



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

## INTERPOLAČNÍ A APROXIMAČNÍ SPLINE KŘIVKY

INTERPOLATING AND APPROXIMATING SPLINE CURVES

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Daniel Jelínek

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Jana Procházková, Ph.D.

BRNO 2020



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Daniel Jelínek**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **Mgr. Jana Procházková, Ph.D.**  
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Interpolační a aproximační spline křivky

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Prokládání dat interpolační nebo aproximační křivkou založenou na splinech je velmi rozšířená metoda. Spline funkce obsahuje několik druhů parametrů (stupeň, uzlový vektor, váhy), které je nutné vhodně zvolit a vybrat neoptimálnější řešení pro daný problém.

### Cíle bakalářské práce:

1. Nastudování problematiky spline interpolací a aproximací.
2. Algoritmizace vybraných algoritmů.
3. Optimalizace volby různých parametrů pro úpravu výsledného tvaru.

### Seznam doporučené literatury:

PIEGL, Les, TILLER, Wayne. NURBS Book, Berlin: Springer-Verlag, 1997 ISBN 978-3-540-61545-3.

SPATH, Helmuth. One dimensional spline interpolation algorithm, USA MA: A.K. Peters, Ltd. 1995 ISBN 1-56881-016-4.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá vlastnostmi a algoritmy výpočtu hladkých křivek, konkrétně B-spline křivek. Tyto křivky mají své uplatnění v počítačové grafice. Výpočet B-spline křivek je definován rekurentně, a proto je téměř nutností používat počítače s naprogramovanými algoritmy pro získání těchto křivek. Jako praktická část této práce byly vytvořeny tři programy pro výpočet aproximačních B-spline křivek, interpolačních B-spline křivek a NURBS křivek.

## **Summary**

This bachelor's thesis deals with properties and algorithms of smooth curves calculation, specifically the calculation of B-spline curves. These curves can be applied in computer graphics. Since their calculation is defined recurrently, it is almost a necessity to use computers with programmed algorithms to obtain these curves. As for the practical part of this work, three programs for the calculation of approximating B-spline curves, interpolating B-spline curves and NURBS curves were created.

## **Klíčová slova**

křivka, aproximace, interpolace, NURBS, B-spline, hladká křivka, kontrolní body, uzlový vektor, stupeň, báze funkce, algoritmus, váhový vektor

## **Keywords**

curve, approximation, interpolation, NURBS, B-spline, smooth curve, control points, knot vector, degree, basis functions, algorithm, weight vector

JELÍNEK, Daniel. *Interpolační a aproximační spline křivky*. 38 s. Brno, 2020. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/125267>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Jana Procházková.



### Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Interpolační a aproximační splíne křivky* vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Jany Procházkové, Ph.D. s využitím uvedené literatury a pramenů.

V Brně dne .....

.....

Daniel Jelínek





## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat Mgr. Janě Procházkové, Ph.D. za obrovskou ochotu a vstřícnost při vedení mé bakalářské práce. Dále děkuji svým blízkým spolužákům za vytvoření příjemného kolektivu.

V Brně dne .....

.....

Daniel Jelínek



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>B-spline</b>	<b>3</b>
2.1	B-spline funkce . . . . .	3
2.2	B-spline křivky . . . . .	9
2.3	Knot insertion - vkládání uzlů . . . . .	10
2.3.1	Vložení jediného uzlu . . . . .	10
2.3.2	Vícenásobné vložení uzlu . . . . .	11
<b>3</b>	<b>NURBS křivky</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Interpolační křivky</b>	<b>16</b>
4.1	Výpočet parametrů $\bar{u}_k$ . . . . .	16
4.2	Vliv parametrů $\bar{u}_k$ a uzlů na křivku . . . . .	18
4.3	Vliv stupně na tvar křivky . . . . .	19
4.4	Algoritmus výpočtu interpolační křivky . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Aproximační křivky</b>	<b>22</b>
5.1	Hledání řešení . . . . .	22
5.2	Vliv stupně a počtu kontrolních bodů na tvar křivky . . . . .	25
5.3	Algoritmus výpočtu aproximační křivky . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Programová implementace</b>	<b>27</b>
6.1	Program NURBS . . . . .	27
6.2	Interpolační program . . . . .	28
6.3	Aproximační program . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>33</b>
<b>8</b>	<b>Seznam příloh</b>	<b>35</b>

# 1. Úvod

Počátek vývoje B-spline křivek sahá až do šedesátých let 20. století, kdy designéři a návrháři v různých odvětvích průmyslu potřebovali nalézt způsob, jak modelovat hladké křivky. Chtěli nejdříve na počítači navrhnout potřebnou součástku, kterou mohli ještě případně upravit, než bude tato součást vyrobena. Průkopníkem v tomto směru se stal francouzský matematik a inženýr Pierre Bézier, který přišel s novým systémem zvaným UNISURF. Tento systém umožňoval designerům kreslit křivky přímo na počítači při zadání kontrolních bodů. Bézier přispěl k rozvoji počítačové grafiky a časem se vyvinul obor zvaný CAD – Computer Aided Design.

Postupem času Bézierovy křivky nahradily B-spline křivky, které vznikly koncem 70. let 20. století. Mezi hlavní iniciátory v oblasti B-spline křivek jistě patří C. de Boor, M. Cox a L. Mansfield. Každá B-spline křivka se skládá z několika úseků, kde každý úsek je tvořen Bézierovou křivkou a změna jednoho bodu neovlivní tvar celé křivky, ale jen několika úseků. To je základní rozdíl mezi těmito křivkami.

Mezi další křivky, které se v praxi používají, patří NURBS křivky (Non-Uniform Rational B-Spline). Jedná se vlastně o B-spline křivky s tím rozdílem, že lze měnit váhu každého bodu a tím ovlivňovat tvar křivky.

V práci se budeme zabývat také použitím B-spline a NURBS křivek pro interpolaci. Interpolační křivky mají tu vlastnost, že musí přímo procházet zadanými body, B-spline křivky ani NURBS křivky tuto vlastnost neměly. V počítačové grafice se využívají interpolační křivky nejvýše stupně pět, protože velký stupeň křivky způsobuje velké zákmity. Interpolace se uplatňuje především v numerické matematice a v matematické statistice, kde se využívá pro předpovídání budoucího chování nějakého jevu (hovoříme o extrapolaci).

Na závěr budou uvedeny algoritmy a teorie týkající se aproximačních křivek. Tyto křivky nemusí procházet zadanými body, ale dokážou vystihnout závislost mezi naměřenými veličinami. Aproximace má své uplatnění v počítačové grafice, kde se nejčastěji využívají kubické křivky (křivky třetího stupně), protože zajišťují dostatečnou flexibilitu křivky pro modelování reálných dat. Další výhodou je rychlý výpočet.

Jako součást této práce byly vytvořeny tři programy v softwaru Matlab, které dokážou modelovat hladké křivky. Popis a vysvětlení těchto programů je uveden v poslední kapitole.

## 2. B-spline

### 2.1. B-spline funkce

B-spline křivky jsou definovány pomocí B-spline funkce, které jsou dány bázovými funkcemi  $N$ . Bázové funkce jsou definované rekurentně a podrobný popis lze nalézt např. v [8].

**Definice 2.1** Necht  $\mathbf{U} = (u_0, u_1, \dots, u_m)$  je uzlový vektor. Bázová funkce  $N_i^p$  stupně  $p$  je definována vztahem:

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$N_i^p(u) = \frac{u - u_i}{u_{p+i} - u_i} N_i^{p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u) \quad (2.2)$$

$$0 \leq i \leq m - p - 1, \quad 1 \leq p \leq m - 1.$$

Výraz  $\frac{0}{0}$  je definován jako 0.

#### Vlastnosti uzlového vektoru

- 1)  $\mathbf{U}$  je posloupnost neklesajících reálných čísel, tedy platí:  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m$ .
- 2) Pokud se uzel  $u_i$  objeví  $k$ -krát v uzlovém vektoru  $\mathbf{U}$ , kde  $k > 1$ , jedná se o **násobný uzel** s násobností  $k$ . V opačném případě se jedná o **jednoduchý uzel**.

**Definice 2.2** Uzlový vektor  $\mathbf{U}$  nazveme **uniformní**, jestliže jsou jednotlivé uzly rovnoměrně rozloženy, tj.  $u_{i+1} - u_i$  je konstanta, kde  $0 \leq i \leq m - 1$ . V opačném případě je  $\mathbf{U}$  **neuniformní**.

**Příklad 2.1** Mějme uniformní uzlový vektor  $\mathbf{U}$ , který se bude skládat ze čtyř uzlů:  $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$ . Spočtěme bázové funkce stupně nula, jedna a dva.

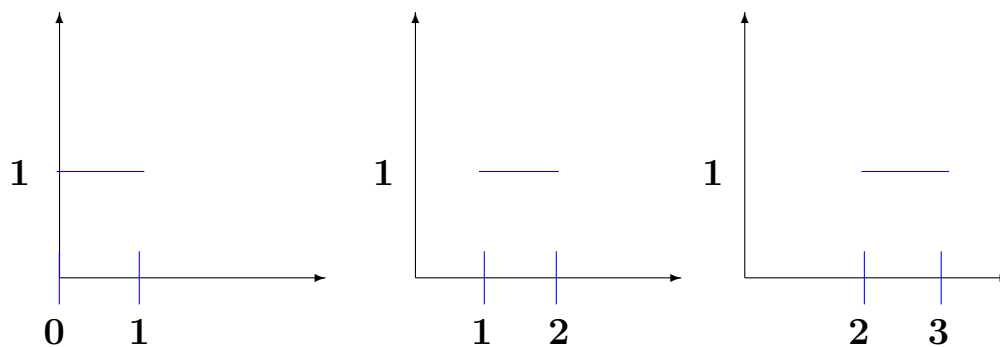
**Bázové funkce stupně nula jsou:**

$$N_0^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_1^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 1, 2 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_2^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 2, 3 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

## 2.1. B-SPLINE FUNKCE

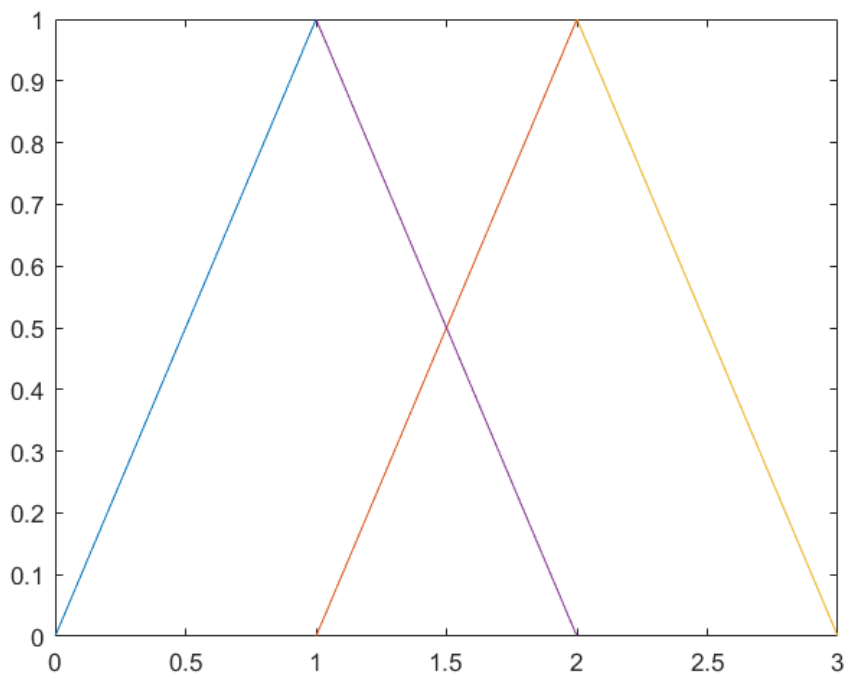


Obrázek 2.1: Hodnota bázové funkce stupně nula pro uzlový vektor  $(0, 1, 2, 3)$

**Bázové funkce stupně jedna jsou:**

$$N_0^1(u) = \begin{cases} u & \text{pro } u \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2 - u & \text{pro } u \in \langle 1, 2 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

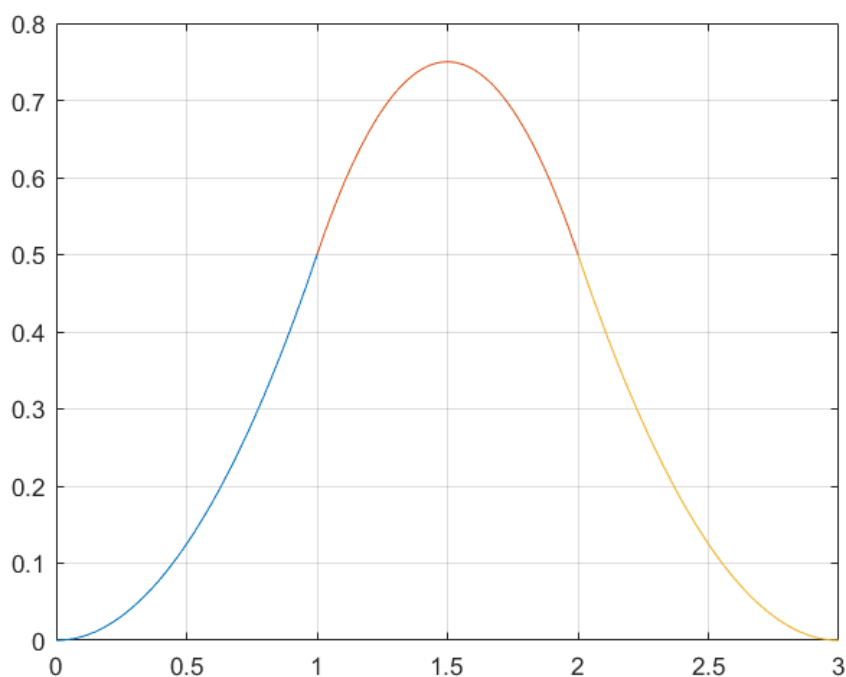
$$N_1^1(u) = \begin{cases} u - 1 & \text{pro } u \in \langle 1, 2 \rangle \\ 3 - u & \text{pro } u \in \langle 2, 3 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



Obrázek 2.2: Hodnota bázové funkce stupně jedna pro uzlový vektor  $(0, 1, 2, 3)$

**Bázové funkce stupně dva jsou:**

$$N_0^2(u) = \begin{cases} u^2/2 & \text{pro } u \in \langle 0, 1 \rangle \\ [u(2-u) + (3-u)(u-1)]/2 & \text{pro } u \in \langle 1, 2 \rangle \\ (3-u)^2/2 & \text{pro } u \in \langle 2, 3 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



Obrázek 2.3: Hodnota bázové funkce stupně dva pro uzlový vektor  $(0, 1, 2, 3)$

**Příklad 2.2** Vypočtete bázové funkce stupně nula, jedna a dva pro zadaný neuniformní uzlový vektor  $\mathbf{U} = (0, 1, 1.4, 1.8, 3)$ .

**Bázové funkce stupně nula jsou:**

$$N_0^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_1^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 1, 1.4 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_2^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 1.4, 1.8 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_3^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in \langle 1.8, 3 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

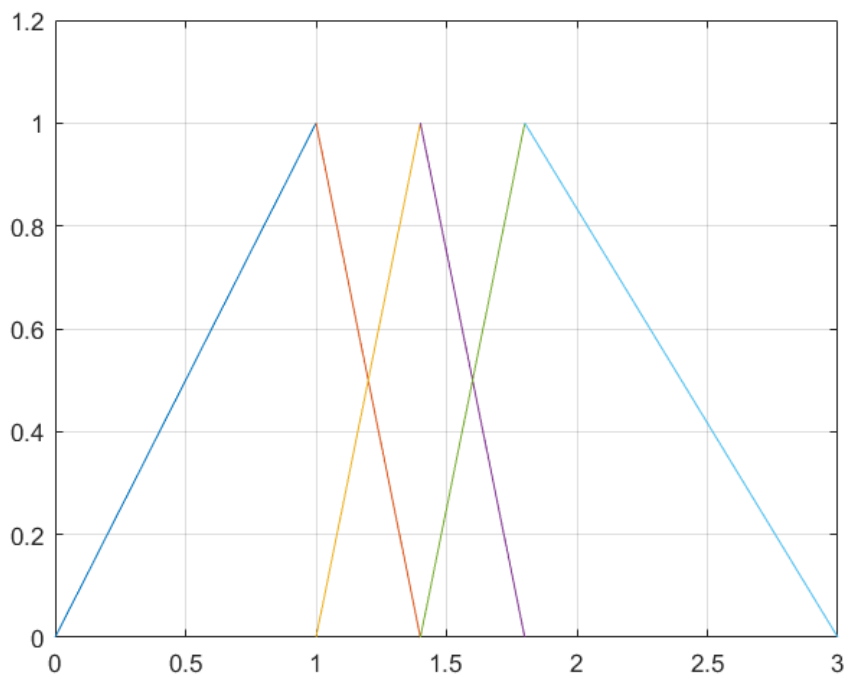
## 2.1. B-SPLINE FUNKCE

**Bázové funkce stupně jedna jsou:**

$$N_0^1(u) = \begin{cases} u & \text{pro } u \in \langle 0, 1 \rangle \\ (1.4 - u)/0.4 & \text{pro } u \in \langle 1, 1.4 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_1^1(u) = \begin{cases} (u - 1)/0.4 & \text{pro } u \in \langle 1, 1.4 \rangle \\ (1.8 - u)/0.4 & \text{pro } u \in \langle 1.4, 1.8 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_2^1(u) = \begin{cases} (u - 1.4)/0.4 & \text{pro } u \in \langle 1.4, 1.8 \rangle \\ (3 - u)/1.2 & \text{pro } u \in \langle 1.8, 3 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



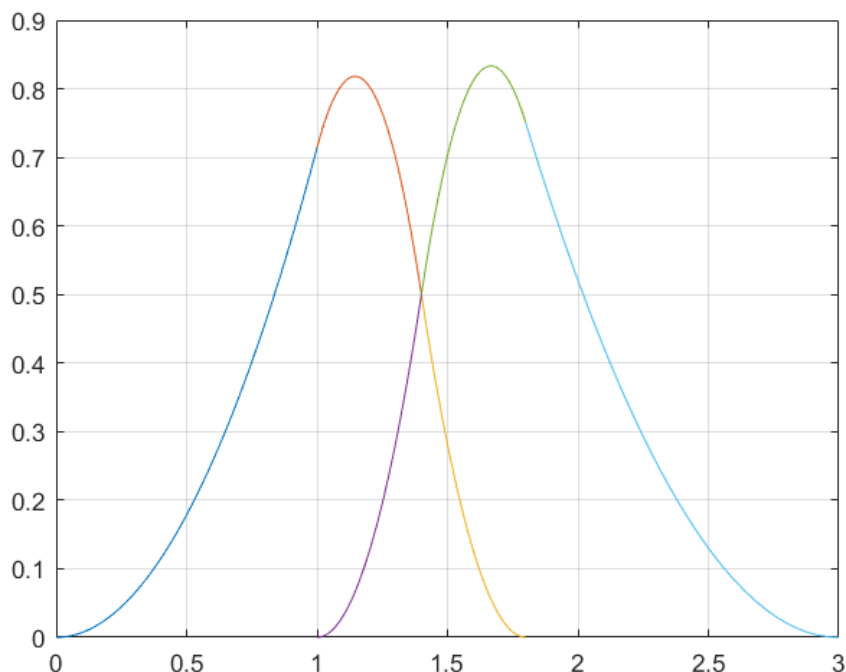
Obrázek 2.4: Hodnota bázové funkce stupně jedna pro uzlový vektor (0, 1, 1.4, 1.8, 3)

**Bázové funkce stupně dva jsou:**

$$N_0^2(u) = \begin{cases} u^2/1.4 & \text{pro } u \in \langle 0, 1 \rangle \\ u(1.4 - u)/0.56 + (1.8 - u)(u - 1)/0.32 & \text{pro } u \in \langle 1, 1.4 \rangle \\ (1.8 - u)^2/0.32 & \text{pro } u \in \langle 1.4, 1.8 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



$$N_1^2(u) = \begin{cases} (u-1)^2/0.32 & \text{pro } u \in \langle 1, 1.4 \rangle \\ (u-1)(1.8-u)/0.32 + (3-u)(u-1.4)/0.64 & \text{pro } u \in \langle 1.4, 1.8 \rangle \\ (3-u)^2/1.92 & \text{pro } u \in \langle 1.8, 3 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Obrázek 2.5: Hodnota bázové funkce stupně dva pro uzlový vektor  $(0, 1, 1.4, 1.8, 3)$ 

### Vlastnosti bázových funkcí

1. Nezápornost

$$N_i^p(u) \geq 0 \text{ pro libovolné hodnoty } i, p, u.$$

2. Lokální podpůrné intervaly

$$N_i^p(u) \neq 0 \text{ pro } u \in \langle u_i, u_{i+p+1} \rangle.$$

3. Rozklad

Na libovolném intervalu  $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$  musí platit rovnost:

$$\sum_{j=0}^p N_{i-p+j}^p(u) = 1.$$

4. Spojitost

V uzlu násobnosti  $k$  má bázová funkce  $N_i^p(u)$  spojitost  $C^{p-k}$ .

5. Vlastnost intervalu

Na každém intervalu  $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$  je nejvýše  $p+1$  bázových funkcí stupně  $p$  nenulových. Konkrétně to jsou:  $N_i^p, N_{i-1}^p, \dots, N_{i-p}^p$ .

## 2.1. B-SPLINE FUNKCE

### Algoritmus výpočtu B-spline funkcí

B-spline funkce jsou definovány rekurentně, proto je jejich výpočet zdlouhavý. Při výpočtu se uvažuje důležitá vlastnost B-spline funkcí 2 o lokálních podpůrných intervalech. Algoritmus výpočtu lze zapsat následovně:

#### Vstup:

- index  $i$
- stupeň  $p = p + 1$
- uzlový vektor  $\mathbf{U}$
- parametr  $u$

#### Výstup:

- hodnota B-spline funkce  $N_i^p(u)$  uložená v proměnné  $y$

```
1 function y = BsplineBazoveFunkce(i,p,U,u)
2 begin
3   | y = RekurentniBsplineBazoveFunkce(i,p,U,u)
4 end
5 function y = RekurentniBsplineBazoveFunkce(i,p,U,u)
6 begin
7   | y = zeros(size(u));
8   | if p > 1 then
9     |   b = BsplineBazoveFunkce(i,p - 1,U,u);
10    |   citatel1 = u - U(i+1);
11    |   jmenovatel1 = U(i+p) - U(i+1);
12    |   if jmenovatel1 ≠ 0 then
13      |     | y = y + b.*(citatel1./jmenovatel1);
14    |   end
15    |   b = BsplineBazoveFunkce(i + 1,p - 1,U,u);
16    |   citatel2 = U(i+p+1) - u;
17    |   jmenovatel2 = U(i+p+1) - U(i+1+1);
18    |   if jmenovatel2 ≠ 0 then
19      |     | y = y + b.*(citatel2./jmenovatel2);
20    |   end
21    | else if U(i+2) < U(end) then
22      |   | y(U(i+1) <= u and u < U(i+2)) = 1;
23    | else
24      |   | y(U(i+1) <= u) = 1;
25    | end
26 end
```

Algorithm 1: Algoritmus výpočtu B-spline funkcí [6]

## 2.2. B-spline křivky

Následující text čerpá z [1, 11].

**Definice 2.3** Je zadáno  $n + 1$  kontrolních bodů  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ , uzlový vektor  $\mathbf{U} = (u_0, u_1, \dots, u_m)$  a stupeň křivky  $p$ .  
Potom B-spline křivka je definována jako:

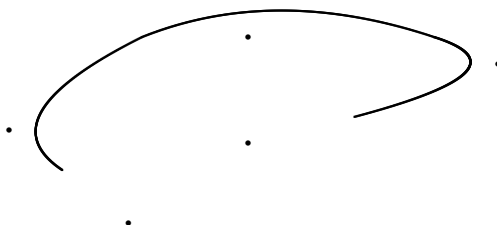
$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) \mathbf{P}_i, \quad (2.3)$$

kde  $N_i^p(u)$  jsou bázové funkce křivky stupně  $p$ .

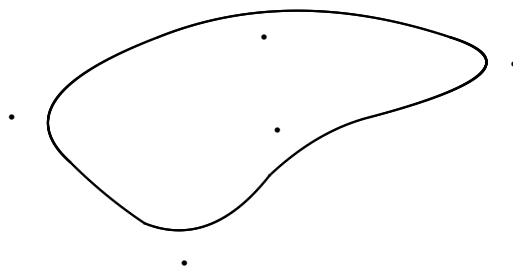
Všimněme si, že  $n, m$  a  $p$  musí splňovat jednoduchou rovnici  $m = n + p + 1$ . Přesněji řečeno, pokud chceme definovat B-spline křivku stupně  $p$  s  $n + 1$  kontrolními body, musíme dodat  $n + p + 2$  uzlů. Na druhou stranu, pokud uzlový vektor má  $m + 1$  uzlů a  $n + 1$  kontrolních bodů, pak je stupeň B-spline křivky  $p = m - n - 1$ .

**Poznámka 1** Pokud  $p$  prvních a posledních kontrolních bodů je shodných, kde  $p$  je stupeň křivky, tak se tato křivka nazývá **uzavřená**. V tomto případě se začátek a konec vygenerované křivky spojí a vytvoří uzavřenou smyčku. V opačném případě se křivka nazývá **otevřená**.

Otevřená křivka je znázorněna na obr. 2.6 a uzavřená křivka je na obr. 2.7.



Obrázek 2.6: Otevřená křivka



Obrázek 2.7: Uzavřená křivka

## 2.3. Knot insertion - vkládání uzlů

Metoda vkládání uzlů spočívá v tom, že přidáme nový uzel do již existujícího vektoru uzlů **beze změny tvaru křivky**.

Tento nový uzel se může rovnat již existujícímu uzlu (čímž se zvýší jeho násobnost o jedna) nebo můžeme zadat úplně nový uzel. Po přidání nového uzlu musíme zvýšit buď stupeň křivky  $p$  nebo počet kontrolních bodů na základě rovnosti  $m = n + p + 1$ . Zvýšení stupně křivky by vedlo ke globální změně tvaru křivky, proto je vhodnější spočítat nový kontrolní bod křivky.

Přidání nového uzlu nám tedy způsobí zvýšení kontrolních bodů. Přesněji jsou některé body odstraněny a nahrazeny body novými.

### 2.3.1. Vložení jediného uzlu

Mějme  $n + 1$  kontrolních bodů  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ , uzlový vektor  $\mathbf{U} = (u_0, u_1, \dots, u_m)$  a stupeň křivky  $p$ . Předpokládejme, že nový uzel  $t$ , který chceme vložit do  $\mathbf{U}$  leží v intervalu  $(u_k, u_{k+1})$ .

Z vlastnosti 5 již víme, že nám stačí najít pouze kontrolní body  $\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_{k-1}, \dots, \mathbf{P}_{k-p}$ , protože ostatní body nemají na vložený uzel  $t$  vliv.

Vzorec pro výpočet nového kontrolního bodu  $\mathbf{Q}_i$  mezi body  $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$  je následující:

$$\mathbf{Q}_i = (1 - \alpha_i) \mathbf{P}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{P}_i \quad (2.4)$$

$$\alpha_i = \frac{t - u_i}{u_{i+p} - u_i} \quad \text{pro } k - p + 1 \leq i \leq k. \quad (2.5)$$

Podrobný postup pro odvození vzorce můžeme najít v [11].

Číslo  $\alpha_i$  vyjadřuje podíl intervalu, jak je znázorněno na obr. 2.8.



Obrázek 2.8: Geometrický význam vkládání uzlů

Nyní už jen stačí vykreslit křivku pro nové kontrolní body  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{k-p},$

$\mathbf{Q}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{Q}_{k-1}, \mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k, \dots, \mathbf{P}_n$ .

Stručně řečeno, pokud chceme vložit nový uzel  $t$ , potřebujeme nejprve najít interval  $(u_k, u_{k+1})$ , ve kterém se  $t$  nachází. Dále spočítáme  $p$  nových kontrolních bodů  $\mathbf{Q}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{Q}_k$  podle vzorce (2.4). Naše nová křivka bude definována body  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{k-p},$

$\mathbf{Q}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{Q}_{k-1}, \mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k, \dots, \mathbf{P}_n$ .

Po vložení uzlu  $t$  se změní také uzlový vektor na  $(u_0, u_1, \dots, u_k, t, u_{k+1}, \dots, u_m)$ .

**Příklad 2.3** Mějme zadaný stupeň  $p = 3$  a uzlový vektor

$\mathbf{U} = (0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1, 1)$ . Vložte do vektoru  $\mathbf{U}$  nový uzel  $t = 0.5$  a vypočítejte příslušné nové kontrolní body.

Z rovnice  $n = m - p - 1$  dostáváme  $n = 11 - 3 - 1 = 7$ , tedy máme 8 kontrolních bodů. Vzhledem k tomu, že  $t$  leží v intervalu  $(u_5, u_6)$ . Ovlivněné kontrolní body jsou  $\mathbf{P}_5, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2$ . Pro stanovení tří nových kontrolních bodů  $\mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_4$  a  $\mathbf{Q}_3$ , musíme spočítat  $\alpha_5, \alpha_4$  a  $\alpha_3$ :

$$\begin{aligned}\alpha_5 &= \frac{t - u_5}{u_8 - u_5} = \frac{0.5 - 0.4}{1 - 0.4} = \frac{1}{6} \\ \alpha_4 &= \frac{t - u_4}{u_7 - u_4} = \frac{0.5 - 0.2}{0.8 - 0.2} = \frac{1}{2} \\ \alpha_3 &= \frac{t - u_3}{u_6 - u_3} = \frac{0.5 - 0}{0.6 - 0} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Výpočet  $\mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_4$  a  $\mathbf{Q}_3$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_5 &= \left(1 - \frac{1}{6}\right) \mathbf{P}_4 + \frac{1}{6} \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{Q}_4 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \mathbf{P}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{Q}_3 &= \left(1 - \frac{5}{6}\right) \mathbf{P}_2 + \frac{5}{6} \mathbf{P}_3.\end{aligned}$$

Nové kontrolní body tedy budou:  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4, \mathbf{Q}_5, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6, \mathbf{P}_7$  a nový uzlový vektor  $\mathbf{U} = (0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, \mathbf{0.5}, 0.6, 0.8, 1, 1, 1, 1)$ .

Přidali jsme jeden uzel, museli jsme přidat i jeden kontrolní bod, aby zůstala zachována rovnost  $n = m - p - 1 = 12 - 3 - 1 = 8$ .

Zvolme tedy body:

$$\mathbf{P}_0 = [0, 0], \quad \mathbf{P}_1 = [1, 1], \quad \mathbf{P}_2 = [0, 3], \quad \mathbf{P}_3 = [2, 5], \quad \mathbf{P}_4 = [4, 6], \quad \mathbf{P}_5 = [6, 4], \\ \mathbf{P}_6 = [8, 2], \quad \mathbf{P}_7 = [6, 2].$$

Dále bude potřeba si spočítat nové body  $\mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4$  a  $\mathbf{Q}_5$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{3x} &= \left(1 - \frac{5}{6}\right) \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{5}{3} & \mathbf{Q}_{3y} &= \left(1 - \frac{5}{6}\right) \cdot 3 + \frac{5}{6} \cdot 5 = \frac{14}{3} \\ \mathbf{Q}_{4x} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 3 & \mathbf{Q}_{4y} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{11}{2} \\ \mathbf{Q}_{5x} &= \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{13}{3} & \mathbf{Q}_{5y} &= \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{17}{3}\end{aligned}$$

Na obr. 2.9a je vykreslena B-spline křivka s kontrolními body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_7$ . Obr. 2.9b znázorňuje tutéž B-spline křivku po přidání nového uzlu  $t = 0.5$ .

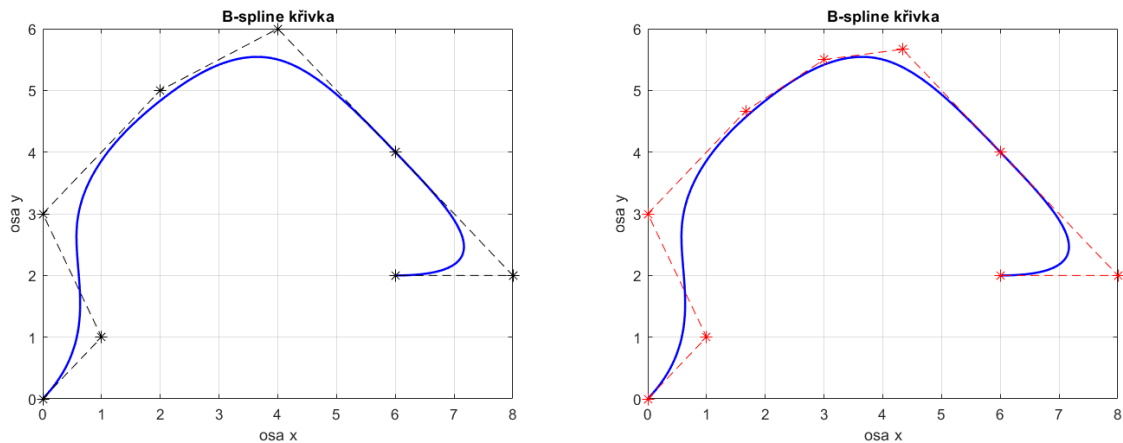
### 2.3.2. Vícenásobné vložení uzlu

Opakované vkládání uzlů je analogie vložení jediného uzlu. Pokud chceme vložit uzel  $t$   $r$ -krát, nejprve zjistíme jeho násobnost  $s$  a pouze upravíme výpočetní vzorec:

$$\mathbf{Q}_{i,r} = (1 - \alpha_{i,r}) \mathbf{P}_{i-1,r-1} + \alpha_{i,r} \mathbf{P}_{i,r-1} \quad (2.6)$$

$$\alpha_{i,r} = \frac{t - u_i}{u_{i+p-(r-1)} - u_i} \quad \text{pro} \quad k - p + r \leq i \leq k - s \quad (2.7)$$

### 2.3. KNOT INSERTION - VKLÁDÁNÍ UZLŮ



(a) Původní B-spline křivka

(b) B-spline křivka s přidaným uzlem  $t$

Obrázek 2.9

#### Algoritmus vícenásobného vložení

**Věta 2.4** Pokud je násobnost uzlu  $t$  rovna stupni křivky, tak bod  $C(t)$  je bodem křivky.

Tato věta nám říká, pokud provedeme algoritmus *knot insertion* tolikrát, kolik je stupeň křivky, tak získáme bod na křivce. Nejprve musíme určit násobnost  $s$  daného uzlu  $t$  a o tento počet snížit opakování *knot insertion*.

Podrobný postup a algoritmus výpočtu lze nalézt v [8].

#### Vstup:

- zadané body  $Q_i$
- stupeň  $p$
- uzlový vektor  $U$
- parametr  $t$

#### Výstup:

- bod na křivce  $C(t)$

#### Princip algoritmu:

1. Nalezneme interval  $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$ , ve kterém leží  $t$ .
2. Určíme násobnost  $s$ , s jakou se parametr  $t$  již vyskytuje v  $U$ .
3. Provedení algoritmu *knot insertion*  $(p - s)$ -krát.

Tento algoritmus se nazývá deBoorův algoritmus a jedná se o nejčastěji využívaný algoritmus pro vykreslení výsledných křivek.

## 3. NURBS křivky

Slovo NURBS je zkratka, která vznikla z anglického názvu Non-Uniform Rational B-Splines. Jedná se o zobecnění B-spline křivek, kterými jsme se zatím zabývali. Non-Uniform znamená, že budeme používat obecně neuniformní uzlový vektor, viz Def. 2.2. Racionalita představuje přidání *váhy* každému bodu. Jednoduše řečeno, určíme významnost každého kontrolního bodu a výsledná křivka bude blíže k bodům s větší významností.

Váha křivky tedy bude představovat další možnost, jak měnit tvar křivky. Touto cestou dokážeme také zavést kuželosečkové oblouky, neboť například kruh jsme doposud nebyli schopni pomocí B-spline křivek vykreslit.

Abychom mohli s NURBS křivkami pracovat obdobně jako s B-spline křivkami, potřebujeme definovat projektivní rozšíření prostoru a homogenní souřadnice.

V následujícím textu jsou uvedeny pouze nejdůležitější poznatky k projektivnímu rozšíření. Podrobnější teorii lze nalézt např. v [10].

### Projektivní rozšíření roviny $\mathbb{E}_2$ a prostoru $\mathbb{E}_3$

Projektivní rozšíření roviny  $\mathbb{E}_2$  se provádí zavedením axiomu:

**Axiom 1** *Každé dvě přímky ležící v jedné rovině, mají vždy alespoň jeden společný bod.*

Dostaneme se do sporu s axiomem o rovnoběžkách, který říká, že každé dvě různé rovnoběžky nemají žádný společný bod. Tento problém vyřešíme tak, že zavedeme dva různé typy bodů. Body, které jsme až do teď uvažovali (tzv. vlastní body) a body nevlastní, což jsou „body v nekonečnu“. Upravený axiom o rovnoběžkách bude znít následovně:

**Axiom 2** *Bodem  $A$  neležícím na přímce  $p$  prochází právě jedna přímka  $q$ , která nemá s přímkou  $p$  ani jeden společný **vlastní** bod.*

Pokud tedy každé dvě různé rovnoběžky nemají žádný společný vlastní bod, musí mít na základě axiomu 1 společný nevlastní bod. Rovinu resp. prostor, kde místo axiomu o rovnoběžkách platí axiomy 1 a 2 nazveme **projektivní rovinnou** resp. **projektivním prostorem**. Budeme značit  $\mathbb{E}_2^\infty$  resp.  $\mathbb{E}_3^\infty$ .

### Homogenní souřadnice v projektivním prostoru

Kontrolní body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{E}_3^\infty$  napíšeme jako sloupcové vektory se čtvrtou souřadnicí představující váhu bodu danou projektivním rozšířením:

$$\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Tento tvar reprezentace bodů nazýváme homogenní souřadnice (více v [11]).

Nyní vynásobíme souřadnice  $\mathbf{P}_i$  vahou  $w_i$  abychom získali nový tvar v homogenních souřadnicích:

$$\mathbf{P}_i^w = \begin{pmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Body  $\mathbf{P}_i$  a  $\mathbf{P}_i^w$  představují tentýž bod v homogenních souřadnicích. Připojením tohoto nového homogenního tvaru do rovnice (2.3) získáme tvar B-spline křivky v homogenních souřadnicích:

$$\mathbf{C}^w(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) \begin{pmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n N_i^p(u) (w_i x_i) \\ \sum_{i=0}^n N_i^p(u) (w_i y_i) \\ \sum_{i=0}^n N_i^p(u) (w_i z_i) \\ \sum_{i=0}^n N_i^p(u) (w_i) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Pro přechod z homogenního tvaru zpět do Kartézských souřadnic nám stačí vydělit  $\mathbf{C}^w(u)$  čtvrtou souřadnicí

$$\mathbf{C}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) (w_i x_i)}{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) (w_i)} \\ \frac{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) (w_i y_i)}{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) (w_i)} \\ \frac{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) (w_i z_i)}{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) (w_i)} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

**Definice 3.1** *Nechť máme  $n + 1$  kontrolních bodů  $\mathbf{P}_i$ ,  $n + 1$  čísel zvaných váhy  $w_i$ , uzlový vektor  $\mathbf{U} = (u_0, u_1, \dots, u_m)$  a stupeň křivky  $p$ . Potom NURBS křivka je definována jako:*

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) w_i}. \quad (3.5)$$

NURBS křivku můžeme zapisovat i jako:

$$\sum_{i=0}^n R_i^p(u) \mathbf{P}_i, \quad (3.6)$$



kde  $R_i^p(u)$  je definováno následovně:

$$R_i^p(u) = \frac{N_i^p(u)w_i}{\sum_{i=0}^n N_i^p(u)w_i}. \quad (3.7)$$

### Vlastnosti váhy

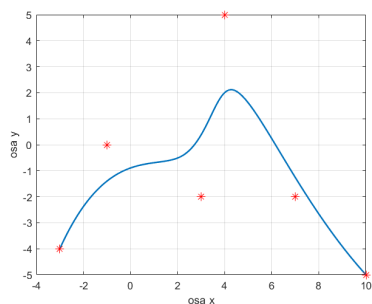
1. Váha může být libovolné reálné číslo, tj.  $w_i \in \mathbb{R}$  (v této práci budeme uvažovat pouze kladné váhy).
2. Pokud bude váha každého bodu stejná, z NURBS křivek dostaneme B-spline křivky a váhový vektor bude posloupnost samých jedniček.
3. Počet kontrolních bodů musí být totožný s počtem vah, každý bod má svou jednoznačně určenou váhu.
4. Je-li váha z intervalu  $(0,1)$ , znamená to, že daný bod má na křivku menší vliv.
5. Je-li váha z intervalu  $(1,\infty)$ , znamená to, že daný bod má na křivku větší vliv.

**Příklad 3.1** Mějme zadaný uzlový vektor  $\mathbf{U} = (0, 0, 0, 0, 0.3, 0.6, 1, 1, 1, 1)$ , stupeň křivky  $p = 3$  a kontrolní body  $\mathbf{P}_0 = [-3, -4]$ ,  $\mathbf{P}_1 = [-1, 0]$ ,  $\mathbf{P}_2 = [3, -2]$ ,  $\mathbf{P}_3 = [4, 5]$ ,  $\mathbf{P}_4 = [7, -2]$ ,  $\mathbf{P}_5 = [10, -5]$ .

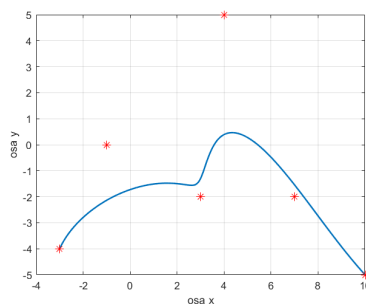
Vykreslete NURBS křivku pro 3 různé váhové vektory:

$w_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $w_2 = (1, 1, 5, 1, 1, 1)$  a  $w_3 = (1, 1, 0.2, 1, 1, 1)$ .

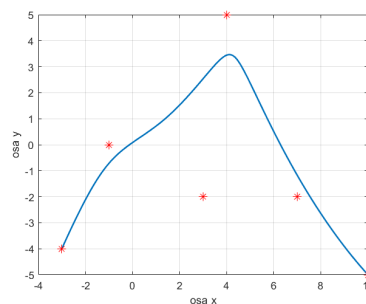
Lze vidět, že změna váhy kontrolního bodu  $\mathbf{P}_2$  výrazně ovlivňuje tvar křivky. Výsledná křivka s vektorem  $w_1$  je uvedena na obr. 3.1a, křivka s vektorem  $w_2$  je uvedena na obr. 3.1b a na obr. 3.1c je křivka s váhovým vektorem  $w_3$ .



(a) Křiva s vektorem  $w_1$



(b) Křiva s vektorem  $w_2$



(c) Křiva s vektorem  $w_3$

Obrázek 3.1

## 4. Interpolační křivky

Interpolace představuje možnost, jak ze zadaných hodnot (bodů) sestavit funkci, která těmito zadanými hodnotami přímo prochází. Interpolace se často využívá např. v geografii, kde je potřeba sestavit teplotní mapu z dat získaných na několika rovnoměrně rozprostřených meteorologických stanicích. Díky interpolaci dokážeme odhadnout teplotu v místech bez zaznamenaných dat pomocí okolních naměřených hodnot. Předpokládáme, že naměřená data nejsou zatížena chybou měření.

Mějme zadáno  $n + 1$  bodů  $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n$ . Tyto body chceme interpolovat křivkou stupně  $p$ , kde  $p \leq n$ . Každému bodu  $\mathbf{Q}_k$  přiřadíme parametrickou hodnotu  $\bar{u}_k$ . Z těchto parametrů zvolíme vhodný uzlový vektor  $\mathbf{U} = (u_0, \dots, u_m)$ , kde musí platit rovnost  $m = n + p + 1$ . Tímto způsobem získáme uzlový vektor, stupeň křivky máme zadaný a jediné, co potřebujeme spočítat, je  $n + 1$  kontrolních bodů.

**Věta 4.1** *Mějme zadány body  $\mathbf{Q}_k, k = 0, 1, \dots, n$  a stupeň  $p$ . Potom B-spline křivka, která přímo prochází body  $\mathbf{Q}_k$  má tvar:*

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{C}(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_i^p(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i, \quad (4.1)$$

kde  $\mathbf{P}_i, i = 0, 1, \dots, n$  jsou neznámé kontrolní body.

Vyskytuje se problém jak nejlépe vybrat hodnoty  $\bar{u}_k$  a uzlový vektor  $\mathbf{U}$ , protože jejich volbou ovlivníme výsledný tvar a parametrizaci křivky. Po celou dobu budeme předpokládat, že parametr  $u \in \langle 0, 1 \rangle$ .

### 4.1. Výpočet parametrů $\bar{u}_k$

Podrobný návod na výpočet parametrů  $\bar{u}_k$  můžeme nalézt např. v [8].

- **Uniformní metoda**

$$\bar{u}_k = \frac{k}{n} \quad k = 1, \dots, n - 1, \quad (4.2)$$

kde  $\bar{u}_0 = 0$  a  $\bar{u}_n = 1$ .

Nicméně, tato metoda není příliš vhodná. Pokud jsou zadané hodnoty nerovnoměrně rozmístěné, tak mohou na křivce vznikat smyčky a ostré hrany.

- **Tětivová metoda**

Nechť  $d$  je celková délka

$$d = \sum_{k=1}^n |\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|, \quad (4.3)$$

potom

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|}{d} \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (4.4)$$

$$\bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1.$$

Tato metoda je v praxi nejpoužívanější.

- **Dostředivá metoda**

Nechť

$$d = \sum_{k=1}^n \sqrt{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|}, \quad (4.5)$$

potom

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|}}{d} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (4.6)$$

$$\bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1.$$

Jedná se o novější metodu, která nám dokáže poskytnout lepší výsledky než tětiová metoda, pokud souřadnice zadaných bodů mezi sebou svírají velmi ostré úhly.

Výběrem jedné z těchto metod získáme hodnoty  $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ . Dále budeme potřebovat určit uzly  $u_0, \dots, u_m$ , abychom z rovnice (4.1) získali body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ . Na tento účel nám poslouží metoda zvaná *průměrování* [11]:

$$u_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n-p \quad (4.7)$$

$$u_0 = \dots = u_p = 0 \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1.$$

Z rovnice (4.1) dostaneme  $(n+1) \times (n+1)$  lineárních rovnic s neznámými  $\mathbf{P}_i$ . Bázové funkce  $N_i^p(\bar{u}_k)$  počítáme v hodnotě parametru  $\bar{u}_k$  pro uzlový vektor  $\mathbf{U}$ .

$$\begin{pmatrix} N_0^p(\bar{u}_0) & N_1^p(\bar{u}_0) & \cdots & N_n^p(\bar{u}_0) \\ N_0^p(\bar{u}_1) & N_1^p(\bar{u}_1) & \cdots & N_n^p(\bar{u}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_0^p(\bar{u}_n) & N_1^p(\bar{u}_n) & \cdots & N_n^p(\bar{u}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_n \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

**Příklad 4.2** Mějme zadáno šest bodů  $\mathbf{Q}_0 = [0, 0]$ ,  $\mathbf{Q}_1 = [1, 3]$ ,  $\mathbf{Q}_2 = [2, 7]$ ,  $\mathbf{Q}_3 = [5, 9]$ ,  $\mathbf{Q}_4 = [7, 3]$ ,  $\mathbf{Q}_5 = [5, 0]$ . Najděte B-spline křivku stupně  $p = 3$ , která tyto body interpoluje.

Nejprve spočítáme vektor  $\bar{\mathbf{u}}$  např. tětiovou metodou, následně metodou *průměrování* určíme uzlový vektor  $\mathbf{U}$ .

Výsledné vektory jsou:

$$\bar{\mathbf{u}} = (0, 0.1519, 0.3499, 0.5231, 0.8268, 1),$$

$$\mathbf{U} = (0, 0, 0, 0, 0.3416, 0.5666, 1, 1, 1, 1).$$

Z rovnice

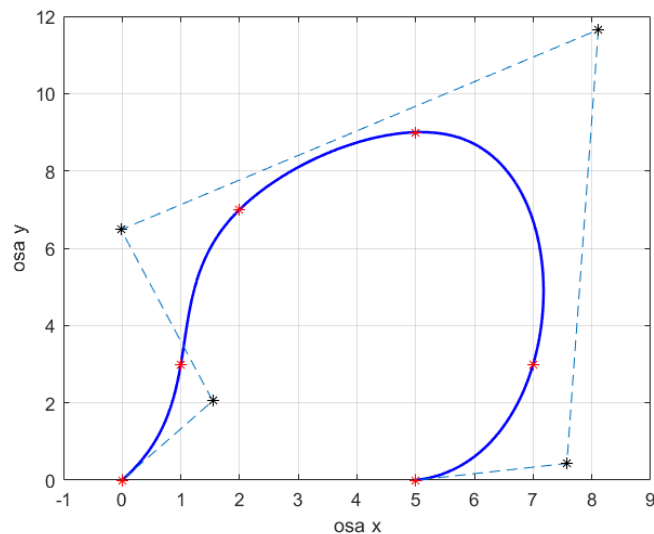
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1713 & 0.5561 & 0.2545 & 0.0181 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1409 & 0.6378 & 0.2213 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0011 & 0.3775 & 0.5600 & 0.0613 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0182 & 0.2274 & 0.5379 & 0.2165 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{0x} & \mathbf{P}_{0y} \\ \mathbf{P}_{1x} & \mathbf{P}_{1y} \\ \mathbf{P}_{2x} & \mathbf{P}_{2y} \\ \mathbf{P}_{3x} & \mathbf{P}_{3y} \\ \mathbf{P}_{4x} & \mathbf{P}_{4y} \\ \mathbf{P}_{5x} & \mathbf{P}_{5y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 9 \\ 7 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

## 4.2. VLIV PARAMETRŮ $\bar{u}_K$ A UZLŮ NA KŘIVKU

získáme hledané kontrolní body  $\mathbf{P}_i$ :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1.5430 & 2.0503 \\ -0.0188 & 6.4798 \\ 8.1089 & 11.6504 \\ 7.5735 & 0.4317 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledná křivka je uvedena na obr. 4.1. Červené hvězdy představují zadané body a černé hvězdy jsou vypočtené kontrolní body.

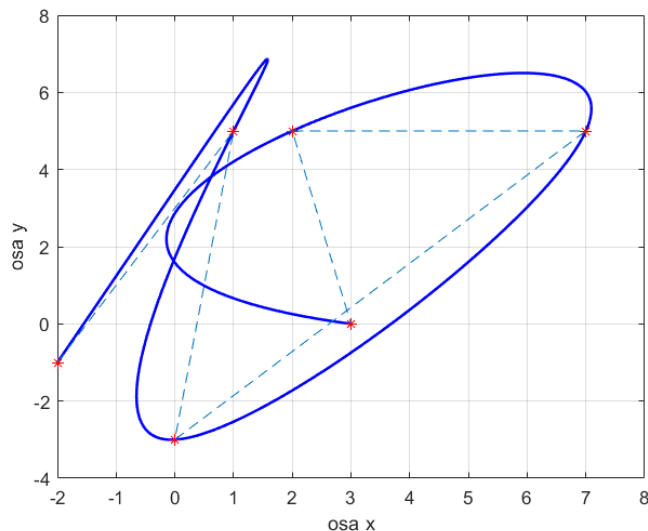


Obrázek 4.1: Výsledná interpolační B-spline křivka

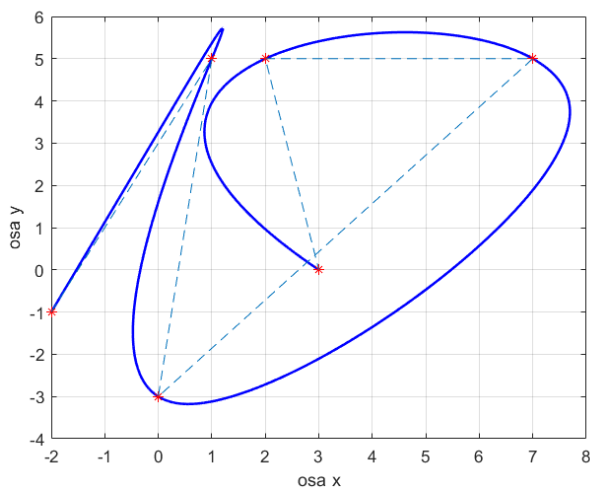
## 4.2. Vliv parametrů $\bar{u}_k$ a uzlů na křivku

Dopad vybraných parametrů na křivku se nedá jednoduše odhadnout. Nicméně můžeme říci, že pokud rozdělení parametrů  $\bar{u}_k$  tětívovou metodou je přibližně stejné, tak všechny tři metody vytvoří přibližnou křivku.

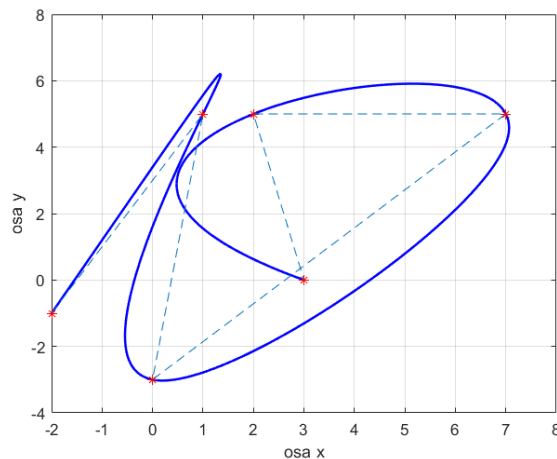
Na obr. 4.2, 4.3a a 4.3b je vykreslena interpolační křivka pro ty samé kontrolní body  $\mathbf{P}_i$ , ale každá z nich má vypočtený uzlový vektor jinou metodou. V prvním z těchto obrázků byla použita uniformní metoda. Jak si můžeme povšimnout, tak se křivka protíná. Křivka na druhém obrázku má uzlový vektor spočítaný tětívovou metodou a na posledním obrázku je použita dostředivá metoda, křivka se sama sebe dotýká. B-spline křivky jsou stupně  $p = 3$ .



Obrázek 4.2: Uniformní metoda



(a) Tětivová metoda



(b) Dostředivá metoda

Obrázek 4.3

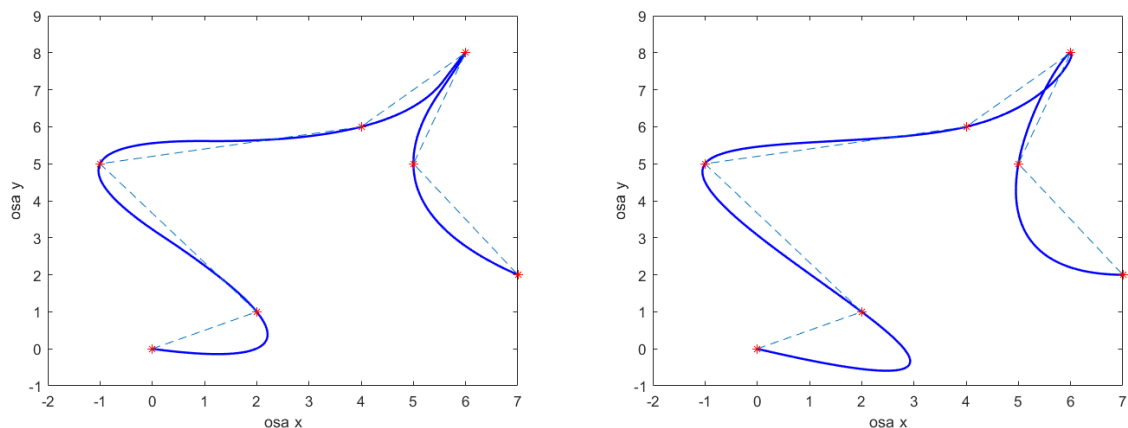
### 4.3. Vliv stupně na tvar křivky

Následující pojednání čerpá z [11]. Vliv stupně na tvar interpolační B-spline křivky také není jednoduché odhadnout. Dá se ale říci, že uniformní metoda je vhodná na větší vzdálenosti mezi zadanými body. Na kratších vzdálenostech se vyskytuje problém, vznikají hrany a vytváří se smyčky. Tato situace je tím horší, čím je větší stupeň, protože větší stupeň poskytuje větší volnost pohybu křivce.

U tětivové metody není žádný významný rozdíl ve změně tvaru křivky s rostoucím stupněm. To samé platí i pro dostředivou metodu, jelikož je tato metoda rozšířením tětivové metody.

Tyto vlastnosti jsou znázorněny na obr. 4.4a a 4.4b. Další obrázky najdeme v Příloze 8.1a – 8.4a.

#### 4.4. ALGORITMUS VÝPOČTU INTERPOLAČNÍ KŘIVKY



(a) Uniformní metoda pro stupeň  $p = 2$

(b) Uniformní metoda pro stupeň  $p = 3$

Obrázek 4.4

### 4.4. Algoritmus výpočtu interpolační křivky

Pro výpočet jednotlivých kontrolních bodů interpolační křivky potřebujeme znát mimo jiné i báze funkce, které jsou definovány rekurentně. Na základě náročného výpočtu se tedy využívají počítačové softwary pro řešení těchto úloh. Algoritmus pro výpočet kontrolních bodů interpolační křivky může vypadat následovně:

#### Vstup:

- stupeň křivky  $p \in \mathbb{N}$
- zadané hodnoty  $\mathbf{Q}_k$ , kde  $0 \leq k \leq n$

#### Výstup:

- kontrolní body  $\mathbf{P}_i$ , kde  $0 \leq i \leq n$

```

1 m=size(Q,2)-1;
2 /* Výpočet vektoru  $\bar{u}$  tětivovou metodou */
3 u(1)=0;
4 for i=1:m do
5 | d(i)=norm(Q(:,i+1)-Q(:,i));
6 end
7 d=sum(d);
8 for i=1:m-1 do
9 | u(i+1)=u(i)+(norm(Q(:,i+1)-Q(:,i))/d);
10 end
11 u(end+1)=1;
12 /* Výpočet uzlového vektoru */
13 v(1:p+1)=0;
14 k=[];
15 for j=1:m-p do
16 | for i=j:j+p-1 do
17 | | k(end+1)=u(i+1);
18 | end
19 | v(end+1)=sum(k)/p;
20 | k=[];
21 end
22 v(end+1:end+1+p)=1;
23 t=v;
24 /* Výpočet kontrolních bodů */
25 for i=1:m+1 do
26 | for j=1:m+1 do
27 | | N(j,i)= BsplineBasis(i-1,p+1,t,u(j));
28 | end
29 end
30 P = N-1Q' ;

```

Algorithm 2: Algoritmus výpočtu interpolační křivky

## 5. Aproximační křivky

Interpolace znamená, že křivka musí přímo procházet všemi zadanými body v daném pořadí. Aproximace tuto vlastnost nevyžaduje, kromě prvního a posledního bodu křivka nemusí přímo procházet zadanými body. Tuto metodu použijeme např. pokud máme data zatížena chybou měření.

Abychom zjistili, jak dobře křivka aproximuje zadané hodnoty, zavádíme pojem *kritická délka*. Kritická délka je vzdálenost mezi zadaným bodem a jeho odpovídajícím bodem na křivce. Pokud tedy minimalizujeme součet všech kritických délek, tak výsledná křivka bude velmi dobře aproximovat hledané řešení. Interpolací křivka je určitě takovým řešením, neboť kritická délka každého bodu je rovna nule. Je však nepravděpodobné, aby formulace zmíněná níže poskytla interpolační křivku.

Korektní zavedení aproximačních křivek najdeme v [8].

**Věta 5.1** *Mějme zadáno  $n + 1$  bodů  $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_n$ , stupeň  $p$  a číslo  $m$ , kde  $n > m \geq p \geq 1$ . Potom hledaná B-splína křivka stupně  $p$  zadána  $m + 1$  kontrolními body je tvaru:*

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^m N_i^p(u) \mathbf{P}_i \quad u \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (5.1)$$

Aproximační křivka splňuje následující vlastnosti:

- Křivka prochází prvním a posledním zadaným bodem, tj.  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0$  a  $\mathbf{Q}_n = \mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_m$ .
- Zbylé body  $\mathbf{Q}_k$  jsou aproximovány metodou nejmenších čtverců, tj.

$$\sum_{k=1}^{n-1} | \mathbf{Q}_k - \mathbf{C}(\bar{u}_k) |^2 \quad (5.2)$$

je minimum vzhledem k  $m + 1$  proměnným  $\mathbf{P}_i$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  je vektor vypočtených parametrických hodnot, viz 4.1.

Jak již víme, stačí nám najít jen  $m - 1$  kontrolních bodů  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{m-1}$ . Rovnice křivky se tedy změní na:

$$\mathbf{C}(u) = N_0^p(u) \mathbf{Q}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} N_i^p(u) \mathbf{P}_i + N_m^p(u) \mathbf{Q}_n. \quad (5.3)$$

### 5.1. Hledání řešení

Následující postup čerpá z [8].

Nechť

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{Q}_k - N_0^p(\bar{u}_k) \mathbf{Q}_0 - N_m^p(\bar{u}_k) \mathbf{Q}_n \quad k = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (5.4)$$

potom

$$f = \sum_{k=1}^{n-1} | \mathbf{Q}_k - \mathbf{C}(\bar{u}_k) |^2 = \sum_{k=1}^{n-1} | \mathbf{R}_k - \sum_{i=1}^{m-1} N_i^p(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i |^2 =$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left( \mathbf{R}_k - \sum_{i=1}^{m-1} N_i^p(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right) \cdot \left( \mathbf{R}_k - \sum_{i=1}^{m-1} N_i^p(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{R}_k - 2 \sum_{i=1}^{m-1} N_i^p(\bar{u}_k) (\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{P}_i) + \left( \sum_{i=1}^{m-1} N_i^p(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{m-1} N_i^p(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right) \right]
\end{aligned}$$

$f$  je skalární funkce  $m - 1$  proměnných  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{m-1}$ . Nyní aplikujeme metodu nejmenších čtverců, provedeme parciální derivaci  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}_l}$  a položíme rovno nule. To představuje extrém funkce  $f$ , kde nabývá svého minima.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}_l} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( -2N_l^p(\bar{u}_k) \mathbf{R}_k + 2N_l^p(\bar{u}_k) \sum_{i=1}^{m-1} N_i^p(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n-1} N_l^p(\bar{u}_k) \mathbf{R}_k + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m-1} N_l^p(\bar{u}_k) N_i^p(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i = 0 \\
&\quad \sum_{i=1}^{m-1} \left( \sum_{k=1}^{n-1} N_l^p(\bar{u}_k) N_i^p(\bar{u}_k) \right) \mathbf{P}_i = \sum_{k=1}^{n-1} N_l^p(\bar{u}_k) \mathbf{R}_k \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Rovnice (5.5) je lineární rovnicí s neznámými  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{m-1}$ . Pokud  $l = 1, \dots, m - 1$  získáme systém  $m - 1$  rovnic s  $m - 1$  neznámými z rovnice:

$$(N^T N) \mathbf{P} = \mathbf{R}, \tag{5.6}$$

kde  $N$  je matice skalárů

$$N = \begin{pmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) & \cdots & N_{m-1,p}(\bar{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,p}(\bar{u}_{n-1}) & \cdots & N_{m-1,p}(\bar{u}_{n-1}) \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

$\mathbf{R}$  je sloupcový vektor

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) \mathbf{R}_1 + \cdots + N_{1,p}(\bar{u}_{n-1}) \mathbf{R}_{n-1} \\ \vdots \\ N_{m-1,p}(\bar{u}_1) \mathbf{R}_1 + \cdots + N_{m-1,p}(\bar{u}_{n-1}) \mathbf{R}_{n-1} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

a  $\mathbf{P}$  je vektor neznámých

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Nyní budeme potřebovat spočítat uzlový vektor pro nově získané kontrolní body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_m$ . Uzlový vektor je tvořen  $m + p + 2$  uzly, kde je  $m - p$  vnitřních uzlů. Postup výpočtu je následující:

## 5.1. HLEDÁNÍ ŘEŠENÍ

Nechť

$$d = \frac{n+1}{m-p+1}, \quad (5.10)$$

potom

$$\begin{aligned} i &= \text{int}(jd) & \alpha &= jd - i \\ u_0 &= \dots = u_p = 0 & u_{m+1} &= \dots = u_{m+p+1} = 1 \\ u_{p+j} &= (1-\alpha)\bar{u}_{i-1} + \alpha\bar{u}_i & j &= 1, \dots, m-p, \end{aligned} \quad (5.11)$$

kde  $\text{int}(jd)$  zaokrouhlí součin  $jd$  na nejbližší nižší celé číslo, např.  $\text{int}(1.9) = 1$ .

**Příklad 5.2** Mějme zadáno šest bodů  $\mathbf{Q}_0 = [1, 0]$ ,  $\mathbf{Q}_1 = [2, -5]$ ,  $\mathbf{Q}_2 = [14, 10]$ ,  $\mathbf{Q}_3 = [17, 15]$ ,  $\mathbf{Q}_4 = [20, 12]$ ,  $\mathbf{Q}_5 = [25, 6]$ . Naším úkolem bude najít aproximační křivku stupně  $p = 3$  pro pět kontrolních bodů.

Po vypočítání parametrického vektoru a uzlového vektoru tětívovou metodou získáme následující hodnoty:

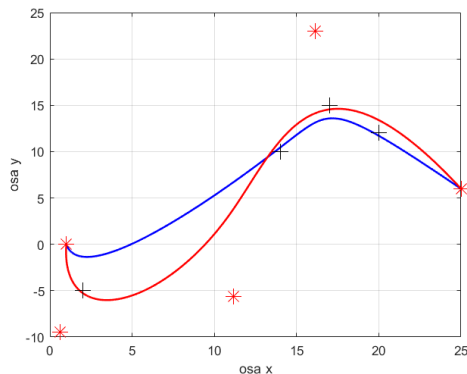
$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= (0, 0.1209, 0.5761, 0.7143, 0.8149, 1), \\ \mathbf{U} &= (0, 0, 0, 0, 0.4704, 0.7018, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Z rovnice (5.6) získáme tři kontrolní body  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  a  $\mathbf{P}_3$ . Vektor kontrolních bodů má tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,6236 & -9.4839 \\ 11.1621 & -5.6249 \\ 16.1255 & 23.0190 \\ 25 & 6 \end{pmatrix}.$$

Na obr. 5.1 je modře vykreslená křivka B-spline křivka pro zadané body  $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_5$  a červená křivka je aproximační křivka spočtená pomocí metody nejmenších čtverců. Červené symboly "\*" představují body  $\mathbf{P}_i$  a černé symboly "+" znázorňují body  $\mathbf{Q}_i$ , ke kterým má být křivka co nejbliže.

Můžeme vidět, že červená křivka lépe kopíruje zadané body a je k nim i blíže. Průměrná chyba aproximace modré křivky, nebo-li součet vzdáleností bodů  $\mathbf{Q}_i$  od křivky podělených počtem bodů, je 0.9209j. Zatímco průměrná chyba aproximace červené křivky je pouze 0.3424j.

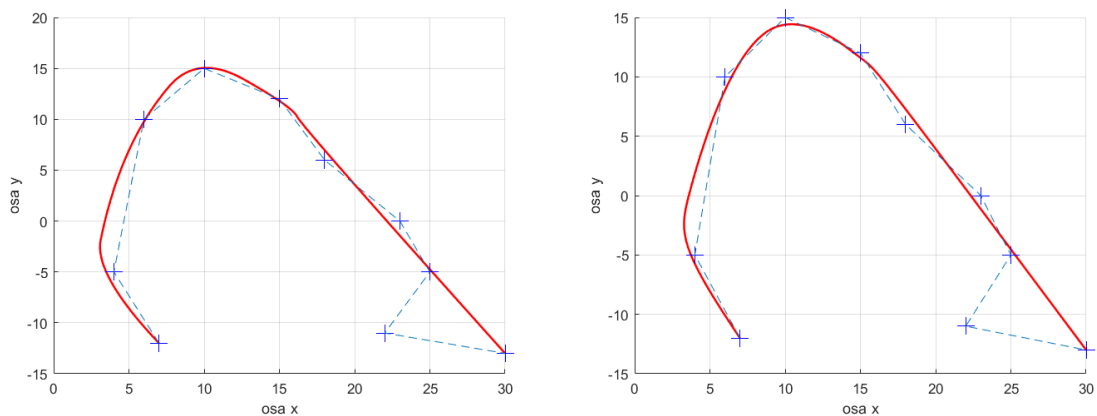


Obrázek 5.1: Aproximační křivka

## 5.2. Vliv stupně a počtu kontrolních bodů na tvar křivky

Následující pojednání čerpá z [8]. Je zřejmé, že stupeň křivky i počet zadaných kontrolních bodů ovlivní výsledný tvar aproximační křivky. Obr. 5.2a a 5.2b ukazují křivku s deseti zadanými body pro různý počet kontrolních bodů a různý stupeň. Další obrázky můžeme najít v Příloze 8.4b – 8.7b. Parametrické hodnoty  $\bar{u}_k$  na všech obrázcích jsou spočtené tětívovou metodou.

Nedoporučuje se používat vysoký stupeň křivky, protože čím větší stupeň křivky zvolíme, tím je výpočet časově náročnější a také může vysoký stupeň vést k nežádoucím tvarům křivky. Pro počet kontrolních bodů platí to, že čím jich je více zadaných, tím je křivka flexibilnější a tím lépe odpovídá zadaným bodům. Můžeme použít větší počet kontrolních bodů? Odpověď na tuto otázku zní ne, protože při globální aproximaci je počet kontrolních bodů vždy menší než počet zadaných bodů. Pokud by se počet zadaných a kontrolních bodů měl rovnat, museli bychom použít globální interpolaci místo aproximace.



(a) Křivka pro 6 kontrolních bodů a  $p = 2$     (b) Křivka pro 6 kontrolních bodů a  $p = 3$

Obrázek 5.2

## 5.3. Algoritmus výpočtu aproximační křivky

Pro získání aproximační křivky se stejně jako v případě interpolace využívá výpočetní technika vlivem náročnosti výpočtu. Zadáme stupeň křivky, zadané hodnoty a počet kontrolních bodů, pro který se bude aproximační křivky vykreslovat. Následující algoritmus ukazuje možný způsob výpočtu těchto kontrolních bodů:

### Vstup:

- stupeň křivky  $p \in \mathbb{N}$
- zadané hodnoty  $Q_i$ , kde  $0 \leq i \leq n$
- číslo  $m$ , které udává počet kontrolních bodů  $P_j$ , tj.  $n > m \geq p \geq 1$

### Výstup:

- kontrolní body  $P_j$ , kde  $0 \leq j \leq m$

### 5.3. ALGORITMUS VÝPOČTU APROXIMAČNÍ KŘIVKY

```

1 n=size(Q,2)-1;
2 /* Výpočet vektoru  $\bar{u}$  třetivovou metodou */
3 u(1)=0;
4 for i=1:n do
5 | d(i)=norm(Q(:,i+1)-Q(:,i));
6 end
7 d=sum(d);
8 for i=1:n-1 do
9 | u(i+1)=u(i)+(norm(Q(:,i+1)-Q(:,i))/d);
10 end
11 u(end+1)=1;
12 /* Výpočet uzlového vektoru */
13 v(1:p+1)=0;
14 k=[];
15 for j=1:n-p do
16 | for i=j:j+p-1 do
17 | | k(end+1)=u(i+1);
18 | end
19 | v(end+1)=sum(k)/p;
20 | k=[];
21 end
22 v(end+1:end+1+p)=1;
23 t=v;
24 /* Výpočet kontrolních bodů */
25 for i=1:n-1 do
26 | a=BsplineBasis(0,p+1,t,u(i+1));
27 | b=BsplineBasis(m,p+1,t,u(i+1));
28 | rx(i)=Q(1,i+1)-a*Q(1,1)-b*Q(1,size(Q,2));
29 | ry(i)=Q(2,i+1)-a*Q(2,1)-b*Q(2,size(Q,2));
30 end
31 for i=1:m-1 do
32 | for j=1:n-1 do
33 | | N(j,i)=BsplineBasis(i,p+1,t,u(j+1));
34 | end
35 end
36 for i=1:n-1 do
37 | for j=1:m-1 do
38 | | Rx(j,i)=BsplineBasis(j,p+1,t,u(i+1))*rx(i);
39 | | Ry(j,i)=BsplineBasis(j,p+1,t,u(i+1))*ry(i);
40 | end
41 end
42 Rx=sum(Rx,2);
43 Ry=sum(Ry,2);
44 Px = (N' * N)-1 Rx;
45 Py = (N' * N)-1 Ry;

```

**Algorithm 3:** Algoritmus výpočtu aproximační křivky

## 6. Programová implementace

V rámci této bakalářské práce vznikly tři programy, kde si uživatel sám zvolí potřebné parametry a každý program vykreslí výslednou křivku. První program zahrnuje kapitoly 2 a kapitoly 3, kde si uživatel sám zadá body, stupeň a také váhový a uzlový vektor. Program mu vykreslí výslednou NURBS křivku.

Druhý program zahrnuje kapitolu 4, uživatel si sám zadá body a zvolí stupeň, program vykreslí interpolační křivku.

Poslední program se věnuje kapitole 5, kde uživatel musí zadat tři hodnoty: stupeň, počet zvolených bodů a počet kontrolních bodů. Program nalezne a vykreslí aproximační křivku. Cílem této kapitoly je vysvětlit ovládání vytvořených programů.

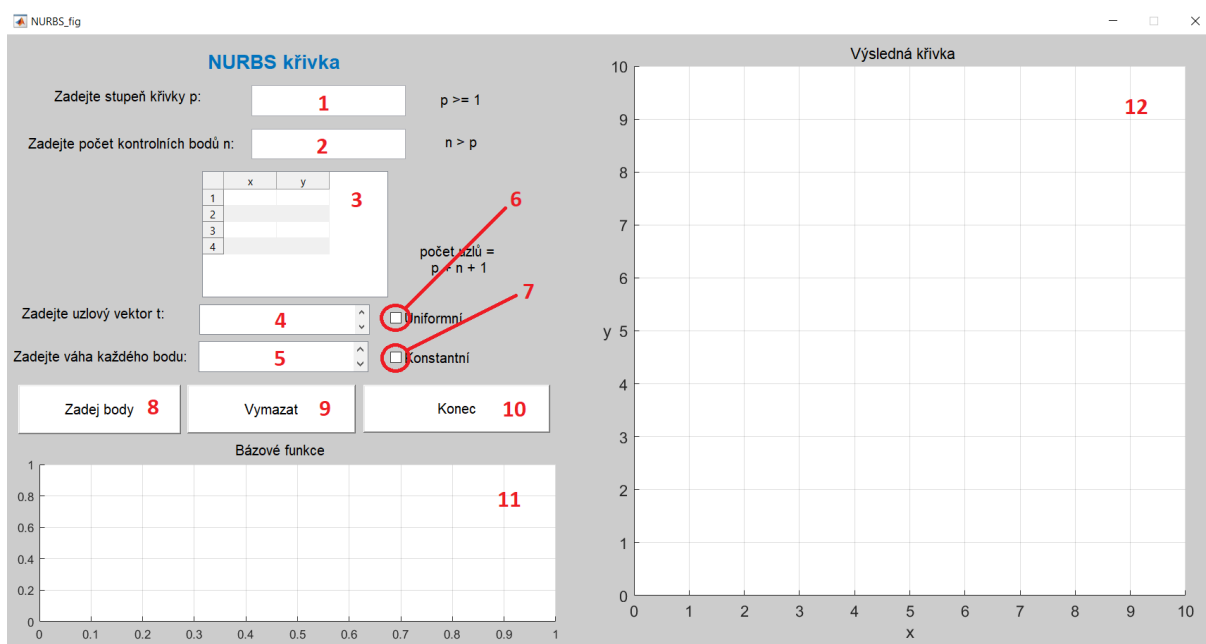
### 6.1. Program NURBS

#### Ovládání programu NURBS

Na obr. 6.1 je znázorněno červeně očíslované uživatelské prostředí. Vysvětlení jednotlivých čísel:

1. Uživatel si sám zadá stupeň křivky  $p$ , kde  $p \in \mathbb{N}$ .
2. Uživatel zadá počet kontrolních bodů  $n$ , kde  $n > p$ .
3. Do tabulky se nahrávají souřadnice kontrolních bodů.
4. Uživatel má možnost sám si zvolit uzlový vektor, kde celkový počet uzlů se musí rovnat  $p + n + 1$ . V tomto případě nesmí být zároveň zaškrtnuto pole číslo 6. Jednotlivé uzly musí být od sebe odděleny mezerou.
5. Do pole číslo 5 může uživatel nahrát váhový vektor, zvolit významnost každého kontrolního bodu. Jednotlivé váhy musí být odděleny mezerou.
6. Uživatel má možnost zvolit výpočet uniformního uzlového vektoru. V tomto případě zůstane pole číslo 4 uživatelem nevyplněné a program zde vypíše vypočtený uniformní uzlový vektor.
7. Uživatel má možnost zvolit váhu každého bodu stejnou při zaškrtnutí pole číslo 7. V tomto případě zůstane pole číslo 5 uživatelem nevyplněné a program zde vypíše vypočtený konstantní váhový vektor.
8. Po stisku tohoto pole se uživateli zpřístupní možnost zadat  $n$  kontrolních bodů do pole číslo 12.
9. Vymaže všechny vykreslené křivky, souřadnice bodů, váhový a uzlový vektor.
10. Ukončí program.
11. Znázornění bazových funkcí ovlivněných zadanými váhami.
12. V poli číslo 12 si uživatel zvolí souřadnice kontrolních bodů stiskem levého tlačítka myši. Zde bude také vykreslena výsledná NURBS křivka.

## 6.2. INTERPOLAČNÍ PROGRAM



Obrázek 6.1: Program NURBS

### Vliv počtu bodů na délku výpočtu NURBS algoritmu

V tabulce 6.1 najdeme uvedenou závislost zvoleného stupně křivky  $p$  a počtu bodů na čase. Naměřené časové hodnoty jsou uvedeny v sekundách.

Obr. 6.2 znázorňuje lineární závislost mezi zvoleným počtem bodů a délkou výpočtu programu. Časové hodnoty uvedené v tabulce jsou znázorněny v grafu symbolem "\*" příslušnou barvou pro odpovídající stupeň a počet bodů. Jednotlivé lineární závislosti byly vypočteny metodou nejmenších čtverců a jejich předpis je následující:

$$p = 1 : f(x) = 2.894 \cdot 10^{-5}x + 0.008444$$

$$p = 2 : f(x) = 3.766 \cdot 10^{-5}x + 0.01045$$

$$p = 3 : f(x) = 3.934 \cdot 10^{-5}x + 0.01397$$

$$p = 5 : f(x) = 4.7 \cdot 10^{-5}x + 0.02398$$

	10 bodů	50 bodů	100 bodů	300 bodů	500 bodů
p=1	0.006	0.011	0.012	0.02	0.021
p=2	0.012	0.013	0.013	0.019	0.031
p=3	0.015	0.017	0.019	0.019	0.037
p=5	0.024	0.027	0.029	0.037	0.048

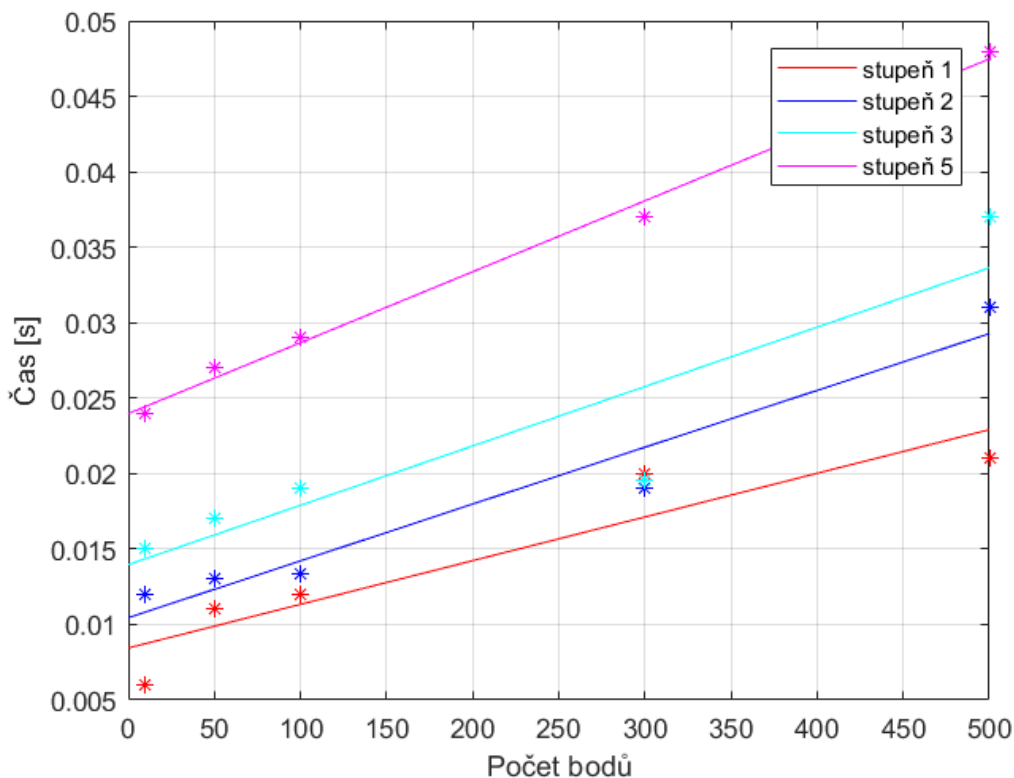
Tabulka 6.1: Závislost počtu bodů a zvoleného stupně křivky na čase

## 6.2. Interpolační program

### Ovládání interpolačního programu

Na obr. 6.3 se nachází uživatelské prostředí interpolačního programu s číselnými popisky jednotlivých polí. Vysvětlení jednotlivých čísel:

1. Uživatel si sám zadá stupeň křivky  $p$ , kde  $p \in \mathbb{N}$ .
2. Uživatel zadá počet kontrolních bodů  $n$ , kde  $n \geq p + 1$ .
3. Do tabulky se nahrávají souřadnice kontrolních bodů.



Obrázek 6.2: Znázornění lineární závislosti počtu bodů a stupně na čase

4. Po stisku tohoto pole se uživateli zpřístupní možnost zadat  $n$  kontrolních bodů do pole číslo 8.
5. Vymaže všechny vykreslené křivky a souřadnice bodů.
6. Ukončí program.
7. Znázornění základních funkcí.
8. V tomto poli si uživatel zvolí souřadnice kontrolních bodů stiskem levého tlačítka myši. Zde bude také vykreslena výsledná interpolační křivka.

### Vliv počtu bodů na délku výpočtu interpolačního algoritmu

Tabulka 6.2 uvádí naměřený čas v sekundách pro zvolený stupeň  $p$  a počet bodů. Časové naměřené hodnoty jsou uvedeny na obr. 6.4, kde jsou znázorněny symbolem "\*". Tyto naměřené hodnoty byly proloženy aproximační křivkou, která má následující předpis:

$$p = 1 : f(x) = 0.4694 \cdot e^{0.005744x}$$

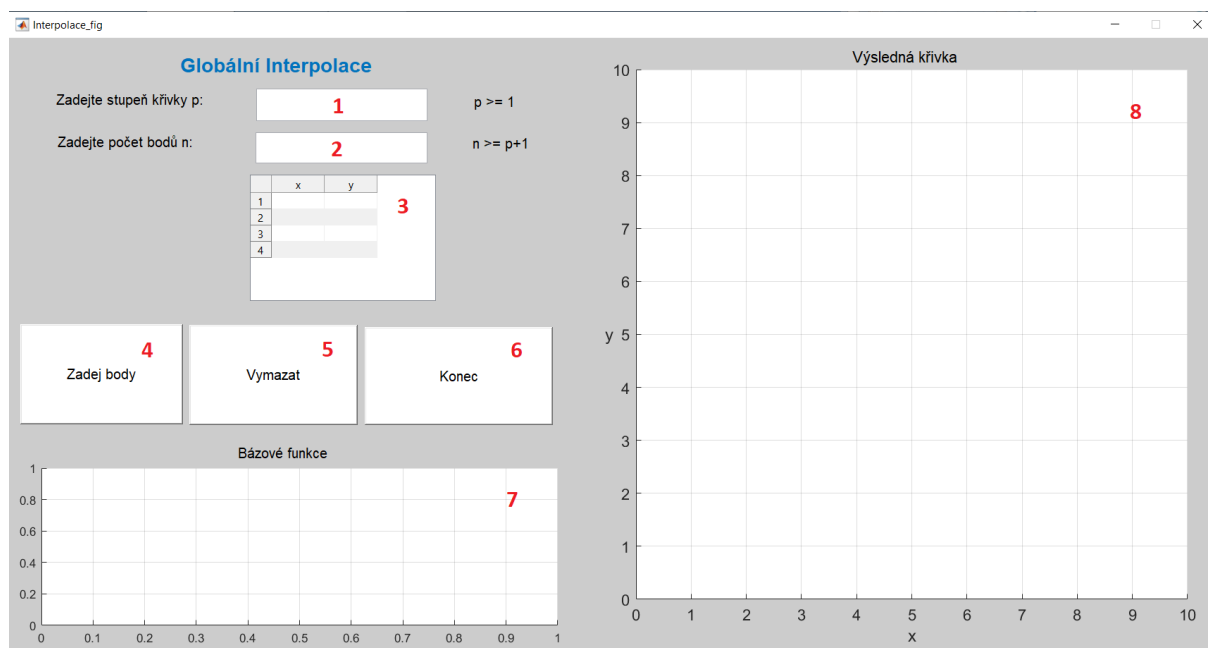
$$p = 2 : f(x) = 0.7601 \cdot e^{0.006388x}$$

$$p = 3 : f(x) = 1.698 \cdot e^{0.006319x}$$

$$p = 5 : f(x) = 6.287 \cdot e^{0.006815x}$$

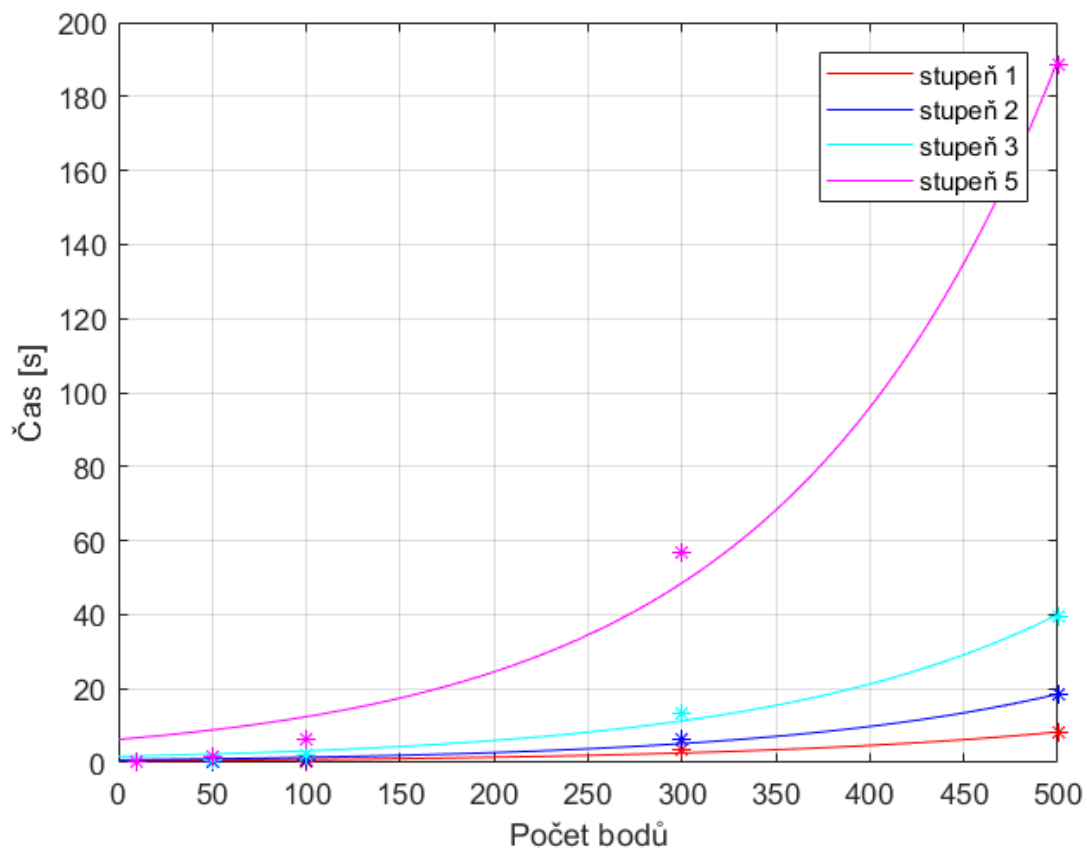
	10 bodů	50 bodů	100 bodů	300 bodů	500 bodů
p=1	0.011	0.01	0.386	3.468	8.150
p=2	0.016	0.208	0.789	6.216	18.378
p=3	0.029	0.719	2.010	13.422	39.690
p=5	0.091	1.810	6.512	56.729	188.65

## 6.2. INTERPOLAČNÍ PROGRAM



Obrázek 6.3: Interpoláční program

Tabulka 6.2: Závislost počtu bodů a zvoleného stupně křivky na čase



Obrázek 6.4: Exponenciální závislost počtu bodů a stupně na čase



### 6.3. Aproximační program

#### Ovládání aproximačního programu

Obr. 6.5 ukazuje očíslované uživatelské prostředí aproximačního programu. Vysvětlení jednotlivých čísel:

1. Uživatel si sám zadá stupeň křivky  $p$ , kde  $p \in \mathbb{N}$ .
2. Uživatel napíše počet zadaných bodů  $m$ , kde  $m > p + 1$ .
3. Uživatel napíše počet kontrolních bodů  $n$ , kde  $(n < m) \wedge (n \geq p + 1)$ .
4. V tabulce se po vykreslení křivky zobrazí souřadnice kontrolních bodů.
5. Tato tabulka ukazuje souřadnice zadaných bodů.
6. Po stisku tohoto pole se uživateli zpřístupní možnost zadat  $m$  zadaných bodů do pole číslo 11.
7. Vymaže všechny vykreslené křivky, souřadnice bodů a vypočtenou průměrnou chybu.
8. Ukončí program.
9. Po vykreslení křivky se spočítá průměrná chyba, které se při aproximaci dopouštíme. Průměrná vzdálenost křivky od zadaných bodů.
10. Znázornění bázových funkcí.
11. V poli číslo 11 si uživatel zvolí souřadnice kontrolních bodů stiskem levého tlačítka myši. Zde bude také vykreslena výsledná aproximační křivka.

#### Vliv počtu bodů na čas výpočtu aproximačního algoritmu

V následující tabulce 6.3 je uveden čas v sekundách, za který program dokáže vypočítat body aproximační křivky pro zvolený stupeň  $p$  a zvolený počet bodů. Tyto časové závislosti byly vyneseny do obr. 6.6, kde jsou znázorněny symbolem hvězdy "\*" příslušnou barvou pro daný stupeň. Získané hodnoty byly pomocí minimalizační metody proloženy následujícími křivkami:

$$p = 1 : f(x) = 1.019 \cdot e^{0.006425x}$$

$$p = 3 : f(x) = 4.739 \cdot e^{0.006463x}$$

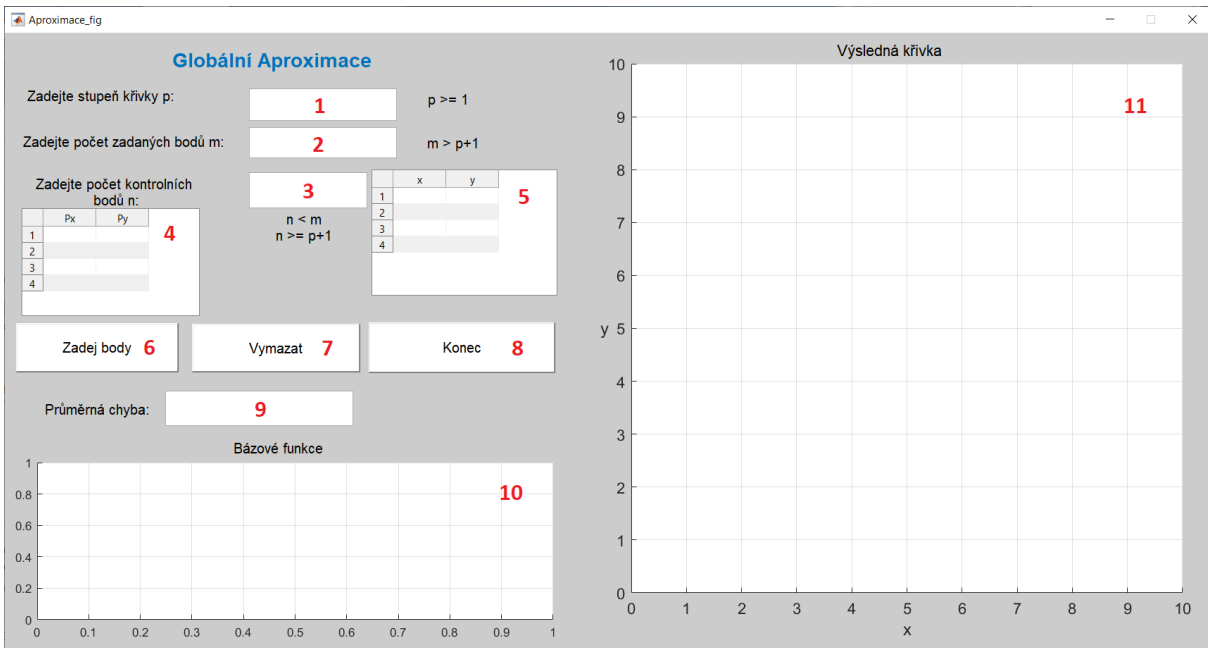
$$p = 2 : f(x) = 2.291 \cdot e^{0.006415x}$$

$$p = 5 : f(x) = 20.71 \cdot e^{0.006434x}$$

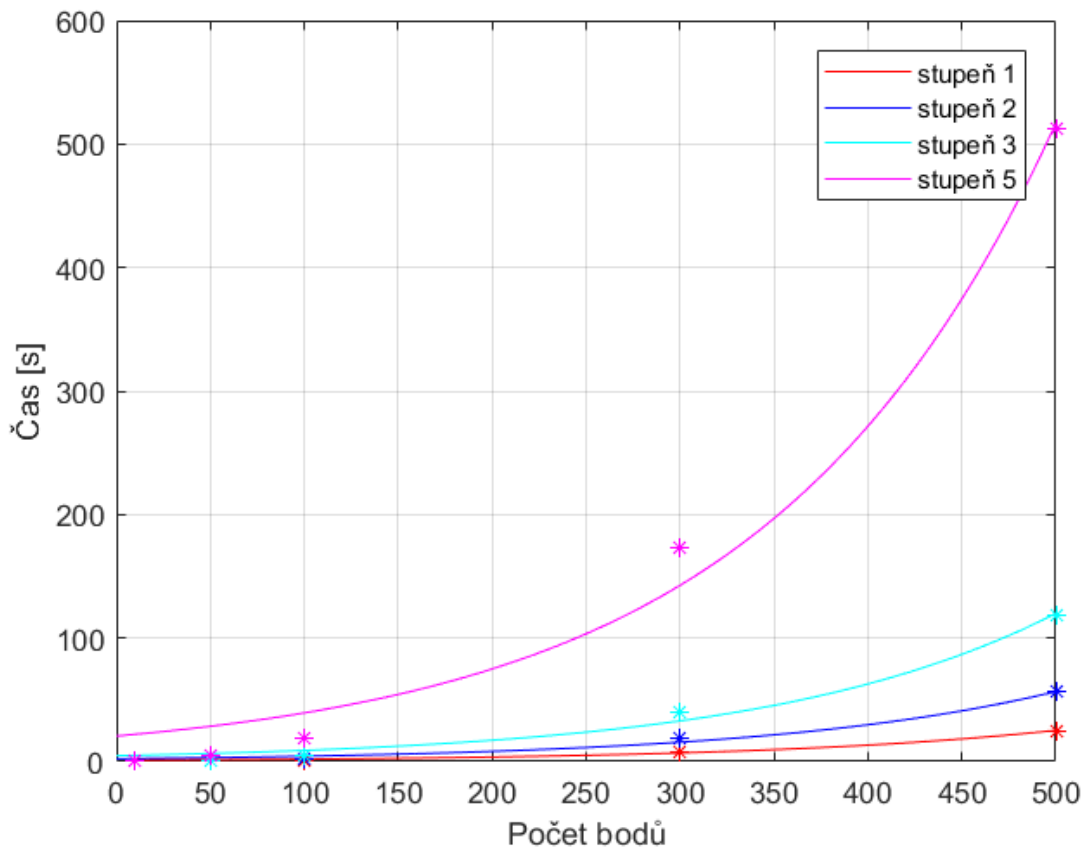
	10 bodů	50 bodů	100 bodů	300 bodů	500 bodů
p=1	0.012	0.566	0.943	8.344	25.111
p=2	0.033	0.586	1.923	19.129	56.127
p=3	0.064	1.190	4.566	39.667	118.940
p=5	0.176	4.436	18.70	173.350	512.145

Tabulka 6.3: Závislost počtu bodů a zvoleného stupně křivky na čase

### 6.3. APROXIMAČNÍ PROGRAM



Obrázek 6.5: Aproximační program



Obrázek 6.6: Znázornění závislosti počtu bodů a stupně na čase

## 7. Závěr

Tato práce má za úkol shrnout dosavadní poznatky v oblasti modelování hladkých křivek s použitím B-spline funkcí a přiblížit čtenáři základní principy, na základě kterých se křivky vytvářejí.

Nejprve bylo potřeba získat takový algoritmus, který by dokázal vypočítat bázové funkce 2.1, neboť právě bázové funkce tvoří jádro B-spline křivek a využívají se téměř ve všech ostatních algoritmech pro výpočet B-spline křivek. Dále byly vytvořeny celkem tři programy v softwaru Matlab s uživatelským prostředím. Všechny tyto programy využívají algoritmus výpočtu bázových funkcí. Tyto programy mají za úkol znázornit výpočet B-spline křivek pomocí různých metod.

Tato práce se sice soustředila na demonstraci křivek v rovině, ale toto téma můžeme rozšířit i do další dimenze, do prostoru. Modelování v prostoru je velmi důležité, neboť většina odvětví, které využívají počítačovou grafiku (počítačové hry, úprava filmů, strojírenství atd.) by se neobešly bez modelování v prostoru. V počítačové grafice se kromě křivek využívají také plochy, které můžeme získat rozšířením algoritmů pro křivky. Nabízí se tedy možnost pokračování v této tematice v prostoru, kde by se mimo B-spline křivky využívali také hladké plochy.

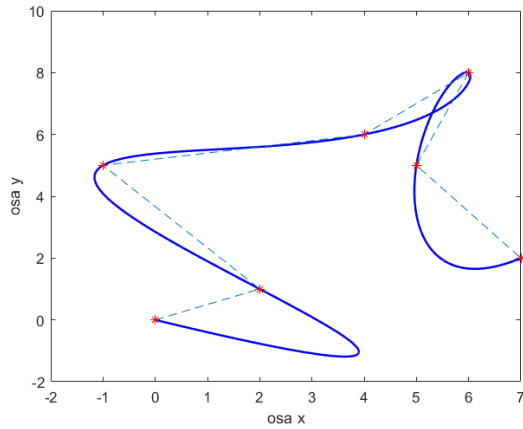
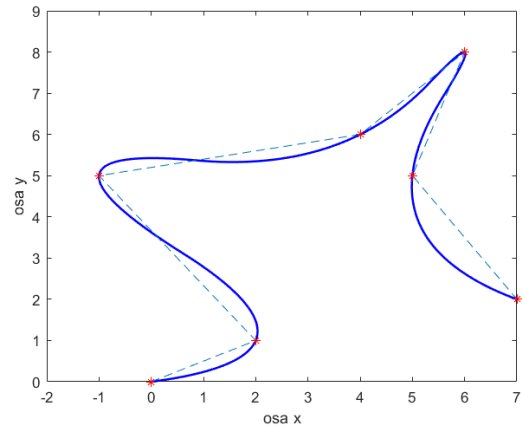
Před počátkem 21. století se začala prudce vyvíjet počítačová grafika a nyní jistě patří k dominantním oborům, bez kterých bychom si každodenní svět nedokázali představit. S rozšířením počítačů do domácností vzrostl také zájem o pohodlné ovládní, což byl startovací motor pro grafiku. Pokud srovnáme například první počítačové hry před 40 lety, kde byly vidět jednotlivé pixely, s dnešními hrami, tak si zajisté všimneme pokroku, který počítačová grafika stihla za poměrně krátký čas ujit. Grafické zobrazení nabývá velmi rychle na realističnosti a možná za pár let nebudeme moci ani rozeznat jestli to, co vidíme, je skutečnost nebo dokonalá iluze v podobě počítačové grafiky.

# Literatura

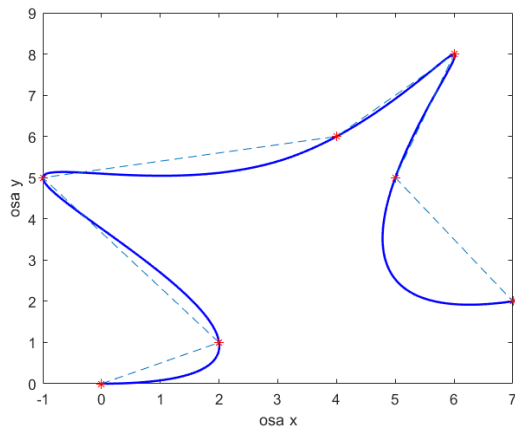
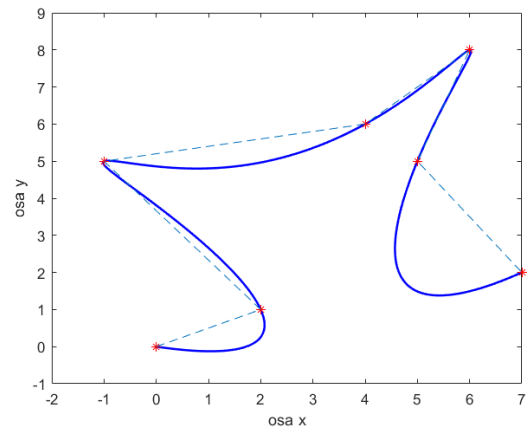
- [1] B-spline. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2020-03-08]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/B-spline>
- [2] Create a Simple App Using GUIDE. *MathWorks* [online]. [cit. 2020-03-21]. Dostupné z: [https://www.mathworks.com/help/matlab/creating\\_guis/about-the-simple-guide-gui-example.html](https://www.mathworks.com/help/matlab/creating_guis/about-the-simple-guide-gui-example.html)
- [3] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. *Numerické metody*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-80-214-3752-4.
- [4] Geometrie/Racionální B-spline křivka. *Wikiknihy* [online]. 2017, 10.1.2019 [cit. 2020-03-21]. Dostupné z: [https://cs.wikibooks.org/wiki/Geometrie/Racion%C3%A1ln%C3%AD\\_B%E2%80%93spline\\_k%C5%99ivka](https://cs.wikibooks.org/wiki/Geometrie/Racion%C3%A1ln%C3%AD_B%E2%80%93spline_k%C5%99ivka)
- [5] Geometrie/Úvod do křivek. *Wikiknihy* [online]. 2017, 8.3.2020 [cit. 2020-03-21]. Dostupné z: [https://cs.wikibooks.org/wiki/Geometrie/%C3%9Avod\\_do\\_k%C5%99ivek](https://cs.wikibooks.org/wiki/Geometrie/%C3%9Avod_do_k%C5%99ivek)
- [6] HUNYADI, Levente. B-splines. *MathWorks* [online]. [cit. 2020-03-21]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27374-b-splines>
- [7] PATRIKALAKIS, Nicholas, Takashi MAEKAWA a Wonjoon CHO. Shape interrogation for Computed Aided Design and Manufacturing [online]. 2009 [cit. 2020-03-08]. Dostupné z: <https://web.mit.edu/hyperbook/Patrikalakis-Maekawa-Cho/>
- [8] PIEGL, Les A. a Wayne TILLER. *The NURBS book*. 2nd ed. Berlin: Springer, c1997. ISBN 35-406-1545-8.
- [9] PROCHÁZKOVÁ, Jana. *Modelování matematických ploch v CAD systémech* [online]. 2007 [cit. 2020-03-21]. Dostupné z: [https://www.vutbr.cz/en/rad/results/detail?vav\\_id=66823#vysledek-66823](https://www.vutbr.cz/en/rad/results/detail?vav_id=66823#vysledek-66823). Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně. Vedoucí práce Dalibor Martišek.
- [10] Projektivní prostor. *Matematika ONLINE* [online]. Brno, 2005 [cit. 2020-03-21]. Dostupné z: <https://mathonline.fme.vutbr.cz/default.aspx?section=2&article=261&highlighttext=download>
- [11] SHENE, Ching-Kuang. *Introduction to Computing with Geometry Notes* [online]. Michigan, 1994 [cit. 2020-03-08]. Dostupné z: <https://pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/>
- [12] SPÄTH, Helmuth. *One Dimensional Spline Interpolation Algorithms*. Oldenburg: A K Peters/CRC, 1995. ISBN 1568810164.
- [13] Spline (mathematics). In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2020-03-21]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Spline\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics))
- [14] TOWNSEND, Alastair. On the Spline. *AlaTown* [online]. 9.1.2015 [cit. 2020-03-21]. Dostupné z: <http://www.alatown.com/spline/>

## 8. Seznam příloh

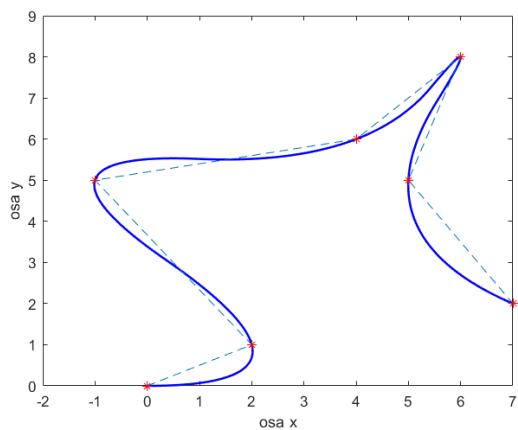
### A) Vliv parametrů na tvar interpolačních a aproximačních křivek

(a) Uniformní metoda pro stupeň  $p = 4$ (b) Tětivová metoda pro stupeň  $p = 2$ 

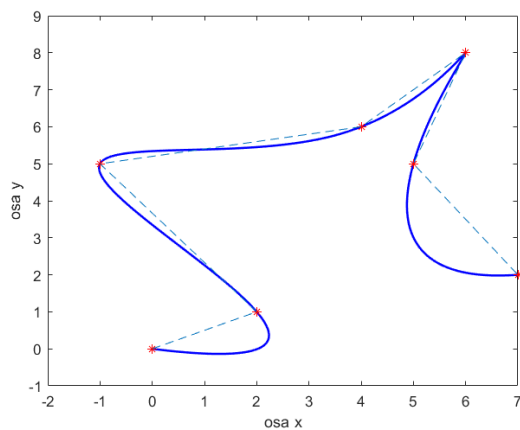
Obrázek 8.1

(a) Tětivová metoda pro stupeň  $p = 3$ (b) Tětivová metoda pro stupeň  $p = 4$ 

Obrázek 8.2

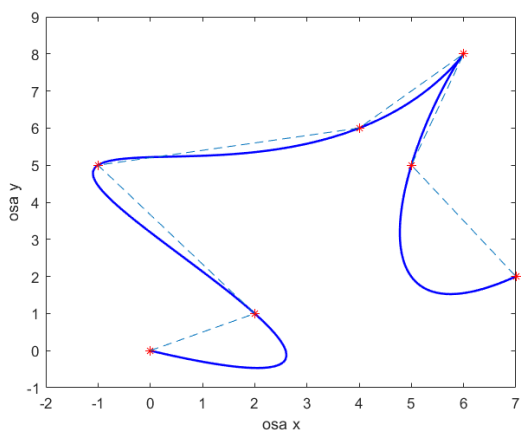


(a) Dostředivá metoda pro stupeň  $p = 2$

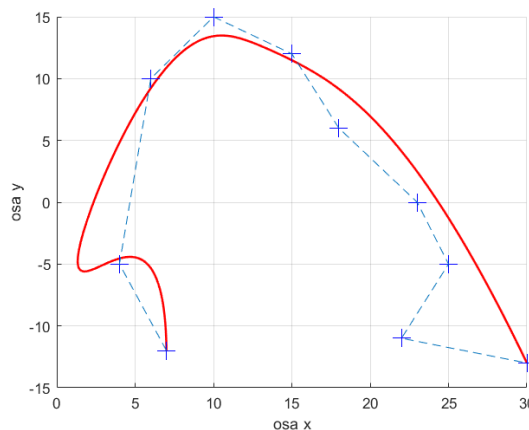


(b) Dostředivá metoda pro stupeň  $p = 3$

Obrázek 8.3

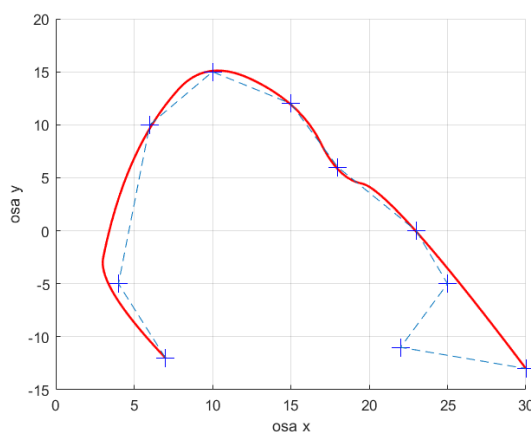


(a) Dostředivá metoda pro stupeň  $p = 4$

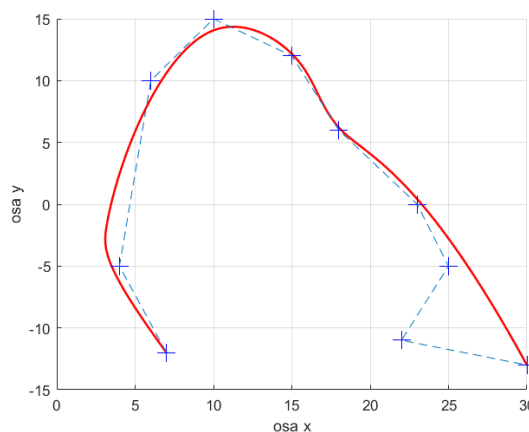


(b) Křivka pro 6 kontrolních bodů a  $p = 4$

Obrázek 8.4

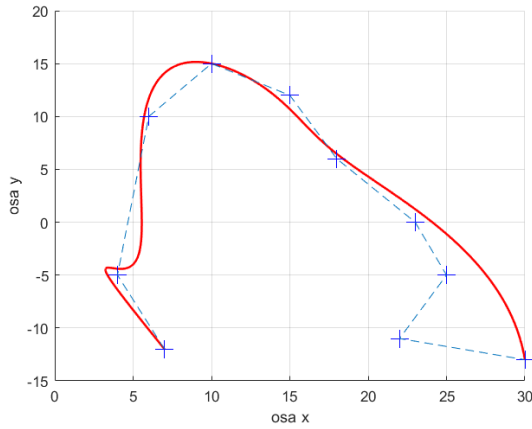
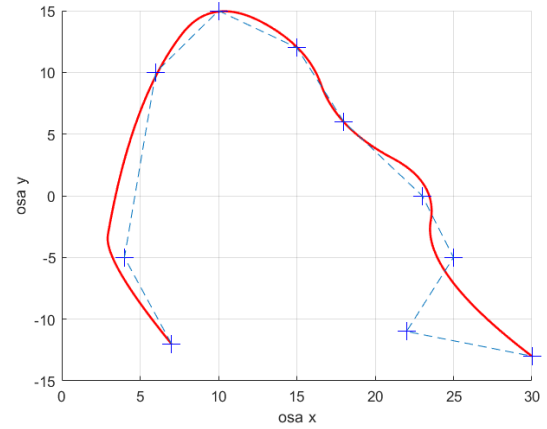


(a) Křivka pro 7 kontrolních bodů a  $p = 2$

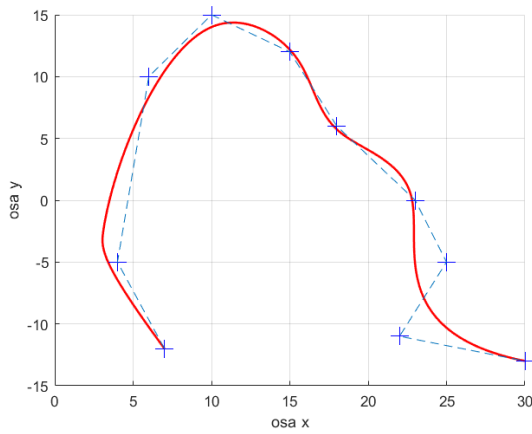
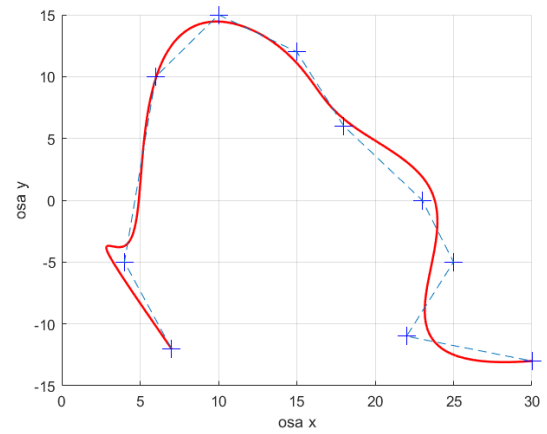


(b) Křivka pro 7 kontrolních bodů a  $p = 3$

Obrázek 8.5

(a) Křivka pro 7 kontrolních bodů a  $p = 4$ (b) Křivka pro 8 kontrolních bodů a  $p = 2$ 

Obrázek 8.6

(a) Křivka pro 8 kontrolních bodů a  $p = 3$ (b) Křivka pro 8 kontrolních bodů a  $p = 4$ 

Obrázek 8.7

## B) Soubory potřebné pro spuštění vytvořených programů

- Soubor *Aproximace\_fig.fig*, což je soubor, obsahující uživatelské prostředí aproximačního programu.
- Soubor *Aproximace\_fig.m*, který obsahuje algoritmy výpočtu aproximačních křivek. Přes tento soubor spustíme aproximační program.
- Funkce *bspline\_basis.m*, která je zapotřebí pro výpočet bazových funkcí křivek.
- Funkce *bspline\_deboor.m*, která vypočítá jednotlivé body B-spline křivky.
- Funkce *bspline\_wdeboor.m*, která vypočítá jednotlivé body NURBS křivky.
- Soubor *Interpolace\_fig.fig*, který obsahuje uživatelské prostředí interpolačního programu.
- Soubor *Interpolace\_fig.m*, skript obsahující algoritmy výpočtu interpolačních křivek. Po stisku klávesy F5 se spustí interpolační program.
- Soubor *NURBS\_fig.fig*.
- Soubor *NURBS\_fig.m*, který po spuštění zapne program pro vykreslení NURBS křivek.
- Funkce *Prum\_Chyba.m*, kterou využívá aproximační program pro výpočet průměrné chyby.