



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

LETECKÝ ÚSTAV

INSTITUTE OF AEROSPACE ENGINEERING

PROGRAM PRO PŘEDPOVĚĎ KOLIZE ZEMĚ S BLÍZKÝMI VESMÍRNÝMI TĚLESY

PREDICTIVE SOFTWARE FOR EARTH COLLISION WITH NEAR EARTH OBJECTS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Jiří Stopka

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Jaroslav Bartoněk

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav: Letecký ústav
Student: **Bc. Jiří Stopka**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Jaroslav Bartoněk**
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Program pro předpověď kolize Země s blízkými vesmírnými tělesy

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vytvoření jednoduchého programu ve vybraném vývojovém prostředí (MS Excel, Borland Delphi,...), který bude schopen určit vzdálenost Země od vybraných těles na oběžné dráze kolem Slunce pro zadaný časový interval. Zobrazí varování v případě, že vzdálenost poklesne pod bezpečnou hodnotu.

Cíle bakalářské práce:

1. Zvládnutí základů orbitální mechaniky.
2. Aplikace těchto poznatků na reálný problém.

Seznam doporučené literatury:

DANĚK, Vladimír. Mechanika kosmického letu. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2018. ISBN 978-80-7204-984-4.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je rozprava o základních poznatcích z oboru orbitální mechaniky a jejich následné použití na reálný problém. Použití poznatků orbitální mechaniky je provedeno tvorbou programu pro předpověď kolize Země s blízkými vesmírnými tělesy v programovacím prostředí Borland Delphi 7. Program by měl být schopen v daném časovém intervalu určit neblížejší přiblížení Země a Zemi blízkých vesmírných těles a v případě nebezpečně blízké vzdálenosti zobrazit uživateli varování.

Summary

Aim of this bachelor's thesis is to research and discuss the basics of orbital mechanics and their application on a real problem. The application of orbital mechanics is made by creating a software for predicting Earth's collision with Near-Earth Objects in Borland Delphi 7 development environment. The created software should be able to predict close approaches of Earth and Near-Earth Objects in a time scale selected by user and issue a warning in case of a dangerous close approach.

Klíčová slova

Země, blízká vesmírná tělesa, Sluneční soustava, orbitální mechanika, Keplerovy zákony, Newtonův gravitační zákon, asteroidy, obežná dráha, kolize, elementy dráhy

Keywords

Earth, Near-Earth Objects, Solar system, Orbital mechanics, Kepler's laws, Newton's law of universal gravitation, asteroids, orbit, collision, orbital elements

STOPKA, J. *Program pro předpověď kolize Země s blízkými vesmírnými tělesy*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020. 48 s. Vedoucí Ing. Jaroslav Bartoněk.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Program pro předpověď kolize Země s blízkými vesmírnými tělesy* vypracoval samostatně, pod vedením pana Ing. Jaroslava Bartoňka, vedoucího bakalářské práce, a s použitím literatury a zdrojů, které jsou řádně uvedeny v seznamu použitých zdrojů.

Jiří Stopka

Rád bych poděkoval mému vedoucímu, panu Ing. Jaroslavu Bartoňkovi, za cenné poznámky a užitečné konzultace při vedení této práce. Mé díky patří též rodině a přátelům za mentální podporu při studiu a motivaci k lepším výsledkům.

Jiří Stopka

Obsah

1	Úvod	3
	Principy orbitální mechaniky	5
2	Základní zákony nebeské mechaniky	5
2.1	Keplerovy zákony	5
2.1.1	První Keplerův zákon – zákon tvaru oběžné dráhy	5
2.1.2	Druhý Keplerův zákon – Zákon ploch	8
2.1.3	Třetí Keplerův zákon – poměr oběžných dob a hlavních poloos	9
2.2	Newtonův gravitační zákon	11
3	Elementy oběžné dráhy	12
3.1	Sklon oběžné dráhy	12
3.2	Délka vzestupného uzlu	13
3.3	Argument pericentra	14
3.4	Pravá anomálie	14
4	Používané souřadnicové soustavy	16
4.1	Definice souřadnicových systémů	16
4.1.1	Perifokální souřadnicová soustava	16
4.1.2	Geocentrická a heliocentrická souřadnicová soustava	16
4.2	Transformace souřadnic mezi souřadnicovými soustavami	17
4.2.1	Transformace z heliocentrického na perifokální souřadnicový systém	17
4.2.2	Transformace z perifokálního na heliocentrický souřadnicový systém	19
5	Poloha kosmického tělesa na oběžné dráze	20
5.1	Keplerova rovnice	20
5.1.1	Střední a excentrická anomálie	20
5.2	Řešení Keplerovy rovnice	22
6	Juliánské datum	23
6.1	Převod občanského data na juliánské	23
6.2	Převod juliánského data na občanské	23
	Blízká vesmírná tělesa	26
7	Definice pojmů	26
7.1	Blízká vesmírná tělesa	26
7.2	Rozdělení blízkých vesmírných těles	26
7.2.1	NEA – Blízké asteroidy	26
7.2.2	NEC – Blízké komety	27
7.2.3	Potenciálně nebezpečná vesmírná tělesa	28

Program na předpověď kolize Země s blízkými vesmírnými tělesy	30
8 Zaměření a cíl výpočetního programu	30
8.1 Výpočtem uvažované vlivy a odchylky	30
8.2 Programovací prostředí a jazyk	31
9 Algoritmus výpočtu	32
9.1 Počáteční hodnoty výpočtu a elementy dráhy Země	33
9.2 Iterační cyklus Keplerovy rovnice	35
9.3 Výpočet a transformace souřadnic	35
9.4 Vzdálenosti Země–vesmírné těleso a vypsání výsledků	36
9.5 Blízká vesmírná tělesa ohrožující Zemi	39
10 Diskuse výsledků programu	41
11 Závěr	44
Literatura	45
Seznam použitých ilustrací	48

1. Úvod

Už od dob, kdy lidstvo začalo detailněji pozorovat oblohu, začali astronomové mapovat nebeskou sféru, dávali jména hvězdám, planetám, ale i menším tělesům, jako jsou asteroidy a komety, které obíhají po svých oběžných dráhách ve Sluneční soustavě. Tyto oběžné dráhy těles však nejsou zdaleka tak stálé, jak by se mohlo zdát. Ve Sluneční soustavě není vzácností, že na sebe tělesa vzájemně působí gravitačními silami, ovlivňují a mění tak svou oběžnou dráhu kolem Slunce. Menší tělesa, jako jsou například asteroidy a komety, jsou na tuto změnu náchylnější.

Některé z těles se při svém oběhu dostanou tak blízko Země (relativně blízko vzhledem k vzdálenostem ve Sluneční soustavě), že pro ně vznikla samostatná kategorie – blízká vesmírná tělesa.

Blízká vesmírná tělesa jsou pro Zemi potenciálním nebezpečím. Při srážce s dostatečně velkým tělesem by byl klimatický dopad katastrofální. Jako důkaz toho, že srážka s blízkým vesmírným tělesem zanechá na planetě následky, může být například pohled na planety či měsíce, jako je například Merkur, kde chybí erozní vlivy a krátery po nárazu těles jsou viditelnější.

Pro důkaz srážky asteroidu s planetou ale není třeba zacházet až k Merкуру. Mnoho kráterů způsobených asteroidy lze nalézt i na Zemi. Největší z nich jsou například kráter Vredefort v jižní Africe (2.2 miliardy let starý kráter má průměr asi 300 km, odhadovaný průměr asteroidu před srážkou je 500 km), kráter Sudbury v Ontariu (1.85 miliardy let starý kráter o průměru 130 km) nebo kráter Chicxulub v Mexiku (65 milionu let starý kráter v průměru okolo 150 km; věří se, že tento asteroid způsobil výhyn dinosaurů na planetě) [29].

Vesmírná tělesa v průměru menší než 25 metrů pravděpodobně shoří v atmosféře a nepředstavují pro Zemi žádnou hrozbu. V rozmezí průměru od 25 metrů do jednoho kilometru by pravděpodobně způsobil lokální hrozbu a následky. NASA uvádí, že asteroidy v průměru větší než jeden kilometr by potenciálně mohly mít globální dopad [24].

Kolizi Země s blízkým vesmírným tělesem je dnes již možné předpovědět, neexistuje však prozatím žádný způsob obrany proti střetu. Největší vesmírné agentury a vědecká střediska se však usilovně zabývají vznikem obranného systému, který by fungoval na principu odklonu oběžné dráhy tělesa pouze o zlomky procent hodnot. Takovéto malé odchylky by však stačily k tomu, aby těleso neohrozilo planetu Zemi.

Jedním z cílů této práce je rozprava o partiích nebeské mechaniky, které umožňují určit vzdálenost těles na svých oběžných drahách a předpovědět tak jejich případnou kolizi. Dalším cílem po osvětlení vybraných statí orbitální mechaniky je tvorba programu ve vybraném programovacím prostředí, který umožní uživateli určit nejmenší vzdálenost blízkých vesmírných těles od Země v době jejich oběhu kolem Slunce v uživatelem zvoleném časovém intervalu. Program vzniklý společně s touto prací bude omezen pouze na eliptické dráhy vesmírných těles a bude uvažovat pouze vlivy centrálního gravitačního pole Slunce.

Principy orbitální mechaniky

2. Základní zákony nebeské mechaniky

Nebeská mechanika popisuje zejména pasivní pohyb nebeských těles – planet, měsíců, asteroidů, ale i uměle vytvořených družic a dalších. Pasivní pohyb je pohyb, jehož příčinou jsou gravitační síly. V některých literaturách autoři uvádějí, že do nebeské mechaniky lze řadit i pohyb družic, u kterých negravitační síly hrají velkou roli, jako například odporová síla prostředí, tlak záření apod. Zaměření této práce však spočívá výhradně v pasivním pohybu kosmických těles s uvažováním pouze gravitačních sil, nicméně i zde je pro zjednodušení modelovaných výpočtů nutno zanedbat některé vlivy, na které je poukázáno v pozdějších kapitolách [1] [8].

2.1. Keplerovy zákony

Johannes Kepler (1571–1630), matematik původně německé, národnosti působil v Praze jako společník Tychona Braha a v této době také formuloval dva ze tří Keplerových zákonů.

2.1.1. První Keplerův zákon – zákon tvaru oběžné dráhy

Když Kepler pozoroval planetu Mars, zjistil že se nemůže pohybovat po kruhové trajektorii a dospěl k názoru, že data vypovídají o tom, že trajektorii je elipsa. Proto začal s formulací své hypotézy, týkající se pohybu nebeských těles po kuželosečkách, a přišel s následujícím zněním prvního Keplerova zákona [5] :

Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách. Slunce je v jednom z ohnisek oběžné elipsy. Planety při oběhu opisují tyto elipsy, z čehož vyplývá, že vzdálenost Slunce a planet se v průběhu oběhu mění [11].

Kepler tento zákon formuloval na základě rozsáhlých souborů dat, které získal z pozorování Tychona Braha. Avšak i jako jiné fyzikální zákony lze i první Keplerův rozebrat na fundamentální fyzikální principy a matematicky dokázat.

Keplerův zákon tedy říká, že planety se pohybují po útvarech zvaných elipsy. Elipsa je množina bodů, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou pevně daných bodů, jež jsou nazývány ohniska elipsy.

$$|XF_1| + |XF_2| = konst. \quad (2.1)$$

Je zřejmé, že konstanta má velikost dvojnásobku hlavní poloosy elipsy $2a$, například když je bod X položen na některý z hlavních vrcholů elipsy – bod X_0 (obr. 2.1). Pokud je elipsa uvažována v polárních souřadnicích s počátkem v jednom z ohnisek, pak obecný bod a ohniska elipsy mají souřadnice [12]

$$\begin{aligned} X &= (r \cos \varphi; r \sin \varphi), \\ F_1 &= (-2e; 0), \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.1. KEPLEROVY ZÁKONY

$$F_2 = (0; 0),$$

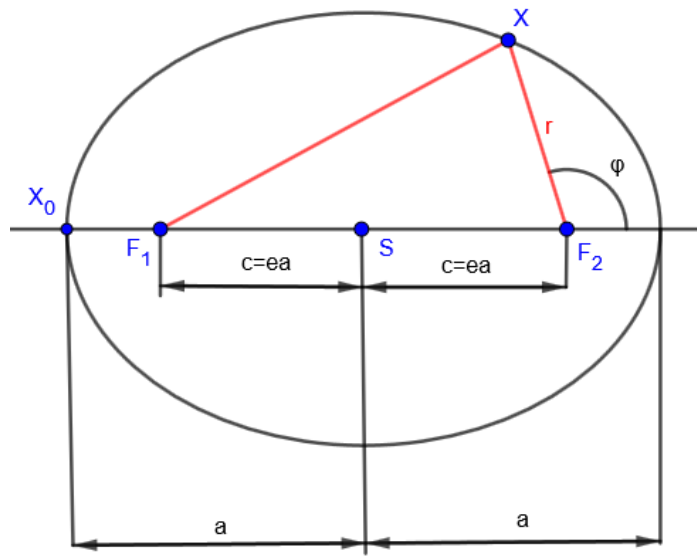
kde r je vzdálenost ohniska a bodu elipsy a φ je úhel mezi hlavní poloosou a průvodičem r . Po dosažení polárních souřadnic do rovnice elipsy a matematické úpravě vznikne poněkud známý tvar rovnice elipsy [1]

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (2.3)$$

$$p = a(1 - e^2),$$

$$e = c/a,$$

kde p je takzvaný parametr elipsy (kolmá svislá vzdálenost ohniska a elipsy) a e je numerická excentricita.



Obrázek 2.1: Definice elipsy [31]

Keplerův první zákon je možno odvodit pomocí zákona zachování energie a zákona zachování momentu hybnosti. Za příklad může posloužit planeta, jejíž energie se skládá ze složky rychlosti ve směru od Slunce, z rotační energie planety a polohové energie pohybu v gravitačním poli Slunce. Rovnici zachování energie lze zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - G\frac{mM}{r} = E \quad (2.4)$$

a rovnici zachování momentu hybnosti ve tvaru

$$J\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi} = b, \quad (2.5)$$

kde m je hmotnost planety, M je hmotnost centrálního tělesa, kolem kterého planeta obíhá, J je moment setrvačnosti planety, G značí univerzální gravitační konstantu, b značí moment hybnosti planety a E vyjadřuje celkovou energii tělesa. Tečka nad proměnnou značí časovou derivaci. Nyní lze vyjádřit $\dot{\varphi}$ z rovnice 2.3 a dosadit do rovnice 2.4. Dále lze rozepsat rovnice do tvaru časových derivací proměnných r a φ

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{b^2}{2mr^2} + G\frac{mM}{r}\right)},$$

2. ZÁKLADNÍ ZÁKONY NEBESKÉ MECHANIKY

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{b}{mr^2}.$$

Jelikož je cílem získat pouze trajektorii, je možné první rovnici vydělit druhou, a zbavit se tak diferenciálu času. Vzniklou diferenciální rovnici lze upravit pro separaci proměnných a integrovat.

$$\int d\varphi = \int \frac{\frac{b}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \left(\frac{b}{mr}\right)^2 + 2G\frac{M}{r}}} dr$$

Zavedením substituce $\xi = \frac{b}{mr}$; $d\xi = -\frac{b}{mr^2} dr$ a vyřešením integrálu vznikne tvar

$$\varphi = -\frac{1}{C} \int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{\xi - \xi_0}{C}}},$$

kde C a ξ_0 jsou pro přehlednost semknuté konstantní hodnoty $C = \sqrt{\frac{2E}{m} + \left(\frac{GmM}{b}\right)^2}$ a $\xi_0 = \frac{GmM}{b}$. V tomto integrálu lze zavést další substituci $\eta = \frac{\xi - \xi_0}{C}$; $d\eta = \frac{d\xi}{C}$ a vznikne tvar

$$\varphi = - \int \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}},$$

který má řešení

$$\varphi = \arccos \eta,$$

což zpětnou substitucí vede na tvar, který po přejmenování konstantních členů výrazu dostane konečnou podobu rovnice (2.6), která, jak vidno, je shodná s rovnicí elipsy 2.3 v polárních souřadnicích [12]

$$\begin{aligned} \frac{b}{mr} &= \xi_0 + C \cos \varphi, \\ r &= \frac{b/m\xi_0}{1 + (C/\xi_0) \cos \varphi} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tímto je odvozen vztah pro eliptickou dráhu. Lze ho ale použít pro obecnou kuželosečku v polárních souřadnicích, která bude mít ohnisko v počátku souřadnicového systému. Klíčovým parametrem tvaru takové kuželosečky je numerická excentricita e [1].

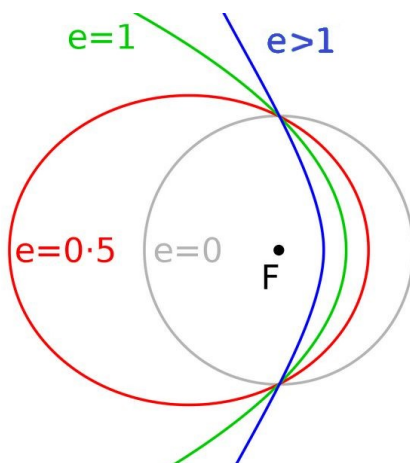
Pokud bude excentricita $0 < e < 1$, oběžná dráha bude eliptická. Jedná se o uzavřenou křivku, kterou lze jednoznačně určit parametrem elipsy p a excentricitou. Poloha nebeského tělesa je jasně dána takzvanou pravou anomálií, což je úhel mezi průvodičem r tělesa přímkou apsid, přímkou spojující nejvzdálenější bod elipsy od ohniska –apocentrum– a nejbližší bod elipsy od ohniska –pericentrum– (pravá anomálie je měřená od pericentra)[1]. Právě na eliptické dráhy je tato práce zaměřena, pro úplnost však budou zmíněny i ostatní možné tvary oběžných drah.

Pokud bude excentricita $e = 0$, vznikne kruhová oběžná dráha, což je speciální druh eliptické dráhy. Ohnisko je totožné se středem kružnice a oběžné těleso si po celou dobu dráhy udržuje konstantní vzdálenost od ohniska $r = p = konst$ [1].

Pokud bude excentricita $e = 1$, vznikne parabolická oběžná dráha. Parabolická dráha je otevřenou křivkou, která představuje přechodný stav mezi eliptickou a hyperbolickou oběžnou dráhou[1].

Pokud bude excentricita $e > 1$, vznikne hyperbolická oběžná dráha. Hyperbola má dvě osově symetrické větve. Fyzikální význam má ale jen ta, po které se těleso pohybuje kolem centrálního tělesa[1].

2.1. KEPLEROVY ZÁKONY

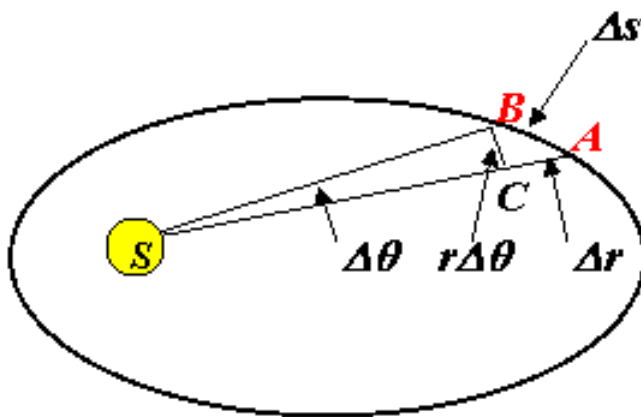


Obrázek 2.2: Druhy oběžných drah v závislosti na excentricitě e [35]

2.1.2. Druhý Keplerův zákon – Zákon ploch

Druhý Keplerův zákon se týká ploch, které opíše planeta po elipse za jednotku času. Jeho formulace zní následovně.

Plocha opsaná pomyslným průvodičem planety a Slunce za danou jednotku času je konstantní po celou dobu oběhu. Planety se nepohybují po oběžných drahách konstantní rychlostí. Bod oběhu nejbližší k Slunci se nazývá perihel. Bod oběhu, kdy je planeta od Slunce nejvzdálenější, se nazývá afel. Rychlost planety je v perihelu největší a v afelu je nejmenší [11].



Obrázek 2.3: Druhý Keplerův zákon – opsaná plocha [36]

Plochu ABS (obr. 2.2), kterou opíše planeta při pohybu z bodu A do bodu B za dobu Δt lze při dostatečně malém časovém úseku aproximovat jako obsah trojúhelníku vymezeného body ABC. Základna tohoto trojúhelníku (při malém dt rovnoramenného) je $r d\theta$ a výška r . Výpočet obsahu infinitezimálního trojúhelníku lze provést následovně[15]:

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (2.7)$$

2. ZÁKLADNÍ ZÁKONY NEBESKÉ MECHANIKY

a pokud je výraz rozšířen o časovou diferenci dt , z úhlu opsaného na trajektorii planety vznikne úhlová rychlost planety ω násobená časovou diferencí.

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\Theta}{dt}dt = \frac{1}{2}r^2\omega dt \quad (2.8)$$

Rovnici pro moment hybnosti L planety o hmotnosti m na oběžné dráze lze zapsat ve tvaru

$$L = mr^2\omega. \quad (2.9)$$

Newtonův zákon o zachování momentu hybnosti říká, že pokud na těleso nepůsobí žádná síla, která by způsobila točivý moment, pak se moment hybnosti nemění. Jelikož jediná síla působící na planetu v tomto modelovém případě je gravitace, která má směr od planety radiálně k ohnisku, nepůsobí zde žádný moment (nulové rameno síly), a proto je moment hybnosti konstantní. V důsledku to znamená, dle rovnice 2.9, že $r^2\omega = konst.$ Pokud je považován časový úsek dt za konstantní, pak je patrné, že celý výraz $dS = \frac{1}{2}r^2\omega dt$, tedy plocha opsaná planetou za čas dt , je konstantou[15].

Pro přehlednost odvození je zavedena konstanta h , takzvaná konstanta zákona ploch, která vyjadřuje polovinu sektoriální rychlosti (plocha opsaná průvodičem za jednotku času)[1]

$$\frac{dS}{dt} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}r^2\omega = konst. \quad (2.10)$$

2.1.3. Třetí Keplerův zákon – poměr oběžných dob a hlavních poloos

Třetí Keplerův zákon se týká periody oběhu a délky hlavní poloosy dvou sledovaných planet. Jeho přesné znění je následující:

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií [13].

Tento zákon tedy říká, že pokud dvě sledované planety (či jiná oběžná tělesa) obíhají kolem stejného centrálního tělesa, pak existuje matematická závislost mezi oběžnou dobou planet a jejich střední vzdáleností od centrálního tělesa. Matematicky by se dal vyjádřit například takto:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (2.11)$$

V době, kdy Kepler objevil tuto závislost, nebyla ještě známá vzdálenost Slunce a Země a ani vzdálenost jiné planety a Slunce. Kepler ale počítal se vzdáleností Země–Slunce jako referenční (dnes bychom tuto referenční vzdálenost pojmenovali AU – astronomická jednotka) a zjistil z oběžných dob planet, které jsou blíže a které dále od Slunce. Z těchto výpočtů určil například, že Mars je asi 1.5krát dál od Slunce než Země, Jupiter 5krát dále než Země apod. Získal tak první představu o proporcionálních vzdálenostech ve Sluneční soustavě, nicméně skutečné vzdálenosti zůstaly neznámé.

Jedno z prvních měření vzdáleností ve Sluneční soustavě bylo provedeno v roce 1672 Giovannim Domenicem Cassinim, který měřil vzdálenost Země a Marsu za pomoci paralaxy. Tato metoda využívá úhel, který svírají přímky pozorovatel–objekt z dvou různých

2.1. KEPLEROVY ZÁKONY

pozorovacích bodů. Pokud je známá vzdálenost dvou pozorovacích bodů (dvě různé, velmi vzdálené observatoře na Zemi), pak lze s pomocí úhlu paralaxy dopočítat vzdálenost pozorovaného objektu[14]. Tato metoda by dnes byla označena za nepřesnou, v době Cassiniho však byla převratná. Dle třetího Keplerova zákona byly pak dopočítány ostatní vzdálenosti oběžných drah v Sluneční soustavě.

Kepler třetí zákon, stejně jako i ostatní dva zákony, formuloval na základě pozorování a zapsaných dat. Lze ho ale odvodit pomocí později formulovaného Newtonova gravitačního zákona (Newtonův gravitační zákon viz kap. 2.2).

Při odvození je nejjednodušší vycházet z předpokladu, že oběžná dráha je kruhového tvaru. Při oběhu po takovéto dráze musí být gravitační síla působící na oběžné těleso rovna odstředivé síle. Tuto rovnost lze znázornit například takto:

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}, \quad (2.12)$$

kde m je hmotnost planety (lze jí celou rovnici vydělit, jinými slovy na hmotnosti oběžného tělesa – planety – nezávisí), M je hmotnost centrálního tělesa (například Slunce), G je univerzální gravitační konstanta, R je vzdálenost mezi tělesy a v je rychlost oběžného tělesa. Rychlost v lze také napsat jako dráhu, kterou těleso opíše za jednu periodu pohybu, tato dráha je rovna obvodu oběžné kružnice, tudíž $v = \frac{2\pi R}{T}$. Dosazením do vztahu 2.12 vznikne vztah

$$\frac{(2\pi R)^2}{R} = G \frac{M}{R^2}. \quad (2.13)$$

Úpravou a vyjádřením poměru oběžné doby a vzdálenosti od centrálního tělesa lze získat finální tvar

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = konst. \quad (2.14)$$

V mnoha literaturách lze také narazit na záměnu hmotnosti centrálního tělesa M a univerzální gravitační konstanty G (někdy také κ) za gravitační parametr $\mu = GM$. Při odvození pro eliptický tvar [1] je nutno uvést vztah mezi konstantou h a parametrem elipsy p

$$p = \frac{h^2}{\mu}, \quad (2.15)$$

vycházející z geometrie elipsy. Lze uvážit sektoriální rychlost při opisu celé elipsy plochy elipsy ($S = \pi ab$) průvodičem za čas T (celou periodu oběhu)

$$S = \pi ab = \int_0^T \frac{dS}{dt} dt, \quad (2.16)$$

Po integraci a dosazení ze vztahu 2.10 a vztahu mezi vedlejší poloosou a hlavní poloosou $b = a\sqrt{1 - e^2}$ lze vyjádřit periodu oběhu po elipse

$$T = 2\pi \frac{a^2}{h} \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.17)$$

S využitím vztahu pro parametr elipsy z výrazu 2.3 a uvedeného vztahu 2.15 lze vyjádřit konstantu h jako

2. ZÁKLADNÍ ZÁKONY NEBESKÉ MECHANIKY

$$h = \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2} \quad (2.18)$$

a po dosazení do rovnice 2.17 lze rovnici psát ve tvaru vztahu 2.19 či celou rovnici umocnit a zapsat ve známém tvaru dle rovnice 2.20

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \quad (2.19)$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = konst. \quad (2.20)$$

Rovnice 2.20 značí, že tělesa na oběžné dráze, například planety obíhající kolem Slunce, mají vzájemně konstantní poměr periody oběhu a délky hlavní poloosy oběžné elipsy. Třetí Keplerův zákon lze v této podobě odvodit pouze pro tělesa, jejichž hmotnost m je vůči hmotnosti centrálního tělesa M velmi malá. Tato podmínka je splněna například pro všechny planety Sluneční soustavy [12].

2.2. Newtonův gravitační zákon

Sir Isaac Newton (1643-1727) se zabýval souvislostí objektů padajících volným pádem k Zemi a pohybem Měsíce. Jeho myšlenka spočívala v tom, že na Měsíc působí síla stejného charakteru jako na objekty padající volným pádem na Zemi se zrychlením g a že právě tato síla ho udržuje na kruhové oběžné dráze kolem Země (dle prvního Newtonova zákona – zákona setrvačnosti – by Měsíc bez této síly pokračoval v pohybu ve směru vektoru jeho rychlosti).

Zjistil, že na objekty na Zemi ve vzdálenosti R_z (poloměr planety Země) od hmotného středu Země působí zrychlení g a na Měsíc, který je ve vzdálenosti $60R_z$ působí přibližně $0.027m \cdot s^{-2}$, což je $(\frac{1}{60})^2 g$. Postupně tak Newton dal za vzniku zákonu v téměř takové podobě, v jaké jej známe dnes [16] [6]

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (2.21)$$

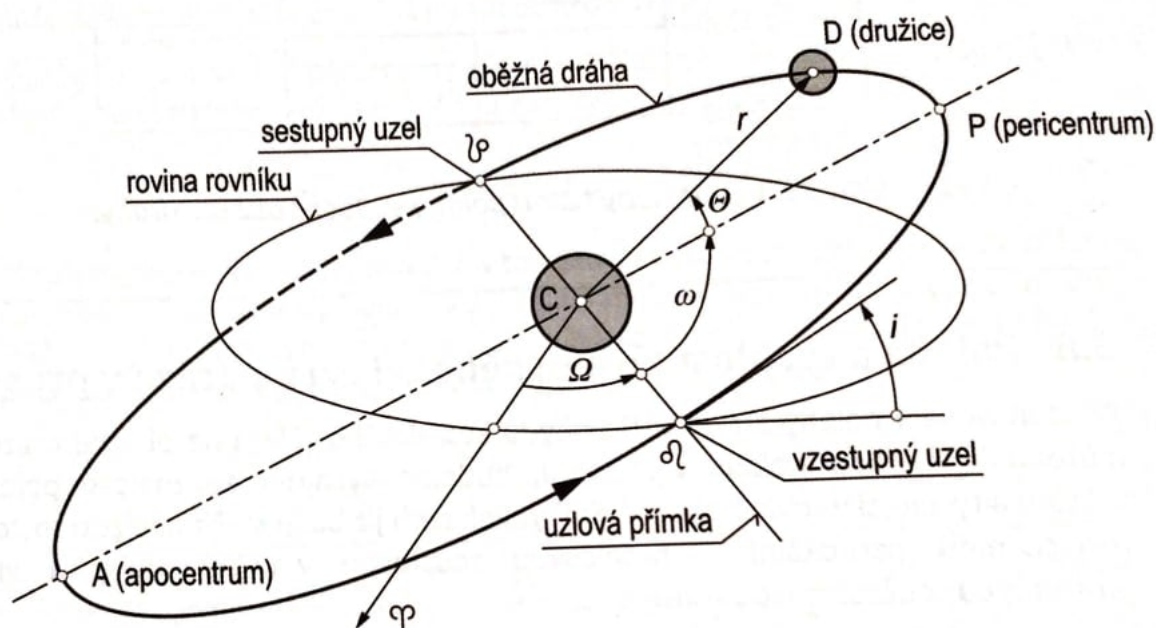
Tedy že gravitační síla, kterou na sebe působí dvě tělesa, je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti. Konstanta úměrnosti G , tedy univerzální gravitační konstanta, nebyla ještě v té době známa. Newton tedy dokázal určit výsledky jeho výpočtů pouze proporcionalně. Univerzální gravitační konstantu G , někdy značenou i κ , určil až o století později pomocí experimentu Henry Cavendish a postupně byla zpřesňována. Dnešní nejpřesnější hodnota je stanovena na [6][1]

$$G = (6,674215 \pm 0,000092)10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2} \right] [1]. \quad (2.22)$$

Tato konstanta vyjadřuje velikost gravitační síly, kterou by se přitahovala dvě tělesa, každé vážící jeden kilogram, ve vzdálenosti jednoho metru.

3. Elementy oběžné dráhy

Dosud byly definovány některé vlastnosti eliptické dráhy, jako například délka hlavní poloosy a , numerická excentricita e nebo parametr elipsy p . V sekci 2.1 bylo řečeno, že těmito parametry je jednoznačně definován tvar eliptické dráhy. Je ale třeba definovat také polohu eliptické dráhy vůči centrálnímu tělesu. K zajištění jednoznačného určení polohy se užívá parametrů, jež nazýváme elementy dráhy. Základními elementy dráhy je šest prvků, mezi které patří $a, e, i, \Omega, \omega, \Theta$. Délka hlavní poloosy a a numerická excentricita e jsou definovány dle obr. 2.1. Zbylé elementy jsou definovány níže, jejich geometrický význam je zřejmý z obr. 3.1 [1].



Obrázek 3.1: Geometrický význam základních elementů dráhy [34]

3.1. Sklon oběžné dráhy

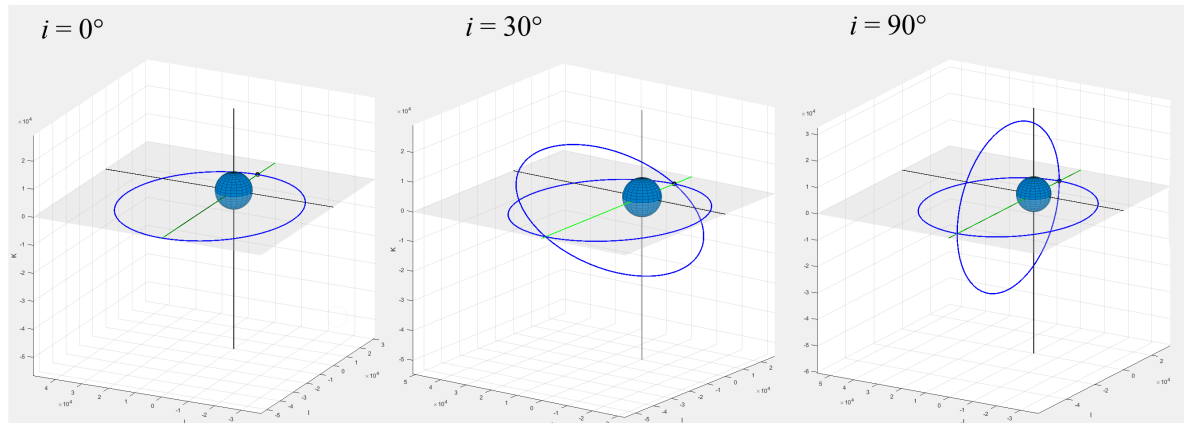
Jedním ze dvou parametrů oběžné dráhy určující polohu oběžné dráhy v prostoru je sklon oběžné dráhy i , úhel mezi rovinou oběhu tělesa a referenční rovinou [1]. Touto referenční rovinou může být například rovina rovníku (rovina rovníku Země se používá jako referenční rovina v rámci oběhu družic kolem Země) nebo rovina oběhu Země kolem Slunce – rovina ekliptiky – od které se měří sklon oběžné dráhy planet a jiných kosmických těles obíhajících kolem Slunce.

Planety Sluneční soustavy obíhají všechny poměrně pod malým sklonem vůči rovině ekliptiky. Z definice roviny ekliptiky vyplývá, že sklon Země $i = 0^\circ$. Mars obíhá kolem Slunce se sklonem $i = 1.9^\circ$ [21], Merkur $i = 7.0^\circ$ [18], Venuše $i = 3.4^\circ$ [20] a Jupiter $i = 1.3^\circ$ [19].

Na obr. 3.2 lze vidět vliv sklonu i na orientaci oběžné dráhy v prostoru. Všechny tři ukázky zobrazují pevně určenou oběžnou elipsu a polohu družice (tmavý bod na oběžné

dráze) šesticí elementů dráhy (konkrétně pak $a = 36000 \text{ km}$; $e = 0.5$; $\Omega = 0^\circ$; $\omega = 0^\circ$; $\Theta = 0^\circ$). Pro lepší představu je původní eliptická dráha $i = 0^\circ$ ponechána na všech třech ukázkách. Je patrné, že dle definice sklon dráhy naklání rovinu oběžné elipsy kolem uzlové přímky (zelená přímka) vůči rovině rovníku oběžného tělesa (šedá rovina).

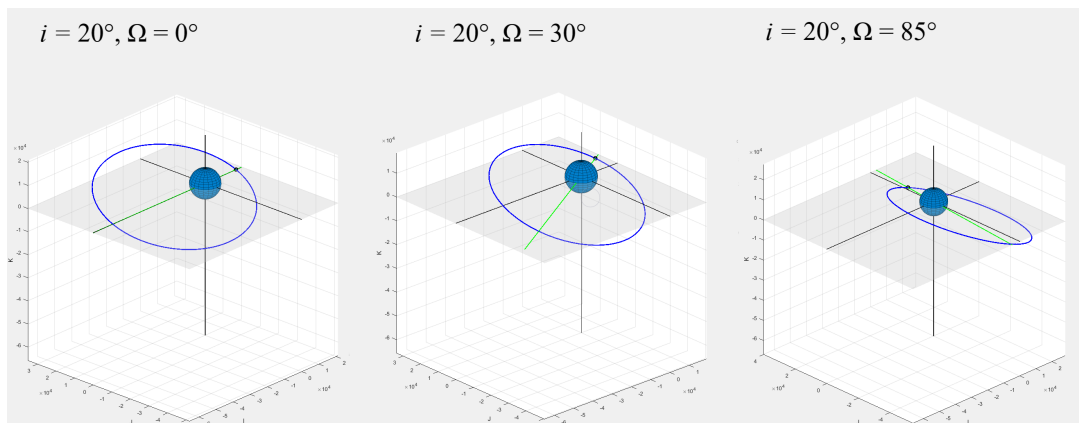
Sklon oběžné dráhy může nabývat hodnot $0^\circ - 180^\circ$. Pokud je sklon oběžné dráhy $i \in (0^\circ; 90^\circ)$, pak těleso obíhá po oběžné dráze ve stejném smyslu jako je rotace centrálního tělesa. Takovýmto oběžným drahám se říká progradní. Pokud $i \in (90^\circ; 180^\circ)$, pak těleso obíhá v opačném smyslu než rotace centrálního tělesa a dráze se říká retrogradní [17].



Obrázek 3.2: Ukázka vlivu i na polohu oběžné dráhy [38]

3.2. Délka vzestupného uzlu

Druhý parametr, který určuje polohu dráhy v prostoru, je délka vzestupného uzlu Ω , úhel mezi uzlovou přímkou a referenční přímkou. Za referenční přímkou se velmi často volí směr jarní rovnodennosti, což je ve své podstatě polopřímka daná spojnicí Země a bodem, kde se Slunce nachází v okamžiku jarní rovnodennosti. Směr jarní rovnodennosti je jeden z průsečíků roviny ekliptiky a roviny rovníku Země. Uzlová přímka je průsečnice roviny oběžné dráhy tělesa a referenční roviny (např. roviny rovníku centrálního tělesa nebo roviny ekliptiky). Na této přímce leží také dva významné body, vzestupný a sestupný uzel, což jsou body na oběžné dráze, kde těleso vzestupuje nad, resp. sestupuje pod rovinu rovníku [1]. Úhel Ω se měří vždy od referenční přímky po vzestupnou část uzlové přímky.



Obrázek 3.3: Ukázka vlivu Ω na polohu oběžné dráhy [38]

3.3. ARGUMENT PERICENTRA

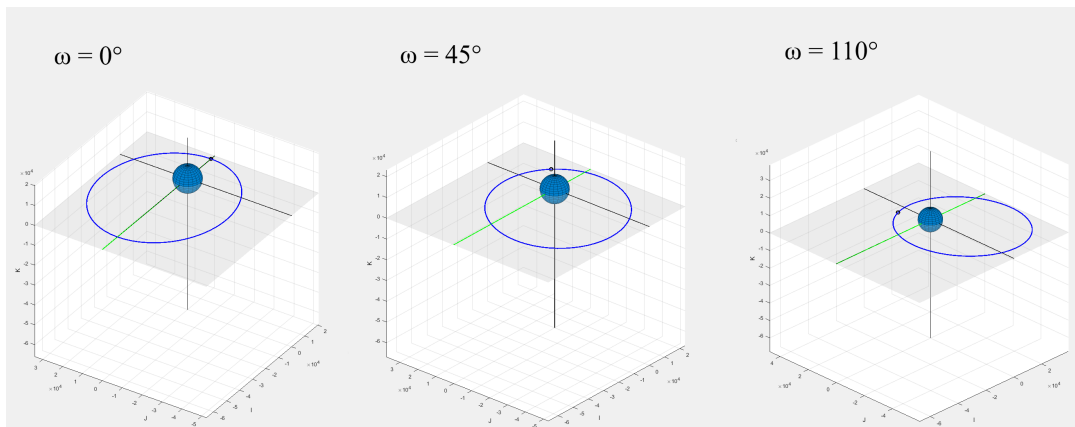
Na obr. 3.3. je demonstrován vliv Ω na polohu eliptické oběžné dráhy v prostoru. Eliptická dráha je určena podobně jako v kapitole 3.1. Z definice Ω vyplývá, že pokud je $i = 0^\circ$, pak by nemělo smysl určovat Ω , jelikož se měří od uzlové přímky, jejíž poloha není přesně dána při nulovém sklonu dráhy (rovina oběhu a rovina rovníku jsou geometricky totožné), proto je v příkladech na obr. 3.3 využito eliptické dráhy pod náklonem $i = 20^\circ$. Z ukázky je patrné, že vliv Ω je otočení uzlové přímky (zelená přímka) o daný úhel měřeno od pericentra (v pericentru se na obr. 3.3 nachází i družice, jelikož $\Theta = 0^\circ$).

3.3. Argument pericentra

Parametrem určujícím orientaci oběžné dráhy v její rovině je argument pericentra ω , někdy také argument šířky pericentra. Je definován jako úhel mezi uzlovou přímkou oběžné dráhy a přímkou apsid, která je spojnicí pericentra a apocentra [1]. Představuje úhel rotace oběžné elipsy v její rovině kolem ohniska. Úhel je měřen od uzlové přímky po přímku apsid.

Argument pericentra nelze zaměňovat s jedním z pomocných elementů oběžné dráhy – délkou pericentra $\bar{\omega}$ nebo také Π , který vyjadřuje součet argumentu pericentra a délky vzestupného uzlu $\bar{\omega} = \omega + \Omega$.

Z obr. 3.4 je patrné, že ω rotuje elipsou v rámci její roviny (jelikož $i = 0^\circ$ rovina elipsy je totožná s rovinou rovníku), přičemž uzlová přímka se nemění.



Obrázek 3.4: Ukázka vlivu ω na polohu oběžné dráhy [38]

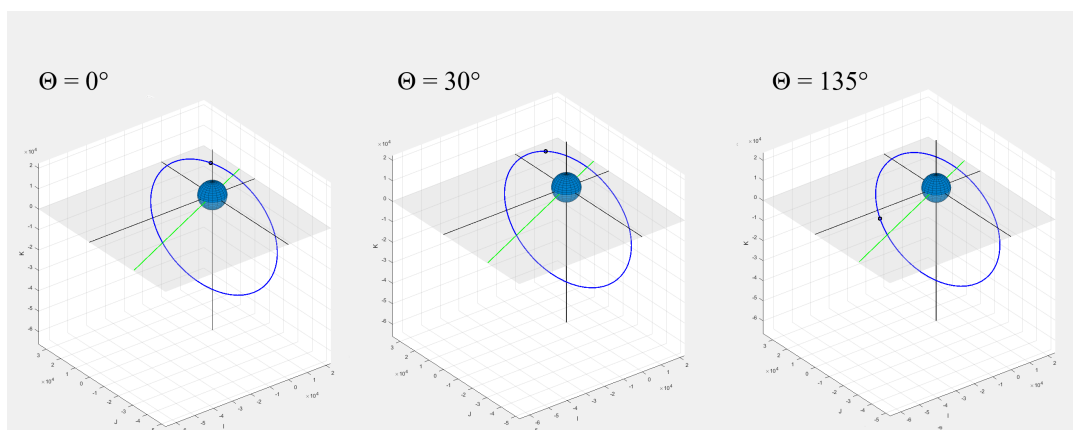
3.4. Pravá anomálie

Pravá anomálie Θ je úhel udávající polohu kosmického tělesa na oběžné dráze. Je to úhel mezi přímkou apsid směrem k pericentru a průvodičem tělesa r , který se po dobu oběhu periodicky mění v čase[1].

Na obr. 3.5 je vidět změna polohy družice (černý bod na eliptické dráze) vzhledem ke změně parametru Θ . Lze si povšimnout nerovnoměrnosti pohybu dané excentricitou elipsy.

Místo pravé anomálie Θ se často udává jako jeden z elementů dráhy čas průchodu pericentrem T_p , který značí přesný čas, kdy planeta prošla ve svém oběhu místem nejbližší centrálnímu tělesu. Tento parametr se používá zejména při pozorování nebeských

3. ELEMENTY OBĚŽNÉ DRÁHY



Obrázek 3.5: Ukázka vlivu pravé anomálie na polohu tělesa na oběžné dráze [38]

těles, protože pravá anomálie je závislá na čase, kdežto čas průchodu pericentrem nikoliv a pravou anomálii z něj lze pro libovolný moment dopočítat.

4. Používané souřadnicové soustavy

Aby byla oběžná dráha úspěšně popsána, musí být definován vztažný systém. Většinou jsou oběžné dráhy zasazeny do pravotočivého souřadného systému s počátkem v těžišti centrálního tělesa nebo společném těžišti (barycentru) centrálního tělesa a družice. Některé koncepty opouští myšlenku souřadnicových systémů kvůli enormním vzdálenostem od pozorovatele ke vzdáleným hvězdám. Relativní velikost Země je tak nevýrazná, že se zdá, jakoby se tato vzdálená tělesa a hvězdy pohybovali po vnitřním povrchu koule, nebeské sféry[7].

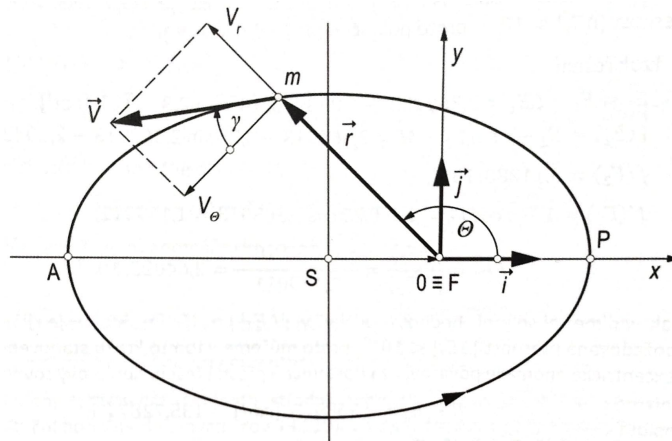
Vzhledem k záměru této práce se však zaměříme především na souřadnicové systémy s počátkem v ohnisku.

4.1. Definice souřadnicových systémů

4.1.1. Perifokální souřadnicová soustava

Perifokální souřadnicová soustava má počátek v ohnisku (v centrálním tělese), osa x leží na přímce apsid a její kladný smysl je dán směrem od ohniska k pericentru. Osa y je totožná s parametrem elipsy a osa z doplňuje soustavu na pravotočivý systém [1][2].

Tento souřadnicový systém je v souladu s výpočtem souřadnic například podle kapitoly 5.1.



Obrázek 4.1: Ukázka polohového vektoru a vektoru rychlosti v perifokálním souřadnicovém systému [34]

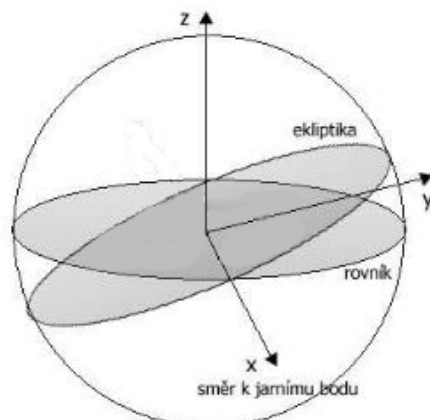
4.1.2. Geocentrická a heliocentrická souřadnicová soustava

Nejpoužívanější souřadnicové soustavy v rámci Sluneční soustavy jsou geocentrická a heliocentrická. Obě tyto soustavy jsou podobné perifokální soustavě, mají však klíčové odlišnosti.

Geocentrická souřadnicová soustava má počátek ve středu centrálního gravitačního pole Země. Osa x leží v rovině rovníku a je orientována ve směru bodu jarní rovnodennosti (průsečnice roviny rovníku a roviny ekliptiky ve směru, kde je Slunce, když nastane jarní

4. POUŽÍVANÉ SOUŘADNICOVÉ SOUSTAVY

rovnodennost). Osa z míří směrem k severnímu pólu Země. Osa y leží v rovině rovníku a kolmostí na dvě zmíněné osy doplňuje systém na pravotočivý [1].



Obrázek 4.2: Geocentrický souřadnicový systém

Heliocentrická souřadnicová soustava má počátek ve středu centrálního gravitačního pole Slunce, osa x leží v rovině ekliptiky a má směr shodný s osou x v geocentrické souřadnicové soustavě, tedy směr jarní rovnodennosti. Osa z má směr k severnímu pólu Slunce a osa y leží v rovině ekliptiky a opět doplňuje svou kolmostí na obě osy systém na pravotočivý [1]. Tento typ souřadnic je nejpoužívanější při určování polohy planet a jiných těles kosmických těles, v rámci Sluneční soustavy.

4.2. Transformace souřadnic mezi souřadnicovými soustavami

4.2.1. Transformace z heliocentrického na perifokální souřadnicový systém

Jediná transformace souřadnicových systémů, která bude probrána v této práci detailně, je transformace z heliocentrického souřadnicového systému (resp. geocentrického souřadnicového systému) do perifokálního a vice versa.

Transformace bude rozebrána dle lit. [1] názorně na obecném příkladu z hlediska dvou různě položených souřadných systémů, jeden z nichž nechť je heliocentrický (dále označovaný H) a druhý perifokální (dále označovaný P). Počátek souřadnicové soustavy mají ale oba totožný (ve Slunci). Sledovaný bod Q má souřadnice v souřadnicovém systému H

$$Q = \begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \\ Z_H \end{bmatrix}.$$

Oběžná dráha tělesa má elementy dráhy i, Ω, ω . Cílem je transformovat souřadnice bodu Q v souřadnicovém systému H do systému P , kde bude mít bod Q souřadnice

4.2. TRANSFORMACE SOUŘADNIC MEZI SOUŘADNICOVÝMI SOUSTAVAMI

$$Q = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}.$$

Toho lze docílit tak, že budeme souřadnicovým systémem H rotovat o úhly dané elementy dráhy, Směr rotace a důvod rotace kolem dané osy je dán definicí každého z elementů dráhy v kapitolách 3.1–3.3.

Prvním krokem je rotace souřadnicového systému okolo osy z o úhel Ω v kladném smyslu. Takové posunutí lze vyjádřit součinem souřadnic a transformační matice rotace osy z , čímž bod dostane nové souřadnice v pootočeném souřadnicovém systému (označován indexem 1).

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \\ Z_H \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Druhé pootočení proběhne kolem osy x o úhel i v kladném smyslu. Bod dostane po rotaci nové souřadnice vyjádřené indexem 2. Otočení kolem osy x lze vyjádřit v maticovém tvaru vztahem

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Třetí pootočení je opět okolo osy z o úhel ω v kladném smyslu. Tímto pootočením vzniknout finální souřadnice bodu v požadovaném tvaru perifokálního souřadnicového systému. Třetí pootočení je za pomoci transformační matice vyjádřeno vztahem

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Ve skutečnosti není třeba otáčet souřadným systémem na tři kroky, proto můžeme hledané souřadnice daného bodu získat pouhým postupným součinem transformačních matic (vztah 4.4), nebo ve tvaru roznásobení transformačních matic (vztah 4.5). Transformační matice ze vztahu 4.5 je označena dvěma indexy, první z nich značí kam se transformuje a druhý odkud, tedy $[T_{P/H}][1]$.

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \\ Z_H \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega & \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega & \sin \omega \sin i \\ -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega & \cos \omega \sin i \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = [T_{P/H}] \begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \\ Z_H \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

4.2.2. Transformace z perifokálního na heliocentrický souřadnicový systém

Úvaha při transformaci z perifokálního na heliocentrický souřadnicový systém je stejná jako při opačné transformaci v sekci 4.2.1, kde byla použita transformační rovnice

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = [T_{P/H}] \begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \\ Z_H \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Dle pravidel maticových rovnic lze rovnici vynásobit zleva inverzní maticí k matici $[T_{P/H}]$ za cílem vyjádření souřadnic heliocentrického souřadnicového systému

$$[T_{P/H}]^{-1} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = [T_{P/H}]^{-1} [T_{P/H}] \begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \\ Z_H \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Touto operací vznikne jednotková matice, čímž se souřadnice systému H v rovnici osamostatní a vznikne vztah pro transformaci z perifokálního souřadnicového systému do heliocentrického souřadnicového systému

$$[T_{P/H}]^{-1} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \\ Z_H \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Z čehož vyplývá, že transformační matice pro převod z perifokálního do heliocentrického souřadnicového systému je inverzní maticí k opačnému převodu a má tvar dle vztahu 4.11. Matice $[T_{P/H}]$ je navíc ortogonální, proto platí, že její inverzní matice je rovna transponované.

$$[T_{H/P}] = [T_{P/H}]^{-1} = [T_{P/H}]^T \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega & -\sin \omega \cos \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

5. Poloha kosmického tělesa na oběžné dráze

5.1. Keplerova rovnice

5.1.1. Střední a excentrická anomálie

Pokud má být určena přesná poloha tělesa na oběžné dráze, pak je třeba nejprve definovat některé doplňující veličiny.

První z nich zajišťuje, že v závislosti polohy na čase bude figurovat veličina, která bude v čase plynout rovnoměrně. Z Keplerova 2. zákona je patrné, že rychlost tělesa po eliptické dráze je nerovnoměrná, úměrná ploše, kterou opíše průvodič. Pokud by ale byla oběžná dráha kruhová, pak pohyb bude rovnoměrný. Za pomoci této úvahy je definována střední anomálie M , která vyznačuje úhel, který by svírala spojnice tělesa s přímkou se středem elipsy (resp. kružnice), kdyby se těleso pohybovalo rovnoměrným pohybem po kružnici o poloměru totožným s hlavní poloosou elipsy $r = a$ po celou dobu oběhu [5] [1]. Stojí za poznamenání, že v bodech $\Theta = 0^\circ$ (pericentrum) a $\Theta = 180^\circ$ se střední anomálie rovná pravé anomálii $\Theta = M$. Matematicky se dá střední anomálie definovat podobně jako úhlová dráha při rovnoměrném pohybu po kružnici

$$M = \frac{2\pi}{T}t. \quad (5.1)$$

Protože jsou ale pohyby po oběžných drahách periodické, je třeba vztáhnout pohyb k nějakému referenčnímu času. Tímto časem bývá například čas průchodu tělesa perihéliem či začátek epochy a označuje se T_p , T_0 nebo také τ

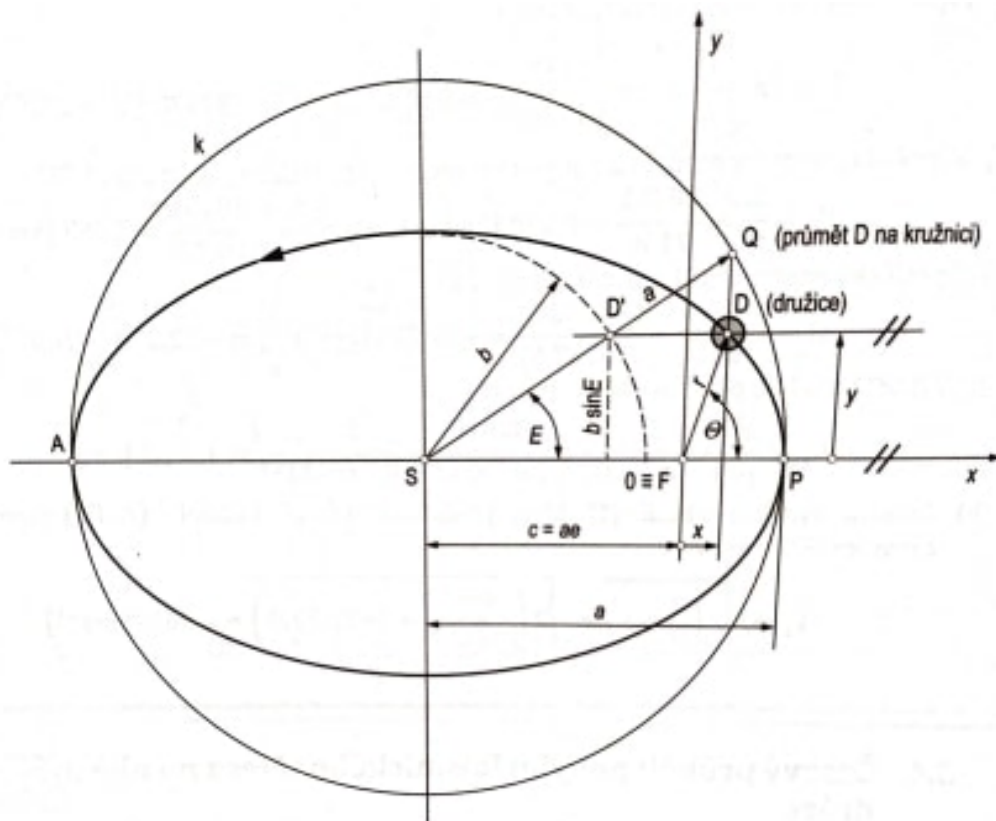
$$M = \frac{2\pi}{T}(t - T_p), \quad (5.2)$$
$$\frac{2\pi}{T} = n.$$

Výraz $\frac{2\pi}{T}$ se nazývá střední pohyb n nebo také střední denní pohyb, pokud je perioda oběhu uvažována ve dnech. Vyjadřuje úhlovou dráhu, kterou by těleso urazilo na oběžné dráze při rovnoměrném pohybu za jeden den.

Druhá proměnná veličina vyjadřuje v podstatě vztah mezi změnou plochy opsané průvodičem ΔS za čas t a pravou anomálií Θ [5]. Tato veličina se nazývá excentrická anomálie E . K její definici se opět využívá myšlené kružnice o poloměru $r = a$, avšak tentokrát nejde o rovnoměrný pohyb, ale o kolmý (vzhledem k přímce apsid) průmět polohy tělesa na eliptické oběžné dráze. Excentrická anomálie E je tedy úhel, který svírá přímka apsid a spojnice středu s průmětem tělesa na kružnici. Na obr. 5.1 je těleso na oběžné dráze označeno bodem D, kolmý průmět na kružnici je označen bodem Q. Excentrická anomálie je potom dle obr. 5.1 definována jako $E = \angle FSQ$. Excentrická anomálie, stejně jako střední anomálie, v bodě pericentra a apocentra splyne s pravou anomálií Θ [1].

Excentrickou anomálii lze použít k výpočtu polohy tělesa na oběžné dráze. Pokud je uvažován perifokální souřadnicový systém, pak dle obr. 5.1 je vidět, že souřadnice x a y lze získat pomocí složky vektoru \vec{SQ} [1]:

5. POLOHA KOSMICKÉHO TĚLESA NA OBĚŽNÉ DRÁZE

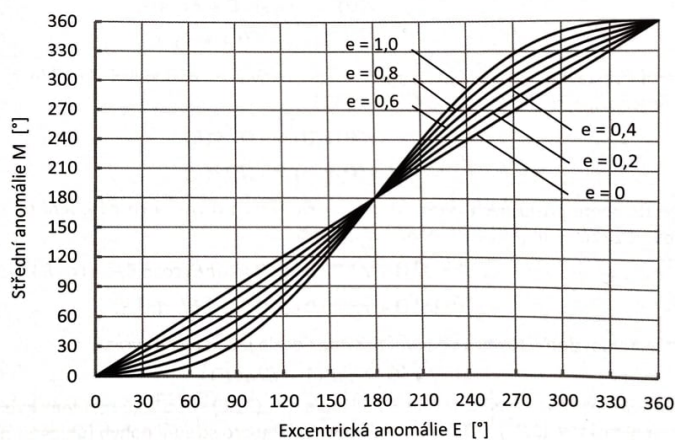


Obrázek 5.1: Definice excentrické anomálie [34]

$$x = a \cos E - ae, \quad (5.3)$$

$$y = b \cos E = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (5.4)$$

Na obr. 5.2 lze vidět grafickou závislost střední anomálie na excentrické anomálii. Z grafu je patrné, že v uzlových bodech $E = 0^\circ, E = 180^\circ, E = 360^\circ$ je $E = M$. Za poznamenání stojí i skutečnost, že čím větší je excentricita elipsy, tím jsou větší odchylky mezi E a M . Vyšší hodnota excentricity způsobuje, že eliptická dráha je zploštělejší a tudíž má větší odchylku od myšlené kružnice s poloměrem $r = a$.



Obrázek 5.2: Závislost střední anomálie na excentrické anomálii [34]

5.2. Řešení Keplerovy rovnice

Pro zjištění souřadnic v rovině oběžné dráhy dle vztahů 5.3 a 5.4 je tedy potřeba vyčíslit excentrickou anomálii E v daném čase. K tomu slouží Keplerova rovnice, která vyjadřuje vztah mezi excentrickou anomálií E a střední anomálií M . Keplerova rovnice je nejčastěji zapsána ve tvaru [1]

$$M = E - e \sin E. \quad (5.5)$$

Avšak pro vyjádření excentrické anomálie je výhodnější rovnici 5.5 přeskupit do tvaru

$$E = M + e \sin E. \quad (5.6)$$

Tato rovnice patří mezi transcendentní rovnice, které nelze analyticky vyřešit, proto se volí různá numerická řešení Keplerovy rovnice. Nejjednodušší je metoda prosté iterace, kde je pomocí počátečního odhadu E_0 aproximována hodnota E_1 a ta je v další iteraci použita pro aproximaci další hodnoty. Takto probíhá iterační výpočet, dokud není postupnou konvergencí k řešení zaručena dostatečně malá chyba $|E_{i+1} - E_i|$ [1][9]

$$E_1 = M + e \sin E_0, \quad (5.7)$$

$$E_{i+1} = M + e \sin E_i. \quad (5.8)$$

Pro rychlejší konvergenci lze použít k řešení Keplerovy rovnice též Newton-Raphsonovu metodu, která využívá iteračního výpočtu pro funkce ve tvaru $f(x) = 0$ podle vzorce

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (5.9)$$

V případě Keplerovy rovnice by tedy Newton-Raphsonova metoda dostala tvar

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)}, \quad (5.10)$$

kde $f(E_i)$ je Keplerova rovnice upravená do tvaru pro Newton-Raphsonovu metodu a $f'(E_i)$ je derivace tohoto vztahu podle E_i

$$f(E_i) = E_i - e \sin E_i - M,$$

$$f'(E_i) = 1 - e \cos E_i.$$

Počáteční odhad E_0 lze zvolit jako $E_0 = M$. Obzvláště však při využití Newton-Raphsonovy metody je ale vhodnější zvolit lepší odhad E_0 , neboť povede k rychlejší aproximaci [1][9]. Počáteční aproximace E_0 se doporučuje volit následovně [1][4]:

$$\text{pro } M < \pi; E_0 = M + \frac{e}{2},$$

$$\text{pro } M > \pi; E_0 = M - \frac{e}{2},$$

nebo pomocí vztahu

$$E_0 = M + \frac{e \sin M}{\cos e - (\frac{\pi}{2} - e) \sin e + M \sin E}. \quad (5.11)$$

6. Juliánské datum

Při pozorování kosmických těles se přichází do styku s dlouhými časovými intervaly, často v řádu stovek dní nebo i více. Při pozorování astronomové postupně zjistili nešikovnost gregoriánského kalendáře. Při výpočtech bylo příliš složité stále započítávat jiný počet dní v měsících, přestupné roky a jiné nepravidelnosti. Proto se obecně při popisu nebeských těles používá takzvaný juliánský systém dní, kde plyne jeden sluneční den za druhým rovnoměrně od daného data.

Juliánský den je počet dní, které uběhly od poledne UT 1. ledna 4713 před Kristem. Toto datum bylo zvoleno záměrně dostatečně v minulosti, aby se při pozorování astronomové nesetkávali (až na výjimky) se zápornými dny. Juliánský den začíná v poledne z toho důvodu, že pozorování probíhalo převážně v noci a astronomové se tak nemuseli při práci zaobírat změnou data.

Velkou výhodou systému juliánských dní je například skutečnost, že časový rozdíl mezi dvěma událostmi lze obdržet pouhým odečtením jednoho data od druhého.

Juliánské dny se také dělí na století a epochy. Jelikož gregoriánský rok má 365.25 dní, juliánské století má pak 36525 dní. Současná epocha s označením J2000 začala v poledne UT 1. ledna 2000, v juliánských dnech tedy 2451545[1][2].

6.1. Převod občanského data na juliánské

Pro převod z občanského na juliánské datum lze využít tabulky, existují ale i různé algoritmy a vztahy, například vztah

$$JD = 367R - INT \left\{ \frac{7[R + INT(\frac{M+9}{12})]}{4} \right\} + INT \left(\frac{275M}{9} \right) + D + 1721013.5, \quad (6.1)$$

kde R , M a D jsou po řadě symboly pro rok, měsíc a den v občanském datu a výraz $INT()$ značí celočíselnou část výsledku. R , M a D můžou nabývat hodnot [2][1]

$$1901 \leq R \leq 2099,$$

$$1 \leq M \leq 12,$$

$$1 \leq D \leq 31.$$

6.2. Převod juliánského data na občanské

I pro převod z juliánského data na občanské existují tabulky a algoritmy. Jako jeden z algoritmů převodu lze uvést [10]

$$z = INT(JD + 0.5),$$

$$b = INT[(z - 1867216.25) / 36524.25],$$

$$c = z + b - INT[b / 4] + 1525,$$

$$d = INT[(c - 122.1) / 365.25],$$

6.2. PŘEVOD JULIÁNSKÉHO DATA NA OBČANSKÉ

$$e = 365d + INT[d / 4],$$
$$f = INT[(c - e) / 30.6001],$$

$$D = INT(c - e + 0.5) - INT(30.6001f) + JD + 0.5 - z,$$

$$M = f - 1 - 12INT(f / 14),$$

$$R = d - 4715 - INT[(7 + M) / 10],$$

kde použité symboly mají stejný význam jako v předchozí kapitole. Hodnoty označené malým písmenem (z, b, c, d, e, f) jsou pomocné hodnoty a slouží k zřehlednění výpočtu. Výrazem JD je označeno juliánské datum.

Blízka vesmírná tělesa

7. Definice pojmů

7.1. Blízká vesmírná tělesa

Ve Sluneční soustavě se mimo planety pohybují kolem Slunce i jiná tělesa. Jedná se o tělesa od prachových částic měřících několik mikrometrů po tělesa měřící několik set kilometrů v průměru. Jednou ze skupin těles jsou blízká vesmírná tělesa, na které je tato práce zaměřena. Nám známých asteroidů je ve Sluneční soustavě okolo 600 000 z čehož asi 20 000 jsou klasifikovány jako blízká vesmírná tělesa [22][23].

Blízká vesmírná tělesa, často označovaná NEO (z angličtiny – Near-Earth Object), jsou definována jako tělesa, která se svou oběžnou dráhou dostanou v bodě periheleu blíže než 1.3 astronomické jednotky (AU). Za astronomickou jednotku je považována střední vzdálenost Země od Slunce, tedy asi 150 milionů kilometrů [22].

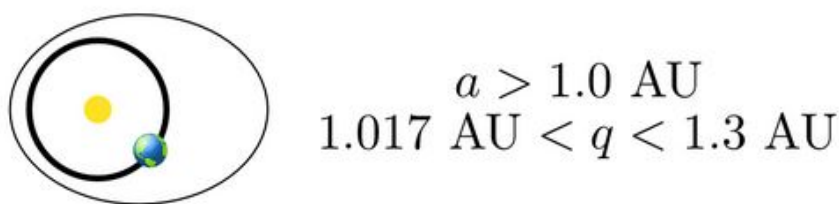
7.2. Rozdělení blízkých vesmírných těles

Blízká vesmírná tělesa se dělí na dvě hlavní skupiny. Jde o blízké asteroidy (NEA – Near-Earth Asteroids), které tvoří valnou většinu všech NEO a blízké komety (NEC – Near-Earth Comets) [22].

7.2.1. NEA – Blízké asteroidy

Blízké asteroidy jsou rozděleny na několik skupin zejména podle tvaru jejich dráhy vůči Zemi [22]. Obecné parametry každé ze skupin jsou zřejmé z obrázků (7.1–7.4), kde a značí délku hlavní poloosy trajektorie asteroidu a q (resp. Q) značí vzdálenost od Slunce v okamžiku průchodu perihelem (resp. afelem):

Amory, blízká vesmírná tělesa, jejichž křivka dráhy obemkne křivku trajektorie Země, ale zároveň je sama obemknuta trajektorií planety Mars. Pojmenovány po asteroidu 1221 *Amor* (Obr.7.1).



Obrázek 7.1: Popis oběžné dráhy asteroidů typu Amor [39]

Apolla, tělesa jejichž oběžná dráha má hlavní poloosu větší než hlavní poloosa oběhu Země, ale vzdálenost ke Slunci v perihelu je menší než vzdálenost perihelu Země. Pojmenovány po asteroidu *1862 Apollo* (Obr.7.2).



$$a > 1.0 \text{ AU}$$

$$q < 1.017 \text{ AU}$$

Obrázek 7.2: Popis oběžné dráhy asteroidů typu Apollo [39]

Atény, tělesa jejichž oběžná dráha má hlavní poloosu menší než hlavní poloosa Země a vzdálenost od Slunce v okamžiku průchodu afelem větší než vzdálenost Země v afelu. Pojmenovány po *2062 Aten* (Obr.7.3).



$$a < 1.0 \text{ AU}$$

$$Q > 0.983 \text{ AU}$$

Obrázek 7.3: Popis oběžné dráhy asteroidů typu Atény [39]

Atiry, tělesa jejichž dráha je celá obemknuta oběžnou drahou Země, mají tedy hlavní poloosu i vzdálenost od Slunce v okamžiku průchodu afelem menší než Země. Pojmenovány po asteroidu *163693 Atira* (Obr.7.4).



$$a < 1.0 \text{ AU}$$

$$Q < 0.983 \text{ AU}$$

Obrázek 7.4: Popis oběžné dráhy asteroidů typu Atira [39]

7.2.2. NEC – Blízké komety

Tato skupina není zdaleka tak početná jako NEA a v úvahu do skupiny NEO se berou jen ty, které mají periodu oběhu kolem Slunce menší než 200 let a vzdálenost od Slunce v perihelu menší než 1.3 AU. Protože většina komet ve Sluneční soustavě má velkou hodnotu excentricity a dlouhou hlavní poloosu, trvá jejich oběh bezpečně několik století. Jejich vlastnosti také ztěžují pozorování a určování přesného tvaru oběžné dráhy je proto obtížné. Vzhledem k záměru této práce nebudou příliš rozebírány[24].

7.2. ROZDĚLENÍ BLÍZKÝCH VESMÍRNÝCH TĚLES

7.2.3. Potenciálně nebezpečná vesmírná tělesa

Poměrně důležitou podskupinou NEO jsou tělesa, která jsou klasifikována jako potenciálně nebezpečná, také PHA (z anglického Potentially Hazardous Asteroids). Do této skupiny jsou řazeny tělesa na základě potenciálu ohrozit planetu Zemi. Záleží zde zejména na dvou parametrech. Prvním parametrem je minimální vzdálenost oběžné dráhy tělesa a Země (Minimum orbit intersection distance, MOID), která musí být menší než 0.05 AU. Druhým parametrem je absolutní magnituda H , což je jasnost, kterou by měl objekt, kdyby byl viděn na vzdálenost 10 parseků (čím menší hodnota tím jasnější objekt). Aby bylo těleso klasifikováno jako PHA, nesmí mít magnitudu větší než 22 [22].

Program na předpověď kolize Země s blízkými vesmírnými tělesy

8. Zaměření a cíl výpočetního programu

Cílem programu NeoCalc je schopnost vypočítat nejmenší vzdálenost Země a vybraného vesmírného tělesa v uživatelem zadaném časovém intervalu. Přesnost těchto výpočtů by měla dosáhnout na takovou úroveň, aby chyba výsledku byla v rámci zanedbatelnosti vzhledem k nezahrnutým vlivům. Jelikož je se současnou technologií nemožné určit přesně, kde se dané vesmírné těleso nachází, za přesný výsledek, od kterého je brána odchylka, se považuje hodnota, kterou uvádí Jet Propulsion Laboratory (JPL), Center for NEO Studies na svém internetovém portálu.

Object	Close-Approach (CA) Date	CA Distance Nominal (LD au)	CA Distance Minimum (LD au)
(2020 JU1) ↗	2020-Jun-13 15:34 ± < 00:01	18.97 0.04873	18.94 0.04867
(2020 LC) ↗	2020-Jun-13 16:07 ± < 00:01	12.36 0.03176	12.35 0.03175
(2020 KB3) ↗	2020-Jun-13 21:36 ± < 00:01	3.14 0.00807	3.14 0.00807
(2017 MF7) ↗	2020-Jun-14 13:10 ± 4_10:36	3.68 0.00945	0.91 0.00234
(2020 KP6) ↗	2020-Jun-16 10:33 ± < 00:01	3.59 0.00924	3.59 0.00923
(2020 JU3) ↗	2020-Jun-17 07:24 ± 00:09	6.84 0.01757	6.81 0.01750
(2020 KF3) ↗	2020-Jun-17 21:30 ± 00:02	12.48 0.03207	12.41 0.03189
(2020 LG) ↗	2020-Jun-18 21:49 ± < 00:01	8.84 0.02272	8.79 0.02259
(2018 PD22) ↗	2020-Jun-19 12:40 ± 18:52	17.17 0.04413	15.86 0.04075
(2020 KR1) ↗	2020-Jun-22 03:34 ± < 00:01	11.55 0.02969	11.55 0.02967

Obrázek 8.1: Úryvek z internetového portálu JPL, data přiblížení vybraných blízkých vesmírných těles [40]

8.1. Výpočtem uvažované vlivy a odchylky

Výpočetní model je omezen pouze na eliptické oběžné dráhy vesmírných těles a uvažuje pouze vliv centrálního gravitačního pole Slunce. Nepředpokládá tedy ovlivnění Země ani daného vesmírného tělesa gravitačními silami blízkých planet a jejich měsíců v Sluneční soustavě ani gravitační síly jiných blízkých kosmických těles a neuvazuje vzájemnou přitažlivost sledovaného blízkého vesmírného tělesa a Země. Tyto vlivy je však důležité mít na paměti, neboť právě kvůli nim se blízkým vesmírným tělesům věnuje taková pozornost. Pokud těleso proletí například v bezpečné vzdálenosti planety Země, dojde však ke gravitační interakci, těleso změní rychlost a potažmo i tvar oběžné dráhy kolem Slunce a při budoucích průletech může být potenciálním nebezpečím.

Právě protože tyto vlivy nejsou v modelu uvažovány a zároveň samotné hodnoty elementů dráhy vesmírných těles (uváděny například na online portálu JPL dle obr. 8.1 ve sloupci *uncertainty*) nejsou zcela přesné, byla stanovena odchylka výpočtu vzdálenosti na 0.001 AU.

136795 (1997 BQ)			
Classification: Apollo [NEO, PHA]		SPK-ID: 2136795	
[Ephemeris Orbit Diagram Orbital Elements Mission Design Physical Parameters Discovery Circumstances			
[show orbit diagram]			
Orbital Elements at Epoch 2459000.5 (2020-May-31.0) TDB			
Reference: JPL 65 (heliocentric ecliptic J2000)			
Element	Value	Uncertainty (1-sigma)	Units
e	.4786097161397527	5.364e-08	
a	1.747208813008294	7.5363e-09	au
q	.9109776989775201	9.5537e-08	au
i	10.99171566990081	7.6286e-06	deg
node	50.19104637224941	3.6206e-05	deg
peri	147.4553849006326	3.6033e-05	deg
M	17.87249899172771	1.0297e-05	deg
t _p	2458958.620795386673 (2020-Apr-19.12079539)	2.4075e-05	TDB
period	843.5593515924094	5.4578e-06	d
	2.31	1.494e-08	yr
n	.4267630953535379	2.7612e-09	deg/d
Q	2.583439927039068	1.1143e-08	au

Orbit Determination Parameters	
# obs. used (total)	334
data-arc span	8503 days (23.28 yr)
first obs. used	1997-01-16
last obs. used	2020-04-28
planetary ephem.	DE431
SB-pert. ephem.	SB431-N16
condition code	0
norm. resid. RMS	.51455
source	ORB
producer	Otto Matic
solution date	2020-Apr-29 06:55:48

Additional Information	
Earth MOID =	.0358257 au
Jupiter MOID =	2.38908 au
T _{jup} =	3.977

Obrázek 8.2: Úryvek z internetového portálu JPL, elementy dráhy potenciálně nebezpečného asteroidu 136795 (1997 BQ) [41]

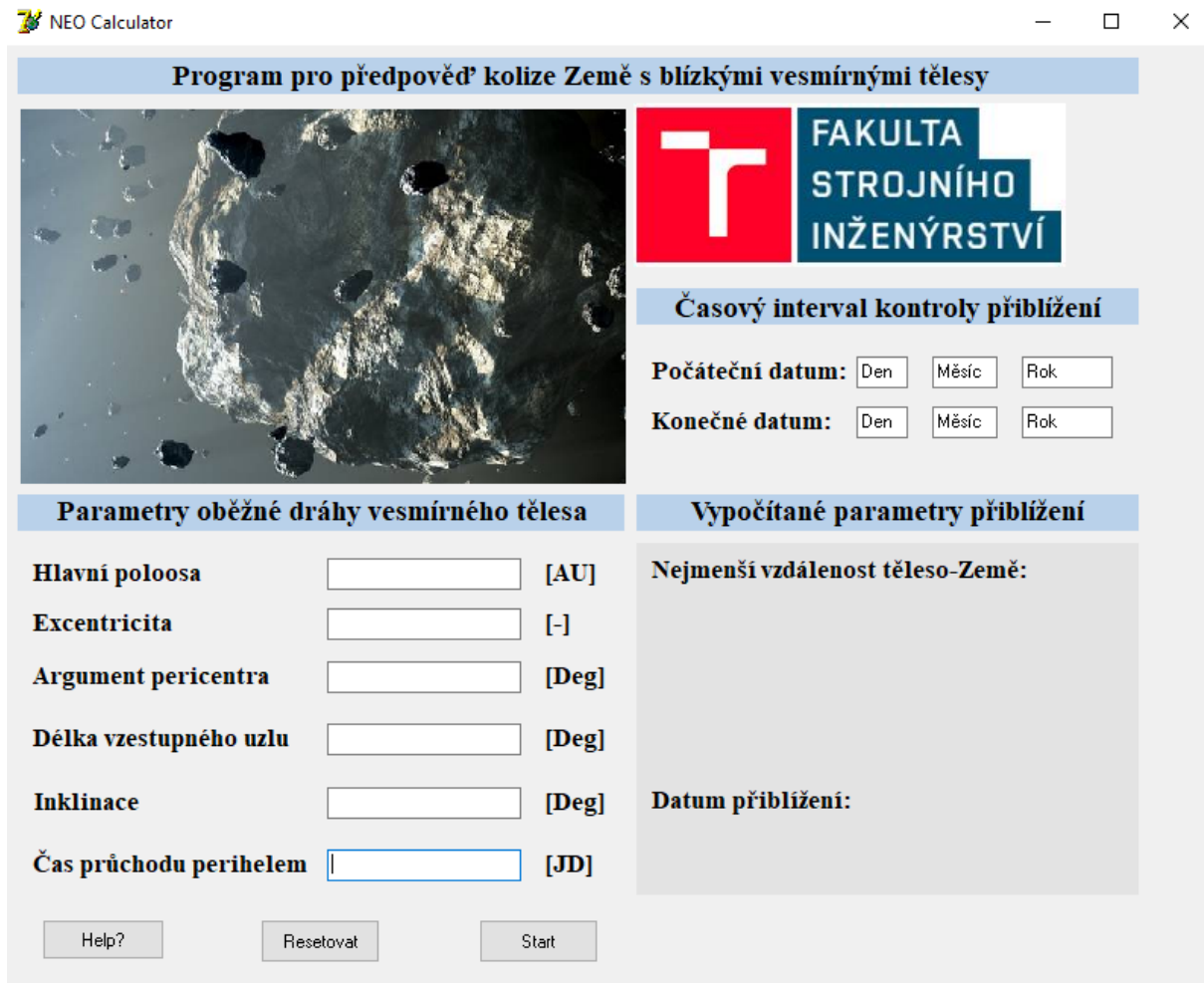
8.2. Programovací prostředí a jazyk

Za programovací jazyk programu byl zvolen jazyk Object Pascal, který je použit v programovacím prostředí Borland Delphi 7. Borland Delphi 7 je vývojové programovací prostředí pro tvorbu aplikací v MS Windows. Jeho velkou předností je grafické zpracování a schopnost jednoduše tvořit uživatelské rozhraní aplikace s automatickou generací zdrojového kódu.

9. Algoritmus výpočtu

V této kapitole bude popsána jak celková kostra algoritmu výpočtu vzdálenosti, tak každý prvek detailně zvlášť.

Pro správnou funkci modelu je potřeba získat pro program vstupní hodnoty, jimiž jsou elementy dráhy sledovaného vesmírného tělesa (hlavní poloosa oběžné dráhy a , excentricita oběžné dráhy e , sklon oběžné dráhy i , argument pericentra ω , délka vzestupného uzlu Ω a čas průchodu tělesa perihelem T_0 , viz kap. 3). Tyto údaje lze převzít například z [27]. Nedílnou součástí vstupních hodnot je také časový interval, ve kterém program bude největší přiblížení vyhodnocovat.

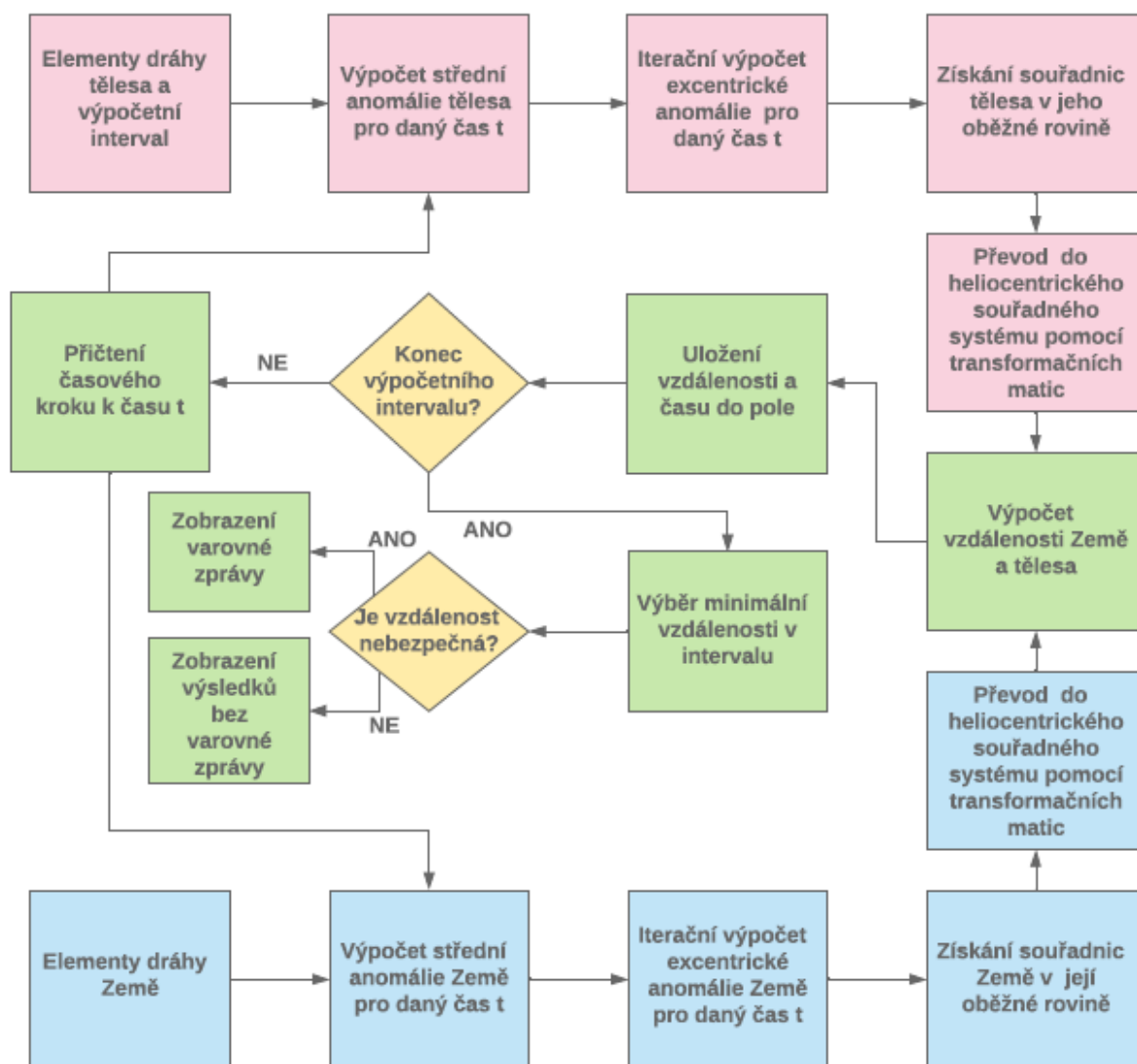


Obrázek 9.1: Grafické uživatelské rozhraní programu [32]

V samotném algoritmu běží dvě pomyslné výpočetní větve paralelně. Jedna větev počítá prostorové souřadnice Země v heliocentrickém souřadnicovém systému, druhá pak souřadnice vesmírného tělesa. Z elementů dráhy program vypočítá střední anomálii, která je dále použita v numerickém výpočtu excentrické anomálie pomocí Keplerovy rovnice. Pomocí získané excentrické anomálie je vypočítán vektor souřadnic v perifokálním souřadnicovém systému, který je pak transformován do heliocentrického.

Vzdálenost je pak dána pouhou velikostí úsečky určenou body, které jsou dány souřadnicemi vesmírného tělesa a souřadnicemi Země. Program poté uloží vypočtenou vzdálenost

a pokračuje v iteračním výpočtu, dokud nenarazí na konec uživatelem daného časového intervalu. Největší přiblížení Země a vesmírného tělesa je minimum ze všech uložených vzdáleností během iterací.



Obrázek 9.2: Vizualizace výpočetního algoritmu [33]

9.1. Počáteční hodnoty výpočtu a elementy dráhy Země

Jak již bylo řečeno v úvodu této kapitoly, hlavním vstupním parametrem jsou elementy dráhy sledovaného vesmírného tělesa. Pro správnost výpočtu by vstupní hodnoty měly být přesné alespoň na pět desetinných míst, menší počet desetinných míst silně ovlivňuje výsledek.

9.1. POČÁTEČNÍ HODNOTY VÝPOČTU A ELEMENTY DRÁHY ZEMĚ

Mimo vstupní hodnoty jsou ale v programu zakomponované některé další konstanty potřebné pro výpočet. Patří mezi ně gravitační parametr a elementy dráhy Země. Program uvažuje gravitační parametr Slunce dle [25] roven

$$GM_{Slunce} = 132712440018 \frac{km^3}{s^2}.$$

Elementy dráhy Země jsou v programu použity dle portálu NASA Space Science Data Coordinated Archive [26], tedy:

$$a = 1.00000011AU,$$

$$e = 0.01671022,$$

$$i = 0.00005^\circ,$$

$$\Omega = -11.26064^\circ,$$

$$\bar{\omega} = 102.94719^\circ,$$

$$L = 100.46435^\circ,$$

kde $\bar{\omega}$ značí délku perihelu a L značí střední délku, platnou pro $JD = 2451545.0$. Ve výpočtu transformačních matic je však potřeba argument perihelu, ten lze získat z definice délky perihelu vztahem

$$\omega = \bar{\omega} - \Omega, \quad (9.1)$$

$$\omega = 114.207783^\circ.$$

Střední délka L vyjadřuje úhel, jenž je součtem délky perihelu $\bar{\omega}$ a střední anomálie M tělesa. Střední anomálie je závislá na čase, proto je zásadní vědět, v který okamžik je střední délka definována. V tomto případě výše uvedená hodnota platí pro 2451545 juliánského data čili poledne 1. ledna 2000. Hodnota střední délky poslouží k určení času průchodu Země perihelem. Střední anomálie je definována dle sekce 5.1.1 a podle vztahu 5.2. Po vyjádření T_p z kombinace vztahů 9.2 a 9.3 vznikne cílený vztah pro výpočet času průchodu Země perihelem. Průchod perihelem je uváděn i v jiných zdrojích, nicméně vždy jen přibližně. Citlivost výpočtu na tento parametr je tak značná, že je nutné zjistit čas průchodu výpočtem, a to co nejpřesněji

$$L = \bar{\omega} + M \quad (9.2)$$

$$M = n(t - T_p) \quad (9.3)$$

$$T_p = \frac{nt + \bar{\omega} - L}{n} \quad (9.4)$$

Po dosazení hodnot

$$n = \frac{360^\circ}{365.242}$$

$$t = 2451545.0$$

je zjištěn průchod Země perihelem T_p na JD 2451547.519 čili 4. ledna 2000 v 0:27 UT.

Další pozoruhodností na elementech dráhy je nenulová hodnota sklonu dráhy i a délky vzestupného uzlu Ω . Sklon dráhy je dle kapitoly 3.1 definován jako úhel od roviny oběhu Země kolem Slunce, tudíž hodnota by měla být vždy nulová. Tento úhel se však v průběhu

let lehce mění vlivem řady rušivých vlivů, proto se uvádí hodnota i vztažená k ekliptice z dřívějších období. S nenulovým sklonem dráhy se objeví v rovině oběhu uzlová přímka (při $i = 0^\circ$ nedefinovaná), a tudíž lze odečíst i délku vzestupného uzlu Ω .

Po spuštění programu se uloží do proměnných výpočtu jak vstupní hodnoty zadané uživatelem, tak i gravitační parametr Slunce i elementy dráhy Země a inicializují se transformační matice $[T_{H/P}]$ složené z rotací kolem os o úhly i , ω a Ω v souladu s kapitolou 4.2.2.

9.2. Iterační cyklus Keplerovy rovnice

Výpočet začíná získáním hodnot excentrické a střední anomálie. Střední anomálie M je vypočtena pomocí vztahu 5.2. Pro výpočetní algoritmus je však prozatím perioda T oběhu tělesa i Země neznámá. V souladu s druhým Keplerovým zákonem (vztah 2.14) lze však periodu oběhu snadno vyjádřit jako funkci hlavní poloosy tělesa

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\mu}}, \quad (9.5)$$

$$n = \frac{2\pi}{T}; n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (9.6)$$

Hodnota střední anomálie je vypočtena pro čas t , který značí počátek časového intervalu zadaného uživatelem. Tato hodnota je poté využita v samotném numerickém výpočtu Keplerovy rovnice. V kapitole 5.2 jsou uvedeny různé způsoby, jak lze numericky tuto rovnici řešit. Byla vybrána metoda prosté iterace, která je pro účely tohoto programu dostačující a zajišťuje rychlou a efektivní konvergenci k výsledku.

Za počáteční odhad v prvním iteračním cyklu je zvolena právě hodnota střední anomálie. Iterační výpočet pokračuje, dokud rozdíl mezi dvěma posledními hodnotami není dostačující. Za dostačující chybu byl stanoven rozdíl $|E_{i+1} - E_i| = 10^{-4}$

$$E_0 = M,$$

$$E_{i+1} = M + e \sin E_i.$$

9.3. Výpočet a transformace souřadnic

Po výpočtu excentrické anomálie lze podle obr. 5.1 a dle vztahů 5.3 a 5.4 získat souřadnice blízkého vesmírného tělesa, respektive v druhé výpočetní větvi souřadnice Země

$$x_P = a \cos E - ae,$$

$$y_P = b \sin E,$$

$$z_P = 0.$$

Tyto získané souřadnice platí pro perifokální souřadnicový systém s osou x a y v rovině oběhu vesmírného tělesa, což je důvodem, proč je souřadnice z nulová. Pro porovnání vzdálenosti dvou těles je třeba je převést do jednoho souřadnicového systému. Obecný perifokální souřadný systém blízkého vesmírného tělesa je skloněn vůči ekliptice o úhel i

9.4. VZDÁLENOSTI ZEMĚ–VESMÍRNÉ TĚLESO A VYPSÁNÍ VÝSLEDKŮ

a otočen o úhly Ω a ω . Proto je třeba vektor souřadnic vynásobit transformační maticí $[T_{H/P}]$ dle vztahu 4.11.

$$\begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix} = [T_{H/P}] \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Stojí za poznámku, že z-ová souřadnice Země se touto transformací příliš nezmění a zůstane v podstatě rovna nule kvůli nulovému (téměř nulovému) sklonu dráhy vůči rovině ekliptiky.

9.4. Vzdálenosti Země–vesmírné těleso a vypsání výsledků

Poté, co má program k dispozici souřadnice v tělesa a souřadnice Země v heliocentrickém souřadnicovém systému, lze jednoduše vypočítat délku úsečky d_i mezi dvěma body. Těmito body jsou bod, kde se nachází v daném čase t Země a blízké vesmírné těleso.

$$d_i = \sqrt{(X_{HZ} - X_{HNEO})^2 + (Y_{HZ} - Y_{HNEO})^2 + (Z_{HZ} - Z_{HNEO})^2} \quad (9.8)$$

kde X_{HZ}, Y_{HZ}, Z_{HZ} jsou souřadnice Země a $X_{HNEO}, Y_{HNEO}, Z_{HNEO}$ jsou souřadnice blízkého vesmírného tělesa v čase t .

Vzdálenost se poté uloží do pole vzdáleností a čas t (příslušný den v JD) se uloží do pole všech časů. Nad těmito poli lze přemýšlet jako nad tabulkou hodnot, kde se ke každému dni přiřadí vypočítaná vzdálenost.

Jako další nastane krok, kdy program zkontroluje, zda čas t , pro který celý výpočet probíhal, je koncem intervalu zadaného uživatelem. Pokud ne, pak přičte k času časový krok. Časový krok je definován jako jeden den. S menším časovým krokem by výpočet nabyl na náročnosti a prováděl by nadbytek kroků. Pro požadovanou přesnost postačuje jednodenní krok. Dny se uvádějí celočíselně (v JD), tudíž každá vzdálenost se počítá pro daný den v poledne. Po přičtení časového kroku se celý proces opakuje od sekce 9.2.

Pokud program detekuje konec uživatelem zadaného časového intervalu, ukončí výpočetní cyklus a z pole vzdáleností vybere tu nejmenší. K nejmenší vzdálenosti zároveň přiřadí čas, kdy tato vzdálenost nastala.

Příklad modelu s mezivýpočty pro přehlednost je uveden pro asteroid 2020 JX1 (obr. 9.3), který má dle Jet Propulsion Laboratory, Center for NEO Studies proletět kolem Země 29. června 2020 ve vzdálenosti 0.0085 AU, neboli 3.31 LD (LD je jednotka vzdálenosti používaná na menší přiblížení, anglicky *Lunar Distance*, rovná se střední vzdálenosti Země a Měsíce, tedy asi 384 000 km).

Object	Close-Approach (CA) Date	CA Distance Nominal (LD au)	CA Distance Minimum (LD au)
(2020 JX1) ↗	2020-Jun-29 04:10 ± 00:07	3.31 0.00850	3.30 0.00849

Obrázek 9.3: Přiblížení asteroidu 2020 JX1 dle [40]

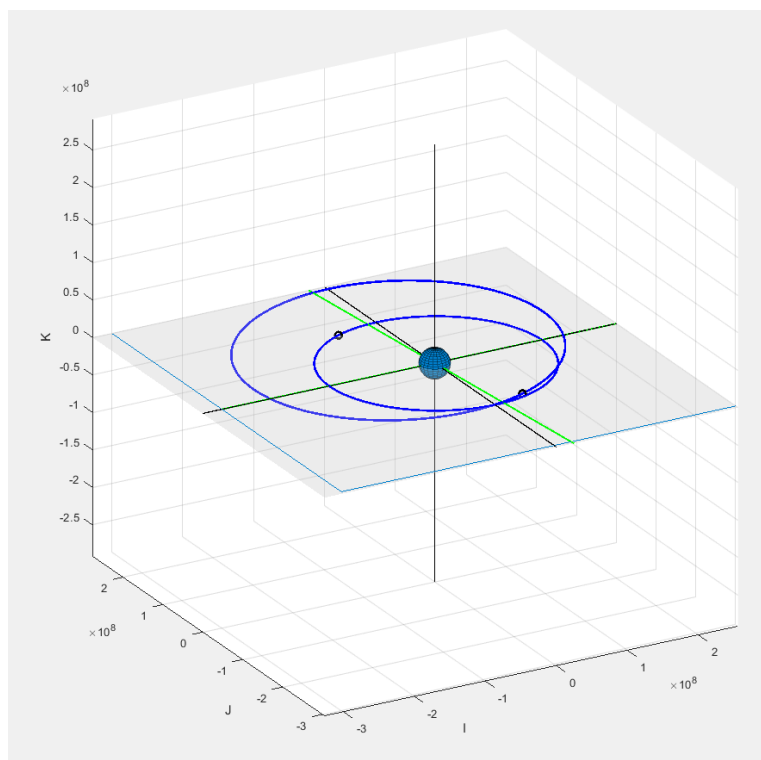
Dle portálu JPL má těleso 2020 JX1 elementy dráhy vypsané v tab. 9.1. Země má vstupní elementy dráhy dle kapitoly 9.1 a rovněž byly pro srovnání zaneseny do tab. 9.1. Tyto hodnoty budou figurovat jakožto vstupní parametry výpočtu společně s časovým

intervalem začátku a konce sledovaného období. Pro tento příklad bude vybrán časový interval 24.6. 2020–30.6. 2020.

Tabulka 9.1: Vstupní parametry – Elementy dráhy 2020 JX1 a Země

	2020 JX1[27]	Země[26]
a	1.42398632 AU	1.00000011
e	0.29350926	0.01671022
i	3.54842173°	0.00005°
ω	12.81090780°	114.207783°
Ω	274.58101451°	-11.26064°
T_P	2459038.681 JD	2451547.485 JD

Pro představu o oběžné dráze blízkého vesmírného tělesa 2020 JX1 je na obr. 9.2 uveden přibližný tvar dráhy Země (vnitřní, kruhová dráha) a 2020 JX1 (vnější, eliptická dráha).



Obrázek 9.4: Znázornění oběžných drah Země (vnitřní oběžná dráha) a 2020 JX1 (vnější oběžná dráha) kolem Slunce (modré centrální těleso) [38]

9.4. VZDÁLENOSTI ZEMĚ–VESMÍRNÉ TĚLESO A VYPSÁNÍ VÝSLEDKŮ

Po zahájení výpočtu program inicializuje následující hodnoty:

Tabulka 9.2: Programem inicializované hodnoty

--	2020 JX1	Země
Střední denní pohyb n [rad/den]	0.0101	0.0172
Transformační matice	$\begin{bmatrix} 0.298 & 0.952 & -0.06 \\ -0.954 & 0.299 & 0.005 \\ 0.014 & 0.060 & 0.998 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.224 & -0.975 & 0 \\ 0.975 & -0.224 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Počátek výpočetního intervalu	JD 2459025 (24. 6. 2020)	
Konec výpočetního intervalu	JD 2459031 (30. 6. 2020)	
Střední anomálie pro začátek intervalu [rad]	-0.169	128.577
Excentrická anomálie pro začátek intervalu [rad]	-0.238	128.581

Hodnoty v tab. 9.2 jsou uvedeny s přesností na tři desetinná místa. Ve výpočtu samotném jsou však použity hodnoty o několik řádů přesnější, neboť chyba, kterou způsobí nepřesnost například úhlu, jako je excentrická anomálie, může mít v astronomických vzdálenostech velký dopad na výsledek. Hodnoty excentrické a střední anomálie jsou uvedeny pouze pro první krok výpočtu, tedy počátek výpočetního intervalu. Tyto hodnoty se však přepočítávají pro každý krok zvlášť, jelikož jsou s časem proměnné. Je poznamenáníhodné, že hodnota excentrické anomálie Země a střední anomálie Země se příliš neliší. Tato skutečnost vyplývá přímo z definice těchto dvou veličin a je způsobena (v souladu s obr. 5.2) tvarem oběžné dráhy Země, která je téměř kruhová ($e_Z = 0.0167$).

Program dále vypočítá pro každý krok výpočetního intervalu souřadnice vesmírného tělesa $X_{PNEO}, Y_{PNEO}, Z_{PNEO}$ a pomocí transformační matice je převede do heliocentrického souřadnicového systému na souřadnice $X_{HNEO}, Y_{HNEO}, Z_{HNEO}$. To stejné provede se souřadnicemi Země v její perifokální souřadnicové soustavě X_{PZ}, Y_{PZ}, Z_{PZ} , transformované na X_{HZ}, Y_{HZ}, Z_{HZ} (index P = perifokální soustava, index H = heliocentrická soustava). Vzdálenosti mezi těmito body jsou znázorněny v tab. 9.3.

Tabulka 9.3: Programem vypočítané pole vzdáleností

Čas t [JD]	2459025	2459026	2459027	2459028	2459029	2459030	2459031
Vzdálenost [AU]	0.01627	0.01396	0.01188	0.01017	0.00906	0.00877	0.00939

Program nyní vybere z pole uložených vzdáleností tu nejmenší a zobrazí k ní příslušný přiřazený čas. Z tabulky 9.3 je vidno, že asteroid 2020 JX1 se skutečně přiblíží dne 2459030 JD, tedy 29. června 2020 na 0.00877 AU. Tyto výsledky vypíše uživateli. Pro přehlednost a lepší pochopitelnost vzdáleností program převede a vypíše vzdálenosti i v kilometrech a LD (obr. 9.4).

Při vypsání výsledků program použije vstupní hodnoty a vypočítá z nich vzdálenost od Slunce v perihelu a vzdálenost od Slunce v afelu. Za pomoci těchto parametrů zařadí asteroid do příslušné kategorie dle tvaru oběžné dráhy vzhledem k Zemi (viz kapitola 7.2.1)

Program pro předpověď kolize Země s blízkými vesmírnými tělesy

Časový interval kontroly přiblížení

Počáteční datum: 25 6 2020
Konečné datum: 31 6 2020

Parametry oběžné dráhy vesmírného tělesa

Hlavní poloosa: 1.42398632616751 [AU]
Excentricita: 0.293509258409261 [-]
Argument pericentra: 12.8109078011498 [Deg]
Délka vzestupného uzlu: 274.581014517545 [Deg]
Inklinace: 3.54842173586773 [Deg]
Čas průchodu perihelem: 2459038.68129367 [JD]

Vypočítané parametry přiblížení

Nejmenší vzdálenost těleso-Země:
0.008758 AU
3.408353 LD
1310178 km

Datum přiblížení:
29. 6. 2020

Help? Resetovat Start

Obrázek 9.5: Výsledek největšího přiblížení dle programu NeoCalc [32]

9.5. Blízká vesmírná tělesa ohrožující Zemi

Není výjimkou, že některá tělesa se přiblíží Zemi na nebezpečnou vzdálenost. Pokud program takové těleso detekuje, pak zobrazí varovnou zprávu. Potenciálně nebezpečná blízká vesmírná tělesa jsou definována v kapitole 7.2.3, avšak při takovéto kategorizaci je brána v úvahu nejen nejmenší vzdálenost, na kterou se blízké vesmírné těleso přiblíží, ale také magnituda čili velikost asteroidu. Vzhledem k tomu, že tento program magnitudu H neuvažuje, byly definovány vlastní stupně nebezpečného přiblížení.

I. stupeň nebezpečí nastane, pokud program detekuje vzdálenost Země–vesmírné těleso menší nebo rovnu vzdálenosti 1 LD, tedy vzdálenosti Země a Měsíce (384 400 km).

9.5. BLÍZKÁ VESMÍRNÁ TĚLESA OHROŽUJÍCÍ ZEMI

Za II. stupeň nebezpečné vzdálenosti je považována vzdálenost od Země, na které jsou umístěny geostacionární satelity, tedy výška geosynchronní oběžné dráhy (36 000 km) [28] [1].

Za III. stupeň nebezpečí program považuje vzdálenost, kdy vesmírné těleso pravděpodobně koliduje se Zemí (vzhledem k neuvažované gravitační síle Země a výpočetní chybě), tato vzdálenost byla stanovena na 1000 km.

10. Diskuse výsledků programu

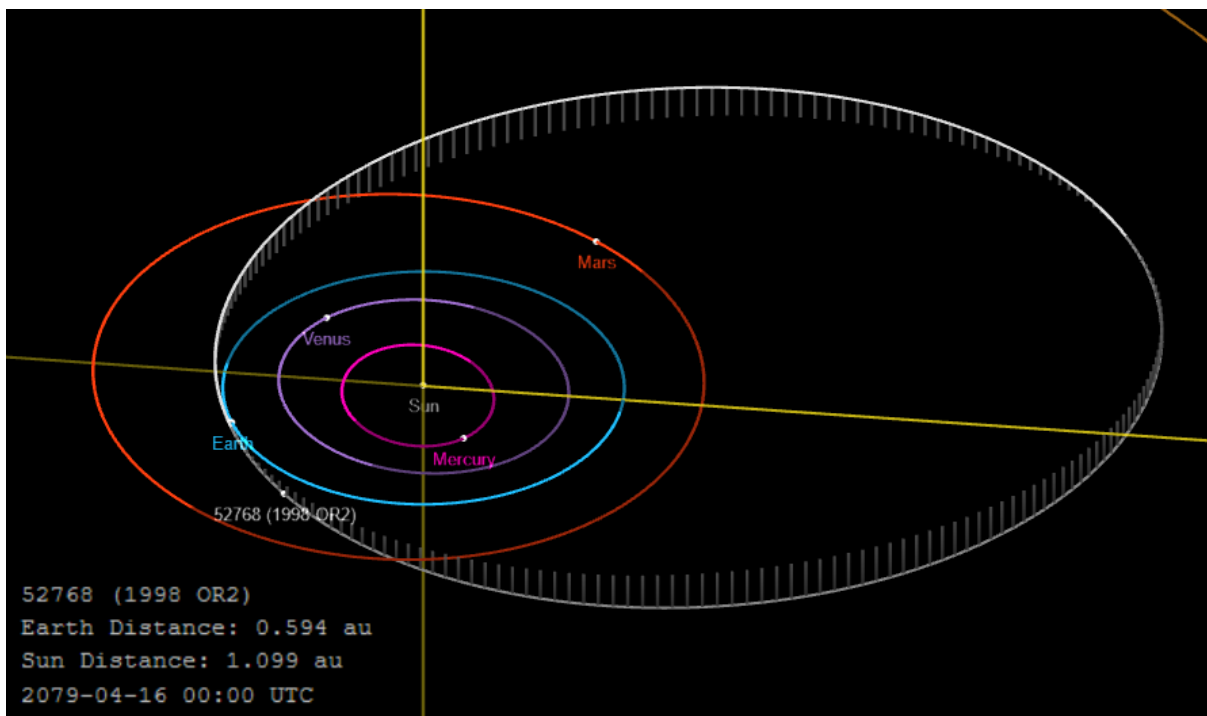
Aby byla ověřena správnost výsledků programu a dostatečnost odchylky výpočtu od správného řešení (za které se považuje vzdálenost a datum přiblížení uváděné na portálu Jet Propulsion Laboratory CNEO [27]), je vhodné porovnat výsledky u několika nahodile vybraných blízkých vesmírných těles. Vesmírná tělesa byla vybrána tak, aby v dostatečném zastoupení tvořila několik kategorií. Šlo zejména o ověření výsledků při velmi blízkém přiblížení (<1 LD), při středním přiblížení (>10 LD) a relativně vzdálená tělesa (okolo 0.05 AU). Dále byla vybrána tělesa z blízké budoucnosti, blízké minulosti, vzdálené budoucnosti a vzdálené minulosti.

Tabulka 10.1 uvádí seznam vybraných blízkých vesmírných těles a znázorňuje výslednou vzdálenost daného blízkého vesmírného tělesa od Země vypočítanou programem NEOCalc v porovnání se vzdáleností uváděnou JPL CNEO. V tabulce je zaneseno i datum přiblížení a odchylka výpočtu od JPL.

K prozkoumání pohybu asteroidů a podrobností ohledně jejich pohybu v čase je použit modul *Orbit viewer* (obr. 10.1) zobrazující polohu planet a blízkých vesmírných těles v Sluneční soustavě dostupný na internetových stránkách Jet Propulsion Laboratory. Tento modul bere v úvahu pohyb ve Sluneční soustavě pouze vlivem gravitační síly Slunce a daného tělesa. Nezahrnuje tedy žádné rušivé vlivy ani interakce gravitačních sil mezi tělesy na oběžných dráhách.

Datum přiblížení program vždy určil v souladu s datem, které uvádí JPL, až na dvě výjimky – asteroid *2019 LB1* a *153814 (2001 WN5)*. U asteroidu *2019 LB1* bylo po prozkoumání zjištěno, že v časovém intervalu od 8. 6. 2020 01:00 UT do 23. 6. 2020 00:00 UT si asteroid drží poměrně konstantní vzdálenost 0.079 AU, což je dáno vzájemným tvarem oběžné dráhy Země a *2019 LB1*. Tento časový interval má minimum vzdálenosti právě 16. 6. 2020, avšak vzhledem k minimálnímu rozdílu hodnot přiblížení v různých dnech mohl program NEOCalc rozpoznat minimum jiný den. Ve výpočtu přiblížení asteroidu *153814 (2001 WN5)* došlo též k časové chybě jednoho dne. Tato chyba je pravděpodobně způsobena tím, že asteroid *153814 (2001 WN5)* má dle JPL projít místem nejbližší Zemi 26.6. 2028 05:23 UT. Program NEOCalc však počítá s celočíselným datem juliánského systému, tudíž každá vypočítaná hodnota je platná pro poledne daného dne. Po prozkoumání pro poledne 25.6. 2028 (datum, které vypočítal program NEOCalc) modulem *Orbit viewer* byla zjištěna v daný čas vzdálenost 0.00517 AU, což už se tolik neliší od výsledku programu, čili program počítal správně, ale pro takovéto případy by bylo potřeba zjemnit časový krok na méně než jeden den. Pozoruhodné je, že modul *Orbit viewer*, který zanedbává rušivé vlivy a gravitační interakci těles, ukazuje pro 26. 6. 2028 05:23 UT vzdálenost od Země 0.00674 AU, tedy odlišnou od původního výsledku JPL. Tato skutečnost naznačuje, že těleso *153814 (2001 WN5)* změnilo vlivem vnější síly (gravitace jiných těles, průlet kolem jiných planet apod.) své elementy dráhy, což není tak překvapivé vzhledem ke vzdálenému datu přiblížení k Zemi.

Další blízké vesmírné těleso, které je hodno komentáře, je *52768 (1998OR2)*, které je v tabulce hned dvakrát. Poprvé během roku 2020, kdy přiblížení program NEOCalc počítal správně, a podruhé po několika obězích po oběžných dráhách při druhém setkání tělesa a Země v roce 2079. Program NEOCalc ani modul *Orbit viewer* toto přiblížení nedetekoval, nicméně shodují se v chybných hodnotách (obr. 10.1), což značí, že byl asteroid během svého oběhu vystaven vnějšími silami a změnil parametry své dráhy.



Obrázek 10.1: Poloha a vzdálenost asteroidu 52768 (1998 OR2) v roce 2079 dle modulu Orbit viewer [42]

Podobně je na tom blízké vesmírné těleso *458732 (2011MD5)*, které patří mezi přiblížení z minulosti. Zde opět program NEOCalc nedetekoval přiblížení ve stejném datu (nejmenší vzdálenost určena na datum 22. 10. 1917) ani řádově na podobnou vzdálenost. Po prozkoumání pomocí modulu Orbit viewer byla opět tato chyba ověřena. Tento jev je dán tím, že elementy dráhy tělesa *458732 (2011MD5)* jsou brány z portálu JPL, kde jsou uvedeny aktuální elementy dráhy pro současnost. Pravděpodobně nastala změna elementů mezi současností a rokem 1917 vlivem některých vnějších vlivů. Z dat asteroidu *2020 KC5* v posledním řádku tabulky 10.1 je ale vidno, že pokud nenastanou žádné změny dráhy, pak program NEOCalc spolehlivě počítá i přiblížení, která nastala v minulosti.

Právě změna elementů dráhy blízkých vesmírných těles je důvodem, proč je nutné vesmírná tělesa stále sledovat a aktualizovat data o jejich poloze a tvaru dráhy, aby bylo možno je správně kategorizovat nebo například označit za potenciálně nebezpečná pro Zemi.

Tabulka 10.1: Souhrn výsledků vybraných vesmírných těles

Vesmírné těleso	Výsledek přiblížení programu NEOCalc	Výsledek přiblížení JPL [27]	Datum přiblížení	Odchylka NEOCalc a JPL
2020 KP6	3.68 LD 0.00947 AU	3.59 LD 0.00924 AU	16. 6. 2020	$2.26 \cdot 10^{-4}$ AU
2020 JX1	3.40 0.00876 AU	3.31 LD 0.00850 AU	29. 6. 2020	$2.58 \cdot 10^{-4}$ AU
2011 ES4	0.60 LD 0.00155 AU	0.32 LD 0.00081 AU	1. 9. 2020	$7.40 \cdot 10^{-4}$ AU
2017 WJ16	4.90 LD 0.01261 AU	4.95 LD 0.01271 AU	23. 11. 2020	$1.11 \cdot 10^{-4}$ AU
2011 CL50	3.02 LD 0.00776 AU	3.07 LD 0.00788 AU	24. 12. 2020	$1.25 \cdot 10^{-4}$ AU
52768 (1998OR2)	16.49 LD 0.04238 AU	16.36 LD 0.04205 AU	29. 4. 2020	$3.27 \cdot 10^{-4}$ AU
52768 (1998OR2)		4.61 LD 0.01185 AU	16. 4. 2079	
153814 (2001WN5)	1.9 LD 0.00488 AU	0.65 LD 0.00166 AU	25.6. 2028	$3.24 \cdot 10^{-4}$ AU
458732 (2011MD5)	50.46 LD 0.12968 AU	0.91 LD 0.00234 AU	17. 9. 1918	0.13 AU
2019 LB1	30.43 LD 0.07821 AU	30.53 LD 0.07852 AU	15. 6. 2020	$3.2 \cdot 10^{-4}$ AU
2020 HV1	48.37 LD 0.12431 AU	48.43 LD 0.12445 AU	16. 6. 2020	$1.39 \cdot 10^{-4}$ AU
2016 NN15	9.61 LD 0.02471 AU	9.59 LD 0.02465 AU	28. 6. 2020	$5.7 \cdot 10^{-6}$ AU
2020 KF5	0.66 LD 0.00169 AU	0.64 LD 0.00165 AU	28. 5. 2020	$4.1 \cdot 10^{-5}$ AU
2020 KC5	1.25 LD 0.00322 AU	0.96 LD 0.00247 AU	29. 1. 1900	$7.54 \cdot 10^{-4}$ AU

11. Závěr

Cílem této práce bylo shrnutí základních poznatků orbitální mechaniky a jejich následná aplikace na výpočetní program, jenž bude s dostatečnou přesností určovat vzdálenost nebeských těles (blízkých vesmírných těles).

Z poměrně obsírného tématu orbitální mechaniky byly vybrány kapitoly zaměřující se na pasivní pohyb nebeských těles. Důraz byl kladen zejména na poznatky využitě v algoritmu výpočetního programu. Teoretická část práce se tedy věnuje především eliptickým oběžným dráhám a poloze tělesa v čase a opomíjí například rychlost tělesa v čase nebo energii nebeských těles.

Program pro předpověď kolize Země s blízkými vesmírnými tělesy vznikl v programovacím prostředí Borland Delphi 7 v jazyce Pascal. Umí s dostatečnou přesností počítat nejmenší vzdálenost, na kterou se vybrané vesmírné těleso přiblíží k Zemi, pokud uživatel specifikuje parametry tělesa pomocí elementů oběžné dráhy. Výpočetní program je omezen na eliptické dráhy, uvažuje pouze centrální gravitační pole Slunce a naopak zanedbává vzájemnou gravitační interakci mezi tělesy obíhajícími kolem Slunce (např. gravitační sílu tělesu blízkých planet) a jiné rušivé vlivy, které mají reálně vliv na pohyb vesmírného tělesa v dlouhodobém měřítku. Právě z tohoto důvodu by nebylo vhodné na tento program spoléhat při predikci vzdálenosti těles od Země v dlouhodobém časovém intervalu, neboť blízká vesmírná tělesa vlivem různých faktorů v čase mění své elementy dráhy.

Tímto směrem je možný další rozvoj programu. Program by v budoucích verzích mohl uvažovat rychlost a energii vesmírných těles, vypočítávat jejich vzájemnou interakci s planetami a jinými kosmickými tělesy a příslušně upravovat elementy dráhy a rychlost tělesa.

Seznam literatury a použitých zdrojů

- [1] DANĚK, V.; *Mechanika kosmického letu* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2018. ISBN 978-80-7204-984-4.
- [2] CURTIS, H. D.; *Orbital mechanics for engineering students, Fourth edition* [online] Amsterdam: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2020 [cit. 2020-06-26]. ISBN 978-0-08-102133-0
- [3] BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E.; *Fundamentals of astrodynamics* [online] New York: Courier Dover Publications, 2020 [cit. 2020-06-26]. ISBN 0-486-60061-0. Dostupné z:
https://books.google.cz/books?hl=cs&lr=&id=UtJK8cetq-GkC&oi=fnd&pg=PR5&ots=WDgs_cF1n4&sig=LpNMzPEvGcKAHExfv_iO2dG-zWYA&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false
- [4] CHOBOTOV, V. A.; *Orbital mechanics. 3rd ed.* [online] Reston: AIAA American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002 [cit. 2020-06-26], 460 s. CD ROM. ISBN 1563475375. Dostupné z:
https://primo.lib.vutbr.cz/permalink/f/1roshr/420BUT_Aleph000043924
- [5] JANÍK, J.; MIKULÁŠEK, Z.; *Obecná astronomie* [online] skripta PřF MU, 2015 [cit. 2020-06-26], verze 1.2.. Dostupné z:
<https://astro.physics.muni.cz/download/documents/skripta/F3170.pdf>
- [6] MOEBS, W.; LING, S. L.; SANNY J.; *University Physics Volume 1* [online] Houston, Texas, 16. 9. 2016 [cit. 2020-06-26], OpenStax. Dostupné z:
<https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/13-1-newtons-law-of-universal-gravitation>
- [7] VALLADO, D. A.; *Fundamentals of astrodynamics and applications* [online] pringer Science & Business Media, 2001 [cit. 2020-06-26]. ISBN 0-7923-6903-3. Dostupné z:
https://books.google.cz/books?hl=cs&lr=&id=PJLIWzMB-KjkC&oi=fnd&pg=PR17&dq=fundamentals+of+astrodynamics&ots=V3qU2vrauo&sig=eDqqN8fOtZEXOZccfcsY5a6O65c&redir_esc=y#v=onepage&q=fundamentals%20of%20astrodynamics&f=false
- [8] ŠIDLOCHOVSKÝ, M.; *Nebeská mechanika* [online] skripta pro MMK UK, [cit. 2020-06-26]. Dostupné z:
https://astro.physics.muni.cz/download/documents/textbooks/sidlichovsky-nebeska_mechanika.pdf
- [9] ČERMÁK, L.; HLAVIČKA, R.; *Numerické metody. Vydání třetí* Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o, 2016, ISBN 978-80-214-5437-8.
- [10] *Převod Juliánského data na občanské - Nebeská mechanika* [online], 2001-2020 , [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <http://nebmech.astronomy.cz/>

SEZNAM LITERATURY A POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [11] *NASA Solar System Exploration - Orbits and Kepler's Laws* [online], 26. 7. 2008 , [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://solarsystem.nasa.gov/resources/310/orbits-and-keplers-laws/>
- [12] *Aldebaran - Keplerovy zákony* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: https://www.aldebaran.cz/studium/fl/pdfs/kepler_zakony.pdf
- [13] *Internetová učebnice fyziky Realisticky - Keplerovy zákony* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <http://www.realisticky.cz/ucebnice/02%20Fyzika%20S%C5%A0/01%20Mechanika/06%20Gravita%C4%8Dn%C3%AD%20pole/09%20Keplerovy%20z%C3%A1kony.pdf>
- [14] *NASA Science Spaceplace - Planet distances* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://spaceplace.nasa.gov/review/dr-marc-solar-system/planet-distances.html>
- [15] FOWLER M. *Deriving kepler's laws* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <http://galileo.phys.virginia.edu/classes/152.mf1i.spring02/KeplersLaws.htm>
- [16] *Encyclopædia Britannica - Newtons law of gravity* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/gravity-physics/Newtons-law-of-gravity>
- [17] *NASA, Solar System exploration, Planetary Orbits* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://solarsystem.nasa.gov/basics/chapter5-1/>
<https://solarsystem.nasa.gov/basics/chapter5-1/>
- [18] *Cosmos - Encyclopedia of Astronomy - Orbital Inclination* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/O/Orbital+Inclination>
- [19] *NASA, Space Science Coordinated Archive - Jupiter Fact Sheet* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/jupiterfact.html>
- [20] *NASA, Space Science Coordinated Archive - Venus Fact Sheet* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/venusfact.html>
- [21] *NASA, Space Science Coordinated Archive - Mars Fact Sheet* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/marsfact.html>
- [22] *NASA Jet Propulsion Laboratory, Centrum for Near-Earth Object Studies - NEO Groups* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neo_groups.html
- [23] *ESA - Near-Earth Objects Segment* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: https://www.esa.int/Safety_Security/Near-Earth_Objects_-_NEO_Segment
- [24] *NASA Jet Propulsion Laboratory - Keeping an Eye on Space Rocks* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://www.jpl.nasa.gov/multimedia/neo/spaceRocks.html>

SEZNAM LITERATURY A POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [25] *NASA Jet Propulsion Laboratory, Solar System Dynamics - Astrodynamical Constants* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z:
<https://ssd.jpl.nasa.gov/?constants>
- [26] *NASA, Space Science Coordinated Archive - Earth Fact Sheet* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z:
<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>
- [27] *NASA Jet Propulsion Laboratory, Centrum for Near-Earth Object Studies - Close Approach Data* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z:
<https://cneos.jpl.nasa.gov/ca/>
- [28] *ESA - The Geostationary Orbit* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z:
https://www.esa.int/Education/3._The_geostationary_orbit
- [29] *Livescience - 10 Biggest Impact Craters on Earth* [online], [cit. 2020-06-26].
Dostupné z:
<https://www.livescience.com/45126-biggest-impact-crater-earth-countdown.html>
- [30] VANNEVIK, Anders E. *MathWorks, Matlab - Classical Orbital Elements GUI* [online], 2020 [cit. 2020-06-26], MATLAB Central File Exchange]. Dostupné z:
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19317-classical-orbital-elements-gui>

Seznam použitých ilustrací

- [31] Vlastní tvorba v programu *Geogebra*, 2020
- [32] Vlastní tvorba v programu *Borland Delphi 7*, 2020
- [33] Vlastní tvorba v internetovém rozhraní <https://www.lucidchart.com>, 2020
- [34] Ilustrace přejaty z literatury [1]
- [35] Druhy oběžných drah v závislosti na excentricitě [online] Dostupné z: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/89/OrbitalEccentricityDemo.svg/1200px-OrbitalEccentricityDemo.svg.png>
- [36] Druhý Keplerův zákon [online] Dostupné z: http://galileo.phys.virginia.edu/classes/152.mf1i.spring02/KeplersLaws_files/image001.gif
- [37] JANÍK Jan a MIKULÁŠEK Zdeněk, *Obecná astronomie* [online] skripta PŘF MU, 2015 [cit. 2020-06-26], verze 1.2.. Dostupné z: <https://astro.physics.muni.cz/download/documents/skripta/F3170.pdf>
- [38] VANNEVIK, Anders E. *MathWorks, Matlab - Classical Orbital Elements GUI* [online], 2020 [cit. 2020-06-26], MATLAB Central File Exchange]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19317-classical-orbital-elements-gui>
- [39] *NASA Jet Propulsion Laboratory, Centrum for Near-Earth Object Studies - NEO Groups* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neo_groups.html
- [40] *NASA Jet Propulsion Laboratory, Centrum for Near-Earth Object Studies - Close Approach Data* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://cneos.jpl.nasa.gov/ca/>
- [41] *NASA Jet Propulsion Laboratory, Solar System Dynamics - 136795 (1997 BQ) orbital elements* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=136795>
- [42] *NASA Jet Propulsion Laboratory, Solar System Dynamics - modul Orbit Viewer* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: <https://ssd.jpl.nasa.gov/>
- [43] *Úvodní ilustrace v uživatelském rozhraní programu* [online], [cit. 2020-06-26]. Dostupné z: https://g.denik.cz/1/72/asteroid-ilustracni-foto-1-clone_denik-630-16x9.jpg