

**Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích**  
**Přírodovědecká fakulta**

**Proudění tekutiny v okolí překážky  
kruhového průřezu**

Bakalářská práce

**Sofya Belov**

Školitel: doc. RNDr. Petr Jelínek, Ph.D.

České Budějovice 2020

## **Bibliografické údaje**

Belov, S., 2020: Proudění tekutiny v okolí překážky kruhového průřezu [Fluid flow around an obstacle of a circular cross-section. Bc. Thesis, in Czech.] – 56 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

## **Anotace**

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou proudění tekutiny v okolí tělesa kruhového průřezu včetně jevu nazývaného Kármán vortex street. K numerickým simulacím proudění tekutiny za různých hodnot Reynoldsova čísla a rozšíření problému na prostředí s magnetickým polem je použit numerický kód Lare2d.

Klíčová slova: Proudění, Kármán vortex street, magnetohydrodynamika, numerické simulace, Lare2d

## **Abstract**

This bachelor thesis deals with the issue of fluid flow around an obstacle of a circular cross-section, including the phenomenon called Kármán vortex street. Numerical code Lare2d is used for numerical simulations of fluid flow at various Reynolds numbers and extending the issue to magnetic field environment.

Keywords: Flow, Kármán vortex street, magnetohydrodynamics, numerical simulations, Lare2d

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 15. května 2020

.....

Sofya Belov

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala vedoucímu této práce doc. RNDr. Petru Jelínkovi, Ph.D. za cenné rady, připomínky a vstřícnost při vypracování mé práce a za čas, který mi poskytl při konzultacích.

Sofya Belov

# Obsah

<b>Seznam použitých symbolů</b>	<b>8</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>9</b>
1.1 Proudění . . . . .	10
1.1.1 Mezní vrstva . . . . .	11
1.1.2 Obtékání těles tekutinou . . . . .	12
1.1.3 Separace mezní vrstvy . . . . .	14
1.2 Proudění v prostředí s magnetickým polem . . . . .	14
<b>2 Proudění v okolí těles kruhového průřezu</b>	<b>17</b>
2.1 Proudění kolem válce . . . . .	17
2.2 Proudění kolem koule . . . . .	20
2.3 Kármán vortex street . . . . .	21
2.3.1 Druhotný vírový řetězec . . . . .	23
2.3.2 Kármán vortex street ve sluneční atmosféře . . . . .	24
<b>3 Numerické simulace proudění tekutiny</b>	<b>26</b>
3.1 Numerický kód Lare2d . . . . .	26
3.1.1 Mřížový systém . . . . .	27

3.1.2	Struktura kódu . . . . .	28
3.1.3	Nastavení parametrů simulace . . . . .	29
3.1.4	Zpracování výsledků . . . . .	30
3.2	Numerické simulace proudění tekutiny bez magnetického pole . .	31
3.2.1	Výsledky simulace proudění o rychlosti $v_0 = 0,5$ kolem válce o velikosti $r^2 = 0,1$ . . . . .	31
3.2.2	Výsledky simulace proudění o rychlosti $v_0 = 0,5$ kolem válce o velikosti $r^2 = 0,4$ . . . . .	32
3.2.3	Výsledky simulace proudění o rychlosti $v_0 = 0,5$ kolem válce o velikosti $r^2 = 1,6$ . . . . .	33
3.2.4	Výsledky simulací proudění o rychlostech $v_0 = 0,25, 0,5$ a $0,75$ kolem válce o velikosti $r^2 = 1,6$ . . . . .	37
3.2.5	Určení periody uvolňování vírů při velikosti válce $r^2 = 0,1$ a rychlostech $v_0 = 0,5$ a $0,75$ . . . . .	37
3.3	Numerické simulace proudění tekutiny s magnetickým polem . . .	43
3.3.1	Výsledky simulací . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>48</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>50</b>
	<b>Literatura</b>	<b>52</b>

## Seznam použitých symbolů

$v$	.....	rychlost tekutiny
$p$	.....	tlak tekutiny
$\rho$	.....	hustota tekutiny
$f$	.....	hustota součtu externích sil
$B$	.....	magnetická indukce
$Re$	.....	Reynoldsovo číslo
$St$	.....	Strouhalovo číslo
$f$	.....	frekvence tvorby vírů
$r$	.....	poloměr válce
$\omega$	.....	vorticita



# 1. Úvod

Dynamika tekutin se zabývá pohybem kapalin a plynů a studují ji vědci napříč různými obory. Poskytuje metody pro studium vývoje hvězd, oceánských proudů, počasí, tektoniky litosferických desek a dokonce i krevního oběhu, kdy je popisován pohyb krve, který je ovlivněn tlakovými rozdíly v různých částech těla a třením vznikajícím mezi krví a cévami. Mezi významné technologické aplikace dynamiky tekutin patří raketové motory, větrné turbíny, ropovody nebo klimatizační systémy [20][38].

Jevy zkoumané v dynamice tekutin jsou makroskopické, a proto je na tekutinu nahlíženo jako na spojité prostředí. Znamená to, že libovolně malý objemový element v tekutině (bývá používán i pojem částice nebo bod) je vždy tak velký, že obsahuje velmi velké množství molekul. Podobně, když uvažujeme pohyb bodu v tekutině, není tím myšlen pohyb jednotlivé molekuly, ale objemového elementu obsahujícího velké množství molekul, který je ale stále považován za bod.

Matematický popis stavu pohybující se tekutiny je prováděn pomocí funkcí, které udávají rozdělení rychlostí  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  a libovolných dvou termodynamických veličin popisujících tekutinu, například tlaku  $p = p(\mathbf{r}, t)$  a hustoty  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ . Pokud je dáno pět veličin, a to tři složky rychlosti  $\mathbf{v}$ , tlak  $p$  a hustota  $\rho$ , je stav pohybující se tekutiny kompletně určen.

Všimněme si, že  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  je rychlost tekutiny v daném bodě v prostoru, jehož poloha je určena polohovým vektorem  $\mathbf{r}$ , a v daném čase  $t$ , tj. vztahuje se k pevným bodům v prostoru, ne k pevným bodům tekutiny. To samé platí i pro tlak a hustotu.

Jednou ze základních rovnic dynamiky tekutin je rovnice kontinuity, která vyjadřuje zachování hmoty a platí jak pro ideální tekutinu, tak pro reálnou, u níž uvažujeme vnitřní tření:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1.1)$$

Pohybovou rovnicí tekutiny je Eulerova rovnice, která byla poprvé získaná Leonhardem Eulerem (1707–1783) v roce 1755. Vychází z předpokladu, že síla působící na jednotku objemu tekutiny je rovna zápornému gradientu tlaku v tomto objemu a hustotě součtu externích sil  $\mathbf{f}$  [19]. Rovnice má tvar

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (1.2)$$

Pokud například uvažujeme ideální tekutinu (tedy bez vnitřního tření), na kterou působí pouze gravitační pole, tímto členem bude síla gravitační, jejíž hustotu lze zapsat jako  $\mathbf{f} = \rho \cdot \mathbf{g}$  (kde  $\mathbf{g}$  je gravitační síla na jednotku hmotnosti) [16].

V dynamice tekutin bývá používán operátor  $\frac{D}{Dt}$ , který představuje materiálovou, substancionální neboli konvektivní derivaci, což je míra změny určité veličiny v daném materiálovém bodě (tedy v bodě pohybujícím se současně s tekutinou).

Platí pro něj vztah

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (1.3)$$

kde parciální derivace  $\frac{\partial}{\partial t}$  se naopak vztahuje k pevnému bodu v prostoru [18, 26]. Proto například může být rovnice 1.2 psána i v následujícím tvaru:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (1.4)$$

## 1.1 Proudění

V případě, kdy u částic tekutiny převažuje pohyb v jednom směru (jinými slovy posouvá se v jednom směru), jedná se o proudění. Lze ho znázornit pomocí proudnic, což jsou spojitě čáry, které mají v každém bodě tečnu určující směr rychlosti pohybující se částice.

Při laminárním proudění, kterým je obecně myšlen plynulý a ustálený pohyb tekutiny, jsou proudnice navzájem rovnoběžné, částice tekutiny se tedy pohybují v rovnoběžných vrstvách. Při turbulentním proudění, které bývá nelineární a chaotické, částice přecházejí mezi jednotlivými vrstvami tekutiny a tudíž dochází k jejich promíchávání.

Důležitým faktorem proudění tekutiny je Reynoldsovo číslo ( $Re$ ), pojmenované po vědci z 19. století Osbornu Reynoldsovi (1842–1912), ačkoli bylo poprvé popsáno v roce 1851 fyzikem Georgem Gabrielem Stokesem (1819–1903). Toto číslo je bezrozměrná konstanta, která je dána poměrem setrvačných sil a viskozity, přičemž není pouze parametrem tekutiny, ale zahrnuje také vlastnosti proudění, jako je rychlost, velikost a tvar potrubí, případně překážky umístěné do cesty tekutině [20]. Reynoldsovo číslo je dáno vztahem [40]

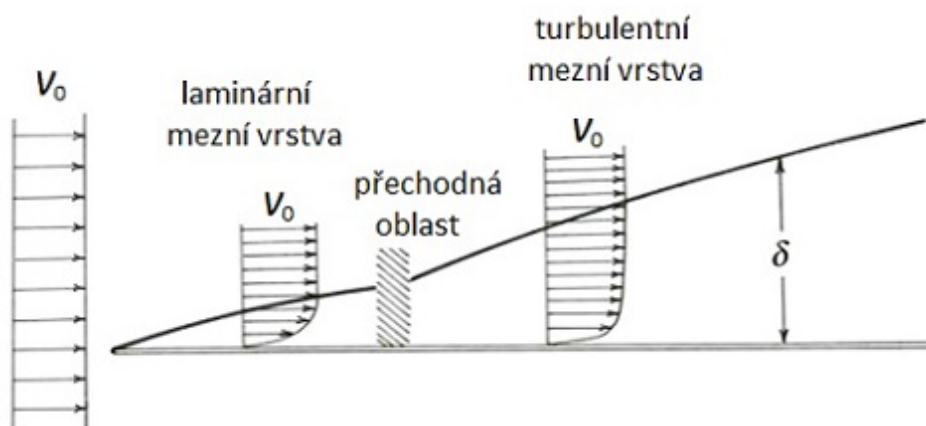
$$Re = \frac{vL}{\nu}, \quad (1.5)$$

kde  $v$  je rychlost toku,  $L$  je charakteristická délka (v případě proudění uzavřenou trubicí se jedná o její tzv. hydraulický průměr, který je dán poměrem průtočné plochy a obvodu styku kapaliny se stěnou [39]), a  $\nu$  je kinematická viskozita tekutiny. Při nízkých hodnotách  $Re$  bývá proudění laminární, zatímco při vysokém  $Re$  má tendenci být turbulentní a tudíž tvořit víry, pomocí této konstanty je tedy možné odhadnout rychlost, při které se mění z laminárního na turbulentní [20]. Při proudění v uzavřené trubicí, k přechodu mezi laminárním a turbulentním prouděním dochází přibližně v rozmezí  $2100 < Re < 4000$  [31].

### 1.1.1 Mezní vrstva

Vrstva reálné tekutiny, která proudí ve styku s pevným povrchem, má v důsledku tření minimální rychlost. Rychlost proudění stoupá od nulové hodnoty bezprostředně u povrchu (na který je tekutina kvůli své viskozitě „nalepená“) na určitou nenulovou hodnotu u hranice vrstvy ( $v_0$  na obrázku 1.1), kterou nazýváme mezní vrstvou. Mimo mezní vrstvu je možné třecí síly zanedbat [10].

Na obrázku 1.1 je příklad mezní vrstvy, která se vyvíjí na obou stranách nehybné ploché desky umístěné rovnoběžně se směrem proudění. Tloušťka mezní vrstvy  $\delta$  se zvětšuje v důsledku zpomalování tekutiny vlivem tření s deskou. Mezní vrstva se obvykle začíná vyvíjet jako laminární proudění, ale v dostatečně dlouhé vzdálenosti se může proměnit v turbulentní mezní vrstvu, která je silnější a roste strměji, podobně jako na obrázku 1.1 [32]. Podle teorie mezní vrstvy, která byla



**Obr. 1.1:** Vývoj mezní vrstvy na ploché desce (vyvíjí se na obou stranách desky, je ukázána pouze jedna strana). Převzato a upraveno z [32].

navržena roku 1904 Ludwigem Prandtem (1875–1953), je definována jako vrstva tekutiny, která se vyvíjí v tocích s velmi vysokými hodnotami  $Re$ , tj. při poměrně nízké viskozitě ve srovnání se setrvačnými silami. Toto lze pozorovat když je těleso vystaveno proudění o vysoké rychlosti nebo když je rychlost toku nízká a těleso má velké rozměry [10]. Tloušťka vyvinuté turbulentní mezní vrstvy (tj. její konstantní tloušťka) je nepřímo úměrná  $\sqrt[5]{Re}$ , konstantní tloušťka laminární mezní vrstvy, která se nemění na turbulentní, je nepřímo úměrná  $\sqrt{Re}$  [4].

## 1.1.2 Obtékání těles tekutinou

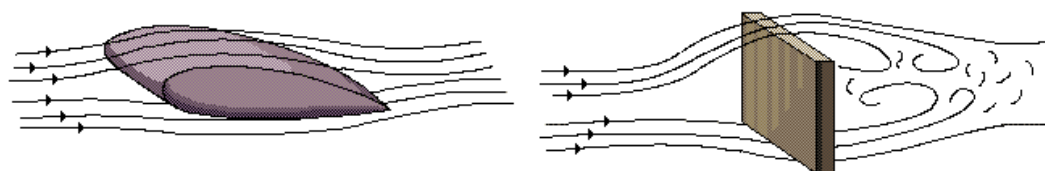
Pro tekutinu proudící v okolí překážky (například pro vodu kolem pilíře mostu nebo větru nad křídlem letadla) je charakteristická délka  $L$ , vystupující ve vztahu pro Reynoldsovo číslo (1.5), dána jejím vlastním rozměrem. V případě válcového nebo kulového tělesa se jedná o jeho geometrický průměr [14].

Když tekutina proudí kolem tělesa nebo se těleso pohybuje v tekutině, je mezi nimi relativní pohyb a na těleso působí určitá síla. V případě popsaném v kapitole 1.1.1, kde plochá deska je umístěná rovnoběžně se směrem proudění, síla je rovnoběžná s jejím povrchem, ale obecně v případě těles jiných tvarů nemusí být rovnoběžná ani kolmá na povrch. Lze ji rozložit na smykovou složku, která je rovnoběžná se směrem proudění, a na tlakovou složku, která je na něj kolmá. Složka rovnoběžná s relativním pohybem je odporová síla a složka kolmá na relativní pohyb je vztlaková síla. Stanovení těchto sil je velmi důležité v mnoha aplikacích, zřejmým příkladem jsou křídla letadel. Jednoduché analytické metody jsou pro stanovení těchto sil nedostatečné, a proto se k tomuto účelu používají experimentálně měřené součinitele odporu, které mohou nabývat hodnot řádu 1, ale i mnohem menších než 1, a značně závisí na tvaru tělesa.

Pro velikost odporové síly  $F_D$  platí známý Newtonův vztah:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 S, \quad (1.6)$$

kde  $C_D$  je součinitel odporu,  $\rho$  hustota tekutiny,  $v$  velikost rychlosti relativního pohybu a  $S$  obsah čelního průřezu tělesa.



**Obr. 1.2:** Rozložení proudnic kolem tělesa proudnicového tvaru (vlevo) a tělesa tvaru vyvolávajícího vysokou odporovou sílu (vpravo). Převzato a upraveno z [7].

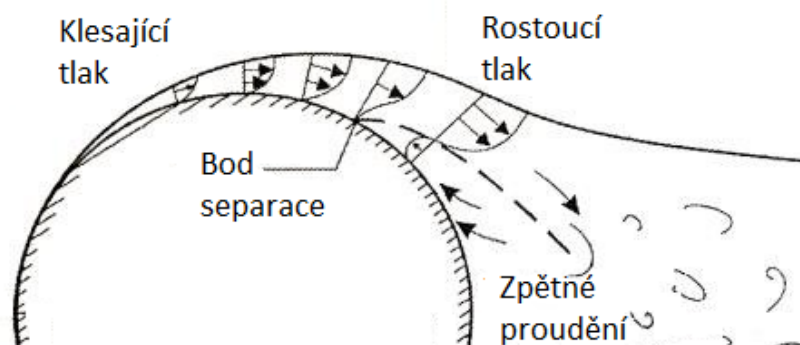
Nejmenší odporovou sílu mají tělesa takového tvaru, díky kterému se na ní podílí převážně smyková složka, a tlaková složka je minimální. Takový tvar je známý jako proudnicový nebo aerodynamický. V případě, že podíl smykové síly je menší a celková odporová síla je vyvolaná především tlakovým rozdílem mezi plochami obtékaného tělesa, jedná se o těleso „neproudnicového“ tvaru (v anglicko-jazyčné literatuře bývá uváděno pod pojmem „blunt body“ nebo „bluff body“). Příkladem je deska, která je obrácena kolmo na směr proudění, nebo polokoule, jejíž plochá strana je obrácena proti směru proudění [17]. Rozdíly mezi těmito

dvěma případy se projevují na rozložení proudnic v okolí těles, jak je vidět na obrázku 1.2.

### 1.1.3 Separace mezní vrstvy

Jak je patrné z obrázku 1.2, těleso ponořené do proudící tekutiny způsobuje zakřivení okolních proudnic. Dostředivé síly vyvolané zakřivenými proudnicemi nutí proudění zrychlit, a tímto se v souladu se zachováním energie (Bernoulliho rovnice) vytvoří oblast klesajícího tlaku, zvaná příznivý tlakový gradient.

V místě, kde se proudnice narovnávají, dochází k opačnému ději a tekutina tedy proudí do oblasti stoupajícího tlaku, zvané nepříznivý tlakový gradient. Rostoucí tlak může v nejpomalejších oblastech vyvolat obrácení směru proudění – v tomto místě dochází k oddělení mezní vrstvy od tělesa a kombinace dvou směrů proudění způsobuje tvorbu vířů (jak je znázorněno na obrázku 1.3). Tento jev je známý jako separace mezní vrstvy a nastává především za tělesy nemajícími proudnicový tvar [14].



**Obr. 1.3:** Vznik víření za tělesem v důsledku separace mezní vrstvy. Převzato a upraveno z [23].

## 1.2 Proudění v prostředí s magnetickým polem

Teoretický popis dynamiky elektricky vodivých tekutin v magnetickém pole, například plazmatu nebo tekutých kovů, je možný pomocí magnetohydrodynamiky.

miky (MHD), která nahlíží na vodivou tekutinu jako na spojité prostředí. Tento přístup je vhodný v případě, kdy nepotřebujeme znát popis tekutiny jako souboru mikroskopických částic, ale zajímají nás makroskopické údaje jako například tlak nebo hustota. Jedním z nejvýznamnějších případů existence této tekutiny v přírodě a laboratorních podmínkách je právě plazma, které při MHD přístupu je bráno jako tekutina složená pouze z jednoho druhu částic (jednotekutinové plazma) [16, 28].

Pro tekutinu nacházející se v magnetickém poli, člen  $\mathbf{f}$  v Eulerově pohybové rovnici (1.2), vyjadřující externí síly, obsahuje i Lorentzovu sílu. Spolu s rovnicí kontinuity (1.1), rovnicí pro energii (1.9) a indukční rovnicí (1.10) patří do rovnic magnetohydrodynamiky [16], což jsou parciální diferenciální rovnice, které určují vývoj hustoty, rychlosti, tlaku a magnetického pole tekutiny. Při zanedbání její rezistivity jsou nazývány ideální MHD rovnice a bývají zapsány například v následujícím tvaru:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.7)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.10)$$

kde  $\mathbf{B}$  je magnetická indukce,  $\mu_0$  permeabilita vakua a  $\gamma$  konstanta daná poměrem tepelné kapacity při konstantním tlaku  $C_p$  a tepelné kapacity při konstantním objemu  $C_V$ . Podmínka  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  vyjadřuje neexistenci zdrojů magnetického pole. Pokud na tekutinu působí i gravitační pole, jeho síla bude zahrnutá v Eulerově pohybové rovnici, která pak může být zapsána takto [13]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \rho \mathbf{g} - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0. \quad (1.11)$$

V plazmatu mezi tlakem, hustotou měrné vnitřní energie a teplotou platí vztahy

$$p = \frac{\rho k_B T}{m_p \mu}, \quad (1.12)$$

$$\epsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} = \frac{k_B T}{m_p \mu(\gamma - 1)}, \quad (1.13)$$

kde  $k_B$  je Boltzmannova konstanta,  $T$  je teplota,  $m_p$  je hmotnost protonu,  $\mu$  je střední hmotnost částic v plazmatu a  $\epsilon$  je hustota měrné vnitřní energie. V případě, že uvažujeme plazma tvořené plně ionizovanými atomy vodíku, počet protonů je roven počtu elektronů a hmotnost elektronů lze zanedbat, a proto platí  $\mu_m = 0,5m_p$  [1, 2].



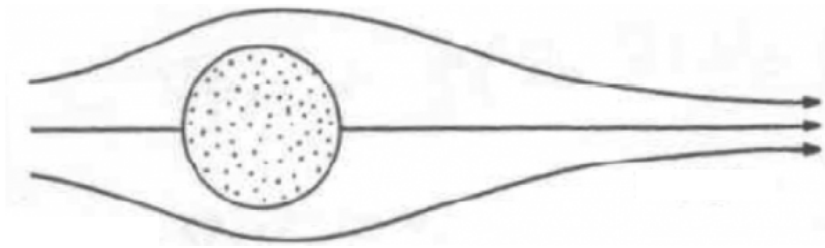
## 2. Proudění v okolí těles kruhového průřezu

Proudění tekutin v okolí těles neproudnicového tvaru je základním problémem mechaniky tekutin a již mnoho let oblíbeným předmětem výzkumu [37]. Zkoumání složité struktury proudění kolem takových těles se usnadnilo díky nedávnému pokroku v numerických a experimentálních technikách [29]. Nejstudovanějším je případ proudění v okolí válce nebo koule [5]. V této kapitole bude proudění kolem válce použito jako příklad a bude rozebrán jeho vývoj se zvyšujícím Reynoldsovým číslem.

### 2.1 Proudění kolem válce

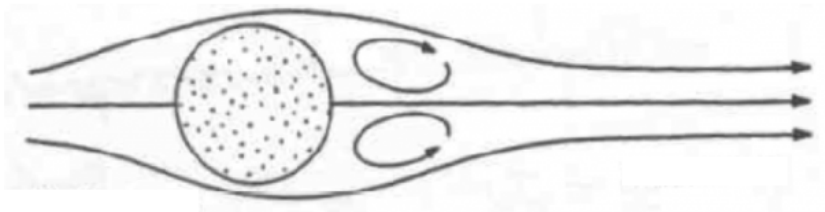
Případ proudění kolem válcového tělesa tvoří základ pro pochopení proudění kolem neproudnicových těles [12]. Tento tvar je geometricky podobný s řadou inženýrských struktur, například mostní pilíře, námořní stavby nebo potrubí bývají konstruovány ve tvaru válce [37].

Zejména u válce je struktura obtékajícího proudění značně ovlivněna Reynoldsovým číslem, při jehož zvýšení se stává složitější [29]. Uvažujme proudění tekutiny v okolí nekonečně dlouhého válce s podélnou osou kolmou na směr proudění. Pro velmi nízké hodnoty Reynoldsova čísla ( $Re < 10$ ) jsou setrvačné síly zanedbatelné a proudnice se hladce spojují za válcem, jak je znázorněno na obrázku 2.1.



**Obr. 2.1:** Laminární tok ( $Re < 10$ ). Převzato a upraveno z [14].

Když se Reynoldsovo číslo zvýší na rozmezí  $10 < Re < 40$  (například zvýšením rychlosti toku), mezní vrstva se rozdělí symetricky z obou stran válce, jak je popsáno v kapitole 1.1.3, a vytvoří se dva víry, které se otáčejí v opačných směrech, avšak zůstávají u válce a neodtrhávají se od něj. Za víry se proudnice z obou stran znovu spojují, rozsah turbulence je tedy omezen jen na malou oblast za válcem – viz obrázek 2.2.

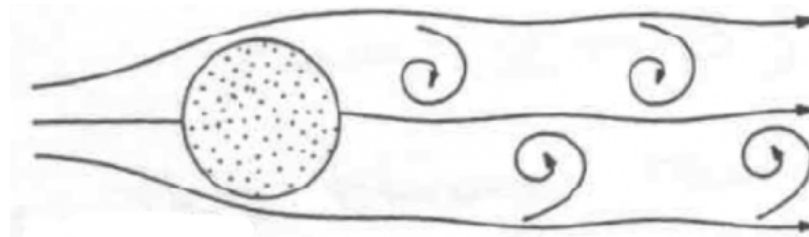


**Obr. 2.2:** Rozložení proudnic při  $10 < Re < 40$ , kdy jsou víry napojené na válec. Převzato a upraveno z [14].

Když Reynoldsovo číslo dále dosáhne hodnoty  $Re > 40$ , symetrická tvorba vírů se naruší a vytvoří se dva asymetrické víry, které periodicky oscilují a neustále vzájemně mění svou polohu vůči válci. Při vyšších hodnotách  $Re$  se následně začínají odtrhávat od válce (obrázek 2.3) [14]. Tento jev, nazývaný Kármán vortex street, bude podrobněji vysvětlen v kapitole 2.3.

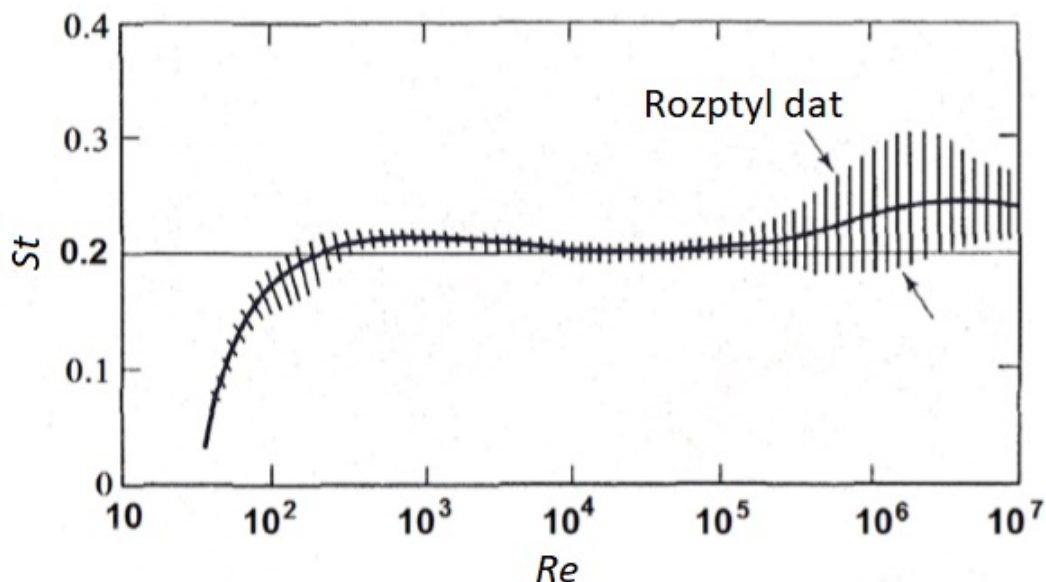
Kvantitativní charakteristikou periodické tvorby vírů za překážkou je tzv. Strouhalovo číslo, pojmenované po českém fyzikovi Vincenci Strouhalovi (1850–1922), což je bezrozměrný parametr daný frekvencí vytváření vírů  $f$ , rozměrem překážky (případně průměrem válce  $d$  neboli  $2r$ ) a rychlostí proudění  $v$ :

$$St = \frac{2fr}{v}, \quad (2.1)$$



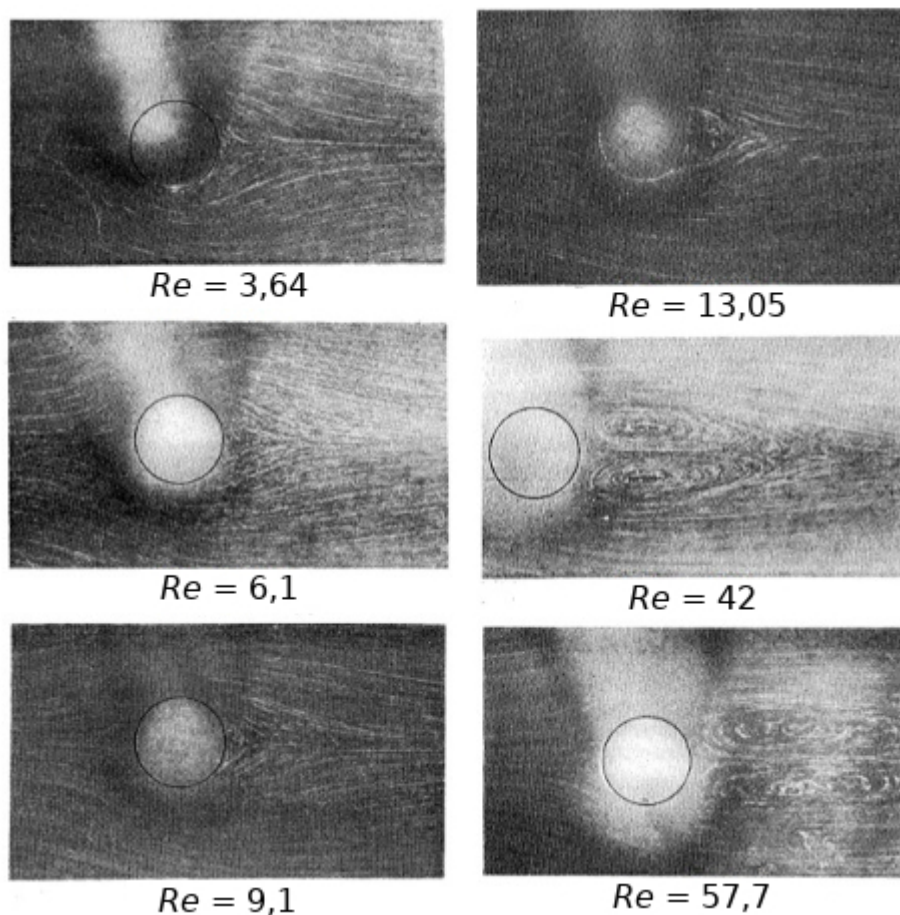
**Obr. 2.3:** Střídavé odtrhávání vírů od válce při  $Re > 40$ . Převzato a upraveno z [14].

který při širokém rozsahu Reynoldsova čísla obvykle nabývá hodnot kolem 0,2. Na obrázku 2.4 jsou znázorněna data měření  $St$  pro válec, která nezávisle na sobě prováděli vědci z USA Anatol Roshko (1954), George W. Jones (1968) a Frank M. White (1999). Tyto experimenty ukazují, že při zvyšování  $Re$  od 60 na  $10^7$  měřené Strouhalovo číslo zůstává téměř konstantní na hodnotě kolem 0,2 [6].



**Obr. 2.4:** Naměřené hodnoty Strouhalova čísla pro válec jako funkce Reynoldsova čísla. Převzato a upraveno z [6].

Úplavy vznikající ve vodě za válcovým tělesem kruhového průřezu při  $0,1 < Re < 2000$  byly fotograficky pozorovány japonským vědcem S. Tanedou (byly použity válce o průměrech od 1,02 do 6 mm a délkách od 180 do 300 mm, pohyb vody byl zviditelněn pomocí hliníkového prášku). Příklady pořizovaných fotografií jsou na obrázku 2.5. Výsledky těchto pozorování ukázaly, že při obtékání válce se dvojice vírů začíná tvořit při  $Re = 5$ , poté s rostoucí hodnotou  $Re$  se



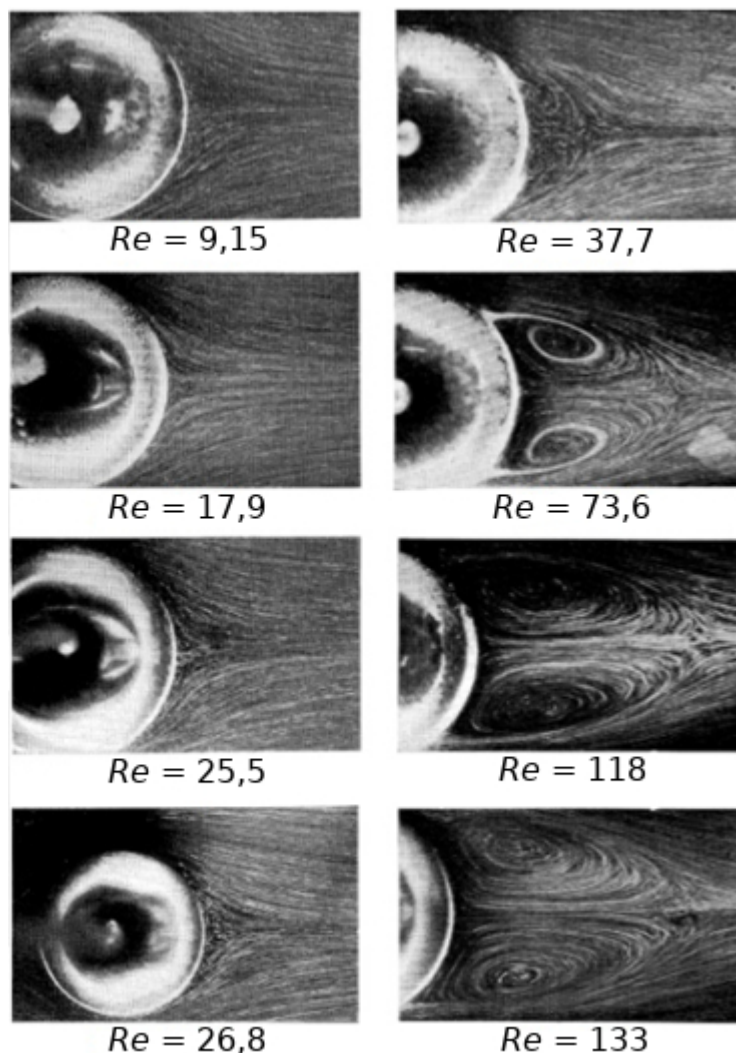
**Obr. 2.5:** Fotografie znázorňující rozložení proudnic za válcem při různých hodnotách Reynoldsova čísla. Převzato a upraveno z [34].

víry zvětšují, nakonec se stávají asymetrickými přibližně při  $Re = 45$ . Laminární úplav za tělesem začíná v určité vzdálenosti oscilovat již při  $Re = 30$  [34].

## 2.2 Proudění kolem koule

Fotografická pozorování uvedená na konci předchozí kapitoly byla S. Tanedou provedena i pro kulové těleso při  $5 < Re < 300$ . Byly použity koule o průměrech od 9,52 mm do 19,82 mm. Příklady pořázených fotografií jsou na obrázku 2.6. Z těchto pozorování vyplývá, že kritická hodnota Reynoldsova čísla, při které dochází k napojení dvojice vírů za kulovým tělesem, je přibližně  $Re = 24$ . Velikost vírů je přibližně úměrná logaritmu  $Re$ . Úplav za těmito víry začíná oscilovat zhruba při dosažení  $Re = 130$  [33].

Proudění kolem koule je velmi podobné proudění kolem válce díky stejnému tvaru příčného průřezu. Není hlavním předmětem této bakalářské práce a je zde zmíněno pouze pro úplnost. V budoucnu počítáme s rozšířením numerických simulací proudění na 3D, kde by obtékané těleso představovala koule.

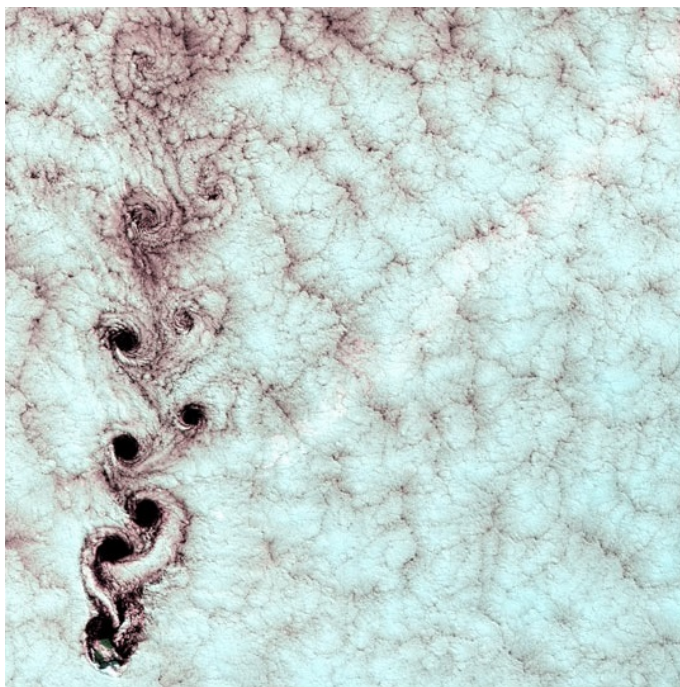


**Obr. 2.6:** Fotografie znázorňující rozložení proudnic za koulí při různých hodnotách Reynoldsova čísla. Převzato a upraveno z [33].

### 2.3 Kármán vortex street

Od specifické kritické hodnoty Reynoldsova čísla, obtékání tělesa cylindrického tvaru s podélnou osou kolmou na směr proudění, případně jiného neproudnicového tvaru, způsobuje vznik jakéhosi řetězce vírů za tělesem. Víry pravidelně

vznikají a odtrhávají se střídavě z obou stran tělesa a následně se dávají do pohybu ve směru proudění, přitom oscilují a zahýbají z jedné strany na druhou. Takto vznikající efekt je známý pod názvem Kármán vortex street po americkém vědci maďarského původu Theodoru von Kármánovi (1881–1963) [14]. Tento jev lze považovat za příklad vlastního kmitání, kdy stálé dodání energie způsobuje kmitavé chování dynamického systému [15].



**Obr. 2.7:** Kármán vortex street v podobě vířících oblaků nad ostrovem Alexandra Selkirka na jihu Tichého oceánu [41].

V případě dlouhé překážky válcového tvaru s podélnou osou kolmou na směr proudění, tento jev můžeme pozorovat od  $Re \sim 100$  [14], například při pozorování provedeném S. Tanedou, které bylo uvedeno v kapitole 2.1, jev probíhal při  $Re > 150$  [34]. V případě koule k tomuto dochází až od  $Re \sim 500$  [35]. Od hodnoty řádově  $Re = 10^5$  uvolňování vírů začíná ztrácet soudržnost a popsáný jev zaniká [6].

Obrázek 2.7 představuje konkrétní meteorologický příklad jevu Kármán vortex street, kdy řetězec vírů vznikl narážením plynoucích oblaků na chilský ostrov Alexandra Selkirka. Tento ostrov prudce stoupá nad okolními vodami a dosahuje téměř 1,6 km nad hladinou moře, díky svým rozměrům tedy narušuje proudění

vzduchu nad oceánem. Snímek byl pořízen v nepravých barvách za použití krátkovlnné infračervené, infračervené a blízké infračervené vlnové délky [41].

Vznik a odtrhávání vírů při obtékání vzduchem již také způsobily zničení mnoha staveb, síla vznikající při odtržení každého víru od tělesa totiž může být velmi značná. V době průmyslové revoluce se vysoké cihlové komíny občas houply a dokonce se rozbily vlivem zatížení vyvolaného vířením. V moderní době bývají k velkým stavbám kruhového průřezu často připevněny výčnělky nebo žebra za účelem zafixovat polohu mezní vrstvy a tím stabilizovat proudění vzduchu a minimalizovat vznik vírových řetězců. Takovéto výčnělky jsou vidět na komínu na obrázku 2.8.



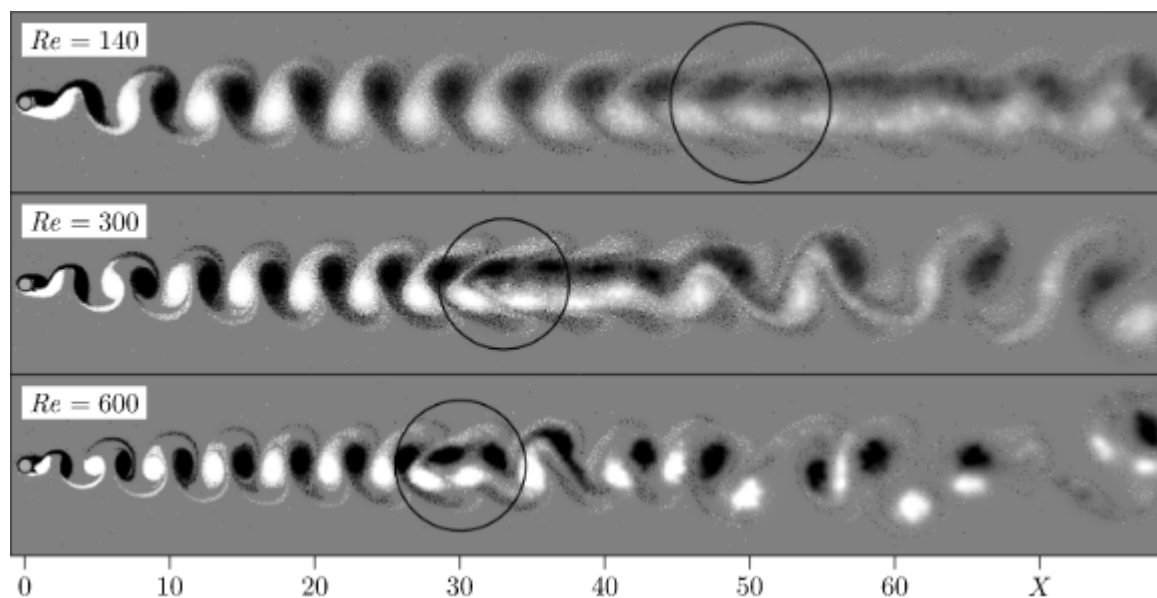
**Obr. 2.8:** Výčnělky na velkých průmyslových komínech [6].

### 2.3.1 Druhotný vírový řetězec

Na vzdálenějších místech od obtékaného tělesa původní řetězec vírů zaniká a může se měnit ve druhotný řetězec, složený z větších vírů, které se vytvářejí s nižší frekvencí a v ustálené vzdálenosti od tělesa. Tento jev při různých hodnotách Reynoldsova čísla je znázorněn na obrázku 2.9. Byl zkoumán v řadě experimentálních a teoretických studií, ale příčiny jeho vzniku nejsou zcela pochopeny [9].

Podle jednoho z pohledů na původ tohoto jevu, druhotný řetězec vzniká slučováním vírů z hlavního řetězce. Tuto verzi potvrzuje experiment provedený vědci

z japonské univerzity Meijo [21]. Vznik druhotného řetězce v důsledku slučování vírů byl pozorován i při numerických simulacích, které nezávisle na sobě prováděli vědci z americké univerzity Cornell [3] a německé Univerzity Georga Augusta v Göttingenu [22].



**Obr. 2.9:** Druhotný vírový řetězec vznikající za válcem při různých hodnotách Reynoldsova čísla. Kroužky jsou označena místa rozpadu hlavního řetězce. Výsledky simulací publikované v článku [9].

### 2.3.2 Kármán vortex street ve sluneční atmosféře

Pozorování z paluby SDO (Solar Dynamics Observatory – družice pro pozorování Slunce ve vysokém rozlišení) naznačují možnost jevu Kármán vortex street ve sluneční koróně. Bylo navrženo, že tento proces může vysvětlit některé oscilace v koronálních smyčkách a tzv. výronech koronální hmoty, které doprovází sluneční erupce [27].

Při pohybu komet v blízkosti Slunce bývá v některých případech pozorován plazmový ohon vykazující oscilační chování. Přestože komety interagují s prouděním slunečního větru, nebylo jednoznačně určeno, že se jedná o jev Kármán vortex street [24].



Jev vzniku a unášení vírů v magnetizovaném prostředí není zcela pochopen a zatím v něm nebyl proveden systematický a podrobný výzkum Strouhalova čísla [15]. Numerická simulace provedená vědci z anglické univerzity Warwick ukázala, že tento proces v MHD podmínkách probíhá podobným způsobem jako v hydrodynamických nebo aerodynamických podmínkách [27]. Při simulaci proudění vodivé tekutiny kolem kvádru, při vystavení magnetickému poli kolmému na směr proudění došlo k nepatrnému zvýšení Strouhalova čísla a k zeslabení vznikajících vírů [30].

V některých výzkumech bylo Strouhalovo číslo odhadnuto. Například v numerických experimentech magnetohydrodynamických proudění tekutých kovů se ukázalo být kolem 0,2. V magnetosférickém plazmatu Země bylo Strouhalovo číslo experimentálně odhadnuto na 0,3 [15]. Příímý observační důkaz jevu Kármán vortex street v prostředí MHD však stále chybí [27].

## 3. Numerické simulace proudění tekutiny

Většina problémů v dynamice tekutin je příliš složitá na to, aby byla řešena analytickými výpočty a v těchto případech musí být řešeny pomocí počítačových simulací. Tímto se zabývá numerická neboli výpočetní dynamika tekutin (CFD – Computational Fluid Dynamics), která poskytuje numerické předpovídání proudění tekutiny. Rozvoj moderních metod CFD začal již s příchodem počítačů na začátku 50. let 20. století.

Protože turbulentní tok bývá nelineární a chaotický, je třeba při stanovení pravidel a počátečních podmínek pro tyto simulace věnovat zvláštní pozornost – malé změny na začátku mohou vést k velkým rozdílům ve výsledcích. Přesnost simulací může být zlepšena rozdělením objemu do menších oblastí a použitím menších časových kroků, čímž se ale prodlužuje doba výpočtu. Z tohoto důvodu je vhodné CFD přizpůsobovat výpočetnímu výkonu [8, 20].

### 3.1 Numerický kód Lare2d

Numerické simulace proudění jak bez magnetického pole, tak s magnetickým polem byly provedeny v kódu Lare2d<sup>1</sup> (Lagrangian remap codes), který byl vytvořen Tonym Arberem z anglické univerzity Warwick v programovacím jazyce Fortran 90 a slouží k řešení rovnic hydrodynamiky a ideální nebo rezistivní magne-

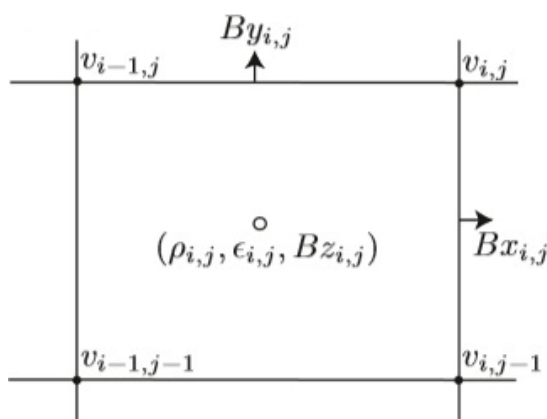
---

<sup>1</sup><https://warwick.ac.uk/fac/sci/physics/research/cfsa/people/tda/larexd/>

tohydrodynamiky ve 2D. Verze tohoto kódu používaná pro 3D se nazývá Lare3d, pro označení obou verzí se také používá název LareXd [2].

### 3.1.1 Mřížový systém

Kód Lare2d využívá mřížového systému, ve kterém různé druhy proměnných jsou definované na různých částech buňky mřížky (tzv. staggered grid). Ve 2D jsou rychlosti definované na vrcholech buňky, skaláry a složka  $B_z$  magnetické indukce, u které ve 2D neuvažujeme směr, v centru buňky a zbylé složky magnetické indukce jsou definované na stranách buňky, jak je znázorněné na obrázku 3.1. Mřížka se skládá z  $n_x \times n_y$  buněk, které jsou označeny souřadnicemi  $i_x$  (od 0 do  $n_x$ ) a  $i_y$  (od 0 do  $n_y$ ). Je rozšířena o dvě vrstvy dalších buněk, zvaných „ghost cells“, které jsou zavedeny pro správnost výpočtu u krajních buněk. Při nastavení počátečních podmínek je tedy nutné zahrnovat i tyto buňky [2, 25].



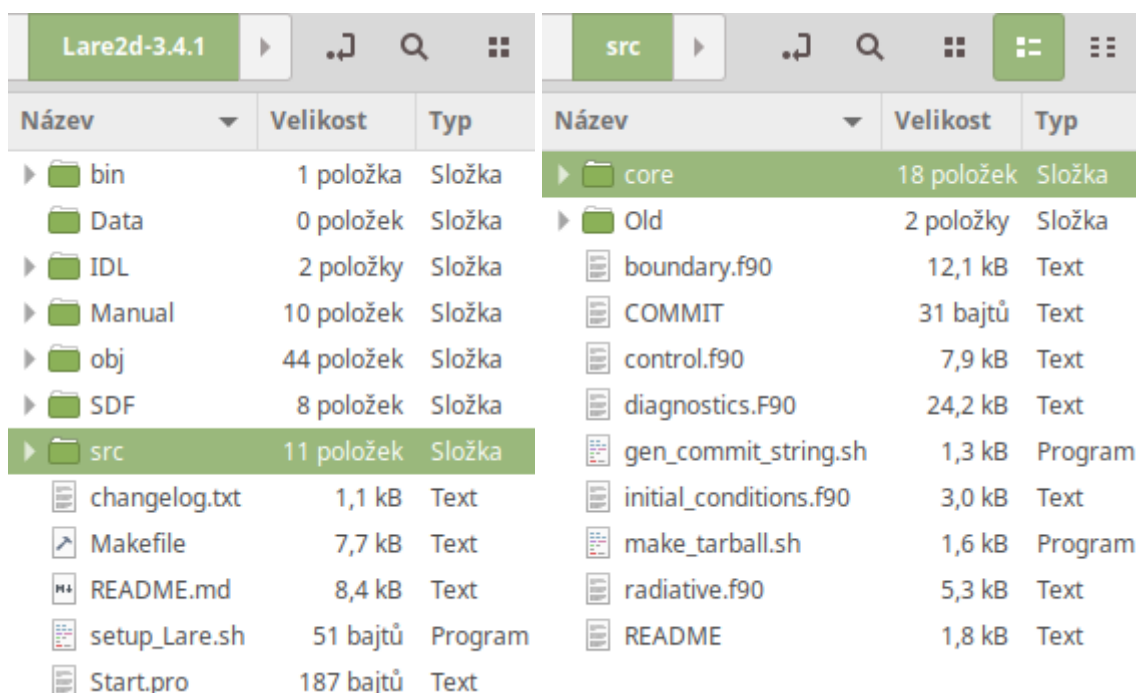
Obr. 3.1: „Staggered grid“ ve 2D. Převzato a upraveno z [2].

Vzhledem k tomu, že veličiny jsou definované na různých částech buňky, existují různé způsoby pro označení polohy na mřížce. Proměnné  $x_b$  a  $y_b$  udávají polohu pravé, případně horní strany buňky (boundary), zatímco  $x_c$  a  $y_c$  udávají polohu středu buňky (center). Pro definici rychlosti jsou tedy vhodné souřadnice  $x_b$ ,  $y_b$  a pro definici skalárů nebo složky  $B_z$  magnetické indukce jsou vhodné souřadnice  $x_c$ ,  $y_c$ . Vektory magnetické indukce jsou definované na různých částech buňky, a proto počáteční bod složky  $B_x$  má polohu  $(x_b, y_c)$  a počáteční bod složky  $B_y$  má polohu  $(x_c, y_b)$  [2].

### 3.1.2 Struktura kódu

Ve složce `Lare2d-3.4.1` (obrázek 3.2 vlevo) se nachází několik podsložek, mezi které patří složka `src` (obrázek 3.2 vpravo), kde je uložen zdrojový kód, a `Data`, která obsahuje výsledky simulace.

Složka `src` obsahuje několik souborů, které je třeba nastavit před spuštěním simulace. Jeden ze souborů nejčastěji upravovaných uživatelem je `control.f90`. V něm nastavujeme normalizační konstanty délky, hustoty a magnetické indukce, aby bylo možné zadávat proměnné v bezrozměrných jednotkách. Dále se v něm zadávají základní parametry simulace jako rozměry boxu, počet buněk, délka časového kroku nebo uvažování rezistivní části rovnic MHD. Nakonec v něm volíme informace, které mají být zahrnuté do výstupu.



The image shows two side-by-side file explorer windows. The left window displays the root directory 'Lare2d-3.4.1' with a table of subdirectories and files. The right window displays the 'src' subdirectory with a table of its contents.

Název	Velikost	Typ
bin	1 položka	Složka
Data	0 položek	Složka
IDL	2 položky	Složka
Manual	10 položek	Složka
obj	44 položek	Složka
SDF	8 položek	Složka
src	11 položek	Složka
changelog.txt	1,1 kB	Text
Makefile	7,7 kB	Text
README.md	8,4 kB	Text
setup_Lare.sh	51 bajtů	Program
Start.pro	187 bajtů	Text

Název	Velikost	Typ
core	18 položek	Složka
Old	2 položky	Složka
boundary.f90	12,1 kB	Text
COMMIT	31 bajtů	Text
control.f90	7,9 kB	Text
diagnostics.F90	24,2 kB	Text
gen_commit_string.sh	1,3 kB	Program
initial_conditions.f90	3,0 kB	Text
make_tarball.sh	1,6 kB	Program
radiative.f90	5,3 kB	Text
README	1,8 kB	Text

**Obr. 3.2:** Složka `Lare2d-3.4.1` (vlevo) a podsložka `src` (vpravo).

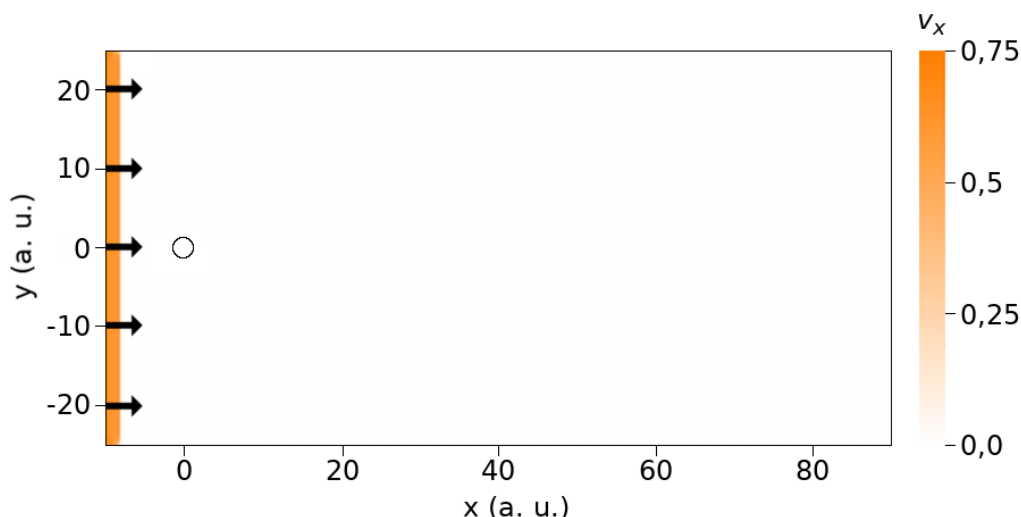
Počáteční podmínky simulace obsahuje soubor `initial_conditions.f90`. Základními nastavovanými podmínkami jsou počáteční hodnoty všech složek rychlosti a magnetické indukce, hustoty, energie a gravitační síly. Také se zde nastavují vztahy určující jejich rozložení [2].

### 3.1.3 Nastavení parametrů simulace

Při nastavení parametrů simulace jsou používány bezrozměrné veličiny. K provedeným simulacím byl použit simulační box s rozměry  $x = 100$  a  $y = 50$  (rozsah délky ve směru  $x$  je od  $-10$  do  $90$ , ve směru  $y$  od  $-25$  do  $25$ ), který se skládá z buněk o rozměrech  $0,05 \times 0,05$ . Každá simulace trvá  $t = 1000$  po krocích  $t = 2$  v časových jednotkách odpovídajících  $1$  s. V simulacích nebylo uvažováno gravitační pole.

Překážka kruhového průřezu ve 2D, kterou si lze představit jako válec s nekonečně dlouhou podélnou osou kolmou na směr proudění, byla do simulace zahrnuta vymezením kruhové oblasti na mřížce se středem v bodě  $x = 0, y = 0$ , v rámci které bude rychlost nulová. Dále byla stanovena okrajová podmínka pro rychlost tekutiny  $v_x = v_0$  postupující z levého okraje boxu ve směru osy  $x$ . Tyto podmínky byly nastaveny v souboru `initial_conditions.f90`. Aby platily nejen na počátku, ale i po celou dobu simulace, což je důležité především pro oblast představující kruhovou překážku, v souboru `lagran.F90`, obsaženém ve složce `core`, byly uplatněny v polovině časového kroku a na konci časového kroku. Například pro překážku vymezenou oblastí  $x^2 + y^2 \leq 1,6$  a proudění o počáteční rychlosti  $0,75$  vypadaly takto:

```
DO ix=-2, nx+2
  DO iy=-2, ny+2
    IF ((xb(ix)**2.0+yb(iy)**2.0)<=1.6_num) THEN
      vx(ix, iy) = 0.0_num
    END IF
    IF (xb(ix)<=-10.00_num) THEN
      vx(ix, iy) = 0.75_num
    END IF
  END DO
END DO
```



**Obr. 3.3:** Ilustrace rozložení rychlosti  $v_x$  v simulačním boxe v čase  $t = 1$ . Šipky na levém okraji naznačují počáteční rychlost proudění  $v_0 = 0,75$ . Černá kružnice zobrazuje umístění překážky kruhového průřezu, která je vymezena oblastí  $x^2 + y^2 \leq 1,6$ .

Obrázek 3.3 pro přehlednost ilustruje stav v  $t = 1$  za výše uvedených podmínek. V simulaci byly použity otevřené okrajové podmínky, aby použitý box mohl představovat pracovní oblast většího systému a tekutina by se mohla volně šířit za její hranice.

### 3.1.4 Zpracování výsledků

Výsledky simulací prezentované na obrázcích 3.4–3.7 a 3.16 byly zpracovány v programu VisIt<sup>2</sup>. Vznikající víry byly zviditelněny pomocí nepravých barev (pseudocolor) zobrazením vorticity neboli vířivosti  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ , určující rotaci vektoru rychlosti v každém bodě [19].

Dále pro vybrané simulace byly stanoveny časové průběhy relativní změny hustoty na určitých polohách na mřížce a vyneseny do grafů v programovém prostředí MATLAB. Z těchto dat pomocí waveletové analýzy [11, 36] bylo možné zjistit periodu tvorby vírů a dosazením získané hodnoty do vztahu pro Strouhalovo číslo (2.1), které by se mělo blížit 0,2, ověřit správnost výpočtu.

<sup>2</sup><https://wci.llnl.gov/simulation/computer-codes/visit/>

## 3.2 Numerické simulace proudění tekutiny bez magnetického pole

V případě prostředí bez magnetického pole nebude řešena indukční rovnice (1.10) a v Eulerově rovnici (1.11) nebude obsažena Lorentzova síla. Při výpočtech je tedy použita následující soustava hydrodynamických rovnic:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.3)$$

V této bakalářské práci byla provedena parametrická studie zahrnující 9 simulací pro tři různé poloměry válce ( $r^2 = 0,1; 0,4$  a  $1,6$ ) a tři různé počáteční rychlosti proudění ( $v_0 = 0,25; 0,5$  a  $0,75$ ) bez magnetického pole.

Na obrázcích 3.4, 3.5 a 3.6 můžeme vidět časový vývoj  $\omega \cdot r / v_0$  při stejné rychlosti  $v_0 = 0,5$  a třech různých poloměrech válce ( $r^2 = 0,1; 0,4$  a  $1,6$ ). Celý průběh těchto simulací si lze prohlédnout na videích, na která odkazují přiložené QR kódy.

### 3.2.1 Výsledky simulace proudění o rychlosti $v_0 = 0,5$ kolem válce o velikosti $r^2 = 0,1$

Na obrázku 3.4, který ilustruje vývoj proudění kolem válce o velikosti  $r^2 = 0,1$ , lze vidět, že kolem času  $t = 30$  symetrická dvojice vírů zůstává napojená na válec a kolem  $t = 52$  se symetrie začíná narušovat a je vidět oscilace úplavu za válcem.

Kolem času  $t = 84$  je vytvořen řetězec vírů zasahující zhruba do vzdálenosti  $x = 18$ , složený z osmi vírů. Lze poznat, že víry odtržené krátce po narušení symetrie (na tomto grafu se nacházejí mezi  $x = 10$  a  $x = 14$ ) jsou větší než následně vznikající víry.

Na dalším grafu, znázorňujícím stav v čase  $t = 392$ , je zobrazen řetězec vírů zasahující téměř do celé délky boxu. Je zde vidět narušení struktury řetězce zhruba

od  $x = 7$ , kde se „rozdvouje“, a vytvoření druhotného řetězce vírů zhruba na  $x = 20$ , který se vyvíjí tak, jako kdyby zde byla umístěna další překážka. Na přiloženém videu si lze všimnout, že k půlení řetězce dochází přibližně od  $t = 170$  a že druhotná oscilace probíhá přibližně od času  $t = 250$ , má větší periodu a nově uvolňované víry jsou větší. V určité vzdálenosti se druhotný řetězec začíná také půlit a jeho následný vývoj je neuspořádaný a výrazně zpomalený.

### 3.2.2 Výsledky simulace proudění o rychlosti $v_0 = 0,5$ kolem válce o velikosti $r^2 = 0,4$

Při simulaci proudění kolem válce o velikosti  $r^2 = 0,4$  (obrázek 3.5) symetrické víry jsou napojené na válec zhruba do  $t = 44$  a v čase kolem  $t = 72$  probíhá první odtržení víru. Vidíme, že dvojice vírů je umístěna v bližší vzdálenosti od válce než při  $r^2 = 0,1$ .

V čase  $t = 114$  je vytvořen řetězec vírů zasahující zhruba do vzdálenosti  $x = 28$ , složený z osmi vírů. Dva víry, které byly původně napojené na válec, jsou větší než ostatní a nacházejí se mezi  $x = 16$  a  $x = 22$ .

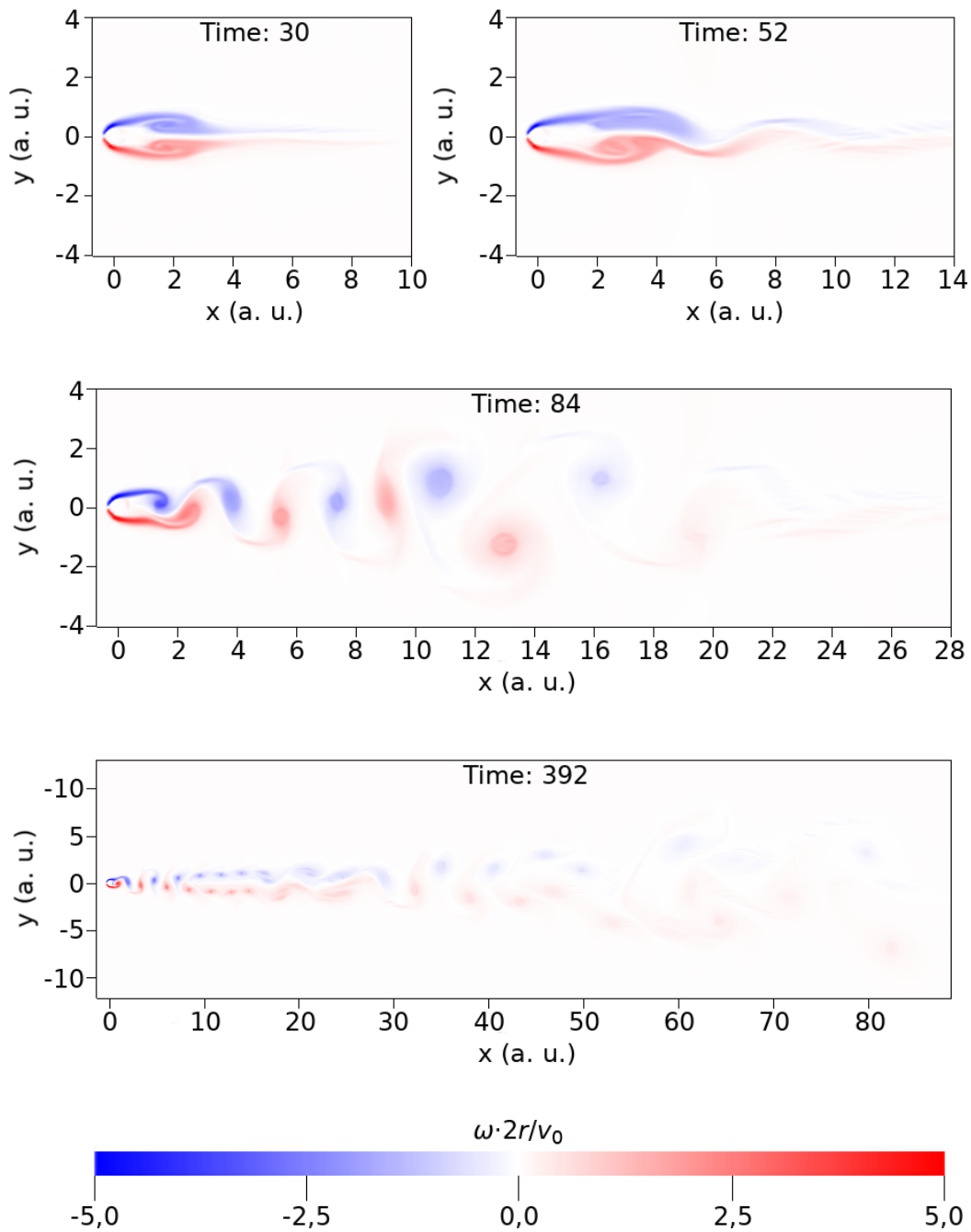
V čase  $t = 300$  řetězec vírů zasahuje téměř do celé délky boxu. I zde je vidět narušení pravidelné struktury řetězce zhruba od  $x = 7$ , což je vzhledem k rozměrům válce a vírů ještě bližší vzdálenost, než byla při  $r^2 = 0,1$ . Zhruba od  $x = 15$  řetězec má zase jinou strukturu. Na videu lze poznat, že zhruba od  $t = 200$  zde dochází ke spojení dvou stejně orientovaných vírů, které se následně unášejí jako jeden vír, což vypadá odlišně než v simulaci pro  $r^2 = 0,1$ . Ke srážkám vírů dochází i ve větších vzdálenostech, kde podobně jako u předchozí simulace se unášejí neuspořádaně a pomaleji.



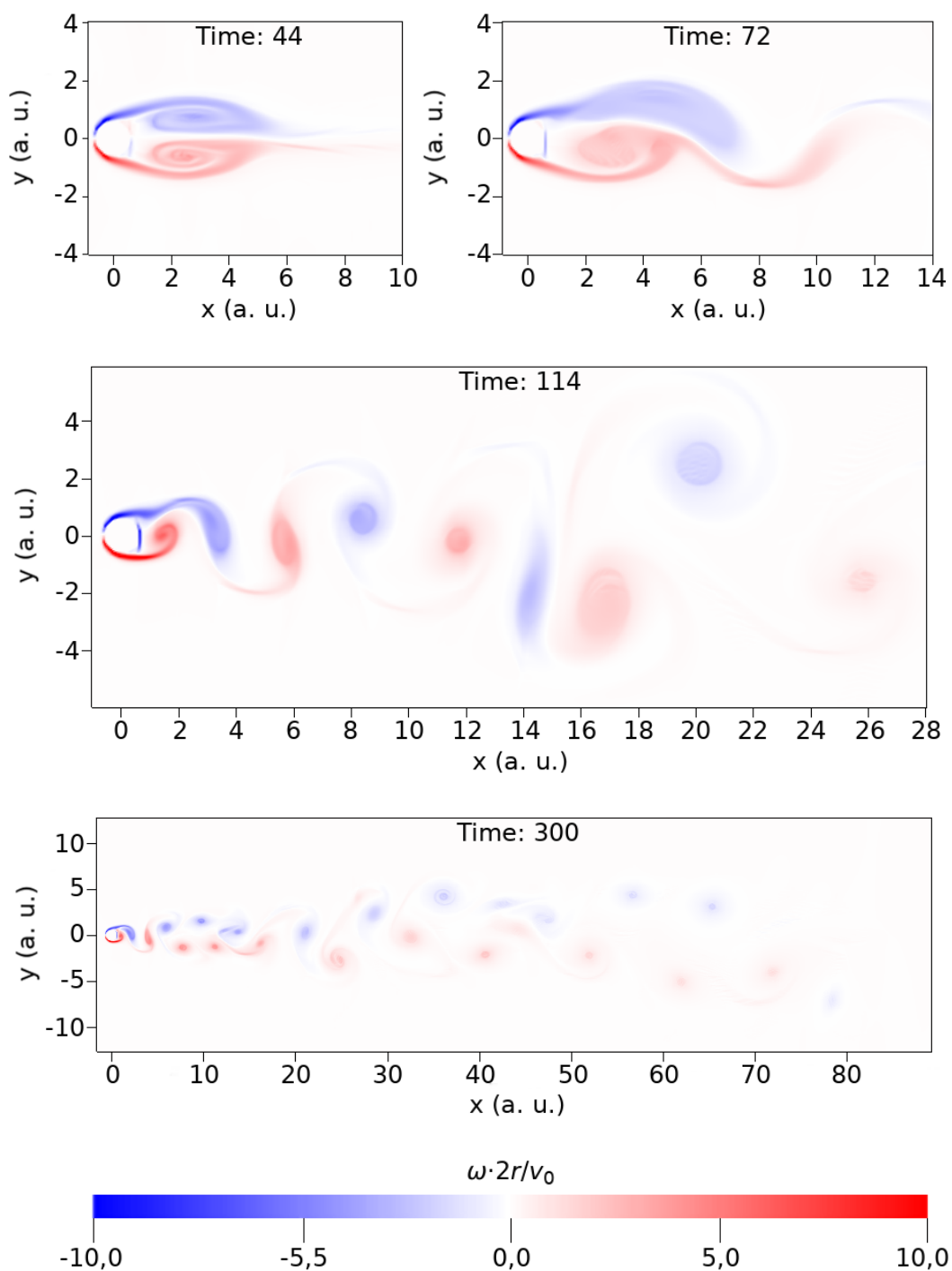
### 3.2.3 Výsledky simulace proudění o rychlosti $v_0 = 0,5$ kolem válce o velikosti $r^2 = 1,6$

Na obrázku 3.6 můžeme vidět, že při velikosti  $r^2 = 1,6$  kolem času  $t = 82$  víry ještě zůstávají napojené na válec a jsou symetrické. Vidíme, že jsou umístěny v bližší vzdálenosti od válce, než jak tomu bylo u menších poloměrů. V čase kolem  $t = 146$  probíhá první odtržení víru. Kolem času  $t = 200$  se tento vír nachází ve vzdálenosti mezi  $x = 25$  a  $x = 30$ , zatímco druhý vír je deformovaný, a u řetězce není vidět pravidelná struktura.

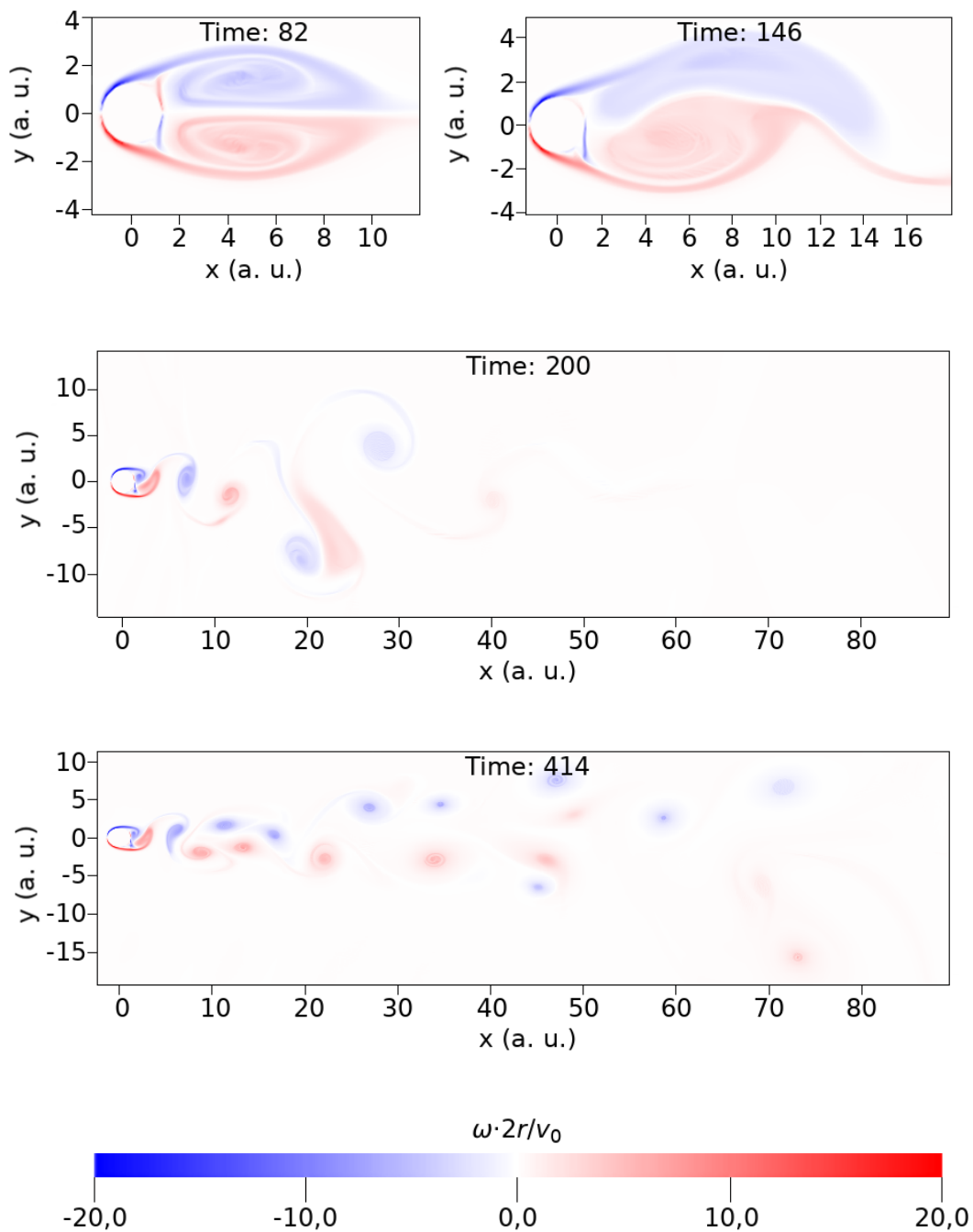
V čase  $t = 414$  řetězec vírů zasahuje téměř do celé délky boxu a podobně jako v simulaci pro  $r^2 = 0,4$ , v blízké vzdálenosti od válce se víry začínají srážet a pokud jsou stejně orientované, spojují se v nové útvary. Na videu lze vidět první srážku kolem  $t = 300$ . K mnoha srážkám dochází i na dalších vzdálenostech, kde se víry šíří neuspořádaně.



**Obr. 3.4:** Časový průběh vorticity pro  $r^2 = 0,1$  a  $v_0 = 0,5$ . Online video zobrazující celou simulaci lze najít v příloženém QR kódu.



**Obr. 3.5:** Časový průběh vorticity pro  $r^2 = 0,4$  a  $v_0 = 0,5$ . Online video zobrazující celou simulaci lze najít v příloženém QR kódu.



**Obr. 3.6:** Časový průběh vorticity pro  $r^2 = 1,6$  a  $v_0 = 0,5$ . Online video zobrazující celou simulaci lze najít v příloženém QR kódu.

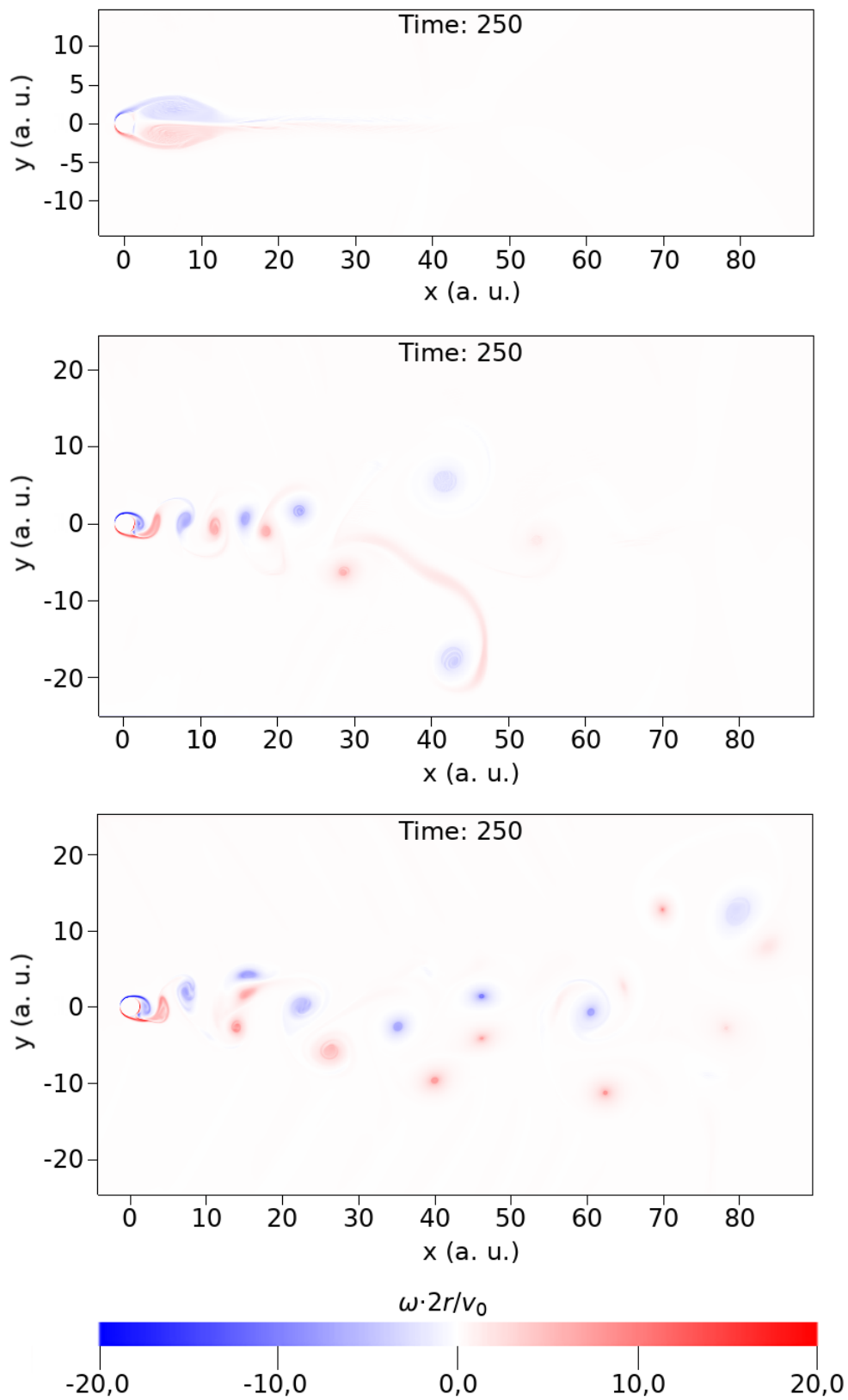
### 3.2.4 Výsledky simulací proudění o rychlostech $v_0 = 0,25, 0,5$ a $0,75$ kolem válce o velikosti $r^2 = 1,6$

Obrázek 3.7 porovnává rozložení vorticity v čase  $t = 250$  při stejné velikosti  $r^2 = 1,6$  a rychlostech  $v_0 = 0,25, 0,5$  a  $0,75$ . Zde vidíme, že při rychlosti  $v_0 = 0,25$  dvojice vírů je teprve napojena na válec, přičemž je od něj vzdálenější než při  $v_0 = 0,5$  (obrázek 3.6), a zatím není patrné narušení symetrie. Při rychlosti  $v_0 = 0,5$  je vyvinut řetězec vírů přesahující polovinu délky boxu a zatím zde není patrné narušení jeho struktury. Při rychlosti  $v_0 = 0,75$  řetězec zasahuje téměř do celé délky boxu, není pravidelný a mezi  $x = 10$  a  $x = 20$  je vidět srážka dvou vírů.

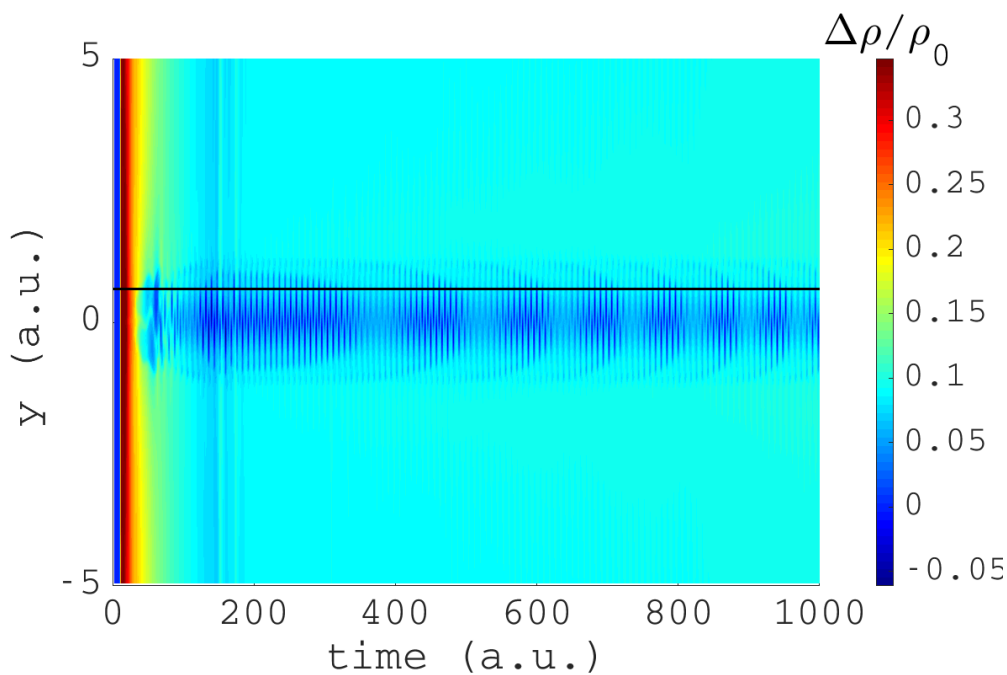
### 3.2.5 Určení periody uvolňování vírů při velikosti válce $r^2 = 0,1$ a rychlostech $v_0 = 0,5$ a $0,75$

Jak bylo popsáno na konci kapitoly 3.2.1, při simulaci proudění o rychlosti  $v_0 = 0,5$  kolem válce o velikosti  $r^2 = 0,1$  dochází k druhotnému uvolňování vírů, které jsou větší a uvolňují se s větší periodou. K tomuto jevu dochází i při rychlosti  $v_0 = 0,75$  a stejné velikosti válce. Pro obě tyto simulace byla stanovena časová závislost relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  na ose  $y$  v rozmezí od  $-5$  do  $5$  v blízké poloze za válcem (obrázky 3.9 a 3.13) a v blízké poloze za „zdrojem“ druhotné oscilace (pro rychlost  $v_0 = 0,5$  byla zvolena poloha  $x = 24$  – obrázek 3.11, pro rychlost  $v_0 = 0,75$  poloha  $x = 20$  – obrázek 3.15). Dále tyto závislosti byly omezeny na  $y = 0,65$  (tedy mírně nad polohou válce), jinými slovy ke každému grafu byl vytvořen „řez“ přes toto místo (obrázky 3.8, 3.10, 3.12 a 3.14).

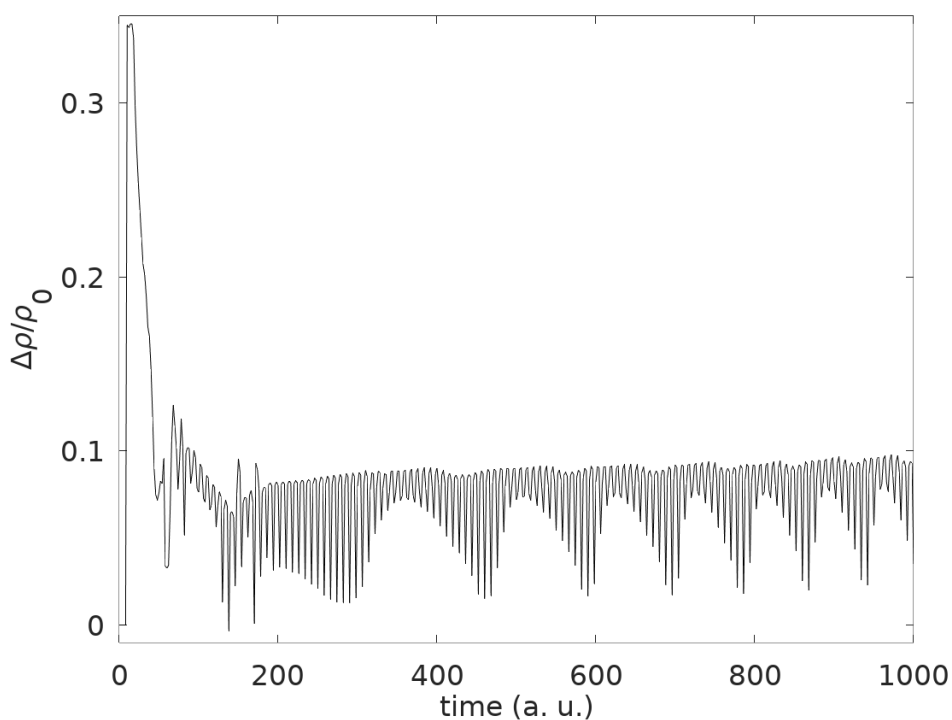
Díky tomu, že tvorba vírů je charakterizována změnou hustoty prostředí, z těchto dat pomocí waweletové analýzy bylo možné odečíst periodu tvorby vírů. Dosažením získaných hodnot do vztahu pro Strouhalovo číslo (2.1), jehož očekávaná hodnota je blízká  $0,2$ , byla ověřena správnost výpočtu. Výsledkem je, že při rychlosti  $v_0 = 0,5$  hlavní uvolňování vírů probíhá s periodou  $P = 8,1$  a druhotné s periodou  $P = 23$ , zatímco při rychlosti  $v_0 = 0,75$  hlavní uvolňování vírů probíhá s periodou  $P = 6,2$  a druhotné s periodou  $P = 12,6$ .



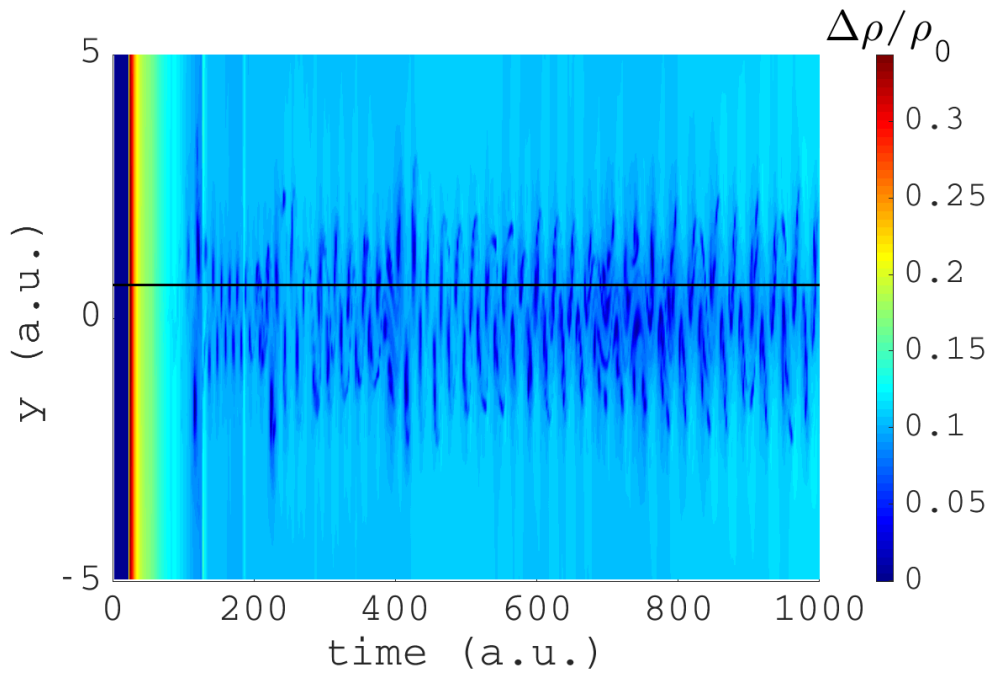
**Obr. 3.7:** Porovnání rozložení vorticity pro rychlosti  $v_0 = 0,25, 0,5$  a  $0,75$  v čase  $t = 250$  při  $r_0 = 1,6$ .



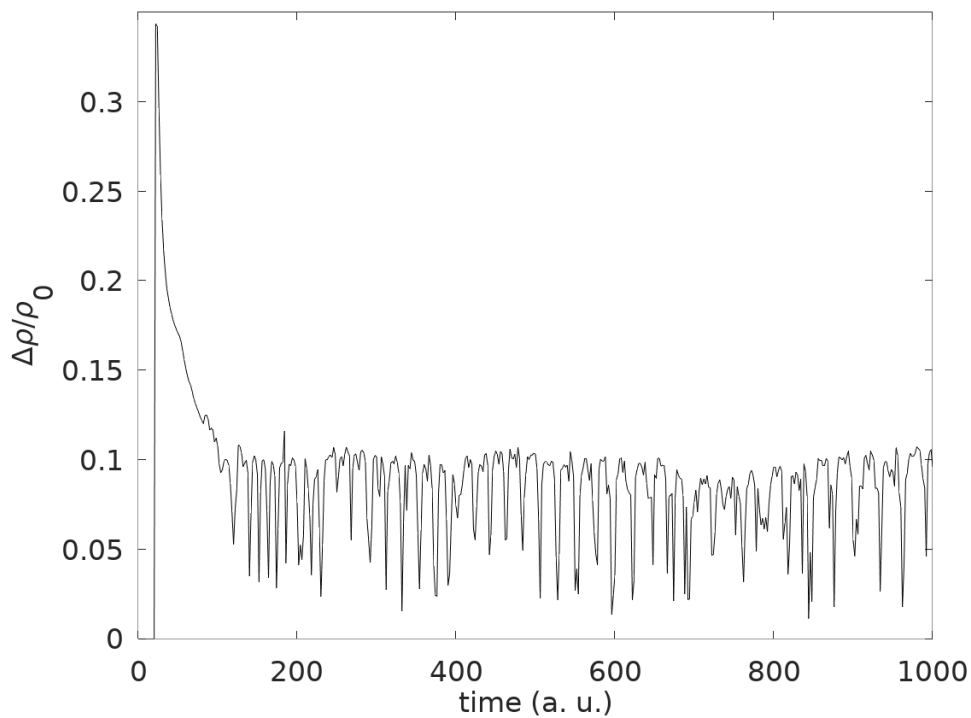
**Obr. 3.8:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  na ose  $y$  v rozsahu  $[-5; 5]$  pro  $x = 3$ ,  $r^2 = 0,1$  a  $v_0 = 0,5$ . Vodorovnou čarou je označeno místo řezu, ze kterého byla vypočítána perioda, tj.  $y = 0,65$  (viz obrázek 3.9).



**Obr. 3.9:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  v bodě  $x = 3, y = 0,65$  pro  $r^2 = 0,1$  a  $v_0 = 0,5$ .

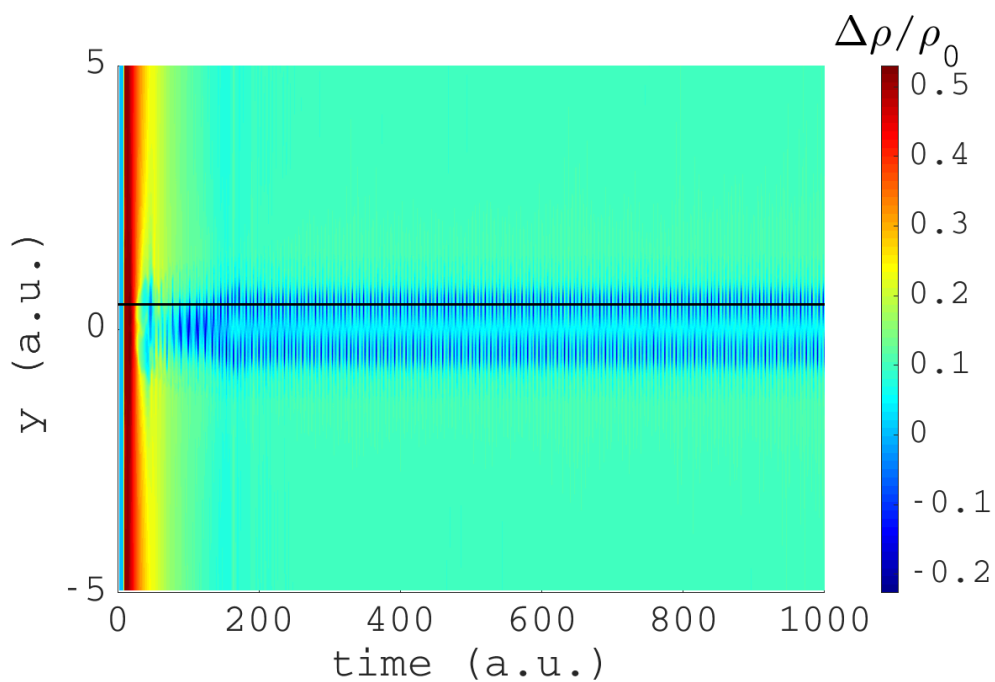


**Obr. 3.10:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  na ose  $y$  v rozsahu  $[-5; 5]$  pro  $x = 24$ ,  $r^2 = 0,1$  a  $v_0 = 0,5$ . Vodorovnou čarou je označeno místo řezu, ze kterého byla vypočítána perioda, tj.  $y = 0,65$  (viz obrázek 3.11).

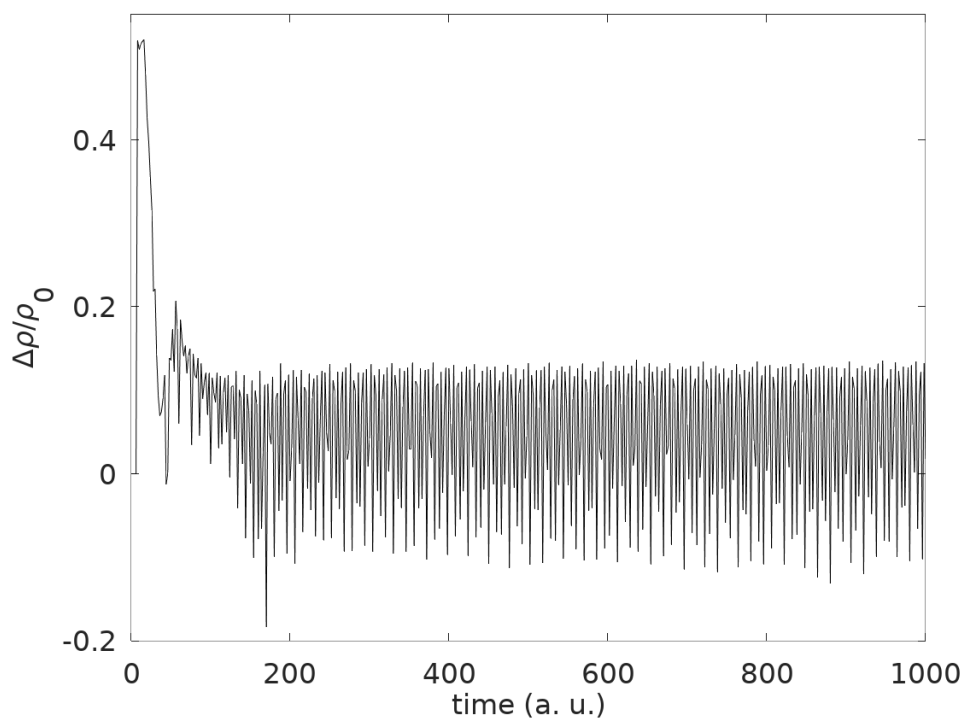


**Obr. 3.11:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  v bodě  $x = 24$ ,  $y = 0,65$  pro  $r^2 = 0,1$  a  $v_0 = 0,5$ .

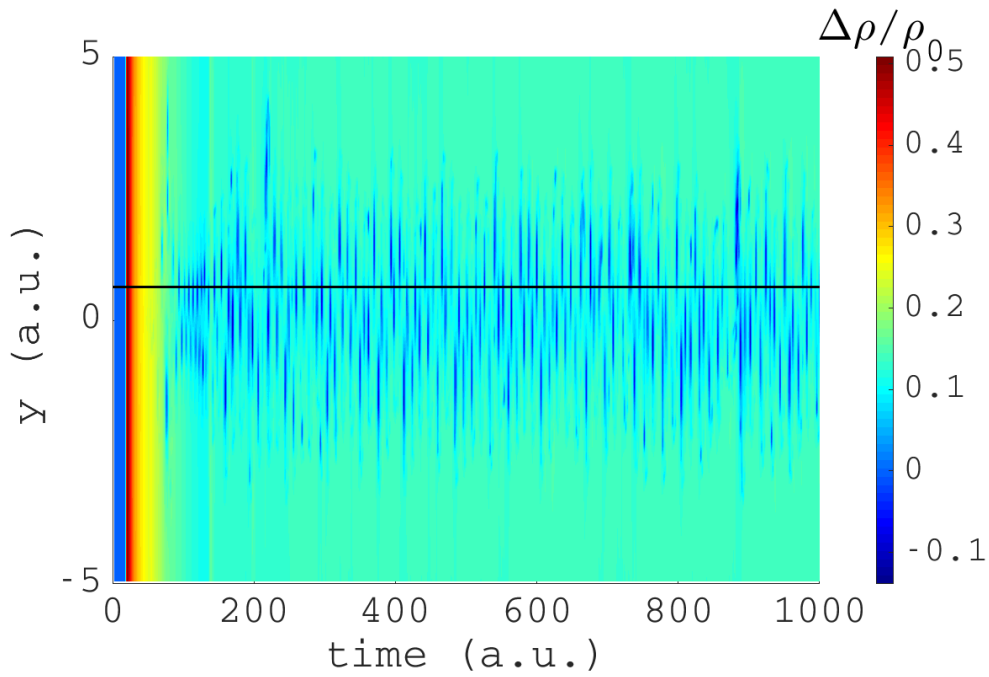




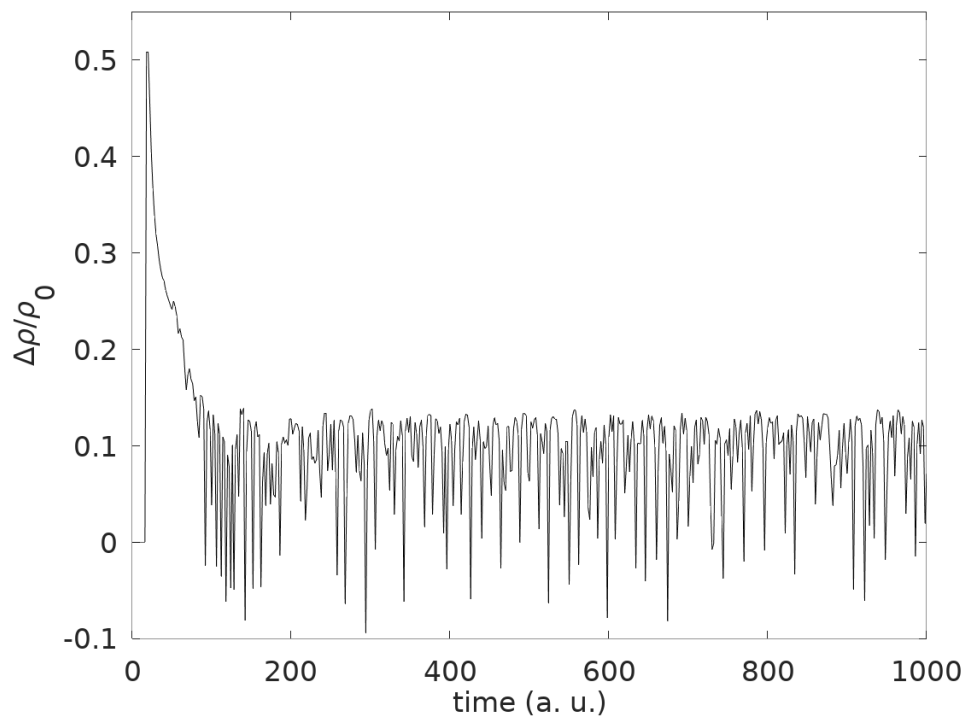
**Obr. 3.12:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  na ose  $y$  v rozsahu  $[-5; 5]$  pro  $x = 3$ ,  $r^2 = 0,1$  a  $v_0 = 0,75$ . Vodorovnou čarou je označeno místo řezu, ze kterého byla vypočítána perioda, tj.  $y = 0,65$  (viz obrázek 3.13).



**Obr. 3.13:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  v bodě  $x = 3, y = 0,65$  pro  $r^2 = 0,1$  a  $v_0 = 0,75$ .



**Obr. 3.14:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  na ose  $y$  v rozsahu  $[-5; 5]$  pro  $x = 20$ ,  $r^2 = 0,1$  a  $v_0 = 0,75$ . Vodorovnou čarou je označeno místo řezu, ze kterého byla vypočítána perioda, tj.  $y = 0,65$  (viz obrázek 3.15).



**Obr. 3.15:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  v bodě  $x = 20$ ,  $y = 0,65$  pro  $r^2 = 0,1$  a  $v_0 = 0,75$ .

### 3.3 Numerické simulace proudění tekutiny s magnetickým polem

Simulace obtékání těles tekutinou s magnetickým polem mají využití v astrofyzice a sluneční fyzice, například při studiu oscilací v koronálních smyčkách nebo plazmových ohonech komet, zmíněných v kapitole 2.3.2.

V následující simulaci byly použity všechny MHD rovnice (1.7–1.10). Byla provedena jedna simulace proudění o rychlosti  $v_0 = 0,5$  kolem válce o velikosti  $r^2 = 0,1$  za účelem porovnání s výsledky simulace o stejných parametrech bez magnetického pole (kapitola 3.2.1). Byla použita pouze jedna složka magnetického pole  $B_z = 0,894$  v bezrozměrných jednotkách, což odpovídá hodnotě 10 G, kolmá na rovinu simulačního boxu.

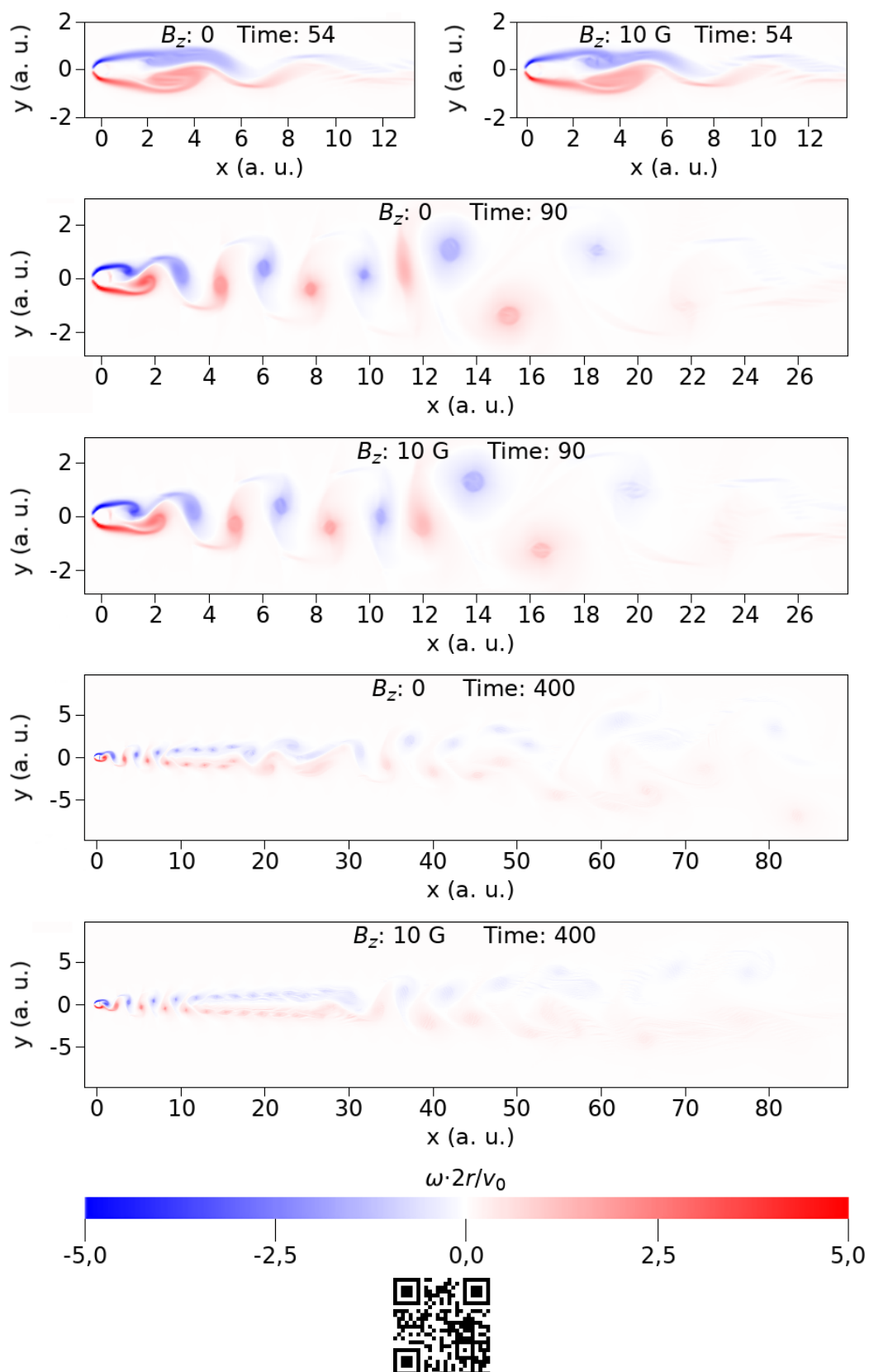
#### 3.3.1 Výsledky simulací

Obrázek 3.16 znázorňuje časový vývoj vorticity v této simulaci ve srovnání se simulací o stejných parametrech bez magnetického pole. Celý průběh si lze prohlédnout na videu, na které odkazuje přiložený QR kód.

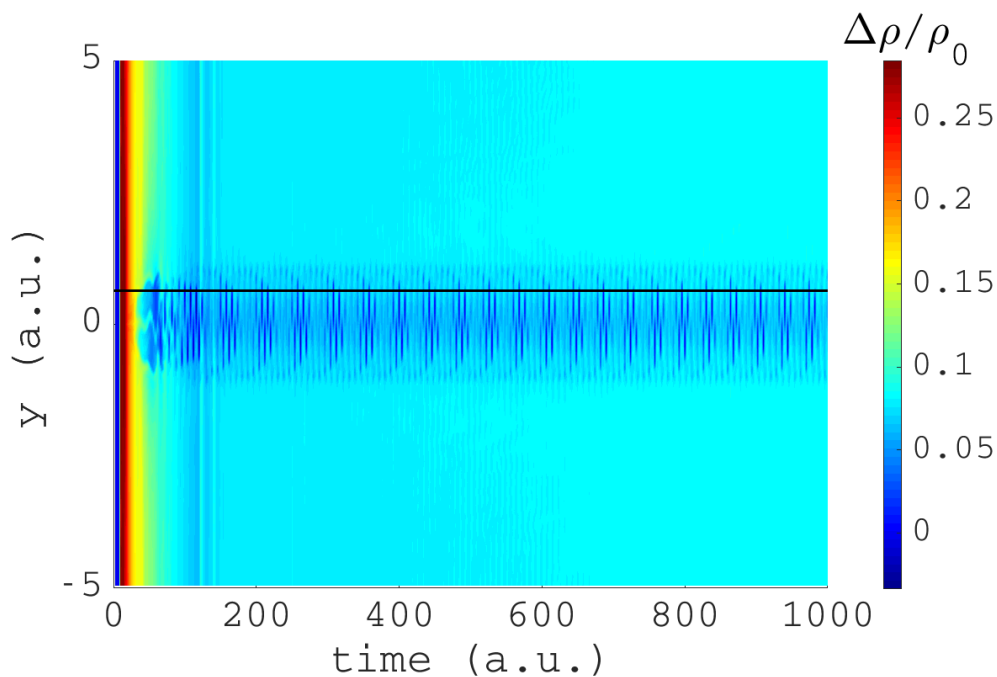
Vývoj vorticity u obou simulací vypadá velmi podobně, ale na grafech zachycujících stav v čase  $t = 54$  a  $t = 90$  si lze všimnout, že u simulace s magnetickým polem je mírně „napřed“. Podobně jako u simulace bez magnetického pole, při  $B_z = 10$  G dochází k půlení řetězce vírů a vzniku druhotné oscilace, kde se uvolňují větší víry s větší periodou. Druhotná oscilace ale probíhá později a ve větší vzdálenosti od válce – přibližně od  $t = 300$  a  $x = 30$ .

Určení periody obou oscilací bylo provedeno stejným postupem, jak je popsáno v kapitole 3.2.5. Na obrázcích 3.17 a 3.19 je znázorněna časová závislost relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  na ose  $y$  v rozmezí od  $-5$  do  $5$  v blízké poloze za válcem ( $x = 3$ ) a v blízké poloze za „zdrojem“ druhotné oscilace ( $x = 40$ ). Na obrázcích 3.18 a 3.20 jsou tyto závislosti omezené na oblast  $y = 0,65$ , tedy mírně nad válcem.

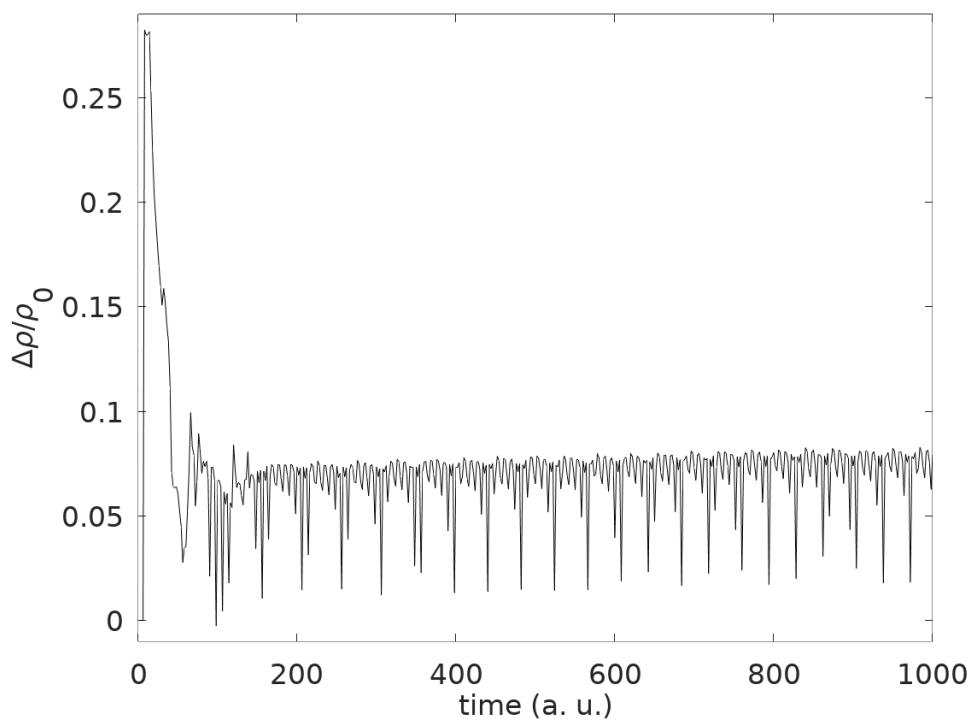
Získaná perioda hlavní oscilace je 8,585, což je o 0,485 více než u simulace bez magnetického pole, a poměr těchto period přibližně odpovídá  $B_z^{-1/2}$ . Perioda druhotné oscilace je 19,05, což je o 3,95 méně než u simulace bez magnetického pole.



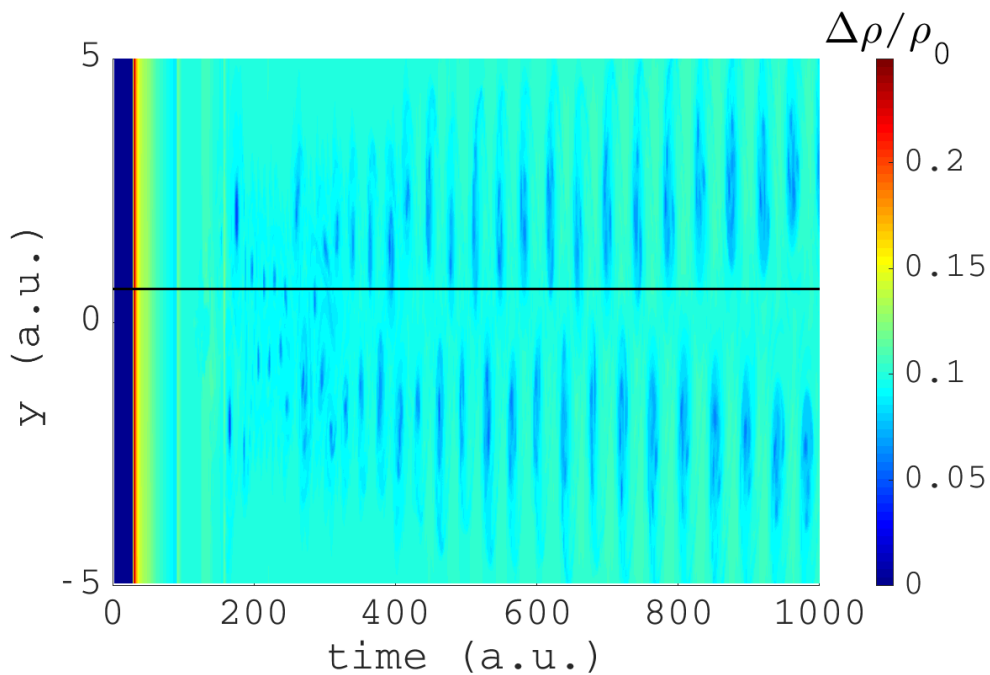
**Obr. 3.16:** Porovnání časového průběhu vorticity pro  $r^2 = 0,1$  a  $v_0 = 0,5$  bez magnetického pole a s magnetickým polem o  $B_z = 10$  G. Online video zobrazující celou simulaci lze najít v příloženém QR kódu.



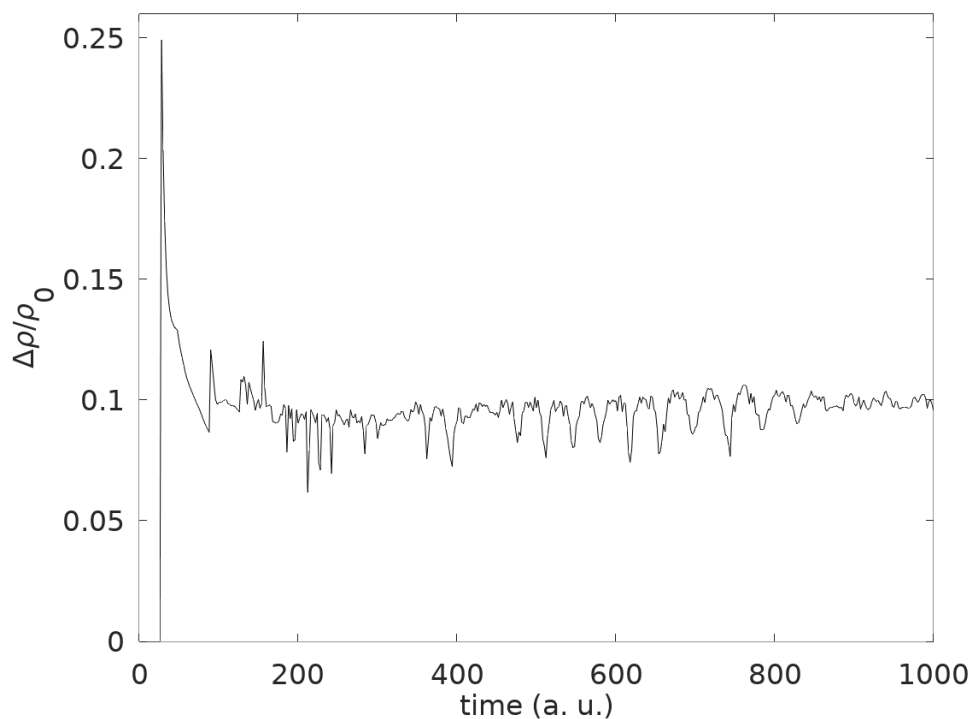
**Obr. 3.17:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  na ose  $y$  pro  $x = 3$ ,  $r^2 = 0,1$ ,  $v = 0,5$  a  $B_z = 10$  G. Vodorovnou čarou je označeno místo řezu, ze kterého byla vypočítána perioda, tj.  $y = 0,65$  (obrázek 3.18.)



**Obr. 3.18:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  v bodě  $x = 3$ ,  $y = 0,65$  pro  $r^2 = 0,1$ ,  $v = 0,5$  a  $B_z = 10$  G.



**Obr. 3.19:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  na ose  $y$  pro  $x = 40$ ,  $r^2 = 0,1$ ,  $v = 0,5$  a  $B_z = 10$  G. Vodorovnou čarou je označeno místo řezu, ze kterého byla vypočítána perioda, tj.  $y = 0,65$  (obrázek 3.20).



**Obr. 3.20:** Časový průběh relativní změny hustoty  $\Delta\rho/\rho_0$  v bodě  $x = 40, y = 0,65$  pro  $r^2 = 0,1$ ,  $v = 0,5$  a  $B_z = 10$  G.

## 4. Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo seznámení s jevy probíhajícími při proudění tekutiny v okolí tělesa kruhového průřezu a jejich změnami v závislosti na Reynoldsově čísle a následné ověření těchto jevů pomocí numerických simulací.

V úvodu této práce byl čtenář seznámen se základními pojmy a zákony dynamiky tekutin včetně rovnic magnetohydrodynamiky, bylo zde popsáno chování tekutiny při jejím pohybu ve styku s pevným povrchem v závislosti na rychlosti pohybu nebo tvaru obtékaného tělesa.

Další kapitola byla zaměřena na proudění v okolí tělesa kruhového průřezu, které bylo vysvětleno na příkladu válce. Byl rozebrán tento případ proudění při různých hodnotách Reynoldsova čísla a byl vysvětlen jev Kármán vortex street.

Provedeným numerickým simulacím tohoto jevu je věnována třetí kapitola. V úvodu seznamuje s numerickým kódem Lare2d, který byl využit k jejich provedení, dále jsou zde uvedena počáteční nastavení každé simulace a nakonec jsou předloženy samotné výsledky. Výsledky byly představeny pomocí videí a obrázků, umožňujících se seznámit s průběhem simulací a porovnat je při různých rozměrech obtékaného kruhového tělesa, počátečních rychlostech proudění a přítomnosti nebo absenci magnetického pole kolmého na rovinu proudění. Byla sledována frekvence tvorby vírů za tělesem, která byla zjištěna pomocí waveletové analýzy, jak brzy začíná probíhat a jak se následně vyvíjí.

Jak se očekávalo, při větších rychlostech proudění k uvolňování vírů docházelo dříve a probíhalo s vyšší frekvencí, přičemž symetrická dvojice vírů, vznikající na počátku simulace, se nacházela blíže k válci. Dále bylo zjištěno, že při větších



rozměrech tělesa symetrická dvojice vírů se nachází v bližší vzdálenosti od válce, víry jsou větší, začínají se odtrhávat později a s nižší frekvencí a vznikající řetězec vírů působí méně uspořádaně. U některých simulací byl zpozorován i jev vyvinutí druhotného vírového řetězce, zmíněný ve druhé kapitole, který u vyšší rychlosti probíhal v bližší vzdálenosti od válce.

Při simulaci s magnetickým polem kolmým na směr proudění, k uvolnění vírů došlo nepatrně dříve než při simulaci o stejných parametrech bez magnetického pole, druhotná oscilace naopak probíhala poněkud později. Vzhledem k tomu, že byla provedena pouze jedna simulace s magnetickým polem, nebylo možné podrobněji zjistit jeho vliv na tvorbu a vývoj vírů, což by ale mohlo být předmětem našeho dalšího výzkumu, kde bychom se také zaměřili na určení Strouhalova čísla v magnetickém poli.

V budoucnu také počítáme s rozšířením těchto simulací na 3D, kde by těleso kruhového průřezu představovala koule, což by mohlo mít uplatnění při studiu oscilací v ohonu komet. Tyto simulace plánujeme provést pomocí numerického kódu Lare3d, který je verzí kódu Lare2d sloužící k řešení (M)HD rovnic ve 3D.

# Seznam obrázků

1.1	Vývoj mezní vrstvy na ploché desce . . . . .	12
1.2	Rozložení proudnic kolem tělesa proudnicového tvaru (vlevo) a tělesa tvaru vyvolávajícího vysokou odporovou sílu (vpravo) . . . . .	13
1.3	Vznik víření za tělesem v důsledku separace mezní vrstvy . . . . .	14
2.1	Laminární tok ( $Re < 10$ ) . . . . .	18
2.2	Rozložení proudnic při $10 < Re < 40$ , kdy jsou víry napojené na válec . . . . .	18
2.3	Střídavé odtrhávání vírů od válce při $Re > 40$ . . . . .	19
2.4	Naměřené hodnoty Strouhalova čísla pro válec jako funkce Reynoldsova čísla . . . . .	19
2.5	Fotografie znázorňující rozložení proudnic za válcem při různých hodnotách Reynoldsova čísla . . . . .	20
2.6	Fotografie znázorňující rozložení proudnic za koulí při různých hodnotách Reynoldsova čísla . . . . .	21
2.7	Kármán vortex street v podobě vířících oblaků nad ostrovem Alexandra Selkirka na jihu Tichého oceánu . . . . .	22
2.8	Výčnělky na velkých průmyslových komínech . . . . .	23
2.9	Druhotný vírový řetězec vznikající za válcem při různých hodnotách Reynoldsova čísla . . . . .	24

3.1	„Staggered grid“ ve 2D . . . . .	27
3.2	Složka <code>Lare2d-3.4.1</code> (vlevo) a podsložka <code>src</code> (vpravo) . . . . .	28
3.3	Ilustrace rozložení rychlosti $v_x$ v simulačním boxe v čase $t = 1$ . . . . .	30
3.4	Časový průběh vorticity pro $r^2 = 0,1$ a $v_0 = 0,5$ . . . . .	34
3.5	Časový průběh vorticity pro $r^2 = 0,4$ a $v_0 = 0,5$ . . . . .	35
3.6	Časový průběh vorticity pro $r^2 = 1,6$ a $v_0 = 0,5$ . . . . .	36
3.7	Porovnání rozložení vorticity pro rychlosti $v_0 = 0,25, 0,5$ a $0,75$ v čase $t = 250$ při $r_0 = 1,6$ . . . . .	38
3.8	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ na ose $y$ pro $x = 3, r^2 = 0,1$ a $v_0 = 0,5$ . . . . .	39
3.9	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ v bodě $x = 3, y = 0,65$ pro $r^2 = 0,1$ a $v_0 = 0,5$ . . . . .	39
3.10	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ na ose $y$ pro $x = 24, r^2 = 0,1$ a $v_0 = 0,5$ . . . . .	40
3.11	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ v bodě $x = 24, y = 0,65$ pro $r^2 = 0,1$ a $v_0 = 0,5$ . . . . .	40
3.12	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ na ose $y$ pro $x = 3, r^2 = 0,1$ a $v_0 = 0,75$ . . . . .	41
3.13	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ v bodě $x = 3, y = 0,65$ pro $r^2 = 0,1$ a $v_0 = 0,75$ . . . . .	41
3.14	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ na ose $y$ pro $x = 20, r^2 = 0,1$ a $v_0 = 0,75$ . . . . .	42
3.15	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ v bodě $x = 20, y = 0,65$ pro $r^2 = 0,1$ a $v_0 = 0,75$ . . . . .	42
3.16	Porovnání časového průběhu vorticity pro $r^2 = 0,1$ a $v_0 = 0,5$ bez magnetického pole a s magnetickým polem o $B_z = 10$ G . . . . .	45
3.17	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ na ose $y$ pro $x = 3, r^2 = 0,1, v = 0,5$ a $B_z = 10$ G . . . . .	46
3.18	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ v bodě $x = 3, y = 0,65$ pro $r^2 = 0,1, v = 0,5$ a $B_z = 10$ G . . . . .	46
3.19	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ na ose $y$ pro $x = 40, r^2 = 0,1, v = 0,5$ a $B_z = 10$ G . . . . .	47
3.20	Časový průběh $\Delta\rho/\rho_0$ v bodě $x = 40, y = 0,65$ pro $r^2 = 0,1, v = 0,5$ a $B_z = 10$ G . . . . .	47

# Literatura

- [1] H. M. Antia, A. Bhatnagar, P. Ulmschneider. Lectures on Solar Physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. ISBN 978-3-540-01528-4.
- [2] T. Arber. LareXd [online]. University of Warwick. Poslední změna 09.08.2018. [Cit. 02.03.2020]. Dostupné z <https://warwick.ac.uk/fac/sci/physics/research/cfsa/people/tda/larexd/>
- [3] H. Aref, E. D. Siggia. Evolution and breakdown of a vortex street in two dimensions. Journal of Fluid Mechanics 109, 435–463, 1981.
- [4] T. Blejchař. Turbulence-Modelování proudění - CFX. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2010. ISBN 978-80-248-2606-6.
- [5] C. E. Brennen. Drag on a Sphere and Cylinder [online]. California Institute of Technology. Poslední změna 10.06.2006. [Cit. 06.09.2019]. Dostupné z <http://brennen.caltech.edu/fluidbook/externalflows/drag/dragonasphere.pdf>
- [6] C. E. Brennen. Introduction to Vortex Shedding [online]. California Institute of Technology. Poslední změna 10.06.2006. [Cit. 06.09.2019]. Dostupné z <http://brennen.caltech.edu/fluidbook/externalflows/vortexshedding/introduction.pdf>
- [7] D. Bustamante. Bicycle Aerodynamics. Spending Dollars To Save Cents [online]. Cycling Dynamics, 2013. [Vid. 30.01.2020]. Dostupné z <http://cyclingdynamics.blogspot.com/2013/10/bicycle-aerodynamics-spending-dollars.html>

- [8] T. J. Chung. Computational Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-59416-2.
- [9] G. Y. Dynnikova, Y. A. Dynnikov, S. V. Guvernuyuk. Mechanism underlying Kármán vortex street breakdown preceding secondary vortex street. *Physics of Fluids* 28, 054101, 2016.
- [10] V. M. Epifanov. BOUNDARY LAYER [online]. Thermopedia. Poslední změna 16.03.2011. [Cit. 26.12.2019]. Dostupné z DOI: 10.1615/AtoZ.b.boundary\_layer
- [11] M. Farge. Wavelet Transforms and their Applications to Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics* 24, 395, 1992.
- [12] A. Ganguly, J. Nabeth. Flow Visualization and LDV of Flow around a Circular Cylinder [online]. College of Engineering - Purdue University, 2009. [Cit. 10.01.2020]. Dostupné z <https://engineering.purdue.edu/~aae520/circular-cyl-watertun-sp2009-aae520.pdf>
- [13] J. P. H. Goedbloed, S. Poedts. Principles of Magnetohydrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0-521-62607-2.
- [14] R. Groh. The von Kármán Vortex Street and Tacoma Narrows Disaster [online]. Aerospace Engineering, 2016. [Cit. 22.01.2020]. Dostupné z <https://aerospaceengineeringblog.com/the-von-karman-vortex-street-and-tacoma-narrows-disaster/>
- [15] M. Gruszecki, V. M. Nakariakov, T. Van Doorselaere, T. D. Arber. Phenomenon of Alfvénic Vortex Shedding. *Physical Review Letters* 105, 055004, 2010.
- [16] P. Jelínek. Magnetohydrodynamické vlny a oscilace ve sluneční koróně. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Přírodovědecká fakulta, 2017. ISBN 978-80-7394-656-2.

- [17] U. A. Jihad Al-Khanki. Flow Around Immersed Bodies – Drag and Lift [online]. University of Babylon, 2012. [Cit. 29.01.2020]. Dostupné z [http://www.uobabylon.edu.iq/eprints/publication\\_10\\_578\\_1369.pdf](http://www.uobabylon.edu.iq/eprints/publication_10_578_1369.pdf)
- [18] P. Kulhánek. Úvod do teorie plazmatu. Praha: AGA, 2017. ISBN 978-80904582-2-2.
- [19] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. 3. vyd. Bristol: Pergamon Press Ltd., 1966. ISBN 978-3-642-00687-6.
- [20] J. Lucas. What Is Fluid Dynamics? [online]. Live Science, 2014. [Cit. 23.11.2019]. Dostupné z <https://www.livescience.com/47446-fluid-dynamics.html>
- [21] T. Matsui, M. Okude. Formation of the Secondary Vortex Street in the Wake of a Circular Cylinder. In: Structure of Complex Turbulent Shear Flow. Berlin, Heidelberg: Springer, 1983, 156–164. ISBN 978-3-642-81991-9.
- [22] E. Meiburg. On the role of subharmonic perturbations in the far wake. *Journal of Fluid Mechanics* 177, 83–107, 1987.
- [23] D. Mudimeli. Boundary Layer Separation from a Circular Cylinder [online]. Technitronics, 2019. [Vid. 22.01.2020]. Dostupné z <https://techintel.co.za/blog/research/boundary-layer-separation-from-a-circular-cylinder/>
- [24] G. Nisticò, V. Vladimirov, V. M. Nakariakov, K. Battams, V. Bothmer. Oscillations of cometary tails: a vortex shedding phenomenon? *Astronomy&Astrophysics* 615, 143, 2018.
- [25] J. M. Patchett, B. Nouanesengesy, J. Pouderoux, J. Ahrens, H. Hagen. Parallel multi-layer ghost cell generation for distributed unstructured grids. In: 2017 IEEE 7th Symposium on Large Data Analysis and Visualization (LDAV). Phoenix: IEEE, 2017, 84–91. ISBN 978-1-5386-0618-6.

- [26] E. R. Priest. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. New York: Cambridge University Press, 2014. ISBN 978-0-521-85471-9.
- [27] T. Samanta, H. Tian, V. M. Nakariakov. Evidence for Vortex Shedding in the Sun's Hot Corona. *Physical Review Letters* 123, 035102, 2019.
- [28] D. D. Schnack. *Lectures in Magnetohydrodynamics: With an Appendix on Extended MHD*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. ISBN 978-3-642-00687-6.
- [29] A. Sharma, P. Kumar, S. K. Singh. Numerical analysis of flow structures behind the bluff body at different aspect ratio. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 402, 012056, 2018.
- [30] S. Singha, K. P. Sinhamahapatra, S. K. Mukherjea, Control of Vortex Shedding From a Bluff Body Using Imposed Magnetic Field. *Journal of Fluids Engineering* 129, 517-523, 2007.
- [31] J. Smith Jr., M. Culpepper. 2.000 How and Why Machines Work [online]. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, 2002. [Cit. 31.12.2019]. Dostupné z <https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-000-how-and-why-machines-work-spring-2002/study-materials/TurbulentFlow.pdf>
- [32] J. Southard. 3.6: Boundary Layers [online]. Geosciences LibreTexts. Poslední změna 09.09.2019. [Cit. 02.01.2020]. Dostupné z [https://geo.libretexts.org/Bookshelves/Sedimentology/Book%3A\\_Introduction\\_to\\_Fluid\\_Motions\\_and\\_Sediment\\_Transport\\_\(Southard\)/03%3A\\_Flow\\_Past\\_a\\_Sphere\\_II\\_-\\_Stokes%27\\_Law%2C\\_The\\_Bernoulli\\_Equation%2C\\_Turbulence%2C\\_Boundary\\_Layers%2C\\_Flow\\_Separation/3.06%3A\\_Boundary\\_Layers](https://geo.libretexts.org/Bookshelves/Sedimentology/Book%3A_Introduction_to_Fluid_Motions_and_Sediment_Transport_(Southard)/03%3A_Flow_Past_a_Sphere_II_-_Stokes%27_Law%2C_The_Bernoulli_Equation%2C_Turbulence%2C_Boundary_Layers%2C_Flow_Separation/3.06%3A_Boundary_Layers)
- [33] S. Taneda. Experimental Investigation of the Wake behind a Sphere at Low Reynolds Numbers. *Journal of the Physical Society of Japan* 11, 1104-1108, 1956.

- [34] S. Taneda. Experimental Investigation of the Wakes behind Cylinders and Plates at Low Reynolds Numbers. *Journal of the Physical Society of Japan* 11, 302-307, 1956.
- [35] L. B. Torobin, W. H. Gauvin. Fundamental Aspects of Solid-Gas Flow: Part II. The Sphere Wake in Steady Laminar Fluids. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* 37, 167-176, 1959.
- [36] C. Torrence, G. P. Compo. A Practical Guide to Wavelet Analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society* 79, 61, 1998.
- [37] M. Yuce, D. Kareem. A Numerical Analysis of Fluid Flow around Circular and Square Cylinders. *Journal - American Water Works Association* 108, E546 - E554, 2016.
- [38] Hemodynamika [online]. *Slovníky.cz: Velký lékařský slovník online*, 2020. [Cit. 29.04.2020]. Dostupné z <http://lekarske.slovníky.cz/pojem/hemodynamika>
- [39] Hydraulic Diameter [online]. *Engineering ToolBox*, 2003. [Cit. 10.04.2020]. Dostupné z [https://www.engineeringtoolbox.com/hydraulic-equivalent-diameter-d\\_458.html](https://www.engineeringtoolbox.com/hydraulic-equivalent-diameter-d_458.html)
- [40] Reynolds number [online]. *Engineering ToolBox*, 2003. [Cit. 31.12.2019]. Dostupné z [https://www.engineeringtoolbox.com/reynolds-number-d\\_237.html](https://www.engineeringtoolbox.com/reynolds-number-d_237.html)
- [41] Von Karman Vortices [online]. *NASA*, 2002. [Vid. 10.09.2019]. Dostupné z <https://earthobservatory.nasa.gov/images/2613/von-karman-vortices>