

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Fázové portréty matematického kyvadla



Vedoucí bakalářské práce:
prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.
Rok odevzdání: 2012

Vypracoval:
Kamila Dvorská
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení paní prof. RNDr. Ireny Rachůnkové, DrSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 11. dubna 2012

Poděkování

Děkuji paní prof. RNDr. Ireně Rachůnkové, DrSc. za odborné vedení při sepisování této práce. Dále děkuji rodičům za podporu při studiu na vysoké škole.

Obsah

Úvod	4
1 Odvození modelu matematického kyvadla	5
2 Rovnice kyvadla řešená jako lineární rovnice	8
2.1 Nahrazení rovnice kyvadla lineární rovnicí	8
2.2 Lineární homogenní diferenciální rovnice	8
2.2.1 Postup k nalezení řešení systému	10
2.3 Aplikace na kyvadlo bez tlumení	13
3 Rovnice kyvadla studovaná pomocí linearizace	16
3.1 Aplikace na kyvadlo bez tlumení	21
3.1.1 Nalezení tvaru sedla metodou řad	21
3.2 Aplikace na kyvadlo s tlumením	25
4 Řešení pomocí Hamiltonovských systémů	28
4.1 Hamiltonovské systémy	28
4.2 Aplikace na kyvadlo bez tlumení	30
4.3 Určování tvaru orbit	31
5 Popis fázového portréту	41
Závěr	42

Úvod

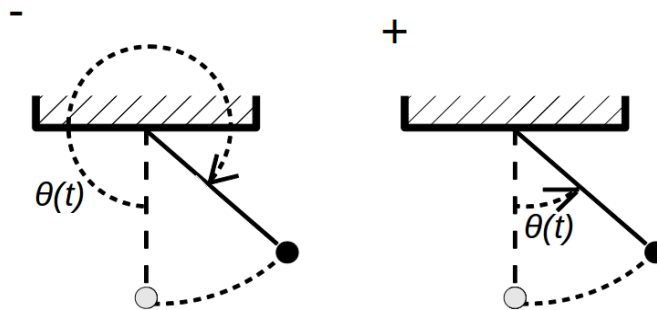
Cílem této práce je matematicky zkoumat pohyb matematického kyvadla.

Práce je rozdělena do pěti základních kapitol. První popisuje odvození modelu matematického kyvadla s využitím II. Newtonova zákona. V druhé kapitole řešíme pohyb kyvadla s využitím skutečnosti, že $\sin x \approx x$ pro velmi malé hodnoty x . Pro řešení pohybu kyvadla ve třetí kapitole využíváme metodu linearizace a ve čtvrté pak teorii Hamiltonovských systémů. Pátá a poslední kapitola shrnuje poznatky celé práce do popisu fázového portréту matematického kyvadla.

V práci značíme vektory i vektorové funkce podtržením.

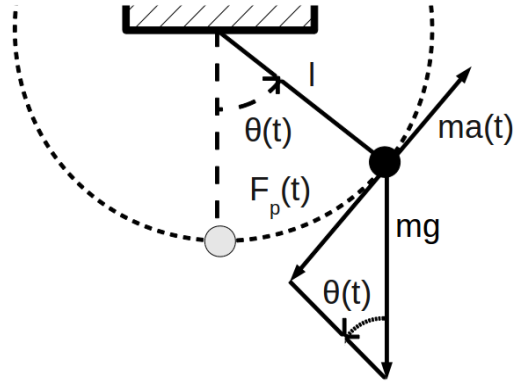
1 Odvození modelu matematického kyvadla

Fyzikálním kyvadlem chápeme každý zavěšený objekt, který se pohybuje tam a zpět. Speciálním případem tohoto kyvadla je *matematické kyvadlo* představující nehmotnou tyčku s upevněnou kuličkou na svém konci, kde veškerá hmotnost kyvadla je soustředěna v kuličce. Předpokládejme, že na kyvadlo nepůsobí žádná síla (např. odpor vzduchu) kromě gravitační. Hmotnost kuličky označíme m , $m > 0$, a symbolem l , $l > 0$, označíme konstantní délku tyčky. Pohyb kyvadla je v každém okamžiku t určen úhlem $\theta(t)$ a úhlovou rychlostí $\theta'(t)$. Tyto dvě funkce budeme vyšetřovat. Úhel $\theta(t)$ svírá tyč s rovnovážnou polohou v okamžiku t . Můžeme jej měřit dvěma způsoby. Pokud měříme proti směru hodinových ručiček, má úhel $\theta(t)$ kladné znaménko. Při měření po směru hodinových ručiček má úhel $\theta(t)$ znaménko záporné (viz. obrázek níže).



Obr. 1: Měření úhlu

Na pohyb kyvadla v okamžiku t působí tečná složka gravitační síly mg , tj. složka $mg \sin \theta(t)$, a má směr tečny k dráze kuličky.



Obr. 2: Schéma sil

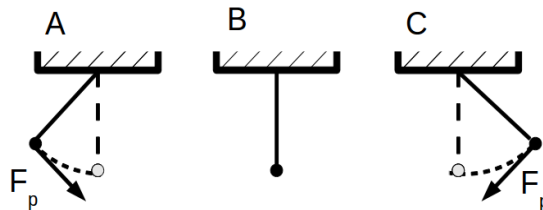
Dle schématu a II. Newtonova zákona dostáváme pro sílu $F(t)$ působící na kuličku $F(t) = ma(t)$, kde $a(t)$ je zrychlení kuličky. Z podmínky rovnováhy mezi silou $F(t)$ a vratnou silou $F_p(t)$ vyplývá rovnost $F(t) = F_p(t)$, kde $F_p(t) = -mg \sin \theta(t)$. Znaménko minus vyskytující se u síly $mg \sin \theta(t)$ značí, že vratná síla $F_p(t)$ směřuje k rovnovážné (svislé) poloze a působí proti síle $F(t)$. Platí proto

$$ma(t) = -mg \sin \theta(t). \quad (1)$$

Označíme-li dráhu kuličky $x(t)$, pak její zrychlení $a(t)$ v čase t je $x''(t)$, tedy $mx''(t) = -mg \sin \theta(t)$ a pak

$$x''(t) + g \sin \theta(t) = 0. \quad (2)$$

Vzhledem k úhlu $\theta(t)$ mohou nastat tři situace.



Obr. 3: Znázornění směru síly $F_p(t)$

Na obrázku A je $\theta(t) < 0$, kyvadlo se nachází nalevo od svislé polohy, $F_p(t) > 0$ a směřuje doprava. Na obrázku B je $\theta(t) = 0$, kyvadlo je ve svislé poloze a $F_p(t) = 0$. Na obrázku C je $\theta(t) > 0$, kyvadlo se nachází napravo od svislé polohy, $F_p(t) < 0$.

0 a směřuje doleva. (Připomeňme, že délka oblouku kružnice $x(t)$ s poloměrem l je násobkem středového úhlu $\theta(t)$, tj. $x(t) = l\theta(t)$.) Vztah (2) upravíme použitím rovnosti $x(t) = l\theta(t)$. Tento vztah dvakrát zderivujeme, dosadíme $x''(t) = l\theta''(t)$ do rovnice (2) a upravíme. Získáme

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0. \quad (3)$$

Rovnice (3) popisuje *matematické kyvadlo bez tlumení* a nazývá se *pohybová rovnice matematického kyvadla*. K rovnici (3) přiřadíme ¹ systém diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -b^2 \sin x_1(t), \end{cases} \quad (4)$$

kde $x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \theta'(t)$ a $b = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Pozměníme-li rovnici (3) na

$$\theta''(t) + a\theta'(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0, \quad (5)$$

dostaneme rovnici *matematického kyvadla s tlumením*, kde a představuje *koefficient odporu vzduchu*. Předpokládáme, že a je kladná konstanta. K rovnici (5) přiřadíme opět systém diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -ax_2(t) - b^2 \sin x_1(t), \end{cases} \quad (6)$$

kde $x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \theta'(t)$ a $b = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Ačkoliv rovnice (3) a (5) znázorňují velmi jednoduché chování, diferenciální rovnice nemohou být řešeny základními analytickými metodami, neboť jsou nelineární ². V dalších kapitolách ukážeme metody, kterými lze vyšetřovat rovnice (3) a (5) resp. systémy (4) a (6).

¹Např. dle [3], str. 41.

²Obsahují funkci sinus, která je nelineární.

2 Rovnice kyvadla řešená jako lineární rovnice

2.1 Nahrazení rovnice kyvadla lineární rovnicí

Užijme pro rovnici kyvadla (3) skutečnost, že pro velmi malé úhly, kdy $|\theta(t)| < \frac{\pi}{12}$, je $\sin \theta(t) \approx \theta(t)$. Pro přehlednost zvolme ještě substituci $b = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Obdržíme lineární diferenciální rovnici

$$\theta''(t) + b^2\theta(t) = 0, \quad (7)$$

kterou převedeme na systém diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -b^2x_1(t). \end{cases} \quad (8)$$

Volbou $b = 1$ v systému (8) dostaneme systém, který je znám jako *lineární harmonický oscilátor*.

2.2 Lineární homogenní diferenciální rovnice

Nyní uvedme teorii, pomocí které v další podkapitole vyřešíme systém (8). Uvažujme lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, tedy rovnici

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t). \quad (9)$$

Ve složkách

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t). \end{cases}$$

Matice A je číselná matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Uveďme ještě, že $\underline{x}(t)$ značí vektorovou funkci takovou, že ve složkách má tvar $\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Rovnice (9) bude sloužit jako nástroj pro vyšetřování nelineárních diferenciálních rovnic, zvláště pak pro určování fázového portréту rovnice $\underline{x}(t)' = \underline{f}(\underline{x}(t))$. Počáteční podmínka má tvar $\underline{x}(0) = \underline{x}^0$. Ve složkách ji pak

můžeme zapsat takto

$$\begin{cases} x_1(0) = x_1^0, \\ x_2(0) = x_2^0. \end{cases} \quad (10)$$

Věta 2.1. *Úloha (9), (10) má pro libovolné $\underline{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ jediné řešení $\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0)$ definované na celém \mathbb{R} .*

Řešení úlohy (9), (10) lze psát ve tvaru

$$\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0) = e^{At} \underline{x}^0, \quad (11)$$

kde e^{At} je maticová funkce definovaná takto

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots, \quad (12)$$

což představuje mocninnou řadu s poloměrem konvergence nekonečno, neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{(n+1)!} = \infty$. Proto tato řada stejnoměrně konverguje na každém intervalu $\langle 0, t \rangle$.

Ukažme, že funkce (11) je řešením úlohy (9), (10). Řadu (12) lze derivovat člen po členu³. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} (e^{At})' &= \left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots \right)' \\ &= A + \frac{A^2 t}{1!} + \cdots + \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \\ &= A \left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots \right) \\ &= A e^{At}, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Funkce $\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0)$ splňuje (9), neboť $\underline{\varphi}'(t, \underline{x}^0) = (e^{At} \underline{x}^0)' = A e^{At} \underline{x}^0 = A \underline{\varphi}(t, \underline{x}^0)$.

Funkce $\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0)$ splňuje i (10), neboť $\underline{\varphi}(0, \underline{x}^0) = e^{A0} \underline{x}^0 = I \underline{x}^0 = \underline{x}^0$.

³Neboť jsme právě ukázali, že řada (12) stejnoměrně konverguje.

2.2.1 Postup k nalezení řešení systému

Matici e^{At} neumíme přímo určit z matice A , proto užíváme teorii *Jordanových kanonických forem* a místo matice e^{At} určíme matici e^{Jt} a dále matici $Pe^{Jt}P^{-1}$, kde P je vhodná regulární matice a J je Jordanův kanonický tvar matice A . Takto pak můžeme vyšetřit každou úlohu (9), (10) a popsat všechny typy fázových portrétů diferenciální rovnice $\underline{x}'(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$.

Nastíněný postup shrňme do čtyř kroků:

1. K určení Jordanova kanonického tvaru matice A nalezneme vlastní čísla této matice pomocí *charakteristické rovnice* $\det(A - \lambda I) = 0$, tj.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ a_{11}a_{22} - \lambda a_{11} - \lambda a_{22} + \lambda^2 - a_{12}a_{21} &= 0, \\ \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0, \\ \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A &= 0. \end{aligned}$$

Odvodili jsme právě vzorec pro výpočet vlastních čísel matice A

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A}}{2}. \quad (13)$$

Po výpočtu vlastních čísel jsme schopni sestavit matici J následovně:

- (a) Získáme-li dvě různá reálná vlastní čísla, tj. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, platí

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená, tj. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, platí

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

- (c) Poslední možností je, že se vlastní čísla budou navzájem rovnat, tj. $\lambda_1 = \lambda_2$. Zde volíme matici J dle toho, zda matice A splňuje $h(A - \lambda_1 I) = 1$, pak volíme

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

nebo splňuje $h(A - \lambda_1 I) = 0$, pak volíme

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

2. V druhém kroku hledáme *regulární transformační matici* P . Tu najdeme z rovnice $AP = PJ$. V teorii matic se dokazuje, že taková regulární matice vždy existuje. Není však určena jednoznačně. Sloupce matice P lze určit jednoznačně až na násobek.

Stejně jako v prvním kroku rozčleňme úlohu na tři případy:

- (a) Pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme a dostaneme

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = \lambda_1 p_1,$$

$$a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = \lambda_1 p_2,$$

$$a_{11}r_1 + a_{12}r_2 = \lambda_2 r_1,$$

$$a_{21}r_1 + a_{22}r_2 = \lambda_2 r_2.$$

Přepíšeme do tvaru $A\underline{p} = \lambda_1 \underline{p}$, $A\underline{r} = \lambda_2 \underline{r}$. Vidíme, že vektor $\underline{p} = (p_1, p_2)^T$ je vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu λ_1 a vektor $\underline{r} = (r_1, r_2)^T$ je vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu λ_2 .

- (b) Pro případ, kdy λ_1 a λ_2 byla komplexně sdružená čísla, obdržíme soustavu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -\beta \\ \beta & \lambda \end{pmatrix}.$$

Vypočtením dostaneme, že sloupce matice P nejsou vlastními vektory matice A a že matice A nemá reálné vlastní vektory.

- (c) Rovná-li se vlastní čísla a je-li $h(A - \lambda I) = 1$, máme soustavu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Získáváme $A\underline{p} = \lambda_1\underline{p}$ postupem stejným jako v případě (a) a \underline{p} je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu λ_1 . Pro vektor \underline{r} platí soustava

$$\begin{aligned} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 &= p_1 + \lambda_1 r_1, \\ a_{21}r_1 + a_{22}r_2 &= p_2 + \lambda_1 r_2. \end{aligned}$$

Zde vektor \underline{r} není vlastním vektorem. Pro tento případ existuje právě jeden vlastní vektor a to až na násobek. Jiný výsledek ovšem získáme, když $h(A - \lambda I) = 0$. Soustava má tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

a oba vektory \underline{p} i \underline{r} jsou lineárně nezávislými vlastními vektory příslušnými k vlastnímu číslu λ_1 . Libovolná lineární kombinace těchto vektorů je ovšem také vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ_1 , z čehož plyne, že pro tento případ existuje nekonečně mnoho vlastních vektorů z prostoru dimenze dva generovaného právě vektory \underline{p} a \underline{r} , tedy každý vektor je vlastním vektorem. Zmíňme však, že tento případ, kdy existuje jedno vlastní číslo a $h(A - \lambda I) = 0$, je výjimečný.

3. Každé matici J přiřadíme příslušnou maticovou funkci e^{Jt} ze čtvrtého sloupce.

(a)	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$
(b)	$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$	$J = \begin{pmatrix} \lambda & -\beta \\ \beta & \lambda \end{pmatrix}$	$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & -e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{pmatrix}$
(c)	$\lambda_1 = \lambda_2$	$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$ $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$

Tabulka 1: Přiřazení matice e^{Jt} .

4. Určíme řešení $\varphi(t, \underline{x}^0)$. Dokážeme ⁴, že je-li $A = PJP^{-1}$, je $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. Vzpomeňme úlohu (9), (10). Zaveďme substituci $\underline{x} = P\underline{y}$, kde $P^{-1}AP = J$. Potom $\underline{x}' = P\underline{y}' = AP\underline{y}$. Tedy

$$\underline{y}' = P^{-1}AP\underline{y} = J\underline{y}.$$

A ještě $\underline{y}(0) = P^{-1}\underline{x}(0)$. Pak

$$\underline{y}(0) = P^{-1}\underline{x}^0 = \underline{y}^0.$$

Řešení úlohy $\underline{y}' = J\underline{y}$, $\underline{y}(0) = P^{-1}\underline{x}^0$ v kanonickém tvaru má tvar $\underline{\psi}(t, \underline{y}^0) = e^{Jt}\underline{y}^0$. Řešení původní úlohy (9), (10) má tvar

$$\varphi(t, \underline{x}^0) = P\underline{\psi}(t, \underline{y}^0) = Pe^{Jt}\underline{y}^0 = Pe^{Jt}P^{-1}\underline{x}^0 = e^{At}\underline{x}^0.$$

Získali jsme $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. Pak $\varphi(t, \underline{x}^0) = Pe^{Jt}P^{-1}\underline{x}^0$.

2.3 Aplikace na kyvadlo bez tlumení

Teorii předešlé podkapitoly demonstrujme na systému (8). Systém (9) má nyní tvar

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t),$$

⁴Připomeňme, že předpokládáme, že P je regulární matice.

kde $\underline{x}'(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Vypočteme, že vlastní čísla jsou $\lambda_1 = ib$, $\lambda_2 = -ib$, kde $b > 0$. Využili jsme vzorec (13). Jordanova matice má tedy tvar

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

a soustava rovnic $AP = PJ$ vypadá následovně

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozpočítáme do tvaru

$$\begin{aligned} p_2 &= br_1, \\ -b^2 p_1 &= br_2, \\ r_2 &= -bp_1, \\ -b^2 r_1 &= -bp_2 \end{aligned}$$

a pak za volby např. $p_1 = 1$, $r_1 = 1$ máme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & -b \end{pmatrix} \text{ a } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b} \\ 1 & -\frac{1}{b} \end{pmatrix}.$$

Řešení $\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0)$ soustavy (8) má tvar

$$\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0) = Pe^{Jt}P^{-1}\underline{x}^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b} \\ 1 & -\frac{1}{b} \end{pmatrix}.$$

Po úpravě pak získáme

$$\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0) = \begin{pmatrix} \cos(bt) & \frac{1}{b} \sin(bt) \\ -b \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení původní soustavy je ve tvaru

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, \underline{x}^0) &= x_1^0 \cos(bt) + x_2^0 \frac{1}{b} \sin(bt), \\ \varphi_2(t, \underline{x}^0) &= -x_1^0 b \sin(bt) + x_2^0 \cos(bt) \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$. Upravíme-li, dostaneme

$$b\varphi_1^2(t, \underline{x}^0) + \frac{1}{b}\varphi_2^2(t, \underline{x}^0) = b(x_1^0)^2 + \frac{1}{b}(x_2^0)^2. \quad (14)$$

Volbou $x_1 = \varphi_1(t, \underline{x}^0)$, $x_2 = \varphi_2(t, \underline{x}^0)$, $c^2 = bx_1^{02} + \frac{1}{b}x_2^{02}$, $\eta_1^2 = \frac{c^2}{b}$ a $\eta_2^2 = c^2b$ lze rovnici (14) zapsat do tvaru

$$\frac{x_1^2}{\eta_1^2} + \frac{x_2^2}{\eta_2^2} = 1. \quad (15)$$

Rovnice (15) znázorňuje elipsy se středem v bodě $[0, 0]$. Výsledkem tedy je, že systém (8) lze popsat pomocí *elips se středem v počátku*, což nám ale umožňuje vyslovit pouze hypotézu o eliptickém tvaru původního systému (4) v okolí bodu $[0, 0]$. Pro důkaz této hypotézy musíme užít metody z dalších kapitol.

3 Rovnice kyvadla studovaná pomocí linearizace

Nyní ukážeme metodu linearizace, která spočívá v nalezení kritických bodů (ekvilibríí) studovaného diferenciálního systému a určení fázových portrétů tohoto systému v okolí hyperbolických kritických bodů. Uvažujme systém

$$\underline{x}'(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)), \quad (16)$$

kde $\underline{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Definice 3.1. *Nechť $\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0)$ je řešení systému (14) definované na intervalu $I_{\underline{x}^0} \subset \mathbb{R}$ a splňující počáteční podmínku (10). Množina $\{\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0) : t \in I_{\underline{x}^0}\} \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá orbita řešení $\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0)$. Značíme ji $\gamma(\underline{x}^0)$.*

Definice 3.2. *Bod $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ splňující rovnici $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$ se nazývá kritický bod systému (16). Kritické body označujeme nadtržítkem.*

Poznámka 3.1. *Je-li \underline{x} kritický bod systému (16), pak $\underline{\varphi}(t, \underline{x}) \equiv \underline{x}$ je konstantní řešení systému (16) a jeho orbita je jednobodová.*

Definice 3.3. *Množina orbit systému (16) společně se šípkami na orbitách, které vyznačují pohyb bodu $\underline{\varphi}(t, \underline{x}^0)$ na orbitě pro rostoucí t se nazývá fázový portrét tohoto systému.*

Definice 3.4. *Kritický bod \underline{x} systému (16) se nazývá hyperbolický kritický bod, jestliže Jacobiho matice $D\underline{f}(\underline{x})$ je hyperbolická, tj. jestliže její vlastní čísla mají nenulové reálné složky. V opačném případě se bod \underline{x} nazývá nehyperbolický kritický bod.*

Definice 3.5. *Nechť \underline{x} je kritický bod systému (16). Rovnice*

$$\underline{y}' = D\underline{f}(\underline{x})\underline{y}, \quad (17)$$

se nazývá lineární variační rovnice systému (16) v bodě \underline{x} .

Definice 3.6. *Systémy (16) a (17) se nazývají lokálně topologicky ekvivalentní, existují-li otevřené množiny $U, V \subset \mathbb{R}$ a homeomorfismus $\underline{h} : U \rightarrow V$ zobrazující orbity jednoho systému na orbity druhého systému, přičemž zachovává směr šipek na orbitách.*

Věta 3.1. (Grobman-Hartmanova) Nechť $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ je hyperbolický kritický bod systému (16). Pak existuje okolí U bodu \bar{x} a okolí V bodu $\underline{0}$, na nichž jsou lokálně topologicky ekvivalentní systém (16) a lineární variační rovnice (17).

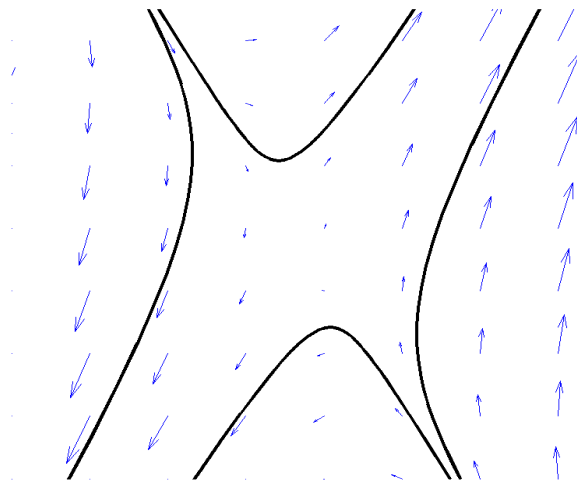
Na základě věty 3.1 lze tedy fázový portrét systému (16) v okolí hyperbolického kritického bodu \bar{x} charakterizovat pomocí fázového portréту lineární variační rovnice (17) s hyperbolickým kritickým bodem $\underline{0}$. Položíme-li $A = Df(\bar{x})$, má (17) tvar (9). Přitom pro lineární systém (9) s hyperbolickými kritickým bodem $\underline{0}$ existují následující typy fázových portrétů.

Označme $\det A$ determinant a $\operatorname{tr} A$ stopu matice A .

Definice 3.7. Hyperbolický kritický bod $\underline{0}$ systému (9) se nazývá

- *sedlo*, jestliže $\det A < 0$,
- *zřídlo*, jestliže $\det A > 0$ a $\operatorname{tr} A > 0$,
- *výlevka*, jestliže $\det A > 0$ a $\operatorname{tr} A < 0$.

Příslušný fázový portrét systému (9) pak také nazýváme sedlem, zřídlem nebo výlevkou.



Obr. 4: Fázový portrét-sedlo⁵

⁵Obrázky z této práce byly nakresleny v programech MATLAB a OpenOffice.

Pro nelineární systém (16) analogicky definujeme:

Definice 3.8. *Hyperbolický kritický bod \underline{x} systému (16) se nazývá sedlo(zřídlo, výlevka), má-li tuto vlastnost bod $\underline{0}$ u lineární variační rovnice (17). Část fázového portréту systému (16), která leží v okolí bodu \underline{x} pak také nazveme sedlem(zřídlem, výlevkou).*

Výše uvedená klasifikace je topologická a závisí pouze na znaménku $\det A$ a $\operatorname{tr} A$.

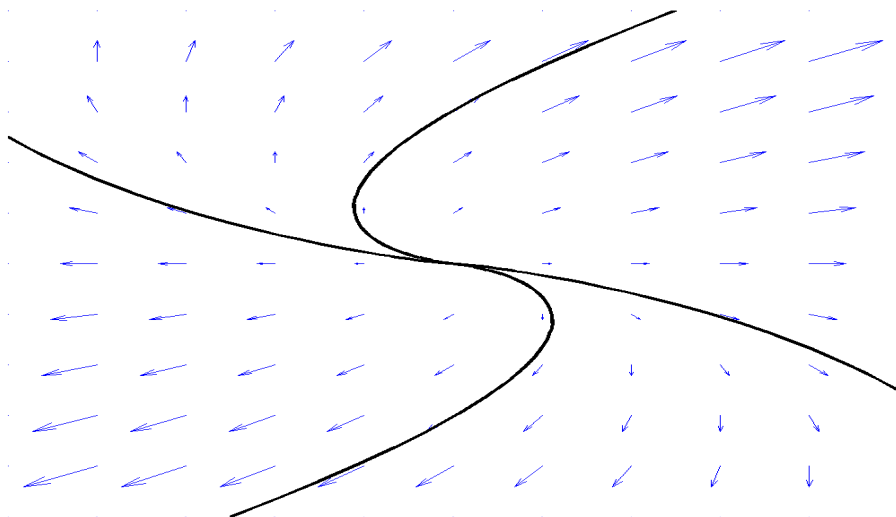
Věta 3.2. *(O stabilních a nestabilních varietách) Nechť $[0, 0]$ je hyperbolický kritický bod(sedlo) diferenciální rovnice (16). Pak fázový portrét rovnice (16) obsahuje dvě hladké křivky W^N a W^S procházející počátkem a dotýkající se v počátku vlastními přímkami příslušnými k vlastním číslům matice $Df([0, 0])$. Na křivce W^S směřuje tok k bodu $[0, 0]$ a na křivce W^N od bodu $[0, 0]$.*

Definice 3.9. *Křivku W^N z věty 3.2 nazýváme nestabilní varietou rovnice (16) a křivku W^S nazýváme stabilní varietou rovnice (16).*

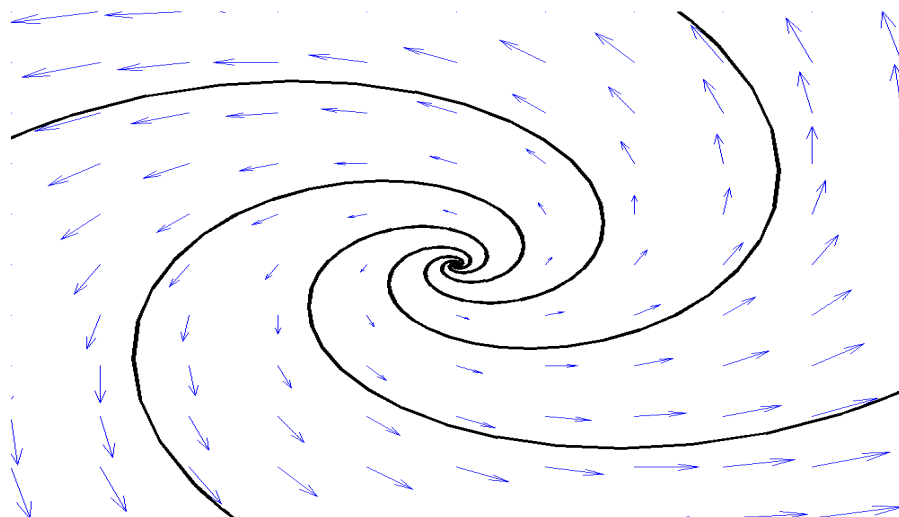
Poznámka 3.2. *Z věty 3.1 plyne, že křivka W^N se dotýká vlastní přímky příslušné ke kladnému vlastnímu číslu a křivka W^S se dotýká vlastní přímky příslušné k zápornému vlastnímu číslu.*

V případě, že $\det A > 0$ a $\operatorname{tr} A \neq 0$, můžeme ještě určit znaménko výrazu $D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A$. Toto znaménko nám umožní následující jemnější klasifikaci zřídla a výlevky.

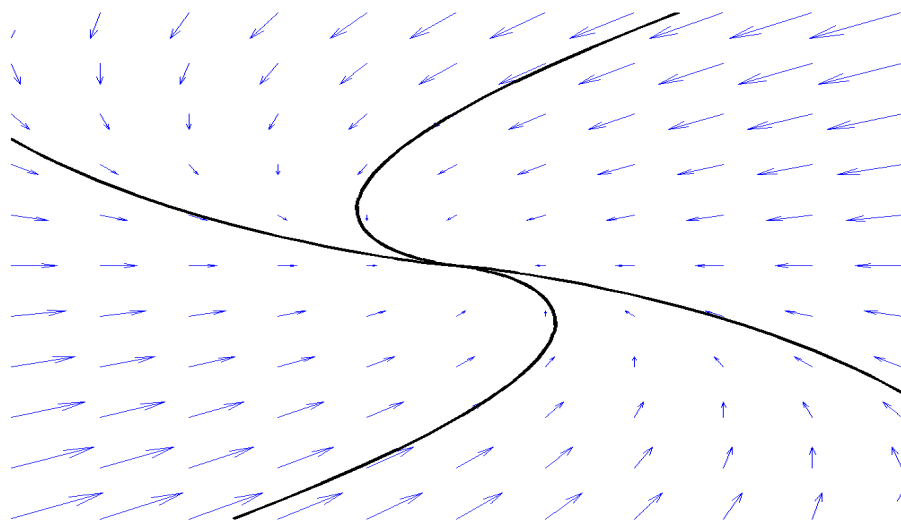
Definice 3.10. *Nechť bod $\underline{0}$ je zřídlo nebo výlevka systému (9). Pak se tento kritický bod nazývá uzlem, je-li $D \geq 0$, a ohniskem, je-li $D < 0$.*



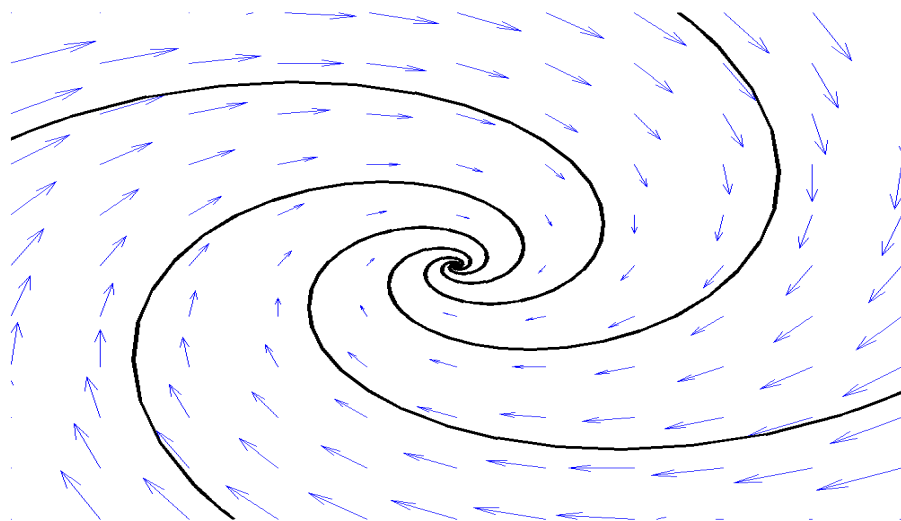
Obr. 5: Fázový portrét-zřídlo-uzel



Obr. 6: Fázový portrét-zřídlo-ohnisko



Obr. 7: Fázový portrét-výlevka-uzel



Obr. 8: Fázový portrét-výlevka-ohnisko

Definice 3.11. *Nechť bod \bar{x} je zřídlo nebo výlevka systému (16). Pak se bod \bar{x} nazývá uzlem(ohniskem), má-li tuto vlastnost bod $\underline{0}$ u lineární variační rovnice (17).*

Poznamenejme, že pokud platí $\det A = 0$ nebo $\text{tr} A = 0$, je kritický bod $\underline{0}$ systému (9) nehyperbolický. V tomto případě větu 3.1 nelze použít k charak-

teristice fázového portréту nelineárního systému (16) pomocí lineární variační rovnice (17), v níž $D\underline{f}(\underline{x}) = A$.

3.1 Aplikace na kyvadlo bez tlumení

Uvažujme systém (4) s $b > 0$, který má kritické body

$$[2k\pi, 0], [(2k + 1)\pi, 0], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vzhledem k periodičnosti funkce sinus, která se vyskytuje v systému (4), stačí vyšetřovat pouze body $[0, 0]$ a $[\pi, 0]$. Jacobiho matice má tvar

$$D\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\underline{f}([0, 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\underline{f}([\pi, 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice $D\underline{f}([0, 0])$ jsou $\lambda_1 = ib$, $\lambda_2 = -ib$, a tedy bod $[0, 0]$ je nehyperbolický kritický bod.

Vlastní čísla matice $D\underline{f}([\pi, 0])$ jsou $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = -b$, a tedy bod $[\pi, 0]$ je hyperbolický kritický bod. Užitím Grobman-Hartmanovy věty a definic 3.5 a 3.7 zjistíme, že bod $[\pi, 0]$ je sedlo, neboť

$$\det D\underline{f}([\pi, 0]) = -b^2 < 0.$$

3.1.1 Nalezení tvaru sedla metodou řad

Tvar sedla v bodě $[\pi, 0]$ lze přibližně určit pomocí vlastních vektorů odpovídajících vlastním číslům matice $D\underline{f}([\pi, 0])$. Dle teorie uvedené v kapitole 2 vypočteme, že hledané vektory jsou např.

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -b \end{pmatrix},$$

přičemž \underline{p} odpovídá vlastnímu číslu λ_1 a \underline{r} vlastnímu číslu λ_2 . V tomto případě jsou částí fázového portrétu lineární variační rovnice

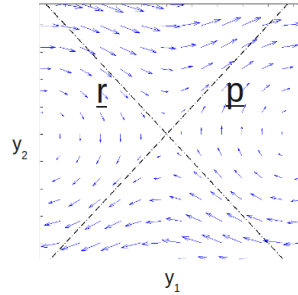
$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix} \underline{y}$$

dvě vlastní přímky, které prochází bodem $[0, 0]$ a mají směr vlastních vektorů \underline{p} a \underline{r} . Šipky na těchto přímkách jsou určeny znaménky vlastních čísel λ_1 a λ_2 . Vlastní přímky současně určují tvar sedla.

Zvolme například $b = 1$. Lineární variační rovnice má tvar

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{y}. \quad (18)$$

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ odpovídá vlastní vektor $\underline{p} = (1, 1)^T$ a vlastnímu číslu $\lambda_2 = -1$ odpovídá vlastní vektor $\underline{r} = (1, -1)^T$.



Obr. 9: Fázový portrét rovnice (18)

Podobný fázový portrét jako na obrázku 9 pak bude mít nelineární systém (6) v okolí bodu $[\pi, 0]$. Vlastní přímky zde přejdou na křivky procházející bodem $[\pi, 0]$ a dotýkající se vlastních přímek. Tvar těchto křivek v okolí bodu $[\pi, 0]$ lze určit například *metodou řad*. Ukažme to tedy.

Užijeme větu 3.2. Proto zavedeme substituci $y_1 = x_1 - \pi$, $y_2 = x_2$. Touto substitucí je bod $[\pi, 0]$ transformován do počátku a rovnice (4) přejde na tvar

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = b^2 \sin y_1. \end{cases}$$

Funkci $\sin y_1$ vyjádříme pomocí *Taylorova vzorce* v bodě 0:

$$\sin y_1 = y_1 - \frac{1}{3!}y_1^3 + O(y_1^5),$$

kde výraz $O(y_1^k)$ značí členy s mocninami vyššími, nebo rovnými k , pro $k \in \mathbb{N}$.

Dostáváme tedy pro $b = 1$ rovnici

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{1}{6}y_1^3 + O(y_1^5). \end{cases} \quad (19)$$

Nyní určíme tvar křivek W^N a W^S v okolí počátku.

1. Rovnici křivky W^N budeme hledat ve tvaru $y_2 = h(y_1)$, přičemž funkci h vyjádříme pomocí Taylorova vzorce v bodě 0:

$$y_2 = h(y_1) = h(0) + \frac{1}{1!}h'(0)y_1 + \frac{1}{2!}h''(0)y_1^2 + \frac{1}{3!}h'''(0)y_1^3 + O(y_1^4).$$

Protože křivka W^N prochází počátkem, tak platí $h(0) = 0$. Protože křivka W^N se navíc v počátku dotýká přímky se směrem \underline{p} , tak platí $h'(0) = 1$. Funkci h proto hledáme ve tvaru

$$y_2 = h(y_1) = y_1 + \alpha y_1^2 + \beta y_1^3 + O(y_1^4), \quad (20)$$

kde α, β jsou neznámé konstanty. Určíme ještě derivaci

$$\frac{dh}{dy_1} = 1 + 2\alpha y_1 + 3\beta y_1^2 + O(y_1^3). \quad (21)$$

Neznámé koeficienty α, β nyní určíme následujícím postupem. Derivací rovnice $y_2(t) = h(y_1(t))$ dostáváme

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{dh}{dy_1} \frac{dy_1(t)}{dt} \quad (22)$$

a dosazením z rovnice (19) máme

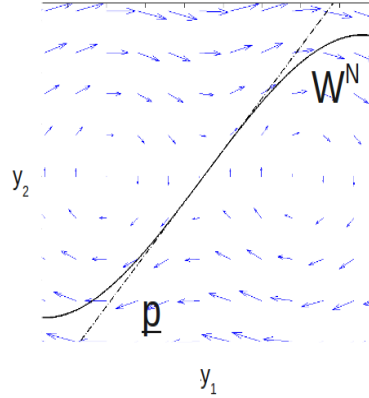
$$y_1 - \frac{1}{6}y_1^3 + O(y_1^5) = (1 + 2\alpha y_1 + 3\beta y_1^2 + O(y_1^3))(y_1 + \alpha y_1^2 + \beta y_1^3 + O(y_1^4)).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostáváme

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{1}{24}.$$

Křivka W^N má proto rovnici

$$y_2 = y_1 - \frac{1}{24}y_1^3 + O(y_1^4).$$



Obr. 10: Tvar křivky W^N

2. Podobně rovnici křivky W^S budeme hledat ve tvaru

$$y_2 = h(y_1) = -y_1 + \alpha y_1^2 + \beta y_1^3 + O(y_1^4),$$

rovnici (21) přeměníme na

$$\frac{dh}{dy_1} = -1 + 2\alpha y_1 + 3\beta y_1^2 + O(y_1^3)$$

a dosazením z rovnice (19) do (22) máme

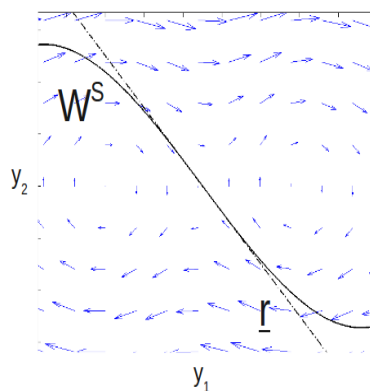
$$-y_1 - \frac{1}{6}y_1^3 + O(y_1^5) = (-1 + 2\alpha y_1 + 3\beta y_1^2 + O(y_1^3))(-y_1 + \alpha y_1^2 + \beta y_1^3 + O(y_1^4)).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostáváme

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{24}.$$

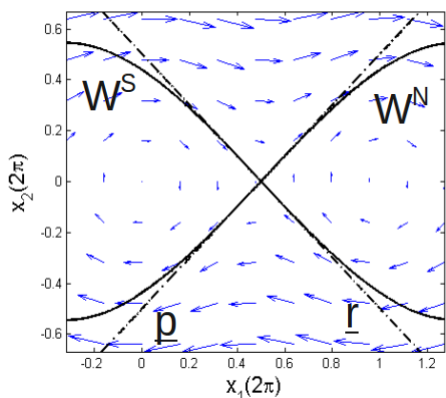
Křivka W^N má proto rovnici

$$y_2 = -y_1 + \frac{1}{24}y_1^3 + O(y_1^4).$$



Obr. 11: Tvar křivky W^S

Tedy část fázového portréту diferenciální rovnice (4), kde $b = 1$, v okolí bodu $[\pi, 0]$ bude mít tvar jako na následujícím obrázku. Na tomto obrázku jsme již vrátili zpět transformaci.



Obr. 12: Fázový portrét rovnice (4) v okolí bodu $[\pi, 0]$

Podařilo se nám vyšetřit bod $[\pi, 0]$, nicméně bod $[0, 0]$ se nám vyšetřit nepodařilo, protože je nehyperbolický.

3.2 Aplikace na kyvadlo s tlumením

Uvažujme systém (6) s $a > 0$, $b > 0$. Jeho kritické body jsou

$$[2k\pi, 0], [(2k + 1)\pi, 0], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vyšetřeme body $[\pi, 0]$ a $[0, 0]$. Jacobiho matice má tvar

$$D\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 \cos x_1 & -a \end{pmatrix}, \quad D\underline{f}([0, 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -a \end{pmatrix}, \quad D\underline{f}([\pi, 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b^2 & -a \end{pmatrix}.$$

- a) Bod $[\pi, 0]$ je hyperbolický kritický bod, protože vlastní čísla matice $D\underline{f}([\pi, 0])$ jsou $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2})$. Vzhledem k tomu, že

$$\det D\underline{f}([\pi, 0]) = -b^2 < 0,$$

je bod $[\pi, 0]$ *sedlem*.

- b) Nyní se podívejme na bod $[0, 0]$. Vlastní čísla matice $D\underline{f}([0, 0])$ mají tvar $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2})$. Pro $\forall a > 0, b > 0$ je bod $[0, 0]$ hyperbolický kritický bod a platí

$$\det D\underline{f}([0, 0]) = b^2 > 0,$$

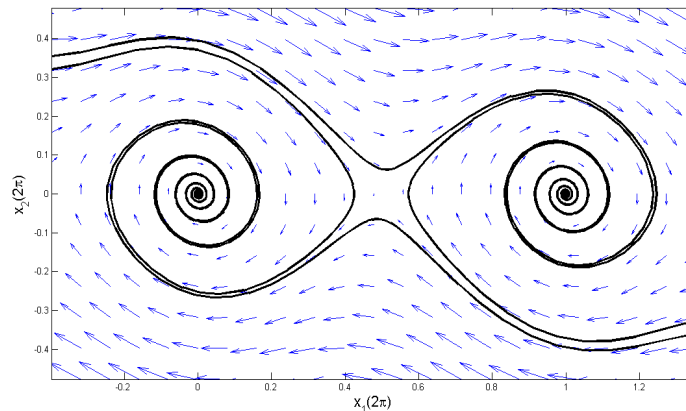
$$\operatorname{tr} D\underline{f}([0, 0]) = -a < 0.$$

Dle definice 3.7 je tedy bod $[0, 0]$ *výlevka*.

Zvolme $a = 0,25, b = 1$ a vypočtěme znaménko výrazu $D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A$.

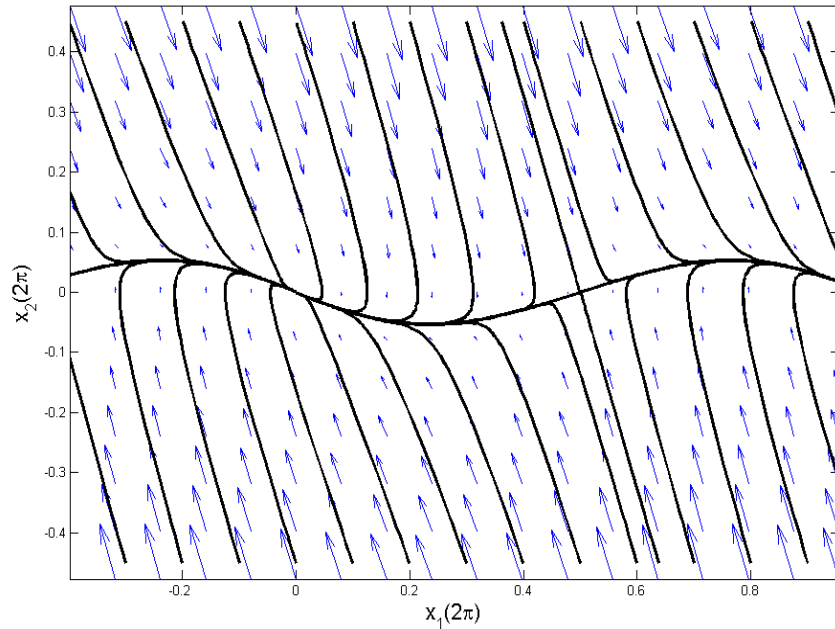
Protože $D = a^2 - 4 < 0$, je bod $[0, 0]$ *ohniskem*, jak vidíme na obrázku 13.

Zde vidíme ohniska $[0, 0]$ a $[2\pi, 0]$ a mezi nimi sedlo $[\pi, 0]$.



Obr. 13: Fázový portrét matematického kyvadla s tlumením (pro $a = 0,25; b = 1$)

Zvolme nyní $a = 3$, $b = 1$. Pak $D = a^2 - 4 > 0$ a bod $[0, 0]$ je *uzlem*, jak vidíme na obrázku 14, kde kromě uzlu $[0, 0]$ vidíme ještě sedlo $[\pi, 0]$.



Obr. 14: Fázový portrét matematického kyvadla s tlumením (pro $a = 3$; $b = 1$)

Je zřejmé, že pro každou volbu počátečního bodu $\underline{x}^0 = [x_1, x_2]$ půjde orbita začínající v daném bodě \underline{x}^0 do jednoho z kritických bodů $[k\pi, 0]$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

4 Řešení pomocí Hamiltonovských systémů

Metoda linearizace nám nedává informaci o typu nehyperbolických kritických bodů $[2k\pi, 0]$, $k \in \mathbb{Z}$, systému (4). Proto zde uvedeme základy teorie Hamiltonovských systémů a ukážeme jejich použití pro systém (4).

4.1 Hamiltonovské systémy

Definice 4.1. Nechť $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a nechť $H \in C^1(\mathbb{R}^2)$, kde $H = H(x_1, x_2)$.

Systém tvaru

$$x_1' = \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \quad x_2' = -\frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1} \quad (23)$$

se nazývá Hamiltonovský systém a funkce H se nazývá Hamiltonovská funkce.

Poznámka 4.1. Pro přehlednost někdy vynecháváme u funkcí x_1, x_2 proměnnou t .

Věta 4.1. Celková energie $H(x_1, x_2)$ Hamiltonovského systému (23) zůstává konstantní na orbitách rovnice (2), tj. pro libovolné řešení $(x_1(t), x_2(t))$ rovnice (23) existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že platí $H(x_1(t), x_2(t)) = c$, pro $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Derivujme pro $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{dH(x_1(t), x_2(t))}{dt} &= \frac{\partial H(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_1} x_1'(t) + \frac{\partial H(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_2} x_2'(t) = \\ &= \frac{\partial H(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_1} \frac{\partial H(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_2} - \frac{\partial H(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_2} \frac{\partial H(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_1} = 0. \end{aligned}$$

Funkce $H(x_1(t), x_2(t))$ je konstantní, pokud $\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ je řešením systému (23).

Speciálním případem Hamiltonovských systémů jsou tzv. konzervativní systémy. Uvažujme rovnici $x''(t) = f(x(t))$, kde $f \in C^1(\mathbb{R})$. Převedme ji na systém

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -f(x_1). \end{cases} \quad (24)$$

Příslušná Hamiltonovská funkce se zde nazývá energetická funkce a značí se obvykle $E(x_1, x_2)$. Systém (24) se nazývá *konzervativní*, protože podle věty 4.1 energetická funkce E tohoto systému je na orbitách (24) konstantní, tj. konzervovaná. *Energetická funkce* má vzhledem k (23) a (24) tvar

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + V(x_1), \quad \text{kde } V(x_1) = \int_0^{x_1} f(s) ds. \quad (25)$$

Člen $\frac{1}{2}x_2^2$ se nazývá *kinetická energie* systému (24) a funkce V se nazývá *potenciálová energie (potenciálová funkce)* systému (24).

Poznámka 4.2. *Orbity systému (24) lze najít jako hladiny funkce E .*

Orbita jdoucí bodem \underline{x}^0 je částí hladiny funkce E ve výšce $E_0 = E(\underline{x}^0)$. Pro $\gamma(\underline{x}^0)$ máme tedy $\frac{1}{2}x_2^2 + V(x_1) = E_0$, z čehož dostáváme

$$x_2 = \pm \sqrt{2(E_0 - V(x_1))}, \quad \text{pro } V(x_1) \leq E_0. \quad (26)$$

Vidíme, že hladiny jsou symetrické vzhledem k ose x_1 .

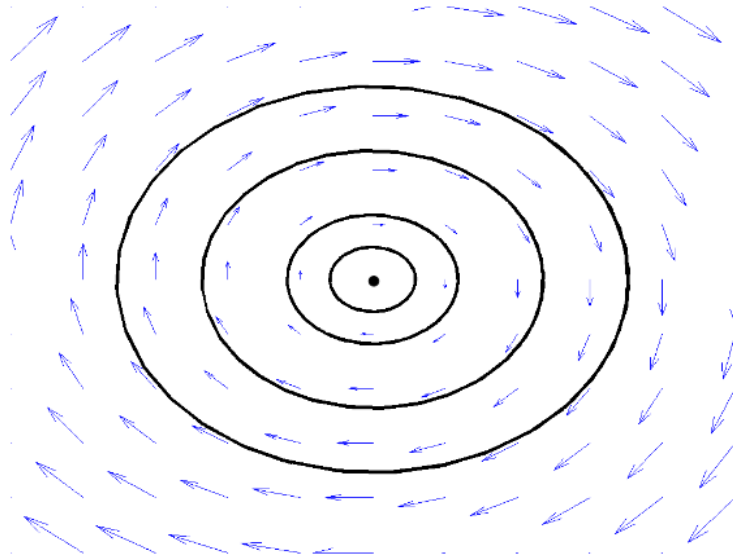
Kritické body konzervativního systému (24) lze rovněž vyšetřovat pomocí potenciálové funkce V .

Definice 4.2. *Bod \bar{x}_1 se nazývá kritický bod funkce $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže $V'(\bar{x}_1) = 0$. Hodnota $V(\bar{x}_1)$ se nazývá kritická hodnota. Kritický bod se nazývá nedegenerovaný, je-li $V''(\bar{x}_1) \neq 0$.*

Poznámka 4.3. *Bod $[\bar{x}_1, 0]$ je kritický bod systému (24) právě tehdy, když \bar{x}_1 je kritický bod funkce V .*

Pomocí funkce V můžeme kromě hyperbolických kritických bodů vyšetřovat rovněž izolované nehyperbolické kritické body popsané v následující definici.

Definice 4.3. *Nehyperbolický kritický bod $[\bar{x}_1, 0]$ se nazývá střed, existuje-li okolí tohoto bodu, v němž leží pouze uzavřené orbity obíhající tento bod. (Viz obr. 15.)*



Obr. 15: Střed

Je-li \bar{x}_1 nedegenerovaný kritický bod funkce V , pak bod $[\bar{x}_1, 0]$ je buď hyperbolický kritický bod nebo izolovaný nehyperbolický kritický bod systému (24). Přesnější klasifikaci uvádí následující věta.

Věta 4.2. *Nechť \bar{x}_1 je nedegenerovaný kritický bod potenciálové funkce V . Pak platí:*

1. $(\bar{x}_1, 0)$ je sedlo systému (24), jestliže $V''(\bar{x}_1) < 0$,
2. $(\bar{x}_1, 0)$ je střed systému (24), jestliže $V''(\bar{x}_1) > 0$.

4.2 Aplikace na kyvadlo bez tlumení

Uvažujme systém (4), kde $b > 0$. Potenciálová funkce má zde tvar

$$V(x_1) = \int_0^{x_1} b^2 \sin s \, ds = b^2(1 - \cos x_1).$$

Kritické body systému (4) jsou

$$[2k\pi, 0], [(2k + 1)\pi, 0], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nás však zajímá už jen bod $[0, 0]$. Tento bod je nedegenerovaný kritický bod funkce V , neboť

$$V''([0, 0]) \neq 0.$$

Platí, že

$$V''([0, 0]) = b^2 > 0,$$

proto podle věty 4.2 je bod $[0, 0]$ *středem*.

Podrobnější informaci o tvaru orbit lze získat z funkce $E(x_1, x_2)$. Orbity lze hledat jako hladiny energetické funkce $E(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + b^2(1 - \cos x_1)$, kde $E(x_1, x_2) = E_0$, pak

$$x_2 = \pm \sqrt{2(E_0 - b^2(1 - \cos x_1))}, \quad \text{kde } b^2(1 - \cos x_1) \leq E_0.$$

Pro konkrétní volbu E_0 dostáváme jednotlivé orbity.

4.3 Určování tvaru orbit

Předpokládejme, že $b = 1$, tj. systém (4) má tvar

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -\sin x_1(t). \end{cases}$$

Vzhledem k periodičnosti funkce $\sin x_1$ stačí vyšetřovat orbity pro $x_1 \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Z (26) dostáváme rovnici $x_2 = \pm \sqrt{2(E_0 - 1 + \cos x_1)}$ pro $E_0 - 1 \geq |\cos x_1|$.

a) Zvolme např. bod $\underline{x}^0 = [0, \sqrt{2}]$. Dosazením dostaneme

$$E_0 = E(0, \sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} + 1 - \cos(0) = 1$$

a potom

$$x_2 = \pm \sqrt{2 \cos x_1}, \quad x_1 \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Nechť $x_1 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a $x_2 = \sqrt{2 \cos x_1}$.

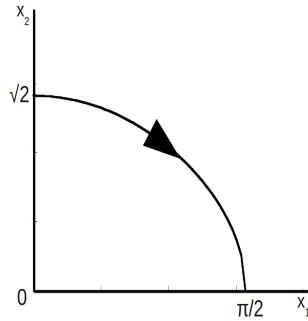
Pro $t > 0$ z první rovnice v soustavě (4) dostáváme $x_1'(t) = x_2(t) > 0$, kde $t \in (0, t_0)$ a t_0 je bod, v němž $x_1(t_0) = \frac{\pi}{2}$ a $x_2(t_0) = 0$. Derivujme

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{2} \frac{2 \sin x_1}{\sqrt{2 \cos x_1}} = -\frac{\sin x_1}{\sqrt{2 \cos x_1}}.$$

Platí $x_2(0) = \sqrt{2}$, $x_2(\frac{\pi}{2}) = 0$. Navíc

$$\frac{dx_2}{dx_1}(0) = 0, \quad \frac{dx_2}{dx_1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\infty.$$

Protože $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$ pro $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, funkce $x_2 = \sqrt{2 \cos x_1}$ klesá.



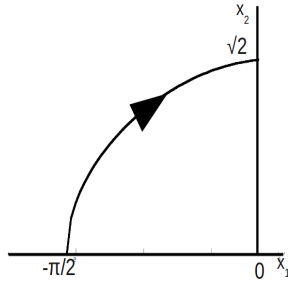
Obr. 16: Část orbity $\gamma(\underline{x}^0)$

Nechť $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ a $x_2 = \sqrt{2 \cos x_1}$.

Pro $t < 0$ z první rovnice v soustavě (4) dostáváme $x_1'(t) = x_2(t) > 0$, kde $t \in (t_0, 0)$ a t_0 je bod, v němž $x_1(t_0) = -\frac{\pi}{2}$ a $x_2(t_0) = 0$. Platí, že $x_2(0) = \sqrt{2}$, $x_2(-\frac{\pi}{2}) = 0$. Navíc

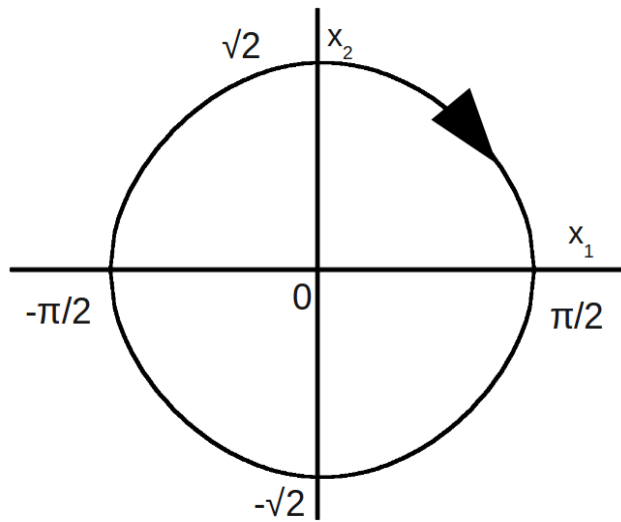
$$\frac{dx_2}{dx_1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \infty, \quad \frac{dx_2}{dx_1}(0) = 0.$$

Protože $\frac{dx_2}{dx_1} > 0$ pro $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, funkce $x_2 = \sqrt{2 \cos x_1}$ roste.



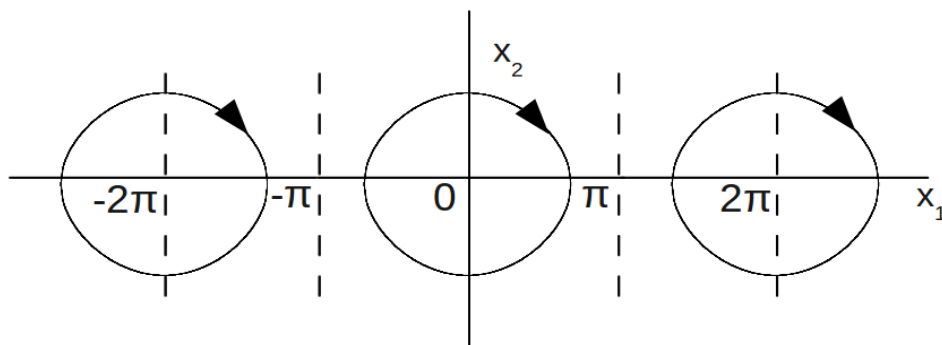
Obr. 17: Část orbity $\gamma(\underline{x}^0)$

Určili jsme část orbity o rovnici $x_2 = \sqrt{2} \cos x_1$. Ze symetrie dostaneme tvar pro druhou část orbity s rovnicí $x_2 = -\sqrt{2} \cos x_1$.



Obr. 18: Orbita $\gamma(\underline{x}^0)$

Pokud periodicky zopakujeme nalezenou orbitu, dostaneme celou hladinu funkce E příslušnou konstantě $E_0 = 1$.



Obr. 19: Hladina $E(x_1, x_2) = 1$.

b) Jinou volbou $\underline{x}^0 = [0, 2]$ dostaneme

$$E_0 = E(0, 2) = 2$$

a potom

$$x_2 = \pm \sqrt{2(1 + \cos x_1)}, \quad x_1 \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Nechť $x_1 \in \langle 0, \pi \rangle$ a $x_2 = \sqrt{2(1 + \cos x_1)}$.

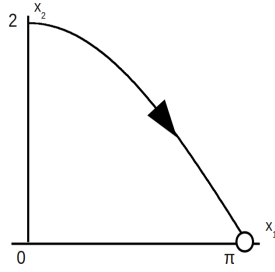
Pro $t > 0$, kde $t \in (0, t_0)$ a t_0 je bod, v němž $x_1(t_0) = \pi$ a $x_2(t_0) = 0$, dostáváme $x_1'(t) > 0$. Zde je $t_0 = \infty$, protože bod $[\pi, 0]$ je orbitou různou od $\gamma(\underline{x}^0)$. Derivujme

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\sin x_1}{\sqrt{2(1 + \cos x_1)}}.$$

Platí $x_2(0) = 2$, $x_2(\pi) = 0$. Navíc

$$\frac{dx_2}{dx_1}(0) = 0, \quad \lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} \frac{dx_2}{dx_1} < 0.$$

Protože $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$ pro $x_1 \in (0, \pi)$, funkce $x_2 = \sqrt{2(1 + \cos x_1)}$ klesá. V části 3.1 jsme určili, že bod $[\pi, 0]$ je hyperbolický kritický bod - sedlo, a bod $[0, 0]$ je nehyperbolický kritický bod. V části 4.2 jsme určili, že bod $[0, 0]$ je střed. Další vlastnosti těchto dvou bodů určíme později.



Obr. 20: Část orbity $\gamma(\underline{x}^0)$

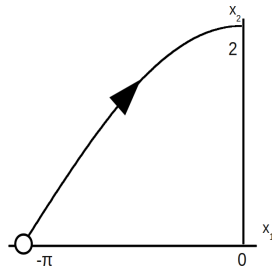
Nechť $x_1 \in \langle -\pi, 0 \rangle$ a $x_2 = \sqrt{2(1 + \cos x_1)}$.

Pro $t < 0$, kde $t \in (t_0, 0)$ a t_0 je bod, v němž $x_1(t_0) = -\pi$ a $x_2(t_0) = 0$, opět dostáváme $x_1'(t) > 0$. Zde je $t_0 = -\infty$. Platí, že $x_2(0) = 2$, $x_2(-\pi) = 0$.

Navíc

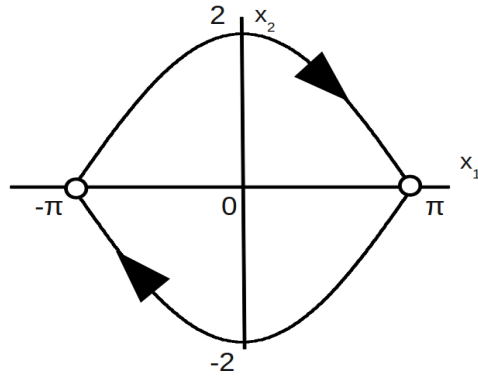
$$\lim_{x_1 \rightarrow -\pi^-} \frac{dx_2}{dx_1} > 0, \quad \frac{dx_2}{dx_1}(0) = 0.$$

Protože $\frac{dx_2}{dx_1} > 0$ pro $x_1 \in (-\pi, 0)$, funkce $x_2 = \sqrt{2(1 + \cos x_1)}$ roste.



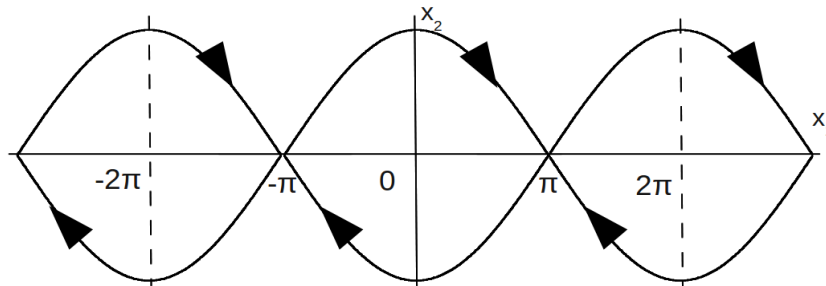
Obr. 21: Část orbity $\gamma(\underline{x}^0)$

Našli jsme tvar orbity $x_2 = \sqrt{2(1 + \cos x_1)}$. Ze symetrie dostaneme tvar orbity s rovnicí $x_2 = -\sqrt{2(1 + \cos x_1)}$. Obě tyto orbity nazýváme heteroklinické, protože spojují kritické body $[-\pi, 0]$ a $[\pi, 0]$.



Obr. 22: Orbita $\gamma(\underline{x}^0)$

Přidáme-li k oběma heteroklinickým orbitám kritické body $[-\pi, 0]$ a $[\pi, 0]$, dostaneme část hladiny $E(x_1, x_2) = 2$. Pokud tuto část periodicky zopakujeme, získáme celou hladinu funkce E příslušnou konstantě $E_0 = 2$.



Obr. 23: Hladina $E(x_1, x_2) = 2$

c) Volbou $\underline{x}^0 = [0, 3]$ dostaneme

$$E_0 = E(0, 3) = \frac{9}{2}$$

a potom

$$x_2 = \pm\sqrt{7 + 2\cos x_1}, \quad x_1 \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Nechť $x_1 \in \langle 0, \pi \rangle$ a $x_2 = \pm\sqrt{7 + 2\cos x_1}$. Pak $x_2(0) = 3$ a $x_2(\pi) = \sqrt{5}$.

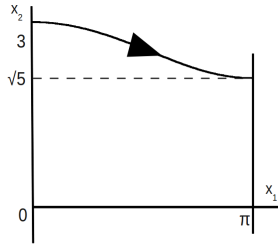
Derivujme

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\sin x_1}{\sqrt{7 + 2\cos x_1}}.$$

Platí

$$\frac{dx_2}{dx_1}(0) = 0, \quad \frac{dx_2}{dx_1}(\pi) = 0.$$

Protože $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$ pro $x_1 \in (0, \pi)$, funkce $x_2 = \sqrt{7 + 2 \cos x_1}$ klesá.



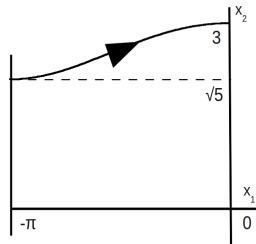
Obr. 24: Část orbity $\gamma(\underline{x}^0)$

Nechť $x_1 \in \langle -\pi, 0 \rangle$. Pak $x_2(0) = 3$ a $x_2(-\pi) = \sqrt{5}$.

Navíc

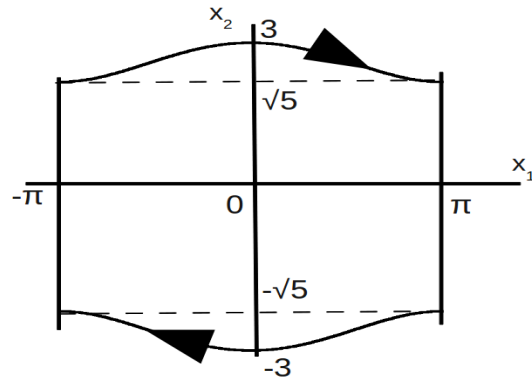
$$\frac{dx_2}{dx_1}(-\pi) = 0, \quad \frac{dx_2}{dx_1}(0) = 0.$$

Protože $\frac{dx_2}{dx_1} > 0$ pro $x_1 \in (-\pi, 0)$, funkce $x_2 = \sqrt{7 + 2 \cos x_1}$ roste.



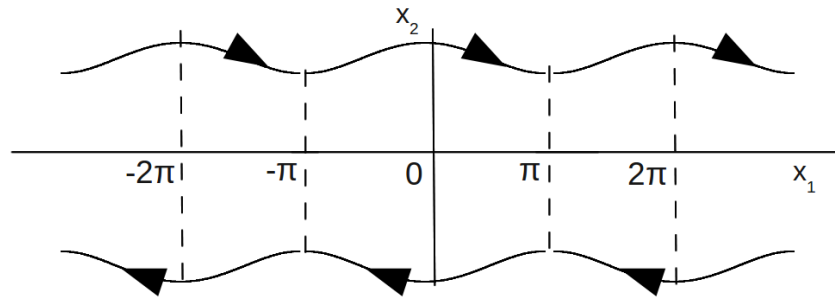
Obr. 25: Část orbity $\gamma(\underline{x}^0)$

Našli jsme tvar části orbity $x_2 = \sqrt{7 + 2 \cos x_1}$. Ze symetrie dostaneme tvar části druhé orbity s rovnicí $x_2 = -\sqrt{7 + 2 \cos x_1}$.



Obr. 26: Část orbity $\gamma(\underline{x}^0)$

Pokud nalezené části orbit periodicky zopakujeme, získáme celou hladinu funkce E příslušnou konstantě $E_0 = \frac{9}{2}$.



Obr. 27: Hladina $E(x_1, x_2) = \frac{9}{2}$

d) Volbou $\underline{x}^0 = [0, 0]$ dostaneme

$$E_0 = E(0, 0) = 0$$

a navíc

$$x_2 = \pm \sqrt{2(-1 + \cos x_1)},$$

což znamená, že jedinou hodnotou x_1 na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, pro kterou je pod odmocninou nezáporné číslo, je $x_1 = 0$.

Tedy hladina $E(x_1, x_2) = 0$ se skládá pouze z kritických bodů $[2k\pi, 0]$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Závěrem ukažme další vlastnosti kritických bodů $[0, 0]$ a $[\pi, 0]$.

Parciální derivace funkce E jsou tvaru

$$\frac{\partial E([x_1, x_2])}{\partial x_1} = b^2 \sin x_1, \quad \frac{\partial E([x_1, x_2])}{\partial x_2} = x_2.$$

Dosazením za bod $[x_1, x_2]$ obdržíme

$$\frac{\partial E([0, 0])}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial E([0, 0])}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial E([\pi, 0])}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial E([\pi, 0])}{\partial x_2} = 0$$

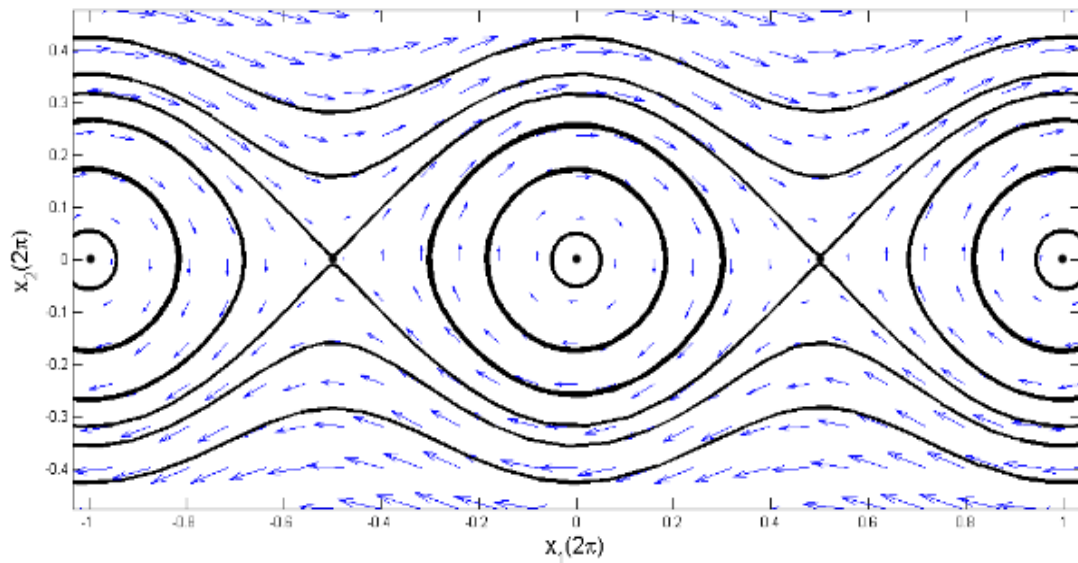
a body $[0, 0]$ a $[\pi, 0]$ jsou tedy stacionárními body funkce E .

Hessova matice pro body $[x_1, x_2]$, $[0, 0]$ a $[\pi, 0]$ má tvary

$$D^2 E([x_1, x_2]) = \begin{pmatrix} b^2 \cos x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^2 E([0, 0]) = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^2 E([\pi, 0]) = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože matice $D^2 E([0, 0])$ je pozitivně definitní, je bod $[0, 0]$ ostré lokální minimum funkce E , a protože matice $D^2 E([\pi, 0])$ je indefinitní, bod $[\pi, 0]$ není extrémem funkce E . Je tzv. bodem minimaxu.

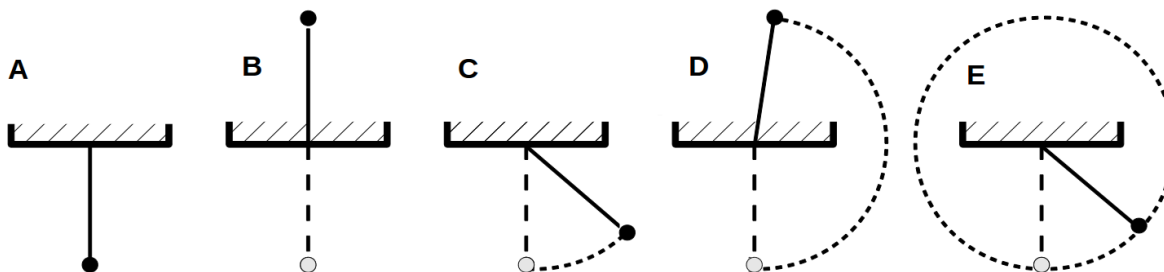
Získali jsme několik typů rozličných orbit. Vykreslením všech takovýchto orbit (pro jiné volby počátečních podmínek) bychom zaplnili celý prostor, proto na obrázku 28 jsou vykresleny jen ty nejdůležitější.



Obr. 28: Fázový portrét matematického kyvadla bez tlumení (pro $b = 1$)

5 Popis fázového portrétu

Zabývejme se nyní pohybem matematického kyvadla.



Obr. 29: Pohyb kyvadla

Klidová poloha je znázorněna na obrázku *A*. Kyvadlo se nehýbe. Ve fázovém portrétu na obrázku 28 mu odpovídá bod $[0, 0]$, tj. stabilní kritický bod, střed.

Obrázek *B* ukazuje kyvadlo, které je také v klidu. Ve fázovém portrétu odpovídá bodu $[\pi, 0]$, tj. nestabilnímu kritickému bodu, sedlu.

Uzavřené orbity(cykly) ve fázovém portrétu ukazují na obrázek *C*. Kyvadlo periodicky kmitá.

Obdobný pohyb ukazuje i obrázek *D*, kde kyvadlo ale dojde do vrcholu, a to v nekonečném čase. Ve fázovém portrétu takovému pohybu odpovídají heteroklinické orbity, které začínají v jednom kritickém bodě a končí v jiném.

Nad a pod všemi těmito orbitami na obrázku 28 leží nekonečné orbity, které ukazují na obrázek *E*. Kyvadlo se stále točí dokola.⁶

⁶Připomeňme, že jediná síla, kterou uvažujeme, je ta gravitační.

Závěr

V práci jsme si ukázali, jak zakreslit fázový portrét matematického kyvadla, který dává úplnou informaci o pohybu kyvadla.

Tento portrét je složen z nejrůznějších typů orbit, kde každá jedna popisuje určitý pohyb kyvadla. Všechny tyto orbity jsou v práci rozebrané.

Fázový portrét se změní, přidáme-li tlumení nebo buzení. Tato problematika však v textu není příliš rozebraná. Větší pozornost je věnována matematickému kyvadlu bez tlumení. Možná pro ucelení této tematiky by bylo vhodné rozpracovat ještě problematiku kyvadla s tlumením a buzením.

Značným přínosem této práce by mělo být nemalé množství obrázků, které se snaží jednoduše demonstrovat, to, co matematicky vypočítáme.

Literatura

- [1] Hale, J., Kocak, H., *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer, 1991.
- [2] Hubbard, J.H., West, B.H., *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*. New York: Springer, 1995.
- [3] Kalas, J., Ráb, M., *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Masarykova univerzita, 1995.
- [4] Diblík, J., Růžičková, M., *Obyčejné diferenciální rovnice*. Žilina: EDIS, 2008.
- [5] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer, 1991.
- [6] Čipera, S., *Diferenciální rovnice a dynamické systémy*. Praha: ČVUT, 2006.
- [7] Kotek, Z., Kubík, S., Razím, M., *Nelineární dynamické systémy*. Praha: SNTL, 1973.
- [8] Nagy, J., *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*. Praha: SNTL, 1980.
- [9] Kuben, J., *Obyčejné diferenciální rovnice*. Olomouc: Vydavatelství UP, 1995.