružnici z bodu vně kružnice.

Téma Konstrukčních úloh a množiny bodů je pokračováním výuky žáka v matematice, kde se zaměřuje na charakterizaci osy úhlu, osy úsečky a jejich konstrukci pomocí množiny bodů. Žák se také učí sestavovat rovinné útvary na základě zadaných prvků a provádět rozbor úlohy, náčrty, diskuse o počtu řešení a zápis postupu konstrukce s využitím matematické symboliky. Konstrukce podle zadání je často důležitou částí přípravy na přijímací zkoušky na střední školy. Učitel by měl usilovat o to, aby žáci rozuměli konstrukcím a vlastnostem geometrických útvarů pomocí grafických geometrických programů.

Posledním tématem je Válec, ve kterém by žák měl umět charakterizovat válec, sestrojít síť válce, odhadnout a vypočítat objem a povrch válce s pomocí kalkulačtoru. Řešit aplikační slovní úlohy s využitím osvojených znalostí o válci a vyhodnocovat reálnost výsledku.<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup> *Doporučené učební osnovy předmětů ČJL, AJ a M pro základní školu* [online]. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2011, s. 61–63 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <http://www.vuppraha.rvp.cz/wp-content/uploads/2011/03/Doporucene-ucebni-osnovy-predmetu-CJL-AJ-a-M-pro-zakladni-skolu.pdf>

## 2. Moderní přístupy k výuce matematiky

### 2.1. Konstruktivistické pojetí výuky

Oproti konstruktivistickému pojetí výuky je často preferováno transmisivní pojetí výuky, označované také jako tradiční výuka. V tomto přístupu jsou osnovy a učivo považovány za hlavní body a pedagog hraje dominantní roli. Pozornost žáka, jeho pochopení a porozumění učiva je zde omezeno, protože pedagog nemá dostatek prostoru, aby se individuálně věnoval potřebám každého žáka. Navzdory kritice, které transmisivní výuka často čelí, má své místo ve výuce, zejména při výuce náročných témat, kde je potřeba odbornější přehled nebo při výuce pouček a pravidel. Tradiční výuka také umožňuje žákovi systematicky řadit látku v uceleném systému.

Role žáka je v transmisivním přístupu velmi omezená. Jeho úkolem je pouze naučit se fakta, osvojit si je a v případě potřeby je reprodukovat nebo aplikovat na standardní příklady. Žák je tedy pasivní příjemce informací, který pouze ukládá znalosti, aniž by se snažil je hlouběji pochopit nebo propojit s širším kontextem.

Kritika transmisivní výuky se objevuje již na konci 19. století. Tradiční výuka založená na osvojování hotových vědomostí a dovedností není v moderní době dostačující, protože nepřipravuje žáky na řešení reálných životních problémů. Naopak inovativní výukové metody, které staví na aktivní a problémově orientované činnosti žáků a připravují je na řešení životních problémů, umožňují žákům formulovat vlastní hypotézy a rozvíjí jejich představivost a intelektuální schopnosti. Tyto metody také plní formativní funkci ve výuce, tedy podporují průběžnou zpětnou vazbu žákům.<sup>9</sup>

Konstruktivistické pojetí výuky je založeno na konstruktivismu jako teorii učení. Konstruktivismus tvrdí, že učení je aktivní proces, kde jedinec propojuje nové informace a zkušenosti s jeho předchozími znalostmi a mentálními vzorci. Nové informace jsou začleněny do existující sítě porozumění v mysli jedince. Konstruktivistické učení je subjektivní proces, kde každý jedinec aktivně přetváří své znalosti na základě nových zkušeností.

---

<sup>9</sup> ZORMANOVÁ, Lucie. Výukové metody v pedagogice: [s praktickými ukázkami]. Praha: Grada, 2012, 155 s. Pedagogika. ISBN 978-80-247-4100-0. s.10

Každé dítě si vnitřně uspořádává své vlastní znalosti o světě do unikátního vzoru, který spojuje nové informace a porozumění s okolním světem způsobem, který je subjektivní a smysluplný.<sup>10</sup>

Při konstruktivistických přístupech k výuce matematiky je klíčová aktivní konstrukce představy o matematice. Motivace žáka k učivu hraje zásadní roli, protože bez motivace nelze očekávat aktivní účast žáka. Samotné úlohy nebo problémy, které jsou žákům předkládány, by měly být motivující. Při řešení těchto úloh může pedagog stále poskytovat žákům potřebné informace, vysvětlovat pojmy a vše, co je potřebné k jejich řešení, ale vše by mělo probíhat s důrazem na budování matematiky v mentálním světě žáka.<sup>11</sup>

Obecný konstruktivismus přetvořili M. Hejný a F. Kuřina na tzv. didaktický konstruktivismus, který bere v úvahu specifika výuky matematiky a vytváří desatero zásad didaktického konstruktivismu.<sup>12</sup> Kuřina dále hovoří o realistickém konstruktivismu, který lépe odpovídá reálným možnostem aplikace výuky matematiky. Kromě desatera konstruktivismu zdůrazňuje, že konstruktivní výuka může obsahovat i transmisi určitých částí učiva pro lepší porozumění, ale stále s důrazem na budování matematiky v mysli jedince. Kuřina vytvořil zásady realistického konstruktivismu spolu s Cachou.

I přesto, že konstruktivistické myšlení je ve výuce široce populární, stále existuje kritika tohoto přístupu. Tato kritika se zaměřuje především na nízkou efektivitu konstruktivistických metod pro získání komplexního systému znalostí a otázku, zda celkové nahrazení transmisivních metod nepovede ke zhoršení vzdělávacích výsledků.<sup>13</sup>

---

10GINNIS, Paul. Efektivní výukové nástroje pro učitele: strategie pro zvýšení úspěšnosti každého žáka. Ilustroval Les EVANS. [Praha]: Čtení pomáhá, [2017], xxiii, 365 s. ISBN 978-80-906082-6-9.

11 GINNIS, Paul. Efektivní výukové nástroje pro učitele: strategie pro zvýšení úspěšnosti každého žáka. 365 s.

12 HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Nad'a VONDROVÁ, ed. Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3. s. 13

13 PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi. Brno: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, 2009. 147 s. svazek číslo 114. ISBN 978-80-210-4834-8.



## 2.2. Aktivizační metody ve výuce

V moderním vzdělávání je stále častěji uznáváno, že žák nebo student je aktivním subjektem v procesu učení a že pasivní přijímání informací od učitele není vždy nejefektivnějším způsobem, jak si nové znalosti a dovednosti osvojit. Aktivizační metody ve výuce, které kladou důraz na aktivní zapojení žáků či studentů, nabízejí nové přístupy a postupy, které podporují jejich aktivní přijímání a zpracování informací, a také vytváření vlastních úsudků a názorů na základě těchto informací.

Postupy aktivního učení se liší od tradičních transmisivních metod, které se soustředí na jednosměrnou komunikaci od učitele k žákům. Místo toho se učitel stává facilitátorem učení, který podporuje aktivitu žáků či studentů a poskytuje jim příležitosti k interakci, spolupráci, týmové práci a praktické aplikaci znalostí. Tímto způsobem se žáci či studenti aktivně zapojují do procesu učení a sami se stávají tvůrci svého vlastního učení.

Jedním z hlavních cílů aktivizačních metod je rozvíjení kritického myšlení u žáků či studentů. Kritické myšlení je schopnost analyzovat, hodnotit a syntetizovat informace, provádět kritickou reflexi a tvořit vlastní názory a závěry na základě těchto informací. Aktivizační metody poskytují žákům či studentům příležitosti k tomu, aby se aktivně zapojovali do procesu učení, vyjadřovali své názory, kladli otázky, hledali odpovědi a konfrontovali různé perspektivy. Tím se rozvíjí jejich kritické myšlení a schopnost kriticky se vyrovnávat s různými informacemi a názory.<sup>14</sup>

---

14 GRECMANOVÁ, Helena a Eva URBANOVSKÁ. Aktivizační metody ve výuce, prostředek ŠVP. Olomouc: Hanex, 2007, 178 s. Edukace. ISBN 978-80-85783-73-5.

## 2.3. Interaktivní výuka

Interaktivní výuka je v dnešní době už velmi známá a perspektivní metoda vyučování využívající moderní technologie a postupy. Interaktivita bývá často spojována s interaktivní výukou, interaktivními učebnicemi a interaktivními tabulemi.

Tento typ výuky je dnes považován za novou komplexní výuku, kterou vyučující podává téma vyučovací hodiny zábavnější formou a odlišuje ji tak od klasické výuky. Důležitým znakem je názornost a možnost učivo vizualizovat. Využitím této formy výuky se výklad a učivo stává pro žáky atraktivnější, lépe pochopitelné, a tedy i lépe zapamatovatelné. Interaktivní výuka vyžaduje aktivní spoluúčast studentů při plnění vzdělávacích úkolů. Z učitele se stává pouze pomocník za poznáním, který usnadňuje, napomáhá a podporuje žáky k porozumění učiva. Žák je aktivním článkem edukačního procesu, který má vliv na průběh a podobu tohoto procesu.

Jak již napovídá název, součástí interaktivní výuky může být i interaktivní tabule. Bohužel ale ne každá hodina využívající interaktivní tabuli využívá interaktivní výuku. Existují obecné zásady interaktivní výuky, které formuloval J. Buriánek<sup>15</sup>:

- Podporujte tvůrčí atmosféru ve třídě.
- Podněcujte k vyjádření vlastních názorů a myšlenek.
- Dávejte pozitivní zpětnou vazbu na každé chování, které směřuje k cíli.
- Vytvářejte pocit zodpovědnosti za společný úkol.
- Dbejte, aby se všichni zapojili, aby měl každý prostor k sebevyjádření.
- Při komentování dílčích výsledků užívejte nehodnotící, deskriptivní jazyk.
- Diskuse začínejte s tím, co je všem důvěrně známo, k čemu má každý co říct.
- Formulujte aktuální a přitažlivá témata, uvádějte příklady ze známého prostředí.
- Zadávejte stručně, jasně a konkrétně formulované úkoly.
- Přesvědčujte se, zda v každé fázi všichni vědí, co mají dělat.
- Neutíkejte od konfliktu, nuťte k vyjasnění kontroverzních stanovisek.
- Věnujte dostatek času reflexi dokončených aktivit.

---

<sup>15</sup> KAFKOVÁ, Marika. *Interaktivní metody ve výuce matematiky*. Brno, 2010. Disertační práce. Masarykova univerzita. s.29

Interaktivní způsoby výuky jsou jedním z hlavních didaktických principů pedagogického konstruktivismu, který přímo vyžaduje spoluúčast žáků na výuce. Žák je zde chápán jako zdroj nápadů, myšlenek a komunikovatelných návrhů, které zásadním způsobem modifikuje nebo později i sám vede výukový proces. Oproti tomu transmisivní metody výuky, které využívají frontálního výkladu, pokládají žáka za pasivního účastníka výukového procesu. Očekávanou aktivitou je zde pouze reprodukce výkladu v testování.<sup>16</sup>

---

16 KLEMENT, Milan, DOSTÁL, Jiří a KLEMENT, Jiří. Metody realizace a hodnocení interaktivní výuky. 2. vydání. Olomouc, 2014. ISBN 978-80-87658-21-5. s. 36

### 2.3.1. Online nástroje pro interaktivní výuku matematiky

Existuje mnoho výukových platforem, které nabízejí interaktivní a efektivní prostředí pro výuku matematiky. Mezi nejběžnější patří GeoGebra, Khan Academy, umimematiku.cz, Brilliant a mnoho dalších. Platformy poskytují různé nástroje, zdroje a aktivity, které pomáhají studentům rozvíjet matematické dovednosti a porozumění matematickým konceptům. Díky online přístupu a interaktivním funkcím umožňují tyto platformy individuální a adaptivní učení, které je přizpůsobeno potřebám jednotlivých studentů. Mnoho z těchto platforem je také dostupných zdarma nebo za přijatelné poplatky, což je činí dostupnými pro širokou škálu uživatelů. Výukové platformy pro výuku matematiky jsou tedy cenným zdrojem pro učitele i studenty, kteří hledají moderní a efektivní způsob, jak se zdokonalit v matematických dovednostech a porozumění matematickým konceptům.

GeoGebra je volně dostupný matematický program, který slouží k podpoře výuky a studia matematiky. Jeho vývoj začal v roce 2001 na Univerzitě v Salzburgu pod vedením Markuse Hohenwartera a jeho týmu. Hohenwarter následně našel spolupracovníky a překladatele z celého světa a nyní pokračuje ve vývoji programu na Univerzitě Johanna Keplera v Linci společně s Michaelem Borcherdsem. GeoGebra spojuje různé matematické disciplíny, jako je geometrie, algebra, analýza, grafy, tabulky a statistika, do jednoduše použitelného komplexu. Jeho on-line verze je používána miliony uživateli po celém světě, kteří tvoří jednu globálně propojenou komunitu. Program je poskytován zdarma pro nekomerční účely a je přístupný jako open source software. Díky svým inovativním funkcím a uživatelsky přívětivému rozhraní získal GeoGebra a jeho mezinárodní tým programátorů mnoho ocenění nejen v Evropě, ale i v USA a jinde ve světě.<sup>17</sup>

Nezisková organizace Khan Academy, česky také Khanova škola, byla založena v roce 2006 Salmanem Khanem. Vize celé organizace je poskytnout zdarma kreativní nástroje pro výuku každého a kdekoli na světě. Khan Academy nabízí tisíce krátkých výukových videí, interaktivních kvízů a nástrojů pro sledování pokroku studentů.<sup>18</sup> Organizace spolupracuje s institucemi jako NASA, MIT, Muzeum moderního umění nebo Kalifornská akademie

---

<sup>17</sup> Co je GeoGebra?. *GeoGebra* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/about>

<sup>18</sup> One Man, One Computer, 10 Milion Students: How Khan Academy is Reinventing Education. *Forbes* [online]. 2.listopadu 2012 n. 1. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.forbes.com/sites/michaelnoer/2012/11/02/one-man-one-computer-10-million-students-how-khan-academy-is-reinventing-education/?sh=48e5f6a444e0>

přírodních věd. V říjnu 2012 iniciativa dobrovolníků založila občanské sdružení Khanova škola s cílem přeložit obsah Khan Academy do češtiny.<sup>19</sup>

Webové stránky umimematiku.cz se specializují na výuku učiva základní a střední školy. Obsah je zde strukturován do stručných a srozumitelných výkladů, které jsou vhodně doplněny ilustracemi, což poskytuje uživatelům přehledné prostředí. Kromě teoretické části je zde také dostupné rozsáhlé množství různých cvičení pro procvičování. Některé části učiva jsou navíc procvičovány skrze hry, kde žáci mohou soutěžit v rychlosti řešení úkolů s počítačem nebo dalšími hráči. Výukový systém Umíme je postaven na základě zkušeností vědeckého výzkumu, který je veden na Fakultě informatiky Masarykovy univerzity v Brně.<sup>20</sup> Na platformě umimematiku.cz je k dispozici částečně bezplatná verze, která umožňuje uživatelům získat omezené množství volných cvičení denně. Pro další rozšířené funkce je však potřeba zakoupit licenci.

Brilliant je online nástroj, který efektivně kombinuje zábavný a interaktivní přístup k výuce matematiky. To umožňuje žákům rozvíjet své matematické dovednosti a získávat důvěru ve své schopnosti. Mise platformy je inspirovat a rozvíjet lidi, aby dosáhli svých cílů ve vědě, technice, inženýrství a matematice. Kurzy Brilliant zkoumají zákony, které utvářejí svět a proměňují matematiku a vědu z něčeho, čeho se žáci obávají, na zážitek z objevování.<sup>21</sup> Platforma Brilliant není zatím dostupná v českém jazyce a jako jediná je plně placená na bázi měsíční poplatku.

---

<sup>19</sup> Popis. *Khan Academy* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://cs.khanacademy.org/about>

<sup>20</sup> *Umime to* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.umimeto.org>

<sup>21</sup> About. *Brilliant* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://brilliant.org/about>

### 3. Vypracované tematické celky

Při tvorbě pracovních listů bylo dbáno na přehlednost a strukturovanost. Aktivizační prvky jsou implementovány pomocí QR kódů. Žák se může pomocí telefonu, tabletu či notebooku dostat na interaktivní cvičení nejen ve škole, ale také při domácí přípravě.

K materiálům je vytvořen také metodický list, který obsahuje zařazení do vzdělávací oblasti, přehled výchovně vzdělávacích cílů podle RVP ZV, pojmovou analýzu, organizační podmínky, konkrétní vzdělávací cíle, kterých by měli všichni žáci po vypracování pracovních listů dosáhnout, seznam QR kódů a jejich odkazů a seznam použité literatury. Materiály vycházejí z odborně zpracovaných učebnic a pracovních sešitů, které jsou jmenovány u každého tématu zvlášť.

Materiály jsou tvořeny s myšlenkou, aby byly co nejvíce variabilní. Obsahují teoretický výklad učiva, příklady na procvičení a upevnění nových pojmů a zajímavosti související s daným tématem. Pracovní listy mohou sloužit jako nástroj pro představení nového tématu, ale také jako nástroj procvičení a upevnění. Pro žáky mohou sloužit jako ucelený přehled teoretických pojmů, také jako materiál pro domácí přípravu při delší nemoci nebo během distančního vzdělávání.

Přehlednost listů zařizují barevné obdélníky. Modrá barva označuje cvičení, fialová barva rychlé připomenutí již známého učiva. Žlutá barva upozorňuje na nové učivo. Zelená barva označuje zajímavost či rozšíření učiva. Pro případný černobílý tisk jsou na krajích záhlaví obdélníků symboly pro rychlou orientaci.

Na konci každé strany se nachází rychlé sebehodnocení žáka a možnost vyplnit řádek, čemu nerozumí nebo co potřebuje více procvičit. Jedna strana materiálu je koncipována tak, aby byla zvládnutelná za jednu vyučovací hodinu. Tím pádem se má žák možnost ohodnotit za každou hodinu a reflektovat svou práci. Zároveň i pro učitele může být tato zpětná vazba důležitý nástroj. Učitel uvidí, zda u učiva déle setrvat, více jej procvičit nebo se může posunout dál. Na konci každého tematického celku je tabulka s výstupy podle RVZ ZV se sebehodnocením.

Materiály se soustředí také na rozvíjení klíčových kompetencí. Jelikož všechny listy mají jednotný formát a využívají cvičení na podobném základu, nejsou klíčové kompetence uvedeny v metodických listech pro každé téma zvlášť, ale zde:

### **Kompetence k učení:**

- Operuje s obecně užívanými termíny, znaky a symboly.
- Samostatně experimentuje, získané výsledky porovnává.
- V rámci hodnocení vlastního výkonu v matematice se žák zdokonaluje ve schopnosti se reálně zhodnotit a vidí možnosti v budoucím uplatnění

### **Kompetence k řešení problémů**

- Vyhledá informace vhodné k řešení problému, nachází jejich shodné, podobné a odlišné znaky.
- Samostatně řeší problémy, volí vhodné způsoby řešení.
- Kriticky myslí, činí rozhodnutí a je schopen je obhájit.
- Uší se nacházet taktiku a pomoc pro zvládnání problémových úkolů.

### **Kompetence komunikativní**

- Formuluje a vyjadřuje své myšlenky a názory v logickém sledu.
- Rozumí různým typům textů a záznamů, obrazových materiálů, přemýšlí o nich, reaguje na ně a využívá je ke svému rozvoji.

### **Kompetence sociální a občanské**

- Prostřednictvím spolupráce a zdravé soutěživosti při plnění úkolů a v průběhu výuky se žák učí uvědomovat si své schopnosti a svou cenu.
- I v případě méně uspokojivého výsledků si žák uchovává vědomí svého významu.

### **Kompetence pracovní**

- Učí se hodnotit své kvality a úsilí, s nímž změn ve svém výkonu dosahuje.

### **Kompetence digitální**

- Využívá běžně používaná digitální zařízení a využívá je při učení.
- Seznamuje se s novými technologiemi.<sup>22</sup>

---

<sup>22</sup> Rámcové vzdělávací programy. Národní pedagogický institut České republiky [online]. Praha, 2021 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.npi.cz/ramcove-vzdelavaci-programy>

### 3.1. Druhá mocnina a odmocnina

METODICKÝ LIST č.1	
Téma pracovního listu	Ročník
<b>Druhá mocnina a odmocnina</b>	<b>osmý</b>
Zařazení do RVP ZV	
<i>Vzdělávací oblast:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Vzdělávací obor:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Tematický celek:</i>	Číslo a proměnná
Výchovně vzdělávací cíle dle RVP ZV	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rozlišuje pojmy umocňování a odmocňování.</li> <li>• Určuje z paměti druhou mocninu čísel 1–20 a odmocninu těchto mocnin.</li> <li>• Určuje druhou mocninu a odmocninu přirozených a desetinných čísel pomocí tabulek a kalkulátoru.</li> <li>• Ovládá pravidla pro umocňování a odmocňování zlomku a součinu dvou čísel.</li> <li>• Určuje hodnotu číselného výrazu s druhou mocninou a odmocninou.</li> <li>• Využívá geometrický význam druhé mocniny v praxi.</li> </ul>	
Pojmová analýza	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Nové pojmy:</b> druhá mocnina, druhá odmocnina, umocňování, odmocňování, čtvercové číslo</li> <li>• <b>Opěrné pojmy:</b> násobení, součin, obsah, čtverec</li> </ul>	
Organizační podmínky	
<p>Pracovní listy jsou navrženy tak, aby představovaly jednu vyučovací hodinu na jedné straně. Před uvedením tématu by měl student zvládnout vypočítat hodnotu číselného výrazu, provádět početní operace s desetinnými čísly, zlomky, a to kladnými i zápornými bez problémů.</p> <p>Pro vypracování druhé poloviny pracovních listů bude žák potřebovat kalkulačku a matematické tabulky, které poskytují přehled druhých a třetích mocnin a odmocnin do 1000. Pro využití interaktivních prvků je nutné zařízení připojené k internetu s webovou kamerou nebo fotoaparátem, nejlépe tablet nebo telefon.</p>	



Pracovní listy jsou vytvořeny s myšlenkou variability a učitel může zařazení do výuky upravit podle vlastních potřeb. Nicméně pracovní listy podporují samovolné objevování zákonitostí matematiky a učitel by měl podporovat diskuzi nad cvičeními.

Na konci každé strany pracovního listu se nachází krátké sebehodnocení a na konci každého tématu se nachází tabulka s výstupy za celé téma, což umožňuje studentovi sebereflektovat svůj postup a pro učitele představuje rychlou zpětnou vazbu.

Pracovní listy obsahují u některých cvičení také piktogram "HARD MODE", který upozorňuje na složitější či komplexnější příklady, které mohou být pro některé studenty příliš náročné.

#### Vzdělávací cíle pracovního listu

Žák:

- Určuje druhou mocninu kladných, záporných, desetinných čísel a zlomků.
- Porovnává druhé mocniny čísel.
- Určuje druhou odmocninu kladných, záporných, desetinných čísel a zlomků.
- Rozezná, kdy druhá odmocnina existuje.
- Vypočítá číselné výrazy s druhou mocninou a odmocninou.
- Rozlišuje pojmy umocňování a odmocňování.
- Vysvětlí rozdíl mezi druhou mocninou/odmocninou součtu a součinu.
- Využívá kalkulačku pro výpočet druhé mocniny čísel.
- Pomocí MFCHT vypočítá druhou mocninou nebo druhou odmocninou čísel. Volí vhodnou metodu řešení a její volbu si obhájí.
- Řeší slovní úlohu na výpočet strany při znalosti obsahu čtverce.
- Uvědomuje si, že druhá odmocnina je opačnou operací k druhé mocnině.
- Upravuje číselné výrazy s druhou mocninou a odmocninou. Nachází hodnotu výrazu a provádí kontrolu výpočtu.

#### Seznam QR kódů

QR kód č. 1 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování.  
Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/wdes9yfn>

QR kód č. 2 – Video na YouTube Exponents Song (All About that Base) na kanále Dylan Peters EDU. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=5w5zPSEwvqw>

QR kód č. 3 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/you5reyse>

QR kód č. 4 – Online vědecká kalkulačka na stránkách GeoGebra. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/scientific>

QR kód č. 5 – Část Matematických tabulek M1 ve formátu pdf. Dostupné z: [https://fyzikalnisuplik.websnadno.cz/matematika/tabulka\\_mocnin\\_odmocnin.pdf](https://fyzikalnisuplik.websnadno.cz/matematika/tabulka_mocnin_odmocnin.pdf)

QR kód č. 6 – Webové stránky mobilní aplikace PhotoMath. Dostupné z: <https://photomath.com>

## Zdroje

### Učebnice a pracovní sešity použité k tvorbě cvičení:

COUFALOVÁ, Jana, Šárka PĚCHOUČKOVÁ, Jiří HEJL a kol. *Matematika: pro 8. ročník základní školy*. 3. vydání. Praha: Fortuna, 2020. ISBN 978-80-7373-142-7.

LAUBEOVÁ, Alena, Blanka MATASOVÁ a Tomáš MIERVA a kol. *Hravá matematika 8: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: Taktik International, 2021. ISBN 978-80-7563-265-4.

MALÍK, Michal, Jana PRESOVÁ a Veronika ŠOLCOVÁ a kol. *Hravá matematika 8: Pracovní sešit pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 3. vydání. Praha: Taktik International, 2022. ISBN 978-80-7563-442-9.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Josef TREJBAL. *Matematika: algebra*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2015. ISBN 978-80-7235-419-1.

TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika 8 s nadhledem*. Praha: Fraus, 2020. ISBN 978-80-7489-517-3.

### Externí odkazy:

Geogebra. Online matematický software [online]. Verze 6.0.620.0. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/scientific>

Dylan Peters EDU. Exponents Song (All About that Base). In: *YouTube* [online]. 7.12.2015 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=5w5zPSEwvqw>

PISKÁČ, Václav. Tabulka mocnin a odmocnin [online]. Fyzikální šuplík. [cit. 2023-04-01] Dostupné z: [https://fyzikalnisuplik.websnadno.cz/matematika/tabulka\\_mocnin\\_odmocnin.pdf](https://fyzikalnisuplik.websnadno.cz/matematika/tabulka_mocnin_odmocnin.pdf)

Obrázky:

DMO1: NASA ADMINISTRATOR. Apollo 11 Commander Neil Armstrong working at an equipment storage area on the lunar module. This is one of the few photos that show Armstrong during the moonwalk. Click image to enlarge. [online]. NASA, 20.7.2021. [cit. 2023-04-01] Dostupné z: [https://www.nasa.gov/mission\\_pages/apollo/apollo11.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/apollo/apollo11.html)

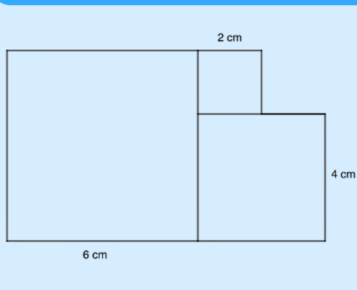
Další zdroje:

JUŠKEVIČ, A. P. Dějiny matematiky ve středověku. Praha: Academia, 1977. 434 s. ISBN 978-80-200-0131-6. str. 266-267

ŠOLCOVÁ, A. Kapitoly z historie matematiky a informatiky. Praha: Česká technika – nakladatelství ČVUT v Praze, 2017. ISBN 978-80-01-06092-6.

# Druhá mocnina a odmocnina

1. Vypočítej obsah obrazce:



Připomeň si vzorce pro výpočet obsahu čtverce a obdélníku.



$$S_{\square} = a \cdot a \quad S_{\text{ob}} = a \cdot b$$

**Druhá mocnina**



Druhá mocnina je součin dvou sobě rovných činitelů.

$$a^2 = a \cdot a$$

čteme: "á na druhou"

exponent (mocnitel)

$a^2$

základ mocniny (mocněnec)



**Druhá mocnina racionálních čísel**



**Druhá mocnina záporného čísla**

- druhá mocnina záporného čísla je vždy kladná

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = a^2$$

$$-a^2 = -(a \cdot a)$$

$$(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = 64$$

$$-a^2 \neq (-a)^2$$

**Druhá mocnina desetinného čísla**

- má dvakrát více desetinných míst než dané desetinné číslo

$$0,011^2 = \underbrace{0,011}_{3} \cdot \underbrace{0,011}_{3} = \underbrace{0,000121}_{6}$$

**Druhá mocnina zlomku**

- umocníme na druhou čísel i jmenovatel

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{5^2}{9^2} = \frac{25}{81}$$

Proč?

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 5}{9 \cdot 9} = \frac{5^2}{9^2} = \frac{25}{81}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \neq \frac{2^2}{5} \neq \frac{2}{5^2}$$

**Umocnit číslo na druhou**

znamená najít jeho druhou mocninu.

**Najít druhou mocninu čísla**

znamená vynásobit toto číslo samo sebou.

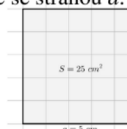
**Jak si druhou mocninu představit?**

Obsah čtverce se stranou  $a$ .

$$S = a^2$$

$$S = 5^2$$

$$S = 25 \text{ cm}^2$$



2. Vyber správný výsledek, odpověď zakroužkuj v tabulce a doplň větu:



1)  $8^2 =$   
a. 16   b. 64   c. 8

René \_\_\_\_\_ byl slavný francouzský filosof, matematik a fyzik, který žil v 17. století.

2)  $30^2 =$   
a. 900   b. 90   c. 60

a. b. c.

3)  $(-9)^2 =$   
a. 18   b. -81   c. 81

1) T D K

2) E A B

3) G N S

4)  $-16^2 =$   
a. 256   b. -32   c. -256

4) D A C

5) A T P

5)  $\left(\frac{4}{9}\right)^2 =$   
a.  $\frac{16}{81}$    b.  $\frac{8}{18}$    c.  $\frac{16}{9}$

6) Q R D

7) M O T

8) Y E F

9) M K S

6)  $\frac{7^2}{5} =$   
a.  $\frac{49}{25}$    b.  $\frac{49}{5}$    c.  $\frac{14}{5}$

7)  $0,8^2 =$   
a. 0,16   b. 6,4   c. 0,64

8)  $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 =$   
a.  $-\frac{25}{4}$    b.  $\frac{25}{4}$    c.  $\frac{10}{4}$

9)  $(-1,5)^2 =$   
a. 3   b. -2,25   c. 2,25

3. Jak se řekne anglicky "dva na druhou"?

SPUN  
KROKY

Vypočítej druhé mocniny, seřaď čísla vzestupně a vylušti tajenku:



R	$(-6)^2$
Q	$(-0,8)^2$
O	$0^2$
D	$(-14)^2$
U	$2^2$
A	$4^2$
T	$-8^2$
W	$-1^2$
S	$0,1^2$
E	$(-9)^2$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

Obrázek 1 Druhá mocnina a odmocnina 1

Zdroj: vlastní zpracování

4. Rozhodni o každém z výpočtů, zda je správný či chybný.

Chybné výpočty oprav.

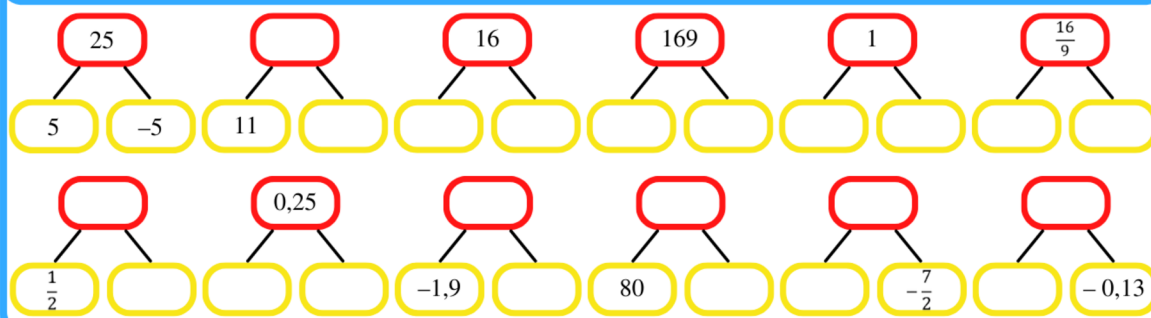
- a)  $(-5) \cdot 5 = (-5)^2 = 25$  ✓ ✗  
 b)  $(-5) \cdot (-5) = -5^2 = -25$  ✓ ✗  
 c)  $(-5) \cdot (-5) = (-5)^2 = 25$  ✓ ✗  
 d)  $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$  ✓ ✗

5. Doplň tabulku druhých mocnin do 20:



$1^2 =$ _____	$6^2 =$ _____	$11^2 =$ _____	_____ = 256
$2^2 =$ _____	_____ = 49	$12^2 =$ _____	$17^2 =$ _____
_____ = 9	$8^2 =$ _____	_____ = 169	$18^2 =$ _____
$4^2 =$ _____	_____ = 81	$14^2 =$ _____	_____ = 361
_____ = 25	$10^2 =$ _____	_____ = 225	$20^2 =$ _____

6. V červeném rámečku je vždy druhá mocnina čísel ze zelených rámečků. Doplň chybějící čísla podle vzoru:



Kdo objevil mocniny?

Jedno z prvních použití mocnin se datuje do **Starověkého Řecka**, kde se mocniny používaly při řešení geometrických úloh. Slovo "mocnina" použil při svých výpočtech matematik **Euclid**. Nynější zápis "mocnina" zavedl **René Descartes** v 17. století ve svém díle **La Géométrie**.

7. Vypočítej druhé mocniny:

- a)  $(-1)^2 =$   
 b)  $(-15)^2 =$   
 c)  $(-50)^2 =$   
 d)  $-13^2 =$   
 e)  $(\frac{1}{2})^2 =$   
 f)  $-\frac{9^2}{7^2} =$   
 g)  $-\frac{(-2)^2}{5} =$   
 h)  $-\frac{(-3)^2}{(-11)^2} =$

8. Zakroužkuj správnou odpověď:

- Druhá mocnina kladného čísla je kladné/záporné číslo.
- Druhá mocnina záporného čísla je kladné/záporné číslo.
- Druhá mocnina desetinného čísla má/nemá dvakrát více desetinných míst než dané desetinné číslo.
- Druhá mocnina zlomku je rovna/se nerovná druhé mocnině čitatele lomeného druhou mocninou jmenovatele.

Čtvercové číslo

**Čtvercové číslo** je číslo, které můžeme napsat jako součin dvou stejných celých čísel, tedy druhou mocninou tohoto celého čísla.

9. Zakroužkuj, která z čísel jsou čtvercová čísla a zapiš, pomocí kterých stejných čísel můžeme tato čísla zapsat:

121	30	100	244
59	16	1600	45
25	196	36	1
400	81	10000	0
0,4	24	-16	91

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

Obrázek 2 Druhá mocnina a odmocnina 2

Zdroj: vlastní zpracování

## Druhá odmocnina



Druhá odmocnina z čísla  $a$  je takové nezáporné číslo  $b$ , pro které platí:  $\sqrt{a} = b$ , když  $b^2 = a$

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \searrow \\ & \text{exponent (odmocnitel)} & \text{základ odmocniny (odmocněnec)} \\ & \sqrt[2]{a} = \sqrt{a} & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ & \text{čteme: "druhá odmocnina z } a\text{"} & \end{array}$$

Odmocňování je pro nezáporná čísla opačnou operací k umocňování.

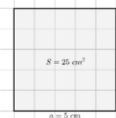
**Najít druhou odmocninu čísla** znamená najít číslo, které když vynásobím samo sebou, získám dané číslo.

V případě druhé odmocniny se exponent (odmocnitel) zpravidla nepíše.

**Jak si druhou odmocninu představit?**

Délka strany  $a$  s obsahem  $S$ .

$$\begin{aligned} S &= a^2 \\ 25 &= a^2 \\ a &= \sqrt{25} \\ a &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$



## 10. Vypočítej druhé odmocniny podle vzoru:

$$\sqrt{64} =$$

Hledám číslo, jehož druhá mocnina je rovna 64. Víím, že  $8^2 = 64$ , proto  $\sqrt{64} = 8$ .

$$a) \sqrt{81} =$$

$$b) \sqrt{121} =$$

$$c) \sqrt{49} =$$

$$d) \sqrt{196} =$$

$$e) \sqrt{9} =$$

$$f) \sqrt{100} =$$

## Druhá odmocnina racionálních čísel



### Druhá odmocnina záporného čísla

- druhá mocnina záporného čísla **NEEXISTUJE!**

$$\text{!} \sqrt{-9} \neq 3 \text{ protože } 3^2 = 9 \text{ a zároveň } (-3)^2 = 9 \text{ !}$$

### Druhá odmocnina desetinného čísla

- má dvakrát méně desetinných míst než dané desetinné číslo

$$\sqrt{\underbrace{0,000256}_6} = \underbrace{0,016}_3$$

### Druhá odmocnina zlomku

- odmocníme číselník i jmenovatel

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{!} \sqrt{\frac{9}{25}} \neq \frac{\sqrt{9}}{25} \neq \frac{9}{\sqrt{25}} \text{ !}$$

### Druhá odmocnina druhé mocniny

- odmocňování je opačnou operací k umocňování, tyto operace se tedy navzájem "ruší"
- po provedení operací se základ nezmění

$$\sqrt{8^2} = \sqrt{64} = 8$$

## 11. Ke každé druhé odmocnině (a-f) přiřaď správný výsledek odmocňování (1-8).

$$a) \sqrt{\frac{121}{36}} =$$

$$1) 1,9$$

$$2) \frac{4}{3}$$

$$b) \frac{121}{\sqrt{36}} =$$

$$3) 0,6$$

$$c) \sqrt{3,61} =$$

$$4) \frac{11}{6}$$

$$d) \sqrt{0,0036} =$$

$$5) 0,06$$

$$e) \frac{\sqrt{16}}{9} =$$

$$6) \frac{121}{6}$$

$$f) \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} =$$

$$7) 0,19$$

$$8) \frac{4}{9}$$

## 12. Zakroužkuj správnou odpověď:



1. Druhá odmocnina kladného čísla je kladné/záporné číslo.

2. Druhá odmocnina záporného čísla je kladné číslo/je záporné číslo/neexistuje.

3. Druhá odmocnina zlomku je rovna/se nerovná druhé odmocnině číselníku lomeného druhou odmocninou jmenovatele.

## Jak vzniklo odmocnítko?



Původ odmocnítko je nejasný. Podle některých zdrojů byl symbol poprvé použit arabskými matematiky, jeden z prvních byl **Abū al-Hasan ibn Alī al-Qalasādī**. Nicméně **Leonhard Euler** věřil, že symbol vznikl z písmene „R“, prvního písmene latinského slova **radix** (základ). V tisku byl poprvé použit v díle Die Coss matematika **Christoffera Rudolffa** v roce 1525.

## 13. Pokud to jde, urči výsledek:



$$a) \sqrt{121} =$$

$$e) -\frac{\sqrt{36}}{8} =$$

$$b) \sqrt{-9} =$$

$$f) \sqrt{\frac{-25}{-9}} =$$

$$c) \sqrt{1} =$$

$$d) \sqrt{-\frac{16}{25}} =$$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

Obrázek 3 Druhá mocnina a odmocnina 3

Zdroj: vlastní zpracování

### Umocňování, odmocňování a součin.



#### Druhá mocnina a součin

- druhá mocnina součinu je rovna součinu druhých mocnin

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$(5 \cdot 3)^2 = 15^2 = 225$$

$$5^2 \cdot 3^2 = 25 \cdot 9 = 225$$

#### Druhá odmocnina a součin

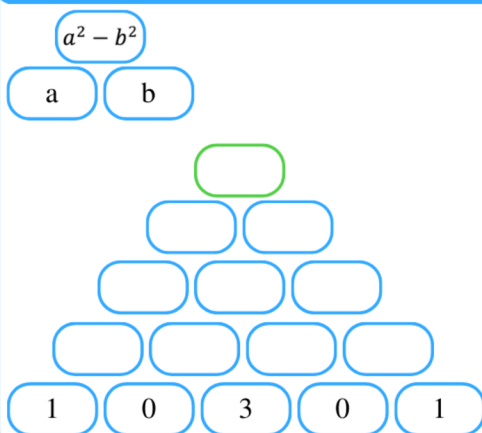
- druhá odmocnina součinu je rovna součinu druhých odmocnin

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

15. Čísla v jednotlivých cihličkách pyramidy jsou tvořena podle klíče. Jaké číslo bude v zeleném rámečku?



16. Rozlož na součin a vypočítej:



a)  $\sqrt{6\,400} =$

b)  $\sqrt{0,0361} =$

c)  $1,6^2 =$

d)  $\sqrt{250\,000} =$

e)  $0,04^2 =$

f)  $1\,500^2 =$

g)  $\sqrt{1,69} =$

14. Vypočítej dvojice příkladů a výsledky porovnej (závorka má přednost):



a)  $(4 + 9)^2 =$   
 $4^2 + 9^2 =$

b)  $\sqrt{81 \cdot 9} =$   
 $\sqrt{81} \cdot \sqrt{9} =$

c)  $\sqrt{25 - 16} =$   
 $\sqrt{25} - \sqrt{9} =$

d)  $(11 \cdot 4)^2 =$   
 $11^2 \cdot 4^2 =$

### Umocňování a odmocňování z paměti



#### Umocňování z paměti

- využijeme součin druhých mocnin a rozložíme číslo na součin

$$1600^2 = (16 \cdot 100)^2 = 16^2 \cdot 100^2 =$$
$$= 256 \cdot 100\,000 = 25\,600\,000$$

$$0,0015^2 = (15 \cdot 0,0001)^2 = 15^2 \cdot 0,0001^2 =$$
$$= 225 \cdot 0,000\,000\,01 = 0,000\,002\,25$$

$$32^2 = (2 \cdot 16)^2 = 4 \cdot 256 = 1\,024$$

#### Odmocňování z paměti

- pokud to lze, číslo rozložíme na součin čtvercového čísla a jednoho z čísel 10, 100, ..., případně 0,1; 0,01; ...

$$\sqrt{640000} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{10000} = 8 \cdot 100 = 800$$

$$\sqrt{0,0121} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{0,0001} = 11 \cdot 0,01 = 0,11$$

- případně můžeme součin dvou odmocnit upravit, abychom ho zvládli vypočítat z paměti

$$\sqrt{50} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{50 \cdot 8} = \sqrt{400} = 20$$

### Čtvercové číslo



**Čtvercové číslo** je číslo, které můžeme napsat jako součin dvou stejných celých čísel, tedy druhou mocninou tohoto celého čísla.

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

Obrázek 4 Druhá mocnina a odmocnina 4

Zdroj: vlastní zpracování

### Umocňování a odmocňování na kalkulačce



#### Umocňování na kalkulačce

- většina kalkulaček má tlačítko druhé mocniny

$$5 \quad 3 \quad x^2 \quad = \quad 2809$$

- případně lze využít i tlačítko násobení

$$5 \quad 3 \quad \times \quad 5 \quad 3 \quad =$$

- některé kalkulačky mají tlačítko pro výpočet y-té mocniny

$$5 \quad 3 \quad ^ \quad 2 \quad =$$

$$5 \quad 3 \quad x^y \quad 2 \quad =$$

#### Odmocňování na kalkulačce

- většina kalkulaček má tlačítko pro výpočet druhé odmocniny, liší se pouze postupem

$$2 \quad 5 \quad 6 \quad \sqrt{\quad} \quad = \quad 16$$

$$\sqrt{\quad} \quad 2 \quad 5 \quad 6 \quad =$$

17. Doplníš-li místo písmen číslice podle návodu, vyluštíš den, kdy člověk poprvé vstoupil na Měsíc. Při výpočtu použij kalkulačku.



- A. Číslice na místě setin v čísle  $0,57^2$ .
- B. Číslice na místě desetitisíců v čísel  $343^2$ .
- C. Číslice na místě desetin v čísel  $50,2^2$ .
- D. Číslice na místě jednotek v čísel  $2,8^2$ .
- E. Číslice na místě tisíců v čísel  $741^2$ .
- F. Číslice na místě stovek v čísel  $40,5^2$ .



Obr. DMO1

18. Najdi nejbližší čtvercová čísla podle vzoru:

$$70 : 64 < 70 < 81$$

- a) 5
- b) 40
- c) 90
- d) 130
- e) 149

19. Vypočítej pomocí MFCHT. Zvol metodu pro nejpřesnější výsledek:

- a)  $\sqrt{56} =$
- b)  $\sqrt{334\,000} =$
- c)  $0,359^2 =$
- d)  $87,542^2 =$
- e)  $4900^2 =$
- f)  $\sqrt{0,054\,38} =$

20. Bez použití tabulek nebo kalkulačky odhadni druhou odmocninu čísla:

Najdi nejbližší čtvercové číslo.

- a)  $\sqrt{10} =$
- b)  $\sqrt{50} =$
- c)  $\sqrt{200} =$
- d)  $\sqrt{230} =$



### Umocňování a odmocňování pomocí MFCHT



Při určování druhých mocnin a odmocnin je možné použít **Matematické, fyzikální a chemické tabulky (MFCHT)**.

Existují různé verze těchto tabulek, ale zpravidla jsou

- ve sloupci  $n$  nezáporná celá čísla od 0 do 1000,
- ve sloupci  $n^2$  jsou jejich druhé mocniny,
- a ve sloupci  $\sqrt{n}$  jsou jejich druhé odmocniny, které jsou zaokrouhleny na dvě desetinná místa.

**Při určování druhé mocniny či odmocniny postupujeme následovně:**

Ověřím, zda se číslo nachází ve sloupci  $n$ .

- Pokud ano, nalezneme druhou mocninu či druhou odmocninu

$$44^2 = 1\,936 \quad \sqrt{45} \doteq 6,71$$

- Pokud ne:

- využijeme vzorce na umocňování či odmocňování součinu a rozložíme na součin

$$\sqrt{8,89} = \sqrt{889 \cdot 0,01} \doteq 29,82 \cdot 0,1 = 2,982$$

$$8,91^2 = 891^2 \cdot 0,01^2 = 793\,881 \cdot 0,000\,1 = 79,388\,1$$

- je-li potřeba, nejprve vhodně zaokrouhlíme, pak postupuje jako v bodě a.

$$45\,348^2 \doteq 45\,300^2 = 453^2 \cdot 100^2 = 205\,309 \cdot 10\,000 = 2\,053\,090\,000$$

$$\sqrt{45\,097} \doteq \sqrt{45100} = \sqrt{451 \cdot 100} = 21,24 \cdot 10 = 212,4$$

$n$	$n^2$	$\sqrt{n}$
0	0	0,00
1	1	1,00
2	4	1,41
3	9	1,73
4	16	2,00
5	25	2,24
6	36	2,45
7	49	2,65
:	:	:
44	1 936	6,63
45	2 025	6,71
:	:	:
451	203 401	21,24
452	204 304	21,26
453	205 209	21,28
:	:	:
889	790 321	29,82
890	792 100	29,83
891	793 881	29,85
:	:	:
998	996 004	31,59
999	998 001	31,61
1 000	1 000 000	31,62

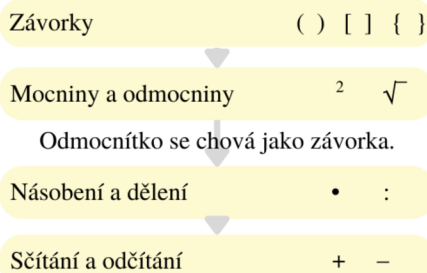
Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

Obrázek 5 Druhá mocnina a odmocnina 5

Zdroj: vlastní zpracování



### Co má přednost?



21. Jiráskovo náměstí v Praze s rozlohou 4 900 m<sup>2</sup> má přibližně čtvercový tvar. Ve středu náměstí je bronzová socha Aloise Jiráska. Jaká je nejkratší vzdálenost mezi sochu a okrajem náměstí?

### Jak si ověřit správný výsledek?



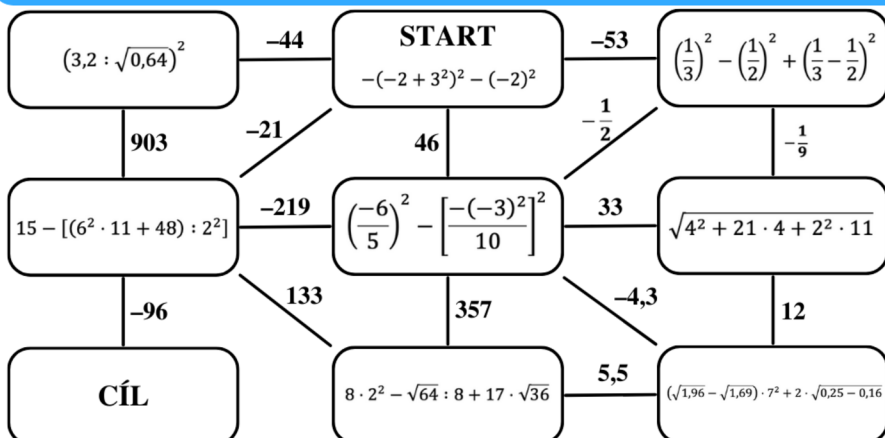
Aplikace **PhotoMath** již léta pomáhá žákům a studentům matematiky. Vyzkoušej ji! Stačí vyfotit příklad a můžeš si zkontrolovat postup i výsledek.

**Nepoužívej aplikaci k opisování postupu!!**



22. Podnikatel by rád koupil čtvercovou parcelu. Délka strany parcely je 19 metrů. Vypočítej, jestli mu bude na nákup parcely stačit 1 milion korun, pokud se 1 m<sup>2</sup> prodává za 1 950 korun.

### 23. Projdi bludiště. Dodržuj přednosti operací:



Druhá mocnina a odmocnina	Ještě potřebuji procvičit	Zvládám bez problémů
1. Rozoznám, kdy odmocňovat a kdy umocňovat.		
2. Zpaměti určím druhou mocninu čísel 1–20 a odmocninu těchto mocnin.		
3. Vypočítám druhou mocninu libovolného čísla.		
4. Vypočítám druhou odmocninu libovolného čísla na kalkulačce nebo pomocí tabulek.		
5. Využívám vlastností mezi umocňováním, odmocňováním a součinem/podílem.		
6. Upravuji číselné výrazy s mocninou.		
7. Upravuji číselné výrazy s odmocninou.		
8. Využívám znalosti druhé mocniny a odmocniny v praxi.		

Obrázek 6 Druhá mocnina a odmocnina 6

Zdroj: vlastní zpracování

### 3.2. Mocnina s přirozeným mocnitelem

METODICKÝ LIST č.2	
Téma pracovního listu	Ročník
<b>Mocnina s přirozeným mocnitelem</b>	<b>Osmý</b>
Zařazení do RVP ZV	
<i>Vzdělávací oblast:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Vzdělávací obor:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Tematický celek:</i>	Číslo a proměnná
Výchovně vzdělávací cíle dle RVP ZV	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Určuje třetí mocninu a odmocninu přirozených a desetinných čísel pomocí tabulek a kalkulátoru.</li> <li>• Vypočítá mocninu libovolného čísla.</li> <li>• Upravuje výraz a určuje hodnotu číselného výrazu s mocninou s přirozeným mocnitelem podle pravidel počítání s mocninami.</li> <li>• Zapisuje libovolné číslo rozvinutým zápisem v desítkové soustavě ve tvaru.</li> </ul>	
Pojmová analýza	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Nové pojmy:</b> třetí mocnina, třetí odmocnina, mocnina s přirozeným mocnitelem,</li> <li>• <b>Opěrné pojmy:</b> součin, součet, rozdíl, druhá mocnina, druhá odmocnina, číselný výraz, rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě.</li> </ul>	
Organizační podmínky	
<p>Pracovní listy jsou navrženy tak, aby se jedna strana shodovala s délkou jedné vyučovací hodiny. Pro úspěšné zvládnutí tématu by měl žák mít předchozí znalosti v oblasti výpočtu hodnoty číselných výrazů a být obeznámen s pojmy druhá mocnina a odmocnina.</p> <p>K vypracování části týkající se třetí mocniny a odmocniny a jejich výpočtových možností bude žák potřebovat kalkulačku a matematické tabulky s přehledem druhých a třetích mocnin a odmocnin do 1000. Pro využití interaktivních prvků je nutné mít zařízení s připojením k internetu disponující webovou kamerou nebo fotoaparátem, nejlépe tablet či telefon.</p>	

Při vypracování listů bylo dbáno na variabilitu a učitel si může upravit jejich začlenění do výuky dle vlastního uvážení. Cílem pracovních listů je podpořit badatelské objevování pravidel a učitel by měl podporovat diskuzi nad cvičeními.

Každá strana pracovních listů obsahuje krátké sebehodnocení, zatímco každé téma končí tabulkou výsledků pro celou výuku. To umožňuje žákovi sebereflexi a učiteli rychlou zpětnou vazbu. Pracovní listy dále obsahují piktogram "HARD MODE", který upozorňuje na složitější a komplexnější příklady, které by pro některé žáky mohly být příliš náročné.

#### Vzdělávací cíle pracovního listu

Žák:

- Vypočítá třetí mocninu záporného desetinného čísla i záporného zlomku.
- porovnává hodnoty číselných výrazů s třetí mocninou.
- Vypočítá hodnotu třetí odmocniny čísla.
- Pomocí matematických tabulek nebo kalkulačky vypočítá hodnotu třetí mocniny a odmocniny. Používá vhodnou metodu k co nejpřesnějšímu výsledku.
- K řešení slovní úlohy využívá geometrickou představu třetí mocniny.
- Zapiše součin jako mocninu s přirozeným mocnitelem. Dodržuje zápis mocniny s přirozeným mocnitelem a svůj zápis dokáže přečíst.
- Využívá pravidla pro mocninu součinu a podílu k řešení příkladů. Dokáže si zdůvodnit postupy.
- Vypočítá číselné výrazy s mocninou a přirozeným mocnitelem.
- Zapisuje libovolné kladné číslo ve tvaru mocniny se základem 10.

#### Seznam QR kódů

QR kód č. 1 – Aktivita webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/pp7wnuy2>

QR kód č. 2 – Online vědecká kalkulačka na stránkách GeoGebra. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/scientific>

QR kód č. 3 – Video na YouTube Mocniny nuly | Matematika | Khan Academy na kanále KhanAcademyCzech Dostupné z: [https://www.youtube.com/watch?v=-\\_uB0jR0mI4](https://www.youtube.com/watch?v=-_uB0jR0mI4)

QR kód č. 4 – Video na YouTube Binary Numbers and Base Systems as Fast as Possible na kanále Techquicke Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=LpuPe81bc2w>

## Zdroje

### Učebnice a pracovní sešity použité k tvorbě cvičení:

LAUBEOVÁ, Alena, Blanka MATASOVÁ a Tomáš MIERVA a kol. *Hravá matematika 8: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: Taktik International, 2021. ISBN 978-80-7563-265-4.

MALÍK, Michal, Jana PRESOVÁ a Veronika ŠOLCOVÁ a kol. *Hravá matematika 8: Pracovní sešit pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 3. vydání. Praha: Taktik International, 2022. ISBN 978-80-7563-442-9.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Josef TREJBAL. *Matematika: algebra*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2015. ISBN 978-80-7235-419-1.

### Externí odkazy:

Geogebra. Online matematický software [online]. Verze 6.0.620.0. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/scientific>

KhanAcademyCzech. Mocniny nuly | Matematika | Khan Academy. In: *Youtube* [online]. 12.10.2018 [cit. 2023-04-01] Dostupné z: [https://www.youtube.com/watch?v=-\\_uB0jR0mI4](https://www.youtube.com/watch?v=-_uB0jR0mI4)

Techquickie. Binary Numbers and Base Systems as Fast as Possible. In: *Youtube* [online]. 15.6.2014 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=LpuPe81bc2w>

# Mocnina s přirozeným mocnitelem

## 1. Připomeň si úpravu číselných výrazů s druhou mocninou:

a)  $12 \cdot 3^2 - \sqrt{144} : 3 + 8 \cdot \sqrt{4} =$

b)  $15 - [(5^2 \cdot 10 + 6^2) : 2] =$

c)  $\sqrt{4^2 + 21 \cdot 4 + 2^2 \cdot 11} =$

## Co má přednost?

Závorky ( ) [ ] { }

Mocniny a odmocniny <sup>2</sup> √

Odmocnítko se chová jako závorka.

Násobení a dělení • :

Sčítání a odčítání + -

## Druhá mocnina

Druhá mocnina je součin dvou sobě rovných činitelů.  $a^2 = a \cdot a$   
čteme: "á na druhou"

základ mocniny (mocněnec)  $a^2$  ← exponent (mocnitel)

## Třetí mocnina

Třetí mocnina je součin tří sobě rovných činitelů.  $a^3 = a \cdot a \cdot a$   
čteme: "á na třetí"

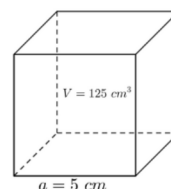
Jak si třetí mocninu představit?

Objem krychle se stranou  $a$ .

$$V = a^3$$

$$V = 5^3$$

$$V = 125 \text{ cm}^3$$



## 2. Vypočítej příklady a zakroužkuj správné odpovědi:

Třetí mocnina **kladného** čísla je kladné/záporné číslo.

a)  $3^3 =$

b)  $6^3 =$

c)  $10^3 =$

Třetí mocnina **záporného** čísla je kladné/záporné číslo.

Příklady si zapiš nejprve jako součin a potom vypočítej výsledek.

d)  $(-4)^3 =$

e)  $(-10)^3 =$

f)  $(-1)^3 =$

Třetí mocnina **součinu** je rovna/nerovna součinu třetích mocnin. g)  $(2 \cdot 3)^3 =$

h)  $2^3 \cdot 3^3 =$

i)  $(3 \cdot 5)^3 =$

j)  $3^3 \cdot 5^3 =$

Třetí mocnina **nuly** je kladné/záporné/nula číslo.

## 3. Vypočítej příklady a vyluští tajenku:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$2^3$	I	W	R	P	H	E	O	T	D	S
$5^3$										
$11^3$										
$15^3$										
$9^3$										
$7^3$										
$12^3$										
$6^3$										
$4^3$										
$17^3$										

Tajenka: \_\_\_\_\_

## 4. Vypočítej:

a)  $0^3 =$

b)  $(-8)^3 =$

c)  $(-0,6)^3 =$

d)  $(-1,2)^3 =$

e)  $\left(\frac{1}{4}\right)^3 =$

f)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

g)  $\frac{(-3)^3}{2} =$

## Třetí mocnina zlomku

Umocníme na třetí číselník i jmenovatel.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

### 5. Doplň znaky rovnosti a nerovnosti:



- |                                 |               |                   |             |
|---------------------------------|---------------|-------------------|-------------|
| a) $-6^3$                       | $(-6)^3$      | f) $(4 - 3)^2$    | 0           |
| b) $5^2$                        | $5^3$         | g) $[5 + (-5)]^3$ | 0           |
| c) $(-2)^2$                     | $(-2)^3$      | h) $(3 + 4)^3$    | $3^3 + 4^3$ |
| d) 0,5                          | $0,5^3$       | i) $10^2$         | $10^3$      |
| e) $\left(\frac{3}{3}\right)^3$ | $\frac{3}{3}$ | j) $4^3$          | $(-2^2)^3$  |

### Třetí odmocnina



Definice třetí odmocniny je velmi obdobná definici druhé odmocniny.

**Třetí odmocnina z čísla  $a$  je takové nezáporné číslo  $b$ , pro které platí:  $\sqrt[3]{a} = b$ , když  $b^3 = a$**

### 7. Najdi v předchozích cvičeních výsledky třetích odmocnin:



- |                        |                       |                      |
|------------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $\sqrt[3]{125} =$   | d) $\sqrt[3]{729} =$  | g) $\sqrt[3]{512} =$ |
| b) $\sqrt[3]{0,125} =$ | e) $\sqrt[3]{216} =$  | h) $\sqrt[3]{343} =$ |
| c) $\sqrt[3]{64} =$    | f) $\sqrt[3]{1728} =$ | i) $\sqrt[3]{8} =$   |

### 6. Zakroužkuj správnou odpověď:



- Třetí mocnina kladného čísla je kladné/záporné číslo.
- Třetí mocnina záporného čísla je kladné/záporné číslo.
- Třetí mocnina desetinného čísla má/nemá třikrát více desetinných míst než dané desetinné číslo.
- Třetí mocnina zlomku je rovna/se nerovná třetí mocnině čitatele lomeného třetí mocninou jmenovatele.

### Druhá odmocnina



**Druhá odmocnina z čísla  $a$  je takové nezáporné číslo  $b$ , pro které platí:**

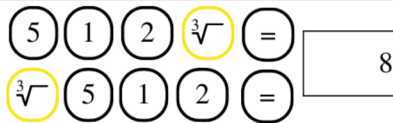
$$\sqrt{a} = b, \text{ když } b^2 = a$$

### Odmocňování na kalkulačce a v tabulkách



#### Odmocňování na kalkulačce

- většina kalkulaček má tlačítko pro výpočet třetí odmocniny



#### Určování třetí mocniny či odmocniny v MFCH tabulkách

Ověřím, zda se číslo nachází ve sloupci  $n$ .

- Pokud ano, nalezneme druhou mocninu či druhou odmocninu

$$31^3 = 29\ 791$$

$$\sqrt[3]{931} \approx 9,76$$

- Pokud ne:

- využijeme vzorce na umocňování či odmocňování součinu a rozložíme na součin

$$\sqrt[3]{0,998} = \sqrt[3]{998} \cdot \sqrt[3]{0,001} \approx 9,99 \cdot 0,1 = 0,999$$

- je-li potřeba, nejprve vhodně zaokrouhlíme, pak postupuje jako v bodě a.

$$49,823^3 \approx 49,8^3 = 489^3 \cdot 0,1^3 = 116\ 930\ 169 \cdot 0,001 = 116\ 930,169$$

### 8. Vypočítej pomocí MFCHT nebo kalkulačky:



- $21,4^3 =$
- $1,56^3 =$
- $56,2^3 =$
- $0,957^3 =$
- $57^3 =$
- $256^3 =$
- $18,6^3 =$
- $\sqrt[3]{24} =$
- $\sqrt[3]{32} =$
- $\sqrt[3]{320} =$
- $\sqrt[3]{54} =$
- $\sqrt[3]{3,375} =$
- $\sqrt[3]{0,216} =$

### 9. Vypočítej délku hrany krychle, která má čtyřikrát větší objem než krychle s hranou délky 60 cm:



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

Obrázek 8 Mocnina s přirozeným mocnitelem 2

Zdroj: vlastní zpracování

### Mocnina s přirozeným mocnitelem



Součin  $n$  sobě rovných činitelů nazýváme  $n$ -tá mocnina, kde  $n$  je přirozené číslo.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

čteme: "á na entou"

### 10. Zapiš jako mocninu s přirozeným mocnitelem:

a)  $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$

b)  $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) =$

c)  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} =$

d)  $2,3 \cdot 2,3 \cdot 2,3 \cdot 2,3 \cdot 2,3 \cdot 2,3 \cdot 2,3 =$

### 11. Rozlož na součin prvočísel a zapiš ho mocninou s přirozeným mocnitelem:

675 =

### 13. Zobecní výsledky příkladů:

a)  $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 =$

b)  $0^6 =$

$0^n =$

c)  $0^{106} =$

d)  $5^1 =$

e)  $10^1 =$

$n^1 =$

f)  $1039^1 =$

g)  $1 \cdot 1 \cdot 1 =$

h)  $1^9 =$

$1^n =$

i)  $1^{1893} =$

### 14. Zdůvodni následující řadu a pokus se napsat zobecnění:

$5^4 =$

$5^3 =$

$5^2 =$

$5^1 =$

$5^0 =$

$n^0 =$

$3^4 =$

$3^3 =$

$3^2 =$

$3^1 =$

$3^0 =$

### 12. Na základě vypočítaných příkladů doplň slova kladné nebo záporné:

a)  $3^5 =$

b)  $10^6 =$

c)  $0,6^3 =$

d)  $5^5 =$

e)  $(-2)^6 =$

f)  $(-6)^5 =$

g)  $(-7)^3 =$

$(-1)^8 =$

1. Je-li základ mocniny kladné číslo a exponent je číslo sudé, pak je mocnina \_\_\_\_\_ číslo.

2. Je-li základ mocniny kladné číslo a exponent je číslo liché, pak je mocnina \_\_\_\_\_ číslo.

3. Je-li základ mocniny záporné číslo a exponent je číslo sudé, pak je mocnina \_\_\_\_\_ číslo.

4. Je-li základ mocniny záporné číslo a exponent je číslo liché, pak je mocnina \_\_\_\_\_ číslo.

### A co nula na nultou?



3 FUN FACTS

Pro přesnou odpověď si budeš muset počkat na střední školu.

Pro tuto chvíli se můžeš podívat na toto video pro jednoduché vysvětlení, stačí vyfotit QR kód.

Pro pokračování ti bude stačit, že nula na nultou je úplně stejný případ jako dělení nulou. Jednoduše to není definováno.

$0^0$

### 15. Zapiš součin ve tvaru jedné mocniny:

Nápověda: Zapiš nejprve jako součin.

a)  $7^5 \cdot 7^4 =$

b)  $4^3 \cdot 4^5 =$

c)  $8^4 \cdot 8^2 =$

d)  $9^9 \cdot 9^6 =$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

Obrázek 9 Mocnina s přirozeným mocnitelem 3

Zdroj: vlastní zpracování

### Mocnina součinu



Mocniny se stejným základem násobíme tak, že jejich základ umocníme na součet mocnitelů:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Př.:  $(-8)^4 \cdot (-8)^8 = (-8)^{4+8} = (-8)^{12}$

$$2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2 = 2^{2+4+3} \cdot 2^1 = 2^{9+1} = 2^{10}$$

### Mocnina podílu



Mocniny se stejným základem dělíme tak, že jejich základ umocníme na rozdíl mocnitelů:

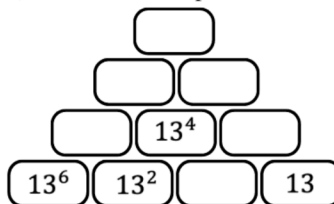
$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0; n, m \in \mathbb{N}$$

Př.:  $(-3)^6 : (-3)^3 = (-3)^{6-3} = (-3)^3$

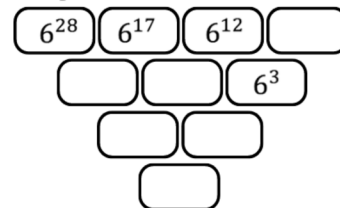
### 16. Dopačítej pyramidy:



a) Násob sousední políčka:



b) Děli sousední políčka zleva doprava:



### 17. Doplni do koleček správné mocniny a základy mocnin:



a)  $4^3 = (2 \text{ ●})^3 = 2 \text{ ●}$

b)  $9^4 = (\text{○}^2)^4 = \text{○} \text{ ●}$

c)  $625^7 = (5 \text{ ●})^7 = 5 \text{ ●}$

d)  $\text{○}^2 = (7^3)^2 = 7 \text{ ●}$

### Mocnina mocniny



Mocninu umocníme tak, že umocníme základ na součin mocnitelů.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Př.:  $(9^2)^2 = 81^2 = 6561$

$$(9^2)^2 = 9^{2 \cdot 2} = 9^4 = 6561$$

### 18. Zakroužkuj správnou odpověď:

- Při násobení mocnin se stejným základem se mocnitelé sčítají/odčítají.
- Při dělení mocnin se stejným základem se mocnitelé sčítají/odčítají.
- Při umocňování mocniny základ umocníme na součin/podíl mocnitelů.
- Součin umocníme tak, že umocníme/odmocníme každého činitele.
- Podíl umocníme tak, že umocníme/odmocníme každého činitele.

### 19. Počítej příklady a postupně spoj jednotlivé výsledky na obrázku úsečkou:



a)  $(-1)^{20} =$

b)  $(-10)^5 : (-10)^4 =$

c)  $-(2^5 : 4^4) \cdot 2^2 =$

d)  $6^2 - 4 \cdot \sqrt{100} =$

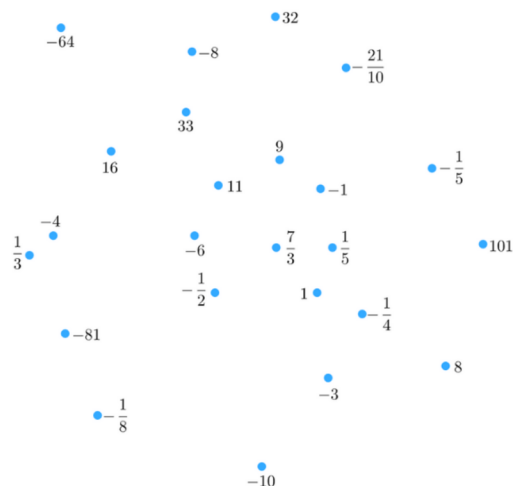
e)  $\sqrt{121} =$

f)  $(2^4)^3 : 2^7 =$

g)  $(-1)^{2023} : (-1)^{2022} =$

h)  $\sqrt[3]{101^3} =$

i)  $2020^0 =$



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

Obrázek 10 Mocnina s přirozeným mocnitelem 4

Zdroj: vlastní zpracování



20. Vypočítej a vyber správný výsledek:

$$\frac{3^8 \cdot (3^3 \cdot 3^2)^2}{(3^4)^5 \cdot 3^0} =$$

- a)  $\frac{1}{3}$     b)  $\frac{1}{9}$     c) 3    d) 0    e) jiný výsledek

21. Vypočítej příklady:

a)  $8 \cdot 2^2 - \sqrt{64} : 8 + 17 \cdot \sqrt{36} =$

b)  $\sqrt{121 \cdot 169} : (-13) + 13 \cdot 3^2 - 18 : (-3^2) =$

c)  $1,1^2 : 1,1 - 1,1^3 : \sqrt{1,1 \cdot 1,1^3} - (-1,1)^2 - (-1,1^2) =$

Mocniny o základu 10

Rozvinutý zápis	$10^0 =$	1
přirozeného čísla v	$10^1 =$	10
desítkové soustavě je	$10^2 =$	100
možné zapsat s	$10^3 =$	1 000
užitím mocnin o	$10^4 =$	10 000
základu 10:	$10^5 =$	100 000
	$10^6 =$	1 000 000

Př.:  
 $3\,649\,138 = 3 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

23. Napiš rozvinutý zápis čísla s užitím mocnin se základem 10:

a)  $55\,689 =$

b)  $253\,285 =$

c)  $5\,632\,800 =$

d)  $362\,210 =$

Zápis přirozeného čísla v desítkové soustavě

Miliony	Statisíce	Desetitisíce	Tisíce	Stovky	Desítky	Jednotky
3	6	4	9	1	3	8

Zkrácený zápis: 3 649 138

Slovní zápis: tři miliony šest set čtyřicet devět tisíc sto třicet osm

Rozvinutý zápis:

$$3 \cdot 1\,000\,000 + 6 \cdot 100\,000 + 4 \cdot 10\,000 + 9 \cdot 1\,000 + 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 9 \cdot 1$$

Zápis čísla

Každé kladné číslo  $b$ ,  $b \geq 10$ , můžeme zapsat ve tvaru

$$b = a \cdot 10^n$$

kde  $1 \leq a < 10$  a  $n$  je přirozené číslo.

22. V následujících zápisech doplň mocninu základu 10, aby platily uvedené rovnosti:

a)  $1,4 \cdot 10^{\bullet} = 14\,000$

b)  $2,8 \cdot 10^{\bullet} = 280$

c)  $1,72 \cdot 10^{\bullet} = 1\,720\,000$

24. Ceny následující automobilů zapište s přesností na dvě platné číslice ve tvaru  $a \cdot 10^n$ , kde  $1 \leq a < 10$  a  $n$  je přirozené:

Automobil	Cena (v Kč)
Škoda Octavia	608 900
Ford Mondeo	856 900
Dacia Duster	331 900
Audi Q8	1 897 000
Volvo XC90	2 127 700
Mercedes GLA 250 e	1 084 160

Mocnina s přirozeným mocnitelem	Ještě potřebuji procvičit	Zvládám bez problémů
1. Dokáži vypočítat mocninu libovolného čísla.		
2. Umím vypočítat třetí mocninu a odmocninu pomocí kalkulačky nebo tabulek.		
3. Upravuji výrazy s mocninami.		
4. Upravuji výrazy s odmocninami.		
5. Využívám vzorců pro počítání s mocninami.		
6. Zapisuji přirozené číslo rozvinutým zápisem v desítkové soustavě ve tvaru $a \cdot 10^n$ ; $a, n \in \mathbb{N}$ .		
7. Zapisuji libovolné kladné číslo ve tvaru $b = a \cdot 10^n$ ; $b \geq 10$ ; $1 \leq a < 10$ ; $n \in \mathbb{N}$		

POZIČNÍ SOUSTAVY

Poziční soustava je způsob zápisu čísla, ve kterém hodnota čísla závisí na pozici jednotlivých číslic v čísle. V rozvinutém zápise čísla nemusíme psát pouze mocniny o základu 10, ale i o jiném základu. Desítková soustava je jednou z mnoha pozičních soustav. Další často používané soustavy jsou **binární** (se základem 2), **oktální** (se základem 8) nebo **hexadecimální** (se základem 16).



Obrázek 11 Mocnina s přirozeným mocnitelem 5

Zdroj: vlastní zpracování

### 3.3. Pythagorova věta

METODICKÝ LIST č.3	
Téma pracovního listu	Ročník
<b>Pythagorova věta</b>	<b>osmý</b>
Zařazení do RVP ZV	
<i>Vzdělávací oblast:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Vzdělávací obor:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Tematický celek:</i>	Geometrie v rovině a v prostoru
Výchovně vzdělávací cíle dle RVP ZV	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů</li> <li>• využívá Pythagorovu větu k řešení geometrických úloh</li> <li>• řeší geometrické úlohy početně</li> </ul>	
Pojmová analýza	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Nové pojmy:</b> Pythagorova věta, Pythagorejský trojúhelník</li> <li>• <b>Opěrné pojmy:</b> odvěsna, přepona, pravoúhlý trojúhelník, druhá mocnina, druhá odmocnina, obsah</li> </ul>	
Organizační podmínky	
<p>Pro úspěšné zvládnutí pracovních listů na téma Pythagorova věta je nezbytné, aby žák ovládal pojmy a vlastnosti spojené s pravoúhlým trojúhelníkem a uměl počítat s druhými mocninami a odmocninami. V materiálech je k dispozici množství interaktivních prvků, které zobrazují situace na náčrtcích, proto by měl mít žák k dispozici zařízení s připojením k internetu a webovou kamerou nebo fotoaparát, nejlépe tablet nebo telefon. Pro vypracování listů bude žák potřebovat také kalkulačku.</p> <p>Vzhledem k tomu, že jsou pracovní listy koncipovány s ohledem na variabilitu, může si učitel upravit jejich zařazení do výuky. Je stále dodržena myšlenka jednoho listu na jednu vyučovací hodinu. Poslední strana pracovních listů obsahuje sbírku slovních úloh, které jsou</p>	

diferencovatelné a žák si může vybrat, která obtížnost pro něj bude ideální. Pro splnění výstupů stanovených v RVP ZV je nutné splnit alespoň třetí tečku.

V rámci listů jsou žáci podněcováni k badatelskému objevování pravidel a diskusi nad cvičeními, na konci každé strany pracovního listu je zařazeno krátké sebehodnocení.

#### Vzdělávací cíle pracovního listu

Žák:

- Vypočítá délku třetí strany v pravouhlém trojúhelníku s použitím Pythagorovy věty.
- Samostatně řeší úlohy na výpočet délky třetí strany v pravouhlém trojúhelníku.
- Aplikuje znalosti Pythagorovy věty k ověření, zda je zadaný trojúhelník pravouhlý.
- Samostatně vypracovává úlohy pro aplikaci Pythagorovy věty. Načrtává situace a doplňuje zadané údaje do náčrtku.
- Řeší slovní úlohy s různou obtížností. Načrtne zadanou situaci a doplní do něj údaje.
- Využívá Pythagorovu větu k řešení úloh v rovině i v prostoru.
- Své výsledky si dokáže zdůvodnit a vysvětlí svůj postup.

#### Seznam QR kódů

QR kód č. 1 – Video na Youtube How many ways are there to prove the Pythagorean theorem? – Betty Fei na kanále TED-Ed. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=YompsDIEdtc&t>

QR kód č. 2 – Video na Youtube Pythagorean Theorem: Six Proofs na kanále Beau Janzen. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=COkhrDbNcuA>

QR kód č. 3 – Video na Youtube Pythagoren theorem water demo na kanále 00000000130. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=CAkMUdeB06o>

QR kód č. 4 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/td9edeed>

QR kód č. 5 – Článek Pythagorejská čísla a pythagorejské trojice na webu Matematika.cz. Dostupné z: <https://www.matematika.cz/pythagorejska-cisla-a-pythagorejske-trojice/>

QR kód č. 6 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/grkacway>

## Zdroje

### Učebnice a pracovní sešity použité k tvorbě cvičení:

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika Aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-684-0.

LAUBEOVÁ, Alena, Blanka MATASOVÁ a Tomáš MIERVA a kol. *Hravá matematika 8: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: Taktik International, 2021. ISBN 978-80-7563-265-4.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Josef TREJBAL. *Matematika: algebra*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2015. ISBN 978-80-7235-419-1.

TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika 8 s nadhledem*. Praha: Fraus, 2020. ISBN 978-80-7489-517-3.

### Externí odkazy:

TED-Ed. How many ways are there to prove the Pythagoren theorem? In: *YouTube* [online]. 11.9.2017 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=YompsDIEdtc&t>

Beau Janzen. Pythagorea Theorem: Six Proofs. In: *Youtube* [online]. 13.9.2014 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=COkhrDbNcuA>

00000000130. Pythagorean theorem water demo. In: *Youtube* [online]. 14.4.2009 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=CAkMUdeB06o>

Pythagorejská čísla a pythagorejské trojice. *Matematika.cz* [online]. Nová média, 2022 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.matematika.cz/pythagorejska-cisla-a-pythagorejske-trojice/>

### Obrázky:

PV1 – Rosales, Oscar & De Hoyos Martínez, Jesús. (2012). The foundational mith of the city: A vision from the Sacred Geometry. 4. 90-109.

PV2 – Čučka, Michal. Pythagorova věta a její důkazy: *diplomová práce*. Brno: Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra pedagogiky, 2007. Vedoucí diplomové práce PhDr. Pavlína Račková.

# Pythagorova věta

## Něco málo z historie matematiky

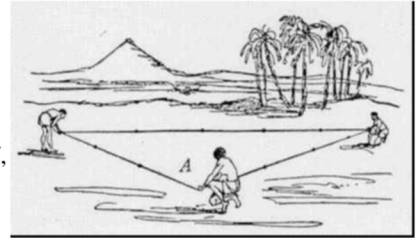


### Egypt, 3. tisíciletí př. n. l.

Na každé stavbě byl egyptský inženýr, tzv. Harpedonapta (napínač lan). Využívali tajných vědomostí k vytyčování pravých úhlů.

Jejich práci si můžeš vyzkoušet. Použij provázek dlouhý 12 cm a udělej uzly po jednom centimetru, na začátku i na konci. Barevně vyznač první, čtvrtý a osmý uzel. Spoj první a třináctý uzel a ve vyznačených uzlech provázek napni.

**Jaký trojúhelník vznikl?**



Obr. PV1

## Pythagorova věta



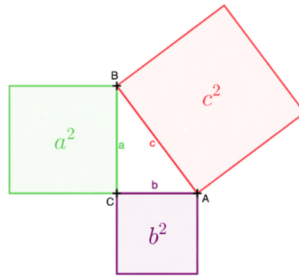
Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku ( $c^2$ ) se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami ( $a^2 + b^2$ ).

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Známe-li délky dvou stran v pravoúhlém trojúhelníku, dokážeme vypočítat třetí.

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$



## Pojmy v pravoúhlém trojúhelníku

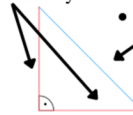


### Odvěsny

- dvě kratší strany

### Přepona

- nejdelší strana
- naproti pravému úhlu



## Druhá mocnina a odmocnina



**Najít druhou mocninu čísla** znamená vynásobit toto číslo samo sebou.

**Najít druhou odmocninu čísla** znamená najít číslo, které když vynásobím samo sebou, získám dané číslo.

## 1. Doplní údaje na vynechaná místa a vypočítej třetí stranu pravoúhlého trojúhelníku.

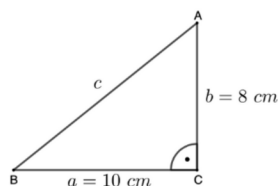
a) Vypočítej délku přepony  $c$  v pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$ ,  $a = 8 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ .

$$c^2 = a^2 + \underline{\quad}^2$$

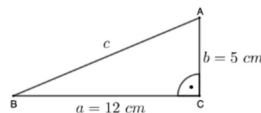
$$c^2 = 8^2 + \underline{\quad}^2$$

$$c = \sqrt{\underline{\quad}}$$

$$c = \underline{\quad} \text{ cm}$$



b) Vypočítej délku přepony  $c$  v pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$ ,  $a = 12 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ .

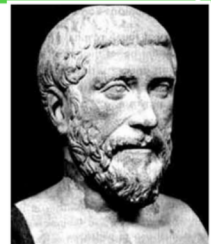


## Kdo objevil Pythagorovu větu?



Pythagorova věta je pojmenována podle Pythagora ze Samu, řeckého filozofa a matematika.

Ten ji ale neobjevil. Věta byla známa již v Egyptě nebo v Číně. Pythagoras je ale první, kdo tuto větu dokázal (ukázal, že platí vždy).



Obr. PV2

## Jak ji můžeme dokázat?



Důkazů existuje velké množství. Vyfoť tyto QR kódy a podívej se alespoň na pár.



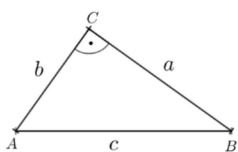
Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

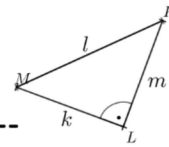
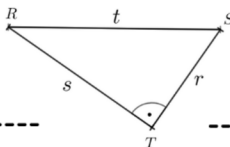
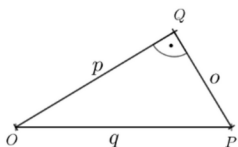
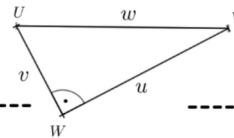
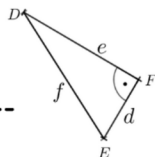
Obrázek 12 Pythagorova věta 1

Zdroj: vlastní zpracování

4. U každého trojúhelník zapiš správnou formulaci Pythagorovy věty pro daný trojúhelník.



$c^2 = \quad + \quad$



5. Vypočítej délku třetí strany pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$  s přeponou  $c$ . Délku stran zaokrouhli na desetiny.



a)  $a = 8,9 \text{ cm}; b = 5,7 \text{ cm}$

b)  $a = 7,2 \text{ cm}; c = 11,8 \text{ cm}$

c)  $b = 1,9 \text{ cm}; c = 2,4 \text{ cm}$

### Obrácená Pythagorova věta



Platí-li pro délky stran  $a, b, c$  trojúhelníku  $ABC$  rovnost  $c^2 = a^2 + b^2$ , pak je tento trojúhelník pravoúhlý a  $c$  je délka jeho přepony.

6. Pomocí obrácené Pythagorovy věty ověř, zda je trojúhelník pravoúhlý.



a)  $a = 3,3 \text{ cm}; b = 4,4 \text{ cm}; c = 5,5 \text{ cm}$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\underline{\quad}^2 = 3,3^2 + \underline{\quad}^2$$

$$\underline{\quad} = \underline{\quad} + 19,36$$

$$\underline{\quad} = \underline{\quad}$$

Trojúhelník  $ABC$   pravoúhlý.

b)  $k = 10,4 \text{ dm}; l = 9,6 \text{ dm}; m = 3,1 \text{ dm}$

c)  $d = 18 \text{ m}; e = 7,5 \text{ m}; f = 20 \text{ m}$

d)  $p = 11,2 \text{ cm}; q = 23,4 \text{ cm}; r = 21 \text{ cm}$

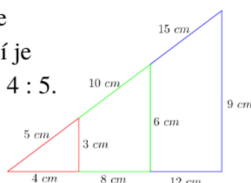
### Pythagorejské trojúhelníky



Pythagorejská čísla jsou přirozená čísla, které představují strany pravoúhlého trojúhelníku. Tyto čísla se nazývají Pythagorecké trojice nebo Pythagorejské trojúhelníky.



Pythagorejských trojúhelníků je nekonečně mnoho. Nejznámější je trojúhelník s poměrem stran  $3 : 4 : 5$ . Pro nalezení dalšího stačí tento poměr rozšířit.



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

Obrázek 13 Pythagorova věta 2

Zdroj: vlastní zpracování

7. Podle čísel doplň do křížovky slova vynechaná ve dvou matematických větách a získáš tajenku.

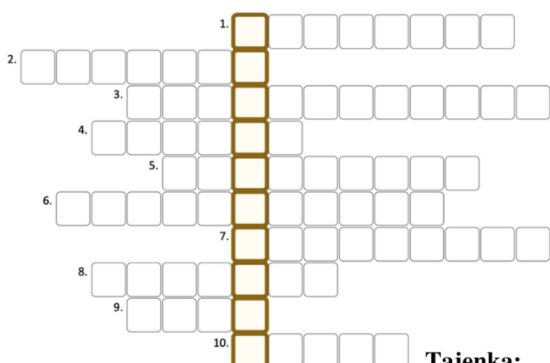


Pythagorova 9

Obsah 8 sestrojeného nad 1 pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu 4 čtverců 3 nad jeho 7.

Věta obrácená k 6 větě

Jsou-li  $a, b, c$  délky 10 trojúhelníku a platí-li pro ně  $c^2 = a^2 + b^2$ , pak je trojúhelník 5 a  $c$  je délka jeho 2.



Tajenka: \_\_\_\_\_

Slovní úlohy



1. Znázorni co nejpřesněji úlohu náčrtkem.
2. Najdi pravoúhlý trojúhelník. Rozměry trojúhelníku budeš muset často dopočítat.
3. Urči, jestli budeš počítat přeponu nebo odvěsnu.
4. Sestav Pythagorovu větu.
5. Dopočítej.

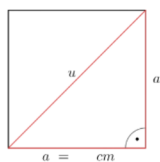
Pythagorovu větu můžeš využít v mnoha úlohách, ale vždy se musí jednat o pravoúhlý trojúhelník.

Na konci výpočtu si zkontroluj, na co se nás v úloze ptají a co jsi to vlastně vypočítal.

8. Doplň řešení slovní úlohy:



a) Vypočítej délku úhlopříčky ve čtverci se stranou délky  $a = 9,8 \text{ cm}$ . Výsledky uveď s přesností na desetiny.

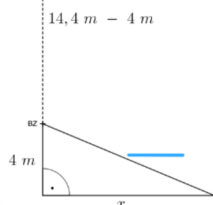


Budu počítat přeponu  $u$ , odvěsny budou strany čtverce.

$$\begin{aligned} \underline{\quad} &= \underline{\quad} + \underline{\quad} \\ u^2 &= 9,8^2 + \underline{\quad} \\ u^2 &= \underline{\quad} + 96,04 \\ u^2 &= 192,08 \\ u &= \underline{\quad} \\ u &\doteq \underline{\quad} \end{aligned}$$

b) Strom vysoký 14,4 metru se zlomil ve výšce 4 metru od země. Do jaké vzdálenosti od paty kmene sahá jeho špička, jestliže zlomený kmen zůstal viset v místě zlomu?

Budu počítat odvěsnu  $x$ , druhá odvěsna má velikost 4 m. Přeponu musím dopočítat.



$$\begin{aligned} x^2 &= \underline{\quad}^2 - 4^2 \\ x^2 &= 108,16 - 16 \\ x^2 &= \underline{\quad} \\ x &= \underline{\quad} \\ x &= \underline{\quad} \end{aligned}$$

9. Řeš slovní úlohy, situaci v úloze si načrtni a zapiš známé údaje:



a) Šířka televizoru je 518 mm a výška 323 mm. Jak dlouhá je úhlopříčka televizoru v palcích?  
 $1'' (\text{palec}) = 2,54 \text{ cm}$

b) Vypočítej velikost základny rovnoramenného trojúhelníku, jehož výška k základně má velikost 5 cm a délka ramene je 6,5 cm. Jaký je obvod tohoto trojúhelníku?

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

Obrázek 14 Pythagorova věta 3

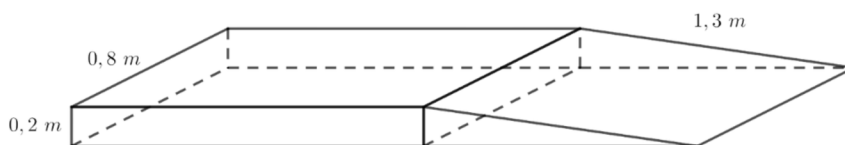
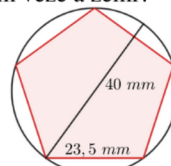
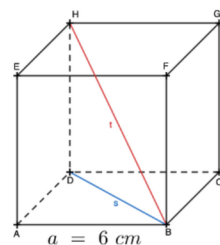
Zdroj: vlastní zpracování

### 10. Vyřeš slovní úlohy:

### Legenda obtížností:



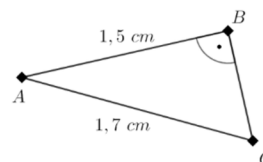
- 1. Pan Novák si koupil novou televizi. Šířka obrazovky je 95,2 cm a její výška je 53,5 cm. Jaká je délka úhlopříčky televize?
- 2. Znáš velikosti tří stran pravoúhlého lichoběžníku KLMN. Urči délku zbývající strany a délky obou úhlopříček.
- 3. Hrana krychle ABCDEFGH měří 6 cm. S přesností na desetiny vypočítej délku stěnové úhlopříčky  $s$  a tělesové úhlopříčky  $t$ .
- 4. Na pile vyrábějí trámy na střechu, které mají čtvercový průřez o straně 15 cm. Jaký je nejmenší průměr kmene stromu, ze kterého je možné takové trámy vyrobit?
- 5. Žebřík délky 8 m je opřen o zeď tak, že spodní konec žebříku je od zdi vzdálen 1,6 metru. Do jaké výšky na zdi sahá horní konec žebříku?
- 6. Vypočítej objem a povrch kvádru, kterého podstava má rozměry 7 dm a 5 dm a jeho tělesová úhlopříčka měří 9,5 dm. Výsledky uveď s přesností na jednotky.
- 7. Mezi známé kulturní památky patří šikmá věž v Pise. Samotná věž měří 56 metrů a v současné době je vychýlena od svislého směru o 4 metry. Jaká je vzdálenost mezi vychýleným vrcholem věže a zemí? Výsledek zaokrouhli na centimetry.
- 8. Speciální edice Slovenských mincí vydaná při příležitosti vstupu Slovenska do EU má tvar pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice s průměrem 40 mm se stranou délky 23,5 mm. Vypočítej obsah pětiúhelníkové mince.
- 9. Vypočítej velikost výšky rovnoramenného trojúhelníku, jehož rameno má délku 6,5 cm a základna má délku 8,2 cm. Jaký je obsah a obvod tohoto trojúhelníku?
- 10. Allianz Arena je fotbalový stadion u Mnichova s kapacitou 75 000 diváků. Celková herní plocha fotbalového hřiště je 7 140 metrů čtverečních. Šířka herní plochy je 68 metrů. Vypočítej délku hřiště. Jakou nejkratší možnou vzdálenost musí uběhnout fotbalista, poběží-li mezi dvěma protějšími rohy hřiště?
- 11. Před vchodem do dětského centra je 20 cm vysoký schod. Ředitelka centra rozhodla, že se kvůli zlepšení přístupu pro maminky s kočárky z boku ke schodu přistaví betonová rampa. Kolik centimetrů krychlových betonu budou na rampu potřebovat?



Pythagorova věta	Ještě potřebuji procvičit	Zvládám bez problémů
1. Vysvětlím pojmy odvěsna a přepona.		
2. V pravoúhlém trojúhelníku poznám odvěsnu a přeponu.		
3. Pomocí Pythagorovy věty vypočítám délku přepony v pravoúhlém trojúhelníku.		
4. Odvodím vzorec z Pythagorovy věty pro výpočet odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku.		
5. Vypočítám délku odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku.		
6. Ověřuji, zda je trojúhelník pravoúhlý pomocí obrácené Pythagorovy věty.		
7. Využívám znalosti Pythagorovy věty pro výpočty v rovinných i prostorových geometrických útvech.		
8. Řeším praktické úlohy za pomoci Pythagorovy věty.		



- 12. Na mapě s měřítkem 1 : 25 000 000 jsou v centimetrech uvedené vzdálenosti mezi městy A a B; A a C. Vypočítej skutečnou vzdálenost mezi B a C.



Obrázek 15 Pythagorova věta 4

Zdroj: vlastní zpracování



### 3.4. Výrazy

METODICKÝ LIST č.4	
Téma pracovního listu	Ročník
<b>Výrazy</b>	<b>osmý</b>
Zařazení do RVP ZV	
<i>Vzdělávací oblast:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Vzdělávací obor:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Tematický celek:</i>	Číslo a proměnná
Výchovně vzdělávací cíle dle RVP ZV	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dodržuje pravidla pro pořadí početních operací při úpravě výrazů.</li> <li>• Využívá vlastnosti operací sčítání a násobení při úpravě výrazů.</li> <li>• Vypočte hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných.</li> <li>• Využívá při úpravě výrazů vytýkání a vzorce.</li> <li>• Vybere odpovídající výraz, který popisuje jednoduchou reálnou situaci.</li> </ul>	
Pojmová analýza	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Nové pojmy:</b> číselný výraz, algebraický výraz, komutativní zákon, asociativní zákon, distributivní zákon, hodnota výrazu, jednočlen, mnohočlen, rozklad mnohočlenu na součin, vytýkání</li> <li>• <b>Opěrné pojmy:</b> pravidla pro počítání s mocninami, druhá mocnina, druhá odmocnina, početní operace</li> </ul>	
Organizační podmínky	
<p>S účelem úspěšného zvládnutí pracovních listů na téma Výrazy je nezbytné, aby student ovládal početní operace s desetinnými čísly, zlomky, a to včetně kladných i záporných hodnot. Dále je třeba, aby uměl pracovat s mocninami, s přirozeným mocnitelem a používat pravidla pro práci s mocninami.</p> <p>Pracovní listy jsou koncipovány tak, aby každá strana představovala jednu vyučovací hodinu. Využívají se interaktivní prvky, pro které je nezbytné zařízení připojené k internetu s webovou kamerou nebo fotoaparátem, přičemž nejvhodnějšími jsou tablety či telefony. Pracovní listy jsou navrženy s ohledem na variabilitu a mohou být upraveny vyučujícím v</p>	

souladu s konkrétními potřebami výuky. Může nastat, že množství cvičení nebude dostatečné ke kompletnímu procvičení učiva. V tom případě je možné pracovat i mimo pracovní listy a upevnit práci s výrazy na co nejvyšší úrovni.

V rámci pracovních listů jsou studenti podněcováni k badatelskému objevování pravidel a diskusi nad cvičeními. Každá strana pracovního listu končí krátkým sebehodnocením, což pomáhá studentům sledovat svůj pokrok. Výstupy celého tématu jsou shrnuty v tabulce na jeho konci, což umožňuje studentům reflektovat svůj postup a poskytuje rychlou zpětnou vazbu pro vyučujícího.

Pracovní listy obsahují také piktogram "HARD MODE", který upozorňuje na složitější nebo komplexnější příklady, které mohou být pro některé studenty příliš náročné.

#### Vzdělávací cíle pracovních listů

Žák:

- Vypočítá hodnotu číselného výrazu. Dodržuje pravidla pořadí početních operací. Své řešení kontroluje a hledá případné chyby.
- Zapisuje číselný výraz zadaný slovně pomocí matematických značek a symbolů.
- Zapiše ze slovního zadání výrazy s proměnnou.
- Vypočítá hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných.
- Vytvoří odpovídající výraz, který popisuje jednoduchou reálnou situaci.
- Obhajuje a zdůvodňuje své postupy.
- Rozeznává pojmy koeficient a jednočlen.
- Určuje rovnost dvou výrazů bez nutnosti počítat hodnotu výrazu.
- Sčítá a odčítá jednočleny i mnohočleny.
- Tvoří vlastní příklady, pracuje s možnou chybou a uvádí, ve které části výpočtu by mohla nastat.
- Násobí jednočleny, dodržuje zásady pravidel počítání s mocninami.
- Násobí mnohočlen jednočlenem i mnohočlen mnohočlenem.
- Vytváří si grafickou představu násobení mnohočlenů.
- Využívá při úpravě výrazů vytýkání a vzorce.

#### Seznam QR kódů

QR kód č. 1 – Online procvičování na webových stránkách Umimematiku.to. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/cviceni-dosazovani-do-vyrazu>

QR kód č. 2 – Online procvičování na webových stránkách Umimematiku.to. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/odvozovani-zapis-pomoci-vyrazu-2-uroven/2170>

QR kód č. 3 – Stručná biografie francouzského matematika François Viète na webu Techmania. Dostupné z: <http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1354/viete>

QR kód č. 4 – Online procvičování na webových stránkách KhanAcademy. Dostupné z: <https://cs.khanacademy.org/math/8-trida/xa6c32d514c48657d:vyrazy/xa6c32d514c48657d:scitani-a-odcitani-vyrazu/v/combining-like-terms>

QR kód č. 5 – Webové stránky mobilní aplikace PhotoMath. Dostupné z: <https://photomath.com>

QR kód č. 6 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/classic/npfqkye3>

QR kód č. 7 – Video na Youtube What's the difference of two squares? na kanále MathVisualProofs. Dostupné z: <https://www.youtube.com/shorts/n1ULL27cxHk>

## Zdroje

### Cvičení:

BĚLOUN, František, Ivan BUŠEK a Vlastimil MACHÁČEK. *Sbírka úloh z matematiky: pro základní školu*. 8. vydání. Praha: "B" Print, 2004. ISBN 80-7196-104-3.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika Aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-684-0.

COUFALOVÁ, Jana, Šárka PĚCHOUČKOVÁ, Jiří HEJL a kol. *Matematika: pro 8. ročník základní školy*. 3. vydání. Praha: Fortuna, 2020. ISBN 978-80-7373-142-7.

KRUPKA, Peter. *Sbírka úloh z matematiky: pro 2. stupeň základních škol a nižší ročníky víceletých gymnázií, 1. díl*. 3. vydání. Havlíčkův brod: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-188-5.

LAUBEOVÁ, Alena, Blanka MATASOVÁ a Tomáš MIERVA a kol. *Hravá matematika 8: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: Taktik International, 2021. ISBN 978-80-7563-265-4.

MALÍK, Michal, Jana PRESOVÁ a Veronika ŠOLCOVÁ a kol. *Hravá matematika 8: Pracovní sešit pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 3. vydání. Praha: Taktik International, 2022. ISBN 978-80-7563-442-9.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Josef TREJBAL. *Matematika: algebra*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2015. ISBN 978-80-7235-419-1.

TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika 8 s nadhledem*. Praha: Fraus, 2020. ISBN 978-80-7489-517-3.

Externí zdroje:

Dosazování do výrazů. *Umimematiku.to* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/cviceni-dosazovani-do-vyrazu>

Zápis zadání pomocí výrazů. *Umimematiku.to* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/odvozovani-zapis-pomoci-vyrazu-2-uroven/2170>

KRÁLOVÁ, Magda. François Viète. *Techmania: Science Center* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1354/viete>

Úvod do sčítání členů ve výrazech. *Khan Academy* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://cs.khanacademy.org/math/8-trida/xa6c32d514c48657d:vyrazy/xa6c32d514c48657d:scitani-a-odcitani-vyrazu/v/combining-like-terms>

MathVisualProofs. What's the difference of two squares? In: *YouTube* [online]. 16.2.2023 [2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/shorts/n1ULL27cxHk>

# Výrazy

## 1. Přřaď názvy operací k příkladům:



$7 + 3$	součin	$7 + 8 : 4$
$7 \cdot 3$	rozdíl	$5 - 1 \cdot 3$
$7 - 3$	mocnina	$4 \cdot (8 - 3)$
$7 : 3$	podíl	$18 : (4 + 2)$
$7^3$	odmocnina	$(1 + 6 : 3)^2$
$\sqrt[3]{7}$	součet	$\sqrt{25 + 22 : 2}$

## 2. Vypočítej hodnotu číselných výrazů:



- $(13 + 5) : 3 + 2 =$
- $35 - 4 \cdot (7 - 5) =$
- $-150 \cdot 2 \cdot 0 + 164 : 4 =$
- $2\frac{1}{2} + 12,6 - 18,6 =$
- $(3,8 - 5) \cdot (1,4 + 8) =$
- $\sqrt{7 + 18} : 2,5 + 1,1 =$
- $-[3^4 + 2 \cdot [7 - 3 \cdot (-5)]] =$

### Komutativní zákon



Pro sčítání (násobení) platí, že zaměněním sčítanců (činitelů) se hodnota výrazu nemění.

$$6 + (-7) = (-7) + 6$$

$$4 \cdot 9 = 9 \cdot 4$$

### Asociativní zákon



Pro sčítání (násobení) platí, že libovolným sdružením sčítanců (činitelů) se hodnota výrazu nemění.

$$(3 + 8) + (-2) = 3 + [8 + (-2)]$$

$$(2 \cdot 4) \cdot 9 = 2 \cdot (4 \cdot 9)$$

## 4. Urči, zda jsou některé závorky zbytečné. Pokud ano, přeškrtni je. Označ ty příklady, které mají stejnou hodnotu.

$3 \cdot (7 + 2) \cdot (4 - 9)$	$3 \cdot (7 + 2 \cdot 4) - 9$
$3 \cdot 7 + (2 \cdot 4 - 9)$	$(3 \cdot 7) + (2 \cdot 4) - 9$
$3 \cdot 7 + (2 \cdot 4) - 9$	$3 \cdot 7 + 2 \cdot (4 - 9)$

## Číselný výraz



Slovem **výraz** označujeme zapsané početní výkony.

**Číselný výraz** je výraz sestavený z čísel, symbolů početních operací a závorek.

$$2 \cdot (11 + 18)$$

Výraz pojmenováváme podle **operace**, kterou při jeho výpočtu provedeme jako **poslední**.

$$27 + 6 : 3 \quad \text{Součet čísla 27 a podílu čísel 6 a 3.}$$

Provedením všech početních výkonů v číselném výrazu vypočítáme jeho **hodnotu**.

$$(13 + 2) : 3 + 2 = 7 \quad \leftarrow \text{hodnota výrazu}$$

↑  
číselný výraz

## 3. Zapiš číselný výraz pomocí matematických znaků a vypočítej jeho hodnotu.

- součet dvojnásobku čísla 3 a čtyřnásobku čísla 7
- rozdíl druhých mocnin čísel 7 a 4
- součet součinu čísel 2 a 3 a podílu čísel 9 a 3
- druhá odmocnina z rozdílu čísla 20 a 4

### Distributivní zákon



Násobení je **distributivní** vzhledem ke sčítání i k odčítání.

Stejně činitele můžeme **vytknout** před závorku a výsledek se nezmění.

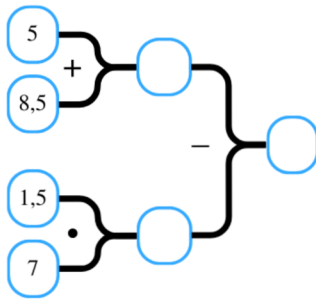
Závorku můžeme **roznásobit** tak, že číslem násobíme výraz v závorce.

$$(2 - 6) \cdot (-4) = 2 \cdot (-4) - 6 \cdot (-4)$$

$$(-3 + 7) \cdot (-2) = (-3) \cdot (-2) + 7 \cdot (-2)$$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

5. Zapiš jako číselný výraz a urči jeho hodnotu. Pomoz si schématem.



6. Doplň tabulku:

$x$	$y$	$x + y$	$x - y$	$x \cdot y$	$x : y$
$4\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$				
6					12
	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{15}$			

### Algebraické výrazy

**Algebraický výraz** je zápis početních výkonů (a jejich pořadí) s **čísly** a **proměnnými** pomocí matematické symboliky.

**proměnná** - písmeno v algebraickém výrazu

**konstanta** - číslo

**koeficient** - číslo v součinu s proměnnou (číslo v jednočlenu)

$$3 \cdot a - 11 + 2b + c$$

V součinu čísla a proměnné se znaménko násobení nepíše.

7. Zapiš výrazy pomocí proměnných:

- součet  $a$  a  $b$
- dvojnásobek rozdílu  $x$  a  $y$
- dvě třetiny z rozdílu  $a$  a  $b$
- 83 % podílu  $o$  a  $p$

8. Urči hodnoty výrazů pro  $x = 2$  a  $y = -2$ . Výsledky seřaď od nejmenšího po největší a vylušti tajenku.

I	$5x + 4 =$
T	$7x - x =$
Á	$-(-x) + (-y) =$
S	$10 - 2 + 3x =$
L	$x - (-2x) + y - 1 =$
Z	$9 + y - x =$
E	$x \cdot y =$
Z	$\frac{x - y}{2} - 0,3 =$
N	$x^2 + y^2 =$
B	$\sqrt{x - y} =$

Matematika je jediný způsob jak \_\_\_\_\_.

### Hodnota výrazu

Hodnotu výrazu získáme, pokud **dosadíme** za proměnné konkrétní čísla.

Další procvičení:

**Např.:**

$$-2 \cdot (x + 3) \text{ pro } x = 4$$

$$-2 \cdot (4 + 3) = -2 \cdot 7 = -14$$



9. Zapiš slovní zápisy vzorců. Napiš, o jaké geometrické vzorce se jedná.

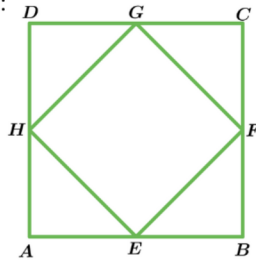
- Dvojnásobek součtu  $a$  a  $b$ .
- Čtyřnásobek  $a$ .
- Polovina součtinu  $v$  a  $a$ .
- Součin  $a$ ,  $b$  a  $c$ .
- Součin obsahu podstavy a výšky.
- Polovina součtinu  $v$  a součtu  $a$  a  $c$ .

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

**10. Je dán čtverec ABCD s délkou strany  $a$ . Body E, F, G, H jsou středy stran čtverce.**

Pomocí výrazů s proměnnou  $a$  a napiš:

- a) délka úsečky AE
- b) obvod čtverce ABCD
- c) obsah trojúhelníku EBF



**11. Vyřeš slovní úlohu pomocí výrazů s proměnnou:**

Hobbymarket STAVEX připravil pro své zákazníky slevovou akci Kolo štěstí. Zákazník u pokladny zatočí kolem a může získat slevu ve výši 3 % nebo 7 %.

a) Kolik zaplatí Tomáš za zboží, které bez slevy stojí 238 Kč, když si vytočil slevu 5 %?

b) Kolik zaplatí paní Veselá za zboží, které bez slevy stojí  $y$  Kč, když si vytočila slevu 3 %?

**Jednočlen**

Výrazům, které obsahují jeden člen, říkáme **jednočleny**.

Jednočlen může být:

- číslo  $3$
- proměnná  $y$
- součin čísla a proměnných  $5a^2b$

Koeficient 1 se v jednočlenu nemusí psát.  $\rightarrow 1 \cdot a^9$

$\frac{6}{7}m$

Číslo, které se nachází v jednočlenu, se nazývá **koeficient**.

$-0,9 \cdot g^6 \cdot h$

**12. Urči, zda je výraz jednočlen či nikoli. V jednočlenech zakroužkuj koeficienty.**

- a)  $a3b^2a$
- b)  $a + b$
- c)  $\frac{2}{3}xy$
- d)  $5^2 - xy$
- e)  $0,4ab$
- f)  $2 \cdot x \cdot 4 \cdot y$
- g)  $abcd$
- h)  $-7 + de$

**Názvy mnohočlenů**

Odvozujeme od počtu členů v mnohočlenu:

- $8x$  - jednočlen
- $8x - 2$  - dvojčlen
- $8x - 2 + 3y$  - trojčlen
- $8x - 2 + 3y + 9z$  - čtyřčlen

**14. Zapiš mnohočlen co nejstručněji. Poté napiš, kolik členů má zadaný mnohočlen a pojmenuj ho:**

- $0,3x \cdot x \cdot y - 7$
- $-ab + a^2 - a \cdot b \cdot c$
- $-7x - 3y + 4x \cdot x - y \cdot y \cdot x^2$
- $0,2x + 7$
- $\frac{2}{5}x \cdot x \cdot 2 - 3y$

**Mnohočlen**

**Mnohočleny** jsou výrazy složené ze **součtu několika jednočlenů**.

$8x + 9y^2 + (-10)z^3 + 11$

Mnohočleny můžeme **zjednodušovat**, zapsat co nejstručněji, pomocí:

- odstranění závorek u záporných koeficientů
- odstranění znaménka násobení
- zápisu součinů stejných činitelů jako mocniny

$(-7) \cdot x^2 + (-2) \cdot x \cdot x \cdot y + (-9) \cdot y = -7x^2 - 2x^2y - 9y$

**13. Pavlína zjednodušovala mnohočleny. Oprav její chyby ve zkrácených zápisech.**

$5x \cdot x - 7x \cdot y \cdot x = 5x^2 - 7xy$

$a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot c + 2b \cdot a^2 \cdot c \cdot 0,5 + a \cdot d = ab^2c + a^2b^2c^2 + a + d$

$-2 \cdot (-3) \cdot s \cdot s \cdot t \cdot u \cdot v \cdot v - 4s \cdot t \cdot t - 5s \cdot u^2 \cdot t = -5tu - 4st^2 + 5sut$

**15. Urči, zda platí rovnosti a vylušti jméno "otce algebry".**

$7a^2 - 6a + 2 = 6a - 7a^2 + 2$	✓	✗ François
$12a^3 + a - 7 = 12x^3 + x - 7$	O	V (1540-1603)
$-7a^2 + a - 9 = -9 + a - 7a^2$	C	I
$2xy - 3xz + 4yz = 4zy - 3zx + 2yx$	È	Z
$abc - ab + c = -ba + cba + b$	T	P
	T	E



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

### Sčítání a odčítání jednočlenů



Jednočleny sčítáme (odčítáme) tak, že sčítáme (odčítáme) jejich koeficienty.

$$4x + 5x = 9x \quad 15y - 17y = -2y$$

Sčítat (odčítat) můžeme pouze jednočleny, které mají **stejné proměnné ve stejné mocnině**.

$$2x + 4y - 9x = -7x + 4y$$

$$7x^2 + 2xy - 6x^2 + 2x - xy + 5x = x^2 + xy + 7x$$



### 17. Zjednoduš mnohočleny:

a)  $2xy + xy + 4xy =$

b)  $-8z + 2z + (-3z) =$

c)  $2,3p - 1,4p =$

d)  $4,9bc - 1,3bc - 0,7bc =$

e)  $\frac{2}{3}z + \frac{3}{5}z + \frac{7}{15}z =$

### 16. Vybarvi stejnou barvou ty členy, které spolu můžeme sečíst.

a)  $5a + 3b - 2c + 5 - 3a - b + 2c - 4$

b)  $15a - 9 + 8 - 3a + a$

c)  $15q - 4q + 6p + 1 - p$

d)  $2u^2 - 5u + 4uv + u^2 - v^2 - uv$

e)  $-6 + a - b - ab + 2 + ab - a + b - ab$

### Znaménka před závorkou

Pokud je **před závorkou +**, znaménka v závorce se **nemění**.

$$+(-uv + 1) = -uv + 1$$

Pokud je **před závorkou -**, znaménka v závorce se **mění na opačná**.

$$-(-uv + 1) = +uv - 1$$

### Opačný mnohočlen



**Opačný mnohočlen** vznikne změněním znamének u všech členů na **opačná**.

mnohočlen:

$$-2a^3 + 9a^2 + a - 1$$

opačný mnohočlen:

$$+2a^3 - 9a^2 - a + 1$$

### 18. Vytvoř opačné mnohočleny:

a)  $-\frac{2}{11}a + \frac{8}{9}b \Rightarrow$

b)  $3,9 - 8x \Rightarrow$

c)  $-12u + 3v \Rightarrow$

d)  $0,7z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{7}{11} \Rightarrow$

### Sčítání a odčítání mnohočlenů



Přičíst (odečíst) mnohočlen znamená přičíst (odečíst) každý jeho člen a to tak, že:

1. Odstraníme závorky.
2. Najdeme a přiřadíme k sobě členy, které obsahují stejnou proměnnou ve stejné moc.
3. K sobě přiřazené jednočleny sečteme.

### 19. Odstraň závorku:



a)  $-(-rst) =$

b)  $-(-7kl - l^2) =$

c)  $-(8y^2 - 9z^2 - 9) =$

d)  $-(2a + 3b) =$

e)  $-(-12a + 5b) - (6b + 3a - 7) =$

### 20. Vypočítej:



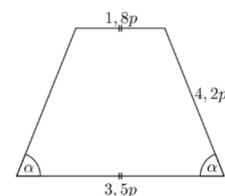
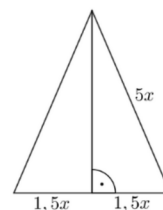
a)  $(12a - 5b) - (6b + 3a - 7) =$

b)  $-(-12a + 5b) - (6b + 3a - 7) =$

c)  $(0,7m^2 - 4,5n^2 - 1,6m + 2,4n + 3,5) - (-2,3m^2 - 3,7n^2 + 0,1m + 1,8n - 0,4) =$

d)  $(5 - 2b) + (3b - 2a) - (3a + 5b) - 3 - 2a =$

### 21. Vypočítej obvody útvarů na obrázku



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

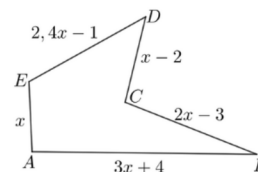


22. Jsou dány výrazy  $U$ ,  $V$  a  $W$ . Sestav a zjednoduš následující výrazy:

$$U = 4x + 1; V = 3 - x; W = -4x - 5$$

- $U + V + W$
- $W - V$
- $V - W$
- $V + W - U$

23. Je dán pětiúhelník ABCDE.



a) Vypočítej obvod pětiúhelníku ABCDE.

b) Vypočítej obvod pětiúhelníku ABCDE pro  $x = 3,4$  cm.

24. Vypočítej:

a)  $(5 - 2b) + (3b - 2a) - (3a + 5b - 6) - (3 + 2a) =$

b)  $(3 - 2b) - (-4a - 3b) - (2 - 3a) + (5a - 1) =$

c)  $2a - 3 - 5a - [(2a - 1) + 5 - 3a] =$

d)  $1 + [-(a + 2b) + 3] - \{3a - 5b - [7a - (2b + 2)]\} =$

25. Správný výsledek příkladu je 1. Zjisti, kde udělal Pavel při svém výpočtu chybu, a oprav ji.

$$12 - [-3xy + 7 - (-2x + 4)] - [3 - (x - 5) + 2x] =$$

$$\cancel{12} - [-3x + 7 + 2x + 4] - [3 - x + 5 + 2x] =$$

$$= 12 - 3x - 7 - 2x - 4 - 3 + x + 5 - 2x = \underline{3}$$

26. Vymysli příklad na sčítání a odčítání mnohočlenu. Uveď správný výsledek a dva špatné výsledky s možnou chybou.

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

27. Marek má na Facebooku  $x$  přátel. Ivana jich má dvakrát tolik. Petra má o 25 přátel víc než Marek a Simona o 45 méně než Ivana. Předpokládej, že nikdo z nich nemá společného přítele.

a) Kolik přátel mají všichni dohromady? Vyjádři mnohočlenem v nejjednodušším tvaru.

b) Kolik přátel mají všichni dohromady, jestliže má Marek 128 přátel?

28. Jsou dána dva mnohočleny. Od součtu těchto mnohočlenů odečti jejich rozdíl.

$$(0,5 - 3,1x + 2,7y) \text{ a } (2,5x - 1,8y - 3,3)$$

29. Rozhodni o rovnosti mnohočlenů.

$$(4m - 4) - (3m - 3) \text{ } \bigcirc \text{ } 5m - \left[ \frac{1}{2} + (4m + 0,5) \right]$$

### Počítání s mocninami

Mocniny se stejným základem násobíme tak, že jejich základ umocníme na součet mocnitelů:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (-8)^4 \cdot (-8)^8 = (-8)^{4+8} = (-8)^{12}$$

Mocniny se stejným základem dělíme tak, že jejich základ umocníme na rozdíl mocnitelů:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0; n, m \in \mathbb{N}$$

$$(-3)^6 : (-3)^3 = (-3)^{6-3} = (-3)^3$$

### Násobení jednočlenů

Při násobení jednočlenů můžeme koeficienty i proměnné sdružovat a zaměňovat jejich pořadí.

Pak:

1. vynásobíme koeficienty

2. vynásobíme mocniny stejným základem

$$-3xy \cdot 2y^2 = -3 \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot y^2 = -6xy^3$$

$$0,5m \cdot 0,5mn^2 \cdot 1,5n^3 = 0,375m^2n^5$$

### 30. Vynásob jednočleny

a)  $5x \cdot x =$

b)  $-7d^2 \cdot 3c^2d =$

c)  $-2mn \cdot (-3mn) =$

d)  $\frac{1}{2}uv \cdot \left(-\frac{2}{3}tu^4v\right) =$

e)  $ij \cdot 2ij^2 =$

31. Součiny v zelené tabulce jsou označené písmeny. Vypočítej tyto součiny, přiřaď je k jednočlenům v modré tabulce a vyluští tajemku.

	$2x^2$	$3xy$	$7y$	$-5y^2$
6	Á	Y	O	S
$-x^2$	Í	O	V	Á
$x$	B	K	N	O
$xy^2$	Z	N	E	R

	$42y$	$2x^3y^2$	$3xy^2$	$12x^2$	$-30y^2$	$-5xy^2$	$2x^3$	$2xy^2$	$7xy$	$-2x^5$
R										
	$5x^3y^2$	$-7x^2y$	$-3x^4y$	$-5xy^4$	$3x^4y$	$18xy$				
Z										

### Násobení mnohočleny jednočlenem

Označujeme jako \_\_\_\_\_

Postup:

- vynásobíme jednočlenem každý člen mnohočleny
- získané jednočleny sečteme

$$2x \cdot (3 - y) = 2x \cdot 3 + 2x \cdot (-y) = 6x - 2xy$$

$$(x + y) \cdot 5x = x \cdot 5x + y \cdot 5x = 5x^2 + 6xy$$

$$-2 \cdot (3t + 9) = -6t - 18$$

### 32. Roznásob

a)  $3 \cdot (2z + 5) =$

b)  $(-2u^2 - 1) \cdot 4 =$

c)  $(5 - 8b) \cdot 3 =$

d)  $(2ab - a^2 + 3b) \cdot (-4) =$

e)  $a \cdot (-3a + 2b) =$

f)  $-3,5ab^2 \cdot (a^3 - 2b^2) =$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

### 33. Zkontroluj, zda Klára počítala správně. Chyby oprav.

- a)  $(4a - 2a + 3) \cdot 3 =$   
 b)  $-x \cdot (1 - x) =$   
 c)  $-2x \cdot (5 + a) =$   
 d)  $(5xy - 2) \cdot 7 =$   
 e)  $(2 - 3x) \cdot 3 =$

### Zakroužkuj správnou odpověď o sčítání a odčítání

- Sčítáme a odčítáme členy výrazu se stejnou/různou proměnnou.
- Sčítáme a odčítáme pouze koeficienty/mocniny členů.

### Násobení mnohočlenu mnohočlenem

Postup:

- Vynásobíme každý člen druhého mnohočlenu každým členem prvního mnohočlenu (tzv. každý s každým),
- získané jednočleny sečteme.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

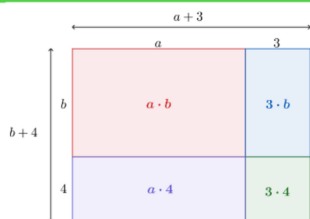
**Kontrola:**

$$\begin{array}{r} \text{dvojčlen} \cdot \text{dvojčlen} = \text{čtyřčlen} \\ 2 \cdot 2 = 4 \end{array}$$

### Co si pod násobení mnohočlenů představit?

$$(a + 3) \cdot (b + 4)$$

Součin mnohočlenů vyjadřuje **obsah** obdélníku s rozměry  $(a + 3)$  a  $(b + 4)$ .



$$(a + 3) \cdot (b + 4) = ab + 4a + 3b + 3 \cdot 4 = ab + 4a + 3b + 12$$

### 34. Správně roznásob závorečky a zjednoduš výraz:

- a)  $(5a - 2) \cdot a - 2(3 - a) =$   
 b)  $2(t - 1) - 3(t + 2) + 10 =$   
 c)  $(ax^2 - bx + a) \cdot x - (ax^3 - bx^2 - ax) =$   
 d)  $2xy(x - 3) + x^2y + 5xy =$

### 35. Vynásob mnohočleny a zjednoduš. Přiřaď správné výsledky a vyluští tajemku:

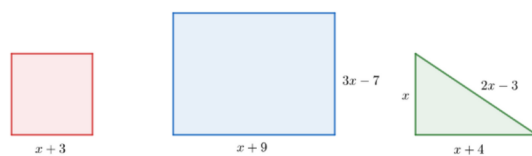
- a)  $(a + 2) \cdot (b + 2) =$   
 b)  $(a - 2) \cdot (a + 5) =$   
 c)  $(a + 4) \cdot (a - b) =$   
 d)  $(1 - a) \cdot (3a + 1) =$   
 e)  $(3a - 2) \cdot (2a + 1) =$   
 f)  $(0,25a - 2b) \cdot (4a + b) =$   
 g)  $(9a - b)(-4a + b) =$   
 h)  $(2a + 4)(a - 3) + 2a(a - 1) =$

$6a^2 - a - 2$	U
$a^2 + 3a - 10$	Ž
$-36a^2 + 13ab - b^2$	Í
$ab + 2a + 2b + 4$	U
$-3a^2 + 3a$	O
$a^2 - ab + 3a - 4b$	T
$4a^2 - 2a - 13$	Š
$a^2 - 2b^2 - 7,75ab$	M

### 36. Dopln chybějící znaménko, koeficient nebo proměnnou.

- a)  $(2x - 4) \cdot (x + 2) + (5x + 1) \cdot (-7 - x) =$   
 $= 2 \bigcirc + 4x - \bigcirc x \bigcirc - 35 \bigcirc - 5 \bigcirc - 7 - x$   
 $= \bigcirc x^2 - 36 \bigcirc - \bigcirc$
- b)  $x \cdot (\bigcirc x - 4) + (-7 + 2x) \cdot (3 + x) =$   
 $= 3x^2 \bigcirc 4x - 21 \bigcirc 7x + 6x + \bigcirc$   
 $= 5x^2 - \bigcirc x - \bigcirc$
- c)  $7 - 2x \cdot (5 - 2x) + 4 \cdot (x^2 - 3x) =$   
 $= 7 - \bigcirc x \bigcirc 4x^2 + 4x^2 \bigcirc 12x$   
 $= \bigcirc x^2 - \bigcirc x \bigcirc 7$

### 37. Podle obrázků vyjádři zadané údaje jako mnohočleny:



- a) součet obsahů čtverce a obdélníku  
 b) součin obvodů trojúhelníku a obdélníku

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

### 38. Slovní zápis запиš pomocí výrazů a zjednoduš:

a) rozdíl dvojnásobku dvojkčlenu  $3x + 5$  a čtyřnásobku dvojkčlenu  $x - 3$

b) součin trojkčlenu  $3m^2 - 5m + 1$  a součtu jednočlenů  $2m$  a  $7m$

c) součet součinu dvojkčlenů  $2s - t$  a  $s - 2t$  a součinu dvojkčlenů  $st + 3$  a  $s - 1$

### 39. Vypočítej příklady

a)  $3k \cdot (3k + 1) - [(2k - 3) + k \cdot (4k + 3)] =$

b)  $2xy \cdot (x - y) - [2x \cdot (xy - 3y) - 2y \cdot (3xy - 3x)] =$

c)  $a^2 \cdot (b + b^2) - a \cdot (3 \cdot (a + 2b) + a \cdot (2b^2 - b)) + 4a^2b^2 =$

HARD  
MODE



### Rozklad mnohočlenu na součin

Mnohočlen lze rozložit na součin pomocí dvou různých metod:

1. vytýkáním
2. pomocí vzorců

### 40. Najdi společného činitele mnohočlenů:

a)  $2x - 16xy$

b)  $x - 3xy$

c)  $-12xy + 36y$

d)  $9x^2y^2 - 15xy + 18xy^2$

e)  $4a^2b^2c^2 - 8a^2b^2c^2 + 12a^2b^2c$

### 41. Zakroužkuj správný rozklad mnohočlenu na součin pomocí vytýkání.

a)  $2x - 16xy =$   
 $2(x - 8xy) \quad x(2 - 16y) \quad 2x(1 - 8y)$

b)  $4x^2 + 6x =$   
 $2(2x^2 + 3x) \quad 2x(2x + 3) \quad x(4x + 6)$

c)  $8ab - 20b =$   
 $4b(2a - 5) \quad 2b(4a - 10) \quad b(8a - 20)$

d)  $8x^2y + 4x =$   
 $2x(4xy + 2) \quad 4x(2xy + 1) \quad x(8xy + 4)$

### Vytýkání

Při násobení jednočlenu mnohočlenem jsme využívali distributivního zákona k roznásobení:

$$a \cdot (2 + b) = a \cdot 2 + a \cdot b = 2a + ab$$

Při vytýkání postupujeme opačným směrem.

$$6a^2b^2 + 3a^2b - 9ab^2$$

1. Najdeme společné činitele všech členů.

a. **U koeficientů hledáme největší společný dělitel, NSD(3,6,9) = 3**

b. **u proměnných největší společnou mocninu.**

$$a^2, a^2, a \rightarrow a$$

$$b^2, b, b^2 \rightarrow b$$

2. Vytkneme všechny společné činitele před závorku.

$$6a^2b^2 = 3ab \cdot 2ab \quad 3a^2b = 3ab \cdot a \quad -9ab = 3ab \cdot (-3)$$

$$6a^2b^2 + 3a^2b - 9ab = 3ab(2ab + a - 3)$$

### 42. Rozlož mnohočlen na součin pomocí vytýkání:

a)  $x^2 + 2x =$

b)  $2x^2 - x =$

c)  $6xy - 3xy^2 =$

d)  $4xy + 2x + 10 =$

e)  $9x^3 + 3x^2y =$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

### 43. Rozlož na součin. Před závorku vytkni všechny možné činitele.

a)  $5xy - 20yz + 15xz =$

b)  $12x - 6y + 18xy =$

c)  $3r^3 + 5r^2 - 8r =$

d)  $4a^3 + 12a^2 - 8a =$

e)  $-4e + 6e^2 + 9e^3f =$

f)  $8x^2y - 4xy + 12xy^2 =$

### Vytýkání závorek

Při vytýkání se nemusíme omezovat pouze na jednočleny, lze vytknout celou závorku.

**POZOR!** Závorky musí být identické.

$$4x(x+y) + 2y(x+y) = (x+y)(4x+2y)$$

### 44. Vypočítej příklady

a)  $3a \cdot (b + dc) - 2c(b + dc) =$

b)  $3 \cdot (x - 2y) - x(x - 2y) =$

c)  $-2u \cdot (3b + 5w) + 3(5w + 3v) =$

d)  $a \cdot (x + y) - b(x + y) =$

e)  $9r \cdot (2s - 7) - 8(7 - 2s) =$

$(7 - 2s) = -1 \cdot (2s - 7)$

f)  $d \cdot (e^2 + 1) + c(-1 - e^2) =$

### Postupné vytýkání

Postupné vytýkání používám při úpravách čtyřčlenu.

$$b^2 + ab - bc - ac :$$

1. Vhodně spojím členy mnohočlenu do skupin, ze kterých vytknu společné činitele.

$$b^2 - bc + ab - ac = b(b - c) + a(b - c)$$

2. Ve vzniklých mnohočlenech opět najdu společné činitele a vytknu je před závorku.

$$b(b - c) + a(b - c) = (b - c)(b + a)$$

### 45. Rozlož čtyřčlen na součin

a)  $2a + 4b + a^2 + 2ab =$

b)  $10xy + 4x + 15y + 6 =$

c)  $op - 2p + 3o - 6 =$

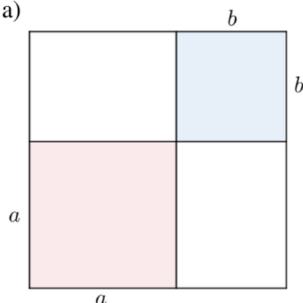
### 46. Zapiš jako součin a roznásob:

a)  $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) =$

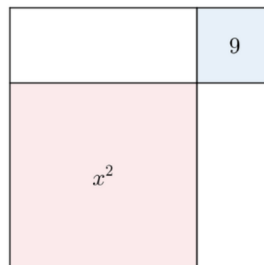
b)  $(a - b)^2 =$

### 47. Vypočítej obsah celého čtverce:

a)



b)



FUN FACT



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

Obrázek 24 Výrazy 9

Zdroj: vlastní zpracování

### Vzorce pro druhou mocninu součtu a rozdílu



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

přičemž  $a$  i  $b$  mohou být čísla, proměnné nebo výrazy.

Využití vzorců pro umocnění dvojkčlenu:

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9 = 4x^2 + 12x + 9 \quad (3 - 5x)^2 = 9 - 2 \cdot 3 \cdot 5x + 25x^2 = 9 + 30x + 25x^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

#### 48. Pomocí vzorců najdi druhou mocninu dvojkčlenu:

- a)  $(4z + 1)^2 =$
- b)  $(d + 4)^2 =$
- c)  $(3e - 1)^2 =$
- d)  $(k - 1)^2 =$
- e)  $(2x + y)^2 =$
- f)  $(5e - 2f)^2 =$
- g)  $(0,4p - 0,5r)^2 =$

#### 49. Dopln chybějící údaje:

- a)  $(\bigcirc + 4)^2 = \bigcirc + 16x + \bigcirc$
- b)  $(n - \bigcirc)^2 = \bigcirc - 6nm + \bigcirc$
- c)  $(\bigcirc - \bigcirc)^2 = \bigcirc + 16b + 16b^2$
- d)  $(\bigcirc + \bigcirc)^2 = 9u^2 + \bigcirc + 4v^2$

### Úprava na součin pomocí vzorců



Některé trojkčleny lze rozložit na součin pomocí vzorců.

1. Odmocníme první člen trojkčlenu.
2. Odmocníme třetí člen trojkčlenu.
3. Znaménko v závorce nám určuje znaménko před druhý členem.
4. Pro kontrolu, zda lze vzorec použít, nám slouží druhý člen.

$$49x^2 + 70x + 25 = (7x + 5)^2 \quad 36 - 24x + 4x^2 = (6 - 2x)^2$$

$$\sqrt{49x^2} = 7x$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

$$70x = 2 \cdot 7x \cdot 5$$

$$24x = 2 \cdot 6 \cdot 2x$$

#### 50. Rozhodni o pravdivosti tvrzení:

- a) Součinem dvou jednočlenu je vždy dvojkčlen. ✓ ✗
- b) Při násobení dvou jednočlenů jejich koeficienty sčítáme. ✓ ✗
- c) Když násobíme mnohočlen jednočlenem, pak vynásobíme jednočlenem postupně všechny členy mnohočlenu. ✓ ✗

#### 51. Uprav na součin, označ příklady, které nelze upravit na součin pomocí vzorců.

- a)  $a^2 + 2a + 1 =$
- b)  $36 + 12 + x^2 =$
- c)  $25x^2 - 40x^2y^2 + 16y^2 =$
- d)  $9x^2 - 24x + 16 =$
- e)  $25x^2 - 60xy + 36y^2 =$
- f)  $1,21e^2 + 1,1e + 0,25 =$

#### 52. Roznásob a zjednoduš:

- a)  $(2 + b) \cdot (2 - b) =$
- b)  $(1 - ab) \cdot (1 + ab) =$
- c)  $(x + y) \cdot (x - y) =$
- d)  $(5u + 4) \cdot (5u - 4) =$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

### Vzorec rozdíl čtverců

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

přičemž  $a$  i  $b$  mohou být čísla, proměnné nebo výrazy.

**Využití vzorce pro úpravu na součin:**

1. Odmocníme oba dva členy.
2. Zapišeme je do dvou závorek s rozdílnými znaménky.

$$25 - x^2 = (5 - x)(5 + x)$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

53. Rozhodni, zda lze dvojčleny upravit na součin pomocí vzorce:

a)  $u^2 - v^2 =$

b)  $u^2 + v^2 =$

c)  $u - v =$

d)  $u^4 - v^4 =$

54. Poskládej domino a zjisti, jak se řekne mnohočlen anglicky:

55. Uprav na součin:

- $4x^2 + 4xy =$
- $10u^3v^2 - 2uv =$
- $-3z + 9z^2 + 6yz^3 =$
- $x^2 - 25 =$
- $16b^2 + 8b + 1 =$
- $9 - 12x + 4x^2 =$
- $a^3 - a =$
- $16s^2 - 8s + 1 - 4s^2 =$

56. Mnohočleny zjednoduš a pak je s použitím vzorců rozlož na součin:

a)  $65 + 2c^3 - 3a^2 + 35 - 2c^2 + a^2 - 2a^2 =$

b)  $4 \cdot (4b^2 - 2a^2) - a^2 =$

Výrazy	Ještě potřebuji procvičit	Zvládám bez problémů
1. Zapiši číselný výraz podle slovního zápisu.		
2. Zapiši algebraický výraz podle slovního zápisu.		
3. Vypočítám hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných		
4. Sčítám a odčítám mnohočleny.		
5. Násobím mnohočlen jednočlenem.		
6. Násobím mnohočlen mnohočlenem		
7. Upravuji výrazy na součin pomocí vytýkání.		
8. Využívám vzorce $(a + b)^2$ ; $(a - b)^2$ ; $a^2 - b^2$ pro úpravu výrazu na součin.		
9. Vyberu odpovídající výraz, který popisuje jednoduchou reálnou situaci.		

57. Dokážeš vyřešit příklad podobný těm na přijímacích zkouškách na střední školu?

Zjednoduš (výsledný výraz nesmí obsahovat závorky):

$$16 \cdot \left(\frac{1}{4} - c^2\right) - (-c - 4) \cdot (c - 4) =$$

### 3.5. Lineární rovnice

METODICKÝ LIST č.5	
Téma pracovního listu	Ročník
<b>Lineární rovnice</b>	<b>osmý</b>
Zařazení do RVP ZV	
<i>Vzdělávací oblast:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Vzdělávací obor:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Tematický celek:</i>	Číslo a proměnná
Výchovně vzdělávací cíle dle RVP ZV	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• popíše konkrétní situace s využitím proměnných a racionálních čísel.</li> <li>• vyřeší rovnici jednoduchých lineárních rovnic pomocí ekvivalentních úprav.</li> <li>• ověří správnost řešení slovní úlohy</li> </ul>	
Pojmová analýza	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Nové pojmy:</b> rovnost, nerovnost, lineární rovnice, proměnná, kořen rovnice, ekvivalentní úpravy rovnice</li> <li>• <b>Opěrné pojmy:</b> číselný výraz, algebraický výraz, hodnota výrazu, zkouška, neznámá</li> </ul>	
Organizační podmínky	
<p>Před zahájením výuky Lineární rovnice je nutné, aby student ovládal práci s výrazy a dokázal vypočítat hodnotu číselného výrazu i výrazů s proměnnou. Pro zajištění optimálního výkonu výuky jsou pracovní listy koncipovány tak, aby každá strana představovala jednu vyučovací hodinu. Pro interaktivní prvky, které jsou zahrnuty v pracovních listech, je nezbytné zařízení s webovou kamerou nebo fotoaparátem připojené k internetu. Vhodným zařízením jsou tablety či telefony. Pracovní listy jsou navrženy s ohledem na variabilitu a umožňují vyučujícímu je přizpůsobit konkrétním potřebám výuky.</p> <p>V rámci pracovních listů jsou studenti podněcováni k badatelskému objevování pravidel a diskusi nad cvičeními. Pokud množství cvičení na pracovních listech nebude dostatečné pro kompletní procvičení učiva, je vhodné doplňující cvičení provádět mimo pracovní listy a</p>	



posílit tak práci s výrazy na co nejvyšší úroveň. Na každé straně pracovního listu je k dispozici krátké sebehodnocení, což pomáhá studentům sledovat svůj pokrok. Výstupy celého tématu jsou shrnuty v tabulce na jeho konci, což umožňuje studentům reflektovat svůj postup a poskytuje rychlou zpětnou vazbu pro vyučujícího.

V pracovních listech je také zahrnut piktogram "HARD MODE", který upozorňuje na složitější nebo komplexnější příklady, které mohou být pro některé studenty příliš náročné. Toto opatření má za cíl zlepšit efektivitu výuky a umožnit studentům postupovat vlastním tempem a podle svých schopností.

#### Vzdělávací cíle pracovního listu

Žák:

- Vysvětluje pojmy rovnost, rovnice, lineární rovnice.
- Řeší lineární rovnice pomocí ekvivalentních úprav.
- Řešení rovnice ověřuje zkouškou.
- Zapisuje postup řešení rovnice systematicky a podle matematických pravidel.
- Vysvětlí pojem kořen rovnice.
- Určuje počet řešení lineární rovnice.
- Přiřazuje rovnice k představeným situacím z reálného světa.
- Řešení slovních úloh pomocí lineárních rovnic.
- Vyjadřuje libovolnou neznámou ze vzorce.

#### Seznam QR kódů

QR kód č. 1 – Online procvičování na webových stránkách Umimematiku.to. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/presouvani-obrazkove-rovnice-1-uroven/666>

QR kód č. 2 – Online procvičování na webových stránkách Khan Academy. Dostupné z: [https://cs.khanacademy.org/math/8-trida/xa6c32d514c48657d:linearni-rovnice/xa6c32d514c48657d:jednokrokovy-rovnice/e/one\\_step\\_equations](https://cs.khanacademy.org/math/8-trida/xa6c32d514c48657d:linearni-rovnice/xa6c32d514c48657d:jednokrokovy-rovnice/e/one_step_equations)

QR kód č. 3 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/tte6erp9>

QR kód č. 4 – Online procvičování na webových stránkách Umimematiku.to. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/rozhodovacka-zapis-pomoci-rovnice-2/15500>

## Zdroje

### Učebnice a pracovní sešity použité k tvorbě cvičení:

BĚLOUN, František, Ivan BUŠEK a Vlastimil MACHÁČEK. *Sbírka úloh z matematiky: pro základní školu*. 8. vydání. Praha: "B" Print, 2004. ISBN 80-7196-104-3.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika Aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-684-0.

COUFALOVÁ, Jana, Šárka PĚCHOUČKOVÁ, Jiří HEJL a kol. *Matematika: pro 8. ročník základní školy*. 3. vydání. Praha: Fortuna, 2020. ISBN 978-80-7373-142-7.

KRUPKA, Peter. *Sbírka úloh z matematiky: pro 2. stupeň základních škol a nižší ročníky víceletých gymnázií, 1. díl*. 3. vydání. Havlíčkův brod: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-188-5.

LAUBEOVÁ, Alena, Blanka MATASOVÁ a Tomáš MIERVA a kol. *Hravá matematika 8: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: Taktik International, 2021. ISBN 978-80-7563-265-4.

MALÍK, Michal, Jana PRESOVÁ a Veronika ŠOLCOVÁ a kol. *Hravá matematika 8: Pracovní sešit pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 3. vydání. Praha: Taktik International, 2022. ISBN 978-80-7563-442-9.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Josef TREJBAL. *Matematika: algebra*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2015. ISBN 978-80-7235-419-1.

TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika 8 s nadhledem*. Praha: Fraus, 2020. ISBN 978-80-7489-517-3.

### Obrázky:

R1 – Rhindův papyrus. In: *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2023-04-20]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/print/1403-egypt>

### Externí odkazy:

Obrázková rovnice. *Umimematiku.to* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/presouvani-obrazkove-rovnice-1-uroven/666>

Jednokrokové rovnice se sčítáním a odčítáním. *Khan Academy* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: [https://cs.khanacademy.org/math/8-trida/xa6c32d514c48657d:linearni-rovnice/xa6c32d514c48657d:jednokrokovy-rovnice/e/one\\_step\\_equations](https://cs.khanacademy.org/math/8-trida/xa6c32d514c48657d:linearni-rovnice/xa6c32d514c48657d:jednokrokovy-rovnice/e/one_step_equations)

Zápis zadání pomocí rovnice. *Umimematiku.to* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/rozhodovacka-zapis-pomoci-rovnice-2/15500>

# Lineární rovnice

## 1. Porovnej a doplň jeden ze znaků <, =, >.

a)  $-12 + 48 : 6 \bigcirc 9 - 8 \cdot (-2)$

b)  $\frac{3}{4} + 7 \bigcirc \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 8$

c)  $\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3^4}{5^2}\right) \bigcirc \left(-\frac{4}{5}\right)^3 + 1$

d)  $\sqrt{0,64} + 0,02 \bigcirc 0,4 \cdot 5$

e)  $7^2 - 6 \cdot 2^3 \bigcirc -\sqrt{144} + \sqrt{121}$

f)  $-3,6 + 1,2 \cdot 5 \bigcirc 2,1 + 1,8 : 0,6$

## Rovnice

Rovnice je zápis ve tvaru  $L = P$ , kde L je levá strana rovnice a P je pravá strana rovnice.

$$\begin{array}{ccc} \text{levá strana} & \leftarrow 3x + 2 = 5 \rightarrow & \text{pravá strana} \\ \text{rovnice (L)} & & \text{rovnice (P)} \\ L(x) = 3x + 2 & \downarrow \text{rovníkto} & P(x) = 5 \end{array}$$

Na jedné nebo na obou stranách rovnice je výraz s proměnnou. Proměnné v rovnici říkáme **neznámá**.

## Ověření rovnosti (zkouška)

Pokud dosadíme za neznámou v rovnici, můžeme ověřit, jestli pro takové číslo rovnost platí či nikoli.

$$3x + 2 = 5$$

$$x = 1 \quad L(1): 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

$$P(1): 5$$

$$L(1) = P(1) \Rightarrow \text{Pro číslo 1 rovnost platí.}$$

$$x = 4 \quad L(4): 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

$$P(4): 5$$

$$L(4) \neq P(4) \Rightarrow \text{Pro číslo 4 rovnost neplatí.}$$

## Vyřeš zábavné rovnice s obrázky

$$\text{🍏} + \text{🍏} + \text{🍏} = 3$$

$$\text{🍏} + \text{🍌} + \text{🍌} = 9$$

$$\text{🍌} - \text{🍏} = 2$$

$$\text{🍏} + \text{🍌} + \text{🍏} = ?$$

Dokážeš rovnici napsat pomocí neznámých?



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

## Rovnost

Je to zápis s čísly nebo číselnými výrazy, které se sobě **rovnají**.

Rovnost platí, když **hodnota** čísel nebo číselných výrazů se na obou stranách **rovná**.

$$\begin{aligned} -6 + 3 \cdot (-8) &= -3 \cdot (2^3 + 14 : 7) \\ -30 &= -30 \end{aligned}$$

## 2. Přičiď k sobě výrazy, které se rovnají

a)  $(x^2 - 2) \cdot 3$

$3x + 2$

b)  $\frac{2}{3}x - 2x + \frac{2}{3}$

$3x - 6$

c)  $-2x + 10 + 5x - 4$

$3x^2 - 6$

d)  $6 + 3,2x - 4 + (-0,2x)$

$-\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

$3x + 6$

## 3. Dosad' do rovnice za $x = -2$ a rozhodni, zda rovnost platí či nikoli.

a)  $x + 7 = -5$

b)  $x^2 - 4 = 0$

c)  $x^2 + 2x + 1 = -2$

d)  $-4x + 6 = 3x + 19$

### Lineární rovnice



Lineární rovnice, někdy nazývána jako rovnice 1. stupně, která je ve tvaru  $ax = b$ , kde  $a, b$  jsou reálná čísla a zároveň  $a$  není 0.

$$x + 7 = -5 \quad 9x = -18 \quad -4x + 6 = 3x + 19$$

Poznávacím znamením je neznámá  $x$ , která ve tvaru 1. mocniny.

### Řešení lineární rovnice



**Řešení rovnice** spočívá v určení všech čísel, pro která platí, že **hodnota levé strany** rovnice se rovná hodnotě pravé strany rovnice.

Každému takovému řešení rovnice říkáme **kořen rovnice**. Správnost řešení ověřujeme zkouškou.

$$x + 9 = 14$$

**kořen rovnice** (řešení):  $x = 5$

**zkouška:**

$$L(5) = 5 + 9 = 14$$

$$P(5) = 14$$

$$L(5) = P(5)$$

6. Zapiš a zjednoduš výraz. Vypočítej jeho hodnotu pro hodnoty proměnné  $a = -2$  a  $a = 2$ .

a) Výraz  $2a + 4$  odečti od součinu výrazů  $3a$  a  $a + 1$ .

b) Součet trojnásobku dvojčlenu  $a^2 + 5$  a dvojnásobku trojčlenu  $a^2 + 2a + 4$ .

c) Rozdíl výrazu  $4a + 3$  a součinu výrazů  $3a + 2$  a  $2a$ .

### 4. Rozhodni, zda se jedná o lineární rovnice, a vylušti tajenku



	ANO	NE
$3x + 8 = 17$	P	U
$6 \cdot (-3) = (-9) \cdot 2$	R	A
$-7x + 2 = 6x + 28$	P	E
$2x + 19$	A	Y
$x^2 - 36$	B	R
$x^2 + 2x + 1 = 0$	I	U
$3x + 3,3 = 1,2$	S	G



Obr. R1

Rhindův \_\_\_\_\_, který byl dochován ve formě opisu datovaného pravděpodobně do 16. století př. n. l., patří mezi nejvýznamnější prameny informací o matematice ve starověkém Egyptě. Obsahuje 87 úloh s návody a řešeními, včetně úloh řešitelných pomocí lineárních rovnic.

### 5. Rozhodni o pravdivosti následujících tvrzení o rovnici.



Nepravdivá tvrzení oprav:

$$3(x + 1) = -11 - 4x$$

a) Rovnice má dvě neznámé.



b) Neznámou v rovnici je  $x$ .



c) Výraz  $3(x + 1)$  je levá strana rovnice, výraz  $-11 - 4x$  je pravá strana rovnice.



d) Číslo  $-1$  je kořenem rovnice.



e) Hodnota výrazu na pravé straně rovnice po dosazení kořene rovnice je  $-3$ .



### 7. Zapiš jednoduchou rovnici, jejímž kořenem je číslo:



a)  $x = 5$

b)  $n = 10$

c)  $y = -4$

d)  $u = 0$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

## 8. Doplň do vět správné výrazy z nabídky



řešení   hodnota   řešit   všechna   pravé   kořen  
zkouška   správnost   číslo

\_\_\_\_\_ rovnici znamená určit \_\_\_\_\_  
taková čísla, pro která se \_\_\_\_\_ levé strany rovnice  
rovná hodnotě její \_\_\_\_\_ strany. Každé takové  
\_\_\_\_\_ se nazývá \_\_\_\_\_ neboli  
\_\_\_\_\_ rovnice. \_\_\_\_\_ řešení ověří  
\_\_\_\_\_.

## Zápis postupu řešení



Postup řešení rovnice zapisujeme pod sebe tak, aby byla **rovnítka pod sebou**. Všechny úpravy rovnice zapisujeme za rovnici **za svislou čáru**.

$$\begin{array}{l} 5x - 3 = 12 \quad | + 3 \\ 5x = 15 \quad | : 5 \\ x = 3 \end{array}$$

## Ekvivalentní úpravy rovnice



### 1. Vzájemná výměna levé a pravé strany.

$$\begin{array}{l} 8 = x \\ x = 8 \end{array}$$



### 2. Přičtení nebo odečtení téhož čísla (výrazu) k oběma stranám rovnice.

$$\begin{array}{l} x - 2 = 3 \quad | + 2 \\ x - 2 + 2 = 3 + 2 \\ x = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3x = 2x + 3 \quad | - 2x \\ 3x - 2x = 2x + 3 - 2x \\ x = 3 \end{array}$$

### 3. Násobení nebo dělení obou stran rovnice týmž nenulovým číslem.

$$\begin{array}{l} \frac{x}{7} = 2 \quad | \cdot 7 \\ \frac{x}{7} \cdot 7 = 2 \cdot 7 \\ x = 14 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -3x = 9 \quad | : (-3) \\ -3x : (-3) = 9 : (-3) \\ x = -3 \end{array}$$

## 10. Doplň chybějící část výpočtu. Do modrých rámečků doplň části rovnic, do zelených rámečků napiš, která z úprav byla použita a jak.



$$\begin{array}{l} m + 4 = 9 \quad | \text{ [ ] } \\ m = \text{ [ ] } \end{array} \qquad \begin{array}{l} 0,5k = 50 \quad | \text{ [ ] } \\ k = \text{ [ ] } \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{a}{3} = 5 \quad | \text{ [ ] } \\ a = \text{ [ ] } \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10 = 8 - 2x \quad | \text{ [ ] } \\ 2x = \text{ [ ] } \quad | \text{ [ ] } \\ x = \text{ [ ] } \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3z - 2 = z + 1 \quad | \text{ [ ] } \\ 2z = \text{ [ ] } \quad | \text{ [ ] } \\ z = \text{ [ ] } \end{array}$$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

## Postup řešení rovnice



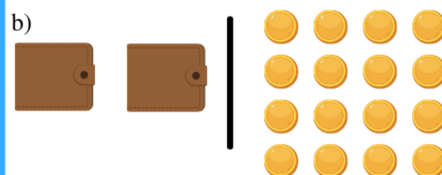
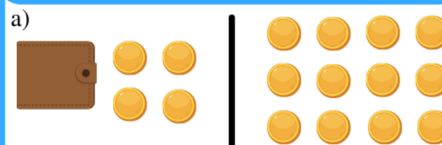
Při hledání kořene rovnice upravujeme rovnici tak, aby **na jedné straně rovnice byly pouze členy s neznámou a na druhé straně členy bez neznámé**.

Při úpravě rovnice využíváme **ekvivalentní úpravy rovnice**.

$$\begin{array}{l} 5x - 3 = 12 \quad | + 3 \\ 5x = 15 \quad | : 5 \\ x = 3 \end{array}$$

**Ekvivalentní úpravy** jsou ty úpravy, při kterých se kořen rovnice nezmění.

## 9. Levá strana obrázku se rovná pravé straně. Zjisti, kolika mincím se rovná jedna peněženka.



Dokážeš situace na obrázcích vyjádřit pomocí rovnic a neznámých?

11. Řeš rovnice, zapisuj všechny použité ekvivalentní úpravy a proved' zkoušku:



a)  $21 = r - 2$

b)  $9 - 3y = 6$

c)  $x - 2 = 5$

d)  $t + 5 = 0$

e)  $r : 5 = 6$

f)  $5u - 3 = 12 + 2u$

12. Přiřad'k sobě rovnice a jejich kořeny:



a)  $x - 9 = -8$

$x = 2$

b)  $5 = 3 + x$

$x = -2$

c)  $-4,5 = -3,5 + x$

$x = -1$

d)  $\frac{5}{3} + x = -\frac{1}{3}$

$x = 1$

Postup řešení rovnice



1. Odstraníme závorky a výrazy na obou stranách rovnice zjednodušíme.

$3 \cdot 3x - 2 \cdot (x + 1) = 6 + x + 2$

$9x - 2x - 2 = 8 + x$

2. Všechny členy s neznámou převedeme na jednu stranu, členy bez neznámé na druhou stranu.

$7x - 2 = 8 + x \quad | +2 - x$

$7x - 2 + 2 - x = 8 + x + 2 - x$

3. Výrazy na obou stranách rovnice zjednodušíme.

$6x = 10 \quad | :6$

4. Vydělíme rovnici koeficientem u neznámé.

$x = \frac{10}{6}$

5. Provedeme zkoušku.

$x = \frac{5}{3}$

13. Zakroužkuj rovnice, které mají stejné kořeny. Proved' zkoušku.



a)  $9x + 1 - 6x = 5x + 10 - 3$

b)  $17 + 5x - 7 = 8x + 2 - 5x - 3$

c)  $4x - 3 + 10 = 4x + 1 - 2x$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

## Možnosti počtu řešení lineárních rovnic



### 1. Rovnice má jedno řešení (má jeden kořen)

Řešení rovnice je ve tvaru  $x = \dots$  **POZOR!**

např.:  $x = 2$ ;  $x = -5$ ;  $x = 0, \dots$  **I rovnice  $x = 0$  má 1 kořen!**

### 2. Rovnice nemá řešení (kořenem rovnice není žádné (reálné) číslo)

Řešení rovnice je ve tvaru  $0x = \dots$

např.:  $0x = 5$ ;  $-2 = 3$ ;  $8 = 0, \dots$

### 3. Rovnice má nekonečně mnoho řešení (kořenem je každé (reálné) číslo)

Řešení rovnice je ve tvaru  $0x = 0 / 0 = 0$

Lineární rovnice a její řešení  
v grafu



## 14. Vyřeš rovnice a urči, kolik mají řešení:



a)  $2x - 40 + 5x = 3 + 7x$

b)  $-6 - 3x = 4 - 3x - 10$

c)  $9 + 6x - 6 = 2x + 3 + 4x$

d)  $-22x + 33 = 21x + 9 - x$

e)  $-3x - 2 = 8 - 2x - 10$

f)  $16 + 6 - 5x = 10 - 7x + 21$

## 15. Sestav jednoduchou rovnici, která



a) má právě jeden kořen

b) nemá řešení

c) má nekonečně mnoho řešení

## 16. Seřaď postup při řešení rovnice:



Výrazy na obou stranách rovnice zjednodušíme.

Provedeme zkoušku.

Vydělíme rovnici koeficientem u neznámé.

1 Odstraníme závorky a zlomky (celou rovnici vynásobíme násobkem jmenovatelů)

Všechny členy s neznámou převedeme na jednu stranu, členy bez neznámé na druhou stranu.

Výrazy na obou stranách rovnice zjednodušíme.

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....



17. Rozhodni o pravdivosti následujících tvrzení. Nepravdivá oprav na pravdivá.

- a) Každá lineární rovnice má právě jedno řešení.  
 ✓ ✗
- b) Pokud má lineární rovnice nekonečně mnoho řešení, pak jsou všechna tato řešení stejná.  
 ✓ ✗
- c) Pokud je koeficient při neznámé v lineární rovnici nulový, pak má rovnice nekonečně mnoho řešení.  
 ✓ ✗
- d) Úpravy v rovnici naznačujeme šipkami nebo do závorek za rovnici.  
 ✓ ✗
- e) Správnost řešení můžeme ověřit jenom tak, že rovnici vyřešíme znovu.  
 ✓ ✗
- f) Řešení lineární rovnice může být buď celočíselné, nebo desetinné, ale nikdy zlomkové.  
 ✓ ✗

Lineární rovnice se zlomkem

Nejdříve odstraníme všechny zlomky tak, že všechny členy rovnice vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů.

$$\frac{3x}{2} - \frac{x+1}{3} = 1 + \frac{x+2}{6} \quad | \cdot 6$$

$$6 \cdot \frac{3x}{2} - 6 \cdot \frac{x+1}{3} = 6 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{x+2}{6}$$

$$3 \cdot 3x - 2 \cdot (x+1) = 6 + (x+2)$$

18. Řeš rovnici a proveď zkoušku:

a)  $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = \frac{5}{6}$       b)  $\frac{2}{5}y - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} + 3$

19. Vyřeš rovnice a přiřaď kořeny rovnice z nabídky. Nezapomeň provést zkoušku.

$x = 2$

$x = -6$

$x = -1,4$

$x = -2$

$x = -7$

$x = -10$

a)  $-3 + 4(x + 1) = 3(x - 2)$

b)  $-5(x + 1) + 13 = 2(-1 - 5x)$

c)  $\frac{5}{2} - 3x = \frac{-3}{2}(x - 5)$

d)  $1 + \frac{x-3}{3} = \frac{2(x+1)}{5}$

e)  $1,3x - 3,7 = 0,9 - 3(1,2x - 1,5)$

f)  $\frac{x}{4} - 0,5 = 3x + 0,2$

HARD MODE

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

## 20. Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15.

Kolik je hromada?



Tato úloha se objevila na Rhindově papyru, který byl zmíněn výše.

### Řešení slovních úloh rovnicemi



*Pomocí rovnic dokážeme matematicky vyjádřit slovní úlohy a úlohy v reálném světě, což nám umožňuje pracovat s matematickým modelem a řešit tak úlohu snadněji.*

#### Postup při řešení slovní úlohy rovnice s jednou neznámou:

1. Přečtěme si úlohu a snažíme se pochopit, co se od nás žádá a co je dáno.
2. Snažíme se najít vztahy mezi veličinami.
3. Z neznámých údajů vybereme vhodný údaj, který označíme jako neznámou.
4. Sestavíme rovnici a vyřešíme ji.
5. Po vypočítání se ujistíme, zda je tento výsledek reálný a zda jsme jím odpověděli na otázku.
6. Napíšeme slovní odpověď.

## 21. Zapiš jako rovnici a urči neznámé číslo:

a) Neznámé číslo zvětšené o osm je rovné dvojnásobku neznámého čísla.

b) Součet trojnásobku neznámého čísla zmenšeného o jednu a čísla pět je roven číslu sedm

c) Čtyřnásobek neznámého čísla zmenšeného o dva je roven dvojnásobku neznámého čísla zvětšenému o dva

## 22. Ke každé situaci přiřaď rovnici, která jí odpovídá:



$$3x + x = 46$$

$$2x + 2(x + 3) = 46$$

$$1,6x + 3x = 46$$

$$x + x + 6 = 46$$

1. Maminka koupila mléko a tři jogurty. Mléko stojí o 60 % více než jogurt. Platila 46 Kč

2. Turista ušel za dva dny 46 km. První den ušel třikrát víc než druhý den.

3. Jedna strana obdélníku je o 3 cm delší než druhá. Obvod obdélníku je 46 cm.



## 23. Rodiče chtějí rozdělit 6 000 Kč na kapesné pro své dva syny. Starší syn dostane o 1 000 Kč více než mladší syn. Kolik dostane každý syn? Doplň chybějící údaje do zápisu:



### Zápis slovní úlohy

peníze k rozdělení .....

starší syn .....

mladší syn ..... x Kč

### Sestavení a řešení rovnice

$$\boxed{\phantom{000}} + \boxed{\phantom{000}} = 6000$$

Slovní odpověď:

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

24. Divadlo odehrálo za měsíc 5 činoher. Oper byla čtvrtina z celkového počtu představení. Muzikálů odehrálo divadlo o tři více než oper a baletů bylo o dva méně než oper. Kolik představení divadlo odehrálo dohromady?

Doplň chybějící údaje do zápisu.

Zápis slovní úlohy

činohry .....   
 opery .....   
 balety .....   
 muzikály .....   
 celkem představení..... x

Sestavení a řešení rovnice

$$\text{---} + \text{---} + \text{---} + \left(\frac{1}{4}x + 3\right) = x$$

Slovní odpověď:

25. Evička kupuje do domácnosti dvě porcelánové misky a tři skleničky dohromady za 750 Kč. Miska stojí o 40 Kč více než sklenička. Kolik stojí jedna miska a kolik jedna sklenička? Doplň chybějící údaje do zápisu.

Zápis slovní úlohy

cena skleničky .....   
 cena misky .....   
 cena celkem .....

Sestavení a řešení rovnice:

Slovní odpověď:

26. Karel je dvakrát tak starý, než byl jeho přítel Tomáš, když bylo Karlovi právě tolik let, kolik je Tomášovi nyní. Kolik je Tomášovi, když Karlovi je 24 let?

27. Pěti nejúspěšnějším řešitelům matematické olympiády se má rozdělit částka 1 200 Kč tak, aby druhý a každý následující dostal vždy o 50 Kč méně než předcházející. Urči jednotlivé částky.

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

Obrázek 34 Lineární rovnice 8

Zdroj: vlastní zpracování

### Vyjádření neznámé ze vzorce



Vyjádření využíváme v případě, že potřebujeme vypočítat hodnotu neznámé veličiny, která se obvykle nachází na pravé straně vzorce.

**Vyjádřit ze vzorce** znamená osamostatnit veličinu na levé straně rovnice.

**Osamostatnit** znamená upravit rovnici tak, aby všechny ostatní veličiny byly na druhé straně rovnice.

$$o = 2 \cdot (a + b)$$

$$\frac{o}{2} = a + b$$

$$b = \frac{o}{2} - a$$

**Osamostatnili** jsme veličinu  $b$ .

**Vyjádřili** jsme ze vzorce obvodu

obdélníku stranu  $b$ .

### 30. Co daným vzorcem určujeme? Ze vzorce vyjádři určenou neznámou.

$$o = 4a$$

$$a =$$

$$s = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$$

$$v =$$

$$S = a \cdot b$$

$$b =$$

$$o = 2(a + b)$$

$$a =$$

### 32. Jakou výšku má trojúhelník s obsahem $7,8 \text{ cm}^2$ a stranou $a = 5,2 \text{ cm}$ ?



### 28. Ze vzorce pro výpočet dráhy rovnoměrného přímočarého pohybu vyjádři:



a) čas  $t$

b) rychlost  $v$

### 29. Rozhodni, ve které z možností je výška ze vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku vyjádřena správně?

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

a)  $v_a = \frac{a \cdot S}{2}$    b)  $v_a = \frac{2 \cdot S}{a}$    c)  $v_a = \frac{2 \cdot a}{S}$    d)  $v_a = 2 \cdot S - a$

### 31. Paní Nováková kupuje nové 54 litrové akvárium ve tvaru hranolu s rozměry podstavy 60 cm a 30 cm. Vypočítej výšku akvária. Tloušťku stěn akvária zanedbáváme.



Rovnice	Ještě potřebuji procvičit	Zvládám bez problémů
1. Řeším lineární rovnice pomocí ekvivalentních úprav.		
2. Správnost výsledku určím pomocí zkoušky.		
3. Určím počet možných řešení lineární rovnice.		
4. Převeru text slovní úlohy do matematického zápisu.		
5. Ověřím správnost řešení slovní úlohy.		
6. Ze vzorce vyjádřím libovolnou veličinu.		

### 33. Součet tří po sobě jdoucích čísel je 69. Která jsou to čísla?

Obrázek 35 Lineární rovnice 9

Zdroj: vlastní zpracování

### 3.6. Základy statistiky

METODICKÝ LIST č.6	
Téma pracovního listu	Ročník
<b>Základy statistiky</b>	<b>osmý</b>
Zařazení do RVP ZV	
<i>Vzdělávací oblast:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Vzdělávací obor:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Tematický celek:</i>	Závislosti, vztahy a práce s daty
Výchovně vzdělávací cíle dle RVP ZV	
<ul style="list-style-type: none"><li>• Vyhledá potřebné údaje v tabulce, diagramu a grafu.</li><li>• Vyhledá a vyjádří vztahy mezi uvedenými údaji v tabulce, diagramu a grafu.</li><li>• Rozlišuje pojmy četnost, relativní četnost a aritmetický průměr.</li><li>• Samostatně vyhledává data v literatuře a na internetu.</li><li>• Převádí údaje z textu do tabulky, diagramu a grafu a naopak.</li></ul>	
Pojmová analýza	
<ul style="list-style-type: none"><li>• <b>Nové pojmy:</b> modus, medián, statistické šetření, rozsah, četnost, relativní četnost</li><li>• <b>Opěrné pojmy:</b> diagram, aritmetický průměr</li></ul>	
Organizační podmínky	
<p>Pracovní listy jsou navrženy tak, aby představovaly jednu vyučovací hodinu na jedné straně. Téma stojí téměř samostatně, žák by měl mít z předchozích ročníků ponětí o výpočtu aritmetického průměru a schopnost číst data z tabulek nebo diagramů.</p> <p>Pracovní listy jsou vytvořeny s myšlenkou variability a učitel může zařazení do výuky upravit podle vlastních potřeb. Nicméně pracovní listy podporují samovolné objevování zákonitostí matematiky a učitel by měl podporovat diskusi nad cvičeními.</p> <p>Na konci každé strany pracovního listu se nachází krátké sebehodnocení a na konci každého tématu se nachází tabulka s výstupy za celé téma, což umožňuje studentovi sebereflektovat svůj postup a pro učitele představuje rychlou zpětnou vazbu.</p>	

## Vzdělávací cíle pracovního listu

Žák:

- S pomocí literatury definuje pojmy statistika, statistický soubor, statistická jednotka, rozsah statistického souboru a statistický znak.
- Rozlišuje slovní a číselné statistické znaky.
- Vyhledává data na internetu.
- Ví, které instituce se zabývají shromažďováním, zpracováním a prezentací statistických dat.
- Určí absolutní četnost a relativní četnost znaku.
- Provádí experiment a své zjištění zaznamenává do tabulky.
- Odvozuje definici pojmu aritmetický průměr.
- Rozlišuje pojmy modus a medián.
- Čte z diagramů různých typů.

## Seznam QR kódů

QR kód č. 1 – Webové stránky Českého statistického úřadu. Dostupné z: <https://www.czso.cz>

QR kód č. 2 – Online procvičování na webových stránkách Umimematiku.to. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/rozhodovacka-absolutni-a-relativni-cetnost-2-uroven/14814>

QR kód č. 3 – Video na YouTube Math Antics – Mean, Median and Mode na kanále mathantics. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=B1HEzNTGeZ4>

## Zdroje

Učebnice a pracovní sešitu použité k tvorbě cvičení:

LAUBEOVÁ, Alena, Blanka MATASOVÁ a Tomáš MIERVA a kol. *Hravá matematika 8: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: Taktik International, 2021. ISBN 978-80-7563-265-4.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Josef TREJBAL. *Matematika: algebra*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2015. ISBN 978-80-7235-419-1.

TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika 8 s nadhledem*. Praha: Fraus, 2020. ISBN 978-80-7489-517-3.

Informace:

Poslanecké kluby. *Poslanecká sněmovna parlamentu České republiky* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.psp.cz/sqw/organy2.sqw?k=1>

Externí odkazy:

Český statistický úřad [online]. Praha [cit. 2023-04-20]. Dostupné z: <https://www.czso.cz>

Absolutní a relativní četnost. *Umimematiku.to* [online]. [cit. 2023-04-01] Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/rozhodovacka-absolutni-a-relativni-cetnost-2-uroven/14814>

Mathantics. Mean, Median and Mode. In: *YouTube*. [online] 4.3.2017. [cit. 2023-04-01] Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=B1HEzNTGeZ4>

# Základy statistiky

## Základní pojmy



**Statistika** je věda o sběru, analýze a interpretaci dat. Statistika nám umožňuje zkoumat různé jevy a události, ať už ve společnosti, přírodě nebo ve vědě. Díky statistice se učíme pracovat s čísly, grafy a tabulkami, což nám pomáhá vyhodnocovat data a dospět k objektivním závěrům.

**Statistický soubor** je množina objektů (např. žáků dané školy), jejichž vlastnosti zkoumáme při statistickém šetření.

**Statistická jednotka** je libovolný prvek (např. žák školy, obyvatel Prahy, ...) statistického souboru.

**Rozsah statistického souboru** je počet všech prvků statistického souboru.

**Statistický znak** je vlastnost statistické jednotky, který zkoumáme. Každé statistické jednotce přiřazujeme pouze jednu hodnotu znaku. Ta může být **číselná** (výška, váha, ...) nebo **slovní** (pohlaví, značka auta, oblíbený film, ...)

## Český statistický úřad

**Český statistický úřad (ČSÚ)** je instituce odpovědná za shromažďování, zpracování a publikování oficiálních statistických údajů v České republice.

Jde o nezávislý orgán, který je zodpovědný za sběr a analýzu kvantitativních dat z různých oblastí společenského života, jako jsou ekonomika, demografie, sociální zabezpečení, zdraví, vzdělávání, životní prostředí a další.

**Na webových stránkách (ČSÚ) najdi:**

**a) aktuální počet obyvatel města, ve kterém bydlíš.**

**b) aktuální průměrnou mzdu.**



## 1. Žáci 8. ročníku provedli statistické šetření ve své škole.

Doplň údaje v tabulce a doplň tvrzení:

počet žáků podle ročníku a třídy na 1. stupni základní školy	ročník/třída	počet chlapců	počet dívek	počet žáků
<b>1. ročník</b>		<b>58</b>	<b>106</b>	
I.A	7		22	
I.B		13	26	
I.C	9	17		
I.D	19	13	32	
<b>2. ročník</b>		<b>48</b>	<b>46</b>	<b>94</b>
II.A		4	20	
II.B	10	15	25	
II.C	9	16		
II.D	13		24	
<b>3. ročník</b>		<b>45</b>	<b>44</b>	<b>89</b>
III.A	18	10	28	
III.B	8	10	18	
III.C	8	13	21	
III.D	11	11	22	
<b>4. ročník</b>		<b>49</b>		
IV.A	16	10	26	
IV.B	12	11	23	
IV.C	8	15	23	
IV.D	8	13	21	
<b>5. ročník</b>		<b>48</b>	<b>43</b>	<b>92</b>
V.A		10	29	
V.B	13		24	
V.C	6	12	18	
V.D			20	
<b>celkem</b>		<b>233</b>	<b>240</b>	<b>273</b>

a) Na 1. stupni bylo \_\_\_\_\_ chlapců a \_\_\_\_\_ dívek.

b) Nejméně žáků bylo v \_\_\_\_\_ ročníku a nejvíce v \_\_\_\_\_ ročníku.

c) Počet dívek na 1. stupni je \_\_\_\_\_ %, počet chlapců na 1. stupni je \_\_\_\_\_ %.

## Četnost znaku



Četnost, neboli frekvence, znaku statistického souboru udává, kolikrát se určitá hodnota daného znaku vyskytuje ve statistickém souboru.

- **Absolutní četnost** – kolikrát se hodnota zkoumaného znaku v daném souboru vyskytla.
- **Relativní četnost** – vyjadřuje zlomkem, desetinným číslem nebo procentem
  - udává, kolik procent z celku je četnost daného znaku

$$\text{relativní četnost} = \frac{\text{absolutní četnost daného znaku}}{\text{rozsah statistického souboru}}$$



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_



2. Proveď statistické šetření s hodem hrací kostkou. Házej kostkou celkem dvacetkrát a zaznamenávej do tabulky, jaké číslo ti kolikrát padlo. Poté proveď analýzu dat, tedy urči četnost jednotlivých čísel a relativní četnost.

	1	2	3	4	5	6
počet						
četnost						
rel. četnost						
rel. četnost v %						

### Aritmetický průměr



**Aritmetický průměr**  $\bar{x}$  udává průměrnou hodnotu statistického znaku.

Vypočítáme ho tak, že **součet všech hodnot znaku** vydělíme **počtem všech statistických jednotek souboru**

$$\bar{x} = \frac{S}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

3. Na čtyřdenním cyklistickém srazu jeli cyklisté z Jihlavy do Plzně a zpátky. První den ujeli 86 km, druhý den 74 km, třetí den 78 km, čtvrtý den 87 km. Kolik kilometrů urazili poslední den, když celá trasa byla dlouhá 398 km? Jaký je aritmetický průměr vzdáleností, které denně urazili?



### Modus



**Modus**  $mod(x)$  je hodnota znaku, která má nejvyšší četnost.

Pokud se v souboru vyskytují **dvě nebo více hodnot znaku** s nejvyšší četností, považujeme za modus **všechny tyto hodnoty**.

### Medián

**Medián**  $med(x)$  označuje prostřední hodnoty znaku, jsou-li hodnoty uspořádány podle velikosti. Medián určujeme pouze pro číselné znaky.

Je-li počet jednotek **lichý**, medián je prostřední číslo.

Je-li počet jednotek **sudý**, medián je aritmetický průměr těch dvou hodnot, které jsou nejbližší středu.

4. Dívky z 8. třídy se na hodině tělesné výchovy seřadily od nejnižší po nejvyšší. Pan učitel změřil postupně jejich výšky a zapsal si následující hodnoty: 156 cm, 156 cm, 157 cm, 157 cm, 157 cm, 160 cm, 161 cm, 163 cm, 173 cm. Urči průměrnou výšku dívek z 8. třídy. Urči modus a medián.

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

## Typy diagramů



Výsledky statistického šetření se pro lepší přehlednost a názornost vyjadřují tabulkami a diagramy.

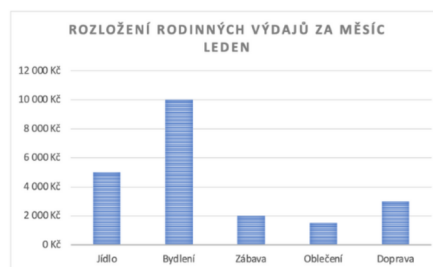
*Tabulka rozložení rodinných výdajů v kategoriích jídlo, bydlení, doprava, zábava a oblečení v průběhu měsíců leden, únor, březen, duben a květen.*

	Jídlo	Bydlení	Zábava	Oblečení	Doprava	Celkem
Leden	5 000 Kč	10 000 Kč	2 000 Kč	1 500 Kč	3 000 Kč	21 500 Kč
Únor	5 500 Kč	10 000 Kč	2 500 Kč	3 000 Kč	4 000 Kč	25 000 Kč
Březen	2 500 Kč	10 500 Kč	1 500 Kč	3 500 Kč	4 500 Kč	22 500 Kč
Duben	6 000 Kč	11 000 Kč	1 000 Kč	1 000 Kč	2 000 Kč	21 000 Kč
Květen	5 000 Kč	10 500 Kč	3 000 Kč	500 Kč	3 000 Kč	22 000 Kč
Celkem	24 000 Kč	52 000 Kč	10 000 Kč	9 500 Kč	16 500 Kč	112 000 Kč

### Sloupcový diagram

Používá se pro zobrazení srovnání mezi různými kategoriemi nebo hodnotami.

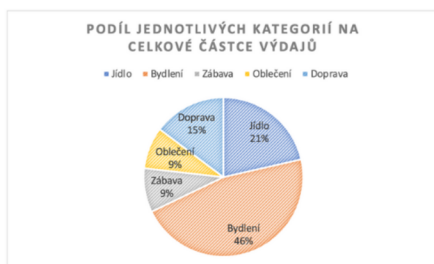
Je vhodný pro zobrazení počtů nebo četností.



### Kruhový diagram

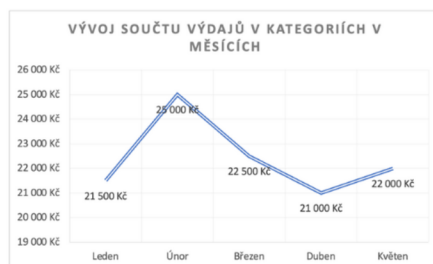
Používá se pro zobrazení složení celku nebo pro zobrazení procentuálního zastoupení jednotlivých kategorií v celku.

Je vhodný pro zobrazení poměru četností nebo relativních četností.



### Spojnicový diagram

Používá se pro zobrazení časových řad, trendů nebo vývoje hodnot. Je vhodný pro zobrazení spjitých dat, například změn v průběhu času.



## 5. V průběhu jednoho dne změř alespoň desetkrát teplotu s rozestupem alespoň půl hodiny.

a) Zapiš teploty a čas měření do tabulky:

čas									
teplota									

b) Podle údajů z tabulky sestroj spojnicový graf:

c) Odpověz na otázky:

Jaká byla nejvyšší a nejnižší naměřená teplota a kdy byla naměřena? \_\_\_\_\_

V kolik hodin začala teplota podle tvého grafu klesat? \_\_\_\_\_

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

## 6. Při vyplňování využij znalostí základů statistiky:

V seznamu jsou uvedeny názvy poslaneckých klubů Parlamentu ČR a v závorce počty poslanců\*:

- poslanecký klub ANO 2011 (71)
- poslanecký klub Občanské demokratické strany (34)
- poslanecký klub Starostové a nezávislí (33)
- poslanecký klub KDU-ČSL (23)
- poslanecký klub Svoboda a přímá demokracie (20)
- poslanecký klub TOP 09 (14)
- poslanecký klub České pirátské strany (4)
- nezařazení (1)\*

a) Doplni tabulku:

poslanecký klub/ poslanci	ANO	ODS	STAN	KDU-ČSL	SPD	TOP 09	Piráti	nezařazení	celkem
četnost									
relativní četnost									
relativní četnost v %									

b) Doplni do kruhového diagramu počty poslanců:



c) Vytvoř sloupcový graf znázorňující počty poslanců.

Základy statistiky	Ještě potřebuji procvičit	Zvládám bez problémů
1. Orientuji se v pojmech statistický soubor, statistické šetření, prvky statistického souboru.		
2. Určím četnost dle hodnoty znaku statistického souboru.		
3. Vypočítám relativní četnost.		
4. Vypočítám aritmetický průměr hodnot.		
5. Získané hodnoty ze statistického šetření zakreslím do grafu.		
6. Vypočítám modus a medián statistického souboru.		
7. Víím, které instituce se zabývají shromažďováním, zpracováním a prezentací statistických dat.		

\*Údaje aktuální ke dni 30.3.2023.

Obrázek 39 Základy statistiky 4

Zdroj: vlastní zpracování

### 3.7. Kružnice a kruh

METODICKÝ LIST č.7	
Téma pracovního listu	Ročník
<b>Kruh a kružnice</b>	<b>osmý</b>
Zařazení do RVP ZV	
<i>Vzdělávací oblast:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Vzdělávací obor:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Tematický celek:</i>	Geometrie v rovině a v prostoru
Výchovně vzdělávací cíle dle RVP ZV	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Charakterizuje kruh a kružnici, odvozuje jejich vlastnosti.</li> <li>• Odhaduje obvod a obsahu kruhu, délku kružnice.</li> <li>• Určí výpočtem obvod i obsah kruhu.</li> <li>• Načrtne rovinný útvar podle slovního zadání, provede konstrukci, ověří, zda výsledný útvar odpovídá zadání.</li> <li>• Využívá Thaletovy kružnice k řešení konstrukčních úloh.</li> <li>• Využívá matematickou symboliku.</li> </ul>	
Pojmová analýza	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>nové pojmy:</b> kruh, kružnice, kruhová výseč, kruhový oblouk, vnější přímk, tečna, sečna, Thaletova věta, tětiva, Ludolfovo číslo, mezikruž</li> <li>• <b>opěrné pojmy:</b> poloměr, průměr</li> </ul>	
Organizační podmínky	
<p>K efektivnímu zvládnutí pracovních listů na téma Kruh a kružnice je nutné, aby žáci měli dostatečné znalosti a porozumění týkající se vlastností rovinných útvarů a postupů rýsování rovinných útvarů. K tomu by měl být žákovi poskytnut přístup k interaktivním prvkům, které umožňují zobrazit situace na náčrtech. Dále by měl mít k dispozici zařízení s připojením k internetu a webovou kamerou nebo fotoaparát, ideálně tablet nebo telefon. Pro provedení výpočtů bude nezbytná kalkulačka.</p>	

Pracovní listy jsou přizpůsobeny různým výukovým stylům a koncipovány tak, aby každý list pokryl jednu vyučovací hodinu. Na poslední straně každého listu se nachází soubor slovních úloh, které se liší obtížností a které si žák může vybrat podle svých schopností. Pro splnění výstupů stanovených v Rámcovém vzdělávacím programu je nutné splnit alespoň druhou úroveň.

Během vypracovávání pracovních listů jsou žáci podněcováni k aktivnímu objevování pravidel a k diskusi nad řešením úloh. Na konci každé stránky pracovního listu je zařazeno krátké sebehodnocení, které umožňuje žákům získat zpětnou vazbu ohledně svých schopností.

Pro úspěšné vypracování pracovních listů budou žáci potřebovat různé rýsovací pomůcky, jako je kružítko, pravítko s ryskou, úhломěr a rovné pravítko.

#### Vzdělávací cíle pracovního listu

Žák:

- Rozlišuje pojmy kruh a kružnice a definuje je pomocí množin bodů.
- Odvozuje a používá vztah mezi poloměrem a průměrem kruhu a kružnice.
- Určuje osu souměrnosti kruhu a kružnice.
- Rozlišuje vzájemné polohy kružnice a přímky – tečna, sečna, vnější přímka.
- Rozlišuje vzájemné polohy dvou kružnic a kategorizuje je do skupin podle počtu společných bodů.
- Vysvětlí pojem tětiva kružnice.
- Zná a vysvětlí Thaletovu větu.
- Využívá Thaletovu větu ke konstrukci tečny ke kružnici z bodu a ke konstrukci pravoúhlého trojúhelníku.
- Zná a používá vzorce pro obvod a obsah kruhu a délku kružnice k výpočtu příkladů.
- Využívá k výpočtu přibližnou hodnotu.
- Seznamuje se s historií Ludolfova čísla a možnostmi pro výpočet jeho hodnoty.
- Rozlišuje pojmy délka kružnice a obvod kruhu.
- Vysvětlí rozdíl mezi pojmy kruhový oblouk a kruhová výseč, odvozuje vzorec pro výpočet obsahu mezikruží.
- Řeší slovní úlohy z reálného života za pomoci vzorců.

## Seznam QR kódů

QR kód č. 1 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/dppkgyfw>

QR kód č. 2 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/dbdyycjm>

QR kód č. 3 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/x6znfftu>

QR kód č. 4 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/ttzvbevm>

QR kód č. 5 – Video na YouTube The Pi Song (Memorise 100 Digits Of  $\pi$ ) | SCIENCE SONGS na kanále AsapSCIENCE. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=3HRkKznJoZA>

QR kód č. 6 – Online procvičování na webových stránkách Umimematiku.to. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/rozhodovacka-obsah-kruh-mrizka-1-uroven/17090>

## Zdroje

### Učebnice a pracovní sešity použité k tvorbě cvičení:

LAUBEOVÁ, Alena, Blanka MATASOVÁ a Tomáš MIERVA a kol. *Hravá matematika 8: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: Taktik International, 2021. ISBN 978-80-7563-265-4.

MALÍK, Michal, Jana PRESOVÁ a Veronika ŠOLCOVÁ a kol. *Hravá matematika 8: Pracovní sešit pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 3. vydání. Praha: Taktik International, 2022. ISBN 978-80-7563-442-9.

TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika 8 s nadhledem*. Praha: Fraus, 2020. ISBN 978-80-7489-517-3.

### Externí odkazy:

AsapSCIENCE. The Pi Song (Memorise 100 Digits Of  $\pi$ ) | SCIENCE SONGS. In: *YouTube*. [online]. 27.9.2018 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=3HRkKznJoZA>

Obsah kruhu (na mřížce). *Umimematiku.to* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.umimematiku.cz/rozhodovacka-obsah-kruh-mrizka-1-uroven/17090>

Obrázky:

KAK1: Nefritový kruh. In: *TravelMagazín* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://magazin.travelportal.cz/tag/cinska-mince/>

KAK2: The Five-hundred-metre Aperture Spherical Telescope. In: *AstronomyNow* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://astronomynow.com/2016/09/26/australian-technology-runs-worlds-largest-single-dish-radio-telescope-in-china/>

# Kruh a kružnice

Je dána úsečka  $ST$ ,  $|ST| = 4 \text{ cm}$ . Narýsuj kružnici  $k$  ( $S$ ;  $3 \text{ cm}$ ) a kruh  $K$  ( $T$ ;  $2 \text{ cm}$ ). Vyznač všechny společné body kružnice  $k$  a kruhu  $K$ .

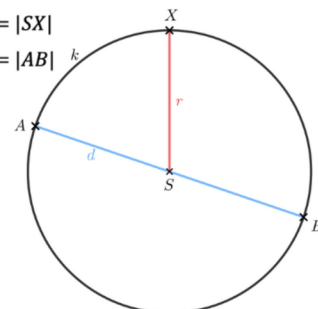
## Kružnice

Kružnice  $k$  je množina všech bodů, jejichž vzdálenost od středu  $S$  je rovna poloměru  $r$ .

**Poloměr  $r$**   $r = |SX|$

**Průměr  $d$**   $d = |AB|$

$$d = 2r$$



Zapisujeme:

$k(S; r)$

Čteme:

Kružnice  $k$  se středem v bodě  $S$  a poloměrem  $r$ .

## Kruh

Kruh  $K$  je množina všech bodů, jejichž vzdálenost od středu  $S$  je menší nebo rovna poloměru  $r$ .

**Poloměr  $r$**   $r = |SX|$

**Průměr  $d$**   $d = |AB|$

$$d = 2r$$

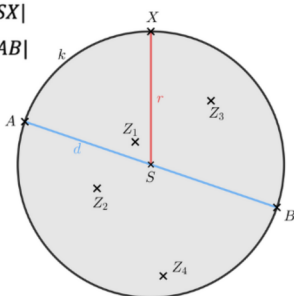
$Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in K$

Zapisujeme:

$K(S; r)$

Čteme:

Kruh  $K$  se středem v bodě  $S$  a poloměrem  $r$ .

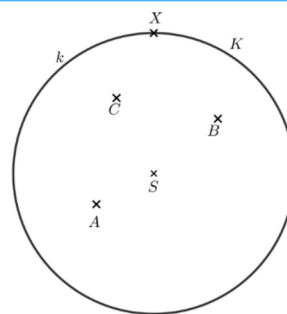


## 1. Je dán kruh $K$ s hraniční kružnicí $k$ .

a) Změř poloměr kruhu  $K$  a kruh zapiš: \_\_\_\_\_

b) Zapiš vzájemnou polohu bodů  $A, B, C, X$  a kružnice  $k$ :

c) Zapiš vzájemnou polohu bodů  $A, B, C, X$  a kruhu  $K$ :



## 2. Vypočítej poloměr/průměr kružnice, jestliže:

a)  $r = 10 \text{ dm}$

c)  $d = 2,5 \text{ cm}$

b)  $d = 7 \text{ m}$

d)  $r = 8 \text{ mm}$

## 3. Vyznač libovolné 3 body $A, B, C$ . Sestroj kružnici $k$ procházející těmito body.

Bude mít úloha vždy řešení?

## Víte, že ...

- Slovo kruh (angl. circle) pochází z řeckého slova "kirkos", v překladu prsten.
- Největší kruh na Zemi je rovník, který má délku přibližně 40 075 km.
- Na kruhu je založen nejdůležitější lidský vynález – kolo.

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_



#### 4. Vyber správnou možnost.



- a) Poloměr kružnice je polovina/dvojnásobek průměru.
- b) Průměr kruhu je polovina/dvojnásobek poloměru.
- c) Kruh/Kružnice je množina bodů v rovině, které jsou stejně vzdáleny od jednoho bodu.
- d) Kružnice a kruh má nekonečně mnoho/konečně mnoho bodů.

#### 5. Narýsuj kružnici $K(S; 2\text{ cm})$ a libovolný bod $A \in k$



- a) Sestroj obraz  $k'$  kružnice  $k$  v osově souměrnosti dané libovolnou osou  $o$ , pro kterou platí  $S \in o$ .
- b) Sestroj obraz  $k''$  kružnice  $k$  ve středové souměrnosti se středem souměrnosti v bodě  $A$ .

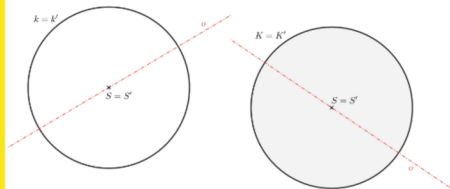


#### Souměrnost kružnice a kruhu

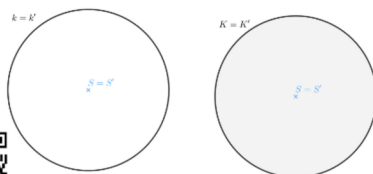


Kruh i kružnice jsou

- osově souměrné podle každé přímky procházející jejich středem  $S$ .



- středově souměrné podle jejich středu  $S$ .



Víte, že ...



Kružnice je jediný rovinný útvar, který má nekonečně mnoho os souměrnosti, protože existuje nekonečně mnoho přímek, které prochází jejím středem.

#### 6. Načrtni libovolnou kružnici $k$ a přímky $p$ a $q$ tak, aby

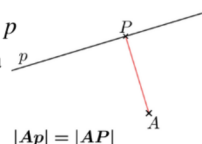
- a) měla přímka  $p$  dva společné body s kružnicí  $k$ .
- b) měla přímka  $q$  tři společné body s kružnicí  $k$ .

#### Vzdálenost bodu od přímky



Vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $p$  je rovna vzdálenosti bodu  $A$  a průsečíku  $P$  přímky  $p$  vedené bodem  $A$  k přímce  $p$ .

$$|Ap| = |AP|$$

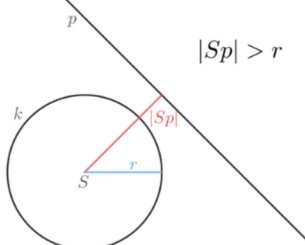


#### Vzájemná poloha kružnice a přímky



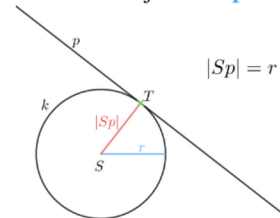
##### Vnější přímka

Přímka, která nemá s kružnicí žádný společný bod. **Vzdálenost přímky od středu kružnice** je větší než **poloměr**.



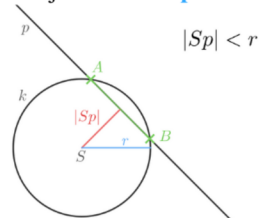
##### Tečna

Přímka, která má s kružnicí právě jeden společný bod, který nazýváme **bod dotyku  $T$** . Tečna je kolmá na **poloměr** kružnice. **Vzdálenost přímky od středu kružnice** je rovna **poloměru**.



##### Sečna

Přímka, která protíná kružnici ve dvou různých bodech  $A, B$ . Úsečka  $AB$  se nazývá **tětiva**. **Vzdálenost přímky od středu kružnice** je menší než **poloměr**.



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

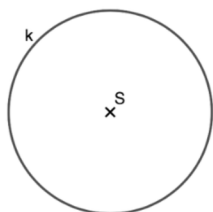
Obrázek 41 Kruh a kružnice 2

Zdroj: vlastní zpracování

7. Rýsuj podle postupu konstrukce a odpověz na otázky:

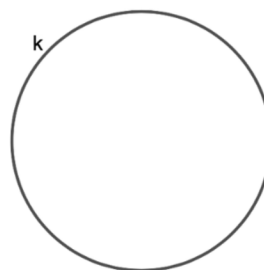


1.  $p; |Sp| > 2 \text{ cm}$
2.  $A; A \in k$
3.  $T; T \in k$
4.  $q; AT \in q$
5.  $m; ST \perp m$



- a) Která z přímek  $p, q, m$  je vnější přímkou ke kružnici  $k$ ?
- b) Která z přímek  $p, q, m$  je tečnou ke kružnici  $k$ ? Který z bodů  $A, T$  je bodem dotyku?
- c) Která z přímek  $p, q, m$  je sečnou ke kružnici  $k$ ? Která úsečka je tětivou kružnice  $k$ ?

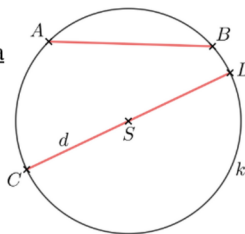
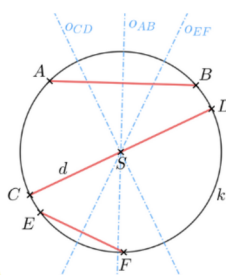
8. Sestroj střed kružnice  $k$ .  
Využij vlastnosti os tětív.



Tětiva a osa tětivy



**Tětiva kružnice** je úsečka, která spojuje dva různé body ležící na kružnici  $k$ . Nejdelší tětiva každé kružnice je průměr  $d$ .

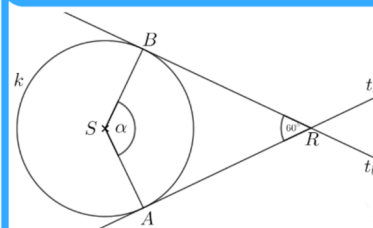


**Osa tětivy** kružnice prochází středem kružnice. Osy všech tětív kružnice se protínají v jenom bodu, a to ve středu kružnice.

9. Narýsuj kružnici  $m(S; 3 \text{ cm})$  a libovolnou přímkou  $p$ , která je vnější přímkou ke kružnici  $m$ . Sestroj:

- všechny tečny  $t$  kružnice  $m$ , které jsou rovnoběžné s přímkou  $p$ ,
- všechny tečny  $u$  kružnice  $m$ , které jsou kolmé k přímce  $p$ ,
- vyznač a libovolně pojmenuj všech body dotyku.

10. Je dána kružnice  $k$  a bod  $R$ , který neleží na kružnici  $k$ . Přímkou  $t_a$  a  $t_b$  jsou tečny kružnice  $k$  v bodech  $A$  a  $B$  procházející bodem  $R$ , které svírají úhel  $60^\circ$ . Vypočítej úhel  $\alpha$ .



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

Obrázek 42 Kruh a kružnice 3

Zdroj: vlastní zpracování

11. Narýsuj libovolnou kružnici  $k(S; r)$  a vyznač její průměr  $AB$ . Na kružnici vyznač tři libovolné body  $C, D$  a  $E$ .



- a)  $|\sphericalangle ACB| =$   
 b)  $|\sphericalangle ADB| =$   
 c)  $|\sphericalangle AEB| =$

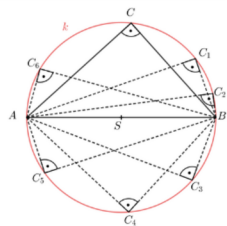
12. Sestroj trojúhelník  $ABC$ , ve kterém  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$  a  $c = 5 \text{ cm}$ . Opiš trojúhelníku  $ABC$  kružnici  $k$ , její střed označ  $S$ .

- a) Je to ostroúhlý, pravouhlý nebo tupouhlý trojúhelník?  
 b) Kde leží střed kružnice  $k$ ?  
 c) Kde leží střed kružnice opsané libovolnému pravouhlému trojúhelníku.

### Thaletova věta



Pro libovolný pravouhlý trojúhelník  $ABC$  platí, že vrchol  $C$  leží na kružnici  $k$  s průměrem  $AB$ .



### Obrácená Thaletova věta

Jestliže vrchol  $C$  trojúhelníku  $ABC$  leží na kružnici  $k$  s průměrem  $AB$ , pak je tento trojúhelník  $ABC$  pravouhlý.

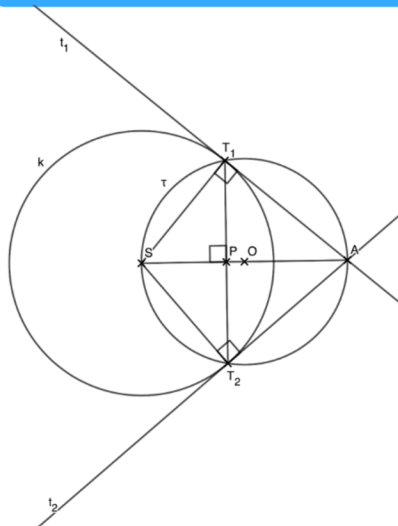
### Kdo byl Thales z Milétu?



**Thales z Milétu** byl starořecký filosof a matematik, který žil v 6. stol. před n.l. Byl považován za jednoho z tzv. sedmi mudrců starověkého Řecka. Byl první, kdo při své práci použil kružítko a úhloměr.

**Thaletovu větu** znali již staří Egypťané, ale Thales byl první, kdo poznatky formuloval v obecné formě.

13. Pozorně si prohlédni obrázek a podle obrázku doplň slova do jednotlivých vět tak, aby vznikla pravdivá tvrzení.



- a) Úsečky  $T_1T_2$  a  $SA$  jsou k sobě \_\_\_\_\_  
 b) Bod  $O$  je \_\_\_\_\_ úsečky  $SA$ .  
 c) Přímka  $SA$  je \_\_\_\_\_ úhlu  $T_1ST_2$   
 d) Úsečky  $T_1S$  a  $T_2S$  jsou \_\_\_\_\_.  
 e) Trojúhelník  $SAT_1$  i  $SAT_2$  je \_\_\_\_\_.  
 f) Úsečka  $SA$  prochází středem \_\_\_\_\_.  
 g) Přímky  $t_1$  a  $t_2$  jsou \_\_\_\_\_ kružnice  $k$ .  
 h) Kružnice  $\tau$  se středem  $O$  a poloměrem  $OA$  je \_\_\_\_\_ kružnice.  
 i) Tečna  $t$  je \_\_\_\_\_ k poloměru  $ST$ .

úsečky  $T_1T_2$  kolmé tečny pravouhlý osou Thaletova  
 střed kolmá shodné

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

Obrázek 43 Kruh a kružnice 4

Zdroj: vlastní zpracování

14. Je dána kružnice  $m$  ( $O; 3\text{ cm}$ ) a mimo ni bod  $J$ ,  $|OJ| = 7\text{ cm}$ . Sestroj všechny přímky, které procházejí bodem  $J$  a dotýkají se kružnice  $m$  v jednom bodě (jsou tečnami kružnice  $m$ ). Rýsuj podle postupu konstrukce.

1.  $m; m(O; 3\text{ cm})$
2.  $J; |OJ| = 7\text{ cm}$
3.  $S; S \in OJ, |OS| = |SJ|$
4.  $k; k(S; |OS|)$
5.  $T_1, T_2; \{T_1T_2\} \in m \cap k$
6.  $t_1; t_1 \Leftrightarrow T_1J$
7.  $t_2; t_2 \Leftrightarrow T_2J$

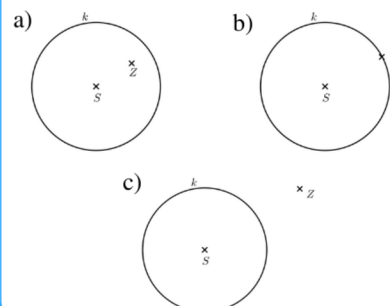


15. Sestroj pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s pravým úhlem u vrcholu  $C$ , jestliže jeho přepona má délku  $9\text{ cm}$ , odvěsna  $a$  je dlouhá  $5\text{ cm}$ . Zapiš postup konstrukce.

16. Sestroj pravoúhlý lichoběžník  $EFGH$  ( $e \parallel f$ ) se základnou  $e = 8\text{ cm}$  a délkami ramen  $f = h = 4\text{ cm}$ , jestliže úhlopříčka  $FH$  a rameno  $HE$  spolu svírají pravý úhel.

17. Je dána kružnice  $k(S; 22\text{ mm})$  a bod  $T$ ,  $|ST| = 50\text{ mm}$ . Z bodu  $T$  sestroj tečny ke kružnici  $k$ .

18. Ke každému obrázku napiš a načrtni počet tečen kružnic  $k$ , které procházejí



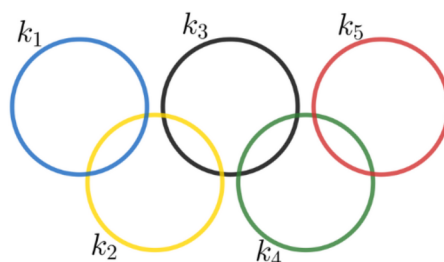
Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

19. Sestroj tečnu z bodu  $M$  ke kružnici  $k$ , jestliže  $k(S; 45 \text{ mm})$ ;  $|SM| = 75 \text{ mm}$ . Vypočítej délku úsečky  $T_1M$ , kde  $T_1$  je bod dotyku tečny  $t_1$  ke kružnici  $k$ . Svůj výpočet ověř měřením. Využij znalostí vět v pravoúhlém trojúhelníku.

20. Prohlédni si obrázek a pojmenuj, co na něm vidíš. Napiš, kolik společných bodů mají kružnice.

a) černá a žlutá kružnice  
(kružnice  $k_3$  a  $k_2$ )

b) modrá a zelená kružnice  
(kružnice  $k_1$  a  $k_4$ )



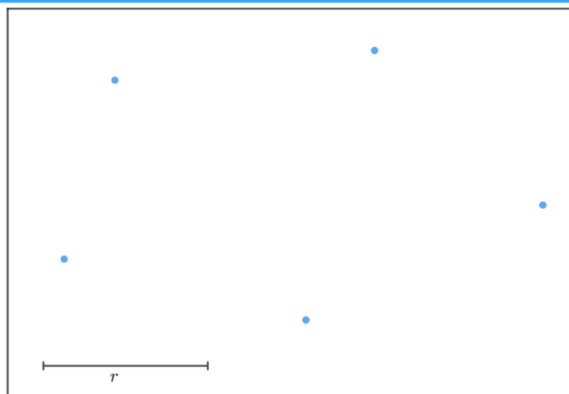
### Velikost olympijských kruhů

Průměr každého kruhu je pětina délky vlajky a kruhy musí být ve vzdálenosti desetiny vlajky.

Samotná vlajka musí mít poměr šířky 2 : 3 a musí být vysoká nejméně 1,5 metru.

Každý kruh je stejně velký, což symbolizuje rovnost všech olympijských sportů a účastníků.

21. Bezpečnostní agentura vyměřuje, zda se v expozici muzea nachází takové místo, kde se lze ukrýt před čidly. Čidla jsou vyznačena tečkami a mají dosah o zakresleném poloměru  $r$ . Narýsuj kružnice a urči, zda existuje místo, kam čidla nedosáhnou.



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

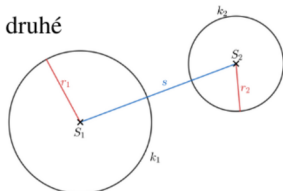
## Vzájemná poloha dvou kružnic



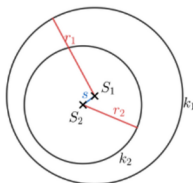
Vzdálenost mezi středy dvou kružnic nazýváme **středná  $s$** .

### 0 společných bod

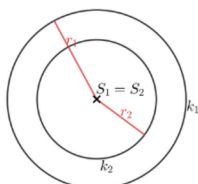
a) jedna leží vně druhé



b) jedna leží uvnitř druhé



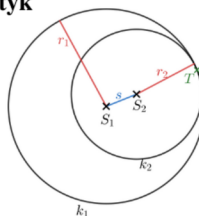
c) jedna leží uvnitř druhé  
mají společný střed  
(**soustředné kružnice**)



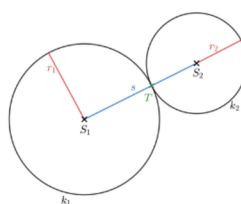
Část roviny mezi  
kružnicemi se nazývá  
**mezikruží**.

### 1 společný bod – bod dotyku $T$

a) jedna leží uvnitř druhé a mají  
**vnitřní dotyk**

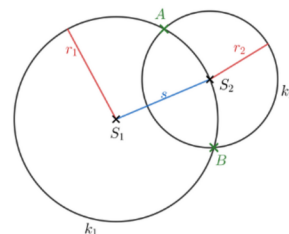


b) jedna leží vně druhé a mají  
**vnější dotyk**

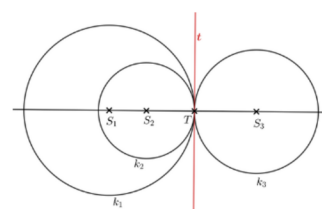


### 2 společné body

• kružnice se protínají



Kružnice mají společnou **tečnu**,  
která je kolmá na přímkou  
procházející středy kružnic.



22. Narýsuj kružnice  $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$  a zjisti, kolik mají společných bodů a o jakou vzájemnou polohu se jedná. Poté přiřaď odpovídající údaj o délce středné.

a)  $r_1 = 3 \text{ cm}; r_2 = 1,5 \text{ cm}; |S_1S_2| = 2 \text{ cm}$

b)  $r_1 = 3 \text{ cm}; r_2 = 2 \text{ cm}; |S_1S_2| = 1 \text{ cm}$

c)  $r_1 = 3 \text{ cm}; r_2 = 2 \text{ cm}; |S_1S_2| = 5 \text{ cm}$

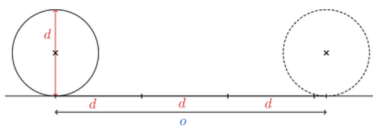
$$|S_1S_2| > r_1 + r_2 \quad r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2 \quad |S_1S_2| = r_1 - r_2 \quad |S_1S_2| = r_1 + r_2 \quad |S_1S_2| < r_1 - r_2 \quad |S_1S_2| = 0$$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

Obrázek 46 Kruh a kružnice 7

Zdroj: vlastní zpracování

23. Vystříhni kruhy různých poloměrů a porovnej, kolikrát je obvod kruhu větší než jeho průměr. Vše zaznamenávej do tabulky.



$d$	$o$	$\frac{o}{d}$

Porovnej čísla v posledním sloupci. Co o nich můžeme říct? S jakou přesností jsou si rovny?

### Délka kružnice a obvod kruhu

$$o = \pi \cdot d = \pi \cdot 2r$$

$r$  je poloměr kruhu a  $d$  je průměr kruhu

**Konstanta  $\pi$**  (Ludolfovo číslo) vyjadřuje poměr obvodu kruhu k průměru.

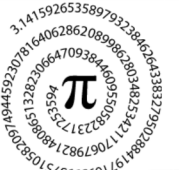
Ve výpočtech budeme používat hodnotu

$$\pi \doteq 3,14$$

\* Slovo "obvod" se používá pro označení délky nějakého uzavřeného útvaru. V případě kruhu je tato délka kružnice. Proto obvod kruhu je délka kružnice.

### Ludolfovo číslo?

Ludolf van Ceulen byl nizozemský matematik žijící v 16. a 17. století, který se zabýval výpočtem čísla  $\pi$ . Snažil se určit jeho hodnotu co nejpřesněji, dostal se až na 20 desetinných míst. Proto se mu říká Ludolfovo číslo.



Dnes známe hodnotu  $\pi$  s mnohem vyšší přesností, a to díky výpočetní technice. V roce 2021 bylo spočítáno  $\pi$  s přesností na více než 62,8 bilionů desetinných míst. Přesto se stále objevují nové způsoby, jak vypočítat  $\pi$  s větší přesností, a tato konstanta zůstává zajímavým matematickým tématem.



24. Doplně do tabulky chybějící údaje. Zaokrouhli na dvě desetinná místa.

průměr kruhu $d$	poloměr kruhu $r$	obvod kruhu $o$
172 m		
	12 cm	
		628 dm
	52 mm	
		843 cm
2 km		

25. Meteor kráter nebo také Barringerův kráter vznikl po dopadu meteoritu v Arizoně v USA někdy před 50 000 lety. Má téměř kruhový tvar s průměrem 1 200 m. Jaký je jeho obvod, budeme-li jeho tvar považovat za kruh?

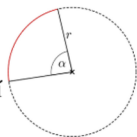
26. Obvod pizzy tvaru kruhu je 100 cm. Jaký je její průměr?

### Kruhový oblouk

Kruhový oblouk je souvislá část kružnice ohraničená dvěma jejími body příslušející středovému úhlu.

$$\text{Platí vzorec } o = \pi r \frac{\alpha}{180^\circ},$$

kde  $r$  je poloměr a  $\alpha$  je příslušející středový úhel.



27. S přesností na desetiny vypočítej délku oblouku kružnice  $k(S; 4 \text{ cm})$ , který přísluší středovému úhlu  $\alpha$  velikosti

a)  $60^\circ$

b)  $195^\circ$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_

### Obsah kruhu



$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$r$  je poloměr kruhu a  $d$  je průměr kruhu

29. Martin rozdělil pizzu s průměrem 32 cm na šest stejných dílků. Jaký je obsah jednoho z nich?



31. Celkový průměr šipkového terče je 42 cm. Průměr oblasti, ve které získáte body, je 36 cm. S přesností na desetiny urči, jak velkou plochu v procentech z tohoto terče zaujímá bodovaná plocha.

28. Rozhodni, zda Tomáš správně vypočítal obsah kruhu se zadaným poloměrem, resp. průměrem. Případné chyby oprav:



- a)  $r = 13 \text{ cm}; S = 40,82 \text{ cm}^2$
- b)  $d = 6,2 \text{ m}; S = 120,7016 \text{ m}^2$
- c)  $r = 10,4 \text{ mm}; S = 339,6224 \text{ mm}^2$
- d)  $d = 0,6 \text{ dm}; S = 0,2826 \text{ dm}^2$

30. V čínském Kantonu vznikla unikátní stavba - Nefritový kruh. Italský architekt navrhl pro Kanton neuvěřitelnou budovu s výškou 138 metrů a 33 podlažími ve tvaru dvojitého kruhu, jehož střed má průměr 47 metrů. Vypočítej, kolik metrů čtverečních má zastavěná plocha čelní stěny stavby.



Obr. KAKI

### Obsah mezikruží

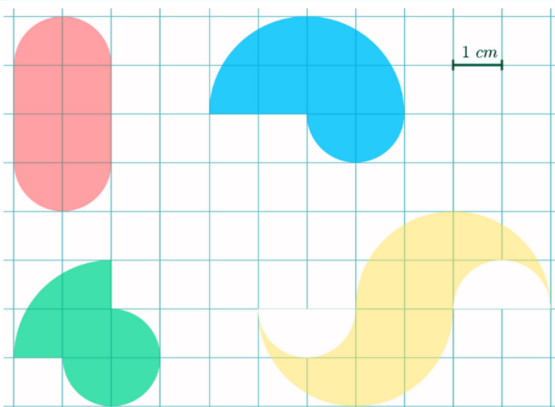


Mezikruží je část roviny ohraničená dvěma soustřednými kružnicemi s různými poloměry  $r_1, r_2$ .



$$S = \pi r_1^2 - \pi r_2^2$$

32. Vypočítej obvody a obsahy obrazců nakreslených ve čtvercové síti:



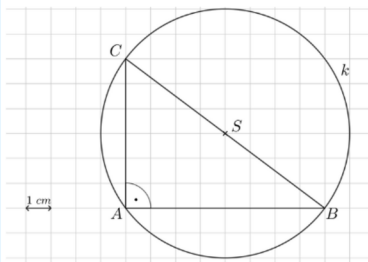
1 cm



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....



33. Ve čtvercové síti je znázorněn pravouhlý trojúhelník  $ABC$  a jemu opsaná kružnice  $k$ . Vypočítej poloměr kružnice  $k$ , délku kružnice  $k$  a obsah kruhu ohraničeného kružnicí  $k$ .



34. Kruh má průměr  $24\text{ cm}$ . Urči, kolikrát se zvětší, resp. zmenší jeho obvod a obsah, jestliže:

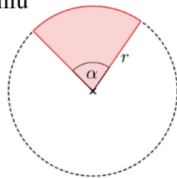
a) jeho průměr bude dvojnásobný

b) jeho průměr bude poloviční

### Kruhá výseč

Kruhá výseč je část kruhu ohraničená obloukem kružnice a dvěma poloměry příslušející středovému úhlu

Platí vzorec  $S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ ,  
kde  $r$  je poloměr a  $\alpha$  je příslušející středový úhel.



36. Vypočítej obsah kruhové výseče, je-li průměr kruhu  $24\text{ cm}$  a úhel výseče je  $60^\circ$ .

35. V září 2016 byl v Číně uveden do provozu největší radioteleskop světa, kterému přezdívají Nebeské oko. Zařízení s talířovou anténou má průměr  $500\text{ m}$ . Jak dlouho bude trvat servisnímu technikovi revize obvodu teleskopu, když půjde rychlostí  $3\text{ km/h}$ .



Obr. KAK2

Kruh a kružnice	Ještě potřebuji procvičit	Zvládám bez problémů
1. Rozlišuji a dokážu vysvětlit pojmy poloměr, průměr, střed, kružnice a kruh.		
2. Rozeznám vzájemnou polohu přímky a kružnice.		
3. Rozeznám vzájemnou polohu dvou kružnic.		
4. Vysvětlím pojem tětiva a vyznačím ji v konstrukci.		
5. Používám Thaletovu větu při konstrukci tečny ke kružnici z bodu a při konstrukci pravouhlého trojúhelníku.		
6. Vypočítám délku kružnice a obvod kruhu.		
7. Vypočítám obsah kruhu.		
8. Znalostí výpočtu obvodu a obsahu kruhu aplikuji na praktické úlohy.		

Obrázek 49 Kruh a kružnice 10

Zdroj: vlastní zpracování

### 3.8. Konstrukční úlohy

METODICKÝ LIST č.8	
Téma pracovního listu	Ročník
<b>Konstrukční úlohy</b>	<b>osmý</b>
Zařazení do RVP ZV	
<i>Vzdělávací oblast:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Vzdělávací obor:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Tematický celek:</i>	Geometrie v rovině a v prostoru
Výchovně vzdělávací cíle dle RVP ZV	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Využívá při analýze praktické úlohy náčrtky, schémata.</li> <li>• Využívá polohové a metrické vlastnosti k řešení geometrických úloh.</li> <li>• Využívá matematickou symboliku.</li> <li>• Pojmenuje základní množiny všech bodů dané vlastnosti.</li> <li>• Načrtne a sestrojí rovinné útvary.</li> <li>• Vyhledá v textu úlohy potřebné údaje a vztahy.</li> <li>• Ověří výsledek úlohy.</li> </ul>	
Pojmová analýza	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Nové pojmy:</b> množina bodů dané vlastnosti, pás roviny</li> <li>• <b>Opěrné pojmy:</b> osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice, rovnoběžka, vzdálenost od přímky, kruh, kružnice, rovinný útvar</li> </ul>	
Organizační podmínky	
<p>K úspěšnému zvládnutí pracovních listů na téma Množiny bodů dané vlastností je nezbytné, aby žáci měli dostatečné znalosti a porozumění týkající se vlastností rovinných útvarů a postupů rýsování rovinných útvarů, včetně přehledu základních i pokročilejších konstrukcí trojúhelníků a čtyřúhelníků, na které bude téma navazovat. Žákovi by měl být k dispozici přístup k interaktivním prvkům umožňujícím zobrazit situace na náčrtech a zařízení s připojením k internetu a webovou kamerou nebo fotoaparát, přičemž ideálním řešením by byl tablet nebo telefon. K výpočtům bude nezbytná kalkulačka.</p> <p>Pracovní listy jsou navrženy s ohledem na různé výukové styly a každý list by měl být pokryt v rámci jedné vyučovací hodiny. Na poslední straně každého listu jsou</p>	

uvedeny slovní úlohy lišící se obtížností, ze kterých si žák může vybrat podle svých schopností. Pro splnění výstupů stanovených v Rámcovém vzdělávacím programu je nutné, aby žák dosáhl alespoň druhé úrovně.

Během řešení pracovních listů jsou žáci podněcováni k aktivnímu objevování pravidel a k diskuzi nad řešením úloh. Na konci každé stránky pracovního listu je zařazeno krátké sebehodnocení, které umožňuje žákům získat zpětnou vazbu ohledně svých schopností.

Pro úspěšné vypracování pracovních listů budou žáci potřebovat různé rýsovací pomůcky, jako je kružítko, pravítko s rýskou, úhloměr a rovné pravítko.

#### Vzdělávací cíle pracovního listu

Žák:

- Pojmenuje množinu bodů dané vlastnosti.
- Rozlišuje a vysvětluje rozdíly mezi pojmy kruh, kružnice, Thaletova kružnice, osa úsečky, osa úhlu, rovnoběžka, pás roviny a osa pásu roviny.
- Rýsuje množiny bodů dané vlastnosti podle zadání.
- Řeší konstrukční úlohy.
- Dodržuje úmluvy pro rýsování, analyzuje konstrukční úlohu a určuje, co je výsledkem úlohy.
- Používá a čte matematickou symboliku pro zápis postupu konstrukce.
- Využívá množiny bodů daných vlastnosti při konstrukci trojúhelníků a čtyřúhelníků.

#### Seznam QR kódů

QR kód č. 1 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/jha43e8m>

QR kód č. 2 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/ddegypgm>

QR kód č. 3 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/aerahsds>

QR kód č. 4 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/vurpw9qs>

QR kód č. 5 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/sdutcbsd>

QR kód č. 6 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/jzffwz2h>

QR kód č. 7 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/pszafahn>

QR kód č. 8 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/nuajcdnw>

## Zdroje

### Učebnice a pracovní sešity použité k tvorbě cvičení:

COUFALOVÁ, Jana, Šárka PĚCHOUČKOVÁ, Jiří HEJL a kol. *Matematika: pro 8. ročník základní školy*. 3. vydání. Praha: Fortuna, 2020. ISBN 978-80-7373-142-7.

GAZÁRKOVÁ, Dana, Hana HEDBÁVNÁ, Hana LIŠKOVÁ a kol. *Texty 2021–2022 z matematiky pro žáky 9. tříd ZŠ*. Brno: Didaktis, 2020. OSBN 978-80-7358-339-2.

HOMOLA, Jakub, Blanka MATASOVÁ a Tomáš MIERVA a kol. *Hravá matematika 8: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: Taktik International, 2021. ISBN 978-80-7563-266-1.

MALÍK, Michal, Jana PRESOVÁ a Veronika ŠOLCOVÁ a kol. *Hravá matematika 8: Pracovní sešit pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 3. vydání. Praha: Taktik International, 2022. ISBN 978-80-7563-442-9.

PŮLPÁN, Zdeněk, Josef TREJBAL. *Matematika: geometrie*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2015. ISBN 978-80-7235-419-1.

TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika 8 s nadhledem*. Praha: Fraus, 2020. ISBN 978-80-7489-517-3.

# Konstrukční úlohy

1. Je dán čtverec  $EFGH$  se stranou  $e = |EF| = 5,8 \text{ cm}$ . Sestroj čtverci  $EFGH$  kružnici opsanou  $k$ .

2. Sestroj trojúhelník  $ABC$ , je-li  $c = 6,1 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 62^\circ$ ,  $\beta = 88^\circ$ .

## Množiny bodů dané vlastnosti

Abychom byli schopni úspěšně řešit i složitější konstrukční úlohy, budete přemýšlet o geometrických tvarech jako o množinách bodů, které sdílejí určitou společnou vlastnost.

Jako množinu bodů dané vlastnosti budeme označovat geometrický útvar, pro který platí:

1. Každý bod tohoto geometrického útvaru má danou vlastnost.
2. Každý bod roviny, který má danou vlastnost, je bodem tohoto útvaru.

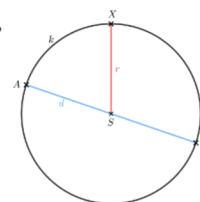
3. Sestroj rovnoramenný lichoběžník  $KLMN$ , kde  $k = 3 \text{ cm}$ ,  $l = 3,5 \text{ cm}$  a úhlopříčka  $KM$ ,  $|KM| = 4 \text{ cm}$ .

4. Je dána kružnice  $k$  ( $S$ ;  $3 \text{ cm}$ ), rozhodni a zapiš symbolicky, zda bod  $M$  leží na kružnici  $k$ , jestliže:

- a)  $|MS| = 2 \text{ cm}$
- b)  $|MS| = 3 \text{ cm}$
- c)  $|MS| = 40 \text{ mm}$
- d)  $|MS| = 30 \text{ mm}$

Doplň správné slovo do definice kružnice  $k(S;r)$

**Kružnice  $k$**  je množina všech bodů, jejichž vzdálenost od středu  $S$  je \_\_\_\_\_ poloměru  $r$ .

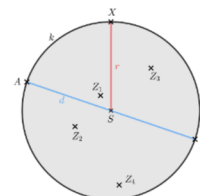


5. V rovině jsou dány body  $X$  a  $Y$ . Sestroj všechny kružnice, které mají poloměr  $2 \text{ cm}$  a prochází body  $X$ ,  $Y$ .

X X  
X Y

Doplň správné slovní spojení do definice kruhu  $K(S;r)$

**Kruh  $K$**  je množina všech bodů, jejichž vzdálenost od středu  $S$  je \_\_\_\_\_ poloměru  $r$ .



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

6. Sestroj, vyznač a pojmenuj množinu všech středů  $H$  všech kružnic  $h$  s poloměrem  $r = 2$  cm, které procházejí bodem  $M$ .

X  
M

7. Narýsuj osu  $o$  úsečky  $AB$ ,  $|AB| = 4$  cm. Vyznač několik různých bodů  $X, X, X, \dots$ . Mimo osu  $o$  vyznač bod  $Y$ .

a) Změř a zapiš vzdálenosti popsanych bodů:

$|X_1A| =$              $|X_2A| =$              $|X_3A| =$              $|YA| =$   
 $|X_1B| =$              $|X_2B| =$              $|X_3B| =$              $|YB| =$

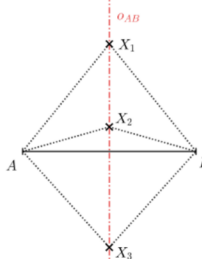
b) Co platí o vzdálenostech jednotlivých bodů  $X$  od krajních bodů  $A, B$  úsečky  $AB$ ? Mám tutéž vlastnost i bod  $Y$ ?

8. Je dána úsečka  $KL$ ,  $|KL| = 3,5$  cm. Najdi množinu všech středů kružnic, které procházejí body  $A, B$ .

### Osa úsečky

Na základě zjištění z cvičení doplň správně slovní spojení:

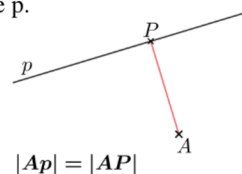
Osa úsečky  $AB$  je množina všech bodů  $X$  v rovině, které mají od krajních bodů  $A, B$  úsečky  $AB$  \_\_\_\_\_ vzdálenost.



9. Je dána přímka  $q$ . Najdi množinu všech bodů, které jsou od přímky  $q$  vzdáleny  $2,5$  cm

### Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $p$  je rovna vzdálenosti **bodu  $A$  a průsečíku  $P$**  přímky  $p$  vedené bodem  $A$  k přímce  $p$ .



### Dvojice rovnoběžek

Dvojice rovnoběžek  $a, b$  je množina všech bodů  $X$  v rovině, které mají od přímky  $p$  stejnou vzdálenost  $d$ .



Přímky  $a, b$  leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou  $p$ .

10. Je dána přímka  $o$ . Najdi množinu všech středů kružnic, které se dotýkají přímky  $o$ .

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

Obrázek 51 Konstrukční úlohy 2

Zdroj: vlastní zpracování

11. Jsou dány rovnoběžné přímky  $c, d$ . Najdi množinu všech bodů  $X$ , které mají od přímek  $c, d$  stejnou vzdálenost.

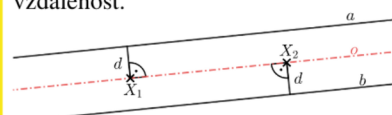


### Osa pásu roviny

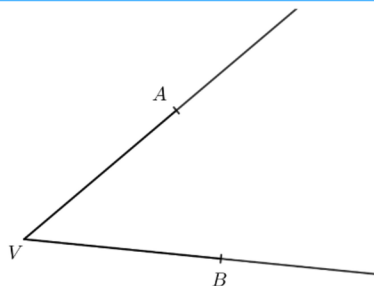
**Pás roviny** je část roviny, která je ohraničena dvěma rovnoběžkami.



**Osa pásu roviny** je množina všech bodů  $X$  v rovině, které mají od dvou rovnoběžných přímek stejnou vzdálenost.



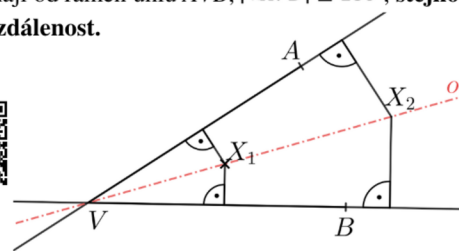
12. Najdi všechny body  $X$ , které mají stejnou vzdálenost od polopřímek  $VA$  a  $VB$ .



### Osa úhlu

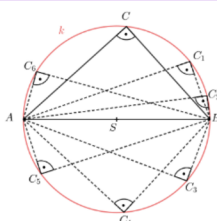


**Osa úhlu** je množina všech bodů  $X$  v rovině, které mají od ramen úhlu  $AVB$ ,  $|\sphericalangle AVB| \leq 180^\circ$ , stejnou vzdálenost.



### Thaletova věta

Pro libovolný pravouhlý trojúhelník  $ABC$  platí, že vrchol  $C$  leží na kružnici  $k$  s průměrem  $AB$ .



13. Je dán čtverec  $ABCD$ ,  $|AB| = 4 \text{ cm}$ . Sestroj všechny kružnice, které se dotýkají úhlopříček čtverce a mají poloměr  $15 \text{ mm}$



14. Narýsuj úsečku  $KL$  o délce  $2,5 \text{ cm}$ . Najdi množinu všech bodů  $M$  v rovině, pro které je trojúhelník  $KLM$  pravouhlým trojúhelníkem s přeponou  $KL$ .



### Thaletova kružnice

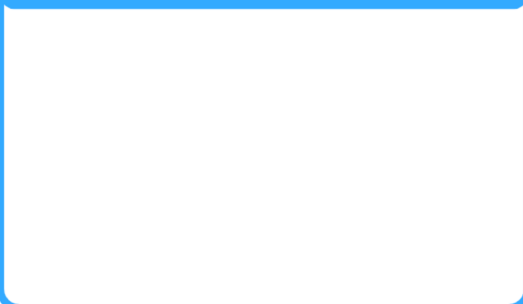


**Thaletova kružnice** sestavená nad průměrem  $AB$  je množina všech bodů  $X$  v rovině, z kterých je danou úsečkou  $AB$  vidět pod pravým úhlem (body  $A, B$  do této množiny nepatří).

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

15. Narýsuj čtverec  $ABCD$  se stranou o délce  $4\text{ cm}$ . Sestroj mezikruží, které je ohraničené kružnicí vepsanou a kružnicí opsanou čtverci  $ABCD$ .

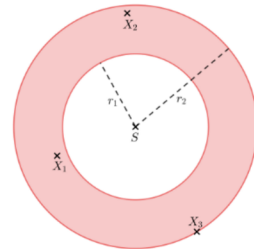


### Mezikruží



**Mezikruží** je část roviny ohraničená dvěma soustřednými kružnicemi s různými poloměry,  $k_1(S; r_1), k_2(S; r_2)$ .

**Mezikruží** je množiny všech bodů  $X$  v rovině, které mají od bodu  $S$  vzdálenost větší nebo rovnu  $r_1$  a zároveň menší nebo rovnu  $r_2$ .



16. Narýsuj množinu všech bodů podle zadání a doplň správně do prázdných míst v textu:



a) Narýsuj množinu všech bodů, které mají od bodu  $S$  vzdálenost  $20\text{ mm}$ .

Množinou těchto bodů je \_\_\_\_\_, zapíšeme  $k(S; \text{_____})$ .

$\times^S$

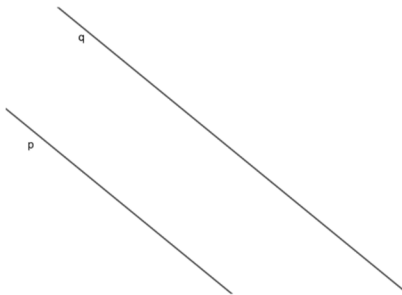
b) Narýsuj množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodů  $A$  a  $B$ .

Množinou těchto bodů je \_\_\_\_\_  $AB$ , která je \_\_\_\_\_ k úsečce  $AB$  a prochází jejím \_\_\_\_\_.

$\times^A \text{-----} \times^B$

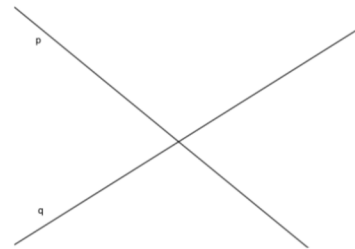
c) Narýsuj množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od rovnoběžek  $p$  a  $q$ .

Množinou těchto bodů je \_\_\_\_\_.



d) Narýsuj množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek  $p$  a  $q$ .

Množinou těchto bodů jsou navzájem kolmé \_\_\_\_\_ sevřených přímkami  $p$  a  $q$ .



e) Narýsuj množinu všech bodů, z nichž je úsečku  $AB$  vidět pod pravým úhlem.

Množinou těchto bodů je \_\_\_\_\_ sestrojená nad průměrem  $AB$ . Tuto kružnici nazýváme \_\_\_\_\_ nad průměrem, vyjma bodů  $A$  a  $B$ .

$\times^A \text{-----} \times^B$

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? \_\_\_\_\_



## Řešení konstrukční úlohy



### 1. Rozbor

- Načrtne, jak přibližně by měl útvar vypadat, a vyznačíme, co je dáno (délku stran, velikost úhlů, ...)
- Rozmyslíme, jak útvar pomocí daných prvků a znalostí o útvaru narýsujeme. Najdeme dvě množiny bodů dané vlastnosti, kterých průnikem (společným bodem) je hledaný vrchol.

### 2. Postup konstrukce

Na základě rozboru **zapišeme v několika krocích, jak budeme při konstrukci postupovat**. Postup zapisujeme pomocí symbolů.

### 3. Konstrukce

Rýsujeme podle postupu ve zvolené polorovině. Tu nám zpravidla udává přímka nebo strana.

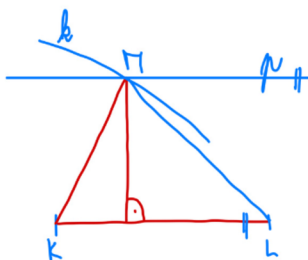
### 4. Důkaz a závěr

- Přesvědčíme se, že jsme sestrojili požadovaný útvar.
- Určíme počet řešení úlohy ve zvolené polorovině. Řešením je každý útvar, který odpovídá zadání úlohy.

17. Sestroj trojúhelník  $KLM$ ,  $m = 5\text{ cm}$ ;  $l = 6,5\text{ cm}$  a  $v = 5,2\text{ cm}$ .



### 1. Rozbor (Dopiš známé údaje)



### 2. Postup konstrukce (Seřaď postup)

- $k; k(K; 6,5\text{ cm})$
- $p; |p; KL| = 5,2\text{ cm}, p \parallel KL$
- $M; M \in p \cap k$
- $\Delta KLM$
- $KL; |KL| = 5\text{ cm}$

### 3. Konstrukce

### 4. Závěr (Kolik má konstrukce řešení?)

Kolikrát protne kružnice  $k$  přímku  $p$ ?

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

Obrázek 54 Konstrukční úlohy 5

Zdroj: vlastní zpracování

18. Sestroj trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:  $b = 4\text{ cm}$ ,  $t = 5\text{ cm}$ ,  $\alpha = 50^\circ$ .



**1. Rozbor** (Načrtni trojúhelník  $ABC$ , zvýrazni známé údaje a načrtni konstrukci)

**2. Postup konstrukce** (Seřaď postup)

- $\triangle ABC$
- $S; S \in AC, |SA| = |SC|$
- $B; B \in \rightarrow AX \cap k$
- $AC; |AC| = 4\text{ cm}$
- $k; k(S; 5\text{ cm})$
- $\sphericalangle CAX; |\sphericalangle CAX| = \alpha = 50^\circ$

**3. Konstrukce**

**4. Závěr** (Kolik má konstrukce řešení?)

19. Sestroj trojúhelník  $OPQ$ , kde  $q = 50\text{ mm}$ ,  $\pi = 45^\circ$ ,  $t = 38\text{ mm}$ .



**1. Rozbor**

**2. Postup konstrukce**

**3. Konstrukce**

**4. Závěr**

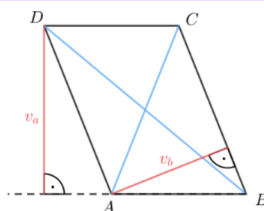
Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

Obrázek 55 Konstrukční úlohy 6

Zdroj: vlastní zpracování

### Vlastnosti rovnoběžníků

Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož **každé dvě protější strany jsou rovnoběžné**.

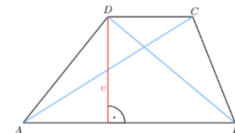


Vlastnosti:

- Každé dva protější úhly jsou shodné,
- součet velikostí vnitřních úhlů je  $360^\circ$ ,
- součet velikostí každých dvou sousedních úhlů je  $180^\circ$ ,
- úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí,
- průsečík úhlopříček je středem souměrnosti rovnoběžníku,
- výška udává vzdálenost protějších stran.

### Vlastnosti lichoběžníků

Lichoběžník je čtyřúhelník, jehož dvě strany jsou rovnoběžné a zbývající dvě různoběžné.



Rovnoběžné strany nazýváme základny, různoběžné strany ramena. **Výška udává vzdálenost základen.**

20. Sestroj kosodélník  $ABCD$ , je-li dáno  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $v = 7 \text{ cm}$ .



1. Rozbor

2. Postup konstrukce (Dokonči postup.)

1.  $BC$ ;  $|BC| = 4 \text{ cm}$
2.  $p$ ;  $p \parallel BC$ ,  $|p; BC| = 7 \text{ cm}$
3.  $k$ ;  $k(B; 5 \text{ cm})$
4.  $A$ ;  $A \in k \cap p$

3. Konstrukce

4. Závěr

21. Sestroj kosočtverec  $RSTU$ , kde  $r = 3,5 \text{ cm}$ ,  $|RT| = 3 \text{ cm}$ .



1. Rozbor

2. Postup konstrukce

3. Konstrukce

4. Závěr

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

Obrázek 56 Konstrukční úlohy 7

Zdroj: vlastní zpracování

22. Sestroj lichoběžník  $KLMN$  ( $KL \parallel MN$ ), je-li dáno  $|RS| = 5 \text{ cm}$ ,  $v = 4 \text{ cm}$ ,  $|RT| = 6 \text{ cm}$  a  $|SU| = 5,5 \text{ cm}$ .



23. Sestroj pravoúhlý lichoběžník  $OPQR$  ( $o \parallel q$ ) s pravým úhlem u vrcholu  $K$  a  $N$ , který má základny  $k = 5 \text{ cm}$  a  $m = 3 \text{ cm}$ . Výška lichoběžníku  $KLMN$  měří  $4 \text{ cm}$ .



Jak to šlo?  Co musím procvičit? .....

Obrázek 57 Konstrukční úlohy 8

Zdroj: vlastní zpracování

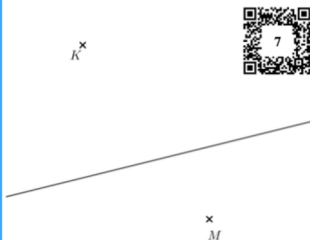
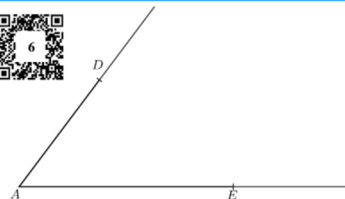
24. Vyřeš konstrukční úlohy. U každé konstrukční úlohy udělej rozbor a zapiš postup konstrukce.



- 1. Sestroj trojúhelník  $KLM$ , ve kterém  $k = 6\text{ cm}$ ;  $l = 7\text{ cm}$  a  $t_k = 5,7\text{ cm}$ .
- 2. Sestroj trojúhelník  $ABC$ , kde  $a = 25\text{ mm}$ ,  $b = 25\text{ mm}$  a  $v_a = 40\text{ mm}$ .
- 3. Sestroj trojúhelník  $IJK$ , ve kterém  $|IK| = 5\text{ cm}$ ;  $v_j = 2,5\text{ cm}$ ;  $t_j = 4,5\text{ cm}$ .
- 4. Sestroj trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno  $c = 7\text{ cm}$ ,  $t_a = 6\text{ cm}$ ,  $t_c = 4,5\text{ cm}$ .
- 5. Sestroj rovnoramenný trojúhelník  $RST$  s hlavním vrcholem  $T$ , ve kterém je  $|\triangle STR| = 120^\circ$  a výška  $v_t = 4\text{ cm}$ .
- 6. Sestroj trojúhelník  $ABC$ , ve kterém je dáno  $c = 4,5\text{ cm}$ ,  $v_c = 3,9\text{ cm}$  a poloměr  $r = 3,8\text{ cm}$  kružnice  $k$  opsané trojúhelníku  $ABC$ .
- 7. Sestroj kosodélník  $ABCD$ , ve kterém  $|AB| = 5\text{ cm}$ ;  $|AD| = 3,6\text{ cm}$ ;  $|BD| = 7\text{ cm}$ .
- 8. Sestroj lichoběžník  $ABCD$ , ve kterém  $|AB| = 11\text{ cm}$ ;  $\alpha = 60^\circ$  a  $\beta = 45^\circ$  a  $v = 2,4\text{ cm}$ .
- 9. Sestroj kosočtverec  $EFGH$ , je-li  $|FH| = 5\text{ cm}$  a vzdálenost protějších stran  $EF$  a  $GH$  se rovná  $3\text{ cm}$ .

25. Do sešitu nebo na papír přerýsuj vzorové zadání a vyřeš konstrukční úlohy. U každé konstrukční úlohy udělej rozbor a zapiš počet řešení.

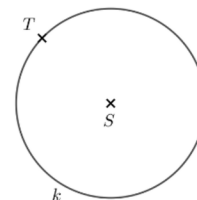
1. V rovině leží polopřímky  $AD$  a  $AE$ . Body  $A, D$  jsou vrcholy kosočtverce  $ABCD$ . Vrchol  $B$  tohoto kosočtverce leží na polopřímce  $AE$ . Sestroj a označ písmeny chybějící vrcholy  $B, C$  kosočtverce  $ABCD$  a kosočtverec narýsuj.



2. V rovině leží přímka  $p$  a mimo ni dva různé body  $K, M$ . Body  $K, M$  jsou vrcholy čtyřúhelníku  $KLMN$ , který má pravé úhly u vrcholů  $L, N$ . Úhlopříčka  $LN$  tohoto čtyřúhelníku leží na přímce  $p$ . Sestroj a označ písmeny chybějící vrcholy  $LN$  čtyřúhelníku  $KLMN$  a čtyřúhelník narýsuj.

3. V rovině leží kružnice  $k$  se středem  $S$ . Na kružnici  $k$  leží bod  $T$ , vně kružnice  $k$  leží bod  $B$ . Bod  $B$  je vrchol trojúhelníku  $ABC$ . Kružnice  $k$  je vepsána trojúhelníku  $ABC$ . Strana  $AC$  tohoto trojúhelníku se dotýká kružnice  $k$  v bodě  $T$ .

Sestroj a označ písmeny chybějící vrcholy  $A, C$  trojúhelníku  $ABC$  a trojúhelník narýsuj.



Konstrukční úlohy	Ještě potřebuji procvičit	Zvládám bez problémů
1. Pojmenuji množinu bodů s danou vlastností.		
2. Narýsuji množinu bodů s danou vlastností.		
3. Využívám matematickou symboliku pro zápis postupu konstrukce.		
4. Využívám množiny bodů daných vlastností při řešení konstrukčních úloh.		
5. Využívám množiny bodů daných vlastností při konstrukci trojúhelníku.		
6. Využívám množiny bodů daných vlastností při konstrukci čtyřúhelníku.		



Obrázek 58 Konstrukční úlohy 9

Zdroj: vlastní zpracování

### 3.9. Válec

<b>METODICKÝ LIST č.9</b>	
Téma pracovního listu	Ročník
<b>Válec</b>	<b>Osmý</b>
<b>Zařazení do RVP ZV</b>	
<i>Vzdělávací oblast:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Vzdělávací obor:</i>	Matematika a její aplikace
<i>Tematický celek:</i>	Geometrie v rovině a v prostoru
<b>Výchovně vzdělávací cíle dle RVP ZV</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Určuje a charakterizuje válec, analyzuje jeho vlastnosti.</li> <li>• Používá pojmy síť tělesa, plášť, podstava.</li> <li>• Rozpozná síť válce.</li> <li>• Vyhledá v textu úlohy potřebné údaje a vztahy.</li> </ul>	
<b>Pojmová analýza</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Nové pojmy:</b> válec, podstava válce, plášť válce</li> <li>• <b>Opěrné pojmy:</b> povrch tělesa, objem tělesa</li> </ul>	
<b>Organizační podmínky</b>	
<p>Pro efektivní zvládnutí pracovních listů na téma Válec je nutné, aby žáci měli dostatečné znalosti a porozumění týkající se těles, hranolů, kruhu a kružnic. Dále by měli být obeznámeni s různými vzorci, které umožňují výpočet obsahu rovinných útvarů, povrchu a objemu těles. V rámci materiálů jsou poskytnuty interaktivní prvky, které umožňují zobrazit situace na náčrtech. K vypracování pracovních listů by měl žák mít k dispozici zařízení s připojením k internetu a webovou kamerou nebo fotoaparátem, ideálně tablet nebo telefon. Kalkulačka bude nezbytná pro provedení výpočtů.</p> <p>Pracovní listy jsou navrženy tak, aby byly přizpůsobeny různým výukovým stylům. Jednotlivé listy jsou koncipovány tak, aby pokryly jednu vyučovací hodinu. Poslední strana každého listu obsahuje soubor slovních úloh, které se liší obtížností a které si žák může vybrat</p>	

podle svých schopností. Pro splnění výstupů stanovených v Rámcovém vzdělávacím programu je nutné splnit alespoň druhou úroveň.

V průběhu vypracovávání pracovních listů jsou žáci podněcováni k aktivnímu objevování pravidel a k diskusi nad řešením úloh. Na konci každé stránky pracovního listu je zařazeno krátké sebehodnocení, které umožňuje žákům získat zpětnou vazbu ohledně svých schopností.

Pro úspěšné vypracování pracovních listů budou žáci potřebovat různé rýsovací pomůcky, jako je kružítko, pravítko s ryskou, úhloměr a rovné pravítko.

#### Vzdělávací cíle pracovního listu

Žák:

- Popíše válec pomocí pojmů podstava, výška, plášť a odvozuje jeho vlastnosti.
- Narýsuje síť válce, načrtne válec v rovnoběžném promítání.
- Zná, chápe a používá vzorce pro výpočet povrchu válce i objemu válce.
- Upravuje vzorce pro potřeby úlohy, vyjadřuje neznámé ze vzorce.
- Vypočítá povrch i objem válce ze zadaných údajů.
- Řeší jednoduché slovní úlohy, své výsledky zdůvodňuje a diskutuje o nich.

#### Seznam QR kódů

QR kód č. 1 – Aktivita na webových stránkách GeoGebra, vlastní zpracování. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/zkysmnwy>

#### Zdroje

Učebnice a pracovní sešity použité k tvorbě cvičení:

COUFALOVÁ, Jana, Šárka PĚCHOUČKOVÁ, Jiří HEJL a kol. *Matematika: pro 8. ročník základní školy*. 3. vydání. Praha: Fortuna, 2020. ISBN 978-80-7373-142-7.

GAZÁRKOVÁ, Dana, Hana HEDBÁVNÁ, Hana LIŠKOVÁ a kol. *Texty 2021–2022 z matematiky pro žáky 9. tříd ZŠ*. Brno: Didaktis, 2020. OSBN 978-80-7358-339-2.

HOMOLA, Jakub, Blanka MATASOVÁ a Tomáš MIERVA a kol. *Hravá matematika 8: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: Taktik International, 2021. ISBN 978-80-7563-266-1.

MALÍK, Michal, Jana PRESOVÁ a Veronika ŠOLCOVÁ a kol. *Hravá matematika 8: Pracovní sešit pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 3. vydání. Praha: Taktik International, 2022. ISBN 978-80-7563-442-9.

PŮLPÁN, Zdeněk, Josef TREJBAL. *Matematika: geometrie*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2015. ISBN 978-80-7235-419-1.

TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika 8 s nadhledem*. Praha: Fraus, 2020. ISBN 978-80-7489-517-3.

#### Obrázky:

VL1: HOURDRY, René. Great Hypostyle Hall of Karnak. In: Wikimedia Commons [online]. [cit. 2023-04-1]. Dostupné z: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Temple\\_de\\_Louxor\\_68.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Temple_de_Louxor_68.jpg)

#### Informace:

Burj Khalifa. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2023-04-20]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Burj\\_Khalifa](https://en.wikipedia.org/wiki/Burj_Khalifa)

Karnak. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2023-04-20]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Karnak>



# Válec

1. Vypiš alespoň 6 předmětů ze svého okolí, v nichž můžeme najít tvar válce.

2. Přiřazuj pomocí šipek správné pojmy k částem válce:

horní podstava

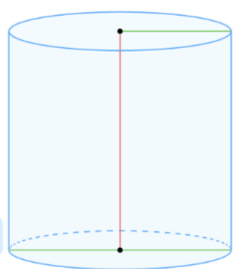
poloměr podstavy

plášť

výška válce

průměr podstavy

dolní podstava



## Nejstarší válcový sloup

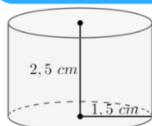
Válcové tvary jsou velmi stabilní a jsou využívány pro různé konstrukce, jako jsou sloupy, pilíře, mostní podpěry a další.

Nejstarší sloup nalezneme v Egyptě, ten stojí v chrámu boha Amona v Karnaku. Má výšku 29 metrů a váží asi 320 tun.



Obr. VL1

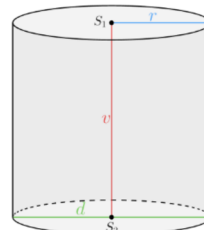
3. K válci na obrázku narýsuj jeho síť:



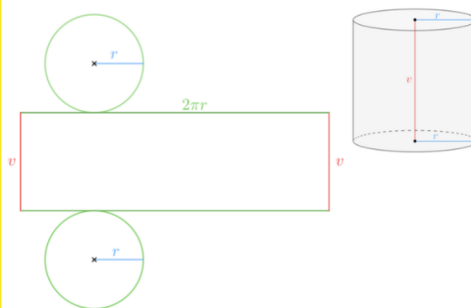
## Válec

Válec je geometrické těleso, které je tvořeno

- dvěma podstavami – dva shodné kruhy
- pláštěm – rozvinutý obdélník nebo čtverec

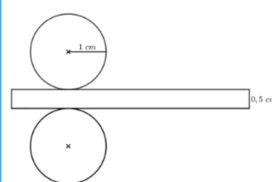


## Síť válce



Rozvinutý plášť válce je obdélník nebo čtverec, jehož jeden rozměr je rovný výšce válce a druhý obvodu podstavy válce.

4. Načrtni válec, jehož síť je na obrázku. Vyznač známé údaje.



5. Rozhodni, zda jsou tvrzení pravdivá:

- a) Válec nemá žádné hrany. ✓ ✗
- b) Rozvinutým pláštěm může být čtverec. ✓ ✗
- c) Válec nemusí mít dvě shodné podstavy. ✓ ✗
- d) Válec má dva vrcholy. ✓ ✗

Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

### Povrch válce

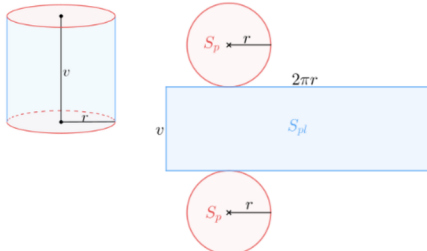


**Povrch válce** se rovná součtu obsahu pláště a dvou kruhových podstav.

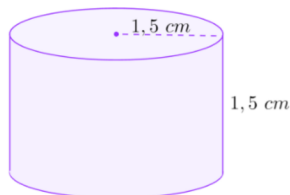
$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl} \quad S_p = \pi r^2$$

$$S = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot v \quad S_{pl} = 2\pi r \cdot v$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v)$$



6. Vypočítej povrch válce na obrázku s přesností na desetiny centimetrů čtverečních:



7. Kolik centimetrů čtverečních plechu je potřeba k výrobě konzervy ve tvaru válce s průměrem podstavy 8 cm a výškou 11 cm. Přehyby plechu nepočítáme. Načrtni válec a vyznač známé údaje.



8. Do tabulky doplň chybějící údaje o válci



	Válec č. 1	Válec č. 2	Válec č. 3
Výška válce $v$		300 mm	
Poloměr podstavy $r$	50 mm		0,02 m
Obsah podstavy $S_p$		62,8 cm <sup>2</sup>	
Délka rozvinutého pláště $\sigma_p$			
Obsah pláště $S_{pl}$	188,4 cm <sup>2</sup>		
Povrch válce $S$			113,04 cm <sup>2</sup>

9. Povrch válce je 703,36 cm<sup>2</sup>. Vypočítej výšku válce, když je poloměr podstavy roven 6 cm.



10. Máme plechový válec s průměrem 10 cm a výškou 15 cm. Pokud bychom chtěli obalit celý válec papírem, kolik bychom ho potřebovali? Kolik by to bylo papírů formátu A4 (210 x 297 mm)?



Jak to šlo? ☆☆☆☆☆

Co musím procvičit? .....

Obrázek 60 Válec 2

Zdroj: vlastní zpracování

## Objem válce

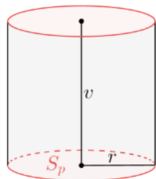


**Objem válce** se rovná součin obsahu podstavy a výšky válce.

$$V = S_p \cdot v$$

$$V = \pi r^2 \cdot v$$

$$V = \pi r^2 v$$



12. Ze vzorce pro výpočet objemu válce vyjádři

a) výšku válce  $v$

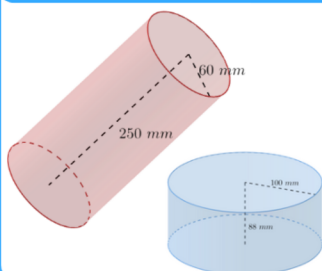
b) poloměr podstavy  $r$

11. Doplň do tabulky chybějící údaje. Zaokrouhli na dvě desetinná místa:

	Válec č. 1	Válec č. 2	Válec č. 3	Válec č. 4
Výška válce $v$	6 cm	3,98 cm	3 cm	
Poloměr podstavy $r$	4,5 cm			
Obsah podstavy $S_p$		19,63 cm <sup>2</sup>		43,92 cm <sup>2</sup>
Objem válce $V$			235,62 cm <sup>3</sup>	503,28 cm <sup>3</sup>

13. Máme nádrž ve tvaru válce s průměrem 2 m a výškou 5 m, kterou chceme naplnit vodou. Kolik m<sup>3</sup> vody budeme potřebovat?

14. Martin s Hankou porovnávají dva modely válců. Martin odhadl, že modrý válec má menší objem než červený válec. Usuzuje z toho, že modrý válec musí mít také menší povrch než červený válec. Hanka tvrdí, že tomu tak být nemusí. Kdo z nich má pravdu?



15. Jaký průměr musí mít sklenice vysoká 15 cm, aby měla objem 1 litr?

16. Burdž Chalífa v Dubaji je nejvyšší budovou na světě s výškou 828 metrů. Průměr základny budovy je 78 metrů. Kolik kubických metrů betonu bylo použito na stavbu celé budovy Burdž Chalífa, pokud se jedná o válcovou konstrukci? Předpokládejte, že výška budovy je stejná jako výška válce a že do výpočtu nepočítáme další prvky, jako jsou výtahy a další zařízení.

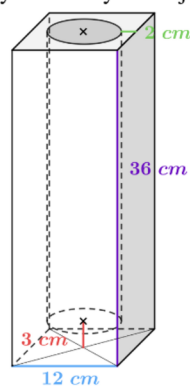
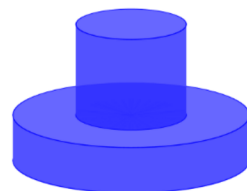
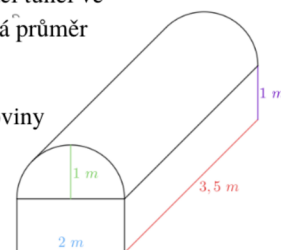
Jak to šlo? ☆☆☆☆☆ Co musím procvičit? .....

### 17. Vyřeš slovní úlohy:

### Legenda obtížností:



- 1. Vypočítej, kolik metrů krychlových hlíny je třeba vykopat při hloubení jámy tvaru válce, která má mít průměr 1,2 metru a hloubku 8 metrů.
- 2. Válcová nádrž na vodu má obvod podstavy 175 cm a je vysoká 2,5 metru. Kolik litrů vody do ní můžeme napustit?
- 3. Vypočítej hmotnost dubového špalku na štípání dřeva, je-li jeho obvod 125 centimetrů a výška 80 centimetrů. Hustota dubového dřeva je 680 kg/m<sup>3</sup>
- 4. Rodina Málcových si chce postavit bazén na zahradě. Rozhodli se, že bazén bude mít tvar válce a poloměrem 3 metry a hloubkou 2 metry. Kolik metrů krychlových vody potřebují na to, aby byl bazén naplněný 30 centimetrů od okraje.
- 5. Reklamní sloup tvaru válce je vysoký 260 cm a jeho průměr je 1,8 m. Kolik reklamní plochy nabízí tento sloup?
- 6. Paní Soudná se rozhodla, že pro svého domácího mazlíčka vyrobí prolézací tunel ve tvaru válce. Kolik m<sup>2</sup> látky je potřeba na výrobu prolézacího tunelu, který má průměr 46 cm a je 145 cm dlouhý? Na švy je potřebné připočítat o 5 % látky navíc.
- 7. Kolik m<sup>2</sup> fólie je potřeba na výrobu fóliovníku, jehož střeška má tvar poloviny pláště válce? Na dno fóliovníku se fólie nedává.
- 8. Linka vyrobí za hodinu 700 plechovek. Plechovka má dno o průměru 7,2 cm a je vysoká 8 cm.
  - a) Kolik materiálu se spotřebuje za den, jestliže linka je v provozu osm hodin a musíme počítat s 15 % materiálu navíc na spoje.
  - b) Druhá linka vyrábí papírové etikety na plechovky, které pokrývají celý plášť plechovek. Kolik m<sup>2</sup> papíru se spotřebuje na etikety plechovek, které se vyrobí za jeden den.
- 9. Vypočítej objem a povrch kovové součástky na obrázku. Spojené válce s poloměry  $r = 15$  cm a  $r = 7$  cm mají společnou osu. Výška součástky je 18 cm, přičemž výška válce s větším poloměrem představuje třetinu výšky.
- 10. Váza má tvar pravidelného čtyřbokého hranolu. Uprostřed vázy je dutá část ve tvaru válce. Dno vázy má tloušťku 3 cm. Ve válci je voda, jejíž hladina je 3 cm od horního okraje vázy. Rozměry válce jsou uvedeny v obrázku. Jaký je objem vody ve váze? Výsledek zaokrouhli na desetiny litru.



Válec	Ještě potřebuji procvičit	Zvládám bez problémů
1. Načrtnu válec a jeho síť.		
2. Rozliším, co je plášť a co je povrch válce.		
3. Vypočítám povrch válce.		
4. Vypočítám objem válce.		
5. Řeším praktické úlohy využívající vlastnosti válce.		

Obrázek 62 Válec 4  
Zdroj: vlastní zpracování

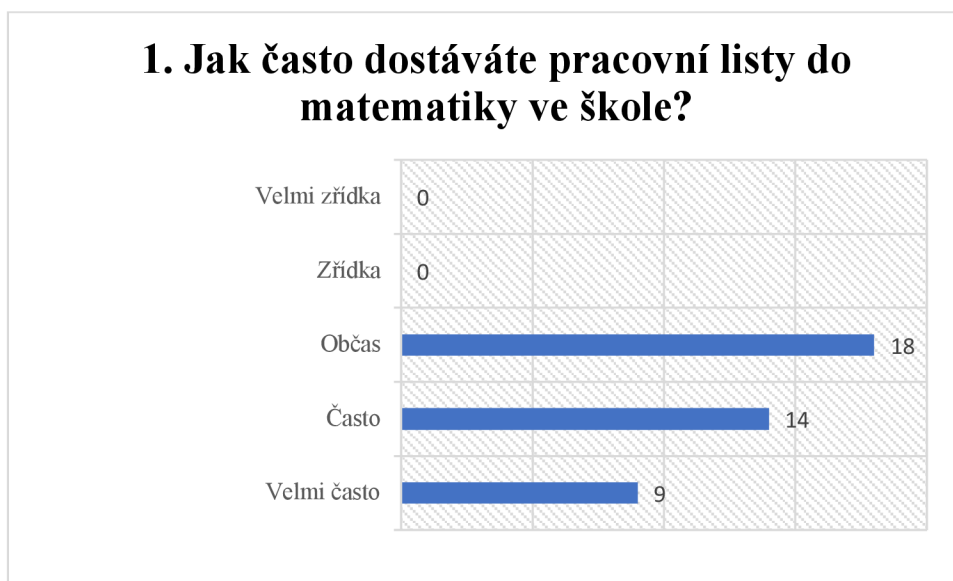
## 4. Orientační výzkum

Orientační výzkum byl zaměřen na posouzení vhodnosti, efektivity a kvality pracovních listů určených k výuce tématech matematiky z osmého ročníku základní školy. Výzkum byl proveden formou anonymního dotazníkového šetření u žáků Základní školy T. G. Masaryka v Čejkovicích. Celkem se výzkumu zúčastnilo 41 žáků osmého ročníku, kteří pracovali samostatně s pracovními listy a měli k dispozici mobilní telefony k vyfotografování QR kódů. V hodině byl přítomen učitel, který případně odpovídal na otázky ohledně zadání.

Cílem orientačního výzkumu bylo získat zpětnou vazbu od respondentů ohledně používání pracovních listů ve výuce matematiky, zhodnotit vhodnost pracovních listů jako výukového nástroje, vyjádřit preference a postřehy ohledně struktury pracovních listů, včetně použití interaktivních prvků formou QR kódů. Všechny otázky byly zaměřeny na subjektivní hodnocení každého žáka, který s pracovními listy pracoval.

Dotazník se skládal z celkem patnácti otázek, kde čtrnáct bylo uzavřených s jednou možností odpovědi a jedna otázka s více možnými odpověďmi. Vyplněné dotazníky byly zpracovány a vyhodnoceny formou grafů, které byly doplněny krátkými komentáři.

#### 4.1. Výsledky orientačního výzkumného šetření

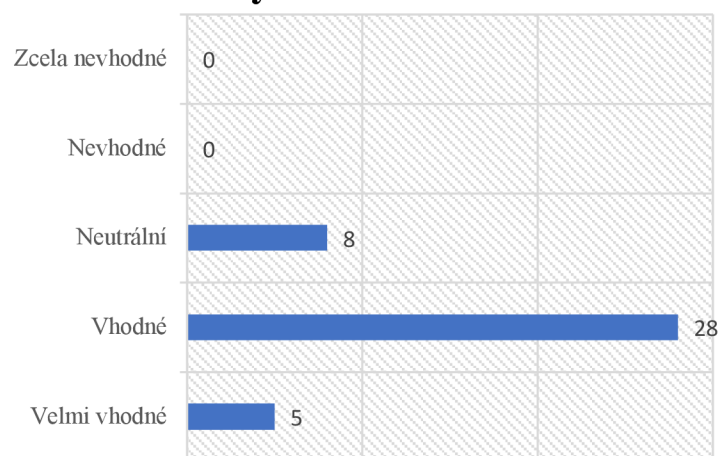


*Graf 1 Jak často dostáváte pracovní listy do matematiky ve škole*

*Zdroj: vlastní zpracování*

Výsledky naznačují, že žáci dostávají pracovní list v matematice, a to velmi často. Pouze menší počet respondentů uvedl, že dostávají pracovní listy občas. Žádný z respondentů nevedl, že dostává pracovní listy do matematiky ve škole zřídka nebo velmi zřídka.

## 2. Jsou podle Vás pracovní listy vhodným nástrojem pro zlepšení Vašich matematických dovedností?

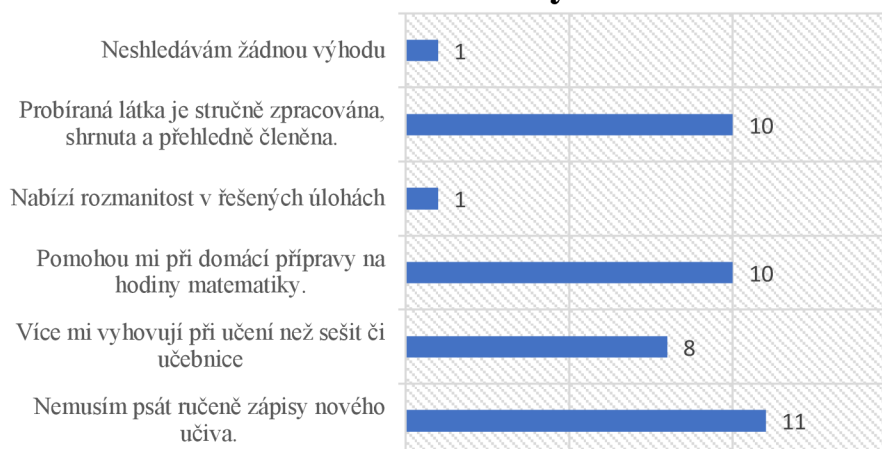


Graf 2 Jsou podle Vás pracovní listy vhodným nástrojem pro zlepšení Vašich matematických dovedností?

Zdroj: vlastní zpracování

Naprostá většina žáků odpovídá, že pracovní listy jsou vhodným nástrojem pro zlepšení matematických dovedností. Osm žáků vybralo odpověď neutrální, a tedy si není jistá.

### 3. Z jakých důvodů je pro Vás obecně vhodné využívat pracovní listy ve výuce matematiky?



Graf 3 Z jakých důvodů je pro Vás obecně vhodné využívat pracovní listy ve výuce matematiky?

Zdroj: vlastní zpracování

Žáci se téměř shodují v odpovědích, že pracovní listy nabízejí stručně shrnutou látku, pomáhají při domácí přípravě a dovolují upustit od nutnosti psát si zápisy teorie ručně do sešitu. Jeden žák odpověděl, že neshledává žádnou výhodu. Stejný počet žáků odpověděl, že nabízí rozmanitost v řešených úlohách. Tyto výsledky se shodují s výsledky minulé otázky, že většina žáků nachází v pracovních listech spíše výhody.



#### 4. Z jakých důvodů je pro Vás obecně nevhodné používat pracovní listy ve výuce matematiky?

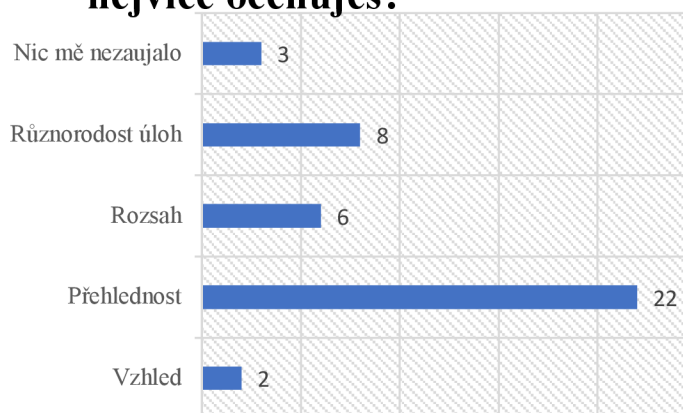


Graf 4 Z jakých důvodů je pro Vás obecně nevhodné používat pracovní listy ve výuce matematiky?

Zdroj: vlastní zpracování

Nejvíce žáků odpovídá, že nenachází nevýhody použití pracovních listů, ovšem druhá polovina žáků uznává, že někdy mají problém se správným řešením úloh. To může znamenat, že zadání úloh je příliš náročné nebo špatně formulované.

### 5. Co Vás na vytvořených pracovních listech nejvíce zaujalo a co na nich nejvíce oceňujete?

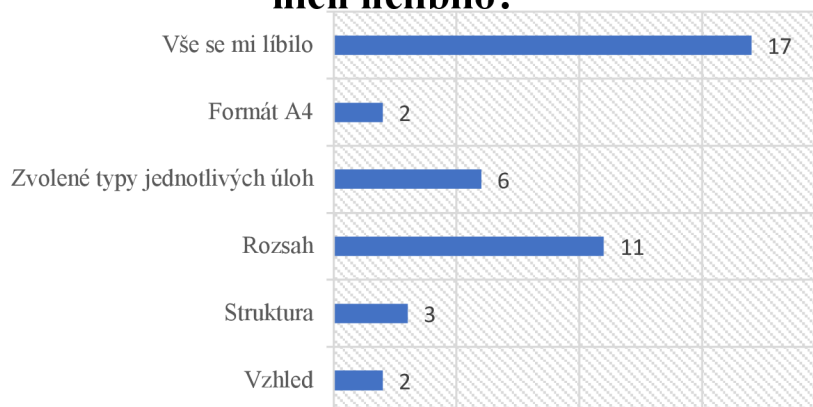


Graf 5 Co Vás na vytvořených pracovních listech nejvíce zaujalo a co na nich nejvíce oceňujete?

Zdroj: vlastní zpracování

V naprosté většině žáci odpovídají, že je nejvíce zaujala přehlednost materiálů. Tyto výsledky navazují na třetí otázku v dotazníku, kde vyzdvihovali právě přehlednost pracovních listů. Podle výsledků žáci nejméně oceňují vzhled pracovních listů. Nesmíme opomenout tři žáky, které na pracovních listech nic nezaujalo.

## 6. Co Vás na vytvořených pracovních listech naopak nezaujalo, co se Vám na nich nelíbilo?

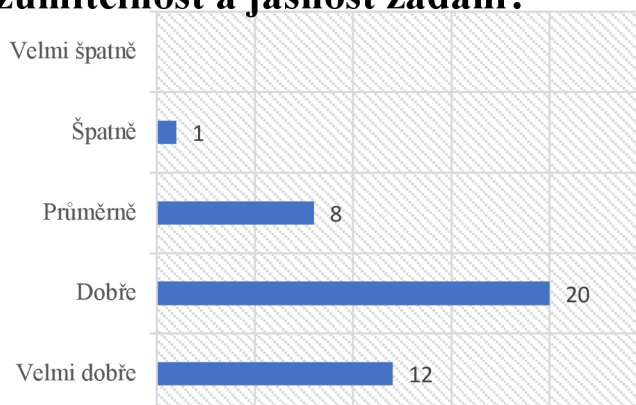


Graf 6 Co Vás na vytvořených pracovních listech naopak nezaujalo, co se Vám na nich nelíbilo?

Zdroj: vlastní zpracování

Nejvíce se žákům nelíbil rozsah pracovních listů, tedy že v tématech bylo mnoho cvičení. Celkem šesti žákům se nelíbily zvolené typy jednotlivých úloh. Z výsledků je ale patrné, že velká část žáků odpověděla, že se jim vše líbilo.

## 7. Jak byste hodnotil/a kvalitu zpracování pracovních listů, pokud jde o srozumitelnost a jasnost zadání?

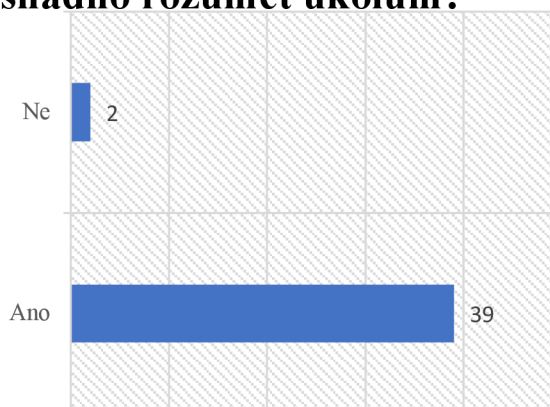


Graf 7 Jak byste hodnotil/a kvalitu zpracování pracovních listů, pokud jde o srozumitelnost a jasnost zadání?

Zdroj: vlastní zpracování

Většina žáků odpověděla na otázku dobře či velmi dobře, tedy zadání úloh bylo srozumitelné a jasné. Pokud porovnáme tyto výsledky s výsledky u čtvrté otázky, můžeme usoudit, že příčinou strachu ze špatně vyřešeného zadání může být náročnost úloh.

### 8. Jsou pracovní listy dostatečně strukturované a organizované, aby Vám umožnily snadno rozumět úkolům?

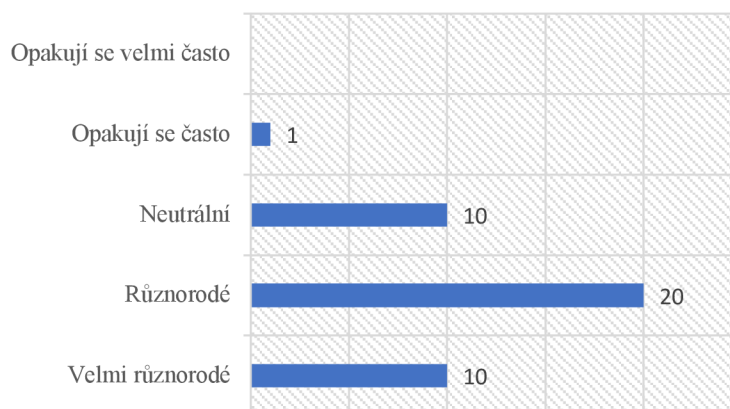


Graf 8 Jsou pracovní listy dostatečně strukturované a organizované, aby Vám umožnily snadno rozumět úkolům?

Zdroj: vlastní zpracování

Naprostá většina žáků odpověděla kladně, a tedy se nám potvrzuje závěr z předchozí otázky. Pokud by někdy nastala revize pracovních listů, je nutné zařadit více snadných úloh a až poté zvyšovat obtížnost a komplexnost úloh.

## 9. Jsou úlohy dostatečně různorodé nebo se opakují?

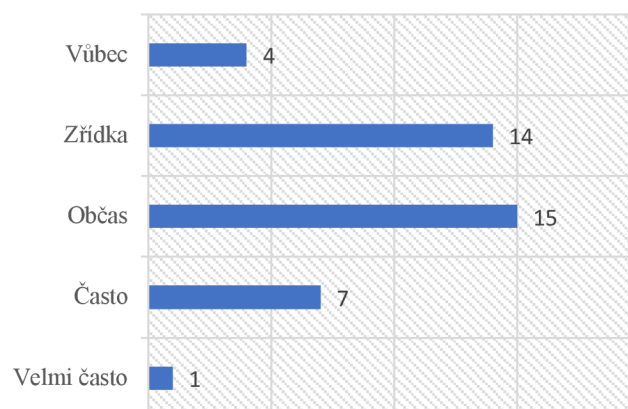


Graf 9 Jsou úlohy dostatečně různorodé nebo se opakují?

Zdroj: vlastní zpracování

Zatímco někteří účastníci považují úlohy za velmi různorodé, 20 respondentů je má pouze za různorodé a dalších 10 se k tomuto staví neutrálně. Na druhé straně, jedna osoba z našeho souboru poznamenala, že se úlohy často opakují. Je tedy nutné pracovat na další rozmanitosti a přizpůsobení úloh potřebám a schopnostem studentů.

## 10. Jak často se Vám stalo, že ses doptal/a učitele na vysvětlení úkolů?

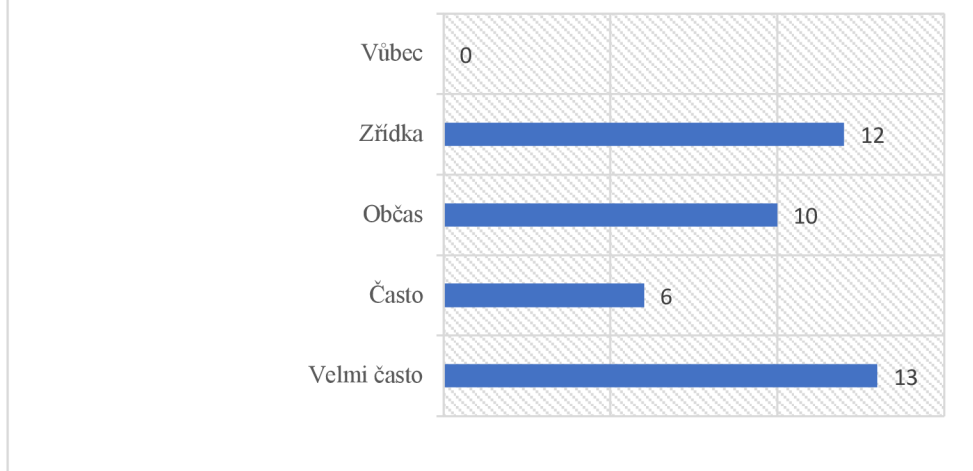


*Graf 10 Jak často se Vám stalo, že ses doptal/a učitele na vysvětlení úkolů?*

*Zdroj: vlastní zpracování*

Výsledky ukazují, že velká část respondentů se občas nebo často dostává do situace, kdy potřebuje vysvětlení úkolů od učitele. Pouze malé procento dotázaných odpovědělo, že se tak nestalo velmi často či vůbec. Opět se nám potvrzuje několikrát opakovaný závěr, že mnoho studentů potřebuje více podpory a vysvětlení během výuky, aby byli schopni úspěšně dokončit své úkoly.

## 11. Jak často jste využili QR kódy na pracovní listech?



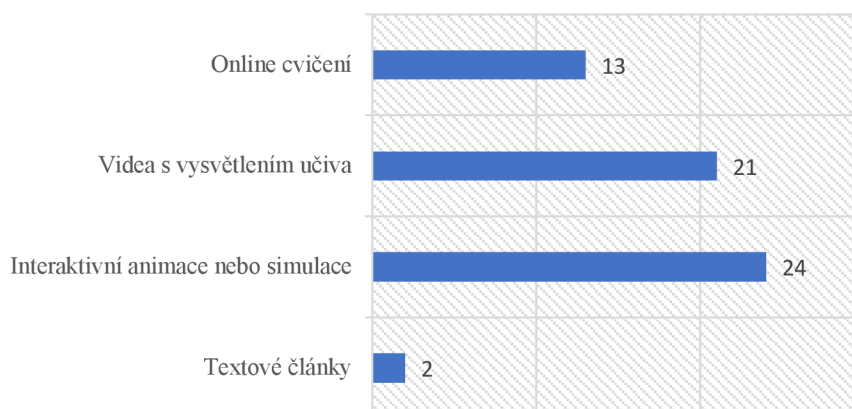
Graf 11 Jak často jste využili QR kódy na pracovních listech?

Zdroj: vlastní zpracování

Použití QR kódů na pracovních listech není příliš časté. Pouze 13 respondentů odpovědělo, že je využívá velmi často a 6 respondentů uvádí, že je využívá často. Oproti tomu 12 respondentů uvedlo, že QR kódy na pracovních listech využívají zřídka. Tato data naznačují, že QR kódy příliš nezaujaly a neměli tak očekávanou potřebu využít QR kódy k rozšíření znalostí učiva.



## 12. Jaký materiál, na který odkazovali QR kódy, Vás nejvíce zaujal?

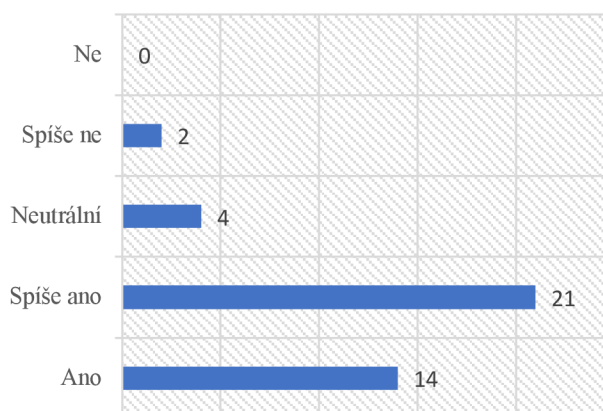


Graf 12 Jaký materiál, na který odkazovali QR kódy, Vás nejvíce zaujal?

Zdroj: vlastní zpracování

Tyto výsledky nám potvrzují mnohé odborné články a tedy, že interaktivní prvky ve výuce své místo mají a pro žáky nabízejí nový zajímavý a zároveň efektivní způsob, jak se učit nové věci. Nejvíce žáků vybralo odpověď interaktivní animace nebo simulace, na druhém místě celkem 21 žáků vybralo videa s vysvětlením učiva. Nejméně hlasů dostala možnost textové články.

### 13. Máte pocit, že jste díky interaktivním materiálům lépe porozuměli učivu?



Graf 13 Máte pocit, že jste díky interaktivním materiálům lépe porozuměli učivu?

Zdroj: vlastní zpracování

Většina respondentů, konkrétně 35 z 41, má pocit, že díky interaktivním materiálům lépe porozuměla učivu. Pouze 6 respondentů se k tomuto tvrzení staví spíše negativně či negativně. Mezi neutrálními respondenty jsou 4 lidé. Výsledky nám potvrzují závěr z minulé otázky, tedy interaktivní materiály mají pozitivní účinek na žáky a díky nim žáci lépe chápou učivo.

### 14. Ocenili byste, pokud by se tento způsob interaktivních prvků používal v pracovních listech častěji?

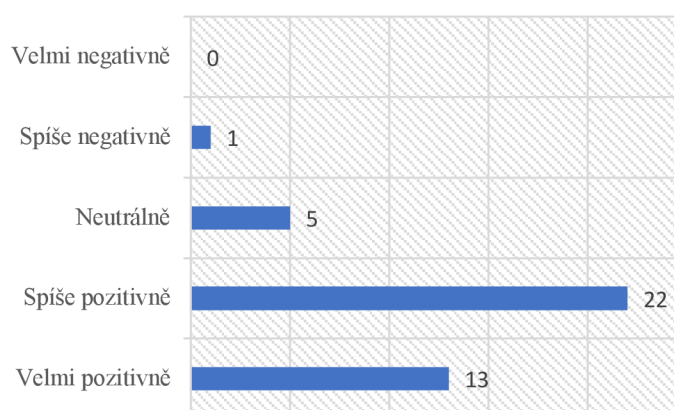


Graf 14 Ocenili byste, pokud by se tento způsob interaktivních prvků používal v pracovních listech častěji?

Zdroj: vlastní zpracování

Většina žáků by velmi ocenila, kdyby se interaktivní prvky používaly v pracovních listech častěji. Osmnáct žáků vyjádřilo spíše pozitivní názor na tento způsob práce a pouze 2 žáci měli spíše negativní názor.

## 15. Jak byste celkově zhodnotila zpracování pracovních listů?



Graf 15 Jak byste celkově zhodnotil/a zpracování pracovních listů?

Zdroj: vlastní zpracování

Podle výsledků dotazníkového šetření je celkové hodnocení zpracování pracovních listů spíše pozitivní a velmi pozitivní, což naznačuje, že většina žáků byla s těmito materiály spokojena. Přesto existují i někteří žáci, kteří mají neutrální nebo spíše negativní názor na zpracování pracovních listů. Tyto výsledky by mohly naznačovat, že by bylo vhodné zlepšit určité aspekty práce s těmito materiály, aby více vyhovovaly všem studentům.

## Závěr

Cílem této diplomové práce byla tvorba pracovních listů s aktivizačními prvky, které by měly žákům usnadnit porozumění učivu a zlepšit jejich motivaci a pozitivní vztah k matematice. Pracovní listy měly být strukturované, přehledné a co nejvíce přizpůsobené potřebám a schopnostem studentům.

Práce je strukturovaná do čtyř velkých kapitol. První kapitola se věnuje zařazení matematiky do kurikulárních dokumentů a vytyčení výchovně-vzdělávacích cílů jednotlivých tematických celků. Jednotlivé cíle jsou poté základním kamenem vytváření výstupů pro jednotlivé pracovní listy. V druhé kapitole představuje konstruktivistické pojetí výuky, aktivizační a interaktivní metody. Zde jsou také zmíněny online nástroje pro interaktivní výuku, kterou jsou poté použity při tvorbě interaktivních prvků v pracovních listech.

Samotné vypracované tematické celky jsou ve třetí části diplomové práce. Každý tematický celek má vypracovaný metodický list, který obsahuje zařazení do vzdělávací oblasti, seznam výchovně vzdělávacích cílů podle RVP ZV, pojmovou analýzu a organizační podmínky. Také obsahuje seznam učebnic a pracovních listů, které byly inspirací, a seznam QR kódů s příslušnými odkazy. Každé téma je poté zpracováno jako soubor pracovních listů, jejichž témata jsou Druhá mocnina a odmocnina, Mocnina s přirozeným mocnitelem, Pythagorova věta, Výrazy, Rovnice, Základy statistiky, Kruh a kružnice, Konstrukční úlohy a Válec. Jak už bylo zmíněno, v pracovních listech byly zařazeny také QR kódy, díky kterým se mohli žáci jednoduše dostat na vytvořená interaktivní cvičení i přes mobilní telefon.

Závěrem práce je také zhodnocení orientačního výzkumu mezi žáky, kteří s pracovními listy pracovali a využili všechny jejich možnosti. Odpovědi se shodují v tom, že pracovní listy splnily všechny vytyčené cíle.

Výsledky výzkumu ale nebyly pouze pozitivní a žáci upozornili na některé nedostatky, na kterých by se mohlo dále pracovat a provést alespoň nějakou revizi a úpravu materiálů. Na tuto diplomovou práci se také dá navázat upravením pracovních listů k využití na interaktivní tabuli, vytvoření banky aktivizačních her a dalších interaktivních prvků. Ovšem již v tento moment je možné využít všechny materiály, které tato práce nabízí, k výuce matematiky. Tyto metody budou jistě přínos jak pedagogům, tak studentům, pomohou k lepšímu porozumění matematice a zlepšení jejich výkonu.

## Seznam použitých zdrojů

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika Aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-684-0.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika Geometrie: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-684-0.

COUFALOVÁ, Jana, Šárka PĚCHOUČKOVÁ, Jiří HEJL a kol. *Matematika: pro 8. ročník základní školy*. 3. vydání. Praha: Fortuna, 2020. ISBN 978-80-7373-142-7.

GAZÁRKOVÁ, Dana, Hana HEDBÁVNÁ, Hana LIŠKOVÁ a kol. *Testy 2021–2022 z matematiky pro žáky 9. tříd ZŠ*. Brno: Didaktis, 2020. OSBN 978-80-7358-339-2.

GINNIS, Paul. Efektivní výukové nástroje pro učitele: strategie pro zvýšení úspěšnosti každého žáka. Ilustroval Les EVANS. [Praha]: Čtení pomáhá, [2017], xxiii, ISBN 978-80-906082-6-9.

GRECMANOVÁ, Helena a Eva URBANOVSKÁ. Aktivizační metody ve výuce, prostředek ŠVP. Olomouc: Hanex, 2007. ISBN 978-80-85783-73-5.

HEJNÝ, Milan a František KURĚNA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Třetí vydání. Praha: Portál, 2015, 232 s. Pedagogická praxe. ISBN 978-80-262-0901-0.

HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa VONDROVÁ, ed. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

JUŠKEVIČ, A. P. Dějiny matematiky ve středověku. Praha: Academia, 1977. 434 s. ISBN 978-80-200-0131-6. str. 266-267

KAFKOVÁ, Marika. *Interaktivní metody ve výuce matematiky*. Brno, 2010. Disertační práce. Masarykova univerzita.

KLEMENT, Milan, DOSTÁL, Jiří a KLEMENT, Jiří. *Metody realizace a hodnocení interaktivní výuky*. 2. vydání. Olomouc, 2014. ISBN 978-80-87658-21-5.

LAUBEOVÁ, Alena, Blanka MATASOVÁ a Tomáš MIERVA a kol. *Hravá matematika 8: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: Taktik International, 2021. ISBN 978-80-7563-265-4.

MALÍK, Michal, Jana PRESOVÁ a Veronika ŠOLCOVÁ a kol. *Hravá matematika 8: Pracovní sešit pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 3. vydání. Praha: Taktik International, 2022. ISBN 978-80-7563-442-9.

PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, 2009. 147 s. svazek číslo 114. ISBN 978-80-210-4834-8.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Josef TREJBAL. *Matematika: algebra*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2015. ISBN 978-80-7235-419-1.

SITNÁ, Dagmar. *Metody aktivního vyučování: spolupráce žáků ve skupinkách*. Vyd. 2. Praha: Portál, c2013, 150 s. ISBN 978-80-262-0404-6.

ŠOLCOVÁ, A. *Kapitoly z historie matematiky a informatiky*. Praha: Česká technika – nakladatelství ČVUT v Praze, 2017. ISBN 978-80-01-06092-6.

TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika 8 s nadhledem*. Praha: Fraus, 2020. ISBN 978-80-7489-517-3.

BĚLOUN, František, Ivan BUŠEK a Vlastimil MACHÁČEK. *Sbírka úloh z matematiky: pro základní školu*. 8. vydání. Praha: "B" Print, 2004. ISBN 80-7196-104-3.

KRUPKA, Peter. *Sbírka úloh z matematiky: pro 2. stupeň základních škol a nižší ročníky víceletých gymnázií, 1. díl*. 3. vydání. Havlíčkův brod: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-188-5.

## Elektronické zdroje

About. *Brilliant* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://brilliant.org/about>

Burj Khalifa. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2023-04-20]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Burj\\_Khalifa](https://en.wikipedia.org/wiki/Burj_Khalifa)

Co je GeoGebra?. *GeoGebra* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/about>

Doporučené učební osnovy předmětů ČJL, AJ a M pro základní školu [online]. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2011 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <http://www.vuppraha.rvp.cz/wp-content/uploads/2011/03/Doporučene-ucebni-osnovy-predmetu-CJL-AJ-a-M-pro-zakladni-skolu.pdf>

Karnak. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2023-04-20]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Karnak>

KRÁLOVÁ, Magda. François Viète. *Techmania: Science Center* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1354/viete>

LEPIL, Oldřich. *Teorie a praxe tvorby výukových materiálů* [online]. Olomouc, 2010 [cit. 2022-03-12]. ISBN 987-80-244-2489-7. Dostupné z: <http://zvyp.upol.cz/publikace/lepil.pdf>

*Matematická gramotnost ve výuce: Metodická příručka* [online]. Praha: NÚV, 2011 [cit. 2022-03-12]. ISBN 978-80-87000-97-7. Dostupné z: [https://www.nuv.cz/uploads/Publikace/vup/matematickagramotnost\\_final.pdf](https://www.nuv.cz/uploads/Publikace/vup/matematickagramotnost_final.pdf)

MOLNÁR, Josef, Slavomíra SCHUBERTOVÁ a Vladimír VANĚK. *Konstruktivismus ve vyučování matematice* [online]. Olomouc, 2007 [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: [http://esfmoduly.upol.cz/texty/konstr\\_m.pdf](http://esfmoduly.upol.cz/texty/konstr_m.pdf)

PISKÁČ, Václav. Tabulka mocnin a odmocnin [online]. Fyzikální šuplík. [cit. 2023-04-01] Dostupné z: [https://fyzikalnisuplik.websnadno.cz/matematika/tabulka\\_mocnin\\_odmocnin.pdf](https://fyzikalnisuplik.websnadno.cz/matematika/tabulka_mocnin_odmocnin.pdf)

One Man, One Computer, 10 Million Students: How Khan Academy is Reinventing Education. *Forbes* [online]. 2.listopadu 2012 n. 1. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.forbes.com/sites/michaelnoer/2012/11/02/one-man-one-computer-10-million-students-how-khan-academy-is-reinventing-education/?sh=48e5f6a444e0>



POLÁK, Josef. Didaktika matematiky v 21. století a realita výuky. *Matematika-Fyzika-Informatika* [online]. 2020, **29**(4), 256-276 [cit. 2022-03-12]. ISSN 1805-7705. Dostupné z: [https://mfi.upol.cz/files/29/2904/mfi\\_2904\\_256\\_276.pdf](https://mfi.upol.cz/files/29/2904/mfi_2904_256_276.pdf)

POLEJOVÁ, Pavla. *Badatelsky orientovaná výuka matematiky na 2. stupni ZŠ* [online]. Olomouc, 2017 [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: [https://theses.cz/id/8xysi7/Polejova-diplomova\\_prace.pdf](https://theses.cz/id/8xysi7/Polejova-diplomova_prace.pdf). Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Vedoucí práce Mgr. David Nocar, Ph.D.

Popis. *Khan Academy* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://cs.khanacademy.org/about>

Pythagorejská čísla a pythagorejské trojice. *Matematika.cz* [online]. Nová média, 2022 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.matematika.cz/pythagorejska-cisla-a-pythagorejske-trojice/>

*Rámcový vzdělávací program základního vzdělávání* [online]. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2010, s. 29-30 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.msmt.cz/file/21592>

*Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, 2021 [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: <https://www.nuv.cz/file/4984/>

RENDL, Miroslav. O konstruktivismu ve vyučování matematiky. *Pedagogika* [online]. Praha, 2008, **2008**(2), 167-203 [cit. 2022-03-12]. ISSN 2336-2189. Dostupné z: <https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=1144%20title=>

RŮŽIČKA, Marek. *Aktivizační metody ve výuce* [online]. Brno, 2011 [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/cbifn/bakalarska\\_prace.pdf](https://is.muni.cz/th/cbifn/bakalarska_prace.pdf). Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce Ing. Pavla Stejskalová.

Standardy pro základní vzdělávání: Matematika a její aplikace [online]. Praha: Národní pedagogický institut České republiky, 2013 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=67490&view=9832>

STEHLÍKOVÁ, Nad'a a Jana CACHOVÁ. *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe* [online]. JČMF, 2006 [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: <https://docplayer.cz/30005578-Konstruktivisticke-pristupy-k-vyucovani-a-praxe.html>

*Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+* [online]. Praha: MŠMT, 2020 [cit. 2022-03-12]. ISBN 978-80-87601-47-1. Dostupné z: [https://www.msmt.cz/uploads/Brozura\\_S2030\\_online\\_CZ.pdf](https://www.msmt.cz/uploads/Brozura_S2030_online_CZ.pdf)

ZORMANOVÁ, Lucie. *Výukové metody v pedagogice: [s praktickými ukázkami]*. Praha: Grada, 2012, 155 s. Pedagogika. ISBN 978-80-247-4100-0.

*Umíme to* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.umimeto.org>

## Videa

00000000130. Pythagorean theorem water demo. In: *Youtube* [online]. 14.4.2009 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=CAkMUdeB06o>

AsapSCIENCE. The Pi Song (Memorise 100 Digits Of  $\pi$ ) | SCIENCE SONGS. In: *YouTube*. [online]. 27.9.2018 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=3HRkKznJoZA>

Beau Janzen. Pythagorea Theorem: Six Proofs. In: *Youtube* [online]. 13.9.2014 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=COkhrDbNcuA>

Dylan Peters EDU. Exponents Song (All About that Base). In: *YouTube* [online]. 7.12.2015 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=5w5zPSEwvqw>

Mathantics. Mean, Median and Mode. In: *YouTube*. [online] 4.3.2017. [cit. 2023-04-01] Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=B1HEzNTGeZ4>

MathVisualProofs. What's the difference of two squares? In: *YouTube* [online]. 16.2.2023 [2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/shorts/n1ULL27cxHk>

Techquicke. Binary Numbers and Base Systems as Fast as Possible. In: *Youtube* [online] 15.6.2014 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=LpuPe81bc2w>

TED-Ed. How many ways are there to prove the Pythagoren theorem? In: *YouTube* [online]. 11.9.2017 [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=YompsDIEdtc&t>

## Obrázky

Čučka, Michal. Pythagorova věta a její důkazy: *diplomová práce*. Brno: Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra pedagogiky, 2007. Vedoucí diplomové práce PhDr. Pavlína Račková.

HOURDRY, René. Great Hypostyle Hall of Karnak. In: Wikimedia Commons [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Temple\\_de\\_Louxor\\_68.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Temple_de_Louxor_68.jpg)

NASA ADMINISTRATOR. Apollo 11 Commander Neil Armstrong working at an equipment storage area on the lunar module. This is one of the few photos that show Armstrong during the moonwalk. Click image to enlarge. [online]. NASA, 20.7.2021. [cit. 2023-04-01] Dostupné z: [https://www.nasa.gov/mission\\_pages/apollo/apollo11.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/apollo/apollo11.html)

Nefritový kruh. In: *TravelMagazin* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://magazin.travelportal.cz/tag/cinska-mince/>

Rhindův papyrus. In: *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/print/1403-egypt>

Rosales, Oscar & De Hoyos Martínez, Jesús. (2012). The foundational myth of the city: A vision from the Sacred Geometry. 4. 90-109.

The Five-hundred-metre Aperture Spherical Telescope. In: *AstronomyNow* [online]. [cit. 2023-04-01]. Dostupné z: <https://astronomynow.com/2016/09/26/australian-technology-runs-worlds-largest-single-dish-radio-telescope-in-china/>

## Seznam zkratk

AJ	anglický jazyk
ČJL	český jazyk a literatura
ČR	Česká republika
M	matematika
MŠMT	Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
RVP	Rámcový vzdělávací program
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program základního vzdělávání
ZŠ	základní škola

# Seznam obrázků a grafů

## 1. Seznam obrázků

Obrázek 1 Druhá mocnina a odmocnina 1.....	28
Obrázek 2 Druhá mocnina a odmocnina 2.....	29
Obrázek 3 Druhá mocnina a odmocnina 3.....	30
Obrázek 4 Druhá mocnina a odmocnina 4.....	31
Obrázek 5 Druhá mocnina a odmocnina 5.....	32
Obrázek 6 Druhá mocnina a odmocnina 6.....	33
Obrázek 7 Mocnina s přirozeným mocnitelem 1.....	37
Obrázek 8 Mocnina s přirozeným mocnitelem 2.....	38
Obrázek 9 Mocnina s přirozeným mocnitelem 3.....	39
Obrázek 10 Mocnina s přirozeným mocnitelem 4.....	40
Obrázek 11 Mocnina s přirozeným mocnitelem 5.....	41
Obrázek 12 Pythagorova věta 1.....	45
Obrázek 13 Pythagorova věta 2.....	46
Obrázek 14 Pythagorova věta 3.....	47
Obrázek 15 Pythagorova věta 4.....	48
Obrázek 16 Výrazy 1.....	53
Obrázek 17 Výrazy 2.....	54
Obrázek 18 Výrazy 3.....	55
Obrázek 19 Výrazy 4.....	56
Obrázek 20 Výrazy 5.....	57
Obrázek 21 Výrazy 6.....	58
Obrázek 22 Výrazy 7.....	59
Obrázek 23 Výrazy 8.....	60
Obrázek 24 Výrazy 9.....	61
Obrázek 25 Výrazy 10.....	62
Obrázek 26 Výrazy 11.....	63
Obrázek 27 Lineární rovnice 1.....	68
Obrázek 28 Lineární rovnice 2.....	69
Obrázek 29 Lineární rovnice 3.....	70
Obrázek 30 Lineární rovnice 4.....	71
Obrázek 31 Lineární rovnice 5.....	72

Obrázek 32 Lineární rovnice 6 .....	73
Obrázek 33 Lineární rovnice 7 .....	74
Obrázek 34 Lineární rovnice 8 .....	75
Obrázek 35 Lineární rovnice 9 .....	76
Obrázek 36 Základy statistiky 1 .....	80
Obrázek 37 Základy statistiky 2 .....	81
Obrázek 38 Základy statistiky 3 .....	82
Obrázek 39 Základy statistiky 4 .....	83
Obrázek 40 Kruh a kružnice 1 .....	88
Obrázek 41 Kruh a kružnice 2 .....	89
Obrázek 42 Kruh a kružnice 3 .....	90
Obrázek 43 Kruh a kružnice 4 .....	91
Obrázek 44 Kruh a kružnice 5 .....	92
Obrázek 45 Kruh a kružnice 6 .....	93
Obrázek 46 Kruh a kružnice 7 .....	94
Obrázek 47 Kruh a kružnice 8 .....	95
Obrázek 48 Kruh a kružnice 9 .....	96
Obrázek 49 Kruh a kružnice 10 .....	97
Obrázek 50 Konstrukční úlohy 1 .....	101
Obrázek 51 Konstrukční úlohy 2 .....	102
Obrázek 52 Konstrukční úlohy 3 .....	103
Obrázek 53 Konstrukční úlohy 4 .....	104
Obrázek 54 Konstrukční úlohy 5 .....	105
Obrázek 55 Konstrukční úlohy 6 .....	106
Obrázek 56 Konstrukční úlohy 7 .....	107
Obrázek 57 Konstrukční úlohy 8 .....	108
Obrázek 58 Konstrukční úlohy 9 .....	109
Obrázek 59 Válec 1 .....	113
Obrázek 60 Válec 2 .....	114
Obrázek 61 Válec 3 .....	115
Obrázek 62 Válec 4 .....	116

## **2. Seznam grafů**

Graf 1 Jak často dostáváte pracovní listy do matematiky ve škole .....	118
Graf 2 Jsou podle Vás pracovní listy vhodným nástrojem pro zlepšení Vašich matematických dovedností? .....	119
Graf 3 Z jakých důvodů je pro Vás obecně vhodné využívat pracovní listy ve výuce matematiky? .....	120
Graf 4 Z jakých důvodů je pro Vás obecně nevýhodné používat pracovní listy ve výuce matematiky? .....	121
Graf 5 Co Vás na vytvořených pracovních listech nejvíce zaujalo a co na nich nejvíce oceňujete? .....	122
Graf 6 Co Vás na vytvořených pracovních listech naopak nezaujalo, co se Vám na nich nelíbilo? .....	123
Graf 7 Jak byste hodnotil/a kvalitu zpracování pracovních listů, pokud jde o srozumitelnost a jasnost zadání? .....	124
Graf 8 Jsou pracovní listy dostatečně strukturované a organizované, aby Vám umožnily snadno rozumět úkolům? .....	125
Graf 9 Jsou úlohy dostatečně různorodé nebo se opakují? .....	126
Graf 10 Jak často se Vám stalo, že ses doptal/a učitele na vysvětlení úkolů? .....	127
Graf 11 Jak často jste využili QR kódy na pracovních listech? .....	128
Graf 12 Jaký materiál, na který odkazovali QR kódy, Vás nejvíce zaujal? .....	129
Graf 13 Máte pocit, že jste díky interaktivním materiálům lépe porozuměli učivu? ...	130
Graf 14 Ocenili byste, pokud by se tento způsob interaktivních prvků používal v pracovních listech častěji? .....	131
Graf 15 Jak byste celkově zhodnotil/a zpracování pracovních listů? .....	132



## **Seznam příloh**

1. Dotazník

# Přílohy

## 1. Dotazník

1. Jak často dostáváte pracovní listy do matematiky ve škole?

- a) Velmi zřídka
- b) Zřídka
- c) Občas
- d) Často
- e) Velmi často

2. Jsou podle Vás pracovní listy vhodným nástrojem pro zlepšení Vašich matematických dovedností?

- a) Zcela nevhodné
- b) Nevhodné
- c) Neutrální
- d) Vhodné
- e) Velmi vhodné

3. Z jakých důvodů je pro Vás obecně vhodné využívat pracovní listy ve výuce matematiky?

- a) Neshledávám žádnou výhodu,
- b) Probíraná látka je stručně zpracována, shrnuta a přehledně členěna.
- c) Nabízí rozmanitost v řešených úlohách.
- d) Pomohou mi při domácí přípravě na hodiny matematiky.
- e) Více mi vyhovují při učebni než sešit či učebnice.
- f) Nemusím psát ručně zápisy nového učiva.

4. Z jakých důvodů je pro Vás obecně nevýhodné používat pracovní listy ve výuce matematiky?

- a) Neshledávám žádnou nevýhodu.
- b) Pracovní listy mi přijdou omezující na prostor.
- c) Někdy mám problém se správným řešením úloh.
- d) Více mi vyhovuje učení ze sešitu či učebnice.
- e) Pracovní listy jsou časově náročné na vypracování.

5. Co Vás na vytvořených pracovních listech nejvíce zaujalo a co na nich nejvíce oceňujete?

- a) Nic mě nezaujalo.
- b) Různorodost úloh
- c) Rozsah
- d) Přehlednost
- e) Vzhled

6. Co Vás na vytvořených pracovních listech naopak nezaujalo, co se Vám na nich nelíbilo?

- a) Vše se mi líbilo.
- b) Formát A4
- c) Zvolené typy jednotlivých úloh.
- d) Rozsah
- e) Struktura
- f) Vzhled

7. Jak byste hodnotil/a kvalitu zpracování pracovních listů, pokud jde o srozumitelnost a jasnost zadání?

- a) Velmi špatně
- b) Špatně
- c) Průměrně
- d) Dobře
- e) Velmi dobře

8. Jsou pracovní listy dostatečně strukturované a organizované, aby Vám umožnily snadno rozumět úkolům?

- a) Ne
- b) Ano

9. Jsou úlohy dostatečně různorodé nebo se opakují?

- a) Opakují se velmi často
- b) Opakují se často
- c) Neutrální
- d) Různorodé
- e) Velmi různorodé

10. Jak často se Vám stalo, že se doptal/a učitele na vysvětlení úkolů?

- a) Vůbec
- b) Zřídka
- c) Občas
- d) Často
- e) Velmi často

11. Jak často jste využili QR kódy na pracovních listech?

- a) Vůbec
- b) Zřídka
- c) Občas
- d) Často
- e) Velmi často

12. Jaký materiál, na který odkazovaly QR kódy, Vás nejvíce zaujal?

- a) Online cvičení
- b) Videá s vysvětlením učiva
- c) Interaktivní animace nebo simulace
- d) Textové články

13. Máte pocit, že jste díky interaktivním materiálům lépe porozuměli učivu?

- a) Ne
- b) Spíše ne
- c) Neutrální
- d) Spíše ano
- e) Ano

14. Ocenili byste, pokud by se tento způsob interaktivních prvků používal v pracovních listech častěji?

- a) Nemám názor, protože mi nepomáhají.
- b) Ne, interaktivní prvky mi nevyhovují.
- c) Možná, nejsem si jistý/á.
- d) Ano, určitě bych ocenil/a, pokud by se interaktivní prvky používaly častěji.

## Anotace

<b>Jméno a příjmení:</b>	Bc. Barbora Peterková
<b>Katedra:</b>	Katedra matematiky
<b>Vedoucí práce:</b>	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
<b>Rok obhajoby:</b>	2023

<b>Název práce:</b>	Aplikace moderních forem výuky ve vyučování matematiky pro 8. ročník ZŠ
<b>Název v angličtině:</b>	Application of modern forms of teaching in mathematics for the 8th year of elementary school
<b>Anotace práce:</b>	Diplomová práce se zabývá aplikací moderních forem výuky matematiky. Představuje předmět Matematika a její aplikace v rámci Rámcového vzdělávacího programu. Dále popisuje konstruktivistický přístup k výuce, aktivizační metody a možnosti zapojení interaktivní výuky. V praktické části práce byl vytvořen soubor pracovních listů na všechny tematické celky 8. ročníku základní školy. Ke každému pracovnímu listu je vytvořeno několik interaktivních aktivit a metodický list. V závěru práce je orientační výzkum s žáky 8. ročníku základní školy, kteří hodnotili práci s pracovními listy ve výuce.
<b>Klíčová slova:</b>	Matematika, moderní formy výuky, konstruktivistický přístup, aktivizační metody, interaktivní výuka
<b>Anotace v angličtině:</b>	This thesis focuses on the application of modern teaching methods in mathematics. It introduces the subject of Mathematics and its applications within the Rámcový vzdělávací program. Describes the constructivist approach to teaching, activation methods, and possibilities for incorporating interactive teaching. In the applied part of the thesis, a set of worksheets was created for all thematic units of the 8th grade of elementary school. For each worksheet, several interactive activities and a methodological sheet were created. At the end of the thesis, there is an exploratory research conducted with 8th-grade students from a primary school who evaluated the use of these worksheets in teaching.
<b>Klíčová slova v angličtině:</b>	Mathematics, modern teaching methods, constructivist approach, activation methods, interactive teaching
<b>Přílohy vázané v práci:</b>	1
<b>Rozsah práce:</b>	145 s. (104 197 znaků)
<b>Jazyk práce:</b>	čeština