



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

VYUŽITÍ METODY KRIGING V INŽENÝRSKÝCH ÚLOHÁCH S NEURČITOSTMI

APPLICATION OF KRIGING IN ENGINEERING PROBLEMS WITH UNCERTAINTIES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jakub Tvrzník

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. MIROSLAV VOŘECHOVSKÝ,
Ph.D.

BRNO 2019



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	B3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Bakalářský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3647R013 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student	Jakub Tvrzník
Název	Využití metody kriging v inženýrských úlohách s neurčitostmi
Vedoucí práce	prof. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.
Datum zadání	30. 11. 2018
Datum odevzdání	24. 5. 2019

V Brně dne 30. 11. 2018

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

prof. Ing. Miroslav Bajer, CSc.
Děkan Fakulty stavební VUT

PODKLADY A LITERATURA

- [1] Sacks, J.; Welch, W.J.; Mitchell, T.J.; Wynn, H.P. (1989). Design and Analysis of Computer Experiments, *Statistical Science* 4 (4): 409–435. JSTOR 2245858.
- [2] Johnson, M.E.; Moore, L.; Ylvisaker, D. (1990). Minimax and Maximin Distance Designs. *Journal of Statistical Planning and Inference* 26: 131–148. doi:10.1016/0378-3758(90)90122-B.
- [3] Emery, X. (2005). Simple and Ordinary Multigaussian Kriging for Estimating Recoverable Reserves. *Mathematical Geology*. 37 (3): 295–319. doi:10.1007/s11004-005-1560-6.
- [4] Williams, C. K. I. (1998). Prediction with Gaussian Processes: From Linear Regression to Linear Prediction and Beyond. *Learning in Graphical Models*. 599–621. doi:10.1007/978-94-011-5014-9_23. ISBN 978-94-010-6104-9.
- [5] Bucher, Ch. (2009) Computational analysis of randomness in structural mechanics, CRC Press/Balkema, ISBN 978-0-415-40354-2
- [6] Sborníky konferencí ICOSAR a ICASP a dalších konferencí zaměřených na aplikaci počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky v inženýrských úlohách

ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ

Bakalářská práce se zaměří na možnosti aproximace odezvy experimentu nebo výpočtového modelu pomocí krigování.

Na krigování student nahlédne jako na interpolační metodu, kde jsou interpolované hodnoty modelovány pomocí normálně rozděleného náhodného pole s předpokládanou autokorelační strukturou. Student metodu využije pro interpolaci výpočtově náročného počítačového modelu (deterministického), ve kterém uváže vybrané vstupy jako náhodné proměnné a krigováním bude předpovídat odezvu modelu pomocí znalosti omezeného množství modelem vypočtených hodnot. Metodu se pokusí využít taky pro návrh nejhodnějších hodnot vstupů pro zpřesnění odhadů za pomoci vyčíslení skutečné odezvy nebo modelu.

Student naprogramuje vlastní software a otestuje chování metody na různých příkladech, které budou reprezentovat praktické inženýrské úlohy.

Dále se pokusí porovnat účinnost metody v případě použití buď optimalizovaných hodnot vstupů získaných metodami plánovaného experimentu anebo vstupů, které byly vybrány zcela náhodně.

Výsledky získané studiem chováním metod a jejich kombinací student následně zpracuje zformuluje závěry a doporučení jak pro inženýrskou praxi, tak případně navrhne další směry zkoumání a případného vývoje numerických metod.

STRUKTURA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

ABSTRAKT

Předložená bakalářská práce se zabývá interpolační metodou zvanou kriging, která je založena na regresi hodnot naměřených v okolí. Krigování je založeno na představě, že interpolovaná funkce je jednou realizací náhodného pole. Pomocí této metody dokážeme následně vyčíslit odhady funkčních hodnot v okolních bodech včetně chyb odhadu v každém bodě. Současně s tím krigování respektuje přesné naměřené hodnoty a realizace jimi přesně prochází.

Praktická část demonstruje aplikace metody na inženýrské úlohy, kde jsou naměřené hodnoty rozmístěny náhodně. V dalších příkladech jsou naměřené hodnoty rozmístěny pomocí gridu.

KLÍČOVÁ SLOVA

Běžné krigování, jednoduché krigování, sférický variogram, gausovský variogram, interpolace, kovariance, stacionarita, práh, dosah, izotropie

ABSTRACT

The presented bachelor thesis aims at interpolation method called kriging, which is based on regression of values measured in the surroundings. Kriging is based on the idea that interpolated function is one realization of a random field. Using this method we can quantify the estimates of functional values at the surrounding points, including estimation errors at each point. At the same time, kriging respects the exact measured values and the interpolation passes through them.

The practical part demonstrates the application of method to engineering tasks, where the measured values are distributed randomly. In other examples, the measured values are distributed by using a grid.

KEYWORDS

Ordinary kriging, simple kriging, spherical variogram, gaussian variogram, interpolation, covariance, stationarity, sill, range, isotropy

TVRZNÍK, Jakub. *Využití metody kriging v inženýrských úlohách s neurčitostmi*. Brno, 2019, 77 s. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce: Prof. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

Brno

.....

podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce panu prof. Ing. Miroslavu Vořechovskému, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci. Dále chci poděkovat své rodině a přítelkyni za psychickou podporu, bez které bych bakalářskou práci nikdy nedopsal.

Brno

.....

podpis autora

Obsah

Úvod	13
I Teoretická část	14
1 Základní pojmy	15
1.1 Prostorová proměnná	15
1.2 Náhodná funkce	15
1.3 Náhodný proces	15
1.4 Stacionarita	16
1.5 Euklidovská vzdálenost	18
2 Variogram	21
2.1 Definice variogramu	21
2.2 Sférický variogram	22
2.3 Dosah a oblast vlivu	23
2.4 Chování kolem počátku	25
2.5 Typy variogramů	27
2.5.1 Modely přechodového typu	27
2.5.2 Oscilační modely	30
2.5.3 Modely bez přechodu (Netransitní)	31
3 Kriging	33
3.1 Účel krigingu	33
3.2 Úskalí krigingu	34
3.2.1 Záporné váhy	34
3.2.2 Volba variogramu	34
3.2.3 Volba zbytkového rozptylu (nugget effect-u)	34
3.2.4 Symetrie rovnic	34
3.3 Odvození rovnic pro krigování	35
3.4 Chyba krigingu	36
3.5 Typy krigování	37
3.5.1 Základní krigování (Ordinary kriging)	37
3.5.2 Jednoduché krigování (Simple kriging)	38
3.5.3 Univerzální krigování	39
3.5.4 Blokové krigování	39
3.6 Lagrangeův multiplikátor	41
3.7 Aplikace krigování	41

II Praktická část	42
4 Příklady	43
4.1 Příklad č.1 – Odhad hladiny podzemní vody	43
4.1.1 Bod A	44
4.1.2 Bod B	49
4.2 Příklad č.2 – Adaptivní rozšíření návrhu	53
4.2.1 Aproximace extrému funkce	55
4.2.2 Minimalizace chyby krigingu	65
4.3 Příklad č.3 – Stanovení únosnosti prutu	71
5 Závěr	75
Literatura	77

Úvod

Interpolace mezi naměřenými nebo vypočtenými hodnotami je potřeba v mnoha odvětvích. Typickým příkladem je inženýrství. Zde predikce hodnoty může přinést úsporu času či peněz. Rychlý vývoj zaznamenala zejména geotechnika. V tomto odvětví se metoda zrodila a začala velmi rychle zlepšovat. Myšlenku interpolovat pomocí váženého průměru uplatnil Daniel G. Krieg ve své diplomové práci při odhadu průměrů zlatých nalezišť. George Mathereon posléze tuto metodu zdokonalil a pojmenoval ji po Danielu Kriegovi: kriging. Počeštěně se metodě kriging říká krigování.

Předložená bakalářská práce se zabývá krigováním a jeho aplikací na inženýrské úlohy s neurčitostmi. Neurčitostí si můžeme představit například hladinu podzemní vody. Přestože pomocí krigovací metody odhadneme výšku hladiny podzemní vody, pořád nevíme jak blízko jsme pravdě. Ke zpřesnění odhadů je třeba přidat další měření.

Část I

Teoretická část

1 Základní pojmy

1.1 Prostorová proměnná

Prostorovou proměnnou označujeme prostorové proměnlivé veličiny. Jejich chování má dva protichůdné a doplňující se aspekty. Jedná se o nahodilost a určitou strukturovanost. V matematice můžeme prostorovou proměnnou popsat jako náhodnou funkci a její skutečný průběh budeme značit $z(\mathbf{x})$. K popisu prostorové proměnné využijeme teorii náhodných funkcí, kde pozorovanou hodnotu považujeme za jednu realizaci náhodné funkce ve sledované doméně.

1.2 Náhodná funkce

Doména vstupů na kterých závisí výstup je funkcí více proměnných. V této práci je doména spojitá a hodnota funkce je definována jako spojitá veličina. Náhodnou funkci [1, 2] můžeme popsat jako soubor veličin, které jsou definovány v celém uvažovaném prostoru. Jednoduše můžeme říci, že sledovaná hodnota v každém bodě \mathbf{x} je považována za výsledek měření $z(\mathbf{x})$ náhodné proměnné $Z(\mathbf{x})$. Průměru říkáme drift a označíme jej jako $m(\mathbf{x})$. V bodech, kde byla provedena měření, máme přesnou informaci o skutečné hodnotě. Tam, kde měření provedeno nebylo, hodnoty $z(\mathbf{x})$ nejsou známé.

1.3 Náhodný proces

Náhodný proces [3] je pojem pro matematický popis náhodných jevů, které jsou navíc funkcí času. Jestliže bychom chtěli popsat funkci životní prostředí, tak by bylo obzvláště obtížné popsat například zeminu, jelikož je ovlivněna nekonečně mnoha faktory. Nejvýraznějšími faktory jsou fyzikální, chemické a biologické procesy. Tyto procesy jsou určeny, ale jejich interakce jsou složité a matematicky takřka nepopsatelné. Můžeme to tedy alespoň zformulovat pomocí konvenčního způsobu:

1. Hodnota vlastností z v jakémkoliv místě x je ekvivalentní x_1 a x_2 ve dvou dimenzích a označujeme ji $z(\mathbf{x})$. Toto je jedna z nekonečně mnoha hodnot náhodné proměnné $Z(\mathbf{x})$ v určitém místě. Obecně to nazýváme realizací procesu.
2. Soubor náhodných hodnot na všech těchto místech (nekonečně mnoho) $Z(\mathbf{x})$.
3. Náhodná proměnná je prostorově korelovaná.

1.4 Stacionarita

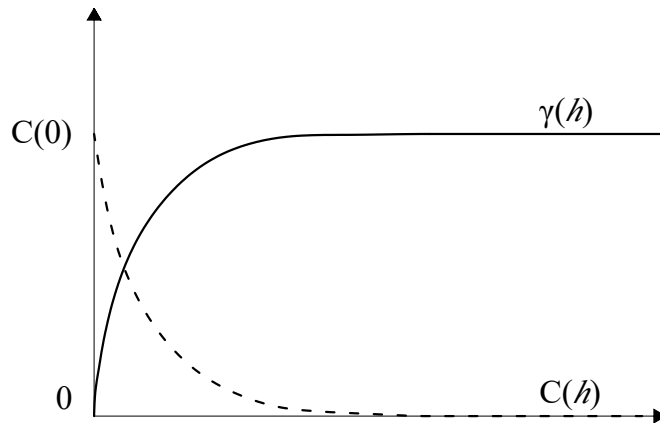
Jestliže o funkci řekneme, že je stacionární, znamená to, že její pravděpodobnostní struktura je nezávislá na posunutí [1, 2, 3]. Představme si to tak, že máme sdružené rozdělení pravděpodobnosti dvojice $[Z(x_1), Z(x_2)]$ nezáleží na konkrétní poloze bodu x_1 a x_2 , ale pouze na tom, jak jsou od sebe vzdáleny, což je vektor $\mathbf{h} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Posuneme-li body najednou, aniž bychom změnili jejich vzájemnou konfiguraci, pravděpodobnostní struktura se nezmění. Tomuto říkáme, že je invariantní vůči posunutí. Matematicky můžeme předpoklad stacionarity vzhledem ke shodné hodnotě zapsat takto:

$$E[Z(\mathbf{x})] = m(\mathbf{x}) = m \quad (1.1)$$

Tato rovnice nám říká, že střední hodnota náhodné funkce je stejná v celé oblasti, jelikož nezávisí na poloze. Analogicky lze vyjádřit i stacionaritu vzhledem ke kovarianci.

$$\text{Cov}[Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] = E\{[Z(\mathbf{x}) - m][Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m]\} = C(\mathbf{h}) \stackrel{\text{izotr.}}{=} C(h) \quad (1.2)$$

U této rovnice máme vyjádření, že kovariance nezávisí na poloze jednotlivých bodů \mathbf{x} a $\mathbf{x} + \mathbf{h}$, ale jen a pouze na jejich vzájemné poloze, jenž je dána vektorem \mathbf{h} . Tedy díky isotropii pouze na vzdálenosti h .



Obr. 1.1: Vztah kovariance a variogramu

Některé veličiny a děje mají nekonečný rozptyl, proto Mathereon formuloval stacionaritu jako stacionaritu přírůstků prostorové proměnné a nazval ji *vnitřní stacionaritou*. Pomocí rovnic ji můžeme zapsat takto:

$$E[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] = m(\mathbf{h}) \quad (1.3)$$

$$\text{var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] = 2\gamma(\mathbf{h}) \quad (1.4)$$

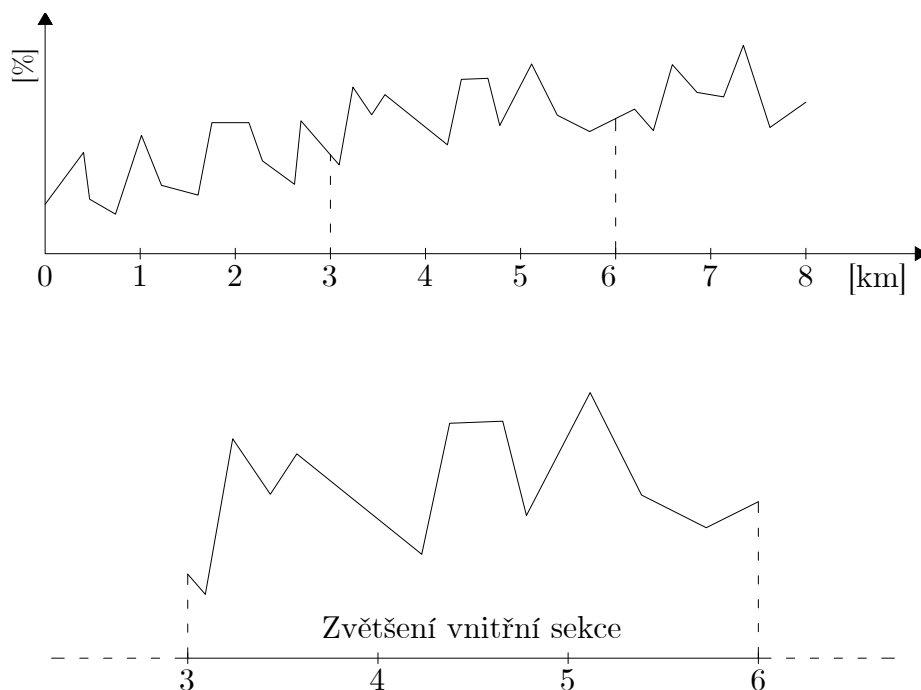
Funkci $\gamma(h)$, jež je rovna polovině variance v předchozí rovnici, nazval Mathereon jako *semi-variogram*¹. Nicméně tento název se v dnešní době běžně nepoužívá, spíše se setkáme s pojmem *variogram*².

$$\gamma(h) = \gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}\text{var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] \quad (1.5)$$

Jestliže má variogram konečný práh, jsme schopni zapsat obrácený vztah, kde $\gamma(\infty)$ je označení *prahu* variogramu.

$$C(\mathbf{h}) = \gamma(\infty) - \gamma(\mathbf{h}) \quad (1.6)$$

Rozpoznání stacionarity



Obr. 1.2: Lokální stacionarita

Předtím, než přejdeme k podrobnostem o variogramu, musíme vědět jak rozhodnout, zda konkrétní proměnná a za jakých podmínek může být považována za stacionární [1]. Prakticky se variogram používá pouze do určité vzdálenosti. Tento limit by mohl

¹variogram dělený dvěma

²funkce vzdálenosti a směru mezi dvěma lokacemi, definován jako rozptyl rozdílů hodnot proměnné v párech měřených prvků na jejich prostorové vzdálenosti

být například rozsah homogenních vrstev v ložisku nebo odhadu průměru v krigingu. V důsledku toho musí být jev do této vzdálenosti jen stacionární. Problémem je rozhodnout, zda dokážeme najít řadu pohyblivých sousedících částic, ve kterých se očekávaná hodnota a variogram dají považovat za konstantní, ale také tam, kde je dostatek dat pro smysluplné odhady. Tento předpoklad kvazi-stacionarity je opravdu jen kompromis mezi rozsahem homogenity tohoto jevu a rozsahem hustoty odběru vzorků.

Obrázek 1.2 nám ukazuje, že materiál v celých 8 km není stacionární z důvodu zvýšení průměru. Jestliže se však podíváme na kratší úsek, můžeme vidět lokální stacionaritu.

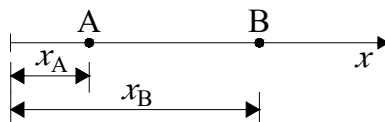
1.5 Euklidovská vzdálenost

V krigování potřebujeme euklidovskou vzdálenost k vyjádření vztahu mezi jednotlivými body. Nejsnáze představitelným měřítkem vztahu ve vícerozměrném prostoru je vzdálenost. Pojem vzdálenosti je spjat s metrikou. Dále se v práci budeme zabývat Euklidovskou metrikou (izotropní). Toto je nejjednodušší vyjádření a vychází z Pythagorovy věty.

Euklidovskou vzdálenost můžeme rozdělit podle toho, jakou dimenzi uvažujeme:

1. 1D - Na přímce

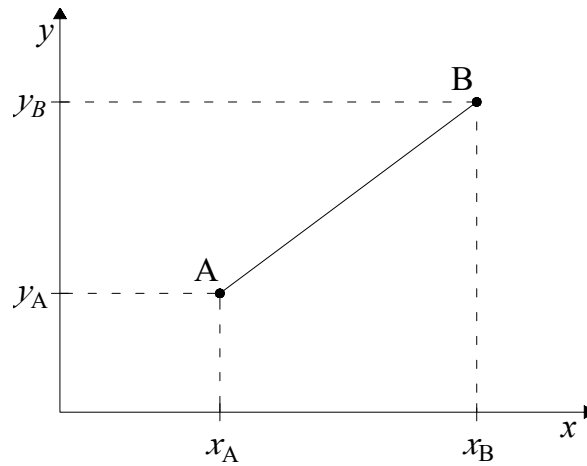
$$|AB| = |x_A - x_B| \quad (1.7)$$



Obr. 1.3: Euklidovská vzdálenost

2. 2D - V rovině

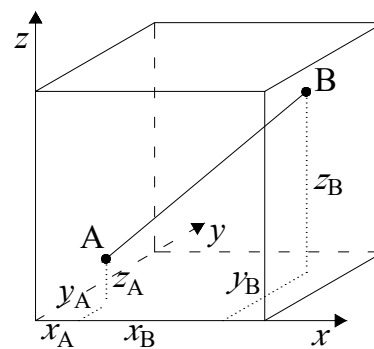
$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad (1.8)$$



Obr. 1.4: Euklidovská vzdálenost

3. 3D - V prostoru

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \quad (1.9)$$



Obr. 1.5: Euklidovská vzdálenost

4. DIM - Dimenzí

$$|AB| = \sqrt{\sum_{d=i}^{DIM} (x_{A,d} - x_{B,d})^2} \quad (1.10)$$

2 Variogram

2.1 Definice variogramu

V předchozí kapitole jsme si definovali variogram pro náhodnou funkci jako:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \text{var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] \quad (2.1)$$

Pro stacionární a vnitřní veličiny [4] je průměr $Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ roven nule, a tak $\gamma(\mathbf{h})$ je rovno střední kvadratické diferenci.

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \text{E}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})]^2 \quad (2.2)$$

V těchto rovnicích \mathbf{x} a $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ představují body ve více dimenzionálním prostoru. Dimenzí zde může být nekonečně mnoho. Když tedy budeme mít například DIM=2, což jsou 2 dimenze, poté bude bod x definován jako x_1 a x_2 , \mathbf{h} bude vektor. Z variogramu se stane funkce, která je složena ze složek h_1 a h_2 .

Charakteristiky variogramu

- variogram začíná v počátku za předpokladu, že $h = 0$, poté $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = Z(\mathbf{x})$
- kolem počátku bývá nespojitý, není to však pravidlo
- hodnota variogramu se zvyšuje s rostoucím h (dosahem) než dosáhne tzv. prahu, poté se ustálí a většinou je konstantní.
- variogram je neklesající funkcí vzdáleností

Co je to variogram

Matematická definice variogramu [4]:

$$\gamma(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{2} \mathcal{E} \left[(Z(x + \Delta x, y + \Delta y) - Z(x, y))^2 \right] \quad (2.3)$$

kde $Z(x, y)$ je hodnota proměnné v určitém místě (x, y) . $\mathcal{E}[\]$ je statistický operátor v určitém místě. Variogram $\gamma(\mathbf{h})$ ve stacionárním procesu není funkcí konkrétního bodu (x/y) , nýbrž funkcí vzdáleností mezi body $(\Delta x, \Delta y)$. Jestliže máme sadu n vzorků: $\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_i, y_i, z_i)\}$, tak (x_i, y_i) značí polohu v pozorování i a z_i je související pozorovaná hodnota. Celkem existuje $n(n - 1)/2$ jedinečných dvojic pozorování. Pro každý z těchto párů dokážeme vypočítat související vektor:

$$(\Delta x_{i,j}, \Delta y_{i,j}) \quad (2.4)$$

Jestliže bychom chtěli odvodit variogram pro konkrétní oddělený vektor $(\Delta x, \Delta y)$, musíme použít všechna data dvojic jejichž oddělený vektor je přibližně roven této vzdálenosti:

$$(\Delta x_{i,j}, \Delta y_{i,j}) \approx (\Delta x, \Delta y) \quad (2.5)$$

Nechť $S(\Delta x, \Delta y)$ je soubor všech dvojic:

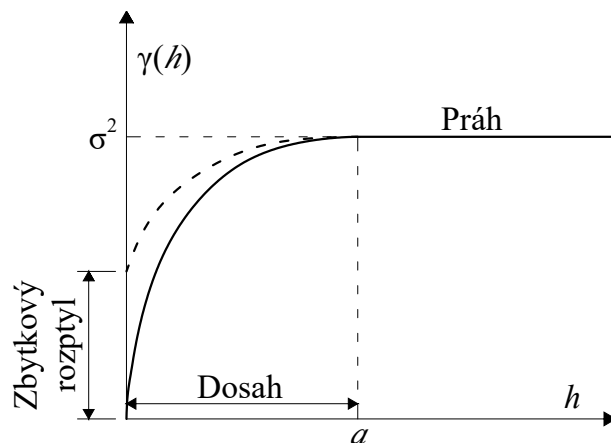
$$S(\Delta x, \Delta y) = \{(i, j) \mid (\Delta x_{i,j}, \Delta y_{i,j}) \approx (\Delta x, \Delta y)\} \quad (2.6)$$

Dále označme, že $N(\Delta x, \Delta y)$ je rovno počtu párů v $S(\Delta x, \Delta y)$. K odhadu variogramu z pozorovaných dat použijme vzorec pro *experimentální variogram*.

$$\hat{\gamma}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{2N(\Delta x, \Delta y)} \sum_{(i,j) \in S(\Delta x, \Delta y)} (z_i - z_j)^2 \quad (2.7)$$

Zde můžeme vidět, že experimentální variogram pro konkrétní oddělený vektor je vypočítán pomocí průměru poloviny rozdílu čtvercových y hodnot na všech pozorovaných dvojicích oddělených přibližně tímto vektorem.

2.2 Sférický variogram



Obr. 2.1: Variogram jehož maximální hodnoty jsou práh a dosah.

Jednotlivé prvky si rozebereme na konkrétním typu často používaného variogramu: sférický variogram [5]. Na vodorovné ose se vynáší vzdálenosti mezi jednotlivými vstupními body (tzv. lag). Na svislé ose se nachází rozptyl zkoumaných proměnných, což jsou funkce vzájemných vzdáleností všech bodů měření. Všechny vynesené body proložíme nejvíce odpovídající křivkou. Podíváme-li se na dva body které jsou od

sebe nepatrně vzdáleny, můžeme očekávat podobné hodnoty a malou semivarianci. Se vzrůstající vzdáleností hodnota semivariance roste a hodnoty nabývají většího rozdílu. Při dosažení určité vzdálenosti jednoho bodu od druhého nastane stav, kdy spolu body přestanou korelovat, jelikož jejich vzdálenost je příliš veliká. Na obrázku 2.1 vidíme jednotlivé pojmy variogramu, které budou níže podrobněji rozebrány.

Práh (Nugget free sill)

Vodorovná část variogramu, která se rovná rozptylu zpracovaných dat. Jakmile měřené vzorky dosáhnou *prahu* (nugget free sill), poté se hodnota semivariance se zvětšující vzdáleností nemění.

Dosah (Range)

Jedná se o kritickou hodnotu vzdálenosti, na níž se křivka variogramu srovná do vodorovné polohy. Dosah definuje vzdálenost, kterou je nutné uvažovat při interpolaci hodnoty v daném bodě.

Zbytkový rozptyl (Nugget effect)

Jestliže osa y není protnuta v počátku, ale v určité nenulové hodnotě, jedná se o tzv. *zbytkový rozptyl*. Toto může značit například malou přesnost měření nebo při dvojitém změření jednoho bodu pokaždé s jinou hodnotou. Jestliže však máme nulový zbytkový rozptyl, lze krigování považovat za exaktní interpolátor.

2.3 Dosah a oblast vlivu

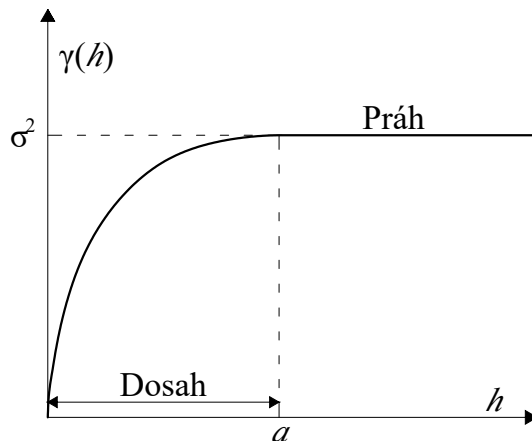
Se vzrůstající hodnotou variogramu se ukazuje, jak rychle váhy variogramu klesají [2]. Dosažení maximálních hodnot (prahu variogramu) signalizuje, že mezi vzorky není žádná korelace ¹. Tuto kritickou vzdálenost nazýváme dosah (range). Pro stacionární proměnnou se variogram $\gamma(\mathbf{h})$ rovná rozptylu:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \text{var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] = \frac{1}{2} \text{var}[(Z(\mathbf{x})) - (Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}))] = \sigma^2 \quad (2.8)$$

¹Kovariance je statistickou mírou lineární závislosti dvou veličin.

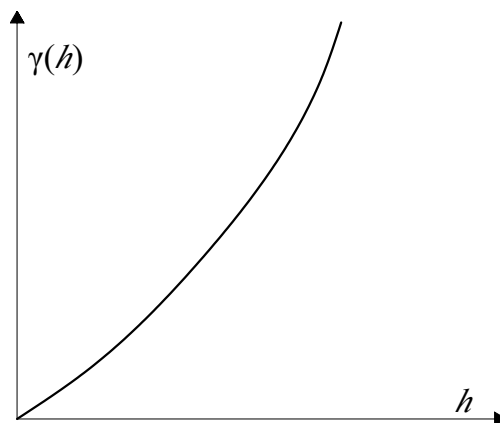
Dle této kapitoly můžeme variogramy dále dělit na:

1. Variogram, který dosáhne prahu



Obr. 2.2: Variogram který dosáhne prahu

2. Variogram, který pouze roste



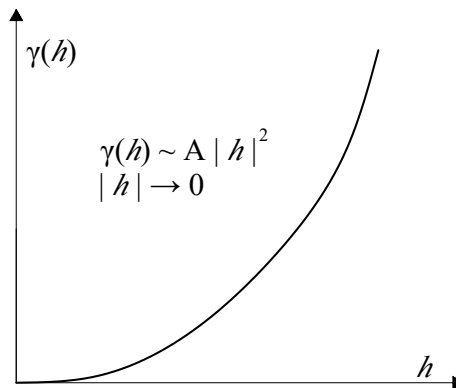
Obr. 2.3: Variogram který pouze roste

Ne všechny variogramy dosáhnou prahu. Obr. 2.3 ilustruje stav, při kterém variogram nikdy prahu nedosáhne. Zde je základní rozdíl mezi variogramem a kovariancí. Kovariance existuje pouze pro stacionární proměnné, je ohraničena a rozsah nemusí být stejný ve všech směrech. Dochází k tomu zejména u několika vnořených struktur na různých vzdálenostních stupnicích.

2.4 Chování kolem počátku

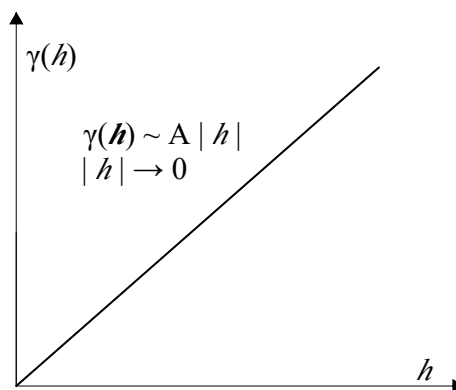
Důležité je pozorovat chování malých hodnot h , abychom zajistili spojitost a prostorovou pravidelnost proměnné. Standardně jsou popisovány čtyři typy chování variogramu kolem počátku [2].

1. **Kvadratický:** Toto značí, že regionalizovaná proměnná je spojitá. Kvadratický tvar může být přiřazován k výskytu driftu.



Obr. 2.4: Kvadratický tvar poukazuje na spojitost proměnné

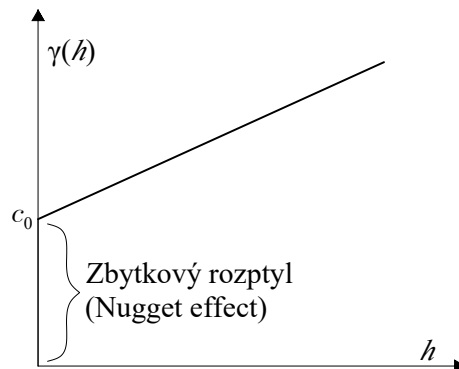
2. **Lineární:** Regionalizovaná proměnná je posléze spojitá, ale není diferencovatelná². Je méně pravidelná než kvadratická.



Obr. 2.5: Lineární chování poukazuje na malou spojitost proměnné

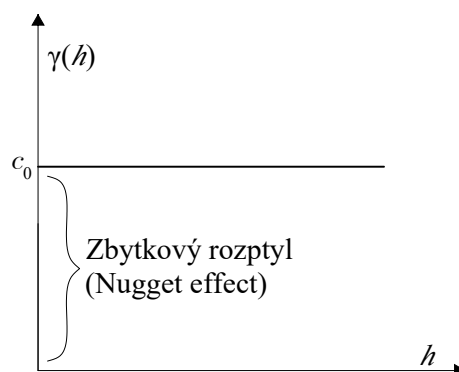
²Funkce, která v určitém bodě **nemá** diferenciál. Diferenciál v matematice vyjadřuje závislost změny hodnoty funkce na malé změně jejího argumentu.

3. **Nespojitý:** $\gamma(\mathbf{h})$ nekonverguje³ k nule pro $h \rightarrow 0$. Nemá tendenci jít k nule, když h má tendenci jít k nule. Toto značí, že proměnná je vysoce nepravidelná na krátkých vzdálenostech.



Obr. 2.6: Nespojité chování ukazuje diskontinuitu v počátku, kterou nazýváme zbytkový rozptyl (Nugget effect)

4. **Konstantní:** Jedná se o čistě náhodné chování nebo též bílý šum (nekorelovanost, nulová střední hodnota, konstantní rozptyl). Regionalizovaná proměnná $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ a $Z(\mathbf{x})$ jsou nekorelované⁴ pro všechny hodnoty h (nehledě na to jak jsou blízko).



Obr. 2.7: Rovné chování ukazuje diskontinuitu v počátku, kterou nazýváme zbytkový rozptyl (Nugget effect)

³Jestliže nekonverguje, znamená to, že se nepřibližuje.

⁴Korelace znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

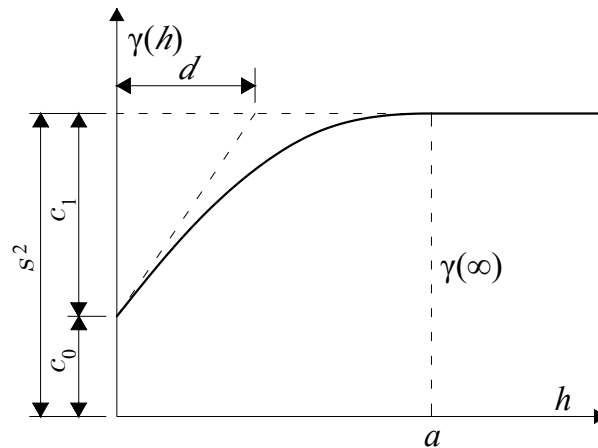
2.5 Typy variogramů

V literatuře lze nalézt celou řadu modelů variogramu [2, 5]. Nejznámější modely zde představíme.

2.5.1 Modely přechodového typu

U těchto modelů kolísá prostorová autokorelace s hodnotou h . Při malé vzdálenosti vzorků je shoda mezi hodnotami vzorků vysoká, čili variabilita je nízká. Při narůstající vzdálenosti se tzv. „neshoda“ až do vzdálenosti dosahu zvyšuje. Takové místo nazýváme rozptyl. U této vzdálenosti se již neuplatňuje prostorová vazba mezi zkoumanými místy. Variabilita je určována statickým rozptylem.

Sférický model



Obr. 2.8: Sférický model variogramu

Jedná se o často používaný model. Jeho vyjádření je jednoduché polynomiální a často se shoduje se sledovanou proměnnou. Typicky se projevuje v případech, kdy v poli dominuje jeden zdroj variability. Do určité vzdálenosti má přibližně lineární růst, poté se stabilizuje.

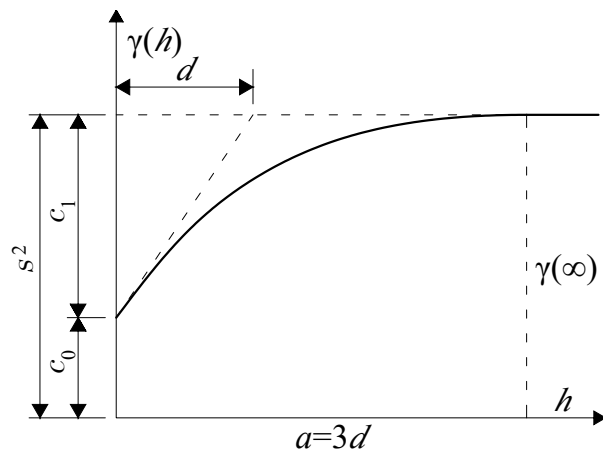
$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} c_0 + c_1 \left[\frac{3}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right], & 0 < h \leq a \\ c_0 + c_1, & h \geq a_s \end{cases} \quad (2.9)$$

Exponenciální model

Teoreticky tento model nemá práh ani dosah. Praktický rozsah tohoto modelu je $3 \cdot a$, což je vzdálenost, kdy dosáhne 95% vzdálenosti své mezní hodnoty. Tento model

používáme tam, kde je velká různorodost (například u zemin).

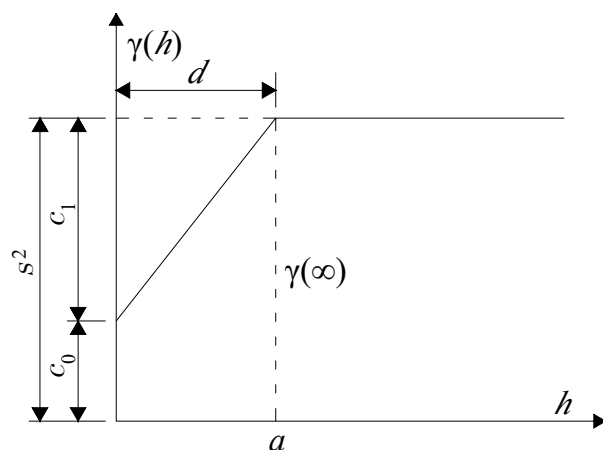
$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & h = 0, \\ c_0 + c_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{3d}\right)\right], & h \neq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$



Obr. 2.9: Exponenciální model variogramu

Lineární model s prahem

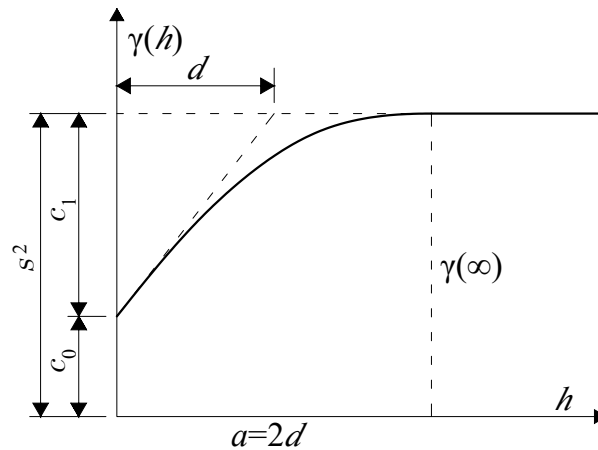
Model používaný zvláště programy provádějící interpolaci krigování na základě automaticky vypočítaného a vyhodnoceného semivariogramu. Nepoužívá se při provádění strukturní analýzy.



Obr. 2.10: Lineární model s prahem

Kvadratický model

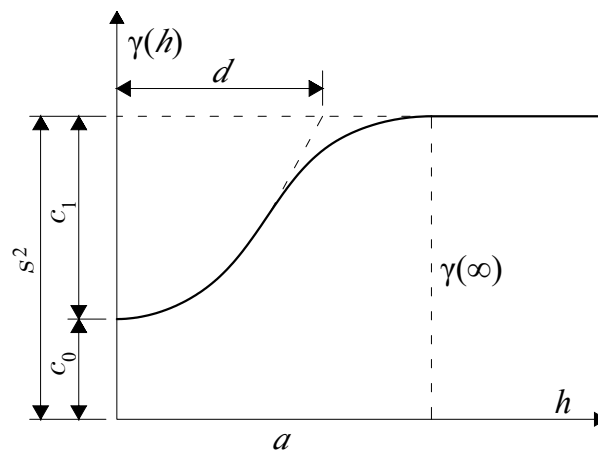
$$\gamma(h) = \begin{cases} c_0 + c_1 \left[2 \left(\frac{h}{a} \right) - \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] & h \leq a \\ c_0 + c_1 & |h| > a \end{cases} \quad (2.11)$$



Obr. 2.11: Kvadratický model variogramu

Gaussovský model

Praktický dosah je $1,73 \cdot a$. Jedná se o model, který je v $h = 0$ diferencovatelný. Zkušenosti ukazují, že často dochází k numerické nestabilitě, jestliže nepoužijeme zbytkový rozptyl (nugget effect). Můžeme se s ním setkat například u modelování výškových dat.



Obr. 2.12: Gaussovský model variogramu

$$\gamma(\mathbf{h}) = c_0 + c_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \right] \quad (2.12)$$

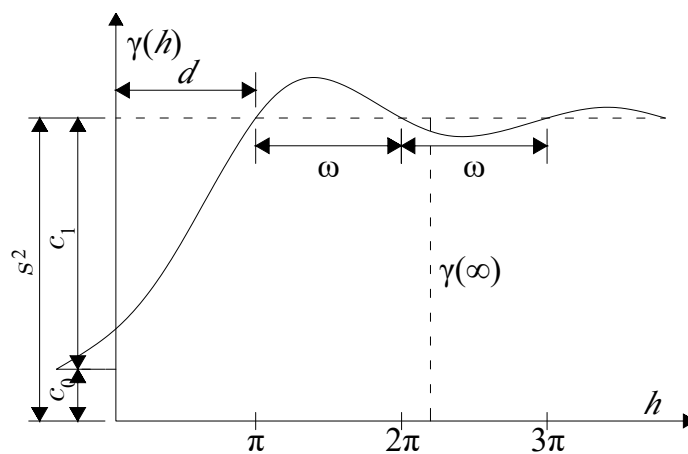
2.5.2 Oscilační modely

Sinový model

Dochází k postupnému tlumení oscilací. Hodnota sinu se udává v radiánech.

$$\gamma(\mathbf{h}) = c_0 + c_1 \left[1 - \frac{\sin(gh)}{gh} \right] \quad (2.13)$$

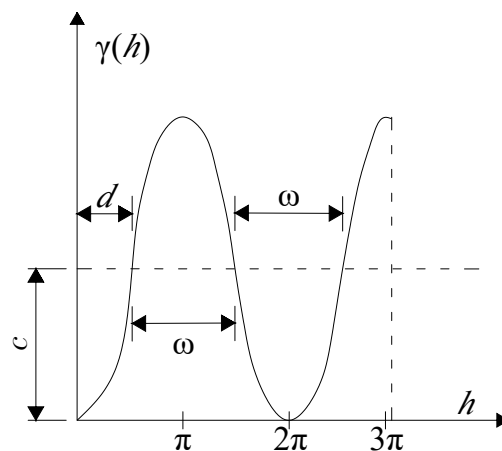
v této rovnici $g = \pi/\omega$



Obr. 2.13: Sinový model variogramu

Cosinový model

Zde nedochází ke tlumení hodnot oscilací.



Obr. 2.14: Cosinový model variogramu

$$\gamma(\mathbf{h}) = c_0 + c_1[1 - \cos(gh)] \quad (2.14)$$

v této rovnici $g = \pi/\omega$

2.5.3 Modely bez přechodu (Netransitní)

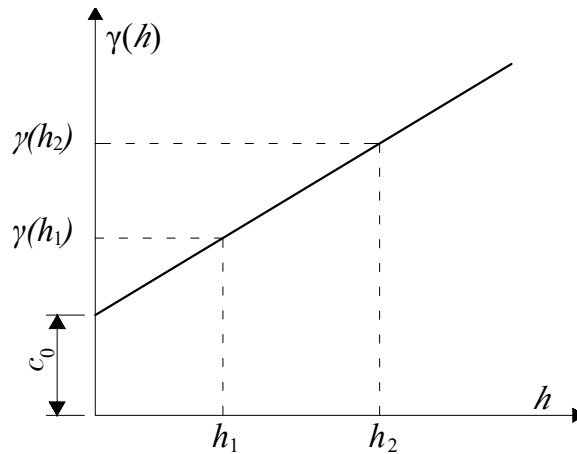
Variogramy, které nemají práh (sill) v rámci studované plochy. Tyto modely se používají v extrémních případech klasického přechodového modelu. Pokud bychom chtěli vypočítat hodnotu variogramu pouze do hodnoty rozpětí d , poté bychom při vynesení bodů nenašli žádnou oblast stabilizace křivky variogramu. Proto model definujeme jako model bez přechodu.

Lineární model

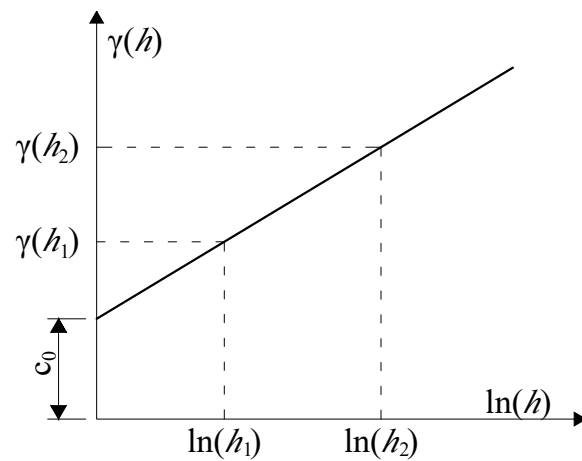
$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ c_0 + b\|\mathbf{h}\|, & h \neq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\gamma(\mathbf{h}) = c_0 + bh \quad (2.16)$$

V této rovnici je b směrnice přímky.



Obr. 2.15: Lineární model variogram

Logaritmický variogram

Obr. 2.16: Logaritmický model variogramu

$$\gamma(\mathbf{h}) = c_0 + b \ln(h) \quad (2.17)$$

V této rovnici je b směrnice přímky.

3 Kriging

Kriging je interpolační metoda, která slouží k nejlepšímu nestrannému odhadu bodových hodnot nebo blokových průměrů. Zde slovo „nejlepší“ znamená minimální, čili nejmenší odchylky. Metoda se často označuje jako **BLUE** (Best Linear Unbiased Estimator), což znamená nejlepší lineární nevyčýlený odhad. Nejpoužívanějšími typy jsou běžné krigování (ordinary kriging), jenž se používá v situacích, kdy není známá střední hodnota. Jednoduché krigování (simple kriging) použijeme když je střední hodnota známá.

3.1 Účel krigingu

Vzorkování nám poskytne přesnou informaci v určitých bodech, nikoliv však v celé vyšetřované oblasti (definiční obor). V řadě aplikací je potřeba odhadnout/predikovat hodnoty v mezilehlých bodech nebo celých blocích. Výstižnost odhadu závisí na několika faktorech [2]:

1. Počtu vzorků a kvalitě dat v každém bodě.
2. Poloha vzorků v ložisku. Rovnoměrné rozložení vzorků dosahuje lepšího pokrytí a díky tomu i přesnější a lepší informace o neznámé proměnné.
3. Vzdálenost mezi vzorky a odhadovaným bodem nebo blokem. Přirozeně se budeme nejvíce spoléhat na sousedské vzorky, než na ty nejvzdálenější. Očekáváme největší přesnost u bodů, které jsou nejbližší vzorkům u kterých známe odhadované parametry. Velké úskalí na nás číhá pokud budeme chtít odhadovat vzorky mimo ohraničené krajními území (extrapolace).
4. Prostorová spojitost uvažované proměnné. Je jednodušší odhadnout hodnotu poměrně pravidelné proměnné, než té, která jsou nepravidelné.

Kriging je metoda odhadu, která uvažuje všechny tyto faktory. Metoda byla pojmenována po Dr. D.G. Kriegovi, jihoafrickém důlním inženýrovi. Krieg jako vůbec první rozvinul techniku klouzavého průměru pro odhad zlata. Důležité u této metody bylo, že odstraňuje regresní účinky. Profesor G. Mathereon metodu vylepšil, a nazval ji Kriging. Jedná se o způsob, jak najít nejlepší nestranný lineární odhad jenž má nejmenší rozptyl. To znamená, že zvolíme vážený průměr hodnot vzorků, které mají minimální rozptyl.

3.2 Úskalí krigingu

3.2.1 Záporné váhy

Je důležité si uvědomit, že rozptyl krigingu nemůže být záporný, zatímco váhy záporné být mohou [2]. Toto může být způsobeno z důvodu použití variogramu, který není pozitivně definitní (neplatná volba) nebo u programů v diskretizaci bloků.

3.2.2 Volba variogramu

Jestliže jsme ve fázi, kdy potřebujeme zvolit variogram, často nejdůležitější je dobře zvolit zbytkový rozptyl (nugget effect) a tvar variogramu kolem počátku (krátké vzdálenosti) [2].

Podobné variogramy

Zatím neexistuje žádná sofistikovaná technika pomocí které bychom měli nafitovat¹ variogram. Pokud tedy máme málo bodů, tak nám nezbývá nic jiného, než určit variogram tzv. „od oka“. Jestliže zvolíme dva podobné modely, které splňují výše uvedené podmínky, tj. dobrý fit kolem počátku a dobrá volba zbytkového rozptylu, můžeme očekávat velmi podobný odhad a rozptyl krigingu [2]. Toto je způsobeno řádky a sloupci v kriging systému, které jsou podobné.

3.2.3 Volba zbytkového rozptylu (nugget effect-u)

Volba správného zbytkového rozptylu je nesmírně důležitá, jelikož se výsledky projeví na krigovacích vahách a rozptylu [2]. Pokud neznáme chování variogramu okolo počátku, nebo alespoň někde mezi počátkem a prvním bodem, tak v podstatě „tipujeme“, který variogram použít. Je nanejvýš důležité chápat důsledek volby variogramu a jaké hodnoty můžeme očekávat.

3.2.4 Symetrie rovnic

V době vývoje metody kriging nedosahoval výkon počítačové techniky dnešní úrovně. Matematické výpočty a práce s rozsáhlými maticemi při řešení lineárních rovnic byly velmi zdlouhavé. Toto vedlo geostatiky k myšlence zmenšení velikosti krigovacího systému. První z nápadů byl v zavedení *symetrie* do rovnic [2].

¹Proložení bodů ve variogramu pomocí křivky.

3.3 Odvození rovnic pro krigování

Základní krigovací rovnice

$$\mathbf{K}_{ok} \cdot \lambda_{ok} = \mathbf{m}_{ok} \quad (3.1)$$

kde:

- Matice \mathbf{K}_{ok} definuje kovarianci mezi jednotlivými měřeními vrty.
- Vektor \mathbf{m}_{ok} definuje kovarianci mezi jednotlivými měřeními a odhadovaným bodem ve kterém chceme určit hodnotu.

Řešením tohoto systému rovnic dostáváme vektor vah λ [2].

Pokud chceme odvodit rovnice pro krigování, musíme najít lineární funkci proměnné $Z(x)$, za předpokladu že máme k dispozici n datových hodnot $Z(x_1), \dots, Z(x_n)$. Například chceme-li udělat odhad v určitém bodě $Z(x_0)$ nebo průměrnou hodnotu v určité oblasti. Abychom se vyhnuli nutnosti vypsat všechny případy odděleně, označíme množství tak, aby bylo odhadnuto podle:

$$z_V = \frac{1}{V} \int_V z(x) dx \quad (3.2)$$

Obsah V může značit těžební blok nebo samotný bod mezi odhadovanými body. Pro odhad $z(V)$ použijeme tzv. vážený průměr údajů, tedy lineární kombinaci naměřených hodnot:

$$z_V^* = \sum \lambda_i z(x_i) \quad (3.3)$$

kde λ je vektor vah. Součet všech faktorů vah pro daný odhadovaný bod nebo blok je roven jedné. Hvězdičkou jako horní index z budeme značit odhadovanou hodnotu na rozdíl od skutečné která hvězdičku nemá. Problém je vybrat faktory vah nejlepším způsobem. V této fázi použijeme geostatické modely. Uvažujeme prostorové proměnné:

$$Z_V^* = \sum \lambda_i Z(x_i) \quad (3.4)$$

Váhy volíme za předpokladu, že odhad je:

- Nestranný

$$E[Z_V^* - Z_V] = 0 \quad (3.5)$$

- Má minimální rozptyl

$$\text{Var}[Z_V^* - Z_V] = \text{minimum} \quad (3.6)$$

3.4 Chyba krigingu

Poté co vyřešíme krigovací rovnice, dosadíme váhy do vzorce pro vážený průměr (rovnice 3.3) a spočteme hledanou hodnotu. Následně dokážeme spočítat minimalizovaný rozptyl krigování ze vzorců [1]:

- pro variogram

$$\sigma^2 = \sum \lambda_j \gamma(x_j - x_0) + \mu_L \quad (3.7)$$

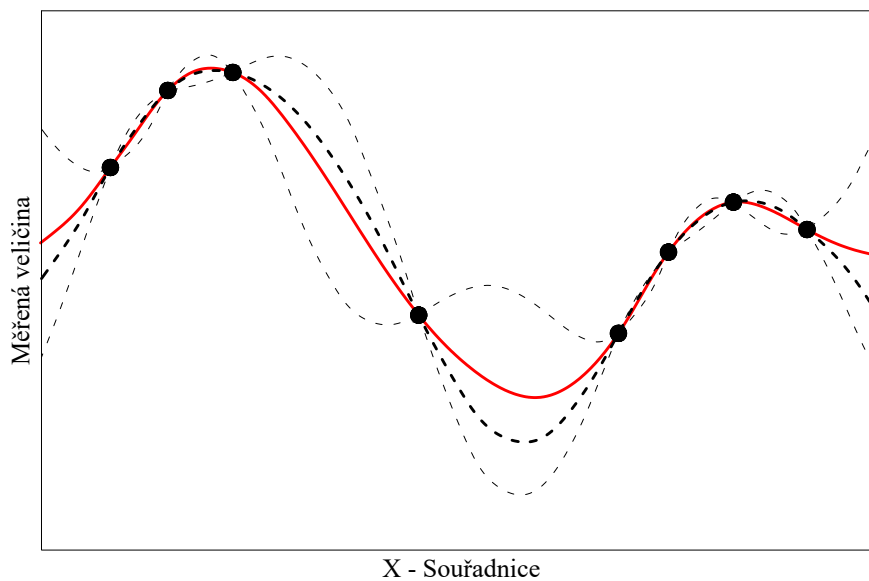
- pro kovarianci

$$\sigma^2 = C(0) - \sum \lambda_j C(x_j - x_0) + \mu_L \quad (3.8)$$

Z rovnice 3.7 a 3.8 je vidno, že krigovací chyba je ovlivněna vzdáleností mezi odhadovaným bodem a naměřeným bodem a dále i na jejich vzájemném uspořádání (seskupení).

Chceme-li získat směrodatnou odchylku², stačí odmocnit rozptyl. Přesný název je *směrodatná odchylka krigingu* (kriging standard deviation), popřípadě *směrodatná chyba krigingu* (kriging standard error). S její pomocí lze vyjádřit 95% interval spolehlivosti pro odhad tvaru (předpoklad normality rozdělení):

$$Z^*(x_0) \pm 1.96\sigma(x_0) \quad (3.9)$$



Obr. 3.1: 1D průběh prostorové veličiny (tučná čárkovaná čára), naměřené hodnoty (body), interpolovaná hodnota pomocí krigování (tučná plná červená čára), 95% interval spolehlivosti (tenká čárkovaná)

²Určuje jak moc jsou hodnoty rozptýleny či odchýleny od průměrné hodnoty.

Na obrázku 3.1 vidíme výsledek 1D interpolace dat společně se spolehlivostí vymezenou obálkou 95% intervalu ze vztahů 3.7 a 3.8. Z obrázku 3.1 je patrné, že interpolační křivka prochází měřenými body, to značí, že metoda krigování je *přesný interpolátor* (exact interpolator). V naměřených bodech je chyba krigování nulová. S nárůstem vzdálenosti od naměřených bodů chyba roste.

3.5 Typy krigování

Krigování oproti ostatním metodám nabízí mimo odhadu vlastní interpolované hodnoty také odhad pravděpodobnosti výskytu a odhad chyby predikce [6]. Jednotlivé typy krigingu můžeme charakterizovat pomocí jednoduchého modelu:

$$Z(x_i) = \mu(x_i) + \varepsilon(x_i) \quad (3.10)$$

kde $Z(x_i)$ je proměnná v bodě x_i , která je složena z deterministické hodnoty trendu $\mu(x_i)$ a náhodná proměnná $\varepsilon(x_i)$. Ve většině případů hodnotu trendu neznáme a pouze ji odhadujeme, čímž zanášíme chybu do výpočtu. Pro hodnotu trendu platí, že průměrná chyba se rovná nule a autokorelace hodnot $\varepsilon(x_i)$ a $\varepsilon(x_i+h)$ závisí pouze na vzdálenosti h . Model (typ) krigování volíme podle toho, zda $\mu(x_i)$ je konstanta nebo představuje trendovou složku, popřípadě jestli je tato hodnota známá nebo neznámá. Typy krigování pomocí kterých můžeme provést odhad patří především:

- Základní krigování s bodovým odhadem (Ordinary kriging)
- Základní krigování s blokovým odhadem (Ordinary kriging)
- Jednoduché krigování (Simple kriging)
- Univerzální krigování
- Co-krigování

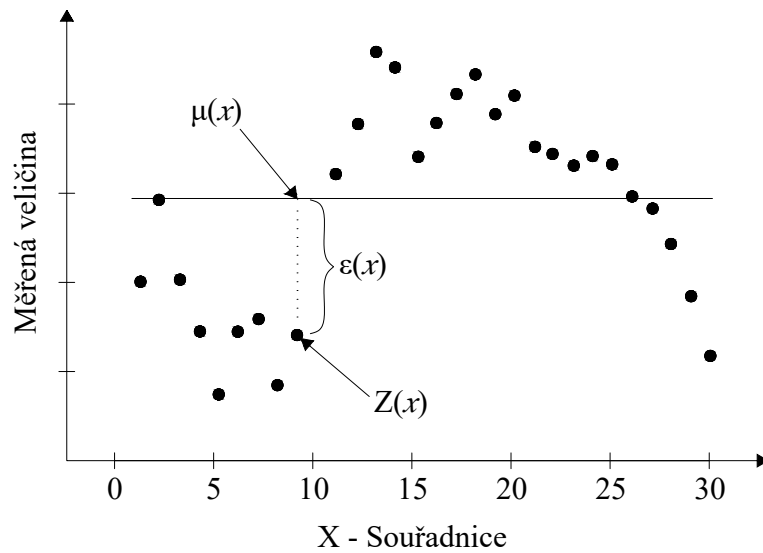
3.5.1 Základní krigování (Ordinary kriging)

Obecný model základního krigování:

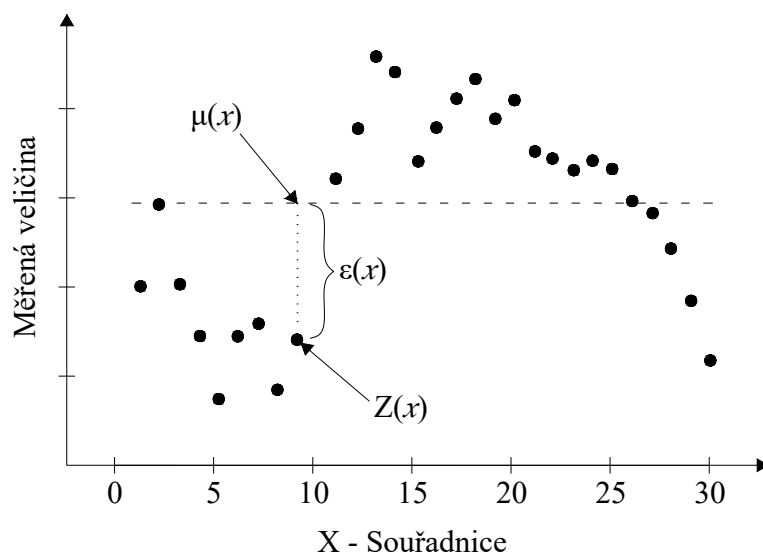
$$Z(x_i) = \mu(x_i) + \varepsilon(x_i) \quad (3.11)$$

μ je v tomto případě neznámá hodnota trendu.

Základní krigování je vysvětleno a aplikováno v 1. příkladu praktické části.

Obr. 3.2: Princip základního krigování - μ je neznámé

3.5.2 Jednoduché krigování (Simple kriging)

Obr. 3.3: Princip jednoduchého krigování - μ je známé

Nejjednodušší model krigování u kterého předpokládáme stacionární pole. Obecný model má tvar:

$$Z(x_i) = \mu(x_i) + \varepsilon(x_i) \quad (3.12)$$

μ je v tomto případě známá konstanta.

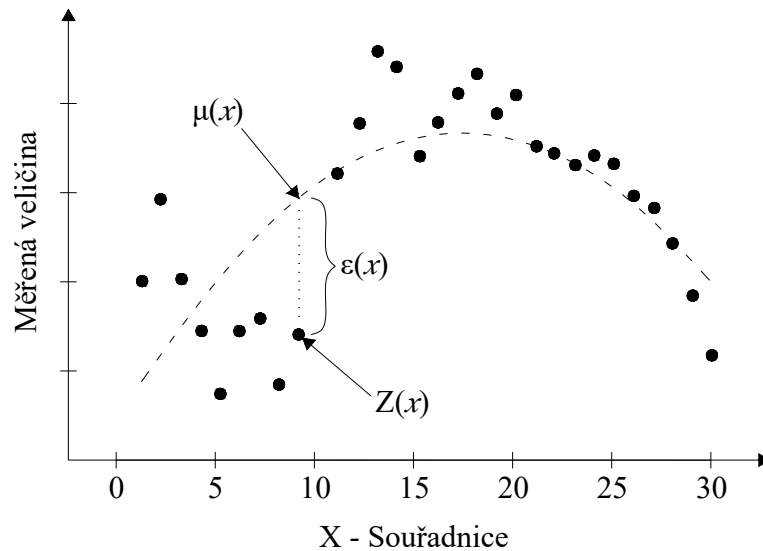
Jednoduché krigování je aplikováno a vysvětleno ve 2. příkladu praktické části.

3.5.3 Univerzální krigování

Obecný model univerzálního krigování:

$$Z(x_i) = \mu(x_i) + \varepsilon(x_i) \quad (3.13)$$

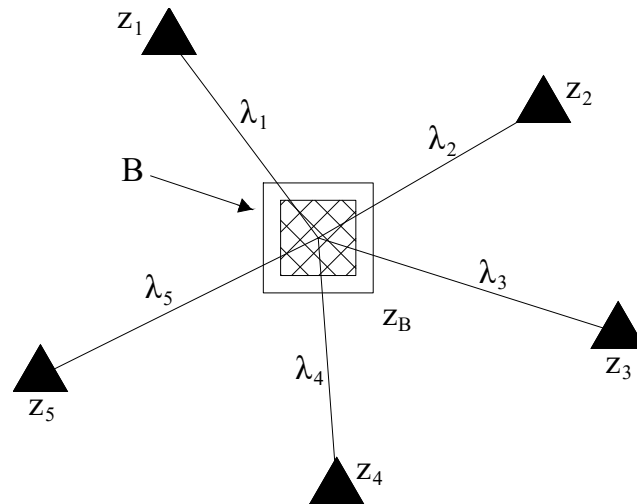
ve kterém $\mu(x)$ představuje deterministickou funkci, což je například polynom druhého stupně: Obr. 3.4. Jestliže od naměřené hodnoty odečteme hodnotu polynomu v určitém místě, poté dostaneme chybu $\varepsilon(x)$ v tomtéž místě.



Obr. 3.4: Princip univerzálního krigování

3.5.4 Blokové krigování

Blokové krigování je aproximující metodou. Bodový odhad metodou krigingu můžeme vztáhnout i k ploše, či objemu interpolovaných hodnot. Například jevy v přírodě jsou značně variabilní a výsledkem takového odhadu může být mapa obsahující ostré vrcholy a propady. Toto jsme schopni potlačit pomocí rovnic a odhadneme-li průměrnou hodnotu $z(B)$ proměnné z pro určitou plochu nebo objem Obr. 3.5. Modifikace je vhodná, pokud má být výsledkem interpolací pravidelná struktura buněk (grid).



Obr. 3.5: Princip blokového krigování

Průměrná hodnota pro blok B:

$$z(B) = \frac{1}{S_B} \int_B z(x) dx \quad (3.14)$$

kde S_B je plocha.

Odhadneme z výrazu:

$$\hat{z}(B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z(x_i) \quad (3.15)$$

Vektor vah λ je roven jedné.

Minimální rozptyl bude tedy:

$$\hat{\sigma}^2(B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, B) + \phi - \bar{\gamma}(B, B) \quad (3.16)$$

a získáme ho z:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_j) + \phi = \bar{\gamma}(x_j, B) \quad \text{pro všechna } j \quad (3.17)$$

Rozptyly odhadů pro blokové krigování jsou mnohem menší než pro bodové krigování. Vypočtený povrch je více vyhlazený³ a neobsahuje *tolik* lokálních extrémů.

³spojitý bez ostrých vrcholů křivek ve vektorových kreslicích programech

3.6 Lagrangeův multiplikátor

Lagrangeův multiplikátor značíme m , je to poslední člen ve vektoru \mathbf{m}_{ok} . Zajišťuje minimalizaci odchylek, ale zároveň zaručuje, že suma všech vah λ je rovna jedné. Pomocí tohoto multiplikátoru jsme schopni vypočítat rozptyl odhadnuté hodnoty. V této práci Lagrangeův multiplikátor uvidíme u 1. příkladu v praktické části (běžné krigování). Ve druhém příkladu používáme jednoduché krigování, ve kterém již Lagrangeův multiplikátor není obsažen.

3.7 Aplikace krigování

V dnešní době se krigování používá v mnoha odvětvích, nejčastěji však ale v inženýrství. Krigování nám může ušetřit spoustu času, které bychom jinak strávili výpočty (například průhybu). U konstrukcí, které jsou náročné na výpočet a jejichž výpočty trvají několik desítek hodin, je jednodušší změřit pár přesných hodnot a na ně následně aplikovat kriging. Pomocí krigování dokážeme odhadnout například (průběh křivky průhybu) v nekonečně mnoha dimenzích (délka, zatížení, typ materiálu, ...). Pokud bychom chtěli zjistit extrém funkce průhybu (maximální průhyb), poté bychom další měření vkládali do míst s maximální odhadnutou hodnotou. Toto bychom opakovali do té doby, než se odhadnuté hodnoty začnou opakovat. Tímto způsobem dokážeme efektivně určovat průběh průhybu bez nutnosti si nechat spočítat funkci průhybu na celé konstrukci.

Část II

Praktická část

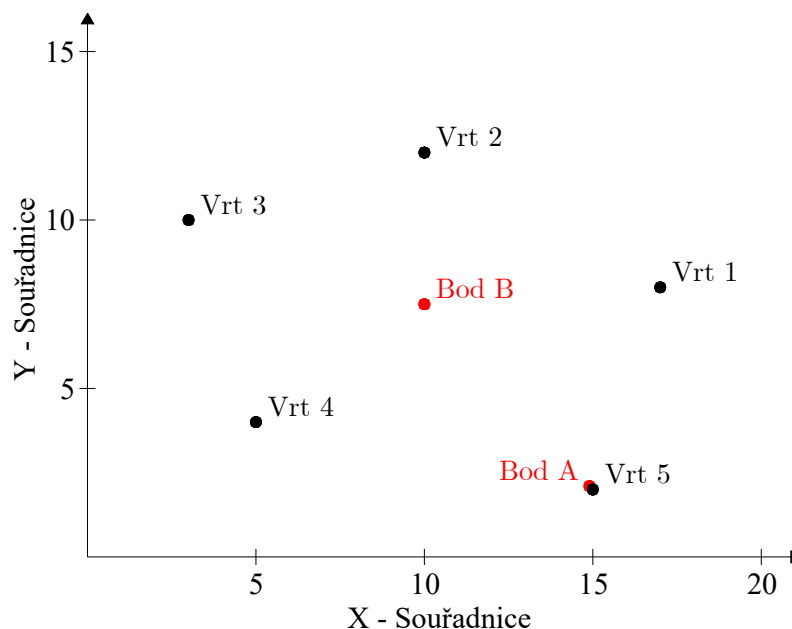
4 Příklady

Příklady byly vypočítány pomocí literatury [7, 8].

4.1 Příklad č.1 – Odhad hladiny podzemní vody

V prvním příkladu předvedeme, co nám krigování přinese za výhody a jaká jsou jeho úskalí. Příklad slouží pouze pro ilustraci.

Máme pozemek $20\text{ m} \times 15\text{ m}$, na kterém potřebujeme odhadnout hladinu podzemní vody. K dispozici je 5 vrtů, v kterých změříme přesnou hodnotu hladiny podzemní vody (dále jen hpv). Toto rozdělení jednotlivých vrtů je čistě náhodné. Pro vzorový příklad bude ukázán postup a rozdíly mezi bodem, který je blízko naměřené hodnoty (Bod A) a bodem, který je dále od naměřených hodnot (Bod B).



Obr. 4.1: Půdorysné rozmístění vrtů

Naměřené hodnoty hpv v jednotlivých vrtech:

- Vrt 1 [17; 8] = 6,2 m
- Vrt 2 [10; 12] = 6,0 m
- Vrt 3 [3; 10] = 5,7 m
- Vrt 4 [5; 4] = 6,1 m
- Vrt 5 [15; 2] = 5,9 m
- Bod A [14, 9; 2, 1] = ? m
- Bod B [10; 7, 5] = ? m

Před výpočtem je potřeba si stanovit vzájemné vzdálenosti mezi odhadovaným bodem a vrty. Pomocí těchto hodnot poté naplníme vektory \mathbf{l}_i pro jednotlivé odhadované body a matici \mathbf{L} pro vrty.

- Pro bod A

Tab. 4.1: Euklidovské vzdálenosti vč. bodu A

	Bod A	Vrt 1	Vrt 2	Vrt 3	Vrt 4	Vrt 5
Bod A	0	6,26	11,05	14,28	11,08	0,14
Vrt 1	6,26	0	8,06	14,14	12,65	6,32
Vrt 2	11,05	8,06	0	7,28	9,43	11,18
Vrt 3	14,28	14,14	7,28	0	6,32	14,42
Vrt 4	10,08	12,65	9,43	6,32	0	10,20
Vrt 5	0,14	6,32	11,18	14,42	10,20	0

- Pro bod B

Tab. 4.2: Euklidovské vzdálenosti vč. bodu B

	Bod B	Vrt 1	Vrt 2	Vrt 3	Vrt 4	Vrt 5
Bod B	0	7,02	4,50	7,73	6,10	7,43
Vrt 1	7,02	0	8,06	14,14	12,65	6,32
Vrt 2	4,50	8,06	0	7,28	9,43	11,18
Vrt 3	7,43	14,14	7,28	0	6,32	14,42
Vrt 4	6,10	12,65	9,43	6,32	0	10,20
Vrt 5	7,43	6,32	11,18	14,42	10,20	0

V tabulce jsou jednotlivé hodnoty v metrech. Můžeme si všimnout že na diagonále jsou nuly, jelikož vzdálenost sama k sobě je nula.

4.1.1 Bod A

Souřadnice bodu A jsou [14,9;2,1].

Euklidovská vzdálenost

Pro každý z vrtů a odhadovaných bodů je třeba vypočítat jeho vlastní Euklidovskou vzdálenost vzhledem k ostatním bodům. Pomocí tabulky 4.1 naplníme matici \mathbf{L} a vektor \mathbf{l}_A .

$$\mathbf{L} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 8,06 & 14,14 & 12,65 & 6,32 \\ & 0 & 7,28 & 9,43 & 11,18 \\ & & 0 & 6,32 & 14,42 \\ & & & SYM. & 0 \\ & & & & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Matice \mathbf{L} definuje vztah mezi jednotlivými vrty.

$$\mathbf{I}_A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccc} 6,26 & 11,05 & 14,28 & 11,08 & 0,14 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Vektor \mathbf{I}_A definuje vztah mezi bodem A a jednotlivými vrty.

Variogram

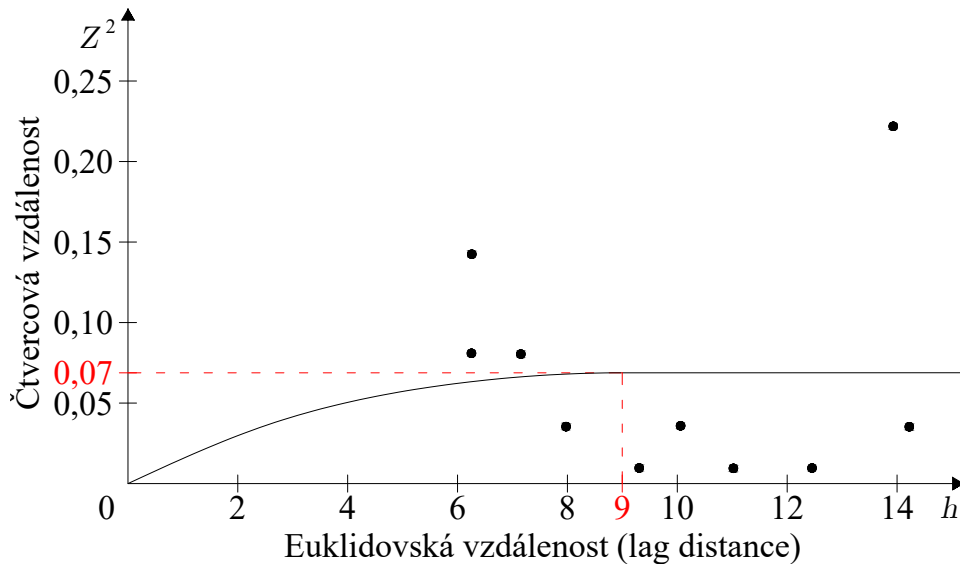
Tab. 4.3: Body Variogramu

číslo bodu	číslo bodu	Čtvercová vzdálenost	Euklidovská vzdálenost
1	2	0,04	8,06
1	3	0,25	14,14
1	4	0,01	12,65
1	5	0,09	6,32
2	3	0,09	7,28
2	4	0,01	9,43
2	5	0,01	11,18
3	4	0,16	6,32
3	5	0,04	14,42
4	5	0,04	10,20

Čtvercovou vzdálenost Z^2 vypočítáme:

$$Z^2 = (Z_i - Z_j)^2, \quad Z_i \text{ a } Z_j \text{ zde značí naměřené hodnoty hpv ve vrtech.}$$

Jelikož máme málo naměřených bodů, je obtížné zvolit variogram, který by nejlépe fitoval (vyhovoval/seděl) na naměřená data. Proto zvolíme často používaný variogram, což je sférický variogram.



Obr. 4.2: Odhad sférického variogramu

Z obrázku 4.2 byly určeny následující hodnoty:

- Dosah (Range) $a = 9$ m
- Práh variogramu (Nugget free sill) $c_1 = 0,07$
- Zbytkový rozptyl (Nugget effect) $c_0 = 0$

V tabulce pro euklidovskou vzdálenost Tab. 4.1 jsme měli 36 hodnot, nicméně v obrázku Obr. 4.2 jsme zakreslili pouze 10 bodů. Důvod je ten, že tabulka euklidovských vzdáleností je symetrická a vzdálenost bodu sama se sebou je nula.

Základní krigovací rovnice

Základním principem krigování je vyřešení lineárních soustav rovnic. Výsledkem jsou váhy pro jednotlivé naměřené hodnoty. Součet vah je roven jedné (většinou). Dolní index „ok“ který se zde vyskytuje vychází z angličtiny a značí základní krigování v angličtině tedy ordinary kriging.

$$\mathbf{K}_{ok} \cdot \lambda_{ok} = \mathbf{m}_{ok} \quad (4.1)$$

Matice \mathbf{K}_{ok}

Tato matice definuje kovarianci mezi jednotlivými měřeními vrty. Podívejme se na indexy pro γ_{ij} v matici. Dolní indexy zde značí o jakou interakci mezi jakými body se jedná. Například γ_{24} má stejnou hodnotu jako γ_{42} , jelikož vzdálenost mezi bodem

4 a bodem 2 je jedna hodnota. Naznačme si zde všechny typy výpočtu. Vycházíme z euklidovských vzdáleností.

- $\gamma_{24} \equiv \gamma_{42} : L_{24} = 9,43 > a = 9 \implies \gamma_{24} = 0$
- $\gamma_{23} \equiv \gamma_{32} : L_{23} = 7,28 < a = 9 \implies \gamma_{23} = c_0 - c_1[1,5(h/a) - 0,5(h/a)^3] = 0,07 - 0,07[1,5(7,28/9) - 0,5(7,28/9)^3] = 0,004$
- $\gamma_{11} : L_{11} = 0 \implies c_0 + c_1 = 0,07 + 0 = 0,07$

$$\mathbf{K}_{\text{ok}} = \left[\begin{array}{ccc|c} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{15} & 1 \\ \gamma_{21} & \dots & \gamma_{25} & 1 \\ \gamma_{31} & \dots & \gamma_{35} & 1 \\ \gamma_{41} & \dots & \gamma_{45} & 1 \\ \gamma_{51} & \dots & \gamma_{55} & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0,070 & 0,001 & 0 & 0 & 0,008 & 1 \\ 0,001 & 0,070 & 0,004 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,004 & 0,070 & 0,008 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,008 & 0,070 & 0 & 1 \\ 0,008 & 0 & 0 & 0 & 0,070 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (4.2)$$

\mathbf{K}_{ok} je bloková matice ve které 1 je sloupcový vektor jedniček o dimenzi počtu bodů.

Vektor \mathbf{m}_{ok}

Tento vektor nám definuje kovarianci mezi jednotlivými měřeními a tím odhadovaným bodem, ve kterém chceme určit hodnotu. Hodnoty do tohoto vektoru se budou počítat stejně jako u matice \mathbf{K}_{ok} .

- $\gamma_{01} : L_{01} = 6,26 < a = 9 \implies \gamma_{01} = c_0 - c_1[1,5(h/a) - 0,5(h/a)^3] = 0,07 - 0,07[1,5(6,26/9) - 0,5(6,26/9)^3] = 0,009$
- $\gamma_{02} : L_{02} = 11,05 > a = 9 \implies \gamma_{02} = 0$

$$\mathbf{m}_{\text{ok}} = \begin{pmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \\ \gamma_{03} \\ \gamma_{04} \\ \gamma_{05} \\ \hline m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,009 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,068 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

Přestože máme pouze pět naměřených vzorků, tak se zde vyskytuje šestý člen m (Lagrangeův multiplikátor).

Inverzní matice \mathbf{K}_{ok}

Jednoduchou možností jak vyřešit systém rovnic 4.1 je pomocí inverzní matice soustavy $\mathbf{K}_{\text{ok}}^{-1} : \lambda_{\text{ok}} = \mathbf{K}_{\text{ok}}^{-1} \cdot \mathbf{m}_{\text{ok}}$

$$\mathbf{K}_{\text{ok}}^{-1} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 12,025 & -2,881 & -2,363 & -2,531 & -4,249 & 0,197 \\ -2,881 & 11,480 & -3,295 & -2,627 & -2,676 & 0,211 \\ -2,363 & -3,295 & 12,248 & -4,167 & -2,422 & 0,189 \\ -2,531 & -2,627 & -4,167 & 11,903 & -2,578 & 0,202 \\ -4,249 & -2,676 & -2,422 & -2,578 & 11,926 & 0,201 \\ \hline 0,197 & 0,211 & 0,189 & 0,202 & 0,201 & -0,016 \end{array} \right]$$

Krigovací váhy

Výpočet krigovacích vah dle rovnice 4.1.

$$\lambda_{\text{ok}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,012 \\ 0,003 \\ 0,003 \\ 0,003 \\ 0,979 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suma všech vah je rovna jedné. Vrtu 5 náleží téměř 98% váha. Zbylým 4 vrtům náleží pouhá 2%. Důvod rozdělení těchto vah je ten, že bod A leží velmi blízko vrtu 5, a proto ho vrt 5 ovlivňuje nejvíce.

Odhad střední hodnoty hladiny podzemní vody

$$\begin{aligned} Z^* &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Z_i = 6,2 \cdot 0,012 + 6 \cdot 0,002 + 5,7 \cdot 0,003 + 6,1 \cdot 0,003 + 5,9 \cdot 0,979 \\ &= \underline{5,90 \text{ m}} \end{aligned}$$

Rozptyl a směrodatná odchylka

$$\sigma^2 = c_1 - \mathbf{m}_{\text{ok}}^T \cdot \lambda_{\text{ok}} = 0,07 - \left(0,009 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,068 \quad | \quad 1 \right) \cdot \begin{pmatrix} 0,012 \\ 0,003 \\ 0,003 \\ 0,003 \\ 0,979 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,003 \text{ m}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,003} = \pm 0,057 \text{ m}$$

0,95 Interval

$$Z(x_0) = \pm 1,96 \cdot \sqrt{\sigma^2} = \pm 1,96 \cdot \sqrt{0,003} = \pm 0,112 \text{ m} \implies (5,788; 6,012)$$

Výsledek

Hladina podzemní vody v bodě A byla pomocí krigingu odhadnuta na 5,90 m se směrodatnou odchylkou $\pm 0,057$ m.

4.1.2 Bod B

Souřadnice tohoto bodu jsou [10;7,5]. Zde bude proveden stejný systém jako při odhadu bodu A. Následně se podíváme na rozdíly v jednotlivých maticích a vektorech.

Euklidovská vzdálenost

Matice \mathbf{L} je stejná jako pro bod A. Vektor \mathbf{l}_B naplníme z tabulky 4.2 stejně jako u bodu A.

$$\mathbf{l}_B = 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7,02 & 4,50 & 7,43 & 6,10 & 7,43 \end{pmatrix}$$

Variogram

Z obrázku 4.2 byly zvoleny následující hodnoty:

- Dosah (Range) $a = 9$ m
- Práh variogramu (Nugget free sill) $c_0 = 0,07$
- Zbytkový rozptyl (Nugget effect) $c_1 = 0$

Vektor \mathbf{m}_{ok}

$$\mathbf{m}_{ok} = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,022 \\ 0,003 \\ 0,010 \\ 0,003 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Krigovací váhy

$$\lambda_{ok} = \begin{pmatrix} 0,146 \\ 0,406 \\ 0,095 \\ 0,228 \\ 0,125 \\ -0,007 \end{pmatrix}$$

Odhad střední hodnoty hladiny podzemní vody

$$Z^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Z_i = \underline{6,01 \text{ m}}$$

Rozptyl a směrodatná odchylka

$$\sigma^2 = s - \mathbf{K}_{ok}^{-1} \cdot \lambda_{ok} = 0,065 \text{ m}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \pm 0,254 \text{ m}$$

0,95 Interval

$$Z(x_0) = \pm 1,96 \cdot \sqrt{\sigma^2} = \pm 0,498 \text{ m} \rightarrow (5,512; 6,508)$$

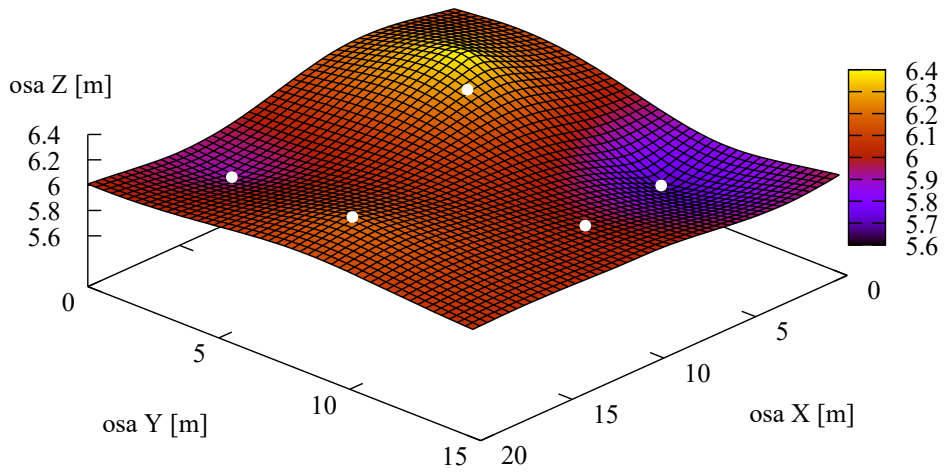
Výsledek

Hladina podzemní vody v bodě B byla pomocí krigingu odhadnuta na 6,01 m se směrodatnou odchylkou $\pm 0,498$ m.

Závěr

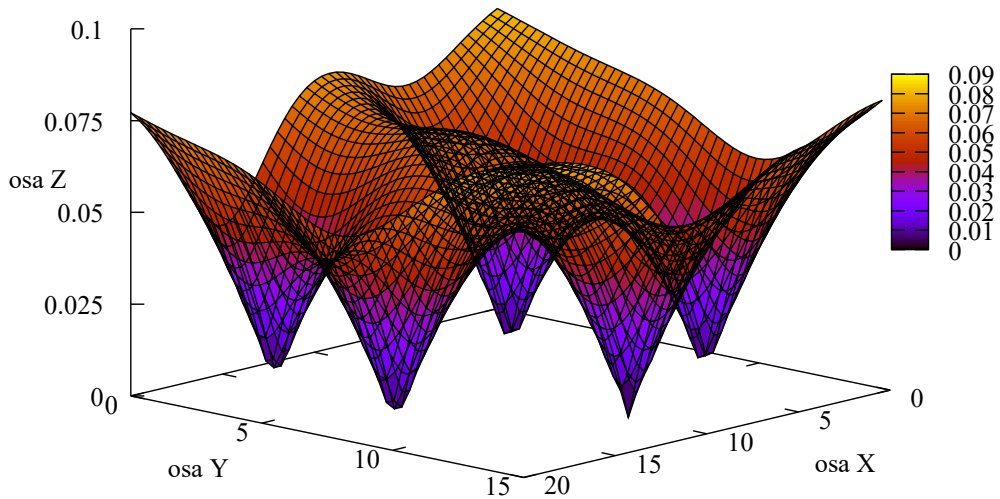
Na tomto příkladu jsme si naznačili postup interpolace pomocí běžného krigování. Nejdůležitější je správná volba variogramu, jelikož výrazně ovlivní výsledky. Pro zpřesnění odhadu průběhu plochy hpv je nutné udělat další vrt (přesně naměřit hodnotu) v místě největšího rozptylu. Tento příklad simuluje reálný problém odhadu hpv, proto zde není zakreslena skutečná hpv, ale pouze ta odhadnutá pomocí krigování.

Střední hodnota a rozptyl hpv



Obr. 4.3: Odhad střední hodnoty hpv

Bílými body jsou zde zakresleny provedené vrty kterým kriging přímo prochází.



Obr. 4.4: Rozptyl hpv

Ve špičkách na obrázku 4.4 jsou provedené vrty. V nich je největší jistota krigingu, která ale se vzdáleností klesá.

Jednoduché krigování (Simple Kriging)

Postup řešení je úplně stejný jako u běžného krigování (ordinary kriging).

Základní krigovací rovnice

Rovnice pro běžné krigování 4.1 z 1. příkladu. Změníme zde pouze indexy z s_k (Simple Kriging) na ok (Ordinary Kriging).

$$\mathbf{K}_{sk} \cdot \lambda_{sk} = \mathbf{m}_{sk} \quad (4.3)$$

Hlavním rozdílem oproti běžnému krigování je absence Lagraengova multiplikátoru ve vektoru \mathbf{m}_{sk} (poslední člen). Touto absencí není součet vah roven jedné a navíc zde mohou být váhy záporné. Při běžném krigování je součet vah roven jedné. U jednoduchého krigování predikovaná hodnota nabude hodnoty mimo naměřený rozsah maxima a minima

\mathbf{K}_{sk} se zde přímo rovná blokové matici $\gamma_{\mathbf{L}}$ z rovnice 4.2 (chybí zde poslední řádek a sloupec jedniček, které jsou zakončeny nulou).

4.2 Příklad č.2 – Adaptivní rozšíření návrhu

V tomto příkladu použijeme další častý typ krigování: běžné krigování (Ordinary Kriging.) Budeme zde porovnávat 2 typy postupů a zodpovíme otázku, zda je výhodnější:

- Udělat 4 rovnoměrně rozmístěné vrty a v druhém kroku je doplnit o 2 další.
- Udělat najednou 6 rovnoměrně rozmístěných vrtů.

Příklad je rozdělen na dvě části. První část se zabývá nejlepším umístěním studny a druhá část co nejlépe odhadnutým průběhem hladiny podzemní vody (dále jen hpv).

Rovnoměrné rozložení vrtů znamená, že jsou uspořádány podle gridu. Jestliže do rovnoměrně rozdělených vrtů bude přidán další vrt, stanou se z nich nerovnoměrně rozmístěné vrty. Vrty jsou číslovány A_{ij} v 1. části (případně B_{ij} ve 2. části), přičemž i je pořadí vrtu a j je celkový počet vrtů. Nové vrty budou zakreslovány červeně a stávající černě.

Funkce skutečné hladiny podzemní vody:

$$z = \left[3 \cdot (1-x)^2 \cdot \exp(-x^2 - (y+1)^2) - 10 \cdot \left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5 \right) \cdot \exp(-x^2 - y^2) - \frac{1}{3} \cdot \exp(-1(x+1)^2 - y^2) \right] / 3 - 5 \quad (4.4)$$

Vybraná funkce 4.4 nejlépe reprezentuje skutečný průběh hpv. Funkce je řešena na intervalu $x \in \langle -1,5; 0,5 \rangle$, $y \in \langle -1,5; 0,5 \rangle$, následně lineárně transformována na čtverec 1×1 z důvodu rovnoměrného rozmístění bodů ve čtverci (LHSPA¹[9]).

Vyhodnocení chyb odhadu

Bodová chyba

Hvězdička zde značí odhadnutou hodnotu a apostrof skutečnou hodnotu hpv.

- Odhadnutá výška hpv a skutečná hpv v bodě A_0 (1D euklidovská vzdálenost)

$$L_{1D} = (Z^* - Z')$$

- Půdorysná vzdálenost (2D euklidovská vzdálenost)

$$L_{2D} = \sqrt{(x^* - x')^2 + (y^* - y')^2}$$

¹metoda optimalizace vzorku typu Latin Hypercube Sampling (LHS), která je založena na optimalizaci vzájemných vzdáleností v periodicky rozšířeném prostoru (používá periodickou metriku).

- Vzdálenost nejvyšší odhadnuté a skutečné hpv (3D euklidovská vzdálenost)

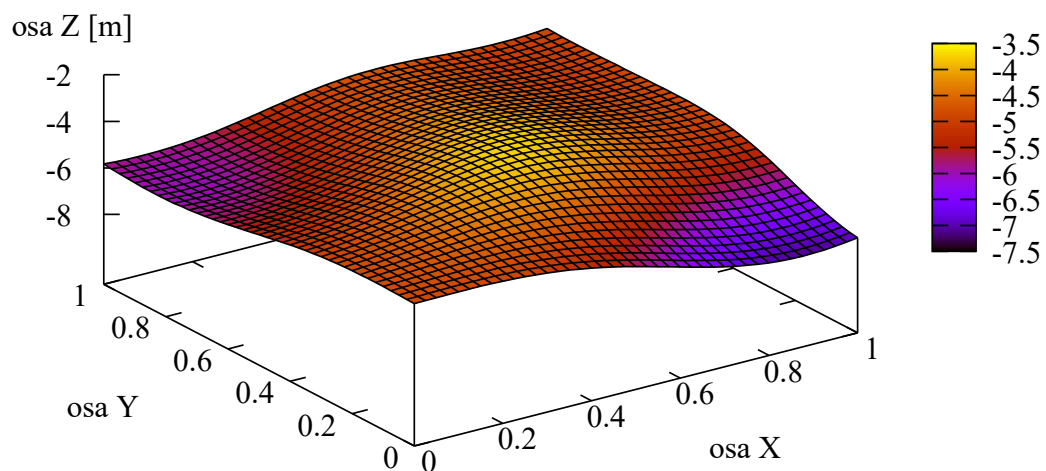
$$L_{3D} = \sqrt{(x^* - x')^2 + (y^* - y')^2 + (z^* - z')^2}$$

Plošná chyba

Ve druhé části použijeme druhou odmocninu průměrné kvadratické chyby odhadu (Root Mean Square Prediction Error) k vyjádření přesnosti plošného povrchu pomocí metody kriging dle následující rovnice:

$$\text{RMSPE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [Z^*(s_i) - Z(s_i)]^2}{n}} \quad (4.5)$$

Grafické zobrazení řešené funkce:



Obr. 4.5: Znázornění funkce 4.4 na transformované čtvercové doméně

4.2.1 Aproximace extrému funkce

V první části příkladu chceme na čtvercovém pozemku (1×1) založit studnu. Abychom tento problém vyřešili, budeme hledat bod, ve kterém je h_{pv} nejbližší povrchu. Pro stanovení nejvhodnějšího umístění studny porovnáme dva postupy s těmito vstupními daty:

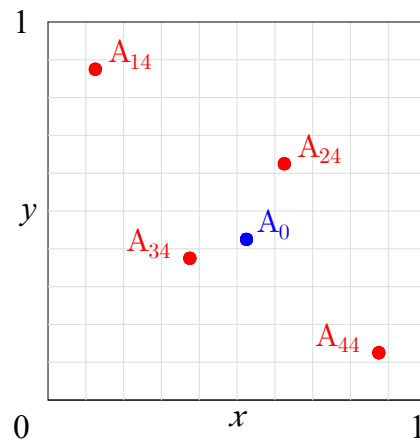
- 4 rovnoměrně rozmístěné vrty, které budou v druhém kroku doplněny o 2 další (nerovnoměrné rozmístění).
- 6 rovnoměrně rozmístěných vrtů

Vyhodnocení dat obou postupů provedeme pomocí bodových chyb. Dle funkce skutečné hladiny podzemní vody 4.4 má bod s nejvyšší hladinou podzemní vody souřadnice $A_0[0, 525; 0, 425] = -3, 744$ m.

1. Rovnoměrně rozložené 4 vrtů

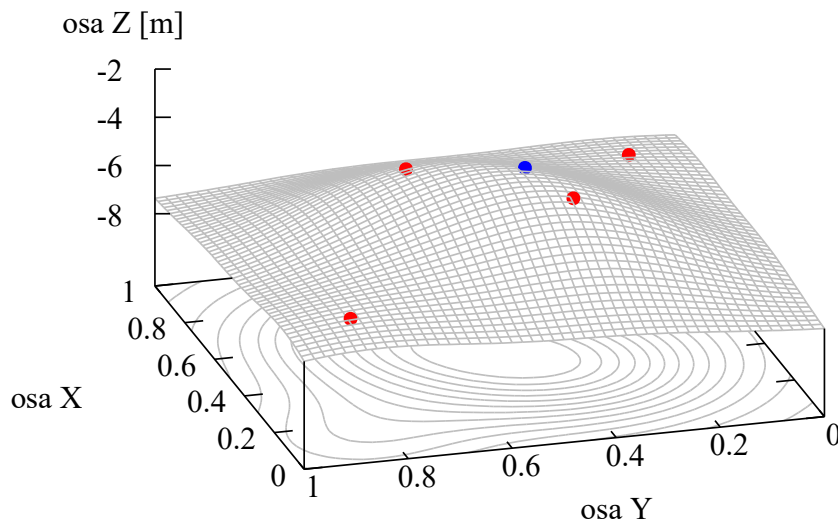
Souřadnice a naměřené hodnoty hladiny podzemní vody v jednotlivých vrtech:

- Vrt $A_{14}[0, 125; 0, 875] = -5, 99$ m
- Vrt $A_{24}[0, 375; 0, 375] = -3, 97$ m
- Vrt $A_{34}[0, 625; 0, 625] = -4, 12$ m
- Vrt $A_{44}[0, 875; 0, 125] = -6, 53$ m



Obr. 4.6: Půdorysné nerovnoměrné rozmístění 4 vrtů

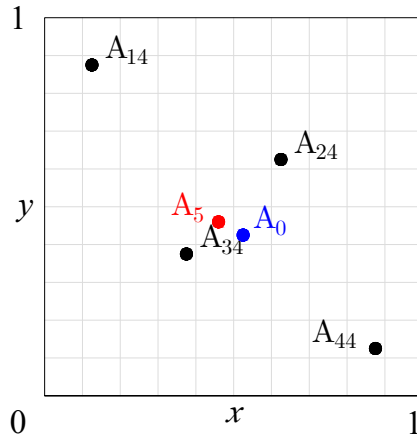
Z těchto čtyř bodů pomocí krigingu stanovíme plošný průběh hladiny podzemní vody ve čtverci. Zobrazení můžeme vidět na následujícím obrázku:



Obr. 4.7: Plošný průběh hpv ze 4 vrtů

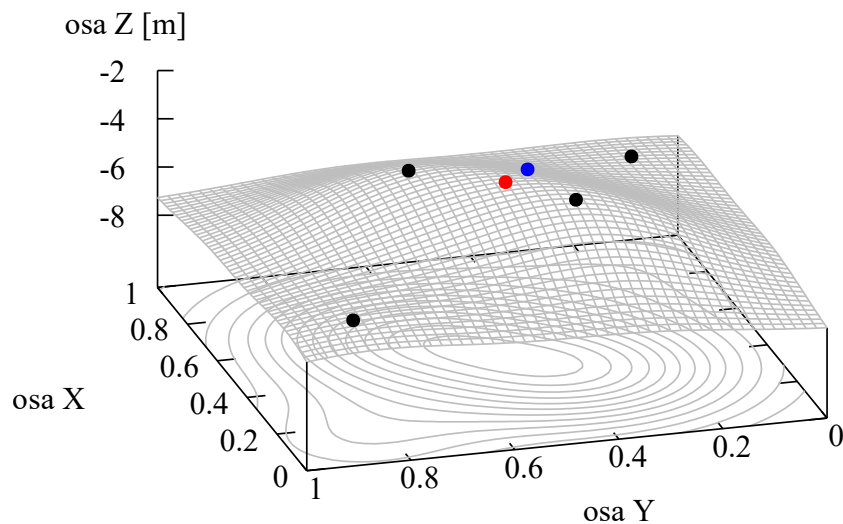
Nerovnoměrně rozmístění 5-ti vrtů

Bod $A_5[0,48;0,48]$ z plošného průběhu hpv byl stanoven jako bod s nejvyšší hpv $-3,57$ m. Doplněním takto vybraného bodu se vrty stávají nerovnoměrně rozloženými. V bodě byl následně proveden ověřovací vrt, jehož hpv je $-3,81$ m.



Obr. 4.8: Půdorysné nerovnoměrné rozmístění 5-ti vrtů

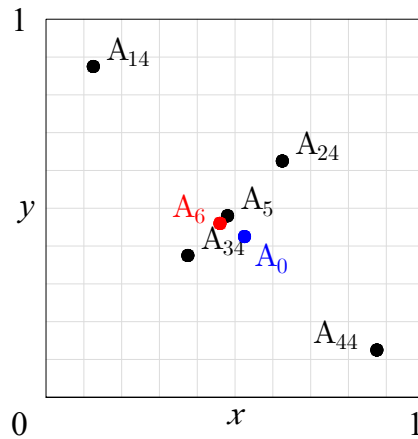
Z původních 4 vrtů a nově zjištěného A_5 jsme pomocí krigingu stanovili plošný průběh hpv. Zobrazení můžeme vidět na následujícím obrázku:



Obr. 4.9: Plošný průběh hpv z 5-ti vrtů

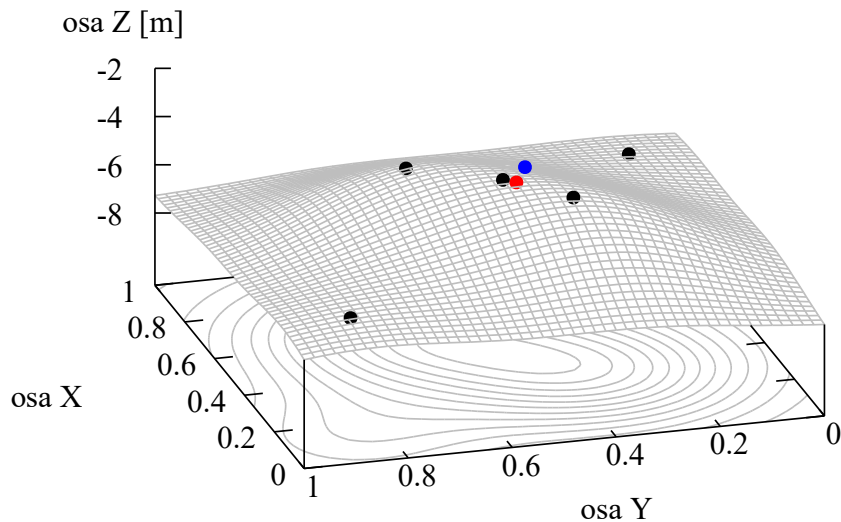
Nerovnoměrné rozmístění 6 vrtů

Bod $A_6[0,46;0,46]$ z plošného průběhu hpv byl stanoven jako bod s nejvyšší hpv $-3,81$ m. V bodě byl následně proveden ověřovací vrt, jehož hpv je $-3,82$ m. Z původních 4 vrtů a dvou ověřovacích vrtů A_5 a A_6 jsme pomocí krigingu stanovili definitivní plošný odhad hpv ze 6 nerovnoměrně rozmístěných vrtů.



Obr. 4.10: Půdorysné rovnoměrné rozmístění 6-ti vrtů

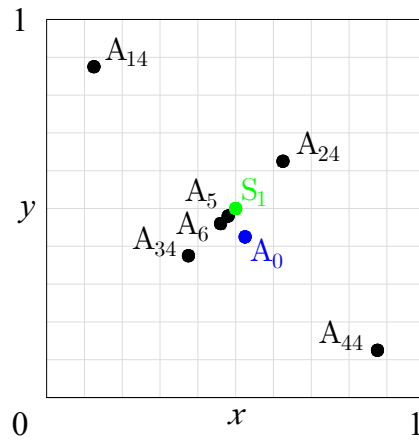
Zobrazení plošného průběhu vidíme na následujícím obrázku:



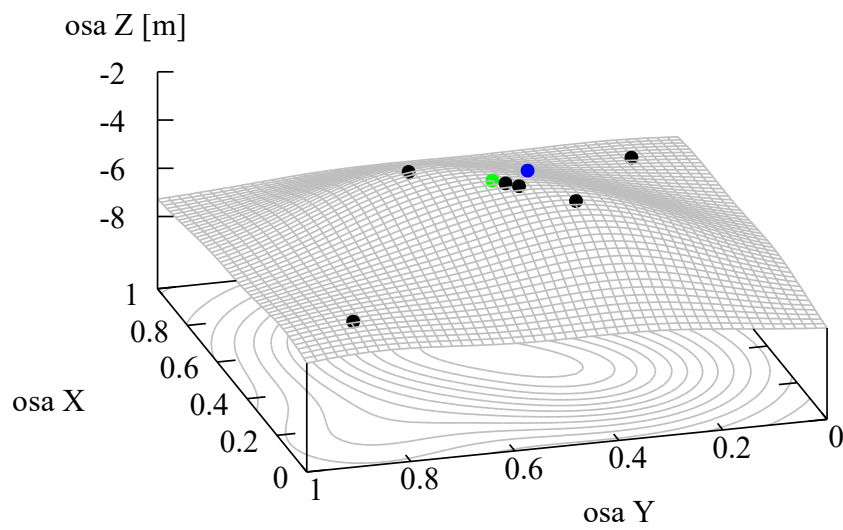
Obr. 4.11: Plošný průběh hpv z 6-ti vrtů

Odhad polohy studny pro nerovnoměrně rozmístěné vrty

Bod $S_1[0,5;0,5]$ z plošného odhadu hpv byl stanoven jako bod s nejvyšší hpv $-3,81$ m, tj. dle tohoto postupu nejoptimálnější bod pro umístění studny.



Obr. 4.12: půdorysné zobrazení odhadnuté studny



Obr. 4.13: Odhadnuté místo pro studnu

Bodová chyba**Odhadnutá výška h_{pv} a skutečná h_{pv} v bodě A₀ (1D euklidovská vzdálenost)**

$$L_{1D} = Z^* - Z' = -3,74 - (-3,99) = -0,25 \text{ m}$$

Půdorysná vzdálenost (2D euklidovská vzdálenost)

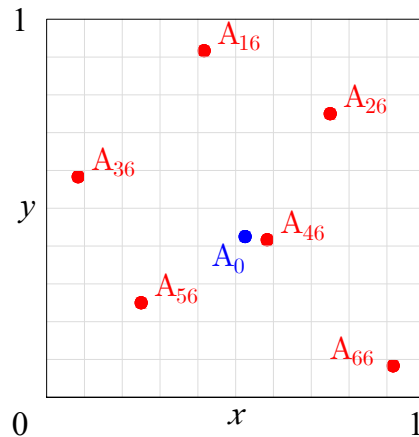
$$L_{2D} = \sqrt{(x^* - x')^2 + (y^* - y')^2} = \sqrt{(0,5 - 0,525)^2 + (0,5 - 0,425)^2} = 0,079 \text{ m}$$

Vzdálenost nejvyšší odhadnuté a skutečné h_{pv} v tomtéž bodu (3D euklidovská vzdálenost)

$$\begin{aligned} L_{3D} &= \sqrt{(x^* - x')^2 + (y^* - y')^2 + (z^* - z')^2} \\ &= \sqrt{(0,5 - 0,525)^2 + (0,5 - 0,425)^2 + (|-3,81| - |-3,74|)^2} = 0,090 \text{ m} \end{aligned}$$

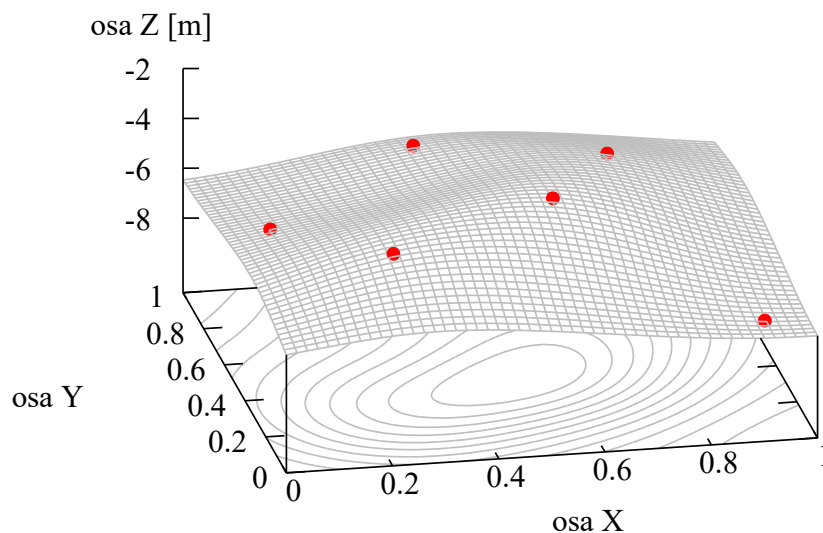
2. Rovnoměrné rozložení 6-ti vrtů

- Vrt $A_{16}[0, 417; 0, 917] = -5, 09$ m
- Vrt $A_{26}[0, 750; 0, 750] = -4, 67$ m
- Vrt $A_{36}[0, 083; 0, 583] = -5, 56$ m
- Vrt $A_{46}[0, 583; 0, 417] = -3, 82$ m
- Vrt $A_{56}[0, 250; 0, 250] = -4, 38$ m
- Vrt $A_{66}[0, 917; 0, 083] = -6, 79$ m



Obr. 4.14: Půdorysné rovnoměrné rozmístění 6-ti vrtů

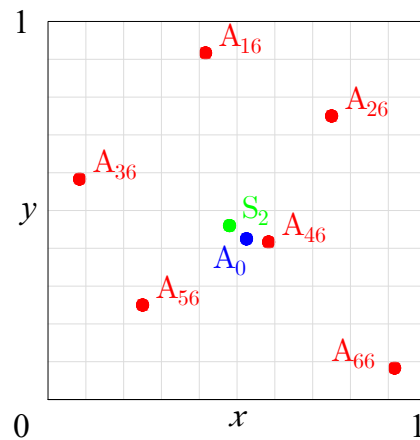
Skutečný nejvyšší bod (A_0) se nachází pod odhadnutou plochou (důvod proč není vidět).



Obr. 4.15: plošný průběh hpv z 6-ti vrtů

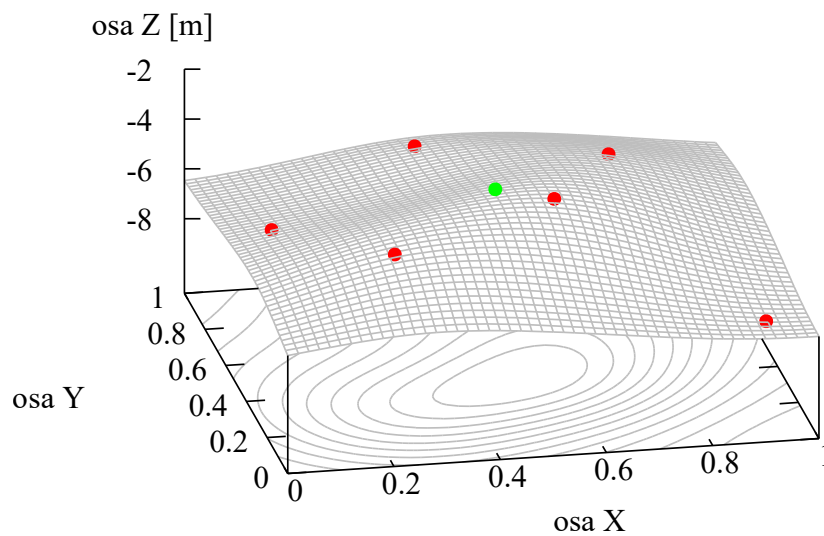
Odhad studny pro rovnoměrně rozmístěné vrty

Bod $S_2[0,48;0,46]$ z plošného odhadu hpv byl stanoven jako bod s nejvyšší hpv: $-3,59$ m, tj. dle tohoto postupu nejoptimálnější bod pro umístění studny.



Obr. 4.16: Půdorysné zobrazení odhadnuté studny

Skutečný nejvyšší bod (A_0) se nachází pod odhadnutou plochou (důvod proč není vidět).



Obr. 4.17: Odhadnuté místo pro studnu

Bodová chyba

Odhadnutá výška h_{pv} a skutečná h_{pv} v bodě A₀ (1D euklidovská vzdálenost)

$$L_{1D} = Z^* - Z' = -3,74 - (-3,66) = -0,08 \text{ m}$$

Půdorysná vzdálenost (2D euklidovská vzdálenost)

$$L_{2D} = \sqrt{(x^* - x')^2 + (y^* - y')^2} = \sqrt{(0,48 - 0,525)^2 + (0,46 - 0,425)^2} = 0,049 \text{ m}$$

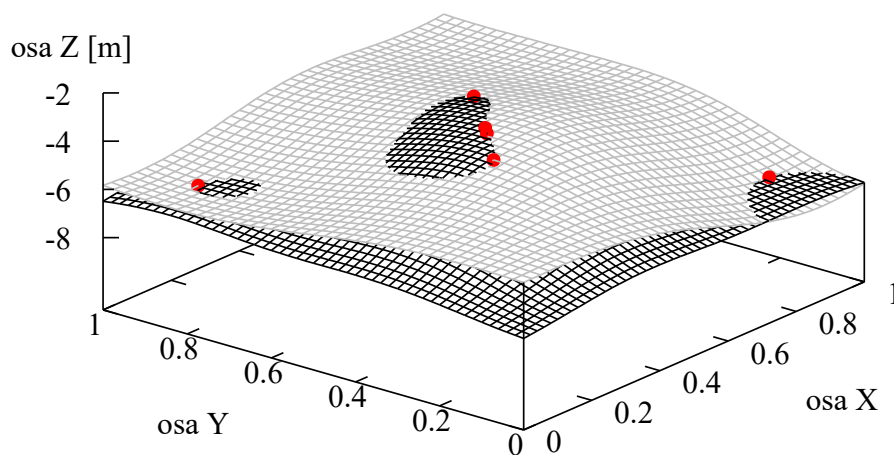
Vzdálenost nejvyšší odhadnuté a skutečné h_{pv} (3D euklidovská vzdálenost)

$$\begin{aligned} L_{3D} &= \sqrt{(x^* - x')^2 + (y^* - y')^2 + (z^* - z')^2} \\ &= \sqrt{(0,48 - 0,525)^2 + (0,46 - 0,425)^2 + (|-3,59| - |-3,74|)^2} = 0,160 \text{ m} \end{aligned}$$

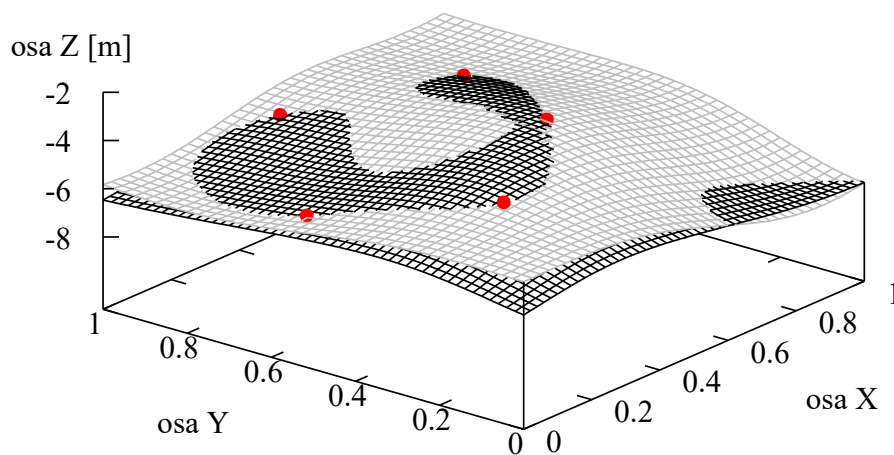
Závěr z 1. části

V úloze se vyskytla málo vídaná situace, a to když jsme se trefili s jedním z 6-ti rovnoměrně rozmístěných vrtů skoro do extrému který jsme odhadovali (Vrt A₄₆). Následuje porovnání chyb u rovnoměrného a nerovnoměrného rozmístění vrtů. Odhadnutá výška h_{pv} a skutečné h_{pv} v bodě A₀ vychází lépe pro rovnoměrné rozmístění vrtů o 300%. U půdorysné vzdálenosti vychází lépe rovnoměrné rozmístění vrtů o 150 %. Nicméně u vzdálenosti nejvýše odhadnuté a skutečné h_{pv} vyhrálo nerovnoměrné rozmístění vrtů o 170 %.

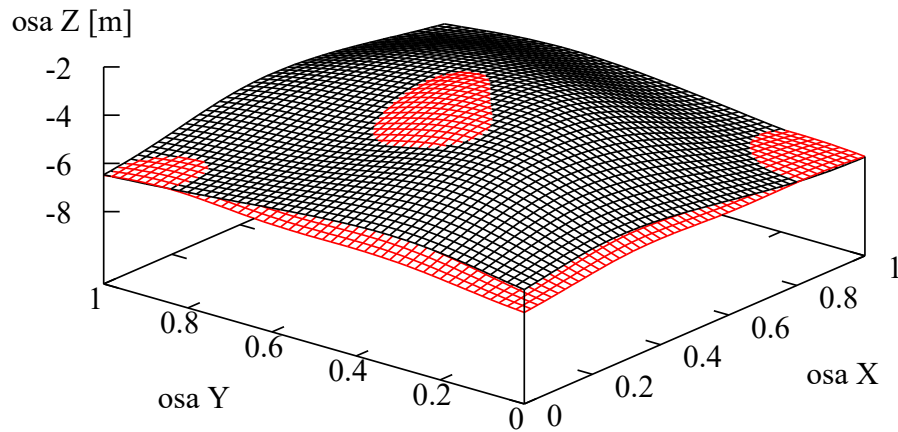
Nejblíže optimálnímu umístění studny ve 2D jsme byli při rovnoměrném rozmístění (náhoda při volbě rovnoměrného gridu), na druhou stranu ve 3D jsme se nejvíce přiblížili s nerovnoměrně rozmístěnými vrty. Je tedy velmi těžké říct, který postup zvítězil.



Obr. 4.18: Střední hodnota skutečného průběhu hpv vs hpv od odhadnutého průběhu na základě nerovnoměrně rozmístěných vrtů



Obr. 4.19: Střední hodnota skutečného průběhu hpv vs hpv od odhadnutého průběhu na základě rovnoměrně rozmístěných vrtů



Obr. 4.20: Porovnání predikovaných středních hodnot za pomoci: **nerovnoměrně rozmístěných vrtů** a rovnoměrně rozmístěných vrtů

4.2.2 Minimalizace chyby krigingu

V této části je úkolem co nepřesněji odhadnout průběh hpv. Pro stanovení průběhu hpv použijeme 2 postupy:

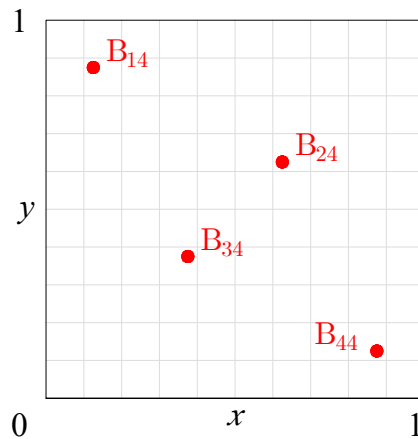
- 4 rovnoměrně rozmístěné vrty, které budou v druhém kroku doplněny o 2 další (nerovnoměrné rozmístění).
- 6 rovnoměrně rozmístěných vrtů

Vrty vkládáme do míst, kde si je kriging nejméně jistý. Čím větší je v daném bodě rozptyl, tím větší nejistotu kriging má.

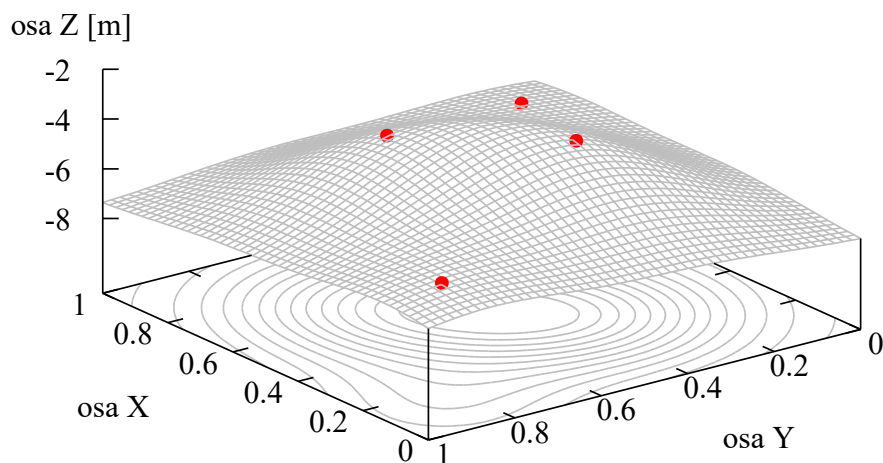
Vyhodnocení dat obou postupů bude provedeno pomocí plošné chyby RMPSE.

1. Rovnoměrné rozmístění 4 vrtů

Z tohoto uspořádání (stejně jako rovnoměrné rozmístění 4 bodů v 1. části) pomocí krigingu stanovíme, kde je potřeba provést další vrt. Toho docílíme výpočtem rozptylu v celém gridu. Z výsledku jsme zjistili, že jsou zde dva největší stejně velké rozptyly, proto není nutné vkládat vrty postupně. V obou místech proto provedeme vrty, abychom zjistili skutečnou hodnotu hpv.



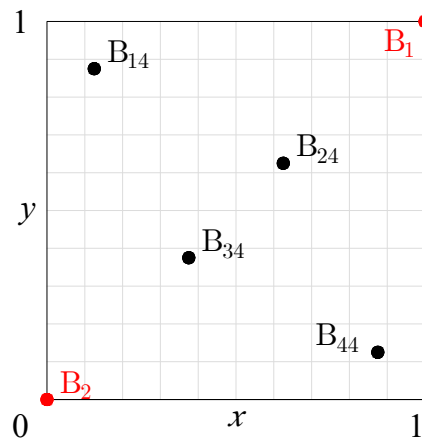
Obr. 4.21: Půdorys rovnoměrného rozmístění 4 vrtů



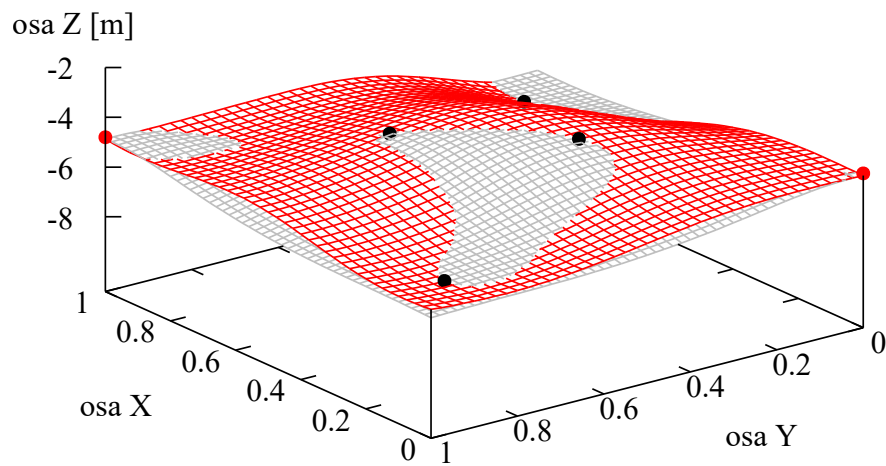
Obr. 4.22: Plošný průběh hpv ze 4 vrtů

Nerovnoměrné rozmístění 6-ti vrtů

4 provedené vrty doplněny o 2 další. V bodu $B_1[1;1] = -4,87$ m a $B_2[0;0] = -4,89$ m byly stanoveny jako největší.



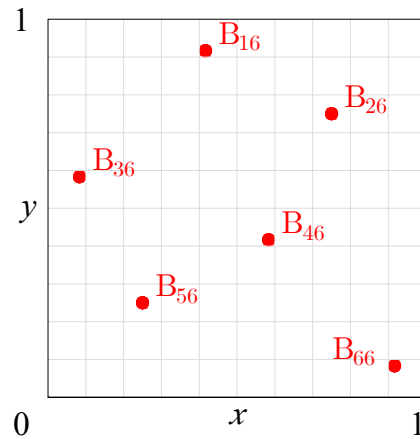
Obr. 4.23: Půdorys nerovnoměrného rozmístění 6-ti vrtů



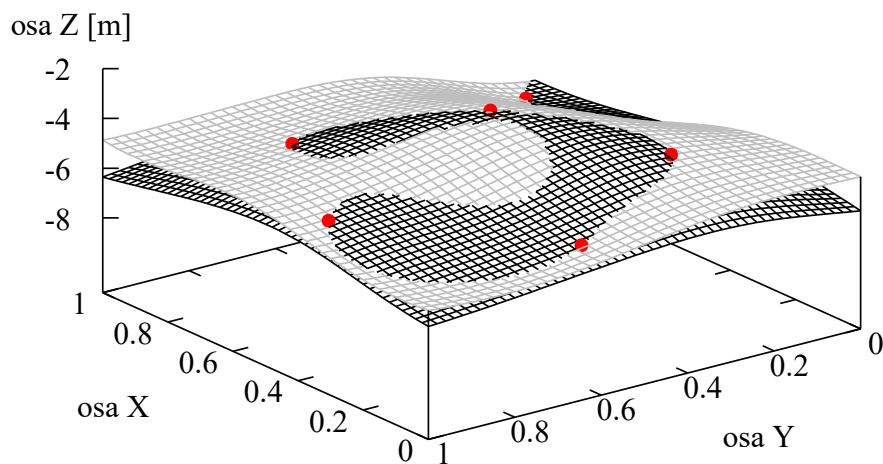
Obr. 4.24: Střední hodnota hpv: **skutečný průběh** vs predikce střední hodnoty pomocí krigingu

2. Rovnoměrné rozmístění 6-ti vrtů

- Vrt $B_{16}[0,417;0,917] = -5,09$ m
- Vrt $B_{26}[0,750;0,750] = -4,67$ m
- Vrt $B_{36}[0,083;0,583] = -5,56$ m
- Vrt $B_{46}[0,583;0,417] = -3,82$ m
- Vrt $B_{56}[0,250;0,250] = -4,38$ m
- Vrt $B_{66}[0,917;0,083] = -6,79$ m



Obr. 4.25: Půdorys rovnoměrného rozmístění 6-ti vrtů



Obr. 4.26: Střední hodnota hpv: skutečný průběh vs odhadnutý průběh

RMPSE nerovnoměrně rozmístěných vrtů

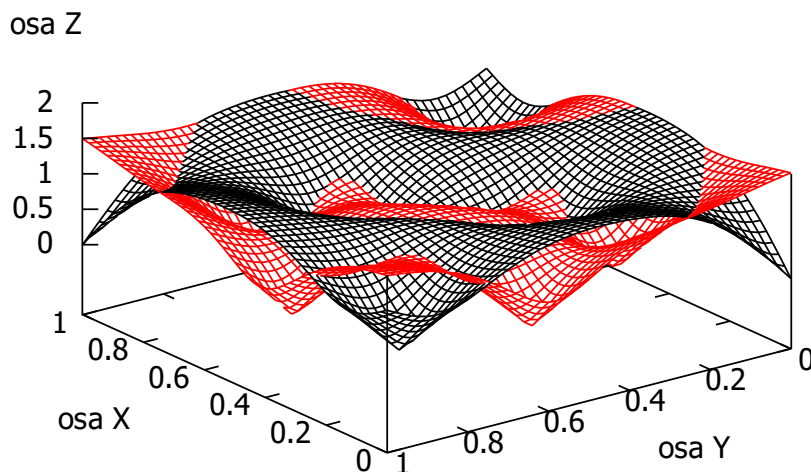
$$\text{RMPSE}_N = \sqrt{\frac{(-13143,29 - (-8385,64))^2}{2600}} = 93,31 \text{ m}$$

RMPSE rovnoměrně rozmístěných vrtů

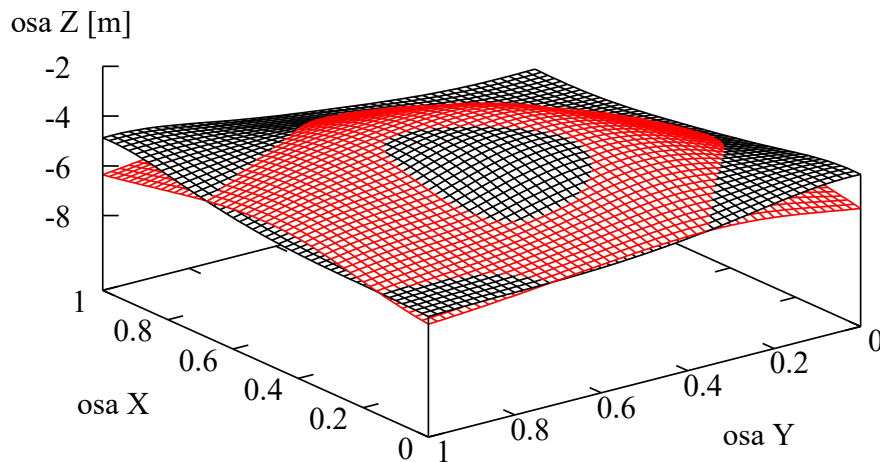
$$\text{RMPSE}_R = \sqrt{\frac{(-13561,52 - (-8385,64))^2}{2600}} = 98,99 \text{ m}$$

Závěr z 2. části

Z výpočtů pomocí RMPSE jsme zjistili, že lépe vycházejí nerovnoměrně rozmístěné vrty. Kriging nám pomohl přesněji odhadnout skutečný tvar podzemní vody (funkce). Porovnáním RMPSE_R (vrtů rovnoměrných) a RMPSE_N (vrtů nerovnoměrných) nám vyjde lépe RMPSE_R o 6,09 %.



Obr. 4.27: Rozptyl hpv: **rovnoměrně rozmístěných vrtů** vs nerovnoměrně rozmístěných vrtů



Obr. 4.28: Střední hodnota: **rovnoměrně rozmístěné vrty** vs nerovnoměrné rozmístěné vrty

Závěr z 2. příkladu

Je důležité si uvědomit, k čemu chceme krigování použít. Pokud chceme najít extrém, použijeme jednoduché krigování a vkládáme vrty do míst, ve kterých kriging odhadl extrém. Tímto principem se postupně přibližujeme ke skutečnému extrému (nejvyšší/nejnižší hpv). Jestliže ale chceme odhadnout co nejpřesněji průběh hpv (funkci), poté musíme vkládat vrty do míst, kde si je kriging nejméně jistý, tedy místa s největším rozptylem. Dobré je také použít běžné krigování, jelikož se stejně jako hpv tolik nerozkmitává a je plynulejší.

V první části bylo ukázáno, že jestliže vkládáme vrty postupně, poté se pomalu přibližujeme do nejlepšího místa pro studnu, než při vložení většího množství v úvodu a doufáním, že se jedním vrtem trefíme přímo do místa které hledáme (extrém). Obecně platí, že čím víc bodů pomocí krigování provedeme, tím blíže jsme k hledanému extrému. Může se zde vyskytnout i stav, kdy se s vrtem trefíme přímo do extrému, poté nám pomocí krigingu vyjde přesně ten samý bod co je vrt.

Ve druhé části nepatrně zvítězila metoda, ve které byly vrty přidávány postupně. Důvod vítězství se skrývá ve volbě a dosahu variogramu. Při volbě menšího dosahu u variogramu by zvítězila metoda s rovnoměrně rozmístěnými vrty. Toto je důvod, proč je volba variogramu velmi obtížná a vyžaduje určitou praxi.

4.3 Příklad č.3 – Stanovení únosnosti prutu

Příklad demonstruje aplikaci na úlohu z oboru stavební mechaniky, konkrétně pravděpodobnostní posouzení tahové únosnosti prutu. Uvažujme 1 m dlouhou ocelovou trubku s náhodně proměnlivým průřezem. U trubky byl změřen průměr ve čtyřech bodech po délce nerovnoměrně rozmístěných. Cílem úlohy je určit návrhovou únosnost taženého prutu určenou jako 1% kvantil náhodné únosnosti. Jako jedinou náhodnou proměnnou uvažujme průřezovou plochu. Návrhovou pevnost materiálu uvažujeme jako charakteristickou únosnost oceli $f_y = 235$ MPa redukovanou dílčím součinitelem spolehlivosti γ_{M0} . Návrhová únosnost libovolného průřezu je tedy:

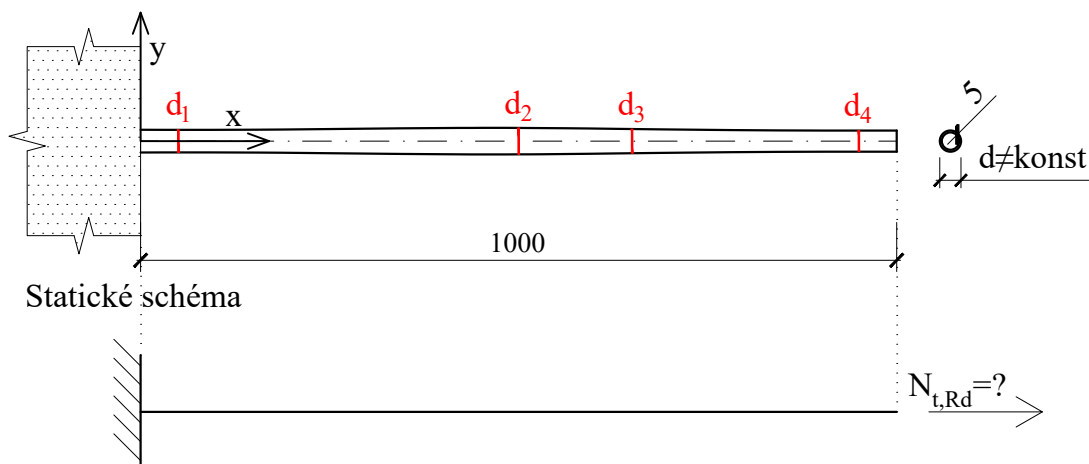
$$N_{t,Rd} = A \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Návrhová únosnost trubky je návrhová únosnost nejslabšího průřezu. Je potřeba se zabývat nejmenší průřezovou plochou po délce tyče. O průřezové ploše tyče máme pouze bodovou informaci a budeme uvažovat konstantní tloušťku stěny $t = 5$ mm. Průřezovou plochu aproximujeme pomocí krigingu a minimální plochu průřezu stanovíme jako 1% kvantil predikované normálně rozdělené průřezové plochy.

Naměřené průměry trubky

- $d_1[50; 0] = 30$ mm
- $d_2[500; 0] = 35$ mm
- $d_3[650; 0] = 32$ mm
- $d_4[950; 0] = 28$ mm

Pohled na konstrukci

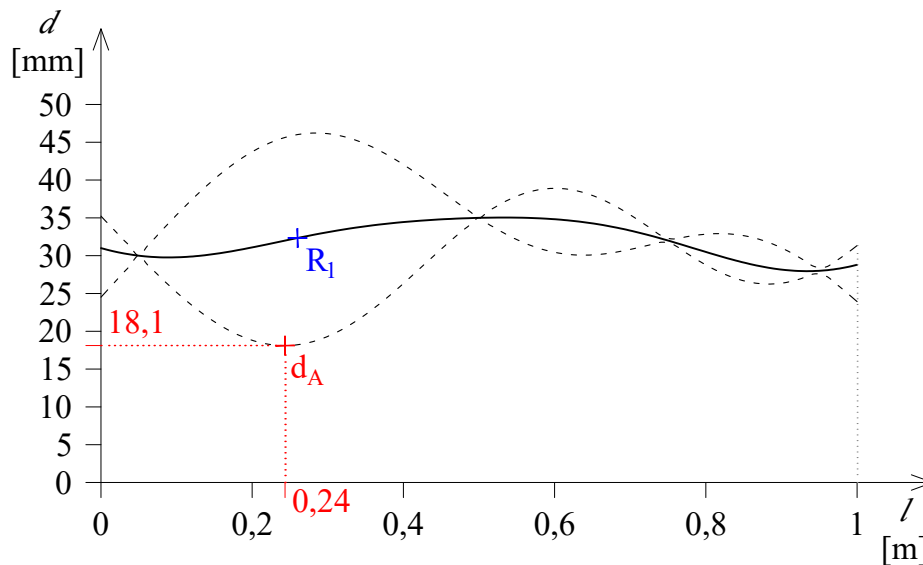


Obr. 4.29: Konstrukce

Odhad minim

Uvažujeme-li normální rozdělení 1% náhodné funkce průřezové plochy po délce prutu, pak 1% kvantil určíme jako $\mu - 2,3 \cdot \sigma$, kde μ je střední hodnota predikce krigingu a σ je směrodatná odchylka. Zanedbáme nelinearitu transformace mezi průměrem trubky a průřezovou plochou trubky. Zaměříme se na 1% kvantil průměru trubky, tu dosadíme do vztahu pro průřezovou plochu a výslednou hodnotu budeme považovat za přibližně 1% kvantil průřezové plochy.

Na základě naměřené bodové informace: $d_A[240; 0] = 18,1$ mm viz Obr. 4.30 jsme stanovili 1% kvantil průměru (tomu odpovídající A_1).



Obr. 4.30: Predikce střední hodnoty a 1% kvantilu průměru trubky

- Uvažovaná plocha průřezu

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d_A^2}{4} - \frac{\pi \cdot (d_A^2 - 2 \cdot t)}{4} = \frac{\pi \cdot 18,1^2}{4} - \frac{\pi \cdot (18,1 - 2 \cdot 5)^2}{4} = 205,77 \text{ mm}^2$$

- Výpočtová tahová únosnost

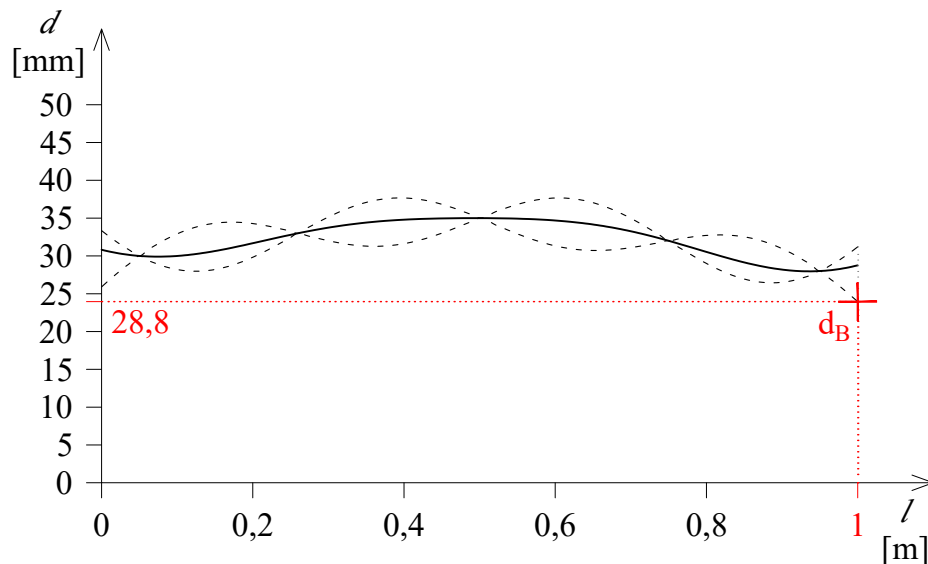
$$N_{t,Rd} = \frac{A_1 \cdot f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{205,77 \cdot 235}{1,15} = 42048,65 \text{ N} \doteq \underline{\underline{42,05 \text{ kN}}}$$

Závěr

Z naměřených hodnot jsme vypočítali 1% kvantil únosnosti, kterou je prut schopen přenést jako 42,05 kN.

Maximální síla po přidání měření

Pokud bychom chtěli zvýšit *výpočtovou* únosnost průřezu je potřeba snížit nejistoty. Nejefektivnější je poté zaměřit se na průřez s nejvíce neurčitou plochou. Další měření provedeme v místě největšího rozptylu. Největší rozptyl byl vypočten v bodě $R_1 = [260; 0]$. V tomto místě jsme provedli dodatečné měření a naměřili průměr trubky $d_B[260; 0] = 33$ mm.



Obr. 4.31: Predikce střední hodnoty a 1% kvantilu průměru trubky

Z 1% intervalu spolehlivosti jsme stanovili minimální hodnotu $d_B[240; 0] = 28,8$ mm.

- Uvažovaná plocha průřezu

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d_B^2}{4} - \frac{\pi \cdot (d_B^2 - 2 \cdot t)}{4} = \frac{\pi \cdot 28,8^2}{4} - \frac{\pi \cdot (28,8 - 2 \cdot 5)^2}{4} = 373,85 \text{ mm}^2$$

- Výpočtová tahová únosnost

$$N_{t,Rd} = \frac{A_2 \cdot f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{373,85 \cdot 235}{1,15} = 76395,43 \text{ N} \doteq \underline{\underline{76,40 \text{ kN}}}$$

Závěr

Díky dodatečnému změření průměru trubky v místě, kde kriging predikoval největší rozptyl, jsme byli schopni navýšit výpočtovou sílu o 180 %. Je na posouzení inženýra, zda snížení neurčitosti povede k ziskům, které převáží náklady spojené s dodatečnou činností (například měření).

5 Závěr

Bakalářská práce poskytuje seznámení s krigovací metodou a jejím následným využitím v inženýrských úlohách. V praktické části byl ilustrován výpočet krigování a byly zhodnoceny jeho výhody a nevýhody.

Díky této metodě jsme byli schopni odhadnout hladinu podzemní vody na pozemku $20\text{ m} \times 15\text{ m}$ spolu s odhadem chyby v každém predikovaném místě.

U druhého příkladu bylo po ilustraci přistoupeno k predikci funkce u které bylo známo přesné řešení a porovnání účinnosti krigingu u (i) adaptivního návrhu řízeného krigingem a (ii) převzatých rovnoměrných rozmístěných bodů převzatých z literatury. Adaptivita byla řízena v závislosti na cílové proměnné: poloha extrému nebo celková chyba predikce. Adaptivně rozšířené návrhy se v porovnávaných alternativách liší a liší se také od rovnoměrně rozmístěných bodů.

Třetí úloha byla zaměřena na úlohu z oboru stavební mechaniky a byla demonstrována aplikace na stanovení výpočtové únosnosti konstrukce a možnosti jejího zvýšení za pomoci zmenšení neurčitosti. Kriging zde byl použit pro predikci neurčité geometrie konstrukce a také pro stanovení optimální polohy pro dodatečnou diagnostiku.

Další výzkum

V celé práci je řešen pouze 2D problém. Další práce se tedy bude zajímat rozšířením úlohy o další dimenze. Dalšími dimenzemi si například při výpočtu průhybu u nosníku můžeme představit modul pružnosti, zatížení, rozpětí nebo moment setrvačnosti. Toto budou vstupní parametry, které posléze pomocí krigování dokážeme optimalizovat například na nejlehčí, nejúnosnější nebo nejlevnější průřez.

Literatura

1. ARMSTRONG, M. *Basic Linear Geostatistic*. New York: Springer, 1998. ISBN 978-3-540-61845-4.
2. JEŽEK, J. *Geostatistika a prostorová interpolace*. Karolinum, 2006. ISBN 978-80-246-3076-2.
3. OLIVER, M.; R.WEBSTER. A tutorial guide to geostatistics: Computing and modelling variograms and kriging. *ScienceDirect*. 2013, s. 57–67.
4. BARNES, R. *Variogram tutorial* [online]. Dostupné také z: <http://www.goldensoftware.com/variogramTutorial.pdf>.
5. MUNI. *7.Přednáška* [online]. 2006. Dostupné také z: https://is.muni.cz/el/1431/jaro2006/Z8102/um/Geostatistika_7.pdf.
6. MUNI. *8.Přednáška* [online]. 2006. Dostupné také z: https://is.muni.cz/el/1431/jaro2006/Z8102/um/Geostatistika_8.pdf.
7. KOUTKOVÁ, H.; ŠPAČEK, P. Kriging odhady úrovně hladiny podzemní vody. *7.Mezinárodní matematický workshop*. 2008, s. 59, 60. ISBN 80-214-3282-9.
8. MUNI. *8.Cvičení* [online]. 2006. Dostupné také z: https://is.muni.cz/el/1431/jaro2006/Z8102/um/Geostatistika_8.txt.
9. ELIÁŠ, J.; VOŘECHOVSKÝ, M. Modification of the Audze–Eglājs criterion to achieve a uniform distribution of sampling points. 2016 *Advances*, s. 82–96.