

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

SBÍRKA ŘEŠENÝCH ÚLOH ZE STATISTIKY

Martin JÁNA

České Budějovice, duben 2007

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě – v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných Pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

Datum: duben 2007

Dovoluji si tímto poděkovat vedoucí bakalářské práce paní RNDr. Vladimíře Petráškové za odborné vedení, poskytování konzultací, věcné rady a připomínky při vypracování této bakalářské práce

ANOTACE

Cílem bakalářská práce bylo sestavit sbírku řešených i neřešených příkladů ze statistiky. Příklady se týkají vybraných parametrických (studentovy t-testy) a neparametrických testů (Wilcoxonovy testy). Dále se zaměřuje na analýzu rozptylu jednoduchého třídění, Kruskalův-Wallisův test, Friedmanův test a na testy prováděné v rámci kontingenčních tabulek.

ANNOTATION

The purpose of the bachelor thesis was to compose a collection of solved and non-solved statistical problems. The problems are related to chosen parametric (student's t-tests) and non-parametric tests (Wilcoxon's tests). Besides, it focuses on an analysis of simple sorting variance, Kruskal-Wallis test, Friedman test and on a tests taken inclusive the pivot tables.

OBSAH:

ÚVOD	8
1. PARAMETRICKÉ TESTY	9
1.1 JEDNOVÝBĚROVÝ T-TEST	9
1.2 PÁROVÝ T-TEST	15
1.3 DVOUVÝBĚROVÝ T-TEST	22
2. NEPARAMETRICKÉ TESTY.....	29
2.1 ZNAMÉNKOVÝ TEST	29
2.2 JEDNOVÝBĚROVÝ WILCOXONŮV TEST	35
2.3 DVOUVÝBĚROVÝ WILCOXONŮV TEST	42
3. POROVNÁVÁNÍ VÍCE VÝBĚRŮ	50
3.1 ANALÝZA ROZPTYLU JEDNODUCHÉHO TŘÍDĚNÍ	50
3.2 KRUSKALŮV-WALLISŮV TEST	61
3.3 FRIEDMANŮV TEST	69
4. KONTINGENČNÍ TABULKY.....	81
4.1 TEST HYPOTÉZY O NEZÁVISLOSTI.....	81
4.2 TEST HOMOGENITY MULTINOMICKÝCH ROZDĚLENÍ.....	89
4.3 TEST HYPOTÉZY O SYMETRII	98
5. VÝSLEDKY	106
ZÁVĚR.....	118
POUŽITÁ LITERATURA A ZDROJE.....	119

ÚVOD

Cílem práce je sestavit sbírku úloh, která by obsahovala příklady na základní statistické metody. Bakalářská práce se skládá ze čtyř kapitol řešených i neřešených příkladů. Příklady se týkají parametrických testů: jednovýběrový t-test, dvouvýběrový t-test a párový test. Dále neparametrických testů: znaménkový test, Jednovýběrový Wilcoxonův test, dvouvýběrový Wilcoxonův test. Porovnávání více výběrů: analýza rozptylu jednoduchého třídění, Kruskalův-Wallisův test, Friedmanův test. Poslední kapitola jsou testy prováděné v rámci kontingenčních tabulek: test hypotézy o nezávislosti, test homogenity multinomických rozdělení a test hypotézy o symetrii.

U každé kapitoly je zkrácená teorie, která by měla napomoci k jejich vyřešení. Každá část je rozdělena na řešené a neřešené příklady, tj. první tři příklady v každé části jsou vždy vyřešeny s postupem, výsledkem a závěrem.

Výsledky všech příkladů jsou přehledně uvedeny ke každé kapitole na konci této práce.

1. PARAMETRICKÉ TESTY

Statistická hypotéza je tvrzení, které se týká pravděpodobnostního rozdělení, případně parametrů náhodné veličiny. Každá úloha testování hypotéz je formulována tak, že proti sobě stojí dvě hypotézy, a to hypotéza H_0 (nulová) proti alternativní H_1 . U parametrických testů budeme předpokládat znalost pravděpodobnostního rozdělení příslušné náhodné veličiny, testovat budeme parametr daného rozdělení. Předpokládejme, že rozdělení náhodné veličiny závisí na parametru θ . O parametru θ se domníváme, že by mohl být roven danému číslu θ_0 . V tomto případě nulovou hypotézu zapisujeme ve tvaru $H_0: \theta = \theta_0$. Alternativní hypotéza H_1 může být buď ve tvaru $H_1: \theta \neq \theta_0$, nebo $H_1: \theta > \theta_0$, $\theta < \theta_0$. V prvním případě se jedná o oboustrannou hypotézu, ve druhém o jednostrannou (přesněji pravostrannou, popř. levostrannou).

1.1 JEDNOVÝBĚROVÝ T-TEST

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde $n > 1$. Parametr $\sigma^2 > 0$ není znám. Je třeba testovat hypotézu $H_0: \mu = \mu_0$, kde μ_0 je dané číslo, proti alternativě $H_1: \mu \neq \mu_0$. Hypotézu H_0 zamítneme, bude-li $\bar{X}$ hodně vzdáleno od čísla μ_0 .

Věta 1.1: Je-li skutečná střední hodnota normálního rozdělení rovna μ , pak

náhodná veličina $T = \frac{\bar{X} - \mu_0 \sqrt{n}}{S} \sim t_{n-1}$ - Studentovo rozdělení o $n-1$ stupních

volnosti. Hypotézu H_0 zamítneme, jestliže $|T| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0 \sqrt{n}}{S} \right| \geq t_{n-1}(\alpha)$

Řešené příklady

Příklad 1.1.1: U náhodně vybraného vzorku 8 cigaret stejné značky byl zjištěn průměrný obsah nikotinu 4,2 mg a směrodatná odchylka 1,3 mg. Jako vedoucí kontrolního oddělení máte rozhodnout zda výrobce neporušuje své reklamní tvrzení, že průměrný obsah nikotinu u tohoto typu cigaret nepřekračuje 3,5 mg. Zvolte hladinu významnosti 0,01 a předpokládejte normální rozložení obsahu nikotinu v cigaretách.

Řešení:

Víme, že $n = 8, \bar{x} = 4,2, s_x = 1,3$

1. $H_0 : \mu = 3,5$
2. $H_1 : \mu > 3,5$, neboť alternativou je, že obsah nikotinu přesahuje danou mez.
3. $p = 0,01$
4. Testovací kritérium $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n-1}$ má rozložení $t(7)$ s kritickými hodnotami:
Tabelovaná kritická hodnota je $T_{2p}(n-1) = T_{0,02}(7) = 2,9979$
5. Hodnota testovacího kritéria $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n-1} = \frac{4,2 - 3,5}{1,3} \sqrt{7} = 1,4246$
6. Rozhodnutí: Hypotézu H_0 přijmeme, neboť $T_{\text{vyp}} < T_{\text{tab}}$.

Závěr: Na hladině významnosti 1 % je dostatečně zřejmé, že průměrný obsah nikotinu v cigaretách nepřesahuje 3,5 mg. Výrobce neporušuje své reklamní tvrzení.

Příklad 1.1.2: Při kontrole balícího automatu, který má plnit cukrem balíčky o váze 1 kg byly při prvním převážení 5 balíčků zjištěny tyto odchylky v g od počáteční hodnoty (hladina významnosti 0,01, Anděl – Statistické metody, 1998).

-3, 2, -2, 0, -1

Je třeba zjistit, zda automat nemá systematickou odchylku od požadované hodnoty. Jednotlivé odchylky budeme považovat za realizace nezávislých *náhodných veličin* s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 je neznámý parametr.

Je třeba testovat hypotézu $H_0 : \mu = 0$ (tj. že odchylky klesají kolem 0 a nejsou systematicky posunuty ani do kladných či záporných hodnot).

Řešení:

$$n = 5, \mu = 0$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{5} (-3 + 2 + 0 - 1) = -0,8$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) = \frac{1}{4} \{ [(-3^2) + 2^2 + (-2^2) + 0 + (-1^2)] - 5 \cdot (0,8)^2 \} = 3,7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{výběrová směrodatná odchylka } S = 1,9235$$

$$\text{Hodnota testové statistiky je } |T| = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \cdot \sqrt{n} = \frac{-0,8}{1,9235} \sqrt{5} = 0,93$$

Závěr: $T_{\text{vyp}} < T_{\text{tab}} = 3,747$, hypotézu o tom, že automat nemá systematickou odchylku od požadované hodnoty, nezamítneme.

Příklad 1.1.3: Automat je nastaven na dávkování vitamínového premixu na úroveň 100g na 50 kg krmné směsi. Technická kontrola vybrala náhodně 50 vzorků a zjistila přesnou hmotnost premixu. Rozhodněte, zda se hmotnost dávky premixu významně ($\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$) liší od požadovaného nastavení.

dávka (g) x_i	96	98	100	102	104	Σ
počet vzorků (n_i)	7	29	9	3	2	50
$x_i * n_i$	672	2842	900	306	208	4928
$x_i^2 * n_i$	64512	278516	90000	31212	21636	485872

Tabulka č. 1.1: Tabulka vzorků

Řešení:

Nejprve zjistíme výběrové charakteristiky průměru a rozptylu:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{4928}{50} = 98,56$$

$$s_x^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i - (\sum x_i n_i)^2 / n}{n - 1} =$$

$$= \frac{485872 - 485703,6}{49} = 168,32 / 49 = 3,435$$

Vypočítáme střední chybu průměru:

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{3,435}}{\sqrt{50}} = \frac{1,853}{7,07} = 0,262$$

Zjistíme vypočtenou hodnotu testovací statistiky T.

$$T = \frac{|98,5 - 100|}{0,262} = \frac{1,5}{0,262} = 5,722$$

Test vyhodnotíme:

$$T_{\text{tab}} = T_{1-\alpha/2, n-1} = T_{0,975, 49} = 2,009$$

$$T_{\text{tab}} = T_{1-\alpha/2, n-1} = T_{0,995, 49} = 2,678$$

Závěr: $T_{\text{vyp}} > T_{\text{tab}} \Rightarrow H_0$ zamítáme na úrovni $\alpha = 0,05$ i na $\alpha = 0,01$. Hmotnost dávky premixu v 50kg směsi se vysoce významně liší od požadované normy.

Neřešené příklady

Příklad 1.1.4: Výroba motocyklů JAWA činí 90 ks denně. Bylo provedeno 10 kontrolních měření kompletnosti strojů a zjištěna průměrná hodnota $\bar{x} = 88,5$ při směrodatné odchylce $s = 0,8$. Jsou tyto výsledky v souladu s předpokládanou výrobou ($\alpha = 0,05$)?

Příklad 1.1.5: Vyhodnoťte, zda se ve vykoupené partii sklizené pšenice významně liší obsah lepku od normy, stanovené ve výši 18 %. Při rozboru 27 vzorků, odebraných z vykoupené partie, byl zjištěn průměrný obsah lepku 18,8 % a směrodatná odchylka 1,1. Předpokládáme, že jde o výběr z normálního rozdělení ($\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$, Prášilová, 2001, str. 39).

Příklad 1.1.6: Farmář dodává do cukrovaru cukrovku, na kterou má prováděnou srážku 12 % z hmotnosti na hlinu a jiné nežádoucí příměsi. Při kontrole, provedené farmářem na dvanácti vozidlech, byl naměřen průměrný obsah všech nežádoucích příměsí 10,6 % a rozptyl 9,7. Ověřte, zda je cukrovarem prováděna srážka nesprávná. Za průkazný považujte rozdíl potvrzený alespoň s pravděpodobností 95 %. Předpokládáme, že jde o výběr z normálního rozdělení (Prášilová, 2001, str. 39).

Příklad 1.1.7: ZD dodává do mlékárny mléko, za které je placeno dle tučnosti. Mlékárna počítá průměrnou tučnost mléka 4 %. V ZD odebrali pro kontrolu 100 vzorků mléka a zjistili průměrnou tučnost 4,4 % a rozptyl tučnosti 0,25. Zjistěte,

zda mlékárna počítá skutečně nižší tučnost mléka, než ve skutečnosti je. Zvolte $\alpha = 0,05$ (Prášilová, 2001, str. 39).

Příklad 1.1.8: Technická norma určuje v průměru 55 sekund na provedení jisté pracovní operace na daném pracovním stanovišti. Bylo provedeno 60 kontrolních chronometrážních měření a byly zjištěny výsledky: $\bar{x} = 72$ s, $s_0 = 20$ s. Výsledek testu normality je pozitivní. Lze na základě těchto výběrových údajů prohlásit, že průměrná doba provedení operace se shoduje s normou ($\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$, Prášilová, 2001, str. 39)?

Příklad 1.1.9: V určitém farmakologickém experimentu se zjišťuje hladina kreatininu v krvi králíků. Bylo provedeno 9 měření na náhodně vybraných zvířatech. Výsledky (v %) jsou následující ($\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$, Prášilová, 2001, str. 39):

1,7	2,0	1,8	1,2	1,5	1,4	2,0	1,2	1,6
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Tabulka č. 1.2: Tabulka hladiny kreatininu

Na základě těchto údajů ověřte hypotézu, že průměrná hladina kreatininu v krvi vyšetřovaných králíků činí 1,2 %. Předpokládá se normalita souboru.

Příklad 1.1.10: Při tradičním způsobu ošetřování vinic se dosahovalo průměrných výnosů 4,2 kg na jeden kořen se směrodatnou odchylkou 0,4 kg. Pokusně se zavádí nová lacinější metoda ošetřování vinic, kterou bylo ošetřeno 20 kořenů a dosáhlo se těchto výnosů v kg (Prášilová, 2001, str. 39):

4,5	4,3	4,1	4,9	4,6	3,2	4,5	5,1	4,8	4,0
3,7	4,4	3,9	4,1	4,2	4,1	4,7	4,3	4,2	4,4

Tabulka č. 1.3: Tabulka průměrných výnosů

Je třeba posoudit, zda tato nová lacinější metoda ošetřování nevyvolá změnu v průměrných výnosech. Předpokládá se normální rozdělení souboru ($\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$).

1.2 PÁROVÝ T-TEST

Mějme náhodný výběr $(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), \dots, (Y_n, Z_n)$ z nějakého dvourozměrného rozdělení, jehož vektor středních hodnot je (μ_1, μ_2) . Chceme testovat hypotézu $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ proti alternativě $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta$, kde Δ je nějaké dané číslo (nejčastěji $\Delta = 0$). Položíme

$$X_1 = Y_1 - Z_1, X_2 = Y_2 - Z_2, \dots, X_n = Y_n - Z_n.$$

Veličiny $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou nezávislé. Předpokládejme, že $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zřejmě $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Jsou-li tyto předpoklady splněny, pak je úloha převedena na jednovýběrový t-test. Z veličin $X_1, X_2, \dots, X_n$ vypočteme $\bar{X}$ a S^2 . Hypotézu H_0 zamítneme na hladině α , platí-li

$$|T| = \left| \frac{(\bar{X} - \Delta)\sqrt{n}}{S} \right| \geq t_{n-1}(\alpha).$$

Řešené příklady

Příklad 1.2.1: Bylo zjištěno, zda zvýšení teploty snižuje výkon dělníků v dílně. Pro tento účel bylo testováno 15 dělníků a měřen jejich výkon za směnu (počet výrobků za směnu)

Dělník č.	Teplota 19 °C (x_i)	Teplota 23 °C (y_i)	Dělník č.	Teplota 19 °C (x_i)	Teplota 23 °C (y_i)
1	52	50	9	67	61
2	58	51	10	68	57
3	59	60	11	70	64
4	65	61	12	63	64
5	71	58	13	51	50
6	55	52	14	56	51
7	59	60	15	62	53
8	63	59			

Tabulka č. 1.4: Tabulka výkonů

Otestujte, zda výkon dělníků při odlišné teplotě pracoviště je stejný či ne ($\alpha = 0,05$).

Řešení: $x_i - y_i = d_i$

d_i	
2	6
7	11
-1	6
4	-1
13	1
3	5
-1	9
4	

Tabulka č. 1.5: Tabulka řešení

$$d_{\text{prům}} = 4,53$$

$$s_d = 4,29$$

$$T = \frac{4,53}{4,29} \sqrt{15} = 4,089$$

Závěr: $T_{\text{vyp}} > T_{\text{tab } 0,05(14)} = 2,145 \rightarrow H_0$ zamítáme, rozdíly jsou významné

Příklad 1.2.2: Při zkoušce z určitého předmětu bylo zjišťováno, zda studenti mají stejné výsledky v písemné a v ústní části zkoušky. Bylo testováno 10 studentů s následujícími výsledky:

Student č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Body-písemná část	28	16	11	24	26	30	14	16	26	35
Body-ústní část	25	10	0	30	28	25	8	12	27	30

Tabulka č. 1.6: Tabulka počtu bodů

Otestuje, zda výkony studentů v obou částech zkoušky jsou vyrovnané ($\alpha = 0,05$).

Řešení: Jedná se o závislé výběry – musíme použít párový t- test

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ - výsledky se neliší

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ - výsledky se statisticky významně liší

Vypočteme difference: $d_i = x_i - y_i$

d_i									
3	6	11	-6	-2	5	6	4	-1	5

Tabulka č. 1.7: Tabulka diferencí

$$\bar{d} = \frac{31}{10} = 3,1 \quad s_d = 4,86$$

$$T = \frac{3,1}{4,86} \cdot \sqrt{10} = 2,017 \quad T_{tab0,05(9)} = 2,262$$

Závěr: $T_{vyp} < T_{tab}$ - nulovou hypotézu nezamítáme, výkony studentů v obou částech zkoušky jsou vyrovnané

Příklad 1.2.3: Osmi rostlinám tabáku byl odebrán druhý list. Jedna náhodně vybraná polovina listu byla ošetřena přípravkem A, druhá přípravkem B. Potom byly listy potřeny suspenzí agresora a byl sledován počet skvrn na každé polovině ($\alpha = 0,05$). Výsledky pokusu jsou:

Rostlina	Počet skvrn		Rozdíl
	Přípravek A	Přípravek B	
1	9	10	-1
2	17	11	6
3	31	18	13
4	18	14	4
5	7	6	1
6	8	7	1
7	20	17	3
8	10	5	5

Tabulka č. 1.8: Tabulka počtů skvrn

Řešení:

H_0 : Není rozdíl v účinku přípravků A a B

H_1 : Je rozdíl v účinku přípravků A a B

1. spočítáme průměr rozdílů
2. spočítáme standardní odchylku a standardní chybu:

Průměr	s	s_x
4	4,309458	1,52362

3. dosadíme do vzorce t-testu:

$$T = 4/1,52 = 2,625$$

Závěr: Porovnáme s kritickou hodnotou $T_{\text{tab } 0,05(2),7} = 2,365 \rightarrow T_{\text{vyp}} > T_{\text{tab}}$ – zamítáme H_0 , je rozdíl v účinku přípravků A a B

Neřešené příklady

Příklad 1.2.4: Údaje v tabulce se týkají obsahu určité znečišťující látky (v mg.l^{-1}) v odpadní vodě zjištěného jednak standardní metodou, jednak nově navrhouvanou úspornou metodou. Je třeba ověřit, zda úsporná metoda nevede k výsledkům, které se systematicky odchyľují od výsledků standardní metody ($\alpha = 0,05$, Kába, 2006, str. 67).

Vzorek	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Standardní metoda x_i	42,0	42,7	42,3	44,2	42,6	44,5	44,1	43,1	41,2	42,1	44,1	39,5
Úsporná metoda y_i	43,8	41,9	44,5	42,6	41,2	44,4	42,0	42,7	44,1	43,3	42,4	41,0

Tabulka č. 1.9: Tabulka metod

Příklad 1.2.5: Pracovníci průzkumu trhu potravinářské firmy mají zjistit, který z nových obalů instantní vločkové kaše je lákavější – jeden má tvar hranolu a druhý tvar válce. Proto byl v 10 supermarketech proveden průzkum. Oba typy výrobků byly umístěny na rovnocenném místě ve výšce očí. Počty prodaných krabic jsou uvedeny v následující tabulce. Na 5 % hladině významnosti určete, zda tvar ovlivnil výši prodeje ($n = 10$).

Supermarket	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Hranol	194	152	160	172	118	110	137	126	176	145
Válec	184	161	153	184	105	123	155	111	156	129

Tabulka č. 1.10: Tabulka obalů

Příklad 1.2.6: Zjistěte, zda existuje průkazný rozdíl mezi výkonem 7 zaměstnanců firmy Škoda Auto, kteří na lince montovali přední skla automobilů ručním způsobem a po změně technologie za pomoci robota. Tabulka znázorňuje počet montovaných oken za hodinu u jednotlivých pracovníků s použitím staré technologie a po její změně.

pracovník	1	2	3	4	5	6	7
ručně	10	9	11	12	11	13	10
S robotem	17	19	17	18	20	21	21

Tabulka č. 1.11: Tabulka výkonů

Příklad 1.2.7: Vyhodnoťte statistický test dvou závislých souborů o rozsahu $n=16$, když $T_{vyp} = 2,12$ při hodnotě $\alpha = 0,05$. Použijte párový test pro dva závislé soubory.

Příklad 1.2.8: Je třeba porovnat dva způsoby měření kompresního tlaku (v 10^5 Pa) ve spalovacím prostoru traktorového motoru. Pro 6 motorů, u nichž jsme provedli měření kompresního tlaku oběma způsoby, byly stanoveny difference získaných výsledků (5 % hladina významnosti):

$$H_0 : \mu_d = 0, H_1 : \mu_d \neq 0$$

Číslo motoru	1	2	3	4	5	6
difference d_i	-0,1	-0,2	0,2	0,1	-0,2	-0,1

Tabulka č. 1.12: Tabulka diferencí

Příklad 1.2.9: Cena dvoulitrové láhve Dobré vody byla na počátku dvou po sobě následujících měsíců zjištěna v 8 náhodně vybraných prodejnách (v obou měsících stejných). Zjištěné údaje obsahuje následující tabulka:

prodejna	1	2	3	4	5	6	7	8
cena 1	28,60	27,60	27,50	26,00	24,50	26,80	28,70	27,50
cena 2	27,10	26,60	25,80	24,60	25,20	25,00	26,50	27,60

Tabulka č. 1.13: Tabulka cen

Proveďte na hladině 5 % test, zda se během měsíce změnila statisticky významně průměrná cena nápoje.

Příklad 1.2.10: Při stanovování podílu fosforu v chemické sloučenině byly použity dvě analytické metody. Každý vzorek byl analyzován oběma metodami a zjištěné výsledky jsou uvedené v tabulce. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ rozhodněte, zda je rozdíl mezi výsledky těchto dvou analytických metod (Hebák, 2004, str. 166).

Číslo analyzovaného vzorku (i)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Výsledky analýzy	první metoda (x_{i1})	15,8	13,6	7,4	17,5	9,4	4,1	8,1	10,5	8,7	6,9
	druhá metoda (x_{i2})	15,9	13,3	7,4	17,3	9,6	4,4	8,1	10,1	8,8	6,2

Tabulka č. 1.14: Tabulka metod

1.3 DVOUVÝBĚROVÝ T-TEST

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y_1, \dots, Y_m$ výběr z $N(\mu_2, \sigma^2)$.
Nechť tyto dva výběry jsou na sobě nezávislé. Předpokládejme, že $n \geq 2, m \geq 2, \sigma^2 > 0$ a σ^2 neznáme. Chceme testovat hypotézu $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ proti $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta$, kde Δ je nějaké dané číslo (nejčastěji $\Delta = 0$). Označme $\bar{X}, S_x^2$ a $\bar{Y}, S_y^2$ charakteristiky těchto výběrů. Hypotézu H_0 zamítneme na hladině α , platí-li

$$T = \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} \right| \geq t_{n+m-2}(\alpha)$$

Poznámka

Dvouvýběrový t test používáme v případech, kdy se např. na n pacientech zkouší působení léku A a na jiných m pacientech působení léku B. Účelem pokusu je zjistit, zda působení obou léků je stejné.

Často dochází k záměně párového a dvouvýběrového t testu, což je hrubá chyba. Dvouvýběrový t test můžeme použít pouze v případě, když máme zajištěnu nezávislost všech veličin $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$. V případě záměny těchto testů, dojdeme zpravidla k nerozumným a nesmyslným výsledkům.

Řešené příklady

Příklad 1.3.1: Bylo sledováno, zda dvě odrůdy lnu mají stejnou hmotnost vlákna (g), což je důležitý ukazatel jakosti lněného vlákna. Bylo vždy provedeno 14 měření s následujícími výsledky:

Odrůda I.													
47,5	57,7	47,1	38,6	45,2	49,8	43,4	50,8	41,5	38,8	47,1	51,2	52,6	46,1
Odrůda II.													
49,2	44,1	38,1	40,9	46,4	57,1	36,8	42,3	50,5	52,5	39,5	40,9	41,2	50,1

Tabulka č. 1.15: Tabulka hmotností

Otestujte na hladině významnosti $\alpha = 0,05$, zda existují významné rozdíly v hmotnosti vlákna.

Řešení:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ - hmotnosti vlákna se neliší

$$s^2 = \frac{s_1^2(m-1) + s_2^2(n-1)}{m+n-2} = 32,595 \quad s = 5,71$$

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{46,97 - 44,97}{5,71 \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{14}}} = 0,92$$

Závěr: $T_{\text{vyp}} < T_{\text{tab}0,05(26)} = 2,05 \Rightarrow H_0$ nezamítáme, hmotnosti vlákna se neliší

Příklad 1.3.2: Testujte, zda-li existuje statisticky významný rozdíl mezi průměry odrůd č.1 a 2 z dvojnásobného množství dat shodných charakteristik (průměr a rozptyl).

odrůda 1	97	95	98	102	94	97	99	97	95	98	102	94	97	99
odrůda 2	90	100	95	97	93	96	94	90	100	95	97	93	96	94

Tabulka č. 1.16: Tabulka průměrů odrůd

Řešení:

Proměnná	N	Průměr	SmOdch	SmChybaPr
----------	---	--------	--------	-----------

odrůda1	14	97,43	2,533	0,677
---------	----	-------	-------	-------

odrůda2	14	95,000	3,038	0,812
---------	----	--------	-------	-------

předpoklad homogenity variance stále platí.

$$T_{\text{vyp}} = \frac{|97,43 - 95|}{\sqrt{0,677^2 + 0,812^2}} = \frac{2,43}{\sqrt{0,458 + 0,659}} = \frac{2,43}{\sqrt{1,117}} = \frac{2,43}{1,06} = 2,30$$

pro $\alpha = 0,05$: $T_{\text{tab}} = T_{1-\alpha/2, n1 + n2 - 2} = T_{0,975, 26} = 2,056$

pro $\alpha = 0,01$: $T_{\text{tab}} = T_{1-\alpha/2, n1 + n2 - 2} = T_{0,995, 26} = 2,799$

Závěr: $T_{\text{vyp}} > T_{\text{tab}} \Rightarrow$ zamítáme nulovou hypotézu o rovnosti obou populačních průměrů ve prospěch dvoustranné alternativní hypotézy na úrovni $\alpha = 0,05$. Tento rozdíl je pouze významný. Činíme tak na základě většího množství pozorování.

Příklad 1.3.3: Máme 11 stejně starých selat. Byla rozdělena do 2 skupin. Do 1. skupiny jich připadlo 6 a tato selata byla krmena dietou A. V 2. skupině jich bylo 5, byla krmena dietou B. Po 6 měsících byly vypočteny denní přírůstky.

Dieta A	62	54	55	60	53	58
Dieta B	52	56	49	50	51	

Tabulka č. 1.17: Tabulka diet

Řešení: $n = 6, m = 5, \Delta = 0$

Typ o shodnosti rozptylů bychom zamítli, kdyby platilo buď

$$\frac{Sx^2}{Sy^2} \leq \frac{1}{F_{4,5}(0,025)} = 1 : 7,388 = 0,135 \text{ nebo } \frac{Sx^2}{Sy^2} \geq \frac{1}{F_{5,4}(0,025)} = 9,365$$

Protože žádný z těchto případů nenastal, hypotézu o shodnosti rozptylů nezamítneme.

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}(\sum x_i^2 - n\bar{X}^2) = 12,8$$

$$S_y^2 = \frac{1}{m-1}(\sum y_i^2 - m\bar{Y}^2) = 7,3$$

$$\frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{12,8}{7,3} = 1,753$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{6}(62 + 54 + 55 + 60 + 53 + 58) = 57$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{m} \sum y_i = \frac{1}{5}(52 + 56 + 49 + 50 + 51) = 51,6$$

$$\sum x_i^2 = 19558$$

$$\sum y_i^2 = 13342$$

$$T_{\text{vyp}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\left(\sum x_i^2 - n\bar{X}^2 + \sum y_i^2 - m\bar{Y}^2\right)^{0,5}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}} =$$

$$= \frac{57 - 51,6 - 0}{\left(19558 - 6 \cdot 57^2 + 13342 - 5 \cdot 51,6^2\right)^{0,5}} \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 5(6+5-2)}{6+5}} = 2,7712$$

Závěr: $T_{\text{vyp}} > T_{\text{tab}} = 2,262$. Hypotézu $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ o rozdílů diet zamítneme.

Neřešené příklady

Příklad 1.3.4: Testujte, zda se průkazně liší délka klasů v mm u dvou odrůd pšenice pěstované ve srovnatelných podmínkách, když u každé odrůdy bylo zjištěno $n_1 = n_2 = 100$ vzorků:

$$\bar{x}_1 = 69,5mm, s_{x1} = 4,18mm$$

$$\bar{x}_2 = 66,1mm, s_{x2} = 3,90mm$$

Příklad 1.3.5: V testu studentů Biometriky zahradnické fakulty byly zjištěny následující ukazatele bodových ohodnocení výsledků. Testujte zda-li existují průkazné rozdíly mezi průměry testu u mužů a u žen.

pohlaví	N	průměr	směrod.odch
muži	28	7,446	4,545
ženy	39	7,737	3,528

Použijte dvouvýběrový T-test, protože studenti z obou skupin představují rozdílné subjekty.

Příklad 1.3.6: Dealer šlechtitelské firmy v chovu prasat PIG, Inc. navštívil Váš podnik s nabídkou nákupu vysoce plodného plemenného materiálu pro obrat stáda Vašeho podniku. Váš nadřízený se rozhodl nabídku posoudit a nařídil provedení polního testu na prasnicích dosud Vámi používaného hybridu a hybridu z programu PIG na počet odchovaných selat ve vrhu. U každé kombinace bylo do testu zařazeno 50 vrhů, avšak v důsledku zvýšeného úhynu, pouze 45 prasnic z programu PIG test ve stanovené době dokončilo. Rozhodněte, zda-li je nový materiál kvalitnější, než hybrid z Vašeho domácího programu.

Program	n	průměr	s_x
Domáci	50	10,28	1,87
PIG	45	9,75	2,18

Tabulka č. 1.18: Tabulka materiálů

Použijte dvouvýběrový t-test.

Příklad 1.3.7: Porovnejte dvě metody zjišťování obsahu škrobu v bramborách: metodu I – přesnou laboratorní a metodu II – zjednodušenou (doporučenou pro nákupní organizace). Analýze na obsah škrobu bylo podrobena 16 náhodně vybraných hlíz různých odrůd. U každé hlízy byl oběma metodami stanoven obsah škrobu v %, uvedený v tabulce. Ověřte průkaznost rozdílu mezi výsledky obou metod ($\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$, Prášilová, 2001).

Č. hlízy	1	2	3	4	5	6	7	8
Metoda I (% škrobu)	21,7	18,7	18,3	17,5	18,5	15,6	17,0	17,8
Metoda II (% škrobu)	21,5	18,7	18,3	17,4	18,3	15,4	16,7	16,9

9	10	11	12	13	14	15	16
14,0	17,2	21,7	18,6	17,9	17,7	18,3	15,6
13,9	17,0	21,4	18,6	18,0	17,6	18,5	15,5

Tabulka č. 1.19: Tabulka obsahu škrobu v %

Příklad 1.3.8: Zkoušíme účinek dvou různých preparátů na mozaikovou chorobu tabáku. Bylo zkoumáno 8 rostlin, první 4 tzv. jižní typy a další 4 tzv. severní typy. Listy obou skupin byly postříkány preparátem proti hubení hmyzu. Máme posoudit, zda rozdíl v účinku na oba typy rostlin je statisticky významný. Předpokládáme normální rozdělení napadených míst ($\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$, Prášilová, 2001).

První skupina rostlin	9	17	31	18	7	8	10	20
Druhá skupina rostlin	10	11	18	14	6	7	5	17

Tabulka č. 1.21: Tabulka napadených míst dvou skupin rostlin

Příklad 1.3.9: Máme posoudit, zda se významně liší obsah vápníku v mléce podle stravy ze dvou lokalit. Pokus byl proveden na 10 kravách z kravína u vesnice Telína a z kravína u vesnice Bejkovec. Předpokládáme, že obsah vápníku má normální rozdělení ($\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$).

	Obsah vápníku (v mg)									
Kráva	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z Telína	90	65	58	86	55	73	80	70	45	55
Z Bejkovce	95	60	65	90	70	66	85	80	63	71

Tabulka č. 1.22: Tabulka obsahu vápníku

Příklad 1.3.10: Ověřte, zda se průměrná cukernatost bulv cukrovky v okrese Olomouc průkazně lišila od celostátního průměru 14,9 %, když v reprezentativním výběrovém souboru 15 vzorků byly v okrese Olomouc zjištěny následující obsahy cukru v bulvách v % ($\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$, Prášilová, 2001, str. 48):

Vzorek č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
% cukru	14,6	14,9	15,3	15,1	15,8	15,1	15,9	15,5	15	15,6	15,7	15,7	14,7	15,6	15,5

Tabulka č. 1.23: Tabulka obsahu cukru

2. NEPARAMETRICKÉ TESTY

2.1 ZNAMÉNKOVÝ TEST

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ je náhodný výběr z rozdělení se spojitou distribuční funkcí, $\tilde{x}$ je medián tohoto rozdělení, potom platí:

$$P(X < \tilde{x}) = P(X > \tilde{x}) = \frac{1}{2}.$$

Chceme testovat hypotézu

$$H_0 : \tilde{x} = x_0 \text{ proti alternativě } H_1 : \tilde{x} \neq x_0,$$

kde x_0 je dané číslo (nejčastěji rovno nule). Utvoříme nejprve rozdíly

$$X_1 - x_0, X_2 - x_0, \dots, X_n - x_0.$$

Náhodná veličina Y pak bude označovat počet těch rozdílů, které mají kladné znaménko. Za předpokladu platnosti hypotézy H_0 má náhodná veličina Y binomické rozdělení s parametry n a $\frac{1}{2}$. Při oboustranném testu tvoří kritický obor jednak příliš malé hodnoty Y (tj. hodnoty ležící blízko nule), jednak příliš velké hodnoty Y (tj. hodnoty blízké n). V případě malého rozsahu výběru (tj. pro malá n) jsou tabelována čísla k_1, k_2 tak, že

$$P(Y \leq k_1) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad P(Y \leq k_2) \leq \frac{\alpha}{2}$$

Poznámka

Tento test je analogií párového t-testu.

Řešené příklady

Příklad 2.1.1: U 10 krav určitého plemene bylo zjišťováno v první a druhé laktaci množství mleziva třetí den po porodu. Zjistěte, zda existuje statisticky významný podíl.

Množství nadojeného mléka										
Kráva č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. laktace	14	12	15	12	12	14	11	12	15	10
2. laktace	15	16	19	15	14	11	11	15	14	13

Tabulka č. 2.1: Tabulka laktací

Řešení:

Množství nadojeného mléka										
Kráva č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. laktace	14	12	15	12	12	14	11	12	15	10
2. laktace	15	16	19	15	14	11	11	15	14	13
diference	-1	-4	-4	-3	-2	3	0	-3	1	-3
pořadí difer.	1,5	8,5	8,5	5,5	3	5,5	-	5,5	1,5	5,5

Tabulka č. 2.2: Tabulka řešení

Počet diferencí + = 2, počet diferencí - = 7

Závěr: $Z = 2$, $Z_{0,05;9} = 2$ - nulovou hypotézu nelze zamítnout, tudíž existuje statisticky významný podíl.

Příklad 2.1.2: Proověření účinnosti nové tréninkové metody. Rozdíl maximálních výsledků skokanského družstva před zavedením nové metody a po třech měsících používání.

číslo skokana	rozdíl výkonů [cm]	číslo skokana	rozdíl výkonů [cm]
1	+5	9	+4
2	-10	10	+12
3	+15	11	-3
4	-1	12	+7
5	+8	13	+9
6	+21	14	-2
7	+7	15	+3
8	-6	16	+7

Tabulka č. 2.3: Tabulka výkonů

16 případů 5x zhoršení 11x zlepšení

Řešení:

H_0 : ZS - počet kladných znamének = počet záporných znamének
nová metoda je stejně účinná jako stará

H_1 : ZS - počet kladných znamének > počet záporných znamének
nová metoda je lepší (jednostranný test)

Testujeme, zda rozdíl v počtu znamének se liší jen náhodně nebo statisticky významně

Závěr: H_0 vylučujeme, když počet méně četných znamének je stejný či menší než počet kritický. V našem případě $5 > 4$, H_0 nelze zamítnout: nebylo prokázáno, že metoda je lepší (binomického rozdělení, v našem případě s parametry $n=16$ a $p=0,5$).

Test ignoruje absolutní hodnoty, bere jen znaménka i nominální data (při alternativní proměnné – např. žena, muž). Test je velmi slabý. Obdobný problém lze řešit párovým t-testem (silnější)

Příklad 2.1.3: Rozdílnost ve výsledcích při zjišťování obsahu neškrobů v hlízách brambor může být způsobena:

1. použitou analytickou metodou
2. kolísáním obsahu látek , které vytvářejí tzv. neškroby.

Při experimentu byl sledován vliv úpravy vzorku na stanovení sušiny. Byla porovnávána sušina při rozstrouháním hlíz na ručním a laboratorním struhadle.

Výpočet:				
Pořadí vzorků	Ruční struhadlo	Laboratorní struhadlo	Rozdíl	Znaménko
1	30,1	29,6	0,5	+
2	29,6	29,7	-0,1	-
3	29,9	29,7	0,2	+
4	29,8	29,8	0,0	0
5	29,9	29,6	0,3	+
6	30,1	30,2	-0,1	-
7	29,8	29,7	0,1	+
8	30,0	29,8	0,2	+
9	29,7	29,8	-0,1	-
10	29,9	30,5	-0,6	-

Tabulka č. 2.4: Tabulka metod s řešením

Řešení:

$$n = 9 \quad m_+ = 5$$

$$m_- = 4$$

$$m = m_- = 4$$

Závěr: Protože $m > m_{0,05}$, potvrdíme platnost nulové hypotézy, tzn. že vliv způsobu strouhání na množství sušiny není významný.

Neřešené příklady

Příklad 2.1.4: U osmi osob byl měřen krevní tlak před pokusem a po pokusu. Vstupní údaje jsou uvedeny v následující tabulce. Ptáme se, zda pravděpodobnost zvýšení krevního tlaku za pokusu je stejná jako pravděpodobnost jeho poklesu (Anděl, 2005, str. 228).

Osoba	1	2	3	4	5	6	7	8
Tlak před pokusem	130	185	162	136	147	181	138	139
Tlak po pokusu	139	190	175	135	155	175	158	149
Rozdíly	9	5	13	-1	8	-6	20	10

Tabulka č. 2.5: Tabulka tlaků před a po

Příklad 2.1.5: U 12 vzorků bylo stanoveno množství sledované látky dvěma metodami. Získané výsledky jsou v tabulce ($\alpha = 0,05$):

metoda A	0,38	0,39	0,58	0,44	0,52	0,41	0,45	0,59	0,37	0,28	0,42	0,42
metoda B	0,40	0,38	0,56	0,45	0,49	0,38	0,41	0,60	0,36	0,26	0,41	0,43

Tabulka č. 2.6: Tabulka množství látky

Zjistěte, zda rozdíly výsledků při hodnocení vzorků oběma metodami můžeme považovat za statisticky významné.

Příklad 2.1.6: Ve výběru o rozsahu $n = 50$ předpokládáme hodnotu mediánu $X_{0,50} = 330$. V datech bylo ovšem zjištěno celkem 37 kladných odchylek od této hodnoty. Ověříme hypotézu o hodnotě mediánu na hladině významnosti $\alpha = 0,01$.

Příklad 2.1.7: Při zkouškách únavy kovů bylo u osmi zkoušek $n = 8$ při napětí 560 MPa dosaženo následujících hodnot počtu kmitů do lomu (v tis.)

3 322	14 713	763	46 296	2 845	9 411	1 532	24 023
-------	--------	-----	--------	-------	-------	-------	--------

Tabulka č. 2.7: Tabulka počtu kmitů

Testujte hypotézu $H : x_{0,5} = 8 \cdot 10^6$ proti hypotéze $A : x_{0,5} > 8 \cdot 10^6$ na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

Příklad 2.1.8: Při vstupní přejímce byly u 20 náhodně vybraných sáčků s lízátky zjištěny tyto hmotnosti (v gramech):

99	103	101	100	98	95	104	97	101	100
103	101	102	100	99	93	98	103	99	98

Tabulka č. 2.8: Tabulka hmotnosti

Lze na základě uvedeného vzorku přijmout hypotézu, že střední hmotnost sáčku je 100 g? Testujte pomocí znaménkového testu na hladině 5 %.

Příklad 2.1.9: Skupina 15 náhodně vybraných zákazníků byla požádána, aby zhodnotili dva výrobky A a B podle různých kritérií. Součtem jednotlivých dílčích hodnocení pak vzniklo výsledné hodnocení obou výrobků ve škále od 0 do 100 bodů. Výsledky hodnocení vidíte v následující tabulce:

A	85	40	75	81	42	50	60	60	15	65	40	60	40	65	75
B	65	50	43	65	20	50	35	38	60	47	60	48	58	61	63

Tabulka č. 2.9: Tabulka hodnocení

Ověřte pomocí znaménkového testu na hladině 5 %, zda je hodnocení obou výrobků srovnatelné nebo ne.

Příklad 2.1.10: Vyráběné ocelové tyče mají kolísavou délku s předpokládanou hodnotou mediánu $a = 10\text{ m}$. Náhodný výběr 10 tyčí poskytl následující výsledky (Hebák, 2004, str. 180):

9,83	10,10	9,72	9,91	10,04	9,95	9,82	9,73	9,81	9,90
------	-------	------	------	-------	------	------	------	------	------

Tabulka č. 2.10: Tabulka tyčí

Je předpoklad o hodnotě mediánu délky tyčí oprávněný ($\alpha = 0,05$)?

2.2 JEDNOVÝBĚROVÝ WILCOXONŮV TEST

Tento test se rovněž nejčastěji používá jako test párový. Jeho provedení je o něco náročnější než provedení znaménkového testu, zato je však citlivější. Předpokládejme, že $X_1, X_2, \dots, X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$. Chceme testovat hypotézu, že F je symetrická kolem nuly v tom smyslu, že

$$F(x) = 1 - F(-x), \quad -\infty < x < \infty.$$

V tomto případě je nula mediánem daného rozdělení. Seřadíme $X_1, X_2, \dots, X_n$ do rostoucí posloupnosti podle jejich absolutní hodnoty, tj.

$$|X|^{(1)} < |X|^{(2)} < \dots < |X|^{(n)}$$

Při tomto uspořádání označme R_i^+ pořadí X_i a zavedme veličiny

$$S^+ = \sum_{X_i \geq 0} R_i^+, \quad S^- = \sum_{X_i < 0} R_i^+$$

Pokud jsme určily veličiny S^+ , S^- správně, musí platit $S^+ + S^- = \frac{n(n+1)}{2}$, neboť sčítáme čísla od 1 do n . Pro testování symetričnosti distribuční funkce kolem nuly použijeme číslo $\min(S^+, S^-)$. Pokud toto číslo je menší nebo rovno tabelované kritické hodnotě, hypotézu zamítneme. Kritické hodnoty jsou uvedeny v tabulce. Pro větší hodnoty n opět použijeme testovou statistiku, která bude mít asymptoticky rozdělení $N(0, 1)$ a tvar

$$W = \frac{S^+ - \frac{1}{4}n(n+1)}{\sqrt{24n(n+1).(2n+1)}}$$

V případě $|W| \geq u\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ zamítneme hypotézu na hladině, která je asymptoticky rovna α .

Řešené příklady

Příklad 2.2.1: Při zkouškách únavy kovů bylo u osmi zkoušek $n = 8$ při napětí 560 MPa dosaženo následujících hodnot počtu kmitů do lomu (v tis.)

3 322	14 713	763	46 296	2 845	9 411	1 532	24 023
-------	--------	-----	--------	-------	-------	-------	--------

Tabulka č. 2.11: Tabulka počtu kmitů

Testujte hypotézu $H_0 : x_{0,5} = 8 \cdot 10^6$ proti hypotéze $H_1 : x_{0,5} > 8 \cdot 10^6$ na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

Řešení: Tabulka uvádí hodnoty Z_i a pořadí R_i , z nich určíme hodnotu $W = 5 + 8 + 1 + 7 = 21$.

X_i	$Z_i = X_i - 8000$	R_i	a_i
3 322	- 4 678	2	0
14 713	6 713	5	1
763	- 7237	6	0
46 296	38 296	8	1
2 845	- 5 155	3	0
9 411	1 411	1	1
1 532	- 6468	4	0
24 023	16 023	7	1

Tabulka č. 2.12: Tabulka řešení

Závěr: Z tabulek naleznete $W_{tab\ 0,95} = 36 - 5 = 31$. Protože $21 < 31$, hypotézu $H_0: x_{0,5} = 8 \cdot 10^6$ o počtech kmitů nezamítáme.

Příklad 2.2.2: U 10 krav určitého plemene bylo zjišťováno v první a druhé laktaci množství mleziva třetí den po porodu. Zjistěte, zda existuje statisticky významný podíl.

Množství nadojeného mléka										
Kráva č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. laktace	14	12	15	12	12	14	11	12	15	10
2. laktace	15	16	19	15	14	11	11	15	14	13

Tabulka č. 2.13: Tabulka laktací

Řešení:

Množství nadojeného mléka										
Kráva č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. laktace	14	12	15	12	12	14	11	12	15	10
2. laktace	15	16	19	15	14	11	11	15	14	13
diference	-1	-4	-4	-3	-2	3	0	-3	1	-3
pořadí difer.	1,5	8,5	8,5	5,5	3	5,5	-	5,5	1,5	5,5

Tabulka č. 2.14: Tabulka řešení

Součet pořadí diferencí s kladným znaménkem $-W^+ = 7$

Součet pořadí diferencí se záporným znaménkem $-W^- = 38$

Závěr: $W_{\text{vyp}} = 7$ $W_{\text{tab } 0,05;9} = 5$ $W_{\text{vyp}} > W_{\text{tab}}$ – nulovou hypotézu nemůžeme zamítnout rozdíly významné nejsou.

Příklad 2.2.3: Je třeba porovnat dva způsoby měření kompresního tlaku (v 10^5 Pa) ve spalovacím prostoru traktorového motoru. Pro 6 motorů, u nichž jsme provedli měření kompresního tlaku oběma způsoby, byly stanoveny difference získaných výsledků (5 % hladina významnosti):

Číslo motoru		1	2	3	4	5	6
diference d_i		-0,1	-0,2	0,2	0,1	-0,2	-0,1
Pořadí d_i	+			5	2		
	-	2	5			5	2

Tabulka č. 2.18: Tabulka diferencí

Řešení:

$$W^+ = 5 + 2 = 7$$

$$W^- = 2 + 5 + 5 + 2 = 14$$

Pro $\alpha = 0,05$ a pro $n = 7$ najdeme v tabulce kritickou hodnotu $W_{\text{tab } 0,05} = 2$.

Závěr: Protože $W_{\text{vyp}} = \min(7, 14) = 7 > W_{\text{tab } 0,05} = 2$, nemůžeme zamítnout hypotézu, že mezi oběma metodami měření kompresního tlaku není významný rozdíl.

Neřešené příklady

Příklad 2.2.4: U osmi osob byla měřena rychlost jízdy autem před požitím alkoholu a po požití alkoholu. Údaje jsou uvedeny v tab.

Osoba	A	B	C	D	E	F	G	H
před	130	185	162	136	147	181	138	139
po	139	190	175	135	155	175	158	149
rozdíly	9	5	13	-1	8	-6	20	10

Tabulka č. 2.17: Tabulka rychlostí

Ptáme se, zda prst zvýšení rychlosti po požití je stejná jako prst její snížení při $\alpha = 0,05$.

Příklad 2.2.5: Při výrobě mincí je stanovena hmotnost mince pět gramů. Je podezření, že na materiálu se systematicky šetří. Testujte hypotézu, že tomu tak není. Použijte výsledků namátkové kontroly, při níž bylo náhodně vybráno deset mincí, a poté zjištěna jejich hmotnost; zaznamenané hmotnosti vybraných mincí (v gramech) jsou přitom následující:

4,91	5,02	4,88	4,79	4,89	4,72	5,01	4,97	4,86	4,93
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Tabulka č. 2.15: Tabulka hmotností

Příklad 2.2.6: Skupina 15 náhodně vybraných zákazníků byla požádána, aby zhodnotili dva výrobky A a B podle různých kritérií. Součtem jednotlivých dílčích

hodnocení pak vzniklo výsledné hodnocení obou výrobků ve škále od 0 do 100 bodů. Výsledky hodnocení vidíte v následující tabulce:

A	85	40	75	81	42	50	60	60	15	65	40	60	40	65	75
B	65	50	43	65	20	50	35	38	60	47	60	48	58	61	63

Tabulka č. 2.19: Tabulka hodnocení

Testujte pomocí Wilcoxonova testu na hladině 5 %, zda je hodnocení obou výrobků srovnatelné nebo ne (pozn: jedná se o Wilcoxonův párový test, což je pouze jiná varianta jednovýběrového Wilcoxonova testu, ve kterém se místo diferencí hodnost testovaného znaku od mediánu prověřují difference obou zkoumaných znaků).

Příklad 2.2.7: Při výzkumu trhu je třeba na 5 % hladině významnosti rozhodnout, zda medián měsíčních příjmů rodiny v jisté oblasti je menší než 25 tis. Kč. Dotázáno bylo 20 náhodně vybraných rodin a byly získány jejich následující měsíční příjmy v tis. Kč (Hebák, 2004, str. 182).

18,9	20,3	21,2	22,5	26,2	19,3	22,2	25,3	25,1	23,9
20,1	17,5	27,2	24,9	25,0	28,0	19,9	33,0	24,3	28,0

Tabulka č. 2.20: Tabulka měsíčních příjmů

Příklad 2.2.8: Pro ověření účinnosti dvou pracích prostředků byl proveden následující experiment. 12 různě špinavých kusů látky bylo rozpůleno. Pro první polovinu látek byl vyzkoušen jeden prací prostředek a pro druhou polovinu druhý. Po usušení byly vyprané vzorky ohodnoceny stupnicí do 10 bodů podle kvality vyprání. Výsledky testu jsou v následující tabulce:

číslo kusu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Body po použití 1. prostředku	9	8	7	9	7	7	7	8	7	9	7	8
Body po použití 2. prostředku	8	10	8	8	9	9	8	10	9	9	8	9

Tabulka č. 2.21: Tabulka získaných bodů

Můžeme tvrdit na 5 % hladině významnosti, že medián rozdílů bodů není nulový?

Příklad 2.2.9: Je třeba porovnat výsledky písemné a ústní zkoušky u 10 studentů.

Počty získaných bodů ($\alpha = 0,05$) (Kába, 2006, str. 81):

Písemná část	28	35	32	15	35	24	29	19	21	12
Ústní část	25	35	30	11	32	28	28	25	22	11

Tabulka č. 2.22: Tabulka získaných bodů

Příklad 2.2.10: Při vstupní přejímce byly u 20 náhodně vybraných sáčků s lízátky zjištěny tyto hmotnosti (v gramech):

99	103	101	100	98	95	104	97	101	100
103	101	102	100	99	93	98	103	99	98

Tabulka č. 2.23: Tabulka hmotností

Lze na základě uvedeného vzorku přijmout hypotézu, že střední hmotnost sáčku je 100 g? Testujte pomocí Wilcoxonova testu na hladině 5 %.

2.3 DVOUVÝBĚROVÝ WILCOXONŮV TEST

Tento test se používá nejčastěji místo dvouvýběrového t-testu. Opět dochází k zobecnění předpokladu, který je kladen na distribuční funkce daných náhodných výběrů. Necht' $X_1, X_2, \dots, X_m$ a $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ jsou dva nezávislé výběry ze dvou spojitých rozdělení. Chceme testovat hypotézu, že distribuční funkce obou rozdělení jsou totožné. Výběrové hodnoty $X_1, X_2, \dots, X_m$ a $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ uspořádáme vzestupně podle velikosti. Zjistíme součet pořadí hodnot $X_1, X_2, \dots, X_m$. Součet označíme T_1 . Dále zjistíme součet pořadí hodnot $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ a označíme ho T_2 . Vypočteme:

$$U_1 = mn + \frac{m(m+1)}{2} - T_1, \quad U_2 = mn + \frac{n(n+1)}{2} - T_2$$

Vzhledem k tomu, že $T_1 + T_2 = \frac{(n+m+1) \cdot (n+m)}{2}$, platí $U_1 + U_2 = mn$. Pokud

$\min(U_1, U_2)$ je menší nebo rovno kritické hodnotě uvedené v tabulce, zamítneme hypotézu, že distribuční funkce obou rozdělení jsou stejné. Při velkém rozsahu obou výběrů opět přejdeme ke statistice, která má za platnosti hypotézy asymptoticky rozdělení $N(0, 1)$ a tvar

$$U_0 = \frac{U_1 - \frac{1}{2}mn}{\sqrt{\frac{mn}{12}(m+n+1)}}$$

Pokud $|U_0| \geq u\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ zamítneme hypotézu na hladině asymptoticky rovné α .

Řešené příklady

Příklad 2.3.1: S použitím neparametrického testu ověřte, zda dva rozdílné způsoby posklizňového dosoušení mají vliv na klíčivost sladovnického ječmene. U každého způsobu bylo odebráno 10 vzorků po 100 semenech s následujícími výsledky (Prášilová, 2001, str. 59):

Sušení A		Sušení B	
Vzorek č.	Počet vyličených semen	Vzorek č.	Počet vyličených semen
1	89	1	88
2	88	2	77
3	92	3	83
4	94	4	76
5	90	5	79
6	81	6	82
7	93	7	80
8	90	8	72
9	87	9	78
10	83	10	72

Tabulka č. 2.24: Tabulka druhů sušení

Řešení:

- a) všem hodnotám přiřadíme pořadí
- b) provedeme součet pořadí v první a druhé skupině a vypočteme hodnotu testového kritéria

Sušení A			Sušení B		
Vzorek č.	Počet vyličených semen	Pořadí x	Vzorek č.	Počet vyličených semen	Pořadí y
1	89	15	1	88	13,5
2	88	13,5	2	77	4
3	92	18	3	83	10,5
4	94	20	4	76	3
5	90	16,5	5	79	6
6	81	8	6	82	9
7	93	19	7	80	7
8	90	16,5	8	72	2
9	87	12	9	78	5
10	83	10,5	10	72	1
Součet pořadí		$T_x = 149$			$T_y = 61$

Tabulka č. 2.25: Tabulka řešení

$$U_x = 10 \cdot 10 + 10 \cdot \frac{11}{2} - 149 = 6$$

$$U_y = 10 \cdot 10 + 10 \cdot \frac{11}{2} - 61 = 94$$

Závěr: $U_{vyp} = 6$ $U_{tab0,05;10,10} = 23$ $U_{vyp} < U_{tab}$ - nulovou hypotézu zamítáme, existuje významný rozdíl v klíčivosti dle způsobu dosoušení

Příklad 2.3.2: Bylo vybráno 10 kombajnů stejného druhu. Na 4 z nich se zkoušel nový způsob setí, zbývajících 6 selo standardním způsobem. Poté se sledoval výnos obilí z polí v metrických centech na 1 ha:

Nový způsob setí	51	52	49	55		
Starý způsob setí	45	54	48	44	53	50

Tabulka č. 2.26: Tabulka druhů setí

Je třeba zjistit, zda nový způsob setí má jiný vliv na průměrné hekt. výnosy než starý způsob.

Řešení: Všechny hodnoty X_i a Y_i uvedené v tabulce uspořádáme vzestupně podle velikosti. Tím dostaneme první řádek tabulky (nové). Na druhém řádku jsou pořadí X-ových hodnot na dalším Y-nových hodnot.

Sdružený výběr	44	45	48	49	50	51	52	53	54	55
Pořadí X hodnot				4		6	7			10
Pořadí Y hodnot	1	2	3		5			8	9	

Tabulka č. 2.27: Tabulka pořadí

$$T_1 = 4 + 6 + 7 + 10 = 27$$

$$T_2 = 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 9 = 28$$

$$U_1 = 4.6 + \frac{4.5}{2} - 27 = 7$$

$$U_2 = 4.6 + \frac{6.7}{2} - 28 = 17$$

$$m = 4, n = 6, \alpha = 0,05$$

$$\min(7, 17) = 7 > 0$$

Závěr: V tabulkách nalezneme $U_{\text{vyp}} = 7 > U_{\text{tab}} = 2 \Rightarrow$ hypotézu nezamítáme, nový způsob setí má jiný vliv na průměrné hekt. výnosy než starý způsob.

Příklad 2.3.3: Bylo vybráno 10 polí stejné kvality. Na 4 z nich se zkoušel nový způsob hnojení, zbývajících 6 bylo ošetřeno starým způsobem. Pole byla oseta pšenicí a sledoval se její hektarový výnos. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce (v metrických centech na hektar). Je třeba zjistit, zda nový způsob hnojení má jiný vliv na průměrné hektarové výnosy než starý způsob (Anděl, 2005, str. 230).

Hektarové výnosy při novém způsobu hnojení X_i	51	52	49	55	-	-
Hektarové výnosy při starém způsobu hnojení Y_i	45	54	48	44	53	50

Tabulka č. 2.28: Tabulka výnosů při druhu hnojení

Řešení:

Všechny hodnoty X_i a Y_i v tabulce uspořádáme podle velikosti. Tím dostaneme první řádek v následující tabulce, podtržená čísla patří do prvního výběru. Na druhém řádku jsou pořadí X-ových hodnot a na dalším jsou pořadí Y-ových hodnot.

Sdružený výběr	44	45	48	49	50	51	52	53	54	55
Pořadí X-ových hodnot				4		6	7			10
Pořadí Y-ových hodnot	1	2	3		5			8	9	

Tabulka č. 2.29: Tabulka řešení

$$T_1 = 4 + 6 + 7 + 10 = 27$$

$$U_1 = 4 \cdot 6 + (4 \cdot 5)/2 - 27 = 7$$

$$T_2 = 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 9 = 28$$

$$U_2 = 4 \cdot 6 + (6 \cdot 7)/2 - 28 = 17$$

Závěr: Kritická hodnota při $\alpha = 0,05$ pro $m = 4$, $n = 6$ je podle tabulek rovna 2. Protože $\min(7, 17) = U_{\text{vyp}} = 7 > U_{\text{tab}} = 2 \Rightarrow$ nemůžeme zamítnout hypotézu, že nový způsob hnojení má na hektarové výnosy stejný vliv jako starý způsob.

Neřešené příklady

Příklad 2.3.4: Následující údaje představují počty pracovníků ve větších podnicích potravinářského průmyslu ve dvou různých oblastech. Je třeba posoudit, zda rozdíl v počtech pracovníků je statisticky významný ($\alpha = 0,05$, Kába, 2006, str. 67).

LD 19	x_i	290	270	285	304	245	260	315	
BS 6	y_i	400	380	270	300	320	350	310	330

Tabulka č. 2.30: Tabulka počtů pracovníků

Příklad 2.3.5: Při výzkumu dvou proveniencí smrku byl mimo jiné zkoumán výškový růst. Následující tabulka uvádí výšky v cm pro obě provenience, které byly vysazeny na 5, resp. 6 plochách ve srovnatelných podmínkách (Drápela, 1996, str. 58).

číslo plochy	1	2	3	4	5	6
Provenience I	340	440	310	358	401	
Provenience II	350	315	405	339	374	380

Tabulka č. 2.31: Tabulka růstu

Příklad 2.3.6: Bylo vybráno 13 polí stejné kvality. Na 8 z nich se zkoušel nový způsob hnojení, zbývajících 5 bylo ošetřeno běžným způsobem. Výnosy pšenice uvedené v tunách na hektar jsou označeny X_i u nového a Y_i u běžného způsobu hnojení (Anděl, 2005, str. 238):

X_i	5,7	5,5	4,3	5,9	5,2	5,6	5,8	5,1
Y_i	5,0	4,5	4,2	5,4	4,4			

Tabulka č. 2.32: Tabulka způsobu hnojení

Příklad 2.3.7: Tabulka udává počet T_4 buněk/mm³ ve vzorcích krve 10 žen a 10 mužů v remisi Hodgkinsovy nemoci. Zajímá nás, zda rozdíl počtu T_4 buněk u žen a u mužů je statisticky významný.

Počet T_4 buněk	Počet T_8 buněk
396	236
568	786
1212	311
171	449
554	811
1104	686
257	412
435	286
295	336
397	936

Tabulka č. 2.33: Tabulka počtu buněk

Příklad 2.3.8: Na základě okresního kola v matematické olympiádě bylo vybráno 15 studentů, Osm studentů psalo písemku za rušivých elementů a sedm jich psalo v naprostém klidu. Poté se testy vyhodnotily ve stupnici od 0 do 100:

Při rušivých elementech	78	76	67	74	91	85	72	71
V klidu	81	77	83	94	82	75	79	

Tabulka č. 2.34: Tabulka hodnocení

Zjistěte, zda na výsledek testu mají vliv na okolní podněty.

Příklad 2.3.9: U přijímacích zkoušek sledujeme počty bodů z matematiky a chceme pro rychlou předběžnou informaci posoudit, zda jsou výsledky závislé na typu absolvované základní školy. Náhodně vybereme 8 písemek studentů z uvažovaných typů škol. Zjistěte, zda existuje mezi jednotlivými typy škol rozdíl v úspěšnosti písemek z matematiky u přijímacích zkoušek (Blatná, 1996, str. 122).

Student	gymnázium	základní
1	78	32
2	95	72
3	47	65
4	78	41
5	85	67
6	96	52
7	75	53
8	83	70

Tabulka č. 2.35: Tabulka škol

Příklad 2.3.10: Byly sledovány 2 dávky lepidla vyrobeného za stejných podmínek a to v poloze a proměnlivosti znaku jakosti lepicí mohutnosti. U první dávky bylo provedeno 16 měření, u druhé 18 měření. Úkolem je na hladině významnosti 5% zjistit, zda se obě dávky liší.

1. Dávka : 83,3; 104,1; 95,7; 107,5; 115; 87,4; 81,6; 93,3; 113,3; 101,7; 95; 91,6; 88,3; 89,1; 79,3; 86,6.

2. Dávka: 105,6; 114,2; 103,3; 105; 97,6; 114; 120; 100; 101,6; 100,5; 85; 117,5; 100,8; 110; 95,6; 104,2; 121,6; 98,3.

3. POROVNÁVÁNÍ VÍCE VÝBĚRŮ

3.1 ANALÝZA ROZPTYLU JEDNODUCHÉHO TŘÍDĚNÍ

Tento test je zobecněním dvouvýběrového t-testu, který rozšíříme na případ ($I \geq 3$) výběru. Uvažujme tedy I nezávislých výběrů,

$$Y_{11}, \dots, Y_{1n_1} \text{ je výběr z } N(\mu_1, \sigma^2)$$

atd. až

$$Y_{I1}, \dots, Y_{In_I} \text{ je výběr z } N(\mu_I, \sigma^2).$$

Chceme testovat hypotézu $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_I$ proti alternativě, že existují alespoň dvě střední hodnoty, které si rovny nejsou.

Někdy se uvedená situace zapisuje modelem:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij},$$

kde $\mu + \alpha_i = \mu_i$ a $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ je chyba vyplývající z nepřesnosti měření nebo ze systematické odchylky od průměru. Hypotézu H_0 přepíšeme na jednodušší model, který je splněn, pokud platí hypotéza H_0 :

$$Y_{ij} = \mu + e_{ij}.$$

Test provedeme následovně. Nejprve si označme průměry jednotlivých výběrů

$$\bar{Y}_i = \frac{Y_{i1} + \dots + Y_{in_i}}{n_i} \text{ pro } i = 1, \dots, I$$

a průměr všech hodnot

$$\bar{Y} = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij}}{n},$$

kde $n = n_1 + \dots + n_I$. Nyní spočtěme celkový součet čtverců S_T (tj. celková kvadratická chyba modelu za platnosti H_0 , tedy v případě že $\mu_1 = \dots = \mu_I = \mu$).

Za odhad μ se bere $\bar{Y}$.

$$S_T = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - n\bar{Y}^2.$$

Reziduální součet čtverců S_e je celková kvadratická chyba modelu za předpokladu, že hypotéza H_0 neplatí, tedy v případě, že $\mu_1 \neq \dots \neq \mu_I$. Za odhad μ_i se bere $\bar{Y}_i$.

$$S_e = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - n_i \bar{Y}_i^2.$$

Veličina $S_A = S_T - S_e$ se interpretuje jako součet čtverců připadající na rozdíly v ošetřeních. Tato veličina je vždy kladná, protože chyba obecnějšího modelu S_e je vždy menší než chyba jednoduššího modelu S_T . Je-li S_A malé, pak jsou si oba modely podobné, a tudíž nebudeme zamítat hypotézu H_0 . Je-li S_A velké, pak obecnější model vysvětluje velkou část celkové chyby S_T a tudíž zamítneme H_0 .

Za platnosti hypotézy H_0 má statistika

$$F_A = \frac{(n-1)S_A}{(I-1)S_e} \sim F_{I-1, n-1}$$

F rozdělení o $I-1$ a $n-1$ stupních volnosti. Tedy hypotézu H_0 zamítneme na hladině α v případě, že

$$F_A \geq F_{I-1, n-1}(\alpha).$$

V případě zamítnutí nulové hypotézy je často třeba rozhodnout, pro které dva výběry platí, že mají rozdílnou střední hodnotu. Toto řeší Tukeyova metoda mnohonásobného porovnání.

Věta 3.1: Necht' $X_1, \dots, X_m$ jsou nezávislé náhodné veličiny a necht' $X_i \sim N(\mu_i, b^2 \sigma^2)$, $i = 1, \dots, m$, kde b je známá kladná konstanta. Necht' s^2 je nezávislý odhad pro σ^2 s ν stupni volnosti; to znamená, že $\nu s^2 / \sigma^2 \sim \chi_\nu^2$ a že s^2 a X jsou nezávislé. Pak pravděpodobnost, že platí:

$$X_i - X_j - bsq_{m, \nu}(\alpha) \leq \mu_i - \mu_j \leq X_i - X_j + bsq_{m, \nu}(\alpha)$$

pro všechny dvojice (i, j) současně, je rovna $1 - \alpha$

Řešené příklady

Příklad 3.1.1: Bylo sledováno, zda různé odrůdy brambor mají stejné výnosy. Sledovány byly čtyři odrůdy, každá na pěti pozemcích s následujícími výsledky:

Odrůda					
Karin	22,1	24,0	23,6	20,8	21,5
Resa	25,9	28,0	26,1	26,7	25,4
Ostara	26,6	27,2	26,1	26,9	27,1
Karla	28,3	27,9	29,1	27,2	28,6

Tabulka č. 3.1: Tabulka odrůd

S použitím analýzy rozptylu jednoduchého třídění ověřte, zda existují významné rozdíly ve výnosech odrůd

Řešení:

	x_i	x_i^2	Σx_{ij}^2	$\bar{x}_i$
	112	12544	2516,3	22,4
	132,1	17450,41	3494,1	26,4
	133,9	17929,21	3586,6	26,8
	141,1	19909,21	3983,9	28,2
Σ	519,1	67832,83	13581	
	Σx_{i0}	Σx_i^2	$\Sigma \Sigma x_{ij}^2$	

Tabulka č. 3.2: Tabulka řešení

$m = 4$ (počet řádků (skupin))

$n = 5$ (počet sloupců)

x_i – součet hodnot v řádku

Σx_{i0} - celkový součet

$\Sigma \Sigma x_{ij}^2$ – celkový součet čtverců mocnin hodnot

Součty čtverců odchylek

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - c = \frac{1}{5} \cdot 67832,83 - 13473,2405 = 93,3255$$

$$S_r = S - S_1 = 107,6295 - 93,3255 = 14,304$$

$$S = \sum \sum x_{ij}^2 - c = 13580,87 - 13473,2405 = 107,6295$$

$$c = \frac{\sum x_{i0}^2}{m \cdot n} = \frac{519,1^2}{4 \cdot 5} = 13473,2405$$

Variabilita	SČO	Stupně volnosti	Rozptyl	F-test
Mezi třídami (odrůdami)	93,3255	m - 1 (3)	31,107	F=34,795 F _{0,05} (3;16)=3,24
Uvnitř tříd (reziduální)	14,304	m(n - 1) (16)	0,894	
Celková	107,6295	mn - 1 (19)		

Tabulka č. 3.3: Výpočtová tabulka analýzy rozptylu

Závěr: $F > F_{0,05}(3,16)$. Zamítáme hypotézu o významných rozdílech ve výnosech odrůd.

Příklad 3.1.2: Skupina neurotických dětí byla rozdělena do skupin podle příslušných syndromů. K objektivnímu doplnění psychiatrické diagnózy byla provedena analýza jejich krve, která sledovala jisté fyziologické hodnoty jejího složení. Předpokládejme, že přinesla výsledky uvedené v následující tabulce. Ptáme se, zda sledované hodnoty v příslušných skupinách se výrazně liší tak, abychom uvedená analýza mohla být využita k diagnostikování sledovaných syndromů?

Pacient číslo	Skupina A	Skupina B	Skupina C	Skupina D
1	13	13	12	10
2	12	14	10	11
3	11	15	9	12
4	15	14	9	-
5	14	-	10	-
$\bar{x}_i$	13	14	10	11

Tabulka č. 3.4: Tabulka skupin

Řešení:

$$S_A = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = 5 \cdot (13 - 12)^2 + 4 \cdot (14 - 12)^2 + 5 \cdot (10 - 12)^2 + 3 \cdot (11 - 12)^2 = 44$$

$$S_R = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i)^2 = (13 - 13)^2 + \dots + (13 - 14)^2 + \dots + (12 - 10)^2 + \dots + (10 - 11)^2 + \dots + (12 - 11)^2 = 20$$

Závěr: $H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$, výběrové aritmetické průměry pocházejí ze základních souborů se shodnými průměry (složení krve u všech základních souborů různých syndromů má průměrné fyziologické hodnoty shodné).

Příklad 3.1.3: V dílně byla zjišťována délka praxe a počet výrobků vyrobených jednotlivými dělníky během jednoho týdne. Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce. Na hladině významnosti a) 5 %, b) 1 % ověřte, zda má délka praxe statisticky významný vliv na produktivitu práce.

Záznamy o produktivitě práce pro různou délku praxe tvoří výběry ze 3 ZS s rozložením: $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$, $N(\mu_3, \sigma^2)$.

Délka praxe	Produktivita ks/týden x_{ij}	Četnost n_i	Součet x_i	Průměr $\bar{x}_i$	$\sum_j x_{ij}^2$
Do 10 let	76, 67, 80, 70	4	293	73,25	21565
10 - 25 let	82, 102, 98, 91	4	373	93,25	35013
nad 25 let	81, 77, 75, 85, 69	5	387	77,4	30101
	Σ	13	1053	-	86679
$k = 3$		n	$x_{..}$	$\sum_i \sum_j x_{ij}^2$	

Tabulka č. 3.5: Tabulka produktivity s řešením

Řešení:

Testujeme nulovou hypotézu:

1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
2. $H_1 : \text{ne všechna } \mu_i \text{ jsou si rovna}$
3. a) $p = 0,05$
b) $p = 0,01$
4. Testovací kritérium $F = \frac{n-k}{k-1} \cdot \frac{S_A}{S_e}$ má rozložení $F(k-1; n-k) = F(2;10)$

a) Kritická hodnota $F_{0,05}(2;10) = 4,103$, kritická oblast je $(4,103; +\infty)$.

b) Kritická hodnota $F_{0,05}(2;10) = 47,559$, kritická oblast je $(47,559; +\infty)$.

5. Hodnota testovacího kritéria F.

Nejprve z tabulky vypočteme součty čtverců:

$$S_T = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{13} = \left(21565 + 35013 + 30101 - \frac{1053^2}{13} \right) =$$

$$= 86679 - 85293 = 1386$$

$$S_A = \sum_{i=1}^3 (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i = \sum_{i=1}^3 \frac{x_{i.}^2}{n_i} - \frac{x_{..}^2}{13} = \left(\frac{293^2}{4} + \frac{373^2}{4} + \frac{387^2}{5} \right) - \frac{1053^2}{13} =$$

$$= 86198,3 - 85293 = 905,3$$

$$S_e = S_T - S_A = 1386 - 905,3 = 480,7$$

Hodnotu testovacího kritéria F určíme pomocí následující tabulky analýzy rozptylu:

Zdroj variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl	Hodnota test. kritéria
Délka praxe	905,3	2	452,65	$F = \frac{452,65}{48,07} = 9,416$
Rexiduální	480,7	10	48,07	
Celkový	1386	12	-	

Tabulka č. 3.6: Tabulka analýzy rozptylu

6. Rozhodnutí:

- a) na hladině významnosti $p = 0,05$ je kritická hodnota $F = 9,416 > 4,103 \Rightarrow H_0$ zamítáme.
- b) na hladině významnosti $p = 0,01$ je kritická hodnota $F = 9,416 > 7,559 \Rightarrow H_0$ zamítáme.

Závěr: Šetření prokázalo statisticky velmi významný vliv délky praxe na produktivitu práce, odlišuje se produktivita s délkou praxe 10 až 25 let.

Neřešené příklady

Příklad 3.1.4: Zjistěte, zda existují rozdíly v cukernatosti hroznů vinné révy pocházející ze čtyř odrůd. Od každé odrůdy bylo získáno 6 náhodně vybraných vzorků, které byly analyzovány na obsah cukru (%).

	Odrůdy (i)			
Hodnoty (j)	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4
1	15	17	16	12
2	18	16	17	15
3	19	20	19	13
4	18	16	18	13
5	18	18	21	16
6	21	19	20	14
Dílčí četnosti n_i	6	6	6	6
Dílčí průměry	18,16	17,66	18,5	13,83

Tabulka č. 3.7: Tabulka cukernatosti hroznů vinné révy

Příklad 3.1.5: Doplňte správně tabulku 1-faktorové Analýzy variance a proveďte vyhodnocení testu globální nulové hypotézy o neexistujících rozdílech mezi výnosy řepky na pozemcích s 5 různými úrovněmi hnojení:

$$H_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5.$$

H_1 : existuje alespoň jedna nerovnost.

ANOVA					
Zdroj variability	SS	Stupně Volnosti	MS	F_{vyp}	F tab
Faktor (A)					
Residuum (E)	324,12				
Celkem (T)	720,68	32			

Tabulka č. 3.8: Tabulka zadání

ANOVA					
Zdroj variability	SS	Stupně Volnosti	MS	F _{vyp}	F tab
Faktor (A)	396,56	4	99,14	8,565**	2,866 ($\alpha=0,05$)
Residuum (E)	324,12	28	11,575		4,431 ($\alpha=0,01$)
Celkem (T)	720,68	32			

Tabulka č. 3.9: Tabulka s výsledky

Příklad 3.1.6: Tři skupiny 15 pěších turistů s 3 odlišnými úrovněmi předcházejícího tréninku (žádný, střední, vysoký) ušly vzdálenost 20 km. Tabulka uvádí čas v hodinách potřebný k ujití této vzdálenosti. Testujte na úrovni $\alpha=0,05$ vliv předchozího tréninku na čas potřebný k ujití 20 km vzdálenosti.

	Výcvik			
	žádný	střední	kvalitní	
	6	5	5	
	7	6	4	
	5	4	3	
	6	6	4	
	6	4	-	
	-	5	-	
četnosti n_i	5	6	4	$n = 15$
průměry	6	5	4	$\bar{y} = 5,066$
$n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2$	4,36	0,03	4,54	$S_A = 8,93$
$\sum_j (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i)^2$	2	4	2	$S_E = 8$

Tabulka č. 3.10: Tabulka času v hodinách potřebný k ujití

Příklad 3.1.7: Majitel restaurace U džbánu nabízí hostům různé druhy limonád: s příchutí jablek, jahod, malin, borůvek, citrónu. Chce vědět, zda jsou všechny skupiny limonád stejně oblíbené. Proto požádal náhodně vybrané zákazníky, aby limonády ohodnotily na žebříčku od 0 do 100. Výsledky:

jablka	60	68	88	79	72	65	56	76	77	83		
jahody	49	72	77	65	68	66	74	80				
maliny	51	68	70	75	57	62	60	65	58	63	50	52
borůvky	55	71	78	72	71	65	66	80	72			
citrón	46	65	68	67	58	60	56	58	55	60		

Tabulka č. 3.11: Tabulka výsledků ochutnávek

Lze na základě uvedených údajů tvrdit, že jsou všechny skupiny limonád zákazníky hodnoceny stejně, tedy stejně oblíbené?

Příklad 3.1.8: Za účelem zkoumání vlivu ročního období na pevnost bylo zjištěno celkem 30 krychelných pevností betonu určité třídy v MPa (jaro a podzim byly vzhledem k podobným teplotním poměrům sloučeny do jedné skupiny, Jarušková, 1998, str. 82).

Roční období	jaro, podzim	léto	zima
Zjištěné pevnosti:	23,8	23,5	23,2
	24,2	23,0	23,5
	25,1	24,2	25,2
	27,6	25,6	25,8
	26,7	27,0	19,8
	26,0	27,5	20,2
	21,8	21,7	26,7
	23,6	20,6	20,2
	23,0	22,1	21,0
	21,5	21,1	20,5
Součet hodnot	243,3	236,3	226,1
Součet čtverců	5956,19	5636,37	5173,43

Tabulka č. 3.12: Tabulka vlivu ročního období na pevnost

Otestujte, má-li roční období vliv na pevnost betonu. Pokud ano, určete významně se lišící dvojice ročních období ($\alpha = 0,05$).

Příklad 3.1.9: V pěti výrobních oceli téže třídy byly na celkem 29 vzorcích změřeny pevnosti v kluzu. Otestujte, zda jednotlivé výrobní produkují stejně kvalitní ocel (Jarušková, 1996, str. 54).

Označení výrobny	zjištěné pevnosti (Mpa)						x_i	X_i	X_{ij}^2
1	326	334	340	344	326	338	334,6667	2008	672288
2	350	348	356	343	351	348	349,3333	2096	732294
3	328	319	309	333	330	342	326,8333	1961	641579
4	339	346	320	344	358	352	343,1667	2059	707441
5	309	302	321	336	312		316	1580	499966

Tabulka č. 3.13: Tabulka zjištěných pevností

Příklad 3.1.10: U čtyř samic různých plemen králíků byl sledován počet živě narozených mláďat v jednom vrhu v průběhu produktivního věku. Ověřte metodou analýzy rozptylu, zda se jednotlivá plemena králíků statisticky významně liší v průměrném počtu živě narozených mláďat. Řešte na 5 % hladině významnosti (Prášilová, 1997, str. 50).

Plemeno	Počet živě narozených mláďat v 1 vrhu									
Kalifornský	7	9	10	9	8	4	9	8	4	4
Novozélandský bílý	4	5	7	8	9	8				
Novozélandský červený	6	4	7	8	8	9	7	6	4	
Český strakáč	5	7	8	7	6	5	4			

Tabulka č. 3.14: Tabulka druhů králíků

3.2 KRUSKALŮV-WALLISŮV TEST

Tento test je zobecněním Wilcoxonova dvouvýběrového testu, který rozšíříme na případ k výběrů ($k \geq 3$). Jedná se o neparametrickou verzi analýzy rozptylu jednoduchého třídění.

Uvažujme k nezávislých výběrů, které jsou postupně o rozsahu $n_1, n_2, \dots, n_k$. Označme $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Předpokládejme, že každý tento výběr pochází z nějakého rozdělení se spojitou distribuční funkcí. Chceme testovat hypotézu, že všechny výběry pocházejí z téhož rozdělení. Podobně jako u Wilcoxonova dvouvýběrového testu seřadíme všech n prvků z k výběrů do rostoucí posloupnosti a určíme pořadí každého prvku. Označme T_i součet pořadí těch prvků, které patří do i -tého výběru ($i = 1, 2, \dots, k$). Vzhledem k tomu, že celkový počet prvků ze všech výběrů je n , musí platit $T_1 + T_2 + \dots + T_k = \frac{n(n+1)}{2}$. Tohoto

vztahu můžeme využít ke kontrole správnosti výpočtu T_i . V případě platnosti hypotézy má pak veličina

$$Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1) \text{ při } n \rightarrow \infty \text{ asymptoticky } \chi^2 \text{ rozdělení o } k-1 \text{ stupňů}$$

volnosti. Jestliže $Q \geq \chi_{k-1}^2(\alpha)$ zamítneme hypotézu na hladině, která je asymptoticky rovna α . Pokud hypotézu zamítneme, tvrdíme, že všechny výběry nepocházejí z téhož rozdělení. V tomto případě nás pak zajímá, které výběry se od sebe významně liší. Za tímto účelem použijeme *Neményiho metodu* mnohonásobného srovnávání (lze použít pokud výběry mají stejný rozsah). Je-li číslo $|T_i - T_j|$ větší nebo rovno kritické hodnotě (kritické hodnoty s nimiž tato metoda pracuje jsou tabelovány), zamítá se hypotéza, že i -tý a j -tý výběr pocházejí z téhož rozdělení. Tento postup se aplikuje na všech $\frac{k(k-1)}{2}$ čísel $|T_i - T_j|$.

Řešené příklady

Příklad 3.2.1: Entomolog studuje vertikální distribuci určitého druhu mouchy v listnatém lese a získal pět souborů jedinců z každé ze tří vegetačních vrstev (bylinné patro, keřové patro, stromové patro)

H_0 : Abundance druhu je stejná ve všech třech vegetačních patrech

H_1 : Abundance druhu není stejná ve všech třech vegetačních patrech

$$\alpha = 0,05$$

Data jsou následující (s pořadím – ranky – hodnot v závorkách):

Počet jedinců / m ³ patra		
Bylinné patro	Keřové patro	Stromové patro
14,0 (15)	8,4(11)	6,9(8)
12,1 (14)	5,1(2)	7,3(9)
9,6(12)	5,5(4)	5,8(5)
8,2(10)	6,6(7)	4,1(1)
10,2(13)	6,3(6)	5,4(3)

Tabulka č. 3.15: Tabulka druhů pater s četností

$$n_1 = 5$$

$$n_2 = 5$$

$$n_3 = 5$$

$$R_1 = 64$$

$$R_2 = 30$$

$$R_3 = 26$$

Řešení:

$$N = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$Q_{vyp} = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) = \frac{12}{15(16)} \left[\frac{64^2}{5} + \frac{30^2}{5} + \frac{26^2}{5} \right] - 3(16) = 8720$$

Závěr: $Q_{tab} = 5,780$ – zamítáme tedy H_0 , abundance druhu není stejná ve všech třech vegetačních patrech. Liší se bylinné patro.

Příklad 3.2.2: V následující tabulce jsou uvedeny naměřené hodnoty měrného odporu plužního tělesa na středně těžké půdě při různých pracovních rychlostech: $v_1 = 4$ km/h, $v_2 = 6$ km/h, $v_3 = 8$ km/h

Pracovní rychlost	Měrný odpor [10^5 Pa]			
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0,71	0,66	0,63	0,65
v_2	0,59	0,64	0,67	0,69
v_3	0,70	0,72	0,75	0,73

Tabulka č. 3.16: Tabulka odporů

Řešení:

Je třeba posoudit, zda vliv pracovní rychlosti na měrný odpor je statisticky významný. Výběry sloučíme do jednoho souboru a jednotlivým hodnotám přiřadíme pořadí:

v_1	0,71	0,66	0,63	0,65	
pořadí	9	5	2	4	$T_1 = 20$
v_2	0,59	0,64	0,67	0,69	
pořadí	1	3	6	7	$T_2 = 17$
v_3	0,70	0,72	0,75	0,73	
pořadí	8	10	12	11	$T_3 = 41$

Tabulka č. 3.17: Tabulka řešení

Hodnotu testového kritéria H vypočteme: $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$, $n = 12$

$$Q_{\text{vyp}} = \frac{12}{12 \cdot 13} \left(\frac{20^2}{4} + \frac{17^2}{4} + \frac{41^2}{4} \right) - 3 \cdot 13 = 6,577$$

Závěr: Pro $\alpha = 0,05$ a *pro* $f = 3$ stupně volnosti najdeme v tabulce kritickou hodnotu $\chi^2_{0,05(2)} = 5,991$. Protože $Q = 6,577 > \chi^2_{0,05(2)} = 5,991$, zamítáme na hladině významnosti 5 % hypotézu o stejném měrném odporu při různých pracovních rychlostech.

Příklad 3.2.3: Mějme $I = 3$ náhodné výběry rozsahu $n_1 = 8$, $n_2 = 10$, $n_3 = 12$. Po uspořádání $N = 30$ výběrových hodnot podle velikosti jsme dostali pro jednotlivé výběry pořadí uvedená v tabulce:

Číslo výběru		
1	2	3
2	1	4,5
3	4,5	6
10	10	7
12	10	8
18	15	13
20,5	16	14
26	19	17
28	23	20,5
	26	22
	30	24
		26
		29
$R_1 = 119,5$	$R_2 = 154,5$	$R_3 = 191$
$\bar{R}_1 = 14,94$	$\bar{R}_2 = 15,45$	$\bar{R}_3 = 15,92$

Tabulka č. 3.18: Tabulka výběrů

Pocházejí všechny tři výběry ze stejného rozdělení?

Řešení:

$$Q_{\text{vyp}} = \frac{12}{30 \cdot 31} \left(\frac{119,5^2}{8} + \frac{154,5^2}{10} + \frac{191^2}{12} \right) - 3 \cdot 31 = 0,07$$

Máme $p = 4$ skupiny stejných pořadí. První obsahuje pořadí 4 a 5, nahradíme je průměrným pořadím 4,5. Tedy $T_1 = 2^3 - 2 = 6$. Pro druhou a čtvrtou skupinu je $T_2 = T_4 = 3^3 - 3 = 24$. Pro třetí skupinu je $T_3 = T_1 = 6$. Korekční faktor je roven $1 - 60/26970 = 0,998$.

Závěr: Protože $Q_{\text{vyp}} = 0,07/0,998 = 0,07 < \chi^2_{0,95}(2) = 5,99$, hypotézu, že všechny tři výběry pocházejí z téhož rozdělení, nezamítáme.

Neřešené příklady

Příklad 3.2.4: Společnost vlastní čtyři prodejny, které prodávají jízdní kola. Chce zjistit rozdílnost v prodeji kol, přičemž má k dispozici počet prodaných kol každou prodejnou za posledních 5 měsíců:

1.	prodejna	23	18	16	20	21
2.	prodejna	25	15	16	19	22
3.	prodejna	22	20	17	15	18
4.	prodejna	18	16	20	24	25

Tabulka č. 3.19: Tabulka prodeje

Proved'te na 5 % hladině významnosti test, který ověří, zda prodej kol ve všech prodejnách je srovnatelný. Pokud nemůžete předpokládat, že rozdělení počtu prodaných kol je alespoň přibližně normální, musíte použít neparametrický Kruskal – Wallisův test.

Příklad 3.2.5: Ze statistiky rodinných účtů byly náhodně vybrány údaje o výši vkladů u 17 spořicíh zaměstnaných domácností a byly roztríděny podle počtu ekonomicky aktivních členů. Máme prokázat formou testu, zda počet ekonomicky aktivních členů domácnosti je významným ($\alpha = 0,05$) faktorem výše úspor u sledovaného typu domácností. Vstupní hodnoty jsou v následující tabulce:

Počet ekonomicky aktivních členů	výše vkladů [Kč]					
1	7 6500	1 1200	4 4100	8 8000	6 6150	
2	11 11150	13 16850	2 1770	10 11000	14 21500	5 4500
3 a více	15 21600	3 3300	12 14500	9 9100	16 29450	17 30160

Tabulka č. 3.20: Tabulka výše vkladů podle členů

Příklad 3.2.6: Šampon jisté značky se prodává ve čtyřech různých obalech stejného obsahu. Máme následující údaje o počtu prodaných lahvíček za týden v různých obchodech ($\alpha = 0,05$)(Hebák, 2004, str. 228).

1. typ	50	35	43	30	62	52	43	57	33	70	64	58	53	65	39
2. typ	31	37	59	67	44	49	54	62	34	42	40				
3. typ	27	19	32	20	18	23									
4. typ	35	39	37	38	28	33									

Tabulka č. 3.21: Tabulka prodeje

Příklad 3.2.7: Z produkce tří firem vyrábějících televizory bylo náhodně vybráno $n_1 = 10$, $n_2 = 8$ a $n_3 = 12$ kusů. Byla získána následující bodová hodnocení jejich kvality od nezávislých expertů (Hebák, 2004, str. 242).

1. firma	420	560	600	490	550	570	340	480	510	460		
2. firma	400	420	580	470	470	500	520	530				
3. firma	450	700	630	590	420	590	610	540	740	690	540	670

Tabulka č. 3.22: Tabulka hodnocení

Ověřte na 5 % hladině významnosti hypotézu o stejné úrovni bodového hodnocení kvality.

Příklad 3.2.8: Respondent byl požádán, aby seřadil 15 druhů kávy podle svých preferencí. Těchto 15 druhů jsou ve skutečnosti pouze tři produkty. V následující tabulce jsou preference seřazeny podle druhu. Na 5 % hladině významnosti zjistěte, zda se preference jednotlivých produktů významně liší (Hebák, 2004, str. 243).

Druh A	9	10	11	12	13
Druh B	14	1	5	7	8
Druh C	2	3	4	15	6

Tabulka č. 3.23: Tabulka preferencí

Příklad 3.2.9: Výrobce koláčů v prášku má čtyři nové recepty a chce zjistit, zda se jejich kvalita liší. Upekł pět koláčů z každého druhu a dal je porotě k ohodnocení. Testujte hypotézu, že mezi koláči není žádný rozdíl (5 % hladině významnosti, Hebák, 2004, str. 243).

Recept A	72	88	70	87	71
Recept B	85	89	86	82	88
Recept C	94	94	88	87	89
Recept D	91	93	92	95	94

Tabulka č. 3.24: Tabulka hodnocení

Příklad 3.2.10: V následující tabulce jsou uvedeny denní váhové přírůstky prasat při různých krmných režimech (5 % hladině významnosti, Kába, 2006, str. 83):

Krmný režim	Váhový přírůstek (kg)			
1	0,71	0,66	0,63	0,65
2	0,59	0,64	0,67	0,69
3	0,70	0,72	0,75	0,73

Tabulka č. 3.25: Tabulka přírůstků

3.3 FRIEDMANŮV TEST

Tento test je neparametrickou obdobou analýzy rozptylu dvojného třídění (např. Petrášková, Mrkvička – Úvod do statistiky, 2006). Máme $I \cdot J$ nezávislých pozorování, které uspořádáme do tabulky

Sloupce	1	2	3	...	J
Řádky					
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	...	Y_{1J}
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}		Y_{2J}
.	...	...	...	...	
.	...	...	...	...	
.	...	...	...	...	
I	Y_{I1}	Y_{I2}	Y_{I3}	...	Y_{IJ}

Tabulka č. 3.26: Tabulka Friedmanova testu

Náhodné veličiny Y_{ij} mají spojitou distribuční funkci F_{ij} , $i = 1, 2, \dots, I$, $j = 1, 2, \dots, J$ a jsou vzájemně nezávislé.

Budeme testovat hypotézu:

$$H_0 : F_{i1} = F_{i2} = \dots = F_{iJ}$$

Nebo-li testujeme hypotézu, zda F_{ij} závisí na sloupcovém indexu j , přičemž předpokládáme, že mohou záviset na řádkovém indexu i . Uspořádáme pozorování v každém řádku podle velikosti a označíme příslušná pořadí $R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{iJ}$, $i = 1, 2, \dots, I$.

Sloupce	1	2	3	...	J	
Řádky						Řádkové součty
1	R_{11}	R_{12}	R_{13}	...	R_{1J}	$\frac{J(J+1)}{2}$
2	R_{21}	R_{22}	R_{23}		R_{2J}	$\frac{J(J+1)}{2}$
.	...	...	...	...		
.	...	...	...	...		
.	...	...	...	...		
I	R_{I1}	R_{I2}	R_{I3}	...	R_{IJ}	$\frac{J(J+1)}{2}$
Sloupcové součty	$R_{.1}$	$R_{.2}$	...		$R_{.J}$	$R_{..} = \frac{IJ(J+1)}{2}$

Tabulka č. 3.27: Tabulka postupu řešení

$$\text{Zde } R_{.j} = \sum_i R_{ij}, R_{..} = \sum_i \sum_j R_{ij}$$

Statistika Friedmanova testu je dána vzorcem

$$Q = \frac{12}{IJ(J+1)} \sum_{j=1}^J R_{.j}^2 - 3I(J+1)$$

Hypotézu H_0 zamítneme, jestliže Q překročí kritickou hodnotu uvedenou v tabulkách. Při větších hodnotách I se za kritickou hodnotu bere $\chi^2_{J-1}(\alpha)$.

Zamítneme-li hypotézu, zajímá nás, které sloupce se od sebe liší. Za tímto účelem vytvoříme tabulku hodnot $|R_j - R_m|$ pro všechna $j < m$. Je-li některá z hodnot

$|R_{.j} - R_{.m}|$ větší nebo rovna kritické hodnotě, která je tabelovaná, zamítne se na odpovídající hladině významnosti hypotéza, že $F_{ij} = F_{im}$.

Řešené příklady

Příklad 3.3.1: V roce 2006 se provedl test majonéz od různých výrobců. Hodnotitelé pro pořadovou zkoušku dostali v kádinkách najednou 5 vzorků a řadili je od nejchutnějšího po nejméně chutný. Liší se jednotlivé vzorky ($\alpha = 0,05$)?

číslo vzorku a průměrné hodnoty z 100 mm stupnice	celková příjemnost barvy	intenzita barvy	příjemnost vůně	intenzita vůně
1	74	62	71	48
2	43	37	56	34
3	76	77	54	55
4	46	37	48	29
5	58	44	43	33

Tabulka č. 3.28: Tabulka hodnocení

Řešení:

Hodnoty v tabulce nahradíte pořadovými čísly (v rámci každého řádku zvlášť) a udělejte součty za jednotlivé vzorky (sloupce):

číslo vzorku a průměrné hodnoty z 100 mm stupnice	celková příjemnost barvy	intenzita barvy	příjemnost vůně	intenzita vůně
1	4	2	3	1
2	3	2	4	1
3	3	4	1	2
4	3	2	4	1
5	4	3	2	1
celkem	17	13	14	6

Tabulka č. 3.29: Tabulka řešení

A nyní dosadíme do testové statistiky:

$$Q_{vyp} = \frac{12}{IJ(J+1)} \sum_{j=1}^J R_{.j}^2 - 3I(J+1) = \frac{12}{5 \cdot 4 \cdot 5} (17^2 + 13^2 + 14^2 + 6^2) - 3 \cdot 5 \cdot 5 = 7,8$$

Závěr: Protože $Q_{vyp} = 7,81 \geq Q_{tab} = 7,81$, zamítáme testovanou hypotézu o stejné úrovni kvalitě majonéz. Liší se vzorek majonézy č. 1 a vzorek č. 3.

Příklad 3.3.2: Společnost vlastní čtyři prodejny, které prodávají jízdní kola. Chce zjistit rozdílnost v prodeji kol, přičemž má k dispozici počet prodaných kol každou prodejnou za posledních 5 měsíců:

1.	prodejna	23	18	16	20	21
2.	prodejna	25	15	16	19	22
3.	prodejna	22	20	17	15	18
4.	prodejna	18	16	20	24	25

Tabulka č. 3.30: Tabulka prodeje

Provedte na 5 % hladině významnosti Friedmanův skupinový test, který ověří zda prodej kol ve všech prodejnách je srovnatelný.

Řešení:

Neboť jsou zadané hodnoty vzájemně provázané (prostřednictvím měsíce), je pro srovnání skutečně vhodný Friedmanův test, který je pro stejná data silnější než test Kruskal – Wallisův.

Nejprve si ale přeuspořádejte vstupní data do tabulky tak, aby sloupce tvořily jednotlivé znaky a v řádcích byly provázané hodnoty:

měsíc	1. prodejna	2. prodejna	3. prodejna	4. prodejna
I	23	25	22	18
II	18	15	20	16
III	16	16	17	20
IV	20	19	15	24
V	21	22	18	25

Tabulka č. 3.31: Tabulka postupu řešení

Nyní hodnoty v tabulce nahraďte pořadovými čísly (v rámci každého řádku zvlášť) a udělejte součty za jednotlivé prodejny (sloupce):

měsíc	1. prodejna	2. prodejna	3. prodejna	4. prodejna
I	3	4	2	1
II	3	1	4	2
III	1,5	1,5	3	4
IV	3	2	1	4
V	2	3	1	4
R_1	12,5	11,5	11	15

Tabulka č. 3.32: Tabulka řešení

Vypočtené pořadové statistiky R_1 můžete dosadit do testové statistiky:

$$Q_{\text{vyp}} = \frac{12}{5 \cdot 4 \cdot 5} (12,5^2 + 11,5^2 + 11^2 + 15^2) - 3 \cdot 5 \cdot 5 = 1,14$$

Neboť rozsah souborů (počet měsíců) je roven 5, lze aproximovat rozdělení statistiky Q rozdělením χ^2 o 3 stupních volnosti ($\nu = k - 1 = 3$). Kritickou hodnotou testu je kvantil $\chi^2_{0,05}(3) = 7,81$.

Závěr: Protože vypočtená testová statistika je nižší než kritická hodnota, nebude zamítnuta nulová hypotéza o shodě středních hodnot. Mezi počtem prodaných kol v jednotlivých prodejnách tedy nebyl prokázán žádný statisticky významný rozdíl.

Příklad 3.3.3: Průzkum zájmu spotřebitelů o určité typy vín má odpovědět na otázku, zda jsou některé druhy spotřebiteli preferovány. Dvanáct náhodně vybraných kupujících zařadilo podle oblíbenosti čtyři dodávané druhy bílého vína stejné ceny (označené a, b, c, d). Údaje obsahuje následující tabulka (Hebák, 2004, str. 191):

Kupující	1. pořadí	2. pořadí	3. pořadí	4. pořadí
1	a	d	b, c rovnocenné	
2	c	a	d	b
3	a	c	b	d
4	a	b	c	d
5	b	d	a, c rovnocenné	
6	c	a, b, d rovnocenné		
7	c, d rovnocenné		a, b rovnocenné	
8	b	c	a	d
9	a	d	c	b
10	c	a	b	d
11	a	b	c	d
12	c	b	a, d rovnocenné	

Tabulka č. 3.33: Tabulka preferencí

Řešení:

Údaje o kvalitě j-tého druhu vína od $n = 12$ kupujících představuje j-tý náhodný výběr, $j = 1, 2, 3, 4$. Výběry jsou závislé, škála je ordinální, takže použijeme Friedmanův test. Výpočetní operace uspořádáme do tabulky a dosazením dostaneme hodnotu testového kritéria:

$$Q = 12 / (12 \cdot 4 \cdot 5) \cdot 3693,5 - 3 \cdot 12(4 + 1) = 4,68$$

i	Druh a	Druh b	Druh c	Druh d
1	1,0	3,5	3,5	2,0
2	2,0	4,0	1,0	3,0
3	1,0	3,0	2,0	4,0
4	1,0	2,0	3,0	4,0
5	3,5	1,0	3,5	2,0
6	3,0	3,0	1,0	3,0
7	3,5	3,5	1,5	1,5
8	3,0	1,0	2,0	4,0
9	1,0	4,0	3,0	2,0
10	2,0	3,0	1,0	4,0
11	1,0	2,0	3,0	4,0
12	3,5	2,0	1,0	3,5
R _j	25,5	32,0	25,5	37,0
R _{j2}	650,3	1024,0	650,3	1369,0

Tabulka č. 3.34: Tabulka řešení

Závěr: Porovnáním s $Q_{tab\ 0,95}(3) = 7,81$, zjišťujeme, že $Q_{vyp} \leq Q_{tab}$, takže testem na 5 % hladině významnosti nebyl prokázán rozdíl v názorech spotřebitelů na jednotlivé druhy vín.

Neřešené příklady

Příklad 3.3.4: U skupiny náhodně vybraných dělníků byl měřen směnový výkon v normohodinách na ranní, odpolední a noční směně. Výsledky měření jsou uvedeny v tabulce. Máme otestovat hypotézu, že se úroveň výkonů v jednotlivých směnách neliší, test se má provést na hladině $\alpha = 0,05$.

Dělník	Směna		
	ranní	odpolední	noční
1	8,25	9,50	8,00
2	7,75	7,50	7,50
3	9,00	8,00	8,50
4	11,00	11,50	10,50
5	9,50	8,75	8,00
6	8,25	8,25	8,00
7	9,50	7,50	8,00
8	9,75	9,50	7,25
9	10,50	9,25	9,75
10	10,00	8,50	8,50
11	7,75	7,75	8,50
12	8,50	8,50	8,00
13	8,75	8,50	8,25
14	10,50	9,75	8,25
15	9,00	9,00	8,50

Tabulka č. 3.35: Tabulka směn

Příklad 3.3.5: Máme k dispozici data z průzkumu cen u tří prodejen, u nichž byly sledovány ceny za 7 druhů potravinářských výrobků. Chceme posoudit, zda ve sledované době, když šetření probíhalo, byla významně odlišná úroveň cen

v těchto prodejnách ($\alpha = 0,05$). Vstupní data jsou uvedena v následující tabulce (Blatná, 1996, str. 127):

Potravinářské zboží	Prodejna		
	obchodní dům	stánkový prodej	soukromá prodejna
A	4,50	5,00	8,20
B	12,40	11,70	14,10
C	5,70	5,50	5,60
D	1,40	1,50	1,80
E	27,80	32,60	28,10
F	72,40	89,40	72,50
G	8,40	6,70	7,50

Tabulka č. 3.36: Tabulka cen

Příklad 3.3.6: Při výzkumu proveniencí smrku pro výsadbu v určitých podmínkách byl založen blokový provenienční pokus, kde v pěti blocích byly zkoumány 4 provenience. Vyhodnoťte, zda mezi jednotlivými proveniencemi jsou rozdíly v produkci ($\alpha = 0,05$). Údaje jsou uvedeny v následující tabulce (číslo 1 značí nejvyšší produkci, 4 nejnižší, Drápela, 1996, str. 60):

Blok	Provenience			
1	3	4	2	1
2	3	2	4	1
3	2	4	3	1
4	3	4	2	1
5	4	2	3	1
R_i	15	16	14	5

Tabulka č. 3.37: Tabulka produkce

Příklad 3.3.7: Byl sledován vliv tří preparátů na srážlivost krve. Kromě jiných ukazatelů byl zjišťován tzv. trombinový čas. U každé osoby byl stanoven nejprve kontrolní údaj (K), který udává trombinový čas před zahájením pokusu. Pak byly aplikovány preparáty A, B, C, a to každý dostatečně dlouho po odeznění účinku těch předchozích. Údaje o 10 sledovaných osobách jsou uvedeny v tabulce ($\alpha = 0,05$, Anděl, 2005, str. 233):

Osoba	Preparát			
	K	A	B	C
A	11,3	11,2	11,4	11
B	11,9	12,1	11,8	9,5
C	11,8	13,2	12	11,1
D	12,1	12,8	12	12,5
E	11,2	13,5	11,5	8,4
F	11,3	12,5	11,5	9
G	10,8	10,7	10,9	9,7
H	12	13,8	11,6	12,2
I	11,5	12,9	11,3	10,3
J	11,7	11,9	11,3	8,2

Tabulka č. 3.38: Tabulka vlivu preparátů

Příklad 3.3.8: Na deseti rostlinách byla porovnávána hustota průduchů na listech, na korunních plátcích a na řapíku. Byli zjištěny následující hodnoty ($\alpha = 0,05$):

Rostlina	Listy	Korunní plátky	Řapík
1	9	6	7
2	15	9	10
3	7	3	4
4	15	10	12
5	11	7	9
6	20	15	17
7	19	18	18
8	4	3	3
9	16	11	13
10	14	10	11

Tabulka č. 3.39: Tabulka hustoty

Liší se hustoty průduchů na jednotlivých částech rostliny?

Příklad 3.3.9: V jedné zoologické zahradě sledovali délku života různých druhů medvědů. Zjistěte na $\alpha = 0,05$, jestli je délka života závislá na druhu medvěda?

číslo medvěda	hnědý	lední	grizly
1	45	47	30
2	38	41	45
3	32	39	42
4	44	50	34
5	25	37	38
6	46	38	36

Tabulka č. 3.40: Tabulka délky života

Příklad 3.3.10: Celkem 31 dobrovolníků bylo náhodně rozděleno do dvou skupin o 16 a 15 osobách. Každý člen první skupiny dostal citrónovou šťávu a 30 ml alkoholu, členové druhé skupiny je citrónovou šťávu. Všichni pak byli podrobeni Danielovu zrychlenému inteligenčnímu testu a zjišťoval se jejich tep před pokusem před pokusem ($t = 1$), na začátku pokusu ($t = 2$) a na konci pokusu ($t = 3$). Zde jsou výsledky pokusu ($\alpha = 0,05$):

První skupina			
	t		
i	1	2	3
1	63	66	77
2	60	70	80
3	89	80	88
4	82	80	83
5	70	72	71
6	53	69	66
7	85	93	92
8	86	81	84
9	58	65	68
10	70	72	71
11	80	76	72
12	95	83	82
13	78	90	84
14	87	82	86
15	85	93	92
16	83	98	88

Tabulka č. 3.41: Tabulka počtu tepů

Druhá skupina			
	t		
i	1	2	3
1	70	64	69
2	66	63	61
3	95	82	80
4	78	71	80
5	64	59	65
6	100	88	84
7	86	85	92
8	65	58	67
9	66	77	73
10	90	70	82
11	76	65	74
12	88	77	86
13	84	81	64
14	83	72	86
15	104	99	86

Tabulka č. 3.42: Tabulka počtu tepů

4. KONTINGENČNÍ TABULKY

χ^2 test (neparametrická metoda) se používá k zjištění, zda mezi dvěma znaky existuje prokazatelný výrazný vztah. Znaky mohou být:

- kvalitativní,
- diskrétní kvantitativní,
- spojitě kvantitativní, ale s hodnotami sloučenými do skupin.

Máme-li dva takové znaky, uspořádáme data do kontingenční tabulky. Kategorie jednoho znaku určují řádky a kategorie druhého znaku sloupce. Jednotlivá pozorování jsou zařazena do příslušné buňky kontingenční tabulky podle hodnot daných dvou znaků. Pokud jeden ze znaků má r kategorií a druhý znak má s kategorií, dostáváme kontingenční tabulku typu $r \times s$. Kontingenční tabulku typu 2×2 nazýváme čtyřpolní tabulka. Kontingenční tabulky umožňují testování různých hypotéz. Uvedeme dále tři obvykle testované hypotézy:

1. hypotézu o nezávislosti
2. hypotézu homogenity (shodnosti struktur)
3. hypotézu o symetrii.

4.1 TEST HYPOTÉZY O NEZÁVISLOSTI

Na prvcích jediného souboru sledujeme dva znaky. Naším cílem je testovat nulovou hypotézu o nezávislosti sledovaných znaků, tj.

H_0 : náhodné veličiny X (1. znak) a Y (2. znak) jsou nezávislé

H_1 : náhodné veličiny X a Y nejsou nezávislé

Vzhledem k tomu, že platí následující věta: Veličiny X a Y jsou nezávislé tehdy a jen tehdy, platí-li $p_{ij} = p_i p_{.j}$, $i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, c$.

Hypotézu nezávislosti můžeme přepsat do tvaru:

$$H_0: p_{ij} = p_i p_j, i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, c.$$

..

Za platnosti hypotézy H_0 má statistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i.} n_{.j}}{n} \right)^2}{\frac{n_{i.} n_{.j}}{n}}$$

asymptoticky rozdělení χ^2 s počtem stupňů volnosti $(r-1)(c-1)$. Vzorec lze přepsat do následujícího tvaru

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{n_{ij}^2}{n_{i.} n_{.j}} - n.$$

Hypotézu H_0 o nezávislosti veličin X a Y zamítneme v případě, že

$$\chi^2 \geq \chi_{(r-1)(c-1)}^2(\alpha).$$

Ke shodě s limitním rozdělením se vyžaduje, aby všechny teoretické četnosti

$\frac{n_{i.} n_{.j}}{n}$ byly větší než 5. Obvykle se požaduje, aby nejméně 80 procent

teoretických četností bylo větších než 5 a všechny teoretické četnosti výskytu byly větší než 1. Pokud tato podmínka není splněna, spojují se obvykle některé řádky nebo sloupce. Toto nejde u tzv. čtyřpolních tabulek, u nich se používá Fisherův faktoriálový test.

Řešené příklady

Příklad 4.1.1: V náhodném výběru padesáti obézních dětí ve věku 6-14 let byla u každého dítěte zjištěna obezita u matky a obezita u otce. Zajímá nás, zda obezita rodičů spolu souvisí ($\alpha = 0,05$).

	Otec		
Matka	Obézní	Neobézní	Celkem
Obézní	15	9	24
Neobézní	7	19	26
Celkem	22	28	50

Tabulka č. 4.1: Tabulka obezity

Řešení:

Nulová hypotéza pro tuto čtyřpolní tabulku říká, že obezita rodičů spolu nesouvisí, alternativní hypotéza je, že obezita rodičů spolu souvisí. Testovou statistiku tedy spočteme:

$$\chi^2 = 50 \cdot \frac{(15 \cdot 19 - 9 \cdot 7)^2}{24 \cdot 22 \cdot 26 \cdot 28} = 6,41$$

Z tabulek zjistíme, že kritickou hodnotou χ^2 testu pro $df = 1$ stupeň volnosti a hladinu $\alpha = 0,05$ je 3,84.

Závěr: Vidíme tedy, že nulovou hypotézu zamítneme na 5% hladině, takže obezita rodičů spolu významně souvisí.

Příklad 4.1.2: U 400 studentů vysoké školy byl zjišťován navštěvovaný ročník a míra konzumace alkoholu. Testujte nulovou hypotézu, že mezi navštěvovaným ročníkem a mírou konzumace alkoholu není žádná závislost. Použijte 5 % hladinu významnosti.

	Prvák	Druhák	Třeták	Čtvrták	g_i
Piják	29 $\frac{131 \cdot 116}{400} = 38$	41 34,1	33 31,4	28 27,5	131
Konzument	32 39,4	29 35,4	36 32,6	39 28,6	136
Abstinent	55 38,6	34 34,6	27 31,9	17 27,9	133
h_j	116	104	96	84	400

Tabulka č. 4.2: Tabulka ročníků s řešením

Řešení:

$$f_{11} = \frac{g_1 h_1}{N} = \frac{131 \cdot 116}{400} = 37,99 \cong 38 - \text{očekávaná četnost}$$

$$\begin{aligned} \chi^2 \cong & \frac{(29-38)^2}{38} + \frac{(41-34,1)^2}{34,1} + \frac{(33-31,4)^2}{31,4} + \frac{(28-27,5)^2}{27,5} + \frac{(32-39,4)^2}{39,4} + \frac{(29-35,4)^2}{35,4} + \\ & + \frac{(36-32,6)^2}{32,6} + \frac{(39-28,6)^2}{28,6} + \frac{(55-38,6)^2}{38,6} + \frac{(34-34,6)^2}{34,6} + \frac{(27-31,9)^2}{31,9} + \frac{(17-27,9)^2}{27,9} \\ \chi^2 \cong & 22,2911 \end{aligned}$$

Provedme test nezávislosti v kontingenční tabulce:

1. H_0 : Mezi navštěvovaným ročníkem a mírou konzumace alkoholu není závislost.
2. H_1 : Mezi navštěvovaným ročníkem a mírou konzumace alkoholu je závislost.
3. $p = 0,05$
4. Kritická hodnota $\chi_p^2((m-1)(n-1)) = \chi_{0,05}^2(2.3) = 12,5916$
5. Hodnota testovacího kritéria $\chi^2 \cong 22,2911$
6. Rozhodnutí $\chi^2 > \chi_{0,05}^2(6) \Rightarrow H_0$ zamítáme.

Závěr: Na hladině významnosti 5 % je mezi navštěvovaným ročníkem a mírou konzumace alkoholu závislost.

Příklad 4.1.3: U studentů zanechávajících studia byl zjišťován důvod zanechání studia a typ absolvované střední školy. Výsledek je uveden v kontingenční tabulce:

		Důvod zanechání studia				g _i
		obtížnost studia	zdravotní stav	sociální důvody	ostatní	
Typ školy	gymnázium	5	35	10	0	50
	SEŠ	30	5	0	5	40
	ostatní	10	0	0	0	10
h _j		45	40	10	5	100

Tabulka č. 4.3: Tabulka důvodu zanechání studia

Na 5 % hladině významnosti otestujte nezávislost v kontingenční tabulce

Řešení:

$$68,65 \cong \chi^2$$

Závěr: $\chi^2_{0,05}(6) = 12,5916 < 68,65 \cong \chi^2 \Rightarrow$ stupeň závislosti mezi druhem absolvované střední školy a důvodem zanechání studia je velmi významný.

Neřešené příklady

Příklad 4.1.4: U 100 zaměstnanců podniku, kteří rozvázali pracovní poměr výpovědí v minulém roce, byl zjišťován hlavní důvod jejich nespokojenosti se zaměstnáním v podniku. Na základě údajů v tabulce zjistěte vztah mezi

dosaženým vzděláním a důvodem nespokojenosti zaměstnance testem nezávislosti v kontingenční tabulce na 5 % hladině významnosti.

		Důvod nespokojenosti					celkem
		druh práce	finanční podmínky	pracovní prostředí	spolu-pracovníci	jiný důvod	
Vzdělání	základní	13	4	3	1	9	30
	vyučen	13	5	3	2	7	30
	středoškolské	1	8	4	5	1	20
	vysokoškolské	2	13	0	2	3	20
celkem		30	30	10	10	20	100

Tabulka č. 4.4: Tabulka důvodů nespokojenosti

Příklad 4.1.5: U 6800 mužů byla zjišťována barva očí a barva vlasů. Zjistěte, zda jsou to nezávislé znaky. Výsledky jsou uvedeny v tabulce (Anděl, 2005, str. 282):

Barva očí	Barva vlasů				celkem
	světlá	kaštanová	černá	zrzavá	
světle modrá	1768	807	189	47	2811
šedá nebo zelená	946	1387	746	53	3132
tmavohnědá	115	438	288	16	857
celkem	2829	2632	1223	116	6800

Tabulka č. 4.5: Tabulka barvy očí a vlasů

Příklad 4.1.6: Zjistěte zda jsou na sobě závislé vzdělání populace a plánované těhotenství podle uvedených údajů v následující tabulce:

Vzdělání	Plánované		celkem
	Ne	Ano	
základní	20	14	34
střední	16	31	47
VŠ	5	13	18
celkem	41	58	99

Tabulka č. 4.6: Tabulka vzdělání

Příklad 4.1.7: Při policejní kontrole bylo na různých místech náhodně zastaveno 110 osobních automobilů, u nichž policisté zaznamenali stáří a počet závad. Ověřte, zda stáří a počet závad na vozidlech jsou na sobě závislé:

Počet závad (xk)		Věk (yj)			X MR
		< 1	1 - 2	> 2	
0	pozorováno	30	14	5	49
	očekáváno	26,7	13,4	8,9	
1	pozorováno	18	10	4	32
	očekáváno	17,5	8,7	5,8	
≥ 2	pozorováno	12	6	11	29
	očekáváno	15,8	7,9	5,3	
Y MR		60	30	20	110

Tabulka č. 4.7: Tabulka stáří a počet závad

Příklad 4.1.8: V tabulce jsou uvedeny data o postavě snoubenců, předtím než uzavřeli sňatek. Rozhodněte zda typy postav ženicha a nevěsty jsou na sobě závislé (na 5 % hladině významnosti).

	Ženich			
Snoubenka	Štíhlý	Vysoký	Plnoštíhlý	Celkem
Štíhlá	5741	4567	3254	13562
Vysoká	6447	4721	4788	15956
Plnoštíhlá	6889	7441	7589	21919
Celkem	19077	16729	15631	51437

Tabulka č. 4.8: Tabulka typů postav

Příklad 4.1.9: Zkoumá se, zda chuť Y daného druhu vína závisí na materiálu sudu X, ve kterém víno zráló. Materiál X je nominální náhodná veličina. Chuť vína se bere jako kvalitativní ordinální (pořadová) náhodná veličina (Jaroš, 1998, str. 236).

X \ Y	Podprůměrná	Průměrná	nadprůměrná	$n_{i.}$
dřevo	100	118	51	269
sklo	32	73	16	121
kov	151	159	103	413
plast	124	130	40	294
$n_{.j}$	407	480	210	1097

Tabulka č. 4.9: Tabulka hodnocení

Je třeba rozhodnout, zda je chuť určitého druhu vína nějak ovlivněna materiálem sudu, ve kterém víno zráló.

Příklad 4.1.10: Rozhodněte testem na hladině významnosti 10 %, zda průběh choroby závisí na tom, zda byl či nebyl pacient proti této chorobě očkován a to na základě uvedené tabulky výsledků sledování průběhu choroby u 37 náhodně vybraných pacientů (Jaroš, 1998, str. 233).

X \ Y	lehký	těžký
ano	8,27	8,73
ne	9,73	10,27

Tabulka č. 4.10: Tabulka průběhu choroby

4.2 TEST HOMOGENITY MULTINOMICKÝCH ROZDĚLENÍ

Někdy nazýván též test o shodnosti struktury. Testujeme shodnost jednoho ze sledovaných znaků za různých podmínek, které vyjadřují kategorie druhého znaku. Hypotéza H_0 zní:

H_0 : pravděpodobnosti $q_{i1}, \dots, q_{ic}$ nezávisí na řádkovém indexu i
(tzn. že všechny řádky matice q_{ij} jsou stejné)

Pravděpodobnosti $q_{i1}, \dots, q_{ic}$ přísluší relativním marginálním četnostem v i -tém řádku kontingenční tabulky $\frac{n_{i1}}{n_i}, \dots, \frac{n_{ic}}{n_i}$, přičemž platí $q_{i1} + \dots + q_{ic} = 1$ a dále předpokládáme, že marginální řádkové četnosti n_i jsou předem stanoveny.

Za platnosti hypotézy H_0 má statistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i.} n_{.j}}{n} \right)^2}{\frac{n_{i.} n_{.j}}{n}}$$

asymptoticky rozdělení χ^2 s počtem stupňů volnosti $(r-1)(c-1)$. Vzorec lze přepsat do následujícího tvaru

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{n_{ij}^2}{n_{i.} n_{.j}} - n.$$

Hypotézu H_0 o homogenitě multinomických rozdělení zamítneme v případě, že $\chi^2 \geq \chi_{(r-1)(c-1)}(\alpha)$.

Řešené příklady

Příklad 4.2.1: Očkování proti chřipce se zúčastnilo 460 dospělých, z nichž 240 dostalo očkovací látku proti chřipce (očkováná skupina) a 220 dostalo placebo (kontrolní skupina). Na konci experimentu onemocnělo 100 lidí chřipkou. 20 z nich bylo z očkové skupiny a 80 z kontrolní skupiny. Pozorované četnosti jsou v tabulce:

Chřipka	Očkování		Placebo		Celkem	
Ano	20	8,3 %	80	36,4 %	100	21,7 %
Ne	220	91,7 %	140	63,6 %	360	78,3 %
Celkem	240	100,0 %	220	100,0 %	460	100,0 %

Tabulka č. 4.11: Tabulka četností

Je to dostatečný důkaz, že očkovací látka byla účinná, nebo mohly rozdíly mezi očkovanou a kontrolní skupinou vzniknout náhodou? Zvolme velmi přísnou hladinu významnosti $\alpha = 0,001$.

Řešení:

Nulová hypotéza o shodnosti struktury ve čtyřpolní tabulce říká, že procento výskytu chřipky je v očkové a kontrolní skupině stejné.

Dále najdeme pro každé políčko v tabulce tzv. *očekávanou četnost*. To je četnost, kterou bychom měli očekávat, kdyby nulová hypotéza platila.

Při pohledu na naši tabulku vidíme, že ze 460 dospělých, kteří podstoupili experiment dostalo chřipku 100 jedinců (tj. něco přes 20 %). Pokud měla očkovací látka i placebo stejný účinek, potom bychom očekávali, že procento těch, kteří onemocněli chřipkou, bude v obou skupinách stejné (tj. něco přes 20 %

z léčené skupiny a něco přes 20 % z kontrolní skupiny). Jinými slovy, neexistují-li žádné rozdíly mezi očkovací látkou a placebem, potom $(100/460) \cdot 240 = 52,17$ dospělých v léčené skupině a $(100/460) \cdot 220 = 47,83$ dospělých v kontrolní skupině by mělo dostat chřipku.

Podobně bychom očekávali, že pokud neexistuje žádný rozdíl mezi očkovací látkou a placebem, pak $(360/460) \cdot 240 = 187,83$ dospělých v léčené skupině a $(360/460) \cdot 220 = 172,17$ dospělých v kontrolní skupině by chřipce uniklo.

Vidíme tedy, že očekávané četnosti můžeme pro každé políčko kontingenční tabulky spočítat podle obecného vztahu

$$\text{očekávaná četnost} = (\text{součet v řádce} \times \text{součet ve sloupci}) / \text{celkový počet pozorování}$$

Proto by naše očekávané četnosti měly vypadat jako v následující tabulce (všimněte si, že součty očekávaných četností v řádcích i sloupcích jsou stejné jako u pozorovaných četností uvedených výše).

Chřipka	Očkování		Placebo		Celkem	
Ano	52,17	21,7 %	47,83	21,7 %	100	21,7 %
Ne	187,83	78,3 %	172,17	78,3 %	360	78,3 %
Celkem	240	100,0 %	220	100,0 %	460	100,0 %

Tabulka č. 4.12: Tabulka řešení

Nyní můžeme porovnat pozorované a očekávané četnosti výskytu. Pokud mezi očkováním a chřipkou neexistuje žádný vztah, potom by se pozorované a očekávané četnosti výskytu měly navzájem blížit a případná odchylka by byla způsobena pouze náhodou. Nejlepší způsob, jak zjistit rozdíly mezi pozorovanými a očekávanými četnostmi výskytu, je spočítat χ^2 statistiku podle obecného vzorce, kde tentokrát sčítáme přes všechna políčka v tabulce.

Pro náš příklad vyjde:

$$\chi^2 = \sum [(\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost})^2 / \text{očekávaná četnost}]$$

$$= \frac{(20 - 52,17)^2}{52,17} + \frac{(80 - 47,83)^2}{47,83} + \frac{(220 - 187,83)^2}{187,83} + \frac{(140 - 172,17)^2}{172,17} = 53,0$$

Pro interpretaci této χ^2 statistiky potřebujeme znát ještě počet stupňů volnosti (df). Pro kontingenční tabulky platí:

$$df = (\text{počet řádků} - 1) \cdot (\text{počet sloupců} - 1)$$

V našem příkladu jsou dva řádky ($r = 2$) a dva sloupce ($s = 2$), takže

$$df = (2 - 1)(2 - 1) = 1.$$

Vypočtenou testovou statistiku χ^2 porovnáme s kritickou hodnotou, kterou je kvantil $\chi^2_{1-\alpha}(df)$ rozdělení χ^2 o (df) stupních volnosti. Hodnota 53,0 je větší než 10,83, což je kritická hodnota pro $df = 1$ a hladinu významnosti 0,1 % $\alpha = 0,001$.

Závěr: To znamená, že pravděpodobnost, že by tak velké pozorované procentuální rozdíly ve výskytu chřipky mohly vzniknout jen náhodou, pokud by neexistovaly žádné skutečné rozdíly mezi očkovací látkou a placebem, je menší než 0,1 %. Proto můžeme učinit závěr, že očkovací látka je účinnější než placebo.

Příklad 4.2.2: Kontingenční tabulka ukazuje výsledky velmi slavného lékařského experimentu ze čtyřicátých let, který se zabýval účinkem streptomycinu při léčbě plicní tuberkulózy. Údaje z radiologického hodnocení po 6 měsících byly porovnány s tím, zda pacient patřil do léčené, nebo kontrolní skupiny. Existuje vztah mezi léčbou a výsledkem ($\alpha = 0,01$)?

Radiologické hodnocení	Streptomycin	Kontrolní	Celkem
Významné zlepšení	28	4	32
Střední / malé zlepšení	10	13	23
Beze změn	2	3	5
Střední / malé zhoršení	5	12	17
Významné zhoršení	6	6	12
Smrt	4	14	18
Celkem	55	52	107

Tabulka č. 4.13: Tabulka výsledků léčby

Řešení:

Pokud mezi skupinami není žádný rozdíl, dostaneme očekávané četnosti, které jsou uvedeny v závorkách v tabulce

Radiologické hodnocení	Streptomycin		Kontrolní		Celkem
Významné zlepšení	28	(16,45)	4	(15,55)	32
Střední / malé zlepšení	10	(11,82)	13	(11,18)	23
Beze změn	2	(2,57)	3	(2,43)	5
Střední / malé zhoršení	5	(8,74)	12	(8,26)	17
Významné zhoršení	6	(6,17)	6	(5,83)	12
Smrt	4	(9,25)	14	(8,75)	18
Celkem	55	(55)	52	(52)	107

Tabulka č. 4.14: Tabulka řešení

Dále spočteme testovou statistiku

$$\chi^2 = 26,96, \quad df = (6-1)(2-1) = 5$$

Závěr: Pro 5 stupňů volnosti je 1 % kritická hodnota rovna kvantilu $\chi^2_{1-0,01}(5) = 15,09$. Hodnota vypočtené testové statistiky $\chi^2 = 26,96$ značně překračuje kritickou hodnotu 15,09, a proto můžeme učinit závěr, že na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ existuje dostatečný důkaz vztahu mezi léčbou a rentgenovým výsledkem

Příklad 4.2.3: V jižní Anglii provedli studii, která měla za úkol prokázat, zda je procentuální zastoupení krevních skupin na celém území homogenní či nikoli. V oblasti Daltona bylo náhodně vybráno 100 osob, Brightone 125 osob a Leendthu 253 osob. Výsledky jsou uvedené v tabulce:

Oblast	Krevní skupina				celkem
	A	B	0	AB	
Dalton	33	6	56	5	100
Brightone	54	14	52	5	125
Leendth	98	35	115	5	253
celkem	185	55	223	15	478

Tabulka č. 4.15: Tabulka krevních skupin

Řešení:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{n_{ij}^2}{n_{i.} n_{.j}} - n = 10,45$$

Závěr: $\chi^2 = 10,45 < \chi^2_6(0,05) = 12,59$, nemůžeme tedy zamítnout hypotézu, že rozdělení krevních skupin je ve všech třech oblastech stejné.

Neřešené příklady

Příklad 4.2.4: Byl proveden pokus na růst setých travin, na které působily jiné intenzity slunečních paprsků. Zjistěte, homogenitu rychlosti růstu travin v závislosti na intenzitě slunečního záření na hladině 5 %.

sluneční záření	Druh travin (růst v mm/týden)		
	ostřice	kostřava	metlice trstnatá
intenzivní	10	14	7
normální	24	12	18
slabé	14	12	9
nepatrné	5	8	7

Tabulka č. 4.16: Tabulka rychlosti růstu

Příklad 4.2.5: Byl proveden průzkum mezi lidmi, kteří kouří a jejich dosaženým stupněm vzdělání. Na hladině významnosti 1 % zjistěte homogenitu kouření vzhledem ke vzdělání.

kouření/vzdělání	základní	odborné	střední	VŠ
nekuřák	14	55	55	73
bývalý kuřák	11	28	44	42
kuřák	14	24	24	17
silný kuřák	78	189	175	106

Tabulka č. 4.17: Tabulka kouření

Příklad 4.2.6: V průběhu sociologického výzkumu byla dotázána skupina 420 lidí na problematiku životního prostředí. Zjistěte, zda se liší postoje jednotlivých věkových skupin lidí k životnímu prostředí podle následující tabulky:

		věk				celkem
		nedospělí	mladí lidé	produktivní věk	postproduktivní věk	
význam	prioritní	12	28	26	6	72
	vysoký	18	23	35	26	102
	průměrný	18	15	12	6	51
	malý	2	3	6	9	20
	žádný	0	7	12	21	40
celkem		50	76	91	68	285

Tabulka č. 4.18: Tabulka postojů k životnímu prostředí

Příklad 4.2.7: Na třech skupinách, ve kterých bylo 100, 120 a 80 lidí, se dělal průzkum závislosti na alkoholu z lidí z úplných, neúplných rodin a sirotků. Zjistěte z následující tabulky homogenitu mezi závislostí a rodinným zázemím na hladině 5 %.

	Neúplná rodina		
Alkohol	ano	ne	sirotci
silně závislý	12	24	14
středně	24	31	28
slabě	35	30	21
vůbec	29	35	17

Tabulka č. 4.19: Tabulka typů rodin

Příklad 4.2.8: V jedné zemi se sledovalo počet spáchaných trestných činů v závislosti na výšce IQ daného člověka. Z následující tabulky určete homogenitu těchto dvou veličin.

	IQ			
Rejstřík	50 - 80	80 - 100	100 - 150	>150
vícekrát trestaný	14	21	78	12
2 x trestaný	17	25	34	54
1 x trestaný	21	27	26	28
netrestaný	47	34	22	12

Tabulka č. 4.20: Tabulka trestanosti

Příklad 4.2.9: V České republice provedli studii, která měla za úkol prokázat, zda je počet mrtvých novorozených mláďat u psovitých šelem v zoologických zahradách na celém území homogenní či nikoli. Výsledky jsou uvedené v tabulce:

	Počet mláďat za rok			
Zoologická zahrada	hyena	vlci	liška	mýval
Hluboká n/Vlt.	2	1	2	2
Praha	3	1	2	1
Hrade Králové	0	2	3	3
Brno	4	2	4	1

Tabulka č. 4.21: Tabulka mláďat

Příklad 4.2.10: Po provedeném průzkumu ve Slovenské republice, bylo sledováno ženy v různém věku s depresemi v různých oblastech. Zjistěte, zda deprese u žen je na celém území homogenní.

	Kraje				
Věk	Bratislavský	Žilinský	B - B	Košický	Trenčianský
do 20 let	21	11	25	33	5
20 - 30	41	24	14	24	30
40 - 50	26	27	30	62	22
nad 50 let	12	20	24	9	18

Tabulka č. 4.22: Tabulka depresí

4.3 TEST HYPOTÉZY O SYMETRII

Testem symetrie pro čtyřpolní tabulku je *McNemarův test*. Budeme testovat hypotézu:

$$H_0: p_{ij} = p_{ji} \text{ pro všechny dvojice } (i, j), i, j = 1, 2, \dots, c.$$

Jde o zobecnění případu 2x2. McNemarův test je tedy speciálním případem tohoto testu symetrie. Testová statistika má v tomto případě tvar:

$$\chi^2 = \sum_{i < j} \frac{(n_{ij} - n_{ji})^2}{n_{ij} + n_{ji}}$$

Za platnosti H_0 (hypotéza symetrie) má statistika χ^2 asymptoticky χ^2 rozdělení o $c(c - 1)/2$ stupních volnosti. Hypotézu symetrie zamítneme, jestliže $\chi^2 \geq \chi^2_1(\alpha)$.

Řešené příklady

Příklad 4.3.1: Předpokládejme, že máme studii se srovnatelnými skupinami nebo s podvojnými případy, kde výstupní hodnota má dvě kategorie - úspěch/neúspěch. Například pozorujeme náhodný výběr 18 pacientů, kteří byli léčeni dvěma

různými antihypertenzívy A a B . Každý pacient dostával po dobu jednoho měsíce lék A a po odeznění jeho případných účinků dostával po dobu jednoho měsíce lék B .

Výsledek byl klasifikován jako úspěch nebo neúspěch. Za úspěch byl pokládán pokles krevního tlaku alespoň o 15 mm Hg. Každý jiný výsledek byl považován za neúspěch. Bylo by zásadně nesprávné uspořádat výsledky do tabulky způsobem uvedeným v tabulce a provést výpočet testové statistiky χ^2 .

Výsledky experimentu - nesprávné uspořádání			
	Lék A	Lék B	Celkem
Úspěch	10	4	14
Neúspěch	8	14	22
Celkem	18	18	36

Tabulka č. 4.23: Tabulka druhu léků

Řešení: Nyní nemůžeme provést χ^2 test jako v čtyřpolní tabulce, protože těchto 36 pozorování není nezávislých. Každá osoba přispívá hodnotami do dvou políček. Abychom mohli analyzovat údaje, potřebujeme uspořádat výsledky do jiné podoby:

Výsledky experimentu - správné uspořádání			
	Lék B		
Lék A	Úspěch	Neúspěch	Celkem
Úspěch	1	3	4
Neúspěch	9	5	14
Celkem	10	8	18

Tabulka č. 4.24: Tabulka řešení

Zformulujeme nulovou a alternativní hypotézu:

H_0 : Procenta úspěšnosti jsou u obou léků shodná

H_1 : Procenta úspěšnosti nejsou u obou léků shodná.

Předpokládáme, že nulová hypotéza je pravdivá, a ptáme se, co bychom očekávali, že dostaneme. Zaměříme se na 12 pacientů, kteří vykazovali u každého léku jiné výsledky.

Pokud by byly léky stejně účinné, očekávali bychom, že těchto 12 pacientů bude rozděleno shodně (6 u každého léku) na ty, kteří byli neúspěšní při použití léku A a byli úspěšní při použití léku B , a na ty, kteří byli neúspěšní při použití léku B a úspěšní při A .

V našem případě jsme v těchto dvou políčkách pozorovali hodnoty 9 a 3 a očekávali 6 a 6. Potom χ^2 test můžeme sestavit pro pozorované a očekávané četnosti jako:

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{pozorovane} - \text{ocekavane})^2}{\text{ocekavane}} = \frac{(9-6)^2}{6} + \frac{(3-6)^2}{6} = 3$$

Přičemž $df = 1$.

Zvolíme-li hladinu významnosti $\alpha = 0,05$, potom příslušná kritická hodnota je rovna kvantilu

$$\chi^2_{1-0,05}(1) = 3,84$$

Závěr: Protože $3,00 < 3,84$, nemáme dostatečný důkaz pro zamítnutí nulové hypotézy. Učiníme tedy závěr, že na základě zkoumaných dat nelze prokázat rozdíl v působení obou léků.

Příklad 4.3.2: Znamý anglický přírodovědec F. Galton sledoval v 1000 případech barvu očí otce a jeho syna. Barva očí je zakódována následujícím způsobem(Anděl, 2005, str. 298):

- 1 – světle modrá
- 2 – modrozelená nebo šedá
- 3 – tmavě šedá nebo světle hnědá
- 4 – tmavě hnědá

Barva očí syna	Barva očí otce				celkem
	1	2	3	4	
1	194	70	41	30	335
2	83	124	41	36	284
3	25	34	55	23	137
4	56	36	43	109	224
celkem	358	264	180	198	1000

Tabulka č. 4.25: Tabulka barvy očí

Řešení:

Vypočteme $\chi^2 = 19,56$. Jelikož je tato hodnota větší než $\chi^2_6(0,05) = 12,59$, zamítáme hypotézu symetrie

Závěr: Alespoň pro jednu dvojici (i, j) je tedy pravděpodobnost P (otec má barvu očí i, syn má barvu očí j) jiná než pravděpodobnost P (otec má barvu očí j, syn má barvu očí i).

Příklad 4.3.3: Při malém průzkumu, byl sledován sexuální život manželských dvojic před a po narození dítěte. Uvedené výsledky jsou v tabulce:

před/po	Neuspokojivý	uspokojivý	velmi dobrý	Suma
neuspokojivý	24	9	6	39
uspokojivý	6	16	11	33
velmi dobrý	1	8	20	29
Suma	31	33	37	101

Tabulka č. 4.26: Tabulka spokojenosti sex. života

Zjistěte, zda má narození potomka vliv na sexuální život na hladině 5 % významnosti.

Řešení:

$$\chi^2 = (9-6)^2 / (9+6) + (6-1)^2 / (6-1) + (11-8)^2 / (11-8) = 4,64$$

$$df = k(k-1)/2 = 3$$

Závěr: $\chi^2 = 4,64 < \chi^2_3(0,05) = 7,81$, nelze zamítnout H_0 , vliv dítěte nelze na zvolené hladině významnosti prokázat.

Neřešené příklady

Příklad 4.3.4: Při výuce anglického jazyka byla použita speciální metoda pro zrychlení reakce v konverzaci. Tato metoda byla aplikována na vzorek 100 studentů a posléze vyhodnocena do tabulky:

		Po speciální metodě		Celkem
		Ihned	průměrně	
Před speciální metodou	ihned	24	28	52
	průměrně	12	36	48
Celkem		36	64	100

Tabulka č. 4.27: Tabulka hodnocení

Příklad 4.3.5: Byl prováděn pokus účinnosti barevných obrázků. K jeho prověření byl užit test sestavený ze 7 otázek. Ten byl pak předložen náhodně vybraným studentům postupně dvakrát ve dvou situacích 1) bez jakékoli pomůcky, 3) s možností používat webové stránky s dynamickými obrázky. Zde jsou výsledky:

	bez užití stránek	
s užitím stránek	nesprávné odpovědi	správné odpovědi
nesprávné odpovědi	32	8
správné odpovědi	26	18

Tabulka č. 4.28: Tabulka správnosti

Zjistěte jestli je přínos dynamických obrázků k lepšímu pochopení statisticky významný na hladině 5 % významnosti.

Příklad 4.3.6: Má se zjistit, zda požití alkoholu ovlivňuje schopnost správného projetí určité trasy. K tomuto účelu byla vybrána skupina 100 řidičů, kteří měli za úkol projet vozidly uvedenou trasu. Po požití alkoholu dostali stejný úkol. Výsledky jsou uvedené v tabulce:

Před/po	Bezchybně	Chybně	celkem
Bezchybně	45	35	80
Chybně	15	5	20
Celkem	60	40	100

Tabulka č. 4.29: Tabulka správného projetí tras

Příklad 4.3.7: Průzkum, provedený u čtenářů časopisů A, B, C, současně zjišťoval jejich vzdělání – ZŠ, SŠ a VŠ. Z výsledků, uvedených v tabulce, rozhodněte o tom, zda volba časopisu závisí na vzdělání.

Vzdělání/časopis	A	B	C
ZŠ	75	75	50
SŠ	40	70	40
VŠ	35	5	10

Tabulka č. 4.30: Tabulka vzdělání

Příklad 4.3.8: Výzkumná agentura zjišťovala u 128 náhodně vybraných osob, zda při nástupu nové vlády jí důvěřovali a zda po její roční vládě jí stále důvěřují. Lze na základě získaných údajů, uvedených v tabulce, rozhodnout o tom, zda zjištěná změna názorů je významná?

Dřívější názor/Nynější názor	důvěřuji	nedůvěřuji
důvěřuji	48	26
nedůvěřuji	14	40

Tabulka č. 4.31: Tabulka důvěry

Příklad 4.3.9: Obuvnická firma provedla průzkum mezi potenciálními zákazníky. Jedním z problémů průzkumu bylo zjistit, zda existuje souvislost mezi tím, jak respondenti posuzují své pocity při nošení obuv a mezi jejich postojem ke změně firmy. Odpovědi 400 náhodně vybraných respondentů jsou v tabulce:

Pocity/Změna	Změním	Nevím	Nezměním
Dobré	16	40	144
Ani dobré ani špatné	0	12	68
Špatné	88	8	24

Tabulka č. 4.32: Tabulka průzkumu

Příklad 4.3.10: U náhodně vybraných pacientů trpících určitou chorobou bylo zjišťováno, zda proti ní byli očkovaní a jaký průběh choroba má při očkování a

bez očkování. Výsledky jsou v tabulce. Posuďte, zda průběh choroby závisí na tom, zda pacient byl očkovan.

Pacient/Průběh	lehký	těžký
Očkovan	60	12
Neočkovan	24	66

Tabulka č. 4.33: Tabulka průběhu choroby

5. VÝSLEDKY

1. PARAMETRICKÉ TESTY

1.1 JEDNOVÝBĚROVÝ T-TEST

1.1.1: Na hladině významnosti 1 % je dostatečně zřejmé, že průměrný obsah nikotinu v cigaretách nepřesahuje 3,5 mg. Výrobce neporušuje své reklamní tvrzení.

1.1.2: $T_{vyp} < T_{tab} = 3,747$, hypotézu o tom, že automat nemá systematickou odchylku od požadované hodnoty, nezamítneme.

1.1.3: $T_{vyp} > T_{tab} \Rightarrow H_0$ zamítáme na úrovni $\alpha = 0,05$ i na $\alpha = 0,01$. Hmotnost dávky premixu v 50kg směsi se vysoce významně liší od požadované normy.

1.1.4: Protože $T_{vyp} = 5,93 > T_{tab} = 2,265$ (vypočtená hodnota testového kritéria t leží v kritickém oboru). Nulovou hypotézu $H_0: \mu = \mu_0$ nezamítáme, výsledky jsou v souladu s předpokládanou výrobou.

1.1.5: $T_{vyp} = 3,708 > T_{tab\ 0,05}(26) = 2,056$, $T_{tab\ 0,01}(26) = 2,779$, tudíž H_0 se zamítá na $\alpha = 0,05$ i na $\alpha = 0,01$, obsah lepku se významně liší od normy

1.1.6: $T_{vyp} = 1,49 < T_{tab\ 0,05}(11) = 2,201$, tudíž se H_0 nezamítá na $\alpha = 0,05$, prováděná srážka je správná

1.1.7: $T_{vyp} = 7,96 > T_{tab\ 0,05}(99) = 1,98$, tudíž se H_0 zamítá na $\alpha = 0,05$, mlékárna počítá skutečně nižší tučnost mléka, než ve skutečnosti je.

1.1.8: $T_{vyp} = 6,529 > T_{tab\ 0,05}(59) = 2,0$, $T_{tab\ 0,01}(59) = 2,66$, tudíž se H_0 zamítá na $\alpha = 0,05$ i $\alpha = 0,01$, průměrná doba provedení operace se shoduje s normou

1.1.9: $T_{vyp} = 3,9456 > T_{tab\ 0,05}(8) = 2,306$, $T_{tab\ 0,01}(8) = 3,355$, tudíž se H_0 zamítá na $\alpha = 0,05$ i $\alpha = 0,01$, průměrná hladina kreatininu v krvi králíků činí 1,2 %

1.1.10: $T_{vyp} = 1,033 < T_{tab\ 0,05}(19) = 2,093$, $T_{tab\ 0,01}(19) = 2,861$, tudíž se H_0 zamítá na $\alpha = 0,05$ i $\alpha = 0,01$, nová metoda vyvolá změnu v průměrných výnosech.

1.2 PÁROVÝ T-TEST

1.2.1: $T_{vyp} > T_{tab\ 0,05(14)} = 2,145 \rightarrow H_0$ zamítáme, rozdíly jsou významné

1.2.2: $T_{vyp} < T_{tab\ 0,05(9)}$ - nulovou hypotézu nezamítáme, výkony studentů v obou částech zkoušky jsou vyrovnané

1.2.3: $T_{tab\ 0,05(2),7} = 2,365 > T_{vyp}$ - zamítáme H_0 , je rozdíl v účinku přípravků A a B

1.2.4: Protože $|T_{vyp}| = 1,16 < T_{tab\ 0,05}(11) = 2,201$, nelze na základě zjištěných výsledků zamítnout hypotézu, že mezi výsledky standardní a úsporné metody zjišťování nečistot není významný rozdíl.

1.2.5: $T_{vyp} < T_{tab}$, na 5 % hladině významnosti tvar obalu neovlivnil výši prodeje.

1.2.6: $T_{vyp} > T_{tab} \Rightarrow$ zamítáme $H_0: \mu_d = 0$, tedy nulovou hypotézu o neexistujícím rozdílu na hladině $\alpha = 0,01$. Zavedení nové technologie mělo vysoce průkazný vliv na zvýšení výkonu pracovníků.

1.2.7: pro $\alpha = 0,05$: $T_{tab\ 0,975,15} = 2,131$, $T_{vyp} < T_{tab} \rightarrow$ rozdíl není průkazný na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

1.2.8: Protože $|T_{vyp}| = 0,745 < T_{tab\ 0,05(5)} = 2,571$ (vypočtená hodnota testového kritéria nepadla do kritického oboru), nelze na základě zjištěných výsledků zamítnout hypotézu, že mezi oběma metodami měření kompresního tlaku není významný rozdíl.

1.2.9: $T_{tab\ 0,975(7)} = 2,365$, $T_{vyp} = 3,31$. Testová statistika T neleží v oboru přijetí. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ se zamítá.

1.2.10: Pro $n_1 = n_2 = n = 10$ je $\bar{d} = 0,09$, $T_{vyp} = 0,927$, $|T_{vyp}| \geq T_{tab\ 0,975(9)} = 2,262$.

Na 5 % hladině významnosti tedy nezamítáme hypotézu o stejných středních hodnotách. Pouze konstatujeme, že (pro daný výběr a zvolenou hladinu významnosti) test neprokázal rozdílné výsledky obou analýz.

1.3 DVOUVÝBĚROVÝ T-TEST

1.3.1: $T_{vyp} < T_{tab 0,05(26)} = 2,05 \Rightarrow H_0$ nezamítáme, hmotnosti vlákna se neliší

1.3.2: $T_{vyp} > T_{tab} \Rightarrow$ zamítáme nulovou hypotézu o rovnosti obou populačních průměrů ve prospěch dvoustranné alternativní hypotézy na úrovni $\alpha = 0,05$. Tento rozdíl je pouze významný. Činíme tak na základě většího množství pozorování.

1.3.3: $T_{vyp} > T_{tab} = 2,262$. Hypotézu $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ o rozdílu diet zamítneme.

1.3.4: $T_{vyp} > T_{tab} \Rightarrow$ na obou úrovních $\alpha = 5\%$ i $\alpha = 1\%$, jsme zamítli nulovou hypotézu o žádném vlivu odrůdy na délku klasu.

1.3.5: $T_{vyp} < T_{tab} \Rightarrow H_0$ nezamítáme na úrovni $\alpha = 0,05$. Na této úrovni α nelze považovat pozorované rozdíly za průkazné.

1.3.6: $T_{vyp} < T_{tab} \Rightarrow H_0$ nezamítáme na úrovni $\alpha = 0,05$. Na úrovni $\alpha = 0,05$ nelze považovat materiál z programu PIG za výkonnější ve srovnání s domácím materiálem.

1.3.7: $T_{vyp} = 2,78$, $T_{tab 0,05} = 2,131$, $T_{tab 0,01} = 2,947$, H_0 se zamítá pouze na $\alpha = 0,05$, rozdíl v obsahu škrobu v % není statisticky významný

1.3.8: $T_{vyp} = 2,6253$, $T_{tab 0,05(7)} = 2,365$, $T_{tab 0,01(7)} = 3,499$, H_0 se zamítá pouze na $\alpha = 0,05$, rozdíl v účinku na oba typy rostlin není statisticky významný

1.3.9: $T_{vyp} = -2,567$, $T_{tab 0,05(9)} = 2,262$, $T_{tab 0,01(9)} = 3,25$, H_0 se zamítá pouze na $\alpha = 0,01$, obsah vápníku se významně neliší

1.3.10: $T_{vyp} = 4,0933$, $T_{tab 0,05(14)} = 2,145$, $T_{tab 0,01(14)} = 2,145$, H_0 se zamítá na $\alpha = 0,01$ i $\alpha = 0,05$, cukernatost se od celostátního průměru průkazně nelišila

2. NEPARAMETRICKÉ TESTY

2.1 ZNAMÉNKOVÝ TEST

2.1.1: $Z_{vyp} = 2$, $Z_{tab 0,05;9} = 2$ - nulovou hypotézu nelze zamítnout, tudíž existuje statisticky významný podíl

2.1.2: H_0 vylučujeme, když počet méně četných znamének je stejný či menší než počet kritický. V našem případě $5 > 4$, H_0 nelze zamítnout: nebylo prokázáno, že metoda je lepší (binomického rozdělení, v našem případě s parametry $n=16$ a $p=0,5$).

2.1.3: Protože $m > m_{0,05}$, potvrdíme platnost nulové hypotézy, tzn. že vliv způsobu strouhání na množství sušiny není významný.

2.1.4: $n = 8$, $Y = 6$, $k_1 = 0$, $k_2 = 8$. Protože Z_{vyp} leží mezi tabulkovými hodnotami, nelze pomocí znaménkového testu na základě uvedených dat zamítnout hypotézu, že zvýšení krevního tlaku je stejně pravděpodobné jako jeho pokles.

2.1.5: $Z_{vyp} = 8$. Nemáme důvod k zamítnutí hypotézy H_0 : $d_{0,5} = 0$ a rozdíly výsledků při hodnocení vzorků oběma metodami můžeme považovat za statisticky nevýznamné.

2.1.6: Testové kritérium $u = \frac{2 \cdot 35 - 50}{\sqrt{50}} = 2,83 > u_{0,995} = 2,58$ Hypotézu o hodnotě mediánu tedy zamítáme, neboť rozdíl skutečného ($z = 37$) a předpokládaného ($\frac{n}{2} = 25$) počtu kladných odchylek je natolik velký, že hypotéza o hodnotě mediánu není udržitelná.

2.1.7: Z tabulek pro $n = 8$ a $\alpha = 0,05$ nalezneme $c = 1$, takže $n - c = 7$. Protože $Z_{vyp} = 4 < 7$, hypotézu H nezamítáme.

2.1.8: Počet sáčků ve výběru s hmotností vyšší než 100 gramů je roven $S_+ = 8$ a počet sáčků s hmotností jinou než 100 gramů je 17. Testová statistika $Z_{vyp} = -0,059$. Kritickou hodnotou je $Z_{tab0,975} = 1,96$, takže obor přijetí je vymezen nerovnostmi $-1,96 < z < 1,96$. Nulová hypotéza $\tilde{x} = 100$ není tedy znaménkovým testem zamítnuta. Nelze tedy odmítnout tvrzení, že střední hmotnost sáčku je 100 g.

2.1.9: $Z_{tab0,975} = 1,96$, $-1,96 < z < 1,96$. Nulová hypotéza o shodě hodnocení obou výrobků není znaménkovým testem zamítnuta.

2.1.10: $S^+ = 2$, $\mathcal{W}_{0,05} = \{S^+; S^+ \leq 1 \text{ nebo } S^+ \leq 9\}$. Zjištěná hodnota S^+ je z oboru přijetí H_0 , takže testem nebyla prokázána neplatnost hypotézy, že medián délky vyráběných ocelových tyčí je 10.

2.2 JEDNOVÝBĚROVÝ WILCOXONŮV TEST

2.2.1: Z tabulek naleznete $W_{0,95} = 36 - 5 = 31$. Protože $21 < 31$, hypotézu $H: x_{0,5} = 8 \cdot 10^6$ o počtech kmitů nezamítáme.

2.2.2: $W_{vyp} = 7$ $W_{tab\ 0,05;9} = 5$ $W_{vyp} > W_{tab}$ – nulovou hypotézu nemůžeme zamítnout rozdíly významné nejsou.

2.2.3: Protože $W_{vyp} = \min(7, 14) = 7 > W_{tab\ 0,05} = 2$, nemůžeme zamítnout hypotézu, že mezi oběma metodami měření kompresního tlaku není významný rozdíl.

2.2.4: Jelikož $W_{vyp} = \min(32, 4) = 4 > W_{tab\ 0,05} = 3$, nelze pomocí Wilcoxonova testu na základě uvedených dat zamítnout hypotézu, že zvýšení rychlosti je stejně pravděpodobné jako její snížení.

2.2.5: Protože $W_{vyp} = \min(3, 52) = 3 < W_{tab\ 0,05} = 8$, můžeme zamítnout hypotézu, že na materiálu se systematicky šetří.

2.2.6: $W_{vyp} = 31 > W_{tab\ 0,05(14)} = 21$. Nulovou hypotézu o shodě hodnocení obou výrobků nelze Wilcoxonovým testem zamítnout.

2.2.7: Vzhledem k formulaci hypotéz je testovým kritériem veličina $W^+ = 57,5$. Hypotézu $H_0: \tilde{X} \geq 25$ nezamítáme, přičemž rodina s příjmem 25 byla z analýzy vypuštěna, $W_{0,05}(19) = 54$, $W \leq 54$.

2.2.8: $W = 7$, zatímco kritická hodnota $W_{0,05(11)} = 14$. Hypotézu o stejné kvalitě pracích prostředků na 5 % hladině významnosti zamítáme, protože vypočtená hodnota nepřevyšuje kritickou hodnotu.

2.2.9: Protože $W = \min(26,5; 18,5) = 18,5 > W_{0,05} = 6$, nemůžeme zamítnout hypotézu, že mezi výsledky písemné a ústní zkoušky není významný rozdíl.

2.2.10: $W = 71,5 > W_{0,975}(17)$. Neboť statistika W je vyšší než kritická hodnota, nelze v tomto případě nulovou hypotézu zamítnout. Závěr je tedy stejný jako u testu znaménkového – nulová hypotéza o střední hmotnosti sáčků 100 g se nezamítá.

2.3 DVOUVÝBĚROVÝ WILCOXONŮV TEST

2.3.1: $U_{vyp} = 6$ $U_{tab 0,05;10,10} = 23$ $U_{vyp} < U_{tab}$ - nulovou hypotézu zamítáme, existuje významný rozdíl v klíčivosti dle způsobu dosoušení

2.3.2: V tabulkách nalezneme $U_{vyp} = 7 > U_{tab} = 2 \Rightarrow$ hypotézu nezamítáme, nový způsob setí má jiný vliv na průměrné hekt. výnosy než starý způsob.

2.3.3: Kritická hodnota při $\alpha = 0,05$ pro $m = 4$, $n = 6$ je podle tabulek rovna 2. Protože $\min(7, 17) = U_{vyp} = 7 > U_{tab} = 2 \Rightarrow$ nemůžeme zamítnout hypotézu, že nový způsob hnojení má na hektarové výnosy stejný vliv jako starý způsob.

2.3.4: Protože $U_{vyp} = \min(48,5; 7,5) = 7,5 < U_{tab 0,05} = 10$, zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ hypotézu o stejném počtu pracovníků v potravinářském průmyslu ve sledovaných oblastech.

2.3.5: $U_{vyp} = \min(14,16) = 14 > U_{tab 0,05}(5,6) = 3$. Nezamítáme H_0 a přijímáme závěr, že obě provenience jsou stejně výškově vyspělé.

2.3.6: Protože $U_{vyp} = \min(U_1, U_2) = 6 \leq U_{tab} = 6$, zamítáme hypotézu, že způsob hnojení nemá vliv na výnos pšenice.

2.3.7: Pro náš příklad je $U_{vyp} = 24 > U_{tab} = 8$, a proto nemáme dostatečný důkaz pro zamítnutí nulové hypotézy. Na základě zkoumaných dat nelze učinit závěr, že u žen a mužů s Hodginsonou nemocí je rozdíl počtu T_4 buněk statisticky významný.

2.3.8: V tabulkách nalezneme $U_{vyp} = \min(41,15) = 15 > U_{tab} = 6$ hypotézu zamítáme, okolní podněty nemají vliv na výsledek testu.

2.3.9: V tabulkách nalezneme $U_{vyp} = \min(6,58) = 6 < U_{tab} = 7$ hypotézu nezamítáme, existuje mezi jednotlivými typy škol rozdíl v úspěšnosti písemek z matematiky u přijímacích zkoušek.

2.3.10: V tabulkách nalezneme $U_{vyp} = \min(222,66) = 66 < U_{tab} = 86$ hypotézu nezamítáme, obě dávky se liší.

3. POROVNÁVÁNÍ VÍCE VÝBĚRŮ

3.1 ANALÝZA ROZPTYLU JEDNODUCHÉHO TŘÍDĚNÍ

3.1.1: $F_{vyp} > F_{tab}$. Zamítáme hypotézu o významných rozdílech ve výnosech odrůd.

3.1.2: $H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$, výběrové aritmetické průměry pocházejí ze základních souborů se shodnými průměry (složení krve u všech základních souborů různých syndromů má průměrné fyziologické hodnoty shodné).

3.1.3: $F_{vyp} > F_{tab}$ Šetření prokázalo statisticky velmi významný vliv délky praxe na produktivitu práce, odlišuje se produktivita s délkou praxe 10 až 25 let.

3.1.4: $F_{vyp} > F_{tab} \Rightarrow$ nulová hypotéza H_0 se zamítá na úrovni $\alpha = 0,05$. $F_{vyp} > F_{tab} \Rightarrow$ nulová hypotéza H_0 se rovněž zamítá na úrovni $\alpha = 0,01$. V souboru existuje nejméně jeden rozdíl mezi průměry, který lze považovat za vysoce průkazný.

3.1.5: $F_{vyp} > F_{tab} \Rightarrow$ Zamítáme nulovou hypotézu. Rozdíly ve výnosech jsou vysoce průkazné.

3.1.6: $F_{vyp} > F_{tab} \Rightarrow$ zamítáme globální H_0 na hladině $\alpha = 0,05$, vliv předchozího tréninku je nevýznamný.

$F_{vyp} < F_{tab} \Rightarrow$ nezamítáme globální H_0 na hladině $\alpha = 0,01$, vliv předchozího tréninku je významný.

3.1.7: $F_{vyp} = 4,94 < F_{tab 0,95}(4;44) = 2,58$. Na hladině 5 % lze tedy zamítnout hypotézu o shodném hodnocení všech pěti skupin limonád, což znamená, že nejsou stejně oblíbené.

3.1.8: $F_{vyp} = 1,341 < F_{tab 0,05}(2,27) = 3,354$. Nulovou hypotézu $H_0 : \alpha_i = 0$ tedy nemůžeme zamítnout. Nepodařilo se prokázat, že by pevnost betonu dané třídy závisela na ročním období.

3.1.9: $F_{vyp} = 8,937 > F_{tab 0,05}(4,24) = 2,78$ zároveň $F_{0,01}(4,24) = 4,22$. Nulovou hypotézu o stejné kvalitě oceli zamítáme na hladině $\alpha = 0,05$ i $\alpha = 0,01$.

3.1.10: $F_{vyp} = 0,55466 < F_{tab\ 0,05}(3,28) = 2,95$. Nulová hypotéza nelze zamítnout, jednotlivá plemena králíků se statisticky významně liší v průměrném počtu živě narozených mláďat

3.2 KRUSKALŮV-WALLISŮV TEST

3.2.1: $Q_{tab} = 5,780$ – zamítáme tedy H_0 $0,005 < P < 0,01$, abundance druhu není stejná ve všech třech vegetačních patrech. Liší se bylinné patro.

3.2.2: Protože $Q_{vyp} = 6,577 > Q_{tab} = 5,991$, zamítáme na hladině významnosti 5 % hypotézu o stejném měrném odporu při různých pracovních rychlostech.

3.2.3: Protože $Q_{vyp} = 0,07/0,998 = 0,07 < Q_{tab} = 5,99$, hypotézu, že všechny tři výběry pocházejí z téhož rozdělení, nezamítáme.

3.2.4: $Q_{vyp} = 1,037 < Q_{tab} = 9,49$. Nelze zamítnout hypotézu o shodě středních hodnot. Rozdílnost v prodeji kol mezi prodejny nebyla Kruskal – Wallisovým testem prokázána.

3.2.5: $Q_{vyp} = 4,956 < Q_{tab} = 5,99$. Hypotézu o tom, že výběry pocházejí ze stejného rozdělení nezamítáme. Znamená to, že v našem příkladu počet ekonomicky aktivních členů domácnosti neovlivňuje významně výši vkladů.

3.2.6: $Q_{vyp} = 18,79$. Kvantil $Q_{0,95}(3)$ rozdělení chí-kvadrát se třemi stupni volnosti je $Q_{tab} = 7,815$, takže zamítáme hypotézu o shodné úrovni prodeje sledovaných čtyř typů lahviček.

3.2.7: $Q_{vyp} = 8,29$. Kvantil rozdělní chí-kvadrát se dvěma stupni volnosti je $Q_{tab} = 5,99$, takže na 5 % hladině významnosti zamítáme hypotézu o stejném bodovém hodnocení televizorů.

3.2.8: $Q_{vyp} = 3,5$. Kvantil rozdělení chí-kvadrát se dvěma stupni volnosti je $Q_{tab} = 5,99$, takže na 5 % hladině významnosti nezamítáme hypotézu o stejném postoji respondenta ke třem druhům kávy.

3.2.9: $Q_{vyp} = 12,45$. Kvantil chí-kvadrát rozdělení se třemi stupni volnosti je $Q_{tab} = 7,81$. Zamítáme tedy hypotézu o stejné kvalitě receptů.

3.2.10: Protože $Q_{vyp} = 6,577 > Q_{tab} = 5,991$, zamítáme na hladině významnosti 5 % hypotézu o stejném váhovém přírůstku při různých krmných režimech.

3.3 FRIEDMANŮV TEST

3.3.1: Protože $Q_{vyp} = 7,81 \geq Q_{tab} = 7,81$, zamítáme testovanou hypotézu o stejné úrovni kvalitě majonéz. Liší se vzorek majonézy č. 1 a vzorek č. 3.

3.3.2: $Q_{vyp} < Q_{tab}$ Protože vypočtená testová statistika je nižší než kritická hodnota, nebude zamítnuta nulová hypotéza o shodě středních hodnot. Mezi počtem prodaných kol v jednotlivých prodejnách tedy nebyl prokázán žádný statisticky významný rozdíl.

3.3.3: Porovnáním s $Q_{tab} = 7,81$, zjišťujeme, že $Q_{vyp} \leq Q_{tab}$, takže testem na 5 % hladině významnosti nebyl prokázán rozdíl v názorech spotřebitelů na jednotlivé druhy vín.

3.3.4: Protože $Q_{vyp} = 12,13 \geq Q_{tab} = 5,99$, zamítáme testovanou hypotézu o stejné úrovni výkonů v jednotlivých směnách. Prokázali jsme tedy na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ závislost úrovně výkonu na druhu směny.

3.3.5: $Q_{vyp} = 2,0 < Q_{tab} = 7,143$, nejsme oprávněni zamítnout předpoklad o shodě úrovní cen prodávaného zboží ve sledovaných prodejnách.

3.3.6: $Q_{vyp} = 9,24 > Q_{tab} = 7,81$. Znamená tedy, že zamítáme hypotézu stejné produkce, jednotlivé provenience se od sebe produkčně liší.

3.3.7: $Q_{vyp} = 14,52 \geq Q_{tab} = 7,81$, zamítáme hypotézu, že trombinový čas nezávisí na preparátech K, A, B, C.

3.3.8: $Q_{vyp} = 19,16 \geq Q_{tab} = 7,81$, zamítáme testovanou hypotézu o odlišnosti průduchů na jednotlivých částech rostliny.

3.3.9: $Q_{vyp} = 1,33 < Q_{tab} = 7,81$, nezamítáme testovanou hypotézu o závislosti druhu medvěda na délce života.

3.3.10: $Q_{vyp} = 2,375 < Q_{tab} = 5,99$, nezamítáme testovanou hypotézu, že se u první skupiny tepová frekvence mění jen náhodně, protože

$Q_{\text{vyp}} = 8,533 < Q_{\text{tab}} = 5,99$, zamítáme hypotézu, že se u druhé skupiny mění tepová frekvence jen náhodně.

4. KONTINGENČNÍ TABULKY

4.1 TEST HYPOTÉZY O NEZÁVISLOSTI

4.1.1: Vidíme tedy, že nulovou hypotézu zamítneme na 5% hladině, takže obezita rodičů spolu významně souvisí.

4.1.2: Na hladině významnosti 5 % je mezi navštěvovaným ročníkem a mírou konzumace alkoholu závislost.

4.1.3: $\chi^2_{0,05}(6) = 12,5916 < 68,65 \cong \chi^2 \Rightarrow$ stupeň závislosti mezi druhem absolvované střední školy a důvodem zanechání studia je velmi významný.

4.1.4: $\chi^2_{0,05}(12) = 21,0261 < 36,6 \cong \chi^2 \Rightarrow$ svědčí o významném stupni závislosti mezi hlavním důvodem nespokojenosti se zaměstnáním a vzděláním pracovníka.

4.1.5: $\chi^2 = 1073,51 \geq \chi^2_6(0,05) = 12,59$, zamítneme hypotézu, že barva očí a barva vlasů u mužů jsou nezávislé znaky.

4.1.6: $\chi^2 = 6,679 \geq \chi^2_2(0,05) = 5,99$, zamítneme hypotézu, že vzdělení a plánované těhotenství jsou nezávislé.

4.1.7: $\chi^2_{0,05}(4) = 9,49 < 10,5 \cong \chi^2$, zamítáme nulovou hypotézu neboť jsme prokázali, že náhodné veličiny X - "počet závad na osobním automobilu" a Y - "věk automobilu" jsou stochasticky závislé.

4.1.8: $\chi^2_{0,05}(4) = 9,49 < 711,2 \cong \chi^2$, zamítáme nulovou hypotézu neboť jsme prokázali, že postava ženicha a nevěsty na sobě závisí.

4.1.9: $\chi^2_{0,01}(6) = 16,81 < 30,16 \cong \chi^2$, zamítáme nulovou hypotézu nezávislosti dvou zkoumaných veličin.

4.1.10: $\chi^2_{0,10}(1) = 2,71 > 1,304 \cong \chi^2$, nezamítáme nulovou hypotézu nezávislosti dvou zkoumaných veličin. Ze zjištěných dat se tedy neprokázalo, že průběh choroby závisí na tom, zda byl pacient očkovan.

4.2 TEST HOMOGENITY MULTINOMICKÝCH ROZDĚLENÍ

4.2.1: To znamená, že pravděpodobnost, že by tak velké pozorované procentuální rozdíly ve výskytu chřipky mohly vzniknout jen náhodou, pokud by neexistovaly žádné skutečné rozdíly mezi očkovací látkou a placebem, je menší než 0,1 %. Proto můžeme učinit závěr, že očkovací látka je účinnější než placebo.

4.2.2: Pro 5 stupňů volnosti je 1 % kritická hodnota rovna kvantilu $\chi^2_{1-0,01}(5) = 15,09$. Hodnota vypočtené testové statistiky $\chi^2 = 26,96$ značně překračuje kritickou hodnotu 15,09, a proto můžeme učinit závěr, že na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ existuje dostatečný důkaz vztahu mezi léčbou a rentgenovým výsledkem

4.2.3: $\chi^2 = 10,45 < \chi^2_6(0,05) = 12,59$, nemůžeme tedy zamítnout hypotézu, že rozdělení krevních skupin je ve všech třech oblastech stejné.

4.2.4: $\chi^2 = 6,56 < \chi^2_6(0,05) = 12,59$, nemůžeme tedy zamítnout hypotézu o homogenitě rychlosti růstu travin v závislosti na sluneční intenzitě.

4.2.5: $\chi^2 = 38,68 > \chi^2_9(0,01) = 21,67$, můžeme tedy zamítnout hypotézu, že veličiny jsou nezávislé.

4.2.6: $\chi^2 = 139,55 > \chi^2_9(0,05) = 16,92$, můžeme tedy zamítnout hypotézu o homogenitě postojů jednotlivých věkových skupin.

4.2.7: $\chi^2 = 7,79 < \chi^2_6(0,05) = 12,59$, nemůžeme tedy zamítnout hypotézu o homogenitě závislosti a rodinného zázemí.

4.2.8: $\chi^2 = 117,5 > \chi^2_9(0,01) = 21,67$, můžeme tedy zamítnout hypotézu, že veličiny jsou nezávislé.

4.2.9: $\chi^2 = 5,73 < \chi^2_9(0,05) = 16,92$, nemůžeme tedy zamítnout hypotézu o homogenitě na celém území.

4.2.10: $\chi^2 = 59,95 > \chi^2_{12}(0,05) = 21,03$, můžeme tedy zamítnout hypotézu o homogenitě na celém území.

4.3 TEST HYPOTÉZY O SYMETRII

4.3.1: Protože $3,00 < 3,84$, nemáme dostatečný důkaz pro zamítnutí nulové hypotézy. Učiníme tedy závěr, že na základě zkoumaných dat nelze prokázat rozdíl v působení obou léků.

4.3.2: Alespoň pro jednu dvojici (i, j) je tedy pravděpodobnost P (otec má barvu očí i , syn má barvu očí j) jiná než pravděpodobnost P (otec má barvu očí j , syn má barvu očí i).

4.3.3: $\chi^2 = 4,64 < \chi_3^2(0,05) = 7,81$, nelze zamítnout H_0 , vliv dítěte nelze na zvolené hladině významnosti prokázat.

4.3.4: $\chi^2 = 6,4 > \chi_1^2(0,05) = 3,84$, zamítáme tedy na hladině významnosti 5 %, že speciální metoda nemá vliv na zrychlení reakce při konverzaci.

4.3.5: $\chi^2 = 9,53 > \chi_1^2(0,05) = 3,84$, z toho vyplývá, že přínos dynamických obrázků k lepšímu pochopení pojmu je statisticky významný.

4.3.6: $\chi^2 = 8 > \chi_1^2(0,05) = 3,84$, z toho vyplývá, že požití alkoholu statisticky významně ovlivňuje projetí uvedené trasy.

4.3.7: $\chi^2 = 40,52 > \chi_3^2(0,05) = 7,81$, z toho vyplývá, že volba časopisu a vzdělání závisí.

4.3.8: $\chi^2 = 3,6 < \chi_1^2(0,05) = 3,84$, z toho vyplývá, významná změna názorů se neprokázala.

4.3.9: $\chi^2 = 100,88 > \chi_3^2(0,05) = 7,81$, z toho vyplývá, že veličiny jsou závislé.

4.3.10: $\chi^2 = 4 > \chi_1^2(0,05) = 3,84$, z toho vyplývá, že očkování ovlivňuje průběh nemoci.

ZÁVĚR

V bakalářské práci jsem se snažil zpracovat sbírku příkladů z matematické statistiky. Sbíрка obsahuje učivo základního kurzu statistiky, který se vyučuje na vysokých školách. Metody uvedené v této práci jsou obsaženy v každém statistickém software (např. STATISTICA, SCA, SAS). Je zřejmé, že každý test má svoje předpoklady. Pokud nebudeme brát zřetel na tyto předpoklady, můžeme dojít při testování k chybným závěrům. Toto se často stává, jestliže je používán statistický software bez důkladné znalosti dané problematiky. Příklady uvedené v práci by měly napomoci k lepšímu pochopení základních testů a k úspěšnému používání statistického software.

POUŽITÁ LITERATURA A ZDROJE

- [1] Doc. RNDr. Daniela Jarušková, CSc., RNDr. Martin Hála, CSc.: *Pravděpodobnost a matematická statistika 12 - Příklady*, Praha 1998 (str. 82, 84, 86, 88)
- [2] Ing. Marie Prášilová CSc., Ing. Libuše Svatošová: *Cvičení ze statistiky*, ČZU v Praze, Provozně ekonomická fakulta, CSc., Praha 1997 (str. 50)
- [3] Ing. Karel Drápela, CSc., RNDr. Ing. Jan Zach, CSc.: *Biometrie, Biostatistika – vybrané části*, Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně, Brno 1996(str. 58, 59)
- [4] Doc. Ing. Dagmar Blatná, CSc.: *Neparametrické metody a statistiky - Testy založené na pořádkových a pořadových statistikách*, VŠE v Praze, Fakulta informatiky, Praha 1996 (str. 122, 127, 128)
- [5] Petr Hebák, Diana Bílková, Alžběta Svobodová: *Praktikum k výuce matematické statistiky II. - Testování hypotéz*, VŠE v Praze, Fakulta informatiky a statistiky, Praha 2004 (str. 149, 191, 192, 228, 242)
- [6] Doc. RNDr. Bohumil Kába, CSc., Doc. Ing. Libuše Svatošová, CSc.: *Matematická statistika I.*, ČZU v Praze, Provozně ekonomická fakulta, Praha 2006 (str. 67, 80, 81, 83)
- [7] Doc. RNDr. Daniela Jarušková, CSc. a kolektiv: *Matematická statistika*, ČVUT, Fakulta stavební, Praha 1996 (str. 71)
- [8] Ing. Marie Prášilová CSc., Doc. Ing. Rudolf Zeipelt, CSc.: *Cvičení ze statistiky I.*, ČZU v Praze, Provozně ekonomická fakulta, Praha 2001 (str. 39, 40, 41, 50, 51)
- [9] Jiří Anděl: *Základy matematické statistiky*, Praha 2005 (str. 216, 221, 251, 279, 282, 292)
- [10] Přednášky a cvičení ze statistiky PF JCU
- [11] RNDr. František Jaroš a kolektiv: *Pravděpodobnost a statistika*, Praha 1998 (str. 233 – 250, 260)
- [12] M. Turčan, P. Hradecký, A. Madryová: *Statistika*, Ostrava 1998
- [13] Ing. J. Hátle, Csc., Doc. Ing. J. Likeš, Csc: *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*, Praha 1974

- [14] Tomáš Mrkvička, RNDr. Vladimíra Petrášková: *Úvod do statistiky*, České Budějovice 2006
- [15] Martin Duchoslav: *Cvičení ze statistiky pro biology - Sbíрка příkladů* Olomouc 2004
- [16] František Pavelka, Petr Klímek: *Aplikovaná statistika*, Zlín 2000
- [17] <http://home.zcu.cz/~friesl/hpsb/tit.html> - Statistika hypertextově
- [18] <http://ucebnice.euromise.cz/> - Učebnice statistiky
- [19] <http://iastat.vse.cz/> - Interaktivní učebnice statistiky
- [20] <http://www.vutbr.cz/> - VUT v Brně, FAST, katedra matematiky
- [21] <http://www.fpe.zcu.cz/cz/> - Západočeská univerzita v Plzni
- [22] <http://cs.wikipedia.org> - Otevřená encyklopedie
- [23] http://kstp.vse.cz/kstp/wcms_kstp.nsf - VŠE v Praze, katedra statistiky a pravděpodobnosti
- [24] <http://www.vsb.cz/> - Vysoká škola Báňská