

**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ENERGETICKÝ ÚSTAV**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
ENERGY INSTITUTE

# **TANČÍCÍ KAPALINA - VLASTNÍ TVARY KMITU KAPALIN**

DANCING LIQUID - VIBRATION EIGENMODE SHAPES OF LIQUIDS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**  
BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**  
AUTHOR

**ONDŘEJ URBAN**

**VEDOUCÍ PRÁCE**  
SUPERVISOR

doc. Ing. PAVEL RUDOLF, Ph.D.

BRNO 2015



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2014/15

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Ondřej Urban

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Základy strojního inženýrství (2341R006)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin**

v anglickém jazyce:

#### **Dancing liquid - vibration eigenmode shapes of liquids**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Odezvou kapaliny v otevřené nádobě vystavené akustickému buzení je změna tvaru hladiny na příslušném tvaru kmitu. Změna tvaru hladiny se projevuje vlněním, případně i vznikem pramínek oddělujících se z kapaliny. Jev lze pozorovat např. u tibetských mís nebo kapaliny umístěné v blízkosti reproduktorů.

Cíle bakalářské práce:

Cílem je návrh zařízení (učební pomůcky), které umožní vizualizaci vlastních tvarů kmitu kapalin. Pokusy budou provedeny pro různé kapaliny a zaznamenány pomocí fotoaparátu a kamery. Dále by měly být uvedeny souvislosti daného jevu s technickými aplikacemi (fluid structure interaction, atomizace kapalin, atd.)

Seznam odborné literatury:

- [1] Bishop, R.E.D.: Kmitání, SNTL, 1978
- [2] Jung, S., Kim, E., Shelley, M.J., Zhang, J.: Surface waves on a semitoroidal water ring, Physics of Fluids, 19, 2007
- [3] James, A.J., Vukasinovic, B., Smith, M.K., Glezer, A.: Vibration induced drop atomization and bursting, Journal of Fluid Mechanics, 476, 2003

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/15.

V Brně, dne 21.11.2014



*J. Pospíšil*

---

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.  
Ředitel ústavu

*J. Katolický*

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
Děkan

## **Anotace**

Tato bakalářská práce se zabývá jevy spojenými s vertikálně kmitající vrstvou kapaliny, především Faradayovými vlnami a atomizací. Hluběji se věnuje rozboru lineárního matematického modelu pro vertikálně oscilující ideální kapalinu od Benjamina a Ursella z roku 1954. Také uvádí, kde se s těmito a dalšími jevy spojenými s kmitáním tekutin setkáváme v praxi. Dále jsou zde uvedeny výsledky experimentů, jejichž cílem bylo s využitím lineárního modelu najít některé vlastní tvary a také zdokumentovat některé jejich vlastnosti. Poslední část je zaměřena na návrh experimentálního zařízení, které má sloužit pro vizualizaci vlastních tvarů kmitu kapalin.

## **Klíčová slova**

Faradayovy vlny, atomizace, fluid-structure interaction, inhalátory, nebulizátory, zvlhčovače vzduchu, vlastní tvary

## **Annotation**

This bachelor's thesis deals with phenomena connected with vertically oscillating liquid layer, particularly with Faraday waves and liquid atomization. More in detail it deals with the linear mathematical model for vertically oscillating inviscid and incompressible liquids by Benjamin & Ursell (1954). It also presents the appearance of these and other phenomena connected with liquid vibration in practical applications. Furthermore, results of experiments are presented. Their aim was to find some eigenmode shapes using the linear model and also to document some of their properties. Final part is aimed to the design of an experimental device for visualization of vibration eigenmode shapes of liquids.

## **Key Words**

Faraday waves, atomization, fluid-structure interaction, inhalers, nebulizers, humidifiers, eigenmode shapes

## **Bibliografická citace**

URBAN, Ondřej. *Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 54 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci s názvem *Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Pavla Rudolfa, Ph.D. a s využitím svých znalostí a uvedených zdrojů.

V Brně dne 29. 5. 2015

---

Ondřej Urban

## **Poděkování**

Na tomto místě bych rád poděkoval pracovníkům laboratoře Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana Bronislavu Kusému a Ing. Martinu Hudcovi za pomoc při přípravě experimentů a poskytnutí potřebných zařízení. Speciální poděkování patří mému vedoucímu, doc. Ing Pavlu Rudolfovi, Ph.D., za cenné nápady, rady a připomínky, které mi pomohly při tvorbě této práce.



# Obsah

<b>Úvod</b> .....	11
<b>1. Faradayovy vlny</b> .....	12
1.1 Historický úvod - od Faradaye po současnost .....	12
1.2 Lineární matematický model .....	14
1.2.1 Úvod - Mathieuova a Helmholtzova rovnice .....	14
1.2.2 Odvození pohybové rovnice .....	14
1.2.3 Od Helmholtzovy k Mathieuově rovnici .....	18
1.2.4 Řešení Mathieuovy rovnice .....	20
1.2.5 Vlastní tvary kmitu .....	22
1.2.6 Nestabilní oblasti v závislosti na frekvenci a amplitudě zrychlení .....	25
1.3 Vlastnosti Faradayových vln .....	26
1.3.1 Vliv povrchového napětí vs. vliv gravitace .....	26
1.3.2 Vlnová délka .....	27
1.3.3 Prahová amplituda zrychlení pro vznik Faradayových vln .....	28
1.3.4 Vliv viskozity na vlastní tvary kmitu .....	29
<b>2. Atomizace kapalin</b> .....	31
2.1 Úvod .....	31
2.2 Fyzikální podstata procesu atomizace .....	32
2.3 Děje při atomizaci kapaliny na kmitající membráně .....	33
<b>3. Kmitání kapalin v praxi</b> .....	35
3.1 Fluid-structure interaction .....	35
3.2 Inhalátory (nebulizátory) .....	35
3.3 Zvlhčovače vzduchu .....	37
3.4 Ultrazvukové zpracování kapalin .....	38
<b>4. Provedené experimenty</b> .....	39
4.1 Experimentální zařízení .....	39
4.2 Kmitové módy nízkoviskózní kapaliny v rozsahu 10 - 18 Hz .....	40
4.3 Měření prahové amplitudy zrychlení .....	42
4.4 Diskuze .....	43
<b>5. Návrh zařízení pro vizualizaci Faradayových vln</b> .....	45
5.1 Obecné schéma .....	45
5.2 Prvky zařízení .....	45
5.2.1 Generátor vibrací .....	45
5.2.2 Zesilovač .....	46
5.2.3 Elektroakustický měnič .....	46
5.3 Možnosti realizace zařízení pro nenáročné pokusy .....	47
<b>Závěr</b> .....	49
<b>Seznam použitých zdrojů</b> .....	50
<b>Seznam použitých symbolů a jednotek</b> .....	53
<b>Seznam příloh</b> .....	54



### Úvod

Co se stane s kapalinou, když ji vystavíme vertikálním vibracím například nalitím na membránu reproduktoru? Začne tančit. Přesněji řečeno, na hladině se objeví povrchové vlny, zvané Faradayovy vlny, jejichž tvary závisí na mnoha parametrech systému, ale nejsou náhodné. Odpovídají takzvaným vlastním tvarům kmitu. A stejně jako tanec závisí na dovednostech tanečnicka a doprovodné hudbě, i vlastní tvary kmitu závisí na vlastnostech kapaliny a charakteristice buzení. Přestože se může zdát, že tento jev nemůže mít žádnou praktickou aplikaci, není to tak úplně pravda. Využívá se například u ultrazvukových inhalátorů nebo zvlhčovačů vzduchu. Pokud totiž patřičně zvýšíme amplitudu zrychlení, dojde k vystřikování kapiček z kmiten povrchových vln. Jejich velikost závisí na frekvenci a toho se využívá ve zmíněných zařízeních k vytvoření inhalační mlhy. Tento jev se nazývá atomizace kapalin.

Cílem této práce bude podat přehled o Faradayových vlnách a atomizaci kapalin a jejich praktických aplikacích. Dále budou provedeny experimenty se zaměřením na problematiku z teoretické části. Posledním cílem bude navrhnout experimentální zařízení pro vizualizaci vlastních tvarů kmitu kapalin, které bude sloužit pro nenáročné aplikace, například jako učební pomůcka nebo pro domácí pokusy.

## 1. Faradayovy vlny

### 1.1 Historický úvod - od Faradaye po současnost

Pokud je kapalina vystavena vertikálním vibracím o dostatečně velké amplitudě zrychlení, dojde na jejím povrchu k nestabilitě, kterou pozorujeme jako povrchové vlny. Tomuto jevu se říká Faradayovy vlny podle anglického fyzika Michaela Faradaye, který je v roce 1831 poprvé popsal ve své studii *"On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces"* (K tvarům a stavům zaujímaných kapalinami v kontaktu s vibrujícími elastickými povrchy) zveřejněné jako příloha ke článku ve vědeckém časopisu *Philosophical Transactions* vydávaném Královskou společností.<sup>[9]</sup>

Pro vizualizaci povrchových vln Faraday navrhl jednoduchý pokus, při kterém je kapalina nalita na čtvercový plíšek, který je uchycen ve středu například pomocí kleští a rozvibrován prohnutím okraje. Pozoroval, že se vlny objevují ve středu vibrací (kmitnách) a s rostoucí amplitudou se šíří směrem k uzlovým čarám. Provedl a popsal množství pokusů na různých sestavách s různými kapalinami (např. voda s inkoustem, bílek, olej) a různými druhy buzení (smyčec, přejíždění prsty po navlhčené skleněné tyči umístěné kolmo na povrch s kapalinou), na základě kterých stanovil základní vlastnosti tohoto jevu včetně té nejzásadnější – že pozorované povrchové vlny oscilovaly s frekvencí odpovídající polovině budící frekvence, což je typický rys parametrické rezonance, která se zde uplatňuje.

Faradayovu pozorování oponoval v roce 1868 Ludwig Matthiessen, který o Faradayových vlnách napsal dva články: *"Akustische Versuche, die kleinsten Transversalwellen der Flüssigkeiten betreffend"* (Akustické experimenty, nejmenší příčné vlny na kapalinách) a *"Über die Transversalschwingungen tönender tropfbarer und elastischer Flüssigkeiten"* (K příčným kmitům rozezněných elastických kapalin s nízkou viskozitou). Matthiessen tvrdil, že frekvence kmitů kapaliny je stejná jako budící frekvence.<sup>[4], [6], [22]</sup>

Vzniklý problém závislosti mezi budící frekvencí a frekvencí oscilačního pohybu kapaliny řešil anglický fyzik John William Strutt známý jako Lord Rayleigh, držitel Nobelovy ceny za fyziku z roku 1904 za izolaci argonu. Lord Rayleigh mimo jiné popsal i jev zvaný Rayleighův rozptyl, v jehož důsledku má obloha modrou barvu, a povrchové akustické vlny (používá se také název Rayleighovy vlny). Ve své práci *"On the crispations of fluid resting upon a vibrating support"* (K vlnění kapaliny na vibrující podpoře) ukázal hned dvěma cestami, že frekvence kmitů kapaliny je poloviční vzhledem k frekvenci buzení. Jedna z nich spočívala v tom, že na vibrující systém nahlížel skrz rotující disk s různým počtem děr po obvodu. Díky tomu se mu pohled na systém odkrýval s frekvencí odpovídající otáčkám disku násobeným počtem děr. Při určité rychlosti rotace viděl při použití dvou děr na obvodu podporu v klidu, ale kapalinu dvojitě. Při použití jedné díry viděl kapalinu i podporu v klidu. V prvním případě tedy odpovídala frekvence odkrývání pohledu budící frekvenci. Ve druhém případě byla frekvence odkrývání pohledu oproti prvnímu případu poloviční a odpovídala frekvenci kmitů kapaliny. Budící frekvence je přitom jejím dvojnásobkem, proto se i podpora jevila v klidu. Tím Lord Rayleigh potvrdil Faradayova pozorování.<sup>[22]</sup>

Zásadní krok při zkoumání Faradayových vln udělali v roce 1954 Thomas Brooke Benjamin a Fritz Ursell, kteří sestavili lineární matematický model platný pro ideální kapalinu při nízkých amplitudách. Z něj vyplynulo, že vlastní tvary kmitu kapalin jsou kompozicí jednoho nebo více kmitových módů, přičemž každý z nich může mít na výsledném tvaru

různý podíl. Každý mód je dán svou vlastní frekvencí, při které k jeho vybuzení stačí libovolně malá nenulová amplituda zrychlení. V reálné kapalině je ale kvůli tlumení nutné dosáhnout prahové hodnoty, která je závislá zejména na budící frekvenci. To, jaký tvar kmitu se v nádobě objeví, závisí na buzení, tvaru nádoby a při malých hloubkách kapaliny i na hloubce. Dalším významným zjištěním vyplývajícím z modelu je, že jednotlivé kmitové módy mohou kmitat s různými frekvencemi. Nejdominantnější jsou módy kmitající s poloviční frekvencí vzhledem k budící frekvenci (subharmonické), o něco slabší jsou izochronní módy (první harmonické) a dále následují módy s frekvencí odpovídající vyšším násobkům poloviny budící frekvence:  $3/2$ ,  $2$ ,  $5/2$  atd. (vyšší harmonické). To vysvětluje neshodu mezi Faradayem a Mathiessenem a také to, proč se povrchové vlny při zvyšování amplitudy zrychlení stávají časově závislými a složitějšími.<sup>[4]</sup>

Vzhledem k tomu, že použitelnost lineárního modelu je značně omezená, směřoval další výzkum k dokonalejšímu popisu, který by lépe vystihl skutečné podmínky. Na toto téma existuje nespočet prací, čemuž v poslední době napomohl i rychlý rozvoj počítačového numerického modelování.

Postupem času nové a nové experimenty vedly k objevu nových tvarů kmitu, které byly nad rozsah teoretických modelů a nedaly se tak vysvětlit. Na počátku devadesátých let byly objeveny takzvané kvazitvary, které jsou periodické v čase, ale kvaziperiodické v prostoru. Pojem kvaziperiodické znamená, že tyto tvary nejsou v daném směru periodické, ale ani nejsou nahodilé. Jinými slovy, je v nich mnoho pravidelných prvků, ale celkově pravidelné nejsou. Kvaziperiodicita je spojena s nelineárními systémy a vyskytuje se například i u krystalů některých látek - tzv. kvazikrystaly.<sup>[23]</sup>

Dalším speciálním tvarem pozorovatelným na vibrující kapalině jsou takzvané oscilony. Je to označení pro lokální izolované excitace, které byly objeveny v roce 1996 na vibrující vrstvě sypkého materiálu. U kapalin lze tyto útvary pozorovat nejlépe při použití tenké vrstvy koloidního roztoku. Oscilony jsou velice stabilní a mohou spolu interagovat. Příčina tohoto jevu zatím nebyla uspokojivě vysvětlena.<sup>[5], [18]</sup>

Posledním nedávno objeveným jevem je takzvaný walker. Pokud je rychlost vibrací dostatečně vysoká a na povrch kapaliny je umístěna kapička, dojde k jevu, kdy kapička neustále odskakuje od hladiny, protože vibrace jsou tak rychlé, že vrstva vzduchu mezi kapičkou a kapalinou nestačí odproudit. Každý dopad na hladinu má za následek vznik vlnění, které se šíří od místa dopadu do okolí.<sup>[8]</sup>

Jedny z nejnovějších prací se zabývají simulacemi Faradayových vln, když je buzení složeno ze dvou vln o různých frekvencích. Pokusy na toto téma se provádí už od devadesátých let a souvisí s výzkumem již zmíněných kvazitvarů. Cílem je zmapovat chování vlastních tvarů u různých poměrů frekvencí, při kterých se objevují také různé kvazitvary. Právě numerické simulace a jejich vývoj budou hrát klíčovou roli při snaze porozumět složité problematice týkající se Faradayových vln, na kterou často analýza nestačí.<sup>[24]</sup>

## 1.2 Lineární matematický model

### 1.2.1 Úvod - Mathieuova a Helmholtzova rovnice

Následující část se věnuje teoretickému popisu kmitající membrány. Protože systém je popsán jednak v závislosti na prostorových souřadnicích a jednak v závislosti na čase, řeší se separací proměnných, což vede na dvě rovnice – Mathieuovu a Helmholtzovu.<sup>[4]</sup>

Obecný tvar Mathieuovy rovnice je

$$\ddot{z} + [P - 2 \cdot Q \cdot \cos(2 \cdot t)] \cdot z = 0, \quad (1.1)$$

kde  $P$  a  $Q$  jsou konstanty charakteristické pro daný systém. Mathieuova rovnice se objevuje v řadě fyzikálních problémů, zejména při popisu parametrických rezonancí v oscilujícím systému. Určuje časový vývoj výchylky  $z$ . Na základě charakteru tohoto časového vývoje se pak stanovují oblasti stability řešení, přičemž v nestabilních oblastech dochází k parametrické rezonanci a amplituda výchylky roste nezadržitelně do nekonečna.

Obecný tvar Helmholtzovy rovnice ve 2D je

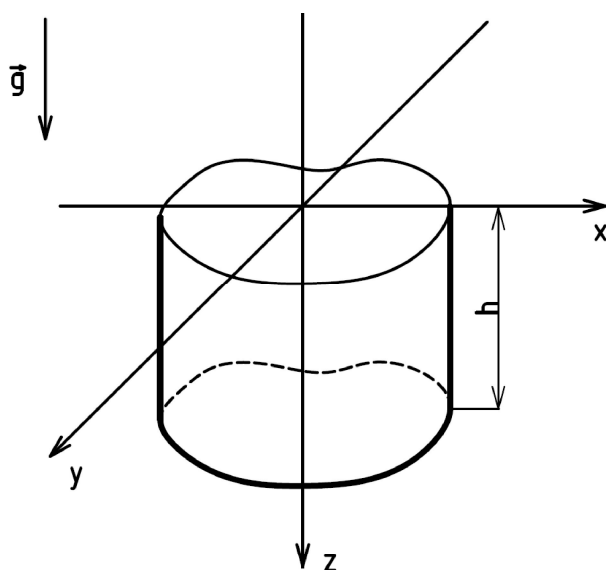
$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + k^2 \cdot A = 0, \quad (1.2)$$

kde  $k$  je vlnové číslo a  $A$  je funkce popisující amplitudu výchylky v závislosti na konkrétním místě na kmitající membráně. Určuje tedy vlastní tvary kmitových módů.

Lineární model pro kmitající ideální kapalinu uzavřenou v nádobě, jehož řešení vede na zmíněné dvě rovnice, sestavili v roce 1954 Thomas Brooke Benjamin a Fritz Ursell, z jejichž práce<sup>[4]</sup> následující matematický popis, pokud není uvedeno jinak, vychází.

### 1.2.2 Odvození pohybové rovnice

#### Souřadnicový systém



Obrázek 1: Nákres souřadnicového systému nádoby s kapalinou.

---

## Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin

---

Při odvozování pohybové rovnice budeme uvažovat nádobu libovolného příčného průřezu s rovným dnem a stěnami na něj kolmými. Volíme kartézský souřadnicový systém pevně spojený s nádobou tak, že hladina kapaliny v klidovém stavu leží v rovině  $xy$  a dno v rovině  $z = h$ . Systém se nachází v tíhovém poli a osciluje podél osy  $z$  s úhlovou frekvencí  $\omega$  a maximální hodnotou zrychlení  $a_{max}$ .

### Pohybová rovnice

Pro ideální (tj. nestlačitelnou a neviskózní) kapalinu byla odvozena Eulerova rovnice hydrodynamiky. Hydrodynamický stav je definován tím, že se částice vůči sobě pohybují, takže se v reálné kapalině projevuje tečné napětí (viskozita). Pokud je toto tečné napětí vzhledem k normálovému (tlakovému) dostatečně malé, lze jej zanedbat a můžeme použít rovnice pro ideálně neviskózní kapalinu. Odvození Eulerovy rovnice hydrodynamiky vychází ze silové rovnováhy. Vstupem jsou tlakové a vnější objemové síly, jejichž výslednice odpovídá setrvačné síle pohybu kapaliny. Eulerovu rovnici hydrodynamiky lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} = \vec{a} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (1.3)$$

nebo pomocí Einsteinovy sumační symboliky

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = a_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (1.4)$$

Zde je  $\vec{v} = f(x, y, z, t)$  vektor rychlosti kapaliny,  $\vec{a}$  vektor zrychlení vnějších objemových sil a  $\rho$  hustota kapaliny, kterou uvažujeme konstantní.

Nyní aplikujeme Eulerovu rovnici hydrodynamiky na naši soustavu. Celkové zrychlení, se kterým se nádoba s kapalinou pohybuje, je vektor  $\vec{a} = (0, 0, g - a_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t))$ . Tento stav, kdy nádoba s kapalinou vertikálně kmitá, si lze také představit jako stav, kdy je nádoba v klidu a mění se tíhové zrychlení podle rovnice  $g_{ef} = g - a_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , přičemž číslo  $g_{ef}$  se říká efektivní hodnota tíhového zrychlení. Právě efektivní hodnota tíhového zrychlení je tím měnícím se parametrem, který způsobuje parametrickou rezonanci u Faradayových vln.

Dalším krokem je integrace. Kvůli ní bude nutné zavést několik matematických úprav, které jsou vyjádřené ve vektorovém tvaru, takže využijeme vektorový zápis (1.3). První úpravou je využití identity

$$\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{v}),$$

další úpravou je přepsání vektoru zrychlení pomocí gradientu

$$\vec{a} = \text{grad}((g - a_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot z)$$

a dále se zavádí fiktivní veličina  $\Phi$ , zvaná rychlostní potenciál, definovaná vztahem

$$\text{grad}(\Phi) = \vec{v}. \quad (1.5)$$

Předpokladem pro zavedení rychlostního potenciálu je potenciální proudění, což je splněno,

pokud je vířivost nulová. S využitím těchto úprav dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \text{grad}(\Phi) + \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) + \text{grad}((g - a_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot z). \quad (1.6)$$

Nyní už je integrace snadná, spočívá v prostém odstranění gradientů a přičtení integrační konstanty, která musí být nezávislá na integračních proměnných  $x, y, z$ , ale může být závislá na poslední proměnné, kterou je čas. Zapisuje se  $F(t)$ . Dostáváme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = -\frac{p}{\rho} + (g - a_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot z + F(t). \quad (1.7)$$

V dalším kroku se zbavíme integrační konstanty. Předefinujeme rychlostní potenciál tak, že k němu přičteme integrál integrační konstanty podle času, který díky zmíněné nezávislosti na proměnných  $x, y, z$  neovlivní původní definici potenciálu (1.5). Definujeme

$$\Phi' = \Phi + \int F(t) dt$$

a dosadíme za  $\Phi$  do rovnice (1.7). Je zřejmé, že po parciální derivaci podle času dostaneme první člen v nezměněné podobě plus integrační konstantu, kterou z obou stran rovnic můžeme odečíst. Tím dostáváme výslednou rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = -\frac{p}{\rho} + (g - a_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot z. \quad (1.8)$$

### Okrajové podmínky

Pro další řešení pohybové rovnice budou potřeba okrajové podmínky. Rychlost kapaliny na dně nádoby ve směru osy  $z$  je nulová, tedy

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=h} = 0. \quad (1.9)$$

Totéž platí i na stěnách nádoby v normálovém (kolmém) směru, formálně zapisujeme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (1.10)$$

Poslední podmínka vyplyne z rovnice hladiny po linearizaci. Označíme  $z$ -ovou souřadnici hladiny jako  $\zeta$ , takže lze zapsat  $z = \zeta(x, y, t)$ . Rovnici hladiny derivujeme podle času, přičemž použijeme substanciální derivaci. To znamená, že sledujeme změnu polohy konkrétní částice. Dalším typem derivace v mechanice kontinua je lokální derivace. Tady místo částice sledujeme změnu dané veličiny v pevném bodě v prostoru. Mezi těmito dvěma derivacemi existuje vztah, po jehož aplikaci má rovnice hladiny tvar

$$\frac{D\zeta}{Dt} - \frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{Dz}{Dt} = 0. \quad (1.11)$$



### Linearizace

Dalším krokem v upravování rovnic je linearizace. Spočívá v zanedbání nelineárních členů, což je ale vykoupeno přijetím dalších předpokladů. Je-li relativní rychlost kapaliny dostatečně malá, můžeme zanedbat kvadrát rychlosti v rovnici (1.8). Pak dostáváme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{p}{\rho} + (g - a_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot z. \quad (1.12)$$

Jsou-li sklony na volném povrchu dostatečně malé, můžeme zanedbat také členy s derivacemi podle  $x$  a  $y$  v rovnici (1.11). V reálné kapalině to není splněno u stěn nádoby, kde dochází ke smáčení, které musíme zanedbat. Pokud substanciální derivaci  $Dz/Dt$  v rovnici (1.11) přepíšeme pomocí rychlostního potenciálu, dostaneme po linearizaci

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (1.13)$$

### Pohybová rovnice pro hladinu

Je-li hladina kapaliny zakřivena, dochází na mezifázovém rozhraní ke změně tlaku, kterou popisuje Young-Laplaceova rovnice

$$\Delta p = \sigma \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.14)$$

kde  $\sigma$  je povrchové napětí kapaliny a  $R_1$  a  $R_2$  hlavní poloměry zakřivení. Tato změna tlaku je příčinou kapilárních jevů, kdy v malé trubici má hladina vlivem smáčivosti stěn sférický tvar o malém poloměru, což má podle Young-Laplaceovy rovnice za následek velkou změnu tlaku, která kapalinu v trubici vytahuje nebo zatlačuje až do místa, kde hydrostatický tlak tuto změnu vyrovná.<sup>[7]</sup>

S využitím aproximace poloměrů zakřivení pomocí rovnice hladiny lze vyjádřit tlak těsně pod hladinou pomocí Young-Laplaceovy rovnice ve tvaru

$$p = \sigma \cdot \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \quad (1.15)$$

který dosadíme do linearizované pohybové rovnice (1.12) a dostáváme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + (g - a_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \zeta. \quad (1.16)$$

V dalším bodě se zaměříme na ohraničující křivku. Pokud na rovnici (1.13) aplikujeme operátor  $\partial/\partial n$ , tak s přihlédnutím k okrajové podmínce (1.10) vyplývá, že  $\partial \zeta/\partial n$  je na ohraničující křivce nezávislé na čase, tedy je rovno počáteční hodnotě, kterou budeme pro jednoduchost uvažovat nulovou (zanedbáváme smáčivost stěn). Tím pádem bude kontaktní úhel mezi stěnou a hladinou konstantní a roven  $90^\circ$ . Tento poznatek využijeme u pohybové rovnice hladiny (1.16), na kterou aplikujeme stejný operátor. Dva členy vypadnou, z čehož vyplývá, že ten zbývajících musí být nulový. Povrchové napětí a hustota jsou nenulové, proto platí

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.17)$$

### 1.2.3 Od Helmholtzovy k Mathieuově rovnici

#### Helmholtzova rovnice

Za daných okrajových podmínek lze přikročit k hledání řešení vlnové rovnice  $\zeta(x, y, t)$ . O něm budeme předpokládat, že ho lze vyjádřit pomocí superpozice partikulárních řešení, které předpokládáme ve tvaru součinu dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na prostorových souřadnicích a druhá pouze na čase.<sup>[17]</sup> Pro náš případ ho lze zapsat ve tvaru

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) \cdot S_m(x, y). \quad (1.18)$$

Dosazením tohoto tvaru do vlnové rovnice pro 2D lze odvodit Helmholtzovu rovnici

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_m^2 \right) \cdot S_m(x, y) = 0, \quad (1.19)$$

kde  $k_m$  je vlnové číslo příslušného módu.

Dalším krokem je s využitím Helmholtzovy rovnice vyjádřit pomocí partikulárních řešení i členy  $\left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$  a  $\Phi$ . K prvnímu jmenovanému se dopracujeme derivováním rovnice (1.18). Dostaneme

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) \cdot \left( \frac{\partial^2 S_m(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_m(x, y)}{\partial y^2} \right).$$

Výraz v závorce si vyjádříme z Helmholtzovy rovnice (1.19) a po dosazení dostaneme konečný tvar

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = - \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) \cdot S_m(x, y) \cdot k_m^2. \quad (1.20)$$

Zbývá vyjádřit rychlostní potenciál. S ohledem na rovnost (1.13) derivujeme partikulární řešení (1.18) podle času. Dostaneme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{da_m(t)}{dt} \cdot S_m(x, y).$$

S ohledem na tento tvar předpokládáme výraz pro potenciál ve tvaru

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{da_m(t)}{dt} \cdot S_m(x, y) \cdot f_m(z), \quad (1.21)$$

přičemž pro funkci  $f_m(z)$  platí na hladině

---

## Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin

---

$$\left. \frac{df_m(z)}{dz} \right|_{z=0} = 1, \quad (1.22)$$

abychom po integraci podle času dostali rovnici hladiny (1.18), a u dna

$$\left. \frac{df_m(z)}{dz} \right|_{z=h} = 0, \quad (1.23)$$

aby byla splněna podmínka (1.9). Nyní rovnici potenciálu (1.21) dvakrát derivujeme podle  $z$ . Výsledkem je

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{da_m(t)}{dt} \cdot S_m(x, y) \cdot \frac{d^2 f_m(z)}{dz^2}. \quad (1.24)$$

V této fázi do procesu vstupuje rovnice kontinuity. Ta je pomocí potenciálu vyjádřena ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1.25)$$

takže

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right). \quad (1.26)$$

Dále postupujeme stejně jako při odvozování výrazu pro předchozí člen. Dvojnásobným derivováním výrazu pro potenciál (1.21) podle  $x$  a podle  $y$  a aplikací Helmholtzovy rovnice dostáváme

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{da_m(t)}{dt} \cdot S_m(x, y) \cdot k_m^2 \cdot f_m(z). \quad (1.27)$$

Porovnáním rovnic (1.24) a (1.27) dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 f_m(z)}{dz^2} = -k_m^2 \cdot f_m(z), \quad (1.28)$$

jejíž řešení má tvar

$$f_m(z) = C_1 \cdot \cosh(k_m \cdot z + C_2). \quad (1.29)$$

Řešení musí vyhovovat okrajovým podmínkám (1.22) a (1.23), tím dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jejímž řešením je

$$C_1 = -\frac{1}{k_m \cdot \sinh(k_m \cdot h)}, \quad C_2 = -k_m \cdot h. \quad (1.30)$$

Dosazením řešení do (1.21) získáme konečnou podobu potenciálu

$$\Phi(x, y, z, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{da_m(t)}{dt} \cdot S_m(x, y) \cdot \frac{\cosh(k_m \cdot (z - h))}{k_m \cdot \sinh(k_m \cdot h)} \quad (1.31)$$

## Mathieuova rovnice

Vyjádření všech parametrů z předchozí části dosadíme do pohybové rovnice pro hladinu (1.16). Úpravy vedou na tvar

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m(x, y)}{k_m \cdot \tanh(k_m \cdot h)} \cdot \left[ \frac{d^2 a_m}{dt^2} + k_m \cdot \tanh(k_m \cdot h) \cdot \left( k_m^2 \cdot \frac{\sigma}{\rho} + g - a_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t) \right) \cdot a_m \right] = 0, \quad (1.32)$$

kde musí být

$$\frac{d^2 a_m}{dt^2} + k_m \cdot \tanh(k_m \cdot h) \cdot \left( k_m^2 \cdot \frac{\sigma}{\rho} + g - a_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t) \right) \cdot a_m = 0. \quad (1.33)$$

Pokud zavedeme substituci

$$P_m = \frac{4 \cdot k_m \cdot \tanh(k_m \cdot h)}{\omega^2} \cdot \left( k_m^2 \cdot \frac{\sigma}{\rho} + g \right), \quad Q_m = \frac{2 \cdot k_m \cdot a_{\max} \cdot \tanh(k_m \cdot h)}{\omega^2} \quad (1.34)$$

a  $\tau = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t$ , dostáváme standardní formu Mathieuovy rovnice (1.1) pro vertikální vibrace kapaliny ve válcové nádobě

$$\frac{d^2 a_m}{d\tau^2} + (P_m - 2 \cdot Q_m \cdot \cos(2 \cdot \tau)) \cdot a_m = 0. \quad (1.35)$$

Z tohoto tvaru je také vidět, že se každý mód kmitu hladiny daný konstantami  $P_m$  a  $Q_m$  řídí svou vlastní Mathieuovou rovnicí.

### 1.2.4 Řešení Mathieuovy rovnice

Mathieuova rovnice je klasifikována jako lineární diferenciální rovnice s periodickými koeficienty. Samotné řešení je poměrně složitý a čistě matematický problém, proto se mu tato práce věnuje jen do omezené hloubky. Základním pramenem je článek prof. Whittakera.<sup>[28]</sup>

Obecné řešení Mathieuovy rovnice má tvar

$$a_m = K_1 \cdot C(P_m, Q_m, \tau) + K_2 \cdot S(P_m, Q_m, \tau), \quad (1.36)$$

kde  $K_1$  a  $K_2$  jsou konstanty, které se stanovují na základě počátečních podmínek, a  $C$  a  $S$  jsou Mathieuovy funkce. Mají tvar

$$C = e^{\mu \tau} \cdot \Gamma(\tau), \quad S = e^{-\mu \tau} \cdot \Psi(\tau), \quad (1.37)$$

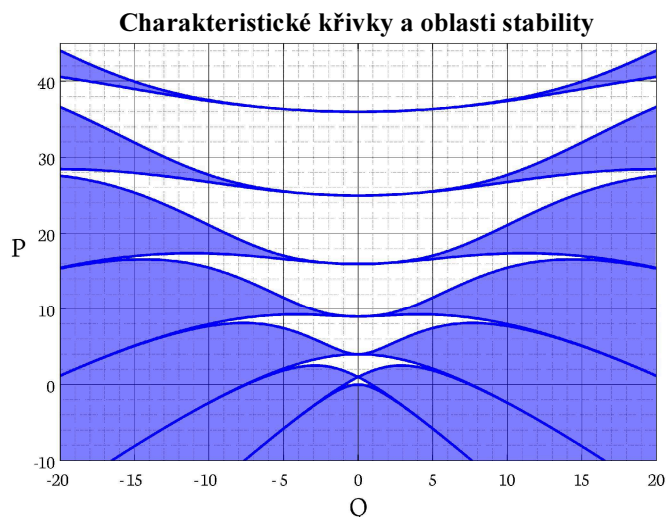
kde  $\Gamma(\tau)$  a  $\Psi(\tau)$  jsou periodické funkce a  $\mu$  je konstanta závislá na konstantách  $P_m$  a  $Q_m$ . Platí, že pro určité hodnoty  $P_m$  a  $Q_m$  je konstanta  $\mu$  rovna nule a řešení je potom čistě periodickou funkcí. Tento fakt má důležitý význam, protože čistě periodická funkce je hranicí mezi nestabilním a stabilním řešením. Stabilní řešení je takové, které se pro  $\tau \rightarrow \infty$  drží v oblasti konečných čísel, zatímco nestabilní dosáhne nekonečna. Pro oscilace kapaliny to znamená, že vlivem parametrické rezonance se amplituda výchylky nezadržitelně zvyšuje. V reálu však dosáhne pouze omezené hodnoty, protože je tu tlumení a nelineární efekty, které v tomto teoretickém popisu neuvažujeme. Problémem je, že neexistuje jednoduché analytické vyjádření  $\mu$  v závislosti na  $P_m$  a  $Q_m$ , nicméně existují numerické metody, kterými lze potřebné

---

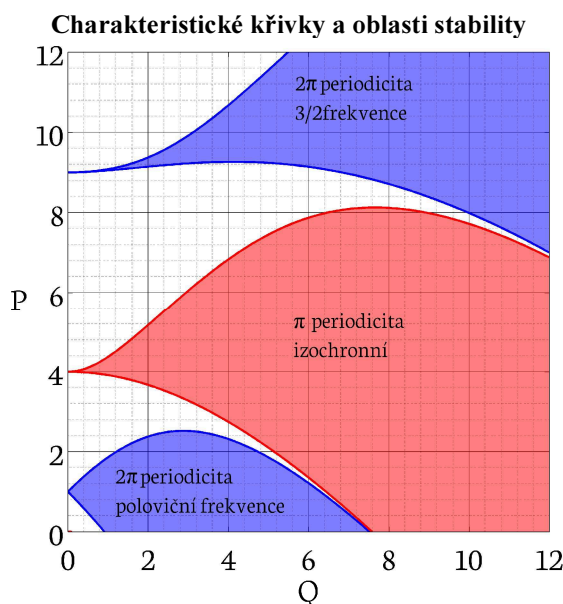
## Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin

---

hodnoty získat. Jednou z nich je např. Hillova metoda, se kterou se hledaná závislost získá z determinantu nekonečně velké matice. Charakteristické křivky hodnot  $P_m$  a  $Q_m$ , pro které je řešení Mathieuovy rovnice čistě periodické, jsou na obrázku 2. Graf byl vykreslen pomocí matlabovského programu<sup>[16]</sup> a upraven.



Obrázek 2: Graf znázorňující charakteristické křivky a oblasti stability řešení Mathieuovy rovnice. Pro libovolný bod na tmavomodrých křivkách o souřadnicích  $[P, Q]$  je řešení Mathieuovy rovnice čistě periodické. Tyto křivky zároveň představují hranice mezi modrými a bílými oblastmi, přičemž platí, že pro dvojice hodnot  $P$  a  $Q$  ležící v modré oblasti je řešení nestabilní, zatímco pro dvojice ležící v bílé oblasti je řešení stabilní.



Obrázek 3: Výřez z grafu na obrázku 2 pro kladné hodnoty  $P$  a  $Q$ . Protože Mathieuova rovnice je  $\pi$  periodická, představuje červená oblast na obrázku množinu všech dvojic  $P$  a  $Q$ , pro které frekvence kmitů kapaliny odpovídá budící frekvenci. Modrá oblast pod ní představuje množinu všech dvojic  $P$  a  $Q$ , pro které hladina kapaliny kmitá s frekvencí odpovídající polovině budící frekvence, perioda je tedy  $2\pi$ . Modrá oblast nahoře má zase periodu  $2/3\pi$ , což je racionální násobek  $2\pi$ , je tedy také  $2\pi$  periodická. Obecně modré oblasti představují liché násobky polovin budící frekvence, červené sudé násobky.

Z vyjádření konstant  $P_m$  a  $Q_m$  pro kmity kapaliny (1.34) je patrné, že se pohybují pouze v kladných hodnotách, protože žádný člen nenabývá záporné hodnoty. Dále vzhledem ke kvadrátu úhlové frekvence ve jmenovateli obou členů a s uvážením, že se frekvence bude pohybovat řádově do stovek hertzů, vyplývá, že konstanty  $P_m$  a  $Q_m$  budou nabývat poměrně nízké hodnoty. Tím je dána hlavní oblast zájmu na grafu z obrázku 2 pro problém s kmitající kapalinou, která je znázorněna na obrázku 3 včetně frekvencí, se kterými kmitají módy spadající do příslušné nestabilní oblasti.

### 1.2.5 Vlastní tvary kmitu

V předchozí části bylo stanoveno partikulární řešení závisící pouze na čase  $a_m$  a byly určeny oblasti jeho nestability. Zbývá vyjádřit partikulární řešení závisící pouze na prostorových souřadnicích  $S_m(x,y)$ , které určuje vlastní tvary kmitu jednotlivých módů. Získá se vyřešením Helmholtzovy rovnice (1.19) a závisí na tvaru nádoby.

#### Obdélníková nádoba

Řešíme Helmholtzovu rovnici

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_m^2 \right) \cdot S_m(x, y) = 0$$

pro obdélníkovou nádobu s délkou  $a$  a šířkou  $b$ , přičemž souřadnicový systém má počátek v levém spodním rohu a délka  $a$  splývá s osou  $x$ . Okrajové podmínky jsou

$$\left. \frac{\partial S_m(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial S_m(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Vyplývají z toho, že kontaktní úhel mezi nádobou a stěnou je neměnný a uvažujeme ho  $90^\circ$ , jak bylo ukázáno při odvozování pohybové rovnice. Vzhledem ke tvaru řešení pozměníme způsob indexování a místo jednoho indexu  $m$  budeme používat dva indexy  $l$  a  $m$ . Potom dostáváme

$$S_{l,m} = \cos\left(\frac{l \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \quad (1.38)$$

a odpovídající vlnové číslo

$$k_{l,m} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}. \quad (1.39)$$

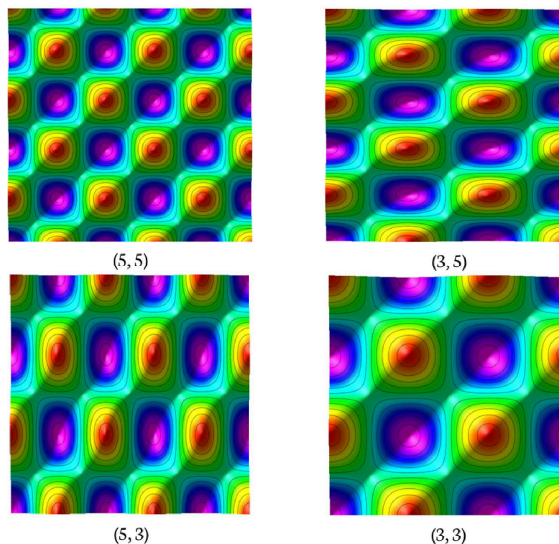
Jednotlivé módy jsou dány konstantami  $l$  a  $m$  a značí se  $(l, m)$ . Jak plyne z vyjádření řešení (1.38), pro všechny módy má hladina tvar funkce dané součinem dvou kosinů, přičemž konstanty  $l$  a  $m$  určují periodicitu podél jednotlivých rozměrů nádoby. Toto je ilustrováno na obrázku 4. Také je vidět, že rozměry nádoby nemají vliv na rozsah argumentů kosinů, ten je dán pouze zmíněnými konstantami. Jinými slovy, pokud byl na nádobě o daných rozměrech

---

## Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin

---

vybuzen mód, který má například podél délky dva vrcholy (dvě kmitny), změna rozměrů nádoby jejich počet neovlivní, vždy budou podél délky dva.



Obrázek 4: Vlastní tvary kmitu některých módů vykreslené pomocí programu Maple. Červené oblasti představují maximální výchylku v ose  $z$ , fialové minimální. Z obrázků je patrné, že obě čísla charakterizující daný mód přímo ovlivňují počet vln v nádobě, přičemž číslo  $l$  ovlivňuje pouze počet vln podél osy  $x$  a číslo  $m$  počet vln podél osy  $y$ .

### Kruhová nádoba

Řešení pro kruhovou nádobu je o něco složitější než pro obdélníkovou. Používá se polární souřadnicový systém, takže Helmholtzova rovnice má tvar

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_m^2 \right) \cdot S_m(r, \varphi) = 0$$

a okrajová podmínka je

$$\left. \frac{\partial S_m(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Kvůli vyjádření řešení opět změníme indexování, výsledný tvar je

$$S_{l,m} = J_l(k_{l,m} \cdot r) \cdot \cos(l \cdot \varphi), \quad (1.40)$$

kde  $J_l$  je Besselova funkce řádu  $l$ . Její definice je

$$J_l(k_{l,m} \cdot r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^{2i+l} \cdot i! \cdot (l+i)!} \cdot (k_{l,m} \cdot r)^{2i+l}. \quad (1.41)$$

Vlnové číslo  $k_{l,m}$  odpovídá  $m$ -tému nulovému bodu derivace Besselovy funkce příslušného řádu  $l$  podělenému poloměrem nádoby  $R$ . Dá se to odvodit s pomocí okrajové podmínky. Hodnoty některých nulových bodů derivací Besselových funkcí jsou uvedeny v tabulce 1.<sup>[27]</sup>

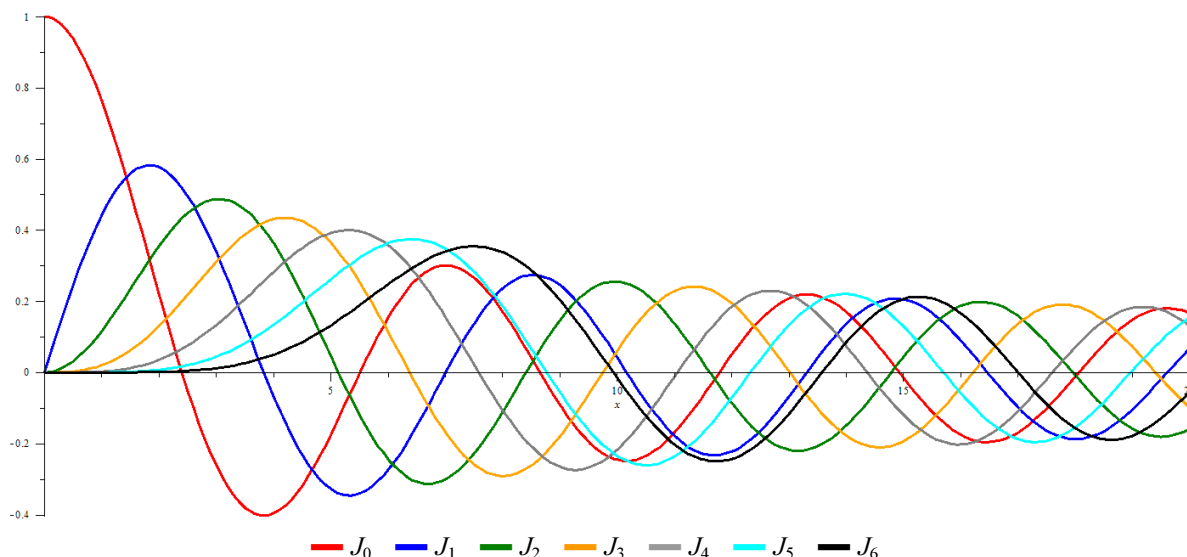


$m \setminus l$	0	1	2	3	4	5
1	3,8317	1,8412	3,0542	4,2012	5,3175	6,4156
2	7,0156	5,3314	6,7061	8,0152	9,2824	10,5199
3	10,1735	8,5363	9,9695	11,3459	12,6819	13,9872
4	13,3237	11,7060	13,1704	14,5858	15,9641	17,3128
5	16,4706	14,8636	16,3475	17,7887	19,1960	20,5755

Tabulka 1: Nulové body derivace Besselovy funkce řádu  $l$ . Pro  $m=1$  se uvažuje první nenulová hodnota a dalším  $m$  jsou postupně přiřazovány další nulové body tak, jak následují.

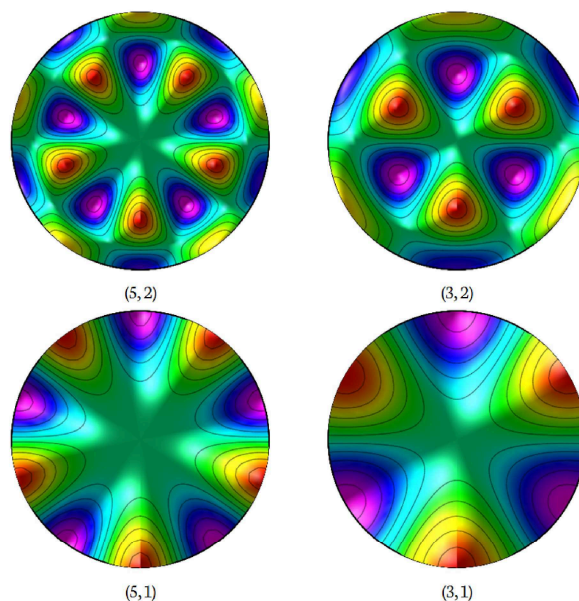
Z rovnice (1.40), která vyjadřuje vlastní tvary kmitu kapalin v kruhové nádobě, je vidět, že Besselova funkce udává tvar hladiny podél poloměru nádoby pro úhel  $\varphi=0^\circ$ . Některé Besselovy funkce, vykreslené pomocí programu Maple, jsou na obrázku 5. Zbývá část rovnice, člen  $\cos(l \cdot \varphi)$ , udává, jak se tvar daný Besselovou funkcí mění s úhlem  $\varphi$ . Jednotlivé kmitové módy se značí pomocí indexů  $(l, m)$ . Číslo  $l$  ovlivňuje řád Besselovy funkce a ve druhém členu periodicitu, tedy ovlivňuje tvar hladiny podél poloměru a to, kolik period má obvodový řez hladinou. Číslo  $m$  je zahrnuto pouze v Besselově funkci a jeho vliv spočívá v tom, že určuje rozsah z grafu Besselovy funkce, který můžeme podél poloměru pozorovat. Tento rozsah stejně jako u obdélníkové nádoby závisí pouze na tomto parametru, tedy větší rozměry nádoby neznamenaají pro daný mód víc vln podél poloměru. Plyne to z vyjádření nezávislé proměnné Besselovy funkce, kde po dosazení za  $k_{l,m}$  dostáváme poměr  $r/R$  násobený parametrem  $m$ , přičemž rozsah  $r$ , na kterém se pohybujeme, je od 0 do  $R$ . Tím pádem u stěny nádoby odpovídá nezávislá proměnná konstantě  $m$ , která zase odpovídá nulovému bodu derivace Besselovy funkce. Kontaktní úhel hladiny je tedy  $90^\circ$ , což odpovídá předpokladům z předchozí části.

Besselovy funkce



Obrázek 5: Graf Besselových funkcí řádu 0 až 6. Graf byl vykreslen pomocí programu Maple s využitím vestavěné funkce  $BesselJ(l,x)$ .





Obrázek 6: Vlastní tvary kmitu některých módů vykreslené pomocí programu Maple. Červené oblasti představují maximální výchylku v ose  $z$ , fialové minimální. Z obrázků je patrné, že číslo  $l$  udává tvar hladiny podél poloměru a počet period po obvodu nádoby, zatímco číslo  $m$  udává rozsah Besselovy funkce, podle které je tvarována hladina podél poloměru.

### 1.2.6 Nestabilní oblasti v závislosti na frekvenci a amplitudě zrychlení

V předchozí části byly spočítány a vykresleny (obrázky 2 a 3) oblasti nestability Mathieuovy rovnice. Jak bylo ukázáno při odvozování Mathieuovy rovnice, konstanty  $P_m$  a  $Q_m$  závisí na vlnovém čísle, které je pro různé módy různé. Z toho vyplývá, že každý mód má jinou oblast nestability v závislosti na frekvenci a amplitudě zrychlení.

Prvním krokem ve výpočtu nestabilních oblastí je vyjádření frekvence z rovnice pro konstantu  $P_m$  a zrychlení z rovnice pro konstantu  $Q_m$  (1.34). Při tom využijeme faktu, že hyperbolický tangens poměrně rychle konverguje k jedné, takže ho lze zanedbat. Při experimentech je nutné brát v potaz, že pro malou hloubku kapaliny v nádobě a nízká vlnová čísla (což odpovídá nižším módům v nádobách větších rozměrů) je vliv tohoto členu značný a nelze jej zanedbat. Potom dostáváme

$$f = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_m}{P_m} \cdot \left( \frac{k_m^2 \cdot \sigma}{\rho} + g \right)}, \quad a_{\max} = 2 \cdot \frac{Q_m}{P_m} \cdot \left( \frac{k_m^2 \cdot \sigma}{\rho} + g \right). \quad (1.42)$$

Do těchto rovnic postupně dosazujeme vlnová čísla jednotlivých módů a za konstanty  $P_m$  a  $Q_m$  body ležící na hranici stability postupně pro různé násobky budící frekvence. Tím dostaneme hranice stability jednotlivých kmitových módů v závislosti na budící frekvenci a amplitudě zrychlení, jejichž graf pro vodu a kruhový průřez nádoby o poloměru 10 cm vykreslený v programu Matlab je na obrázku 7. Vykresleny jsou pouze módy z tabulky 1.

V grafu je vidět několik důležitých vlastností kmitových módů. Každý z nich má svou vlastní frekvenci, při které by se měl objevit při libovolně malé amplitudě zrychlení. Toto ale platí pouze pro neviskózní kapalinu. U viskózní kapaliny nedosahují oblasti nestability až k nulové hodnotě amplitudy zrychlení a nemají ostré hroty.

Dále je zřejmé, že izochronní módy mají mnohem užší oblasti nestability než módy kmitající s poloviční frekvencí ve srovnání s buzením. Proto jsou s ohledem na vliv viskozity při experimentech pozorovány převážně módy znázorněné modře.

Konečně, míst, kde se dá vybudit jen jeden mód, není mnoho. Snažší je to při nižších frekvencích. Ze vztahu pro frekvenci (1.42) je vidět, že čím větší je vlnové číslo, tím větší je vlastní frekvence. A z tabulky 1 je zase vidět, že čím větší jsou charakteristická čísla, tím větší je vlnové číslo. Neplatí to mezi  $l = 0$  a  $l = 1$ , protože u Besselovy funkce nultého řádu nepočítáme do nulových bodů bod  $x = 0$ . Vlnové číslo by pak vycházelo nula, což odpovídá vodorovné hladině. Kdyby byla tabulka 1 větší, bylo by také dobře vidět, že čím vyšší vlnové číslo uvažujeme, tím více módů se v jeho okolí nachází. Je to dáno tím, že podobná čísla se nacházejí přibližně na úhlopříčkách a ty jsou tím delší, čím vyšší charakteristická čísla spojují. Proto s uvážením efektu konečné viskozity můžeme při vyšších frekvencích pozorovat pouze kombinace různých módů. Totéž platí i pro čtvercovou nádobu.

## 1.3 Vlastnosti Faradayových vln

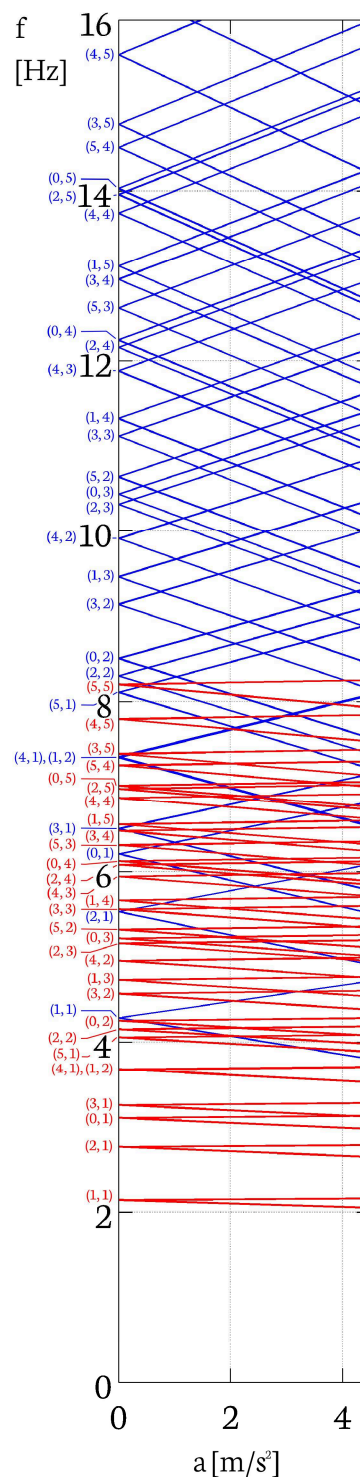
### 1.3.1 Vliv povrchového napětí vs. vliv gravitace

Tato část se zabývá silami, které vrací kapalinu do rovnovážné polohy. Teoretický popis vychází opět ze vztahu pro budící frekvenci (1.42). Přepočítáme budící frekvenci na úhlovou frekvenci  $\omega$  a vyjádříme její druhou mocninu pro  $P_m = 1$  (módy kmitající s poloviční frekvencí). Výsledek vydělíme dvěma, abychom místo buzení získali úhlovou frekvenci povrchových vln. Výsledný tvar je

$$\omega^2 = \frac{k_m^3 \cdot \sigma}{\rho} + g \cdot k_m. \quad (1.43)$$

Toto je známá disperzní rovnice pro povrchové vlny s malou amplitudou a nekonečnou hloubku kapaliny.<sup>[10]</sup> Skládá se ze dvou členů. První závisí na povrchovém napětí, druhý na gravitaci. Přechodové vlnové číslo, pro které mají oba členy stejnou hodnotu, má tvar

$$k_{mc} = \sqrt{\frac{g \cdot \rho}{\sigma}} \quad (1.44)$$



Obrázek 7: Graf hranic nestabilní oblasti některých módů. Červeně jsou módy kmitající izochronně, modře módy kmitající s poloviční frekvencí vzhledem k buzení.

a odpovídající přechodová úhlová frekvence je

$$\omega_c = \sqrt[4]{\frac{g^3 \cdot \rho}{\sigma}}. \quad (1.45)$$

Pokud tedy vlnové číslo módu odpovídá přechodové hodnotě (1.44), vliv sil povrchového napětí je stejný jako vliv gravitačních sil. Pokud uvážíme závislost kapilárních sil na poloměru zakřivení ve smyslu Young-Laplaceovy rovnice (1.14), lze čekat, že při vyšších frekvencích, kde je poloměr zakřivení menší, převáží vliv kapilárních sil. Je to vidět i z disperzní rovnice (1.43), protože u členu s povrchovým napětím je vlnové číslo ve třetí mocnině, přičemž vyšší vlnové číslo odpovídá vyšší frekvenci. Pokud má některá ze sil výrazně větší vliv, pak mluvíme o kapilárních vlnách, nebo o gravitačních vlnách.<sup>[10]</sup>

### 1.3.2 Vlnová délka

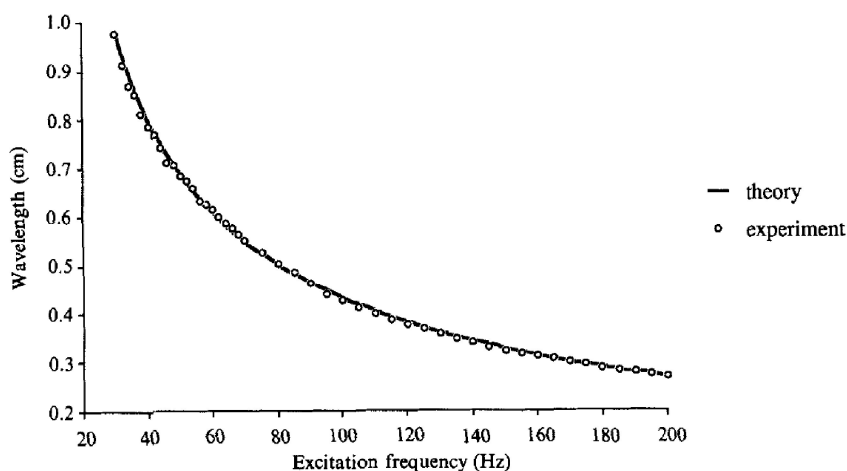
Mezi vlnovou délkou a vlnovým číslem platí vztah

$$k_m = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}. \quad (1.46)$$

Dosažením tohoto tvaru do rovnice budící frekvence (1.42) získáme teoretickou závislost budící frekvence na vlnové délce ve tvaru

$$f = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{\lambda \cdot P_m} \cdot \left( \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \sigma}{\lambda^2 \cdot \rho} + g \right)}. \quad (1.47)$$

Protože cílem je dostat závislost mezi vlastní frekvencí módů a jejich vlnovou délkou, za konstantu  $P_m$  dosazujeme hodnoty pro  $Q_m = 0$ . Pro poloviční frekvenci vzhledem k buzení je  $P_m$  přibližně rovno jedné. Tuto závislost experimentálně zkoumal například Stéphane Douady, z jehož práce<sup>[6]</sup> pochází graf na obrázku 8. Douady tuto závislost nejprve naměřil experimentálně a poté jí přizpůsobil teorii, čímž získal jediný neznámý parametr - povrchové napětí pro směs vody a inkoustu, kterou použil.



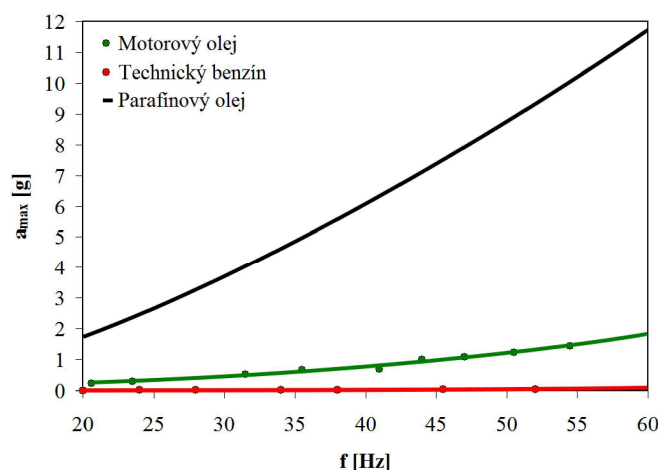
Obrázek 8: Závislost vlnové délky na budící frekvenci. Nejprve byla naměřena experimentální data (kružnice), kterým byla následně přizpůsobena teoretická křivka. Tím se získal neznámý parametr - povrchové napětí použité kapaliny, kterou byla voda smíchaná s inkoustem a dalšími látkami. Vyšlo 0,0295 N/m. Zdroj: [6].

Závislost vlnové délky na frekvenci daná rovnicí (1.47) jednoznačně určuje vlnovou délku (a tím i vlnové číslo) povrchových vln, které se na hladině při dané frekvenci objeví. V předchozí kapitole bylo ukázáno, že vlnová čísla kmitových módů závisí na rozměrech nádoby. Z toho vyplývá, že pro danou budící frekvenci se v každé nádobě vybudí takový mód, aby jeho vlnová délka pro danou nádobu odpovídala uvedené závislosti. Pokud bychom tedy měli více nádob různých rozměrů buzených stejnou frekvencí, objevil by se na každé z nich jiný kmitový mód. Toto je mechanismus, který rozhoduje o tom, jaký kmitový mód je v nádobě při dané frekvenci vybuzen.

### 1.3.3 Prahová amplituda zrychlení pro vznik Faradayových vln

Při popisu nestabilních oblastí jednotlivých módů bylo ukázáno, že každý z nich má svou vlastní frekvenci, při které ho lze u neviskózní kapaliny vybudit libovolně malou amplitudou zrychlení. V reálné kapalině je ale pro vybuzení Faradayových vln nutné překročit definovanou prahovou hodnotu amplitudy zrychlení. Tu ovlivňují různé faktory.

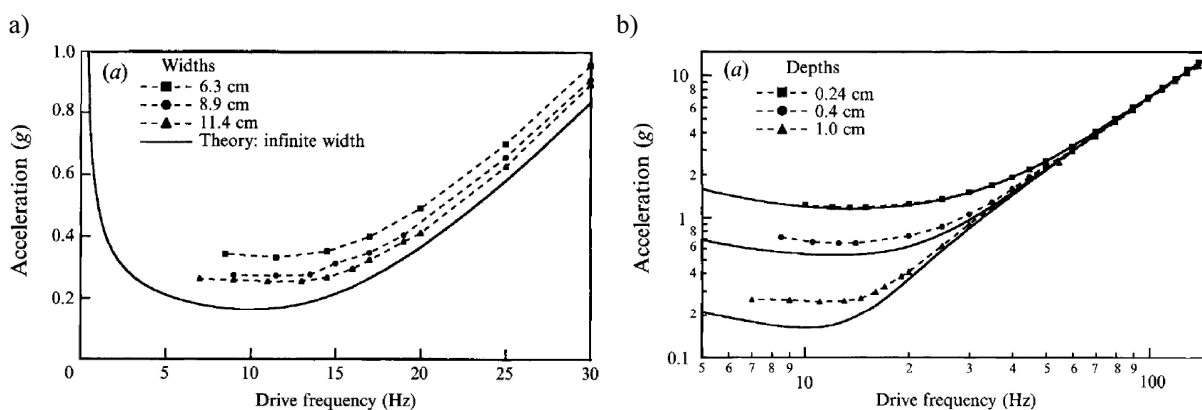
Nejzásadnějším faktorem je viskozita. Její vliv u newtonovských kapalin je zachycen v grafu na obrázku 9. Ten srovnává závislost prahové amplitudy zrychlení na frekvenci pro různé kapaliny s různými viskozitami. Měření proběhlo pro kruhovou nádobu o průměru 10 cm a hloubku kapaliny 1 cm. První kapalinou je parafínový olej, pro který byly výsledky převzaty z práce Johna Bechhoefera a kol.<sup>[3]</sup> Jeho kinematická viskozita se udává  $\nu = 240 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Zbývající dvěma kapalinami jsou motorový olej Castrol Power 1 4T 10W-40, jehož  $\nu = 70 \text{ mm}^2/\text{s}$ , a technický benzín s  $\nu = 0,98 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Hodnoty pro tyto dvě kapaliny byly získány při experimentu provedeném v rámci této práce (viz. kapitola 5) a aproximovány polynommem stupně 2. Z grafu je vidět, že s rostoucí frekvencí i viskozitou roste prahová amplituda zrychlení nadproporcionálně. Poměrně velký rozsah viskozit má při použitém měřítku za následek, že křivka pro technický benzín téměř splývá s osou frekvence, na druhou stranu si ale lze díky širšímu rozsahu viskozit udělat lepší představu o vlivu viskozity, než kdyby byly hodnoty viskozit blízko u sebe. Grafy pro technický benzín a motorový olej odděleně jsou v kapitole 5.



Obrázek 9: Graf ilustrující závislost prahové amplitudy zrychlení na frekvenci pro kapaliny s různými viskozitami.

## Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin

Dalším důležitým faktorem pro vznik Faradayových vln jsou rozměry nádoby a hloubka kapaliny v ní. Vliv těchto faktorů je zachycen v grafech na obrázku 10, které pochází také z práce Bechhoefera a kol. Obecně lze říci, že pro menší frekvence jsou rozdíly větší, což je dáno tím, že vlnové délky jsou poměrně velké a jsou tu velké rozdíly ve vlivu okrajových podmínek daných nádobou. Je tu vidět, že u menších rozměrů nádoby a menší hloubky je disipace větší, a tím i hodnoty prahové amplitudy zrychlení jsou vyšší. Při vyšších frekvencích už jsou vlnové délky tak malé, že se okrajové podmínky dané nádobou téměř neprojevují, a proto změna rozměrů nádoby nebo hloubky kapaliny má jen malý vliv. Dobře je to vidět u grafu znázorňujícího vliv hloubky kapaliny, který byl zkonstruován pro větší frekvenční rozsah. Aby se dal vliv nádoby zanedbat, je nutné, aby disipační délka vlny byla menší než rozměry nádoby. U postupné vlny je to vzdálenost od místa vzniku po místo zániku. Stojatou vlnu je nutné rozložit na její postupné složky.<sup>[3]</sup>



Obrázek 10: Vliv a) šířky obdélníkové nádoby a b) hloubky kapaliny na prahovou hodnotu amplitudy zrychlení pro vznik Faradayových vln. Přerušované čáry znázorňují výsledky experimentu, plné čáry výsledky matematického modelu. Měřeno pro olej při teplotě 55°C. Zdroj: [3]

### 1.3.4 Vliv viskozity na vlastní tvary kmitu

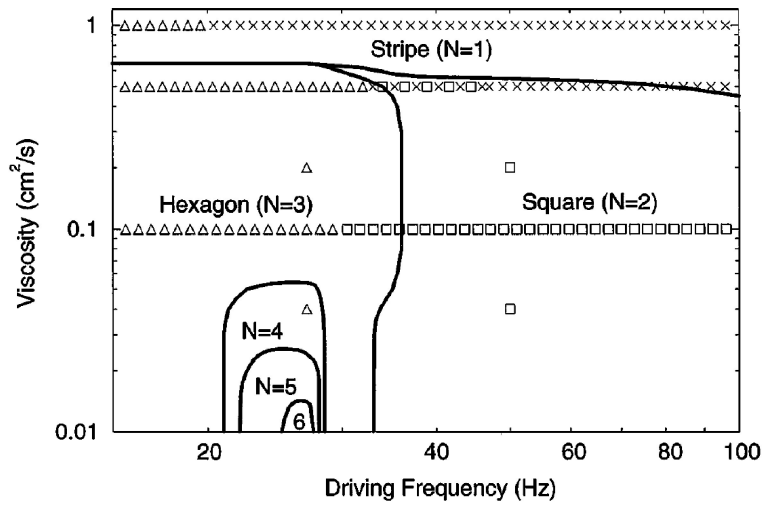
Teoretický popis vlastních tvarů z kapitoly 1.2.5 od Benjamina a Ursella platí pouze pro neviskózní kapalinu. V určitém frekvenčním rozsahu ho lze při nízkých frekvencích použít i pro reálné kapaliny s nízkými viskozitami (viz. kapitola 5). S rostoucí viskozitou se ale vlastní tvary kmitu zásadně mění.

Vliv viskozity na vlastní tvary kmitu studovali Peilon Cheng a Jorge Viñals. Ve své práci sestavili nelineární model pro viskózní kapalinu.<sup>[13]</sup> Jeho výsledkem je graf na obrázku 11 platný pro podmínky, kdy je vliv hloubky a tvaru nádoby zanedbatelný.

Z grafu je vidět, že kapaliny s kinematickou viskozitou vyšší než  $0,7 \text{ cm}^2/\text{s}$  nezávisle na frekvenci vytvoří na hladině vždy proužky. U kapalin s nižší viskozitou mají kmitny při vyšších frekvencích tvar čtverců a při nižších frekvencích tvar šestiúhelníků.

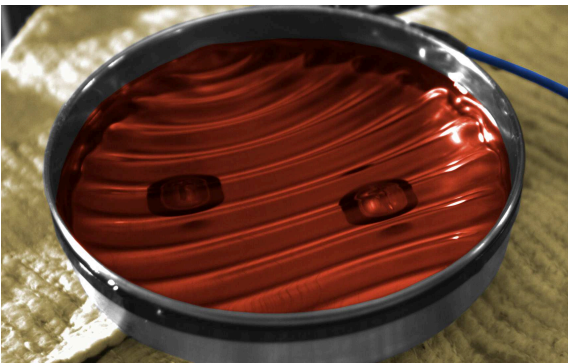
Číslo  $N$  značí počet stojatých vln na hladině. Pro  $N = 1$  dostáváme jednu stojatou vlnu táhnoucí se od jednoho kraje nádoby ke druhému a výsledným tvarem jsou proužky. Pro  $N = 2$  se přidá další vlna kolmo na první a vzniknou čtverce. Pro  $N = 3$  vznikají šestiúhelníky. Pro  $N = 4$  vzniká kvaziperiodický tvar s osmičetnou rotační symetrií atd.





Obrázek 11: Graf zachycující vlastní tvary kmitu v závislosti na budící frekvenci a viskozitě. Zdroj: [13]

a)



b)



Obrázek 12: a) pruhové vlny na hladině motorového oleje při 62 Hz, b) čtvercové vlny na hladině roztoku mléka a vody (cca 1:1) při 32 Hz.

## 2. Atomizace kapalin

### 2.1 Úvod

Předchozí kapitola se věnovala Faradayovým vlnám, což je jev, kdy se na vertikálně kmitající kapalině objevují povrchové vlny. Teoretický popis platil jen pro malé výchylky, tedy pro amplitudy zrychlení blízké prahové hodnotě pro vznik tohoto jevu. Zbývá proto dořešit, co se s kapalinou bude dít při vyšších amplitudách zrychlení.

Podle matematického modelu by se se zvětšující amplitudou zrychlení měla zvyšovat amplituda funkce popisující vlastní tvar kmitu (uvažujeme viskózní kapalinu). V reálu ale kapalina takový tvar nezaujme, místo toho dochází k oddělování a vystřikávání kapiček ze hřbetů vln. Tomuto jevu se říká vibračně indukovaná atomizace.

Obecně pojem atomizace kapalin znamená vytvoření aerosolu, který je tvořen kapičkami kapaliny rozptýlenými v plynu. Tento jev má širokou škálu praktických aplikací - od nejrůznějších sprejů přes inhalátory po zvlhčovače vzduchu. Pro vytvoření aerosolu se používá vícero způsobů. Kromě ultrazvukových vibrací je to typicky u sprejů hnací plyn rozpuštěný v kapalině. Tento plyn má zpravidla teplotu varu těsně pod pokojovou teplotou. Díky tomu se při otevření ventilu vypařuje a na výstupu z trysky dostáváme drobné kapičky užité kapaliny nhané vypařeným plynem. Další možnost je atomizační tryska. Ta využívá Venturiho efekt (nebo také hydrodynamický paradox). Spočívá v tom, že pokud při konstantní potenciální energii dojde ke zvýšení kinetické energie kapaliny (kapalina proudí rychleji), musí jako kompenzace dojít k poklesu tlakové energie, a tím pádem k poklesu tlaku. Teoreticky je to popsáno v Bernoulliho rovnici. V případě atomizační trysky proudí nad trubicí ponořenou do kapaliny vzduch. Vzniklý podtlak nasává kapalinu, která v kombinaci s proudícím vzduchem vytváří aerosol. Tento princip se používá například u parfémů. Náčrt atomizační trysky a její aplikace je na obrázku 13. Další část této práce se bude věnovat především vibračně indukované atomizaci.

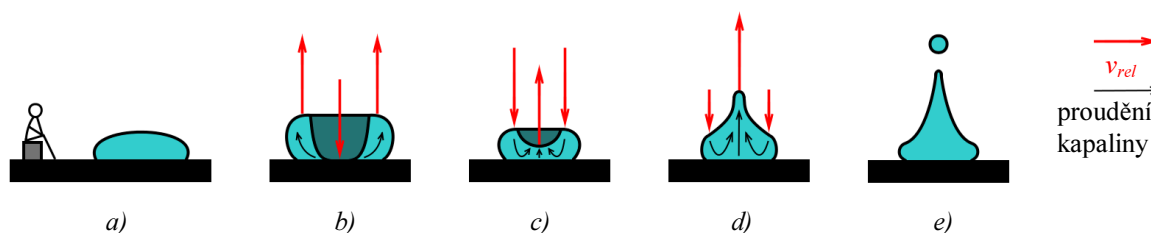


Obrázek 13: Parfém s atomizérem. Vlevo je schématický náčrt, vpravo skutečné provedení. Zdroj: <http://www.essentialatomizer.com>.

## 2.2 Fyzikální podstata procesu atomizace

Jedním ze základních poznatků hydromechaniky je, že kapalina na rozhraní se vzduchem vždy zaujímá takový tvar, aby její povrchová energie byla nejmenší. V praxi to znamená, že má nejmenší možný povrch. Ve stavu bez působení vnějších sil je to koule. Platí, že povrch je tím nestabilnější, čím je vzdálenější od ideálního tvaru. Právě tyto vysoce nestabilní tvary jsou nejlepším výchozím stavem pro proces atomizace. Jsou to velmi tenké proudy nebo vrstvy kapaliny. Proces atomizace pak nastává velmi rychle - tenký proud se rozpadá na řadu po sobě jdoucích kulových kapiček. Tento efekt se nazývá Plateau-Rayleighova nestabilita a lze ji pozorovat například u proudu vody tekoucí z kohoutku.

Proces vzniku kapičky při vibračně indukované atomizaci popsali ve svém článku "*Vibration-induced drop atomization and the numerical simulation of low-frequency single-droplet ejection*" (Vibračně indukovaná atomizace kapky a numerická simulace oddělení jediné kapičky při nízké frekvenci) autoři Ashley J. James, Marc K. Smith a Ari Glezer.<sup>[14]</sup> I když je následující popis dělán pro kapku, lze stejný průběh pozorovat i na souvislé vrstvě kapaliny. K ilustraci poslouží obrázek 14.



Obrázek 14: Schématické znázornění průběhu atomizace kapky na kmitající membráně. Vše je znázorněno z pohledu pozorovatele spojeného s membránou, jde proto o relativní popis vzhledem k membráně. Červené šipky znázorňují směr relativní rychlosti, černé směr proudění kapaliny. Nakresleno dle [14] a [25].

Počáteční konfigurace je zachycena v části a). Máme kapku vody umístěnou na kmitající membráně a pozorovatele taktéž na membráně. Ten při pozorování kapky nevnímá ušavý pohyb - kmity membrány, pozoruje pouze relativní pohyb kapky vzhledem k membráně. Po uvedení membrány do pohybu s dostatečnou amplitudou zrychlení dojde na povrchu kapky ke vzniku povrchových vln. Ty v oblastech velkých amplitud zrychlení potřebných pro dosažení atomizace bývají značně složité a chaotické. Zde v části b) byla nastavena frekvence tak, že na povrchu kapky vznikla pouze jediná vlna. Její střed se právě pohybuje ke své dolní úvratě - vzniká zde propad (dolík). Voda při tom proudí ze středu k okrajům kapky, jak znázorňují černé šipky, kde zase vznikl hřbet vlny. Když membrána dosáhne úvratě, dojde ke změně směru relativních rychlostí. Voda proudí v části c) od okrajů do středu kapky, kde v části d) dochází k vystříknutí směrem vzhůru. Při podprahových amplitudách by zde pouze vznikl hřbet stojaté vlny a proces by pokračoval opět ke vzniku propadu. Při nadprahových amplitudách ale voda vystříkne tak intenzivně, že se projeví Plateau-Rayleighova nestabilita a na konci proudu (hřbetu) dojde v části e) k oddělení kapičky. Kapička při tom nemusí být vystříknuta nutně směrem vzhůru. Někdy k oddělení dochází až ve fázi, kdy proud na středu kapky už padá zpět dolů. Potom se oddělená kapička pohybuje taktéž dolů směrem k primární kapce. Pokud oddělená kapička dopadá zpět na primární kapku, nemusí vždy dojít



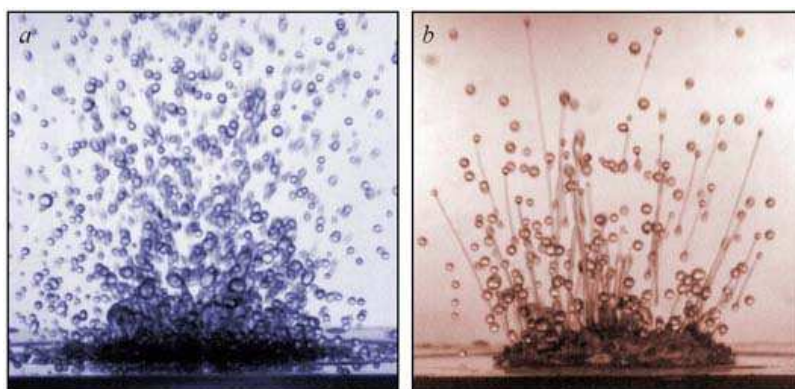
---

## Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin

---

k okamžitému splnutí. Někdy se (zejména u kapalin s nízkou viskozitou) kapička od volného povrchu odrazí a může to opakovat i několikrát. Příčinou je, že k přerušení vrstvy vzduchu mezi kapkami je potřeba čas (cca 1 ms), aby vzduch stačil prouděním odtéct a kapky mohly splynout. Pokud je ale vlnění dostatečně rychlé, tak ještě před přetržením vrstvy vzduchu dojde k vymrštění kapky vzhůru.<sup>[15]</sup>

Ačkoli podstata atomizace je vždy stejná, konkrétní podoby se různí v závislosti na buzení a vlastnostech kapaliny. V části o Faradayových vlnách bylo ukázáno, že s rostoucí frekvencí klesá vlnová délka, čemuž u atomizace odpovídá velikost oddělené kapičky. Při nižších frekvencích proto pozorujeme poměrně velké kapky, zatímco při frekvencích v řádech tisíců hertzů dostáváme inhalační mlhu. Z vlastností kapaliny se nejvýrazněji projevuje viskozita. Zatímco při nižších viskozitách se kapička odděluje téměř okamžitě, u kapalin s velkou viskozitou dochází k vystříknutí dlouhých pramínků a atomizace na nich bývá často vícenásobná. Kromě toho k ní nedochází pouze na vrcholu, ale také u kořene pramínku, který se tak celý oddělí od primární vrstvy kapaliny a následně může ve vzduchu i celkově zatomizovat, takže se promění na řadu po sobě jdoucích kapiček. Na internetu jsou dostupná zpomalená videa, na kterých je proces atomizace nádherně vidět. Odkaz na jedno, na kterém je pěkně vidět atomizace pramínků vystřikujících z viskózní kapaliny, je v seznamu použitých zdrojů pod číslem [25]. Srovnání kapalin s různými viskozitami je na obrázku 15.



Obrázek 15: a) atomizace kapky vody, b) atomizace roztoku vody a glycerolu. U vody, která má poměrně nízkou viskozitu, vidíme množství kapiček oddělených z primární kapky téměř okamžitě, zatímco u směsi s glycerolem, která má relativně velkou viskozitu, se z povrchu táhnou dlouhé pramínky, které nakonec také atomizují. Zdroj: <http://www-old.me.gatech.edu/bvukasinovic/dropletjection.html>.

### 2.3 Děje při atomizaci kapaliny na membráně

V předchozí kapitole byla ilustrována podstata procesu atomizace na malé kapce. Tato kapitola se bude věnovat dějům při atomizaci kapaliny umístěné na membráně, kterou lze realizovat například zvýšením amplitudy při vizualizaci Faradayových vln na reproduktoru. Vychází z práce "Vibration-induced drop atomization and bursting" od autorů článku z předchozí kapitoly a Bojana Vukasinovice.<sup>[15]</sup> Autoři tento děj popsali opět pro samotnou kapku umístěnou na membráně, nicméně stejný průběh lze pozorovat i u souvislé vrstvy kapaliny.

Uvažujme systém s membránou s vlastní úhlovou frekvencí  $\Omega$ , která se řídí známým vztahem z dynamiky

$$\Omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}, \quad (2.1)$$

kde  $k^*$  se nazývá zobecněná tuhost systému a  $m^*$  zobecněná hmotnost. Zde je důležité, že s rostoucí zobecněnou hmotností vlastní frekvence klesá a naopak, což má zásadní vliv v kontextu procesu atomizace. Během atomizace mohou nastat po oddělení kapičky dvě možnosti: buďto oddělená kapička dopadne zpět na membránu, kde se v závislosti na konfiguraci může a nemusí sloučit s původní vrstvou kapaliny, nebo dopadne mimo ni a hmotnost systému klesá. Z toho plyne, že při atomizaci se vlivem postupného snižování hmotnosti kapaliny zvyšuje rezonanční frekvence systému a právě vliv těchto změn na proces atomizace je předmětem experimentálního i teoretického zkoumání popsaného ve zmíněné práci.

Pro své experimenty autoři použili po obvodu vetknutou kruhovou membránu buzenou prostřednictvím piezoelektrického keramického elementu napětím o konstantní amplitudě při konstantní frekvenci. V závislosti na poloze budící frekvence vzhledem k rezonanční frekvenci lze rozlišit dva případy, a to pro podrezonanční a nadrezonanční buzení. Buzení přesně rezonanční frekvencí lze vzhledem ke stejnému průběhu zařadit do podrezonanční kategorie. V obou případech je nutné se s frekvencí pohybovat v dostatečné blízkosti rezonanční frekvence, aby byl jev dobře patrný.

V prvním případě tedy uvažujeme vrstvu kapaliny na membráně buzenou podrezonančně. Bezprostředně po zapnutí buzení dojde ke krátkému přechodovému jevu, po jehož odeznění lze naměřit očekávanou závislost amplitudy zrychlení na čase. Ze vztahu pro vlastní frekvenci (3.1) plyne, že snížení hmotnosti způsobí zvýšení rezonanční frekvence systému. Jak tedy kapalina atomizuje a její hmotnost vlivem vystříkávání kapiček mimo membránu klesá, systém se vzdaluje od rezonanční frekvence, proto míra atomizace klesá až ustane docela. V tomto stavu vlastně amplituda zrychlení odpovídá prahové hodnotě pro počátek atomizace. Pokud by byla budící frekvence příliš daleko od rezonanční frekvence systému, došlo by k úplnému zatomizování kapaliny ještě před dosažením zmíněného rovnovážného stavu. Hmotnost kapaliny na membráně tedy klesne na nulu. Je zřejmé, že to nastane tehdy, pokud je amplituda zrychlení nezátíženého systému pořád vyšší než prahová hodnota pro počátek atomizace.

Ve druhém případě bude kapalina buzena nadrezonančně. Stejně jako u podrezonančního buzení dojde k poklesu hmotnosti vlivem atomizace a nárůstu rezonanční frekvence. Ta se v první fázi blíží k budící frekvenci a míra atomizace se tím zvyšuje. Dále mohou nastat dvě možnosti. Pokud by byla budící frekvence příliš daleko od počáteční rezonanční frekvence, došlo by k úplnému zatomizování kapaliny ještě před tím, než se budící a rezonanční frekvence vyrovnají. Je zřejmé, že to nastane tehdy, když je budící frekvence vyšší než rezonanční frekvence nezátíženého systému. V opačném případě dojde k vyrovnání budící a rezonanční frekvence a dále se systém bude chovat jako při podrezonančním buzení.

Celá tato část se dá shrnout tak, že pokud je buzení konstantní a počáteční amplituda zrychlení větší než prahová hodnota pro atomizaci, může v závislosti na konkrétní frekvenčně-amplitudové charakteristice systém buďto dospět do rovnovážného stavu, kdy atomizace ustane a amplituda zrychlení odpovídá zmíněné prahové hodnotě, nebo kapalina zatomizuje úplně - dojde k rozprášení kapaliny z membrány do okolí. Pokud bychom v tomto případě vystříkávání kapiček mimo membránu zabránili, probíhal by jev atomizace nepřetržitě.

### 3. Kmitání kapalin v praxi

#### 3.1 Fluid-structure interaction

Toto odvětví, volně přeloženo jako interakce tekutina-konstrukce, se zabývá tím, jak je pevné těleso ovlivňováno prouděním tekutiny, která je s ním v kontaktu a naopak. Takové problémy jsou dost náročné na matematické modelování, zpravidla jsou multidisciplinární povahy a silně nelineární. Řešit je analyticky je většinou nemožné a laboratorní experimenty jsou limitované velikostí modelů, proto se používají numerické počítačové simulace, jejichž vývoj jde v poslední době rychle dopředu.<sup>[12]</sup>

Protože do tekutin spadají kromě kapalin i plyny, zahrnuje toto odvětví kromě problémů hydrodynamiky i problémy aerodynamiky. Faradayovy vlny jsou příkladem, že pevné těleso může rozkmitat tekutinu, která je s ním v kontaktu. Funguje to i naopak, a tak v roce 1940 silný vítr rozkmital most Tacoma Narrows, který se následně zřítíl. Příčinou byl jev zvaný aeroelastické chvění.

Aeroelastické chvění má kromě zničených mostů na svědomí i havárie letadel, kdy došlo vlivem chvění k poškození křídel. Je také příčinou vlání vlajky ve větru nebo chrápání, které je způsobeno chvěním měkkých tkání na patře. Chvění pozorujeme především u tenkých těles, kde je délka větší než šířka, která je výrazně větší než tloušťka. Princip spočívá v součinnosti dvou kmitových módů, zpravidla to je ohýbání a kroucení. Vstupními podmínkami je, aby měly oba přibližně stejnou vlastní frekvenci a aby těleso bylo vystaveno stálému proudění tekutiny. Za této konfigurace se po překročení kritické rychlosti proudění oba módy navzájem zesilují, přičemž proudění tekutiny dodává potřebnou energii. To může vést až k poškození nebo zničení tělesa. Tento efekt se nazývá 1:1 rezonance.<sup>[19]</sup>

Chvění může kromě proudu vzduchu způsobit i proud kapaliny. Na rozdíl od vzduchu ale kapalina kmity značně tlumí, takže je jev mnohem slabší. Přesto proud vody v roce 2004 rozechvěl ploutve na kýlu dvou závodních jachet. U jedné z nich došlo až ke zničení kýlu a jachta se následně převrhla. Obě tyto jachty měly ploutev z kompozitního materiálu, který se ukázal být náchylný k tomuto efektu.<sup>[2]</sup>

I když je chvění většinou nepříznivý jev, lze ho i využít ku prospěchu, například u hudebních nástrojů nebo při získávání energie. Studie potvrdila, že lze získávat elektrickou energii prostřednictvím ohýbání piezoelektrického prvku ve viskózním proudění.<sup>[1]</sup> Takový prvek potom musí být navržen tak, aby byla získaná energie co největší, ale aby přitom nedošlo k jeho poškození.

Kromě předcházení katastrof, které značně urychlily rozvoj tohoto odvětví, nachází FSI uplatnění i v medicíně a biologii například při studiu interakce mezi krví a srdcem nebo cévní stěnou, dynamiky ve vnitřním uchu, pohyblivosti spermií nebo i plavání medúz.<sup>[12]</sup>

#### 3.2 Inhalátory (nebulizátory)

Inhalátory jsou zařízení, jejichž úkolem je dostat léčivo ve formě aerosolu do plic. V závislosti na způsobu atomizace a dopravy léčiva existují různé typy inhalátorů. Někdy se používá název nebulizátory, kterým se označují ty typy, které vytváří z kapalného léčiva inhalační mlhu bez nutnosti použití tlakových nádobek. Skládají se zpravidla z atomizačního

zařízení, na které je napojena dýchací maska. Důležitými parametry jsou velikost kapiček v inhalační mlze, která má vliv na to, kam až se léčivo v dýchacím traktu dostane, a míra využitelnosti léčiva, kde jde o to, aby bylo možné zatอมizovat co největší množství léčiva a aby nedocházelo k velkým ztrátám při dopravě.

Z konstrukčního hlediska existuje řada různých typů nebulizátorů. Mechanické nebulizátory využívají k atomizaci a dopravě léčiva mechanickou energii zpravidla dodávanou člověkem. Elektrické nebulizátory jsou místo člověka poháněny elektrickou energií. Dají se rozdělit na kompresorové (tryskové) a ultrazvukové.

Kompresorové nebulizátory pracují na stejném principu jako atomizér. Kompresor vytváří proud vzduchu, který nasává léčivo a žene je tryskou ven. Jejich výhodou je vysoký rozprašovací výkon a možnost pracovat i s viskóznějšími a hustšími léčivy, ale nevýhodou je velký hluk, větší příkon a výskyt větších částic v mlze.<sup>[21]</sup>

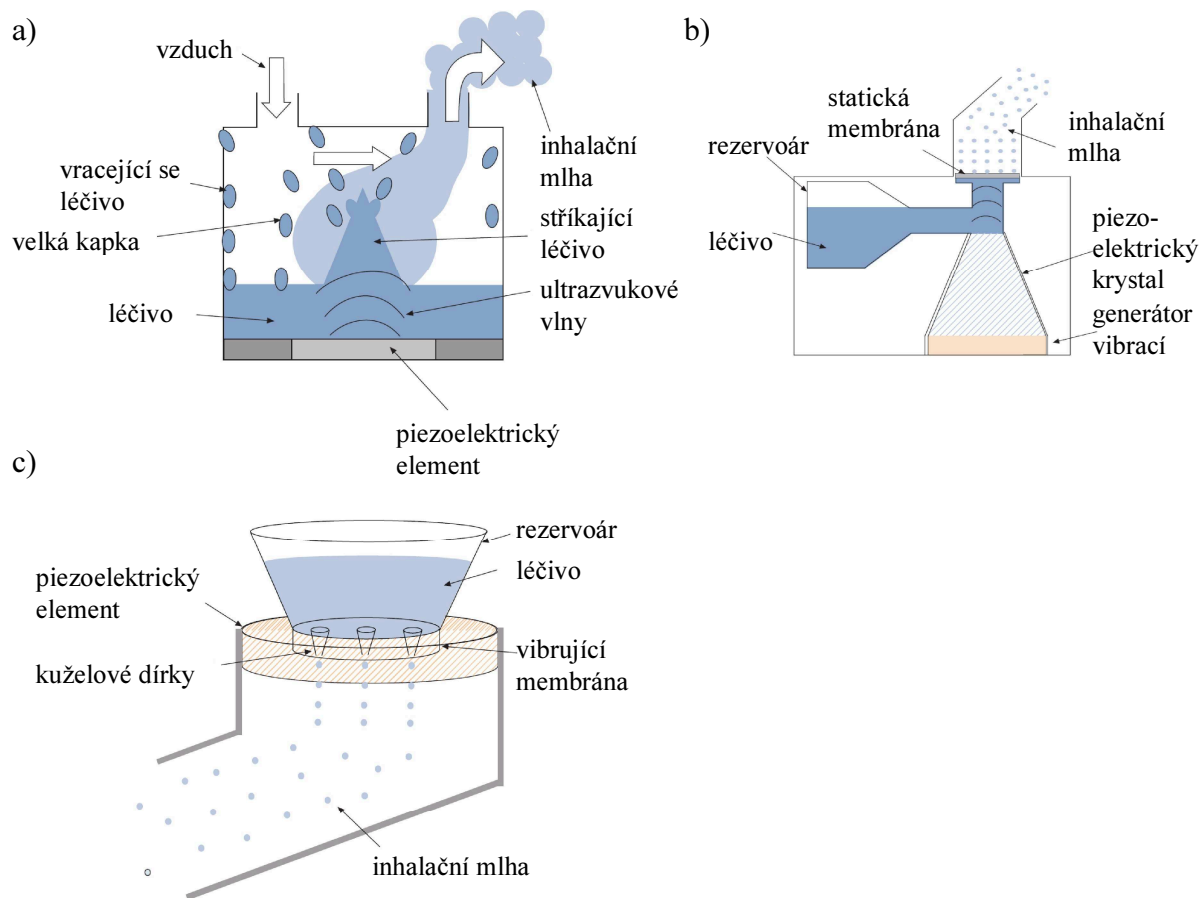
Ultrazvukový nebulizátor využívá k vytvoření inhalační mlhy vibračně indukovanou atomizaci. Vibrace jsou často přenášeny z piezoelektrického elementu na nádržku s léčivem pomocí vody. Je to z toho důvodu, že kdyby bylo léčivo v přímém kontaktu s piezoelektrickým elementem, docházelo by k nežádoucímu ohřívání, a také kvůli snazší dezinfekci nádržky oproti piezoelektrickému elementu. Léčivo v nádržce atomizuje - vzniká inhalační mlha, která je pomocí toku vzduchu vháněného ventilátorem unášena do dýchací masky. Frekvence vibrací se pohybují od 1,2 do 2,4 MHz. Výhody ultrazvukového nebulizátoru jsou tichý chod, menší příkon a možnost regulovat velikost kapiček pomocí změny frekvence. Nevýhodou je horší použitelnost u hustších a viskóznějších léčiv, kde jsou potřeba vysoké amplitudy zrychlení.<sup>[21], [26]</sup>

Nejnovejším typem jsou membránové nebulizátory. Základní princip spočívá v protlačování léčiva skrz membránu, do které jsou laserem vyřezány miniaturní dírký. Počet dírek se pohybuje v řádu tisíců. Membránové nebulizátory se dělí na nebulizátory se statickou membránou a nebulizátory s vibrující membránou. Nebulizátory se statickou membránou používají k protlačení léčiva přes membránu vibrující element umístěný u dna, zatímco nebulizátory s vibrující membránou používají ke stejnému účelu vibrace membrány samotné. Za tímto účelem je membrána opatřena piezoelektrickým elementem. Výhody membránových nebulizátorů jsou především menší rozměry, rychlejší proces atomizace a nízké ohřívání léčiva, nevýhodami jsou vyšší cena, horší dezinfekce membrány a riziko ucpávání membrány při použití suspenzí.<sup>[26]</sup>



Obrázek 16: Ultrazvukový nebulizátor G-TECH. Zdroj: <http://www.accumed.com.br>.

## Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin



Obrázek 17: Schémata ultrazvukových nebulizátorů. a) klasický ultrazvukový nebulizátor, b) nebulizátor se statickou membránou, c) nebulizátor s vibrující membránou. Zdroj: [26], upraveno.

### 3.3 Zvlhčovače vzduchu

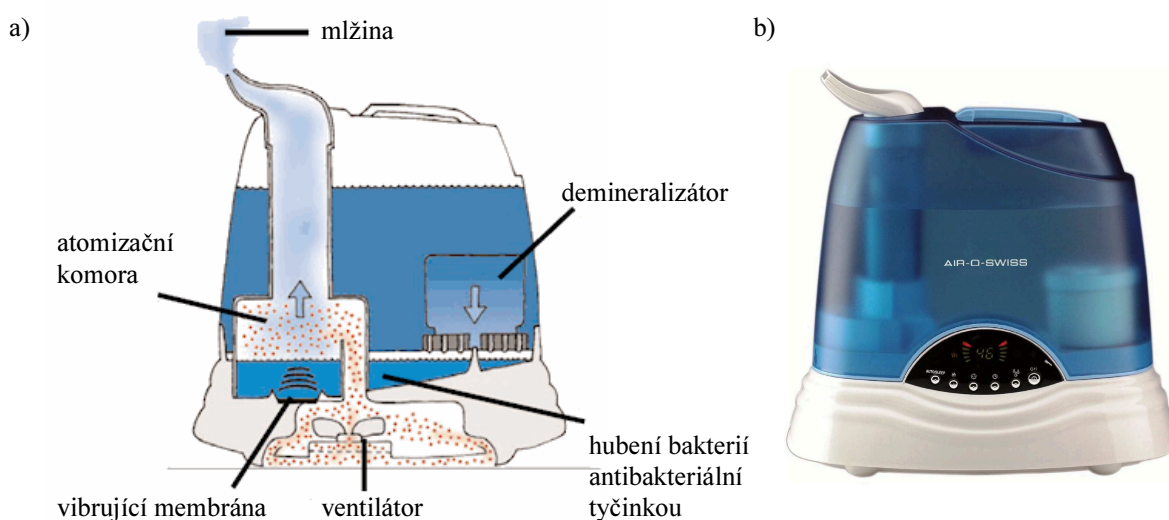
Zvlhčovače vzduchu jsou zařízení, jejichž účelem je dostat do vzduchu v místnosti vodu a zvýšit tím vlhkost vzduchu, pokud je příliš nízká. Podle principu zvlhčování lze rozlišit několik typů zvlhčovačů.

Asi nejznámější jsou parní zvlhčovače. Ty ohřívají vodu pomocí topného tělíska a vzniklá pára uniká do místnosti, kde se tak zvlhčí vzduch. Protože je pára horká, musí být před výstupem ze zařízení ochlazená na bezpečnou teplotu. Výhodami jsou efektivita procesu, protože se pára dobře mísí se vzduchem, a zahubení bakterií vysokou teplotou. Nevýhodou je vysoká energetická náročnost.

Zvlhčovače se studeným odparem eliminují ohřívání vody, místo něj využívají přirozené odpařování při pokojové teplotě. Voda je rozlévána po speciálním povrchu a ventilátorem postupně odpařována. Výhodou je přirozený způsob zvlhčování, při kterém by nemělo dojít k převlhčení místnosti, protože jakmile je vzduch nasycen, už se další voda neodpaří. Další výhodou je vyčištění vzduchu od větších prachových částic. Nevýhodou je riziko úniku bakterií do vzduchu při nedostatečné hygieně.<sup>[29]</sup>



Ultrazvukové zvlhčovače fungují prakticky stejně jako ultrazvukové nebulizátory. Voda je přiváděna na vibrující membránu, kde je zatomizována do mlžiny, která je pomocí ventilátoru vyháněna ven z přístroje. Ještě před atomizací může být použitím různých technologií voda demineralizována a bakterie v ní zahubeny. Některé zvlhčovače mají i ohřev vody, který probíhá těsně před atomizací, za účelem lepšího hubení bakterií. Výhodami ultrazvukových zvlhčovačů jsou nízká energetická náročnost, vysoký zvlhčovací výkon a tichý chod. Nevýhodou je horší hygiena, zejména pokud není zvlhčovač vybaven ohřevem nebo antibakteriálním zařízením. <sup>[11], [29]</sup>



Obrázek 18: Ultrazvukový zvlhčovač Air-O-Swiss 7135. a) schéma, b) skutečné provedení. Princip činnosti: Voda z nádrže nejprve projde demineralizátorem, kde je pomocí speciálních granulí zbavena problematických minerálů. Dále přichází do kontaktu s antibakteriální tyčinkou, která hubí bakterie pomocí iontů stříbra. Vodu lze volitelně ohřát na 80°C. To zlepšuje eliminaci bakterií, ale zvedne příkon ze 45 W na 140 W. V atomizační komoře je voda pomocí ultrazvukového vibrátoru zatomizována na jemnou mlhu, která se mísí se vzduchem přiváděným ventilátorem. Směs je hnána odpařovací komorou do místnosti, kde dochází k odpařování a zvyšování vlhkosti. Zdroj: [11], upraveno.

### 3.4 Ultrazvukové zpracování kapalin

Toto odvětví se zabývá využitím efektů šíření ultrazvukových vln kapalinou pro různé účely.

Stejně jako vzduchem se i kapalinou zvukové vlny šíří ve formě zhušťování a zředování. Pokud mají dostatečnou intenzitu, tak ve fázi zředování mohou překonat přitažlivé síly molekul a vznikají bublinky, které zase rychle kolabují, což je známý jev nazývaný kavitace. Teplota v jejich okolí je až 4 000 K a tlak přesahuje 100 MPa. Při kolapsu těchto bublinek vzniká velké množství energie, které se využívá například při syntéze chemických látek. V blízkosti kolabující bublinky vznikají smykové síly schopné přetrhat chemické vazby v rozpuštěné látce, například v polymerech, což bylo jedno z prvních využití tohoto jevu. <sup>[20]</sup>

Mezi další využití ultrazvukového zpracování kapalin patří rozrušování buněčných membrán, příprava emulzí, homogenizace, rovnoměrné rozptylování pevných částic v kapalině, odplynění, čištění povrchů a další.

## 4. Provedené experimenty

### 4.1 Experimentální zařízení

#### Generátor vibrací

Tesla BK 124, v.č. 417474

Důležité parametry udávané výrobcem:

Frekvenční rozsah: 10 Hz - 1 MHz

Nelineární zkreslení (10 Hz - 100 kHz):  $\leq 0,2 \%$

Stabilita kmitočtu:  $\pm 2 \cdot 10^{-3}/10 \text{ min}$

Výstupní napětí:  $> 1 V_{ef}/600 \Omega$

#### Zesilovač

MMF LV 102.1, v.č. 2482/8

Důležité parametry udávané výrobcem:

Frekvenční rozsah: 3 Hz - 40 kHz

Výstupní impedance:  $3 \Omega$

Výstupní výkon ( $3 \Omega$ ): 50 W

Harmonické zkreslení při 1 kHz:  $< 0,6 \%$

#### Vibrátor

VEB Robotron-Meßelektronik "Otto Schön" typ 11077, v.č. 01029

Parametry nejsou známy.

#### Kamera

Baumer HXC20, v.č. 0006364812

Důležité parametry udávané výrobcem:

Rozlišení:  $2048 \times 1088 \text{ px}$ .

Frekvence snímání: 337 FPS

Poznámka: z technických důvodů byla frekvence snímání pouze 257 FPS

#### Akcelerometr

PCB 352C03, v.č. LW 154897

Důležité parametry udávané výrobcem:

Čitlivost: 10 mV/g

Frekvenční rozsah ( $\pm 5 \%$ ): 0,5 Hz - 10 kHz

Rozsah měření:  $\pm 500 \text{ g}$

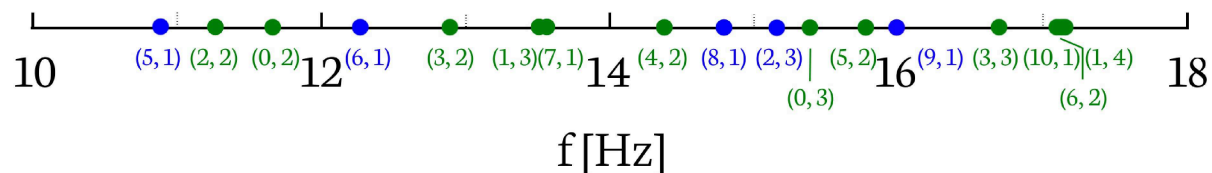


Obrázek 19: Experimentální sestava.

## 4.2 Kmitové módy nízkoviskózní kapaliny v rozsahu 10 - 18 Hz

Cílem tohoto experimentu bylo pokusit se najít co nejvíce kmitových módů ve frekvenčním rozsahu 10 - 18 Hz a srovnat jejich vlastní tvary s výsledky lineárního matematického modelu popsaného v kapitole 1.2. Spodní hranice tohoto rozsahu byla dána omezením generátoru vibrací, horní rychle se zvyšující hustotou kmitových módů, kde by bylo zapotřebí přesně znát vlastnosti použité kapaliny a kde se také začíná projevovat efekt viskozity a lineární model už nelze použít (viz. kapitola 1.3.4). Použitou kapalinou byl roztok vody a mléka, objemově cca 1:1. Ten byl vybrán s ohledem na viditelnost vlastních tvarů na fotografiích, kde se osvědčila jeho světlá barva a neprůsvitnost.

V první fázi byly spočítány vlastní frekvence jednotlivých subharmonických módů vyskytujících se v daném frekvenčním rozsahu. Zaznačeny jsou na obrázku 20. Protože použitá kapalina nebyla dopředu známá, byly vlastnosti kapaliny provizorně stanoveny podle vody se sníženým povrchovým napětím oproti tabulkové hodnotě, která platí pro destilovanou vodu. To poskytlo orientační přehled o tom, kde se dají vybudit jaké kmitové módy.

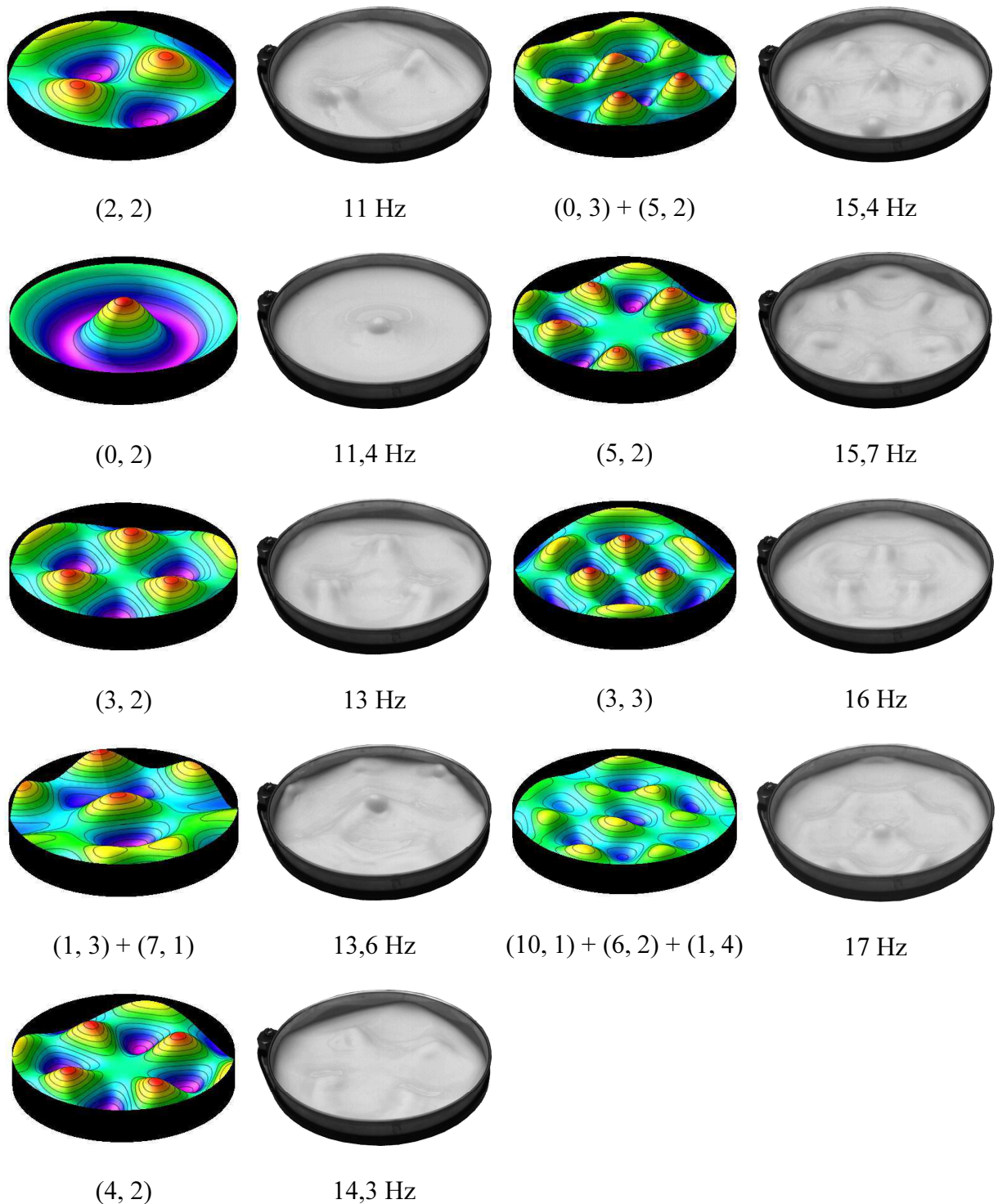


Obrázek 20: Vlastní frekvence všech subharmonických kmitových módů v rozmezí 10 - 18 Hz pro kapalinu s  $\sigma = 0,05 \text{ N/m}$ ;  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  a  $h = 1 \text{ cm}$  v kruhové nádobě o průměru 10 cm. Zeleně označené kmitové módy jsou ty, které se podařilo při experimentu vybudit ať už samostatně, nebo v kombinaci s jinými módy.

S orientační znalostí vlastních frekvencí a sledu módů bylo možné se pustit do hledání. Hodnota frekvence byla odečítána z frekvenční analýzy měřené pomocí akcelerometru. Srovnání pozorovaných a teoretických vlastních tvarů je na obrázku 21.



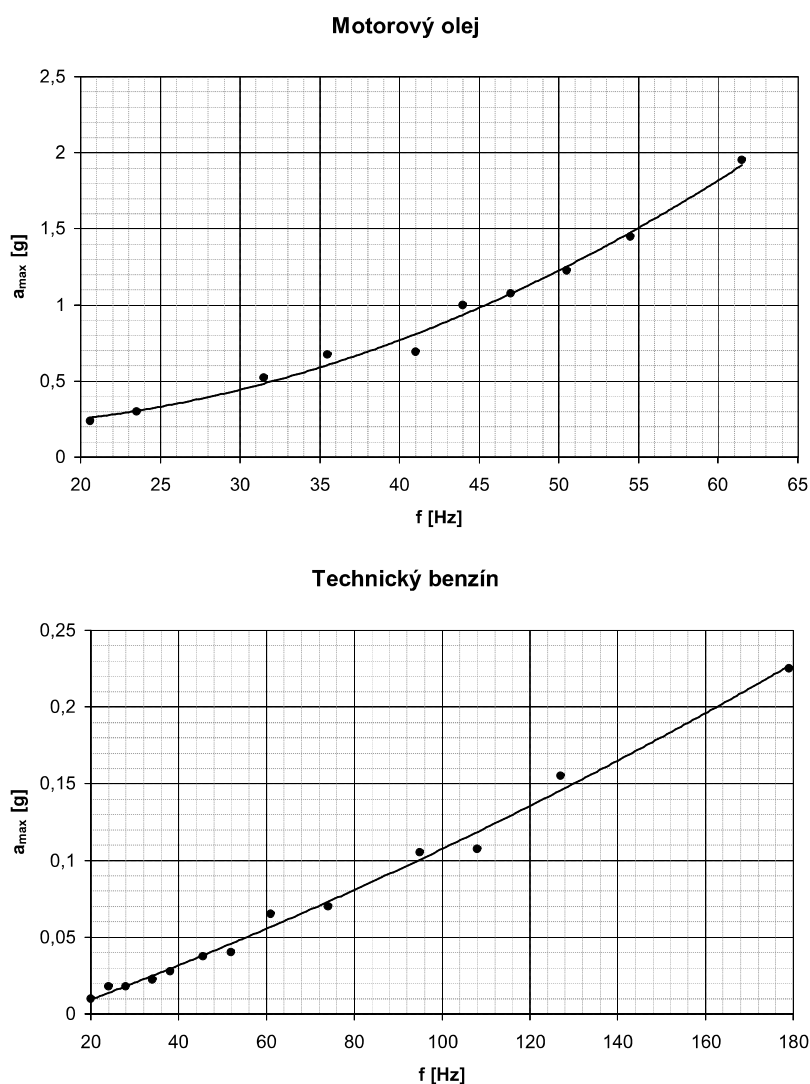
## Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin



Obrázek 21: Srovnání vlastních tvarů vykreslených pomocí programu Maple s experimentálně pozorovanými.

### 4.3 Měření prahové amplitudy zrychlení

Cílem tohoto experimentu bylo naměřit závislost prahové amplitudy zrychlení pro vznik Faradayových vln na frekvenci pro kapaliny s různou viskozitou. K tomu bylo potřeba najít kapaliny se známou hodnotou kinematické viskozity, kterými byly motorový olej Castrol Power 1 4T 10W-40, jehož  $\nu = 70 \text{ mm}^2/\text{s}$ , a technický benzín s  $\nu = 0,98 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Frekvenční rozsah byl zvolen od 20 Hz až kam zesilovač nebo jiné vlivy dovolily. Dolní mez je dána tím, že pod 20 Hz je hustota kmitových módů už hodně řídká, a proto se na výsledné křivce začínají výrazně projevovat takzvané rezonanční jazyky jednotlivých kmitových módů, tedy jejich oblasti nestability. Je to vlastně opačně oproti předchozímu experimentu, kde naopak byla nízká hustota módů žádoucí. Naměřené hodnoty byly zpracovány do grafů na obrázku 22 a aproximovány polynomem stupně 2.



Obrázek 22: Grafy závislosti prahové amplitudy zrychlení pro vznik Faradayových vln na frekvenci pro motorový olej a technický benzín.

### 4.4 Diskuze

Cílem prvního experimentu bylo srovnat skutečné vlastní tvary u kapaliny s nízkou viskozitou při nízkých frekvencích s teoretickými. Obrázek 21 svědčí o tom, že se dobře shodovaly, čímž se potvrdila použitelnost lineární teorie pro ideální kapalinu i pro reálné kapaliny s nízkou viskozitou při nízkých frekvencích. Jak je ale vidět na obrázku 12 b) v kapitole 1.3.4, který pochází také z tohoto experimentu, při frekvenci 32 Hz se už tato teorie nedá použít a platí teorie vlastních tvarů pro viskózní kapalinu popsaná ve zmíněné kapitole. Svědčí o tom už jen fakt, že u viskózní kapaliny se s rostoucí frekvencí zkracuje disipační délka, takže klesá vliv okrajových podmínek daných nádobou. Ty se pak projevují jen do určité vzdálenosti od okraje, což je na zmíněném obrázku také vidět i v porovnání s obrázkem 12 a), kde už je viskozita větší a disipační délka velice malá, takže proužky jsou ovlivňovány až velice blízko u kraje nádoby. Naproti tomu u neviskózní kapaliny je díky neexistenci tečného napětí disipační délka při zanedbání dalšího tlumení nekonečná, tím pádem okrajové podmínky ovlivňují vlastní tvary po celé ploše bez ohledu na frekvenci a lineární teorie tu při splnění dalších linearizačních předpokladů platí.

Na daném rozsahu se podařilo vybudit dobré množství kmitových módů, ale je znatelné, že z módů s číslem  $m = 1$  se podařilo vybudit jen dva z šesti, které se projevovaly v kombinaci s jinými módy. K tomu se ještě mód (10, 1) projevoval pouze slabě, což bylo zohledněno v matematickém modelu. Tyto módy jsou zřejmě poměrně slabé ve srovnání s ostatními. Důvodem může být to, že se všechny jejich kmitny nacházejí u stěn nádoby, kde dochází ke ztrátám třením. Dále se nepodařilo vybudit mód (2, 3), ale to může být tím, že byl očekáván samostatně, místo toho měla být hledána kombinace tohoto módu s módem (0, 3). Kromě toho situaci komplikovalo manuální nastavování frekvence kolečkem s rozsahem 10 - 100 Hz, a to především v situacích, kde bylo potřeba dostat se s frekvencí do velice úzkého rozsahu, což je i případ módu (2, 3).

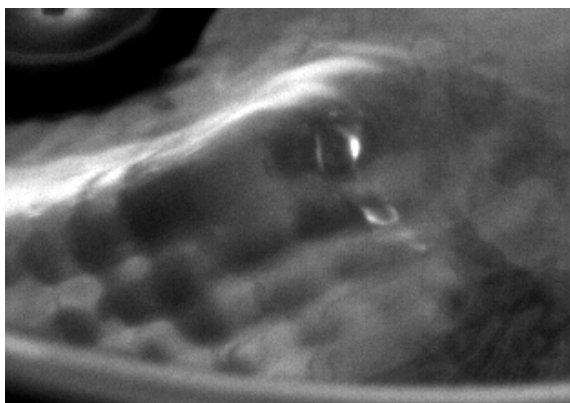
Cílem druhého experimentu bylo naměřit závislost prahového zrychlení pro vznik Faradayových vln na frekvenci pro různé kapaliny o známých viskozitách. Zde je nutné podotknout, že toto měření bylo prováděno s cílem zachytit trend, nikoli naměřit co nejpřesnější hodnoty, což se projevuje poměrně častými velkými odchylkami naměřených bodů od spojnice trendu v grafech na obrázku 22. V opačném případě by bylo nutné k měření přistupovat mnohem pečlivěji a určitě by vyžadovalo i lepší zařízení. Přesto se podařilo poměrně dobře zachytit trend a výsledek byl použit v grafu na obrázku 9 v kapitole 1.3.3.

Při obou experimentech se projevil některé nežádoucí jevy. Prvním z nich bylo obsažení vyšších harmonických frekvencí v signálu přicházejícím do vibrátoru, což odhalilo měření frekvenční analýzy pomocí akcelerometru. Vznik vyšších harmonických frekvencí je projevem nelineárního zkreslení zesilovačů. Zde bylo hodně výrazné při nízkých frekvencích, s rostoucí frekvencí jeho vliv klesal. Druhým byly kapilární vlny vzniklé deformováním menisku. Meniskus je útvar vzniklý u stěn nádoby vlivem jejich smáčivosti. Jak nádoba s kapalinou zrychluje, meniskus se deformuje a dochází k emitování vln, které kmitají izochronně a narušují pozorované vlastní tvary.<sup>[6]</sup> Tyto kapilární vlny byly dobře pozorovatelné pouhým okem před překročením prahové amplitudy zrychlení, ale na kameře nebyly dobře vidět.

Na obrázku 23 jsou zachyceny nežádoucí vlny na kmitnách módů (4, 2) v případě technického benzínu a (5, 2) v případě roztoku mléka a vody. Tyto vlny se nejvíce projevovaly na nejsilnějších kmitnách. S rostoucí viskozitou jejich intenzita slábla.

U motorového oleje se neprojevily prakticky vůbec. V případě kapilárních vln je to dáno mimo jiné zkracující se disipační délkou, díky které klesá vzdálenost od okraje, do které se tyto vlny dostávají. Podíl nelineárního zkreslení na nežádoucích vlnách je těžké bez dalších experimentů odhadnout.

a)



b)

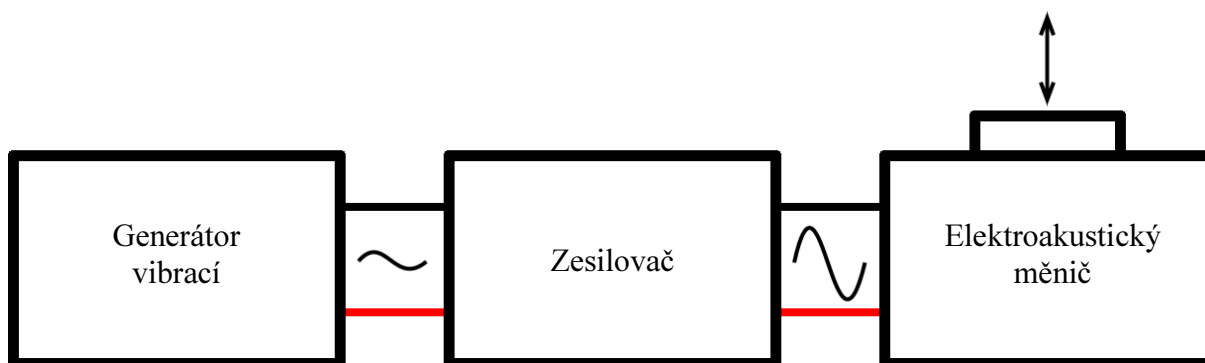


Obrázek 23: Nežádoucí vlny na kmitně a) módu (4, 2) u technického benzínu a b) módu (5, 2) u roztoku mléka a vody.

## 5. Návrh zařízení pro vizualizaci Faradayových vln

### 5.1 Obecné schéma

Zařízení pro vizualizaci Faradayových vln a atomizace mohou mít různé podoby, ale jejich prvkové schéma je vždy stejné. Cílem těchto zařízení je rozkmitat nádobu s kapalinou. Vibrace vznikají přeměnou elektrické energie na mechanickou v elektroakustickém měniči. Ten ke své funkci potřebuje dostávat patřičný elektrický signál, a ten vytváří generátor vibrací. Protože síla signálu vycházejícího z generátoru je často poměrně slabá a sotva stačí na rozkmitání měniče, je nutné signál posílit dodáním další energie. K tomu slouží zesilovač. Každé zařízení pro vizualizaci daných jevů se tedy skládá z vibračního generátoru, zesilovače a elektroakustického měniče. Každý z těchto prvků může být buď samostatné zařízení, nebo může být více prvků součástí jediného zařízení.



Obrázek 24: Blokové schéma experimentálního zařízení.

### 5.2 Prvky zařízení

#### 5.2.1 Generátor vibrací

Generátorem vibrací může být buďto speciální zařízení, které se používá obvykle u náročných experimentů, nebo pro nenáročné pokusy libovolné multimediální zařízení se zvukovým výstupem a příslušným softwarem (mobilní telefon, počítač).

Důležitými parametry generátoru vibrací jsou frekvenční rozsah, způsob regulace frekvence a různé chyby a zkreslení.

Frekvenční rozsah volíme podle konkrétní aplikace. Pokud chceme zkoumat kmitové módy při velmi nízkých frekvencích, které lze snadno vykreslit pomocí lineární teorie, je důležité věnovat pozornost jeho spodní hranici. Pokud naproti tomu chceme realizovat ultrazvukovou atomizaci, bude rozhodující horní hodnota.

Způsob regulace kmitočtu je důležitý především při zkoumání přechodů mezi jednotlivými módy, kde požadujeme plynulou regulaci, což může být problém u digitálních zařízení. U manuální regulace otáčením kolečka zase může být problém s přesným nastavováním frekvence, což hraje roli při hledání kmitových módů s úzkým frekvenčním rozsahem.



Ostatní směrodatné parametry jako chyba kmitočtu, nelineární zkreslení nebo stabilita kmitočtu najdeme především u profesionálnějších zařízení, kde by je měli seriózní výrobci udávat. Je dobré je znát zejména při přesných měřeních.

### 5.2.2 Zesilovač

Zesilovač může být do systému zařazen několika způsoby. Může to být samostatné zařízení propojené s generátorem vibrací a elektroakustickým měničem. Některé lepší generátory vibrací už mohou mít dostatečně silný zesilovač v sobě. Poslední možnost je zesilovač a elektroakustický měnič v jednom, typicky to jsou aktivní subwoofery.

Důležitými parametry zesilovače jsou frekvenční rozsah, výstupní výkon, výstupní impedance a zkreslení.

Frekvenční rozsah zesilovače se určuje z útlumové frekvenční charakteristiky. Protože některé součástky zesilovače jsou frekvenčně závislé, je i výsledné zesílení frekvenčně závislé. V rámci frekvenčního rozsahu zesilovače by neměl útlum být větší, než hodnota daná tolerančním pásmem, které bývá obvykle 3 dB.

Výstupní výkon je důležitý parametr, který určuje (v kombinaci s některými parametry elektroakustického měniče), jakou maximální silou bude nádobka s kapalinou rozkmitána. Čím větší je výkon, tím větší je pásmo vybuditelnosti Faradayových vln.

Výstupní impedance je důležitá především pro výběr elektroakustického měniče. Ten by měl mít ideálně stejnou impedanci, jako je výstupní impedance zesilovače, případně vyšší, ale za cenu menšího výkonu. Impedance měniče nikdy nesmí být menší než výstupní impedance zesilovače, jinak může dojít k poškození jak měniče, tak zesilovače.

Další parametry, především parametry týkající se zkreslení, jsou důležité pro náročné aplikace, proto by neměly chybět u profesionálních zesilovačů. Pro nenáročné aplikace pro výběr zesilovače postačí výše zmíněné parametry.

### 5.2.3 Elektroakustický měnič

Jako elektroakustický měnič lze typicky pro nenáročné pokusy použít reproduktor, který se volí podle frekvenčního pásma experimentů. Pro frekvence do řádově stovek hertzů se vyplatí hlubokotónový reproduktor, na vyšší frekvence širokopásmový nebo výškový reproduktor. Pro profesionální aplikace existují speciální elektrodynamické vibrátory s těžkou konstrukcí a možností montáže (např. misky) na vibrující element pomocí šroubů.

Důležitými parametry elektroakustického měniče jsou frekvenční rozsah, dlouhodobý příkon, impedance a citlivost.

Frekvenční rozsah se stanovuje podobně jako u zesilovače na základě tolerančního pásma akustického útlumu. Bez uvedení tolerančního pásma je jeho hodnota nevypovídající. Volíme ho podobně jako u generátoru vibrací tak, aby zajistil proveditelnost konkrétní aplikace.

Dlouhodobý příkon je hodnota, kterou by měnič měl bez problémů snést libovolně dlouhou dobu. Ještě se uvádí krátkodobý příkon, kterým lze měnič zatížit pouze krátkodobě. Při výběru měniče je nutné dávat si pozor, protože neseřízní výrobci často uvádějí pouze krátkodobý příkon, v horších případech ani není uvedeno, o jaký příkon jde. Ideálně by měl dlouhodobý příkon měniče odpovídat výkonu zesilovače. U hlubokotónových reproduktorů se v hudebních aplikacích často výkon zesilovače volí lehce vyšší.

Citlivost je velice důležitý parametr provázaný s výkonem, protože jedno bez druhého nevypovídá o vlastnostech měniče. Citlivost udává hladinu akustického tlaku ve vzdálenosti 1 m od měniče při výkonu 1 W. Svým způsobem je to vyjádření účinnosti měniče.

### 5.3 Možnosti realizace zařízení pro nenáročné pokusy

Následující kapitola se bude věnovat možnostem, jak si lze sestavit zařízení pro vizualizaci Faradayových vln, které poslouží pro nenáročné aplikace, např. pro domácí pokusy nebo jako učební pomůcka.

Nejjednodušší možností vhodnou zejména pro domácí pokusy je najít nějaké zvukové zařízení, například reproduktory k počítači, hi-fi věž, domácí kino apod. Protože zvuk vzniká kmitáním membrány, vyhovují tato zařízení z podstaty věci popisu experimentálních zařízení z předchozí části. Je dobré věnovat pozornost jejich parametrům, protože na nich závisí rozsah vybuditelnosti Faradayových vln. Protože největší variace vlastních tvarů se u viskózních kapalin vyskytují při nízkých frekvencích, bude ideální jako elektroakustický měnič použít hlubokotónový reproduktor (subwoofer). Při vyšších frekvencích často pozorujeme jediný vlastní tvar, u kterého se s frekvencí mění pouze jeho vlnová délka (viz. kapitola 1.3.4). Přesto pokud není hlubokotónový reproduktor k dispozici, lze provádět zajímavé pokusy i s širokopásmovými reproduktory. Díky velkému frekvenčnímu rozsahu lze do reproduktoru místo jednoduchého harmonického signálu pustit i složitější signály, například hudbu, a sledovat, jak se mění vlastní tvary. Za tímto účelem je vhodné použít kapalinu s co nejmenší viskozitou, protože čím větší je viskozita, tím strměji roste s frekvencí prahová amplituda zrychlení pro vybuzení Faradayových vln (viz. kapitola 1.3.3). Tím pádem klesá frekvenční rozsah, na kterém lze pozorovat Faradayovy vlny, aniž by docházelo k atomizaci a vystřikávání kapaliny mimo membránu.

Pokud máme vybráno experimentální zařízení, můžeme přikročit k přípravě pokusu. Z reproduktoru je potřeba sundat kryt, aby bylo možné dostat se k membráně. Pokud je membrána nepromokavá, lze kapalinu nalít přímo na ni, ale vhodnější je najít nějakou misku, kterou umístíme na membránu. K připevnění postačí kvalitnější lepicí páska. Tím je měnič s kapalinou připraven a zbývá už jen dodat mu patřičný signál. U počítačových reproduktorů je situace nejjednodušší, zdrojem signálu může být počítač s patřičným softwarem (volně dostupný program pro práci se zvukem je např. Audacity). Díky vstupu s 3,5 mm jackem lze ale také využít libovolné multimediální zařízení s tímto dnes už standardním konektorem. Výhodou pak je lepší přenosnost, protože odpadá vazba na umístění počítače. U hi-fi věží, domácích kin a dalších zařízení je potřeba zjistit možnosti vstupu signálu. Zpravidla by k nim mělo být možné pomocí příslušných redukci (3,5 mm jack, AV, HDMI) připojit mobilní telefon nebo jiná multimediální zařízení, pro která také existují softwary ke generování tónu. Za této situace je vše připraveno a mohou se začít dělat pokusy. Příklad konkrétní realizace využívající počítačové reproduktory a mobilní telefon jako zdroj signálu je na obrázku 25. Použit byl subwoofer ze sestavy Logitech X-530, k jehož membráně byla pomocí lepicí pásky přilepena hliníková miska od krému. Zesilovač je zabudován v ozvučnici subwooferu, jedná se tedy o aktivní reproduktory.



Obrázek 25: Příklad realizace experimentálního zařízení v domácích podmínkách. Vibrace jsou na kapalinu přenášeny prostřednictvím misky přilepené k membráně subwooferu lepicí páskou. Zdrojem signálu je mobilní telefon. Signál je do subwooferu přiveden přes pravý satelit, kde je vypínací tlačítko. Zesilovač je zabudován v ozvučnici, jedná se tedy o aktivní sestavu.

Druhou možností je sestavení speciálního experimentálního zařízení z jednotlivých komponentů. To se vyplatí, pokud není žádné zvukové zařízení k dispozici nebo pokud chceme mít samostatné zařízení. Výhodami jsou lepší parametry, přenosnost a možnost uzpůsobení konkrétním podmínkám. Také odpadá nutnost montáže a demontáže při každém novém pokusu.

Jednotlivé komponenty budou řešeny se zaměřením na co nejmenší finanční náročnost, protože cílem jsou nenáročné aplikace. Jako zdroj vibrací se proto vyplatí použít nějaké dostupné multimediální zařízení, například opět mobilní telefon. Zesilovač a měnič je nutné vybírat společně, aby korespondovaly příslušné parametry (viz. kapitola 6.2). Nejlevnější dostupné hi-fi zesilovače zpravidla mívají výkon od 30 W a zvládají frekvenční rozsahy od 20 Hz do 30 kHz. K zesilovači je potřeba najít odpovídající reproduktor. Nabídka reproduktorů je poměrně široká, možností je proto hodně. Důležité je, aby se jeho impedance shodovala s impedancí zesilovače. Když máme všechny tři základní prvky zařízení, zbývá vyřešit jejich vzájemné propojení. Reproduktory mívají obvykle očka na připájení drátů, zesilovače zase svorky pro sevření konců drátů. Postačí tedy dva obyčejné dráty, jejichž konce odizolujeme a první připájíme k očku na reproduktoru, druhý sevřeme do svorky na zesilovači. Propojení zesilovače a zdroje signálu závisí na vstupních konektorech zesilovače a výstupních konektorech zdroje signálu. Poslední potřebnou věcí je proto příslušný propojovací kabel. Cenově to dohromady vychází od 1500 Kč, přičemž platí, že s kvalitou komponentů ceny rychle rostou.



### Závěr

Cílem této práce bylo poskytnout základní přehled o jevech pozorovatelných na kapalině vystavené vertikálním vibracím a jejich aplikacích, provést experimenty zaměřené na tyto jevy a zabývat se možnostmi realizace experimentálního zařízení.

S výzkumy zaměřenými na popis těchto jevů začal v roce 1831 Michael Faraday a probíhají dodnes. Důvodem je velká matematická náročnost a velké množství parametrů, jejichž modifikací lze získat ještě větší množství problémů, které se tyto výzkumy snaží vyřešit. Proto tato práce z podstaty věci může pokrýt pouze ty nejdůležitější vlastnosti do omezené hloubky.

Větší pozornost je věnována rozboru lineárního matematického modelu Faradayových vln od Benjamina a Ursella z roku 1954. Přestože platí pro neviskózní kapalinu a jeho použitelnost pro reálné kapaliny je omezená, je to nejjednodušší způsob, na kterém lze pochopit základní matematicko-fyzikální zákonitosti tohoto jevu. O náročnosti problému svědčí i to, že od počátku výzkumu do vytvoření tohoto modelu uplynulo celých 123 let.

Popis různých vlastností Faradayových vln a atomizace byl zpracován tak, aby dokázal vysvětlit základní zákonitosti, které při experimentech pozorujeme, tedy především vliv změny frekvence, viskozity a tvaru nádoby na příslušné jevy.

Další část byla zaměřena na praktické aplikace těchto jevů. Velký význam tu má ultrazvuková atomizace, kterou využívají například inhalátory a zvlhčovače vzduchu.

Dalším cílem bylo provést v laboratoři experimenty zaměřené na tyto jevy. Ty byly koncipovány tak, aby je bylo možné popsat s použitím teoretické části této práce a aby bylo také možné jejich výsledky použít k ilustraci některých zde řešených vlastností. Prvním experimentem bylo hledání vlastních tvarů daných lineárním modelem a ověření jeho platnosti pro kapaliny s nízkou viskozitou při nízkých frekvencích. Druhým experimentem bylo naměřit závislost prahové amplitudy zrychlení pro vznik Faradayových vln na frekvenci pro různé kapaliny o známých viskozitách. Jeho výsledky byly použity při popisu příslušných vlastností Faradayových vln. Pořízené obrázky a videa s vlastními tvary společně se změřenými hodnotami příslušné frekvence mohou být dále použity ke konfrontaci s dalšími matematickými nebo CFD simulacemi.

Poslední část této práce se věnuje návrhu experimentálního zařízení pro vizualizaci těchto jevů. Zabývá se vlastnostmi jednotlivých jeho prvků, kterým je potřeba se při sestavování věnovat. Ve finále navrhuje různé možnosti, jak sestavit toto zařízení s ohledem na to, že předpokládáme nenáročné aplikace. Ukazuje, že ho lze snadno realizovat použitím zařízení a věcí dnes už běžně dostupných v domácnostech, což se dá využít například k popularizaci fyziky. Stejně tak může posloužit i jako učební pomůcka.

## Seznam použitých zdrojů

- [1] AKCABAY, Deniz Tolga a Yin Lu YOUNG. Hydroelastic response and energy harvesting potential of flexible piezoelectric beams in viscous flow. *Physics of Fluids*. 2012, roč. 24, vyd. 5. DOI: 10.1063/1.4719704.
- [2] BALZE, Rémy, Hervé DEVAUX a Louis JÉZÉQUEL. Study of a Hydroelastic Instability Phenomenon: Flutter of Racing Yacht Keels. *Volume 4: Advanced Manufacturing Processes; Biomedical Engineering; Multiscale Mechanics of Biological Tissues; Sciences, Engineering and Education; Multiphysics; Emerging Technologies for Inspection*. 2012, roč. 24, vyd. 5. DOI: 10.1115/esda2012-82556.
- [3] BECHHOEFER, John a kol. An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*. 1995, roč. 288, vyd. 1. DOI: 10.1017/s0022112095001169.
- [4] BENJAMIN, Thomas Brooke a URSELL, Fritz. The Stability of the Plane Free Surface of a Liquid in Vertical Periodic Motion. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1954, roč. 225, vyd. 1163, s. 505-515. DOI: 10.1098/rspa.1954.0218.
- [5] BORG, Xavier. The Particle - The wrong turn that led physics to a dead end: From waves to particles: The Oscillon. *Blaze labs research* [online]. [cit. 2015-05-06]. Dostupné z: <http://www.blazelabs.com/f-p-oscillon.asp>
- [6] DOUADY, Stéphane. Experimental study of the Faraday instability. *Journal of Fluid Mechanics*. 1990, roč. 221, vyd. 1, s. 383-409. DOI: 10.1017/s0022112090003603.
- [7] DURŠPEK, Jan, Jitka PROKŠOVÁ, Jaroslav JINDRA a Zdeňka KIELBUSOVÁ. Fyzikální vlastnosti živých organismů: Mechanika. Západočeská univerzita v Plzni. *Vnitřní a jiné síly: Povrchové napětí a kapilarita* [online]. [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: <http://kof.zcu.cz/vusc/pg/termo09/mechanics/v/v2.htm>
- [8] EDDI, Antonin a kol. Information stored in Faraday waves: the origin of a path memory. *Journal of Fluid Mechanics*. 2011, roč. 674, s. 433-463. DOI: 10.2172/10124.
- [9] FARADAY, Michael. On a Peculiar Class of Acoustical Figures; and on Certain Forms Assumed by Groups of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1831, roč. 121, vyd. 0, s. 299-340. DOI: 10.1098/rstl.1831.0018.
- [10] GOODRIDGE, Christopher L. a kol. Viscous effects in droplet-ejecting capillary waves. *Physical Review E*. 1997, roč. 56, vyd. 1, s. 472-475.

- [11] HEALTHGOODS.COM. *Air-O-Swiss 7135 Ultrasonic Humidifier*. [online]. [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: [http://www.healthgoods.com/Air\\_O\\_Swiss\\_7135\\_Ultrasonic\\_Humidifier\\_p/pl-32255.htm](http://www.healthgoods.com/Air_O_Swiss_7135_Ultrasonic_Humidifier_p/pl-32255.htm)
- [12] HOU, Gene, Jin WANG a Anita LAYTON. Numerical Methods for Fluid-Structure Interaction - A Review. *Communications in Computational Physics*. 2012. DOI: 10.4208/cicp.291210.290411s.
- [13] CHEN, Peilong a Jorge VIÑALS. Pattern Selection in Faraday Waves. *Physical Review Letters*. 1997, roč. 79, vyd. 14, s. 2670-2673. DOI: 10.1103/physrevlett.79.2670.
- [14] JAMES, Ashley J., Marc K. SMITH a Ari GLEZER. Vibration-induced drop atomization and the numerical simulation of low-frequency single-droplet ejection. *Journal of Fluid Mechanics*. 2003, roč. 476. DOI: 10.1017/s0022112002002860.
- [15] JAMES, Ashley J., Bojan VUKASINOVIC, Marc K. SMITH a Ari GLEZER. Vibration-induced drop atomization and bursting. *Journal of Fluid Mechanics*. 2003, roč. 476. DOI: 10.1017/s0022112002002835.
- [16] KOLUKULA, Siva Srinivas. Stability Chart [online]. *Matlab Central*, 2012 [cit. 2015-04-01]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/35355-stability-chart>
- [17] KOMRSKA, Jiří. *Skalární vlna a její matematický popis*. [online]. [cit. 2015-03-25]. Dostupné z: <http://physics.fme.vutbr.cz/~komrska/Difrakce/KapD01.pdf>
- [18] KRASNOPOLSKAIA, Natalia. *Faraday Waves and Oscillons*. University of Toronto, Advanced Physics Laboratory. 2011.
- [19] MANDRE, Shreyas a Lakshminarayanan MAHADEVAN. A generalized theory of viscous and inviscid flutter. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2009, roč. 466, vyd. 2113, s. 141-156. DOI: 10.1098/rspa.2009.0328.
- [20] MASON, Timothy J. a Eric D. CORDEMANS. Ultrasonic intensification of chemical processing and related operations: A Review. *Trans IChemE*. 1996, roč. 74, s. 511-516.
- [21] PROALERGIKY.CZ. *Nákupní rádce: Jak správně vybrat inhalátor* [online]. [cit. 2015-04-30]. Dostupné z: <http://www.proalergiky.cz/eshop/inhalatory/nakupni-radce>
- [22] RAYLEIGH, Lord. VII. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. *Philosophical Magazine Series 5*. 1883, roč. 16, vyd. 97, s. 50-58. DOI: 10.1080/14786448308627392.

- [23] RUCKLIDGE, Alastair M. a Mary SILBER. Design of Parametrically Forced Patterns and Quasipatterns. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2009, roč. 8, vyd. 1, s. 298-347. DOI: 10.1137/080719066.
- [24] TAKAGI, Kentaro a Takeshi MATSUMOTO. Numerical simulation of Faraday waves oscillated by two-frequency forcing. *Physics of Fluids*. 2015, roč. 27, vyd. 3.
- [25] THE SLOW MO GUYS. Paint on a Speaker at 2500fps - The Slow Mo Guys. *YouTube* [online]. 2013. [cit. 2015-04-29]. Dostupné z: [https://www.youtube.com/watch?v=5WKU7gG\\_ApU](https://www.youtube.com/watch?v=5WKU7gG_ApU)
- [26] VECCELLIO, Laurent. The mesh nebuliser: a recent technical innovation for aerosol delivery. *Breathe*. 2006, roč. 2, vyd. 3.
- [27] WEISSTEIN, Eric. Bessel Function Zeros. *Wolfram MathWorld* [online]. [cit. 2015-04-02]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionZeros.html>
- [28] WHITTAKER, Edmund Taylor. On the general solution of Mathieu's equation. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. 1913, roč. 32, vyd. 2, s. 75-80. DOI: 10.1017/S0013091500035069.
- [29] ZÁVACKÝ, Michal. Parní, nebo ultrazvukový zvlhčovač? Kompletní přehled principů zvlhčování. *Proalergiky.cz* [online]. 2013 [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: <http://www.proalergiky.cz/magazin/clanek/parni-nebo-ultrazvukovy-zvlhcovac-kompletni-prehled-principu-zvlhcovani>

### Zdroje obrázků

U převzatých obrázků je zdroj uveden v popisku. V ostatních případech jsou obrázky původní.

## Seznam symbolů a jednotek

Symbol	Jednotka	Význam
$a$	[m]	charakteristický rozměr obdélníkové nádoby
$\vec{a}$	[m/s <sup>2</sup> ]	vektor zrychlení vnějších objemových sil
$a_m$	–	časově závislá část partikulárního řešení
$a_{\max}$	[m/s <sup>2</sup> ]	amplituda zrychlení pohybu nádoby
$A$	[m]	funkce popisující amplitudu výchylky na membráně
$b$	[m]	charakteristický rozměr obdélníkové nádoby
$C$	–	Mathieuova funkce
$C_i$	[1]	integrační konstanty ve vyjádření rych. potenciálu
$f_m(z)$	–	pomocná funkce pro vyjádření rychlostního potenciálu
$F(t)$	[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	časově závislá integrační konstanta pohybové rovnice
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	tíhové zrychlení
$h$	[m]	hloubka kapaliny v nádobě
$J_i$	–	Besselova funkce řádu $i$
$k$	[1/m]	vlnové číslo
$k^*$	[N/m]	zobecněná tuhost
$K$	[1]	konstanta ve vyjádření řešení Mathieuovy rovnice
$l$	[1]	první charakteristické číslo kmitového módu
$m$	[1]	druhé charakteristické číslo kmitového módu
$m^*$	[kg]	zobecněná hmotnost systému
$N$	[1]	počet stojatých vln na hladině
$p$	[Pa]	tlak
$P$	[1]	obecná konstanta Mathieuovy rovnice
$Q$	[1]	obecná konstanta Mathieuovy rovnice
$R$	[m]	poloměr kruhové nádoby
$R_i$	[m]	hlavní poloměry zakřivení hladiny
$S$	–	Mathieuova funkce
$S_m$	–	prostorově závislá část partikulárního řešení
$t$	[s]	čas
$\vec{v}$	[m/s]	vektor relativní rychlosti kapaliny
$\Gamma(\tau)$	–	periodická funkce ve vyjádření Mathieuových funkcí
$\zeta$	[m]	funkce popisující z-ovou souřadnici hladiny
$\lambda$	[m]	vlnová délka
$\mu$	[1]	charakteristické číslo Mathieuovy funkce
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	kinematická viskozita
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	hustota kapaliny
$\sigma$	[N/m]	povrchové napětí
$\tau$	[1]	substituce argumentu kosinu v Mathieuově rovnici
$\Phi$	[m <sup>2</sup> /s]	rychlostní potenciál
$\Phi'$	[m <sup>2</sup> /s]	předefinovaný rychlostní potenciál
$\Psi(\tau)$	–	periodická funkce ve vyjádření Mathieuových funkcí
$\omega$	[1/s]	úhlová frekvence
$\Omega$	[1/s]	vlastní úhlová frekvence

## Seznam příloh

- CD s dokumentací experimentů a matlabovským programem pro zjednodušený výpočet nestabilních oblastí v závislosti na frekvenci a amplitudě zrychlení.