



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

ŘEŠENÍ AXIÁLNĚ ZATÍŽENÝCH PRUTŮ POMOCÍ VLASTNÍ IMPLEMENTACE MKP S VYUŽITÍM KVADRATICKÉHO PRVKU

FINITE ELEMENT SOLUTION OF AXIALLY LOADED BARS USING QUADRATIC ELEMENT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Lukáš Janáček

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Jiří Vaverka

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Lukáš Janáček
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojírenství
Vedoucí práce:	Ing. Jiří Vaverka
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Řešení axiálně zatížených prutů pomocí vlastní implementace MKP s využitím kvadratického prvku

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Metoda konečných prvků (MKP) má v současnosti mezi numerickými metodami používanými v mechanice těles zcela dominantní postavení. Tvorba konečno–prvkového modelu řešeného problému, jeho počítačová implementace a numerické řešení však obecně vyžadují pokročilé znalosti matematiky i programátorskou zručnost. Praktická zkušenost s realizací těchto kroků na jednoduchých (analyticky řešitelných) úlohách z pružnosti a pevnosti prohlubuje pochopení principu MKP a napomáhá uvědomit si některá její omezení. Takto nabyté zkušenosti jsou nejen dobrým základem pro programování složitějších (např. 3D) úloh, ale také rozvíjejí schopnost správně interpretovat a kriticky zhodnotit výsledky získané pomocí komerčních SW.

Cíle bakalářské práce:

1. Popsat algoritmus tvorby konečno–prvkového modelu axiálně zatíženého přímého prutu při použití kvadratického prvku (uvést a vysvětlit jednotlivé kroky vedoucí od výchozí diferenciální rovnice k finální soustavě algebraických rovnic).
2. Provést počítačovou implementaci konečno–prvkového modelu (např. v Matlabu).
3. Provést numerické řešení zadaných úloh pomocí implementovaného algoritmu a výsledky srovnat s analytickým řešením a numerickým řešením v softwaru Ansys. Objasnit případné rozdíly ve výsledcích.

Seznam doporučené literatury:

REDDY, Junuthula N. Introduction to the Finite Element Method. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1993. 684 s. ISBN: 0-07-051355-4.

JANÍČEK, Přemysl et al. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3. vyd. Brno: CERM, 2004. 287 s. ISBN: 80-21-2592-X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

V tejto bakalárskej práci popisujeme algoritmus tvorby konečno-prvkového modelu axiálne zaťaženého prútu, pri použití kvadratického prvku. V úvode definujeme základné pojmy pružnosti a pevnosti, ktoré v priebehu práce používame, a ktorých znalosť je nevyhnutnou podmienkou pochopenia problémov, pre ktoré bola metóda konečných prvkov odvodená. Práca popisuje prechod od základnej diferenciálnej rovnice k slabej formulácii, na ktorej je táto numerická metóda postavená. Definuje prvkové matice a vektory a prechod od jedného prvku ku globálnym maticiam a vektorom, vzťahnutým k celému telesu. Popisuje implementovanie okrajových podmienok do metódy a postprocessing výsledkov, pre výpočet ďalších neznámych.

V praktickej časti definujeme 3 demonštračné úlohy, ktorých výsledky z vlastnej implementácie MKP v programe Matlab, porovnáваме s analytickým riešením a riešením z komerčného softvéru, ANSYS Workbench. Úlohy sú zamerané na zložité líniové zaťaženie prútu, meniaci sa priečny prierez a staticky neurčitú úlohu. Výsledky posuvov a normálových napätí naprogramovaného riešiča s kvadratickým prvkom sa zhodujú s výsledkami z Ansysu (pri totožných nastaveniach) a po navýšení počtu prvkov (podľa potreby) i s analytickým riešením. Príklad s premenlivým priečnym prierezom bol v Ansyse riešený rovinnou napätosťou. Bola tak zistená prítomnosť šmykových napätí v častiach priečneho prierezu vzdialených od strednice prútu, ktoré náš riešič neuvažuje a mohli by byť v určitých prípadoch významné.

Kľúčové slová

prút, axiálne zaťaženie, metóda konečných prvkov, kvadratický prvok, slabá formulácia

Summary

This bachelor thesis describes an algorithm for programming finite-element model with quadratic elements for axial loaded bar. In the introduction, we define the basic concepts of mechanics of materials, which are used in this thesis and are necessary to understand problems, for which finite element method was formulated. The thesis clarifies a transition from basic differential equation to weak formulation, which is the base of finite element method. We define element matrices and describe transition to global matrices, relating to the whole body. Then describe implementation of boundary conditions and postprocessing of the results, necessary for calculation and displaying of other unknowns.

In the practical part, 3 illustrative problems are presented and calculated numerically in FEM solver using Matlab, analytically and in software ANSYS Workbench. Results are then compared and evaluated. Problems have different boundary conditions (linear axial load, tapered cross section, statically indeterminate fixation). Results of displacement and normal stress for programmed solver are identical to those from Ansys (using the same settings) and analytical solution (after more elements are added, if necessary). Problem with tapered cross section was simulated in Ansys using plain stress, because the program can't define bar with tapered cross section. This revealed shear stress contained in parts of cross section further from centreline, which are not calculated in our FEM solver and in some cases might be significant.

Key words

bar, axial load, finite element analysis, quadratic element, weak formulation

Bibliografická citácia

JANÁČIK, Lukáš. *Řešení axiálně zatížených prutů pomocí vlastní implementace MKP s využitím kvadratického prvku*. Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/140826>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Jiří Vaverka.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne, na základe dostupných literárnych zdrojov uvedených na konci tejto práce, pod odborným vedením vedúceho práce Ing. Jiřího Vaverky.

Lukáš Janáček

Pod'akovanie

Chcel by som sa poďakovať môjmu školiteľovi, Ing. Jiřímu Vaverkovi, za cenné rady, ochotu a čas, ktorý mi venoval pri konzultáciách tejto práce. Taktiež ďakujem rodine a priateľom, ktorí ma počas štúdia podporovali.

Obsah

Úvod.....	10
1 Základné pojmy pružnosti a pevnosti.....	11
1.1 Napätie, deformácia, materiálové charakteristiky.....	11
1.1.1 Normálové napätie.....	11
1.1.2 Pomerná deformácia.....	11
1.1.3 Hookov zákon.....	11
1.2 Prút v pružnosti a pevnosti.....	12
1.3 Medzné stavy.....	12
1.3.1 Medzný stav deformácie.....	13
1.3.2 Medzný stav pružnosti.....	13
1.3.3 Medzný stav vzpernej stability.....	13
1.4 Namáhanie jednoduchým ťahom a tlakom.....	13
2 Teória metódy konečných prvkov.....	15
2.1 Odvodenie základnej diferenciálnej rovnice a aproximácia riešenia.....	16
2.2 Definovanie bazových funkcií kvadratickeho prvku.....	17
2.3 Odvodenie slabej formulácie základnej diferenciálnej rovnice.....	18
2.4 Odvodenie prvkovej matice tuhosti a vektorov zaťažení.....	19
2.5 Prepojenie elementov v konečno-prvkovom modeli, prechod na globálnu sústavu rovníc.....	20
2.5.1 Redukcia počtu neznámych a počtu rovníc.....	21
2.5.2 Matematický zápis globálnych matíc.....	22
2.6 Implementovanie okrajových podmienok.....	23
3 Postprocessing výsledkov.....	25
4 Vlastná implementácia MKP.....	26
4.1 Prút namáhaný odstredivou silou.....	26
4.2 Prút s premenlivým priečnym prierezom.....	32
4.3 Staticky neurčito uložený prút.....	36
Záver.....	40
5 Použitá literatúra.....	41

Úvod

Metóda konečných prvkov (MKP) je veľmi efektívna numerická metóda, ktorá je využívaná na riešenie širokej škály technických problémov. Od štruktúrnych analýz namáhaných telies, cez dynamiku až po tepelné analýzy. Riešenia týchto úloh zvyčajne ponúkajú rôzne súkromné spoločnosti vo svojich softvéroch, za ktoré požadujú vysoké poplatky, ktoré si menšie spoločnosti nemusia vedieť dovoliť.

Napriek vysokým cenám za „prenájom“ softvéru je väčšinou výhodné uprednostniť numerické simulácie pred experimentálnymi skúškami, ktoré bývajú nie len zdĺhavejšie, ale zároveň finančne nákladnejšie a náročnejšie na vybavenosť a kapacity spoločnosti. Numerické simulácie teda znižujú náklady na výskum a vývoj strojných zariadení, poskytujú možnosť optimalizácie vhodného riešenia bez nutnosti fyzickej realizácie problému či verifikujú správnosť série analytických výpočtov pri návrhoch komplexnejších celkov, pre dodržanie stanovenej bezpečnosti a funkčnosti navrhovaných zariadení.

Nevýhodou komerčných softvérov je však spomenutá cena. Po mnohých rokoch úprav a vylad'ovania detailov ponúkajú komerčné spoločnosti prepracované výpočtové programy s možnosťou prepájania rôznych domén inžinierskych výpočtov, čo umožňuje riešiť komplexné problémy veľmi efektívne. Ak je však firma zameraná napríklad na súčasti, ktoré možno považovať za prúťové telesá (napríklad hriadele) a potrebuje overiť napätia či posuvy, ktoré vzniknú po zaťažení osovou (axiálnou) silou pri daných okrajových podmienkach, tak sa jej kúpa komerčného softvéru nemusí vyplatiť. V takom prípade je vhodnejšie investovať čas do naprogramovania jednóúčelového výpočtového programu, v ktorom bude možné rýchlo a jednoducho definovať novú úlohu a zároveň nebude finančne nákladný.

Iná potreba naprogramovania vlastného MKP riešiča môže vyplynúť zo špecifickosti daného problému. Komerčné softvéry sa totiž zameriavajú hlavne na bežné inžinierske problémy, preto tieto riešiče nemusia byť uspôsobené na výpočty, s ktorými sa stretávame iba zriedkavo, prípadne ich realizujeme po prvýkrát – napríklad v rámci výskumu či vývoja.

1 Základné pojmy pružnosti a pevnosti

Základnou úlohou pružnosti a pevnosti je popis a určovanie deformácie a porušovanie telies a ich vzájomný vzťah k silovému pôsobeniu uvoľneného telesa. [1]

1.1 Napätie, deformácia, materiálové charakteristiky

Mechanické vlastnosti materiálov sú prakticky 4 (pružnosť, plasticita, pevnosť a húževnatosť), ale mechanických charakteristík je oveľa viac. Mechanické charakteristiky materiálov získavame pomocou rôznych mechanických skúšok (skúška ťahom, tlakom, ohybom, skúšky tvrdosti a iné). [2]

1.1.1 Normálové napätie

Normálové napätie σ vzniká v telese v dôsledku pôsobenia silového zaťaženia kolmo k pričnému prierezu prútu. Vzťah pre výpočet normálového napätia dáva preto do pomeru normálovú silu N a plochu pričného prierezu S :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (1)$$

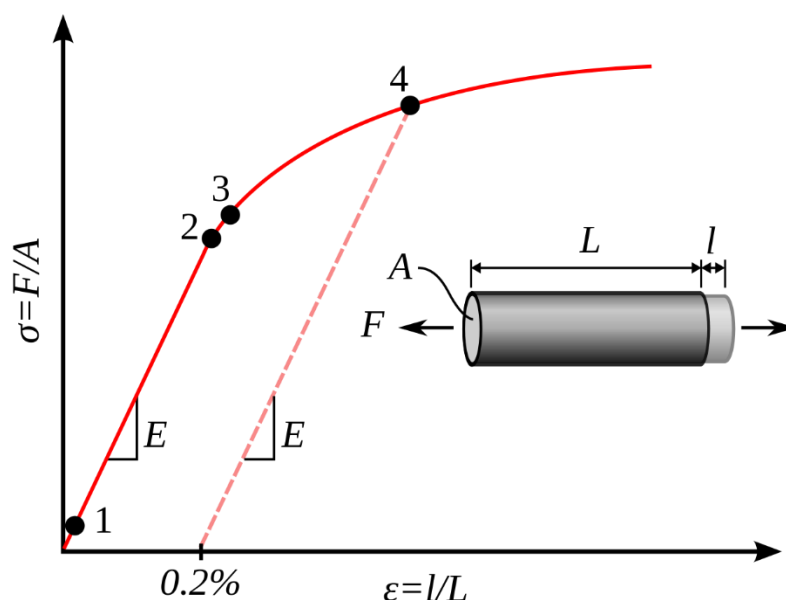
1.1.2 Pomerná deformácia

Pomerná deformácia (pomerné pretvorenie) ε predstavuje zmenu predĺženia prútu v smere strednice [2]. Matematicky ho možno vyjadriť absolútnou zmenou dĺžky voči pôvodnej dĺžke prútu alebo pomocou prírustku dĺžky k infinitizimálne malej časti prútu:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{du}{dx}, \quad (2)$$

kde L_0 je pôvodná dĺžka prútu v nedeformovanom stave, L je nová dĺžka prútu v deformovanom (zaťaženom) stave, dx predstavuje pôvodnú dĺžku infinitizimálne malého prvku prútu a du prírustok dĺžky k tomuto prvku spôsobený zaťažením.

1.1.3 Hookov zákon



Obr. 1: Ťahový diagram materiálu; 2 – prestáva platiť Hookov zákon, 4- zmluvná medza klzu; prevzaté z [3]

Vzťah medzi normálovým napätím prútového telesa a pomernou deformáciou vyjadruje v elastickej oblasti materiálu Hookov zákon [2]:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3)$$

kde E predstavuje Youngov modul pružnosti. Stanovenie tejto materiálovej charakteristiky je úlohou mechanických skúšok materiálov. Pre stanovenie modulu pružnosti sa využíva skúška ťahom, ktorej priebeh je zakreslený v ťahovom diagrame (obr. (1)). Modul pružnosti je potom smernicou elastickej (lineárnej) časti diagramu.

1.2 Prút v pružnosti a pevnosti

Prút je teoretickým modelom reálneho telesa z hľadiska napätosti a deformácie a je modelom najjednoduchšieho typu [1]. Ak vymedzíme prút ako teoretické teleso, ktoré nahrádza reálne teleso, je nutné predpísať určité predpoklady, ktoré musí reálne teleso spĺňať, za ktorých budú výsledky výpočtov odvodených pre prútové telesa odpovedať nášmu reálnemu telesu.

Geometrické prútové predpoklady [1]:

- Prút je určený krivkou, tzv. strednicou, a v každom bode strednice priechným prierezom, ktorý obsahuje všetky body telesa ležiace v normálovej rovine. Priesečník strednice a priechného prierezu je geometrickým ťažiskom T .
- Strednica je spojitá a hladká krivka konečnej dĺžky.
- Priechny prierez je spojitá jedno alebo viacnásobne súvislá oblasť ohraničená obrysom a charakterizovaná charakteristikami priechného prierezu.
- Dĺžka strednice je rádovo minimálne rovnako veľká ako najväčší rozmer priechného prierezu. Ideálne však platí pre pomer dĺžky strednice k charakteristickému rozmeru priechného prierezu $\frac{L}{D} > 10$.

Väzbové a zaťažovacie predpoklady [1]:

- Väzby obmedzujú iba posuvy a uhly natočenia strednice.
- Zaťaženie je sústredené na strednicu, t. j. silovým pôsobením na prút sú osamelé a líniové sily a silové dvojice s pôsobiskom na strednicu.

Deformačné predpoklady [1]:

- Strednica prútu zostáva v procese deformácie spojitá a hladká.
- Priechne prierezy zostávajú v priebehu deformácie zase priechnými prierezmi, a teda si zachovávajú rovinnosť a kolmosť k deformovanej strednici.

Napätostné predpoklady [1]:

- Napätosť v prúte je určená normálnym a smykovým napätím v priechnom priereze. Tento typ napätosti označujeme ako prútovú napätosť.

Po splnení týchto predpokladov budeme ďalej uvažovať, že deformácia prútu (posuvy, pretvorenia) je dostatočne malá, čo umožňuje riešiť statickú rovnováhu prvku podľa [1] v nedeformovanom stave.

1.3 Medzné stavy

Bežným stavom odpovedajú stavy, kedy na teleso pôsobia sily, deformuje sa a niekedy aj zistiteľne porušuje, ale nedochádza k obmedzeniu funkcie. **Medzné stavy** sú stavy, kedy sa deformácia alebo porušenie mení z funkčne prípustných na funkčne neprípustné [1].

1.3.1 Medzný stav deformácie

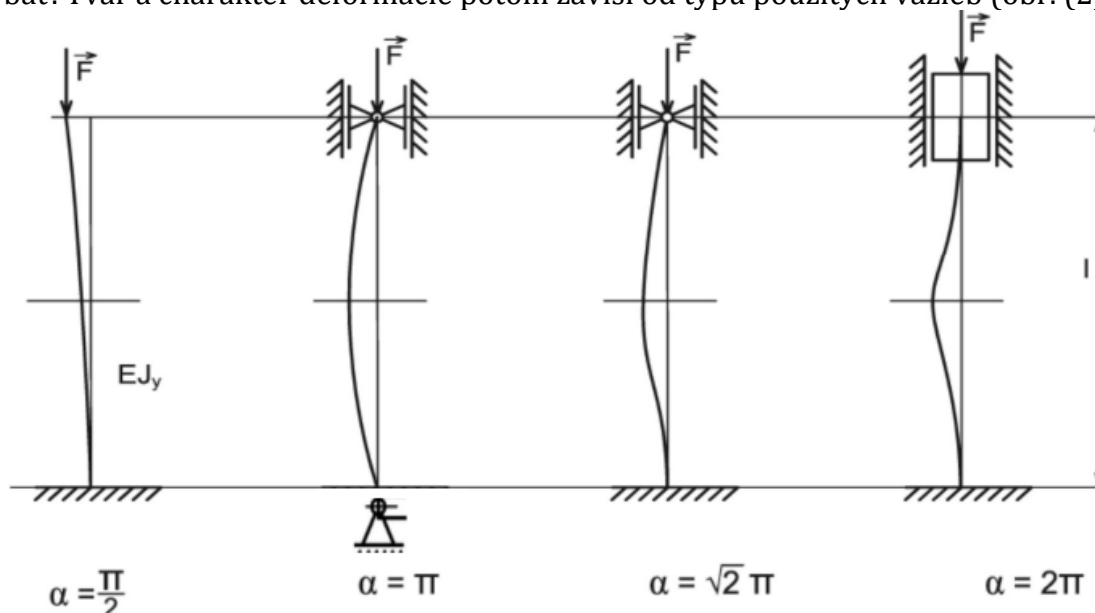
Medzný stav deformácie telesa je taký stav, pri ktorom sa deformácia funkčne prípustná mení na deformáciu funkčne neprípustnú [1]. V praxi to znamená, že vplyvom zaťaženia telesa (objemovými či plošnými silami, ale napríklad aj vplyvom rozťažnosti materiálu od zmeny teploty) došlo k deformáciám, ktorá nevyhovuje funkčným požiadavkám pre dané teleso. Funkčne prípustná deformácia môže predstavovať také predĺženie, priehyby či natočenie, pri ktorom nedochádza k ovplyvneniu správneho fungovania konštrukcie, v ktorej je teleso namáhané, sú zachované požadované rozmerové i geometrické tolerancie, zaťaženia, ktoré vzniknú pri presahoch sú zanedbateľne malé alebo prípustné a podobne. Medzný stav deformácie nie je všeobecne popísaný, ale definuje ho konštruktér, ktorý navrhuje danú sústavu.

1.3.2 Medzný stav pružnosti

Medzný stav pružnosti telesa je taký stav, ktorého prekročením vznikajú v telese plastické deformácie [1]. Z oblasti elastických – vratných – deformácií sa tak dostávame do oblasti nevratných deformácií, ktoré v telese ostanú napriek zníženiu pôsobiaceho zaťaženia.

1.3.3 Medzný stav vzpernej stability

K medznému stavu vzpernej stability v telese dochádza, pokiaľ je teleso zaťažované tlakom. Je to taký stav sústavy, po ktorého dosiahnutí sa mení charakter podstatnej deformácie [1]. Pre prútové telesá to znamená, že sa priečne prierezy nie len k sebe približujú a strednica sa skracuje, ale od istého okamihu sa začne strednica prútu ohýbať. Tvar a charakter deformácie potom závisí od typu použitých väzieb (obr. (2)).



Obr. 2: Medzný stav vzpernej stability pri rôznom uložení prútu [4]

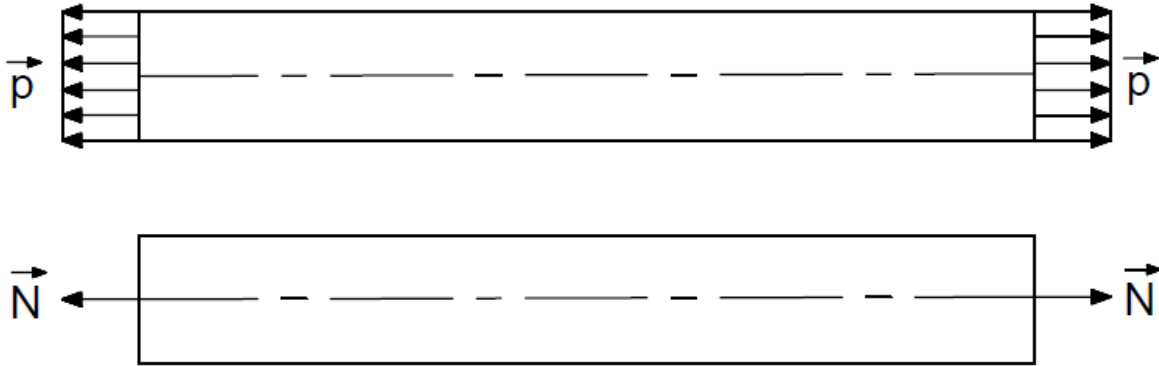
1.4 Namáhanie jednoduchým ťahom a tlakom

Jednoduchý ťah, prípadne tlak, je označenie pre namáhanie priameho prizmatického prútu, ak na danej rozlišovacej úrovni [1]:

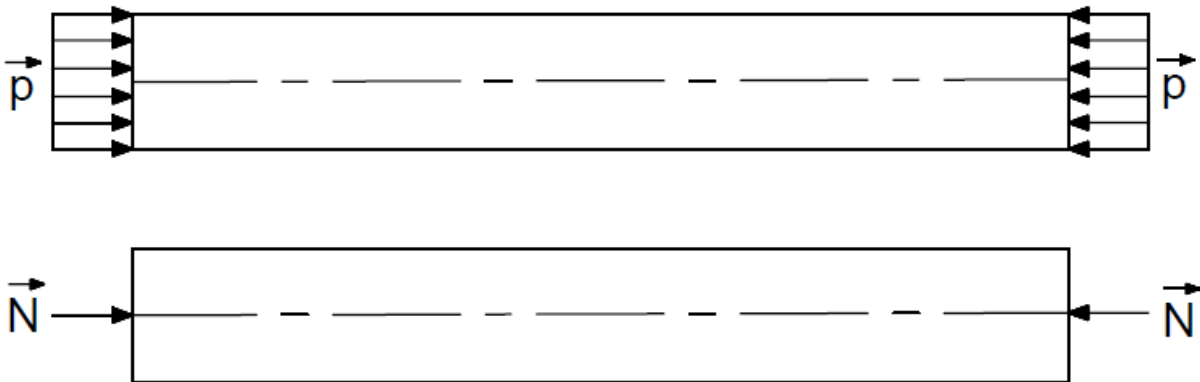
- sú splnené prútové predpoklady,
- priečne prierezy sa odd'ávajú, prípadne približujú, a následne sa deformujú,

- jedinou nenulovou zložkou výsledných vnútorných síl a momentov je normálová sila.

Pri namáhaní na ťah je normálová sila N orientovaná v smere vonkajšej normály (obr. (3)). Pri tlakovom namáhaní (obr. (4)) má smer vnútornej normály priečného prierezu [1]. Normálové napätia σ_T sú v rovine priečného prierezu konštantné a šmykové napätia τ_T sú pre nemenný priečny prierez nulové.



Obr. 3: Prútové teleso namáhané na ťah; zhora: plošnou silou, osamelou silou



Obr. 4: Prútové teleso namáhané na tlak; zhora: plošnou silou, osamelou silou

2 Teória metódy konečných prvkov

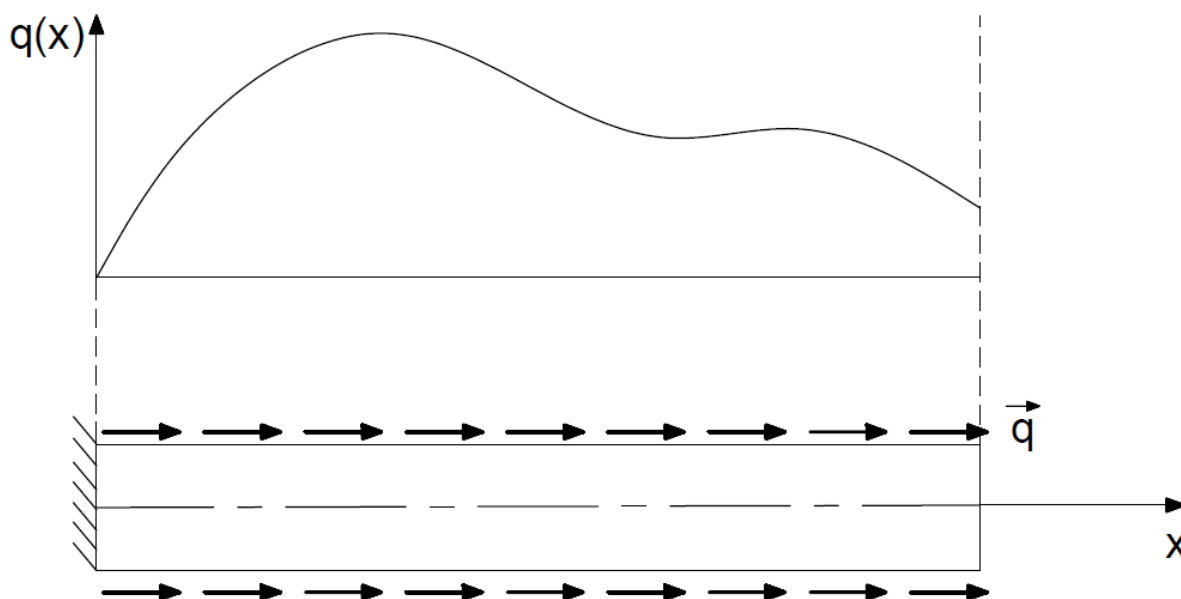
Cieľom tejto práce je implementácia metódy konečných prvkov, skrátene MKP, na axiálne zaťažené prúty, analýza vzniknutých posunutí a napätí. Z toho dôvodu bude aj teória tejto metódy a algoritmus tvorby konečno-prvkového modelu popisovaný na úlohách z pružnosti a pevnosti.

Metóda konečných prvkov je výpočtová metóda, v ktorej je daná oblasť reprezentovaná súborom jednoduchších podoblastí, nazývaných **konečné prvky**, definovaných tak, aby bolo možné nad každým prvkom skonštruovať aproximačné funkcie. Metóda je postavená na troch základných princípoch [5]:

- **diskretizácia telesa** na jednotlivé prvky, čo umožňuje riešiť aj geometricky zložitejšie telesá ako súbor geometricky jednoduchších telies – prvkov,
- **zostavenie aproximačných (bázových) funkcií** (často polynomicke funkcie) nad každým prvkom,
- **diskrétno prepojenie prvkov**, ktoré je založené na kontinuite hľadaného riešenia.

Použité aproximačné funkcie závisia nie len na geometrii použitých prvkov (v 3D metódach napríklad hexagonálne či tetragonálne prvky), ale aj počte a polohe bodov, nazývaných **uzlov**, z ktorých sa jednotlivé prvky skladajú [5].

Pre lepšiu predstavu a demonštráciu jednotlivých krokov zostavovania konečno-prvkového modelu, uvažujme konkrétny prípad z pružnosti a pevnosti. Majme prút o dĺžke L , ktorý je zaťažený osovým líniovým zaťažením \vec{q} (viz obr. (5)). Prút je v ľavej časti votknutý, teda má zamedzený posuv. Os x orientujme tak, aby smerovala pozdĺž prútu z ľavej časti k pravej. Zaťaženie \vec{q} môže byť ľubovoľné, a teda jeho presná hodnota je popísaná všeobecnou funkciou $q = f(x)$, pre $x \in (0; L)$, pričom kladná hodnota funkcie $q(x)$ znamená, že zaťaženie pôsobí v smere osi x . Pričný prierez môže mať vo všeobecnosti premenlivú plochu $S(x)$ a zároveň aj materiál môže byť všeobecnou funkciou $E(x)$. Diskrétno zaťaženie osamelými axiálnymi silami \vec{F} zahrnieme do úvahy až neskôr.



Obr. 5: Prútové teleso namáhané na ťah všeobecnou funkciou $q = f(x)$

2.1 Odvodenie základnej diferenciálnej rovnice a aproximácia riešenia

MKP riešiť formulujeme pre výpočet konkrétnej nezávislej funkcie s daným fyzikálnym významom. Hľadanou neznámou môžu byť, podľa voľby programátora, zložky [6]:

- posuvov – deformačný prístup
- napätí – silový prístup
- napätí aj posuvov – zmiešaný prístup

V našom prípade zvolíme deformačný prístup, teda primárnou hľadanou neznámou budú zložky posuvov, z ktorých následne dopočítame ostatné potrebné neznáme. Vyjdeme zo základných vzťahov odvodených v pružnosti a pevnosti [7] pre normálové napätie σ (rovnice (1) a (3)) a pretvorenie ε (rovnica (2)) a zároveň definujeme líniové zaťaženie q , pôsobiace v osi prútu [7]:

$$q = \frac{-dN}{dx}, \quad (4)$$

kde dN predstavuje infinitizimálne malý prírastok normálovej sily. Vzájomným dosadením získame nehomogénnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu, z ktorej budeme vychádzať pri zostavovaní MKP riešiča:

$$q = -\frac{d(E\varepsilon S)}{dx}, \quad (5)$$

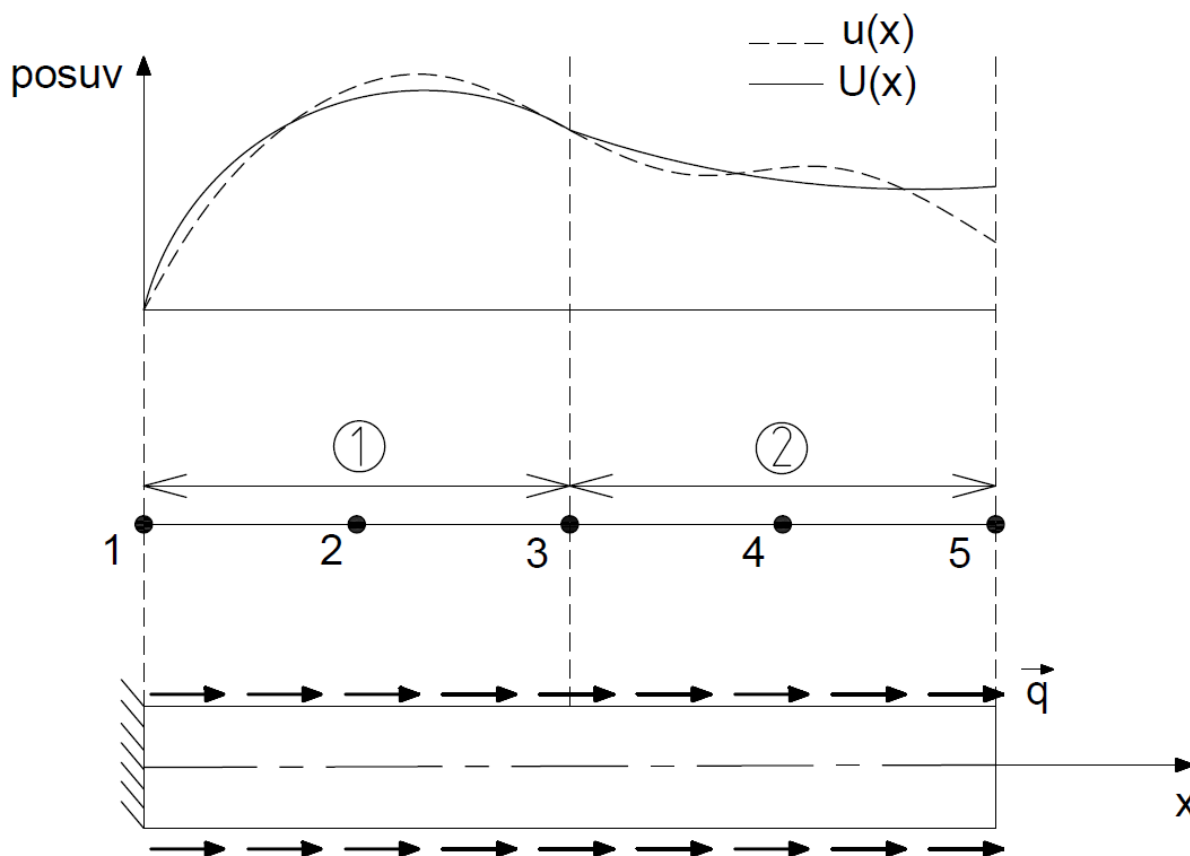
$$q = -\frac{d}{dx} \left(ES \frac{du}{dx} \right). \quad (6)$$

Nájsť riešenie takto formulovanej diferenciálnej rovnice znamená nájsť funkciu $u(x)$, ktorá spĺňa rovnicu (6) na celom definovanom intervale $\langle 0; L \rangle$ a zároveň spĺňa predpísané okrajové podmienky (predpísané posuvy či zaťaženia v konkrétnych bodoch) [5]. Analytické riešenie diferenciálnych rovníc však nie je vo všeobecnosti jednouchou úlohou, dokonca pre väčšinu problémov analytické riešenie neexistuje, prípadne ho nevieme nájsť. Ak by sme k tomu uvažovali, napríklad, plochu priečného prierezu, ako všeobecnú funkciu polohy, $S(x)$, situácia by sa skomplikovala ešte výraznejšie.

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice budeme preto hľadať numericky ako lineárnu kombináciu posuvov v jednotlivých uzloch každého prvku a bázových funkcií zostavených nad týmto prvkom [5]:

$$u \approx U^e = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x), \quad (7)$$

kde u_j^e sú hodnoty riešenia v uzloch prvku, ψ_j^e sú aproximačné funkcie nad daným prvkom a n predstavuje počet uzlov v prvku (determinovaný použitým aproximačným polynómom). Uzly definujeme na okrajoch prvku. Posledný, tretí, potrebný uzol môžeme zvoliť kdekoľvek medzi dvoma krajnými uzlami, no ako vhodné riešenie sa ponúka uzol rovnako vzdialený od zvyšných 2 uzlov, teda v strede prvku [5].



Obr. 6: Vykreslenie presného riešenia $u(x)$ a jeho aproximácie pomocou MKP $U(x)$ nad prvkami 1 a 2 (v krúžku) rozdelených, každý, na 3 uzly

2.2 Definovanie báзовých funkcií kvadratického prvku

Pre nájdenie riešenia $U^e(x)$ teda potrebujeme definovať **bázové funkcie** ψ_j^e nad každým prvkom e . [5] Tie odpovedajú typu použitého prvku, v našom prípade kvadratické. Na základe geometrie báзовých funkcií (obr. (7)) môžeme stanoviť hodnoty v jednotlivých uzloch prvku. Báзовé funkcie nadobúdajú hodnoty 1 alebo 0, podľa tvaru báзовой funkcie. Ak vyjdeme zo všeobecného predpisu pre kvadratickú funkciu $\psi_i^e(x) = a + bx + cx^2$, za príslušné hodnoty x dosadíme globálne súradnice jednotlivých uzlov a porovnáme ich s hodnotou báзовой funkcie $\psi_j^e(x_i^e)$ vo všetkých uzloch prvku (konkrétne napríklad: $\psi_1^e(x_1^e) = 1$, $\psi_1^e(x_2^e) = 0$, $\psi_1^e(x_3^e) = 0$), dostaneme sústavu troch rovníc o troch neznámych, z ktorých po úprave získame funkčný predpis jednej z báзовých funkcií [5]. Postup následne opakujeme aj pre zvyšné dve funkcie. Globálne súradnice uzlov označujeme v tvare: x_i^e , teda i -tý uzol e -tého prvku, kde $i = \{1,2,3\}$. Rozdiel $x_3^e - x_1^e$ predstavuje dĺžku prvku h_e .

$$\psi_1^e(x) = \frac{(x_3^e - x)(x_1^e - 2x + x_3^e)}{(x_3^e - x_1^e)^2} \quad (8)$$

$$\psi_2^e(x) = \frac{4(x - x_1^e)(x_3^e - x)}{(x_3^e - x_1^e)^2} \quad (9)$$

$$\psi_3^e(x) = \frac{(x_1^e - x)(x_1^e - 2x + x_3^e)}{(x_3^e - x_1^e)^2} \quad (10)$$

Tieto interpolácie spadajú do rodiny Lagrangeových interpolačných funkcií, pre ktoré musí platiť [5]:

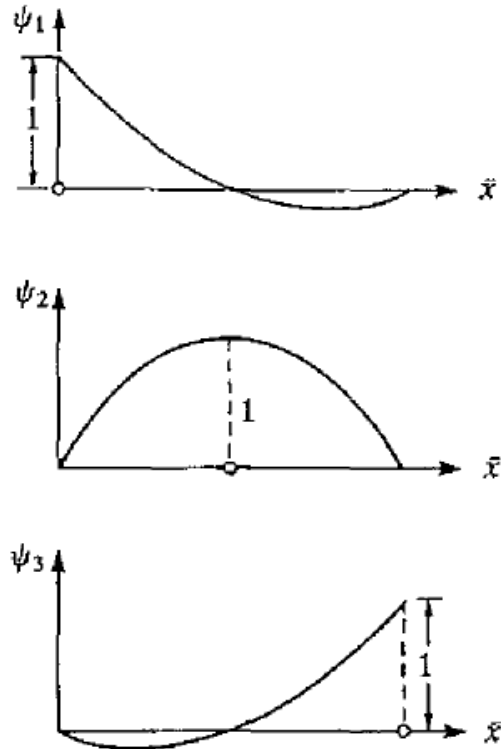
$$\psi_j^e(x_i^e) = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & \text{pre } i \neq j \\ 1 & \text{pre } i = j \end{cases} \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n \psi_j^e(x) = 1, \text{ pre } x \in \langle x_1^e; x_3^e \rangle \quad (12)$$

z čoho vyplýva, že derivácia sumy bude nulová:

$$\sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j^e(x)}{dx} = 0, \quad (13)$$

kde $n - 1$ je stupeň interpolačného polynómu. Tieto vlastnosti možno následne použiť pre konštrukciu Lagrangeovej interpolačnej funkcie ľubovoľného stupňa [5]. My ich však ďalej využívať nebudeme, nakoľko sme bázové funkcie pre kvadratický prvok už odvodili.



Obr. 7: Geometrické tvary bázových funkcií [5]

2.3 Odvodenie slabej formulácie základnej diferenciálnej rovnice

Riešenie našej základnej diferenciálnej rovnice (7) budeme hľadať najskôr nad jedným prvkom. V princípe môžeme použiť akúkoľvek metódu, pomocou ktorej by bolo možné odvodiť potrebné algebraické vzťahy medzi hodnotami v uzloch prvku, no v našom prípade vyjdeme z **Rayleigh-Ritzovej metódy**, ktorá je založená na slabej formulácii diferenciálnej rovnice [5]. Riešenie diferenciálnej rovnice $U(x)$ teda nemusí spĺňať pôvodnú diferenciálnu rovnicu absolútne (zatiaľ čo skutočné riešenie $u(x)$ musí), ale stačí, ak spĺňa odvodenú slabú formuláciu tejto rovnice.

Koeficienty u_j^e potrebné pre stanovenie aproximovaného riešenia určíme z takzvaného váženého integrálneho tvaru, kedy členy pôvodnej diferenciálnej funkcie prevedieme na jednu stranu, vynásobíme testovacou funkciou $w(x)$ a zintegrujeme cez daný prvok (v hraniciach krajných uzlov prvku) [5]:

$$\int_{x_1^e}^{x_3^e} w \left(-\frac{d}{dx} \left(ES \frac{du}{dx} \right) - q \right) dx = 0 \quad (14)$$

Pre rôzne testovacie funkcie $w(x)$ dostaneme, samozrejme, rôzne riešenia integrálu. Pre stanovenie n hodnôt u_j^e potrebujeme n navzájom nezávislých testovacích funkcií $w(x)$. Preto za testovaciu funkciu v integráli dosadíme bázové funkcie ψ_j^e . Takto definovaný konečno-prvkový model sa nazýva **Galerkinov konečno-prvkový model** [5]. Bázové funkcie ψ_j^e by však v takomto prípade museli byť dvakrát diferencovateľné, teda aspoň kubické.

Pre oslabenie požadovanej kontinuity bázových funkcií zameníme diferencovateľnosť v rovnici (12) z u pomocou per partes na w tak, že obe funkcie u aj w

budú diferencovateľné rovnako, v tomto prípade každá jedenkrát. Novo vzniknutý tvar rovnice sa nazýva slabou formuláciou pôvodnej rovnice (14) [5]. Toto dosiahneme nasledovnými úpravami:

$$\begin{aligned} -w \left[\frac{d}{dx} \left(ES \frac{du}{dx} \right) \right] &= \frac{d}{dx} \left(wES \frac{du}{dx} \right) + ES \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} \\ - \int_{x_1^e}^{x_3^e} w \left[\frac{d}{dx} \left(ES \frac{du}{dx} \right) \right] dx &= - \int_{x_1^e}^{x_3^e} \frac{d}{dx} \left(wES \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx \\ - \int_{x_1^e}^{x_3^e} w \left[\frac{d}{dx} \left(ES \frac{du}{dx} \right) \right] dx &= - \left[wES \frac{du}{dx} \right]_{x_1^e}^{x_3^e} + \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (15)$$

$$0 = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - w(x_3^e) \left(ES \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_3^e} + w(x_1^e) \left(ES \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_1^e} \quad (16)$$

Ak identifikujeme primárne a sekundárne neznáme slabej formulácie podľa pravidla, že koeficient pri testovacej funkcii w je sekundárna premenná, získame [5]:

- primárna premenná: u ,
- sekundárna premenná: $ES \frac{du}{dx} = Q$,

ktorých definovanie je potrebné pre správne zadávanie okrajových podmienok problému.

Naša sekundárna premenná Q , však má svoj fyzikálny význam, vychádzajúci z rovníc (1), (2) a (3):

$$Q = ES \frac{du}{dx} = N. \quad (17)$$

Jedná sa teda o normálovú silu pôsobiacu v uzloch prvku. Pre naplnenie predpokladu, že kladná sila je taká, ktorá pôsobí v kladnom smere osi x , zavedieme značenie [5]:

$$Q_1^e = -N_1^e = - \left(ES \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_1^e}, \quad Q_3^e = N_3^e = \left(ES \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_3^e}. \quad (18)$$

Ak zavedieme nové značenie do rovnice (16), získame finálny tvar rovnice označovanej ako **slabá formulácia diferenciálnej rovnice**:

$$0 = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - w(x_1^e) Q_1^e - w(x_3^e) Q_3^e. \quad (19)$$

Pre zahrnutie možných nenulových sekundárnych neznámych je nutné modifikovať tvar slabej formulácie nasledovne [5]:

$$0 = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx - \int_{x_1^e}^{x_3^e} wq dx - w(x_1^e) Q_1^e - w(x_3^e) Q_3^e. \quad (20)$$

2.4 Odvodenie prvkovej matice tuhosti a vektorov zaťaženi

Ak v slabej formulácii vykonáme substitúciu pre u z rovnice (8) a za testovaciu funkciu w dosadíme jednotlivé bázové funkcie ψ_i^e , pre $i \in \{1,2,3\}$, získame sústavu troch rovníc (jedna rovnica pre jeden uzol v prvku) [5]:

$$0 = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{d\psi_1^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{\psi_j^e}{dx} \right) \right) dx - \int_{x_1^e}^{x_3^e} \psi_1^e q dx - \psi_1^e(x_1^e) Q_1^e - \psi_1^e(x_3^e) Q_3^e,$$

$$0 = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{d\psi_2^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{\psi_j^e}{dx} \right) \right) dx - \int_{x_1^e}^{x_3^e} \psi_2^e q dx - \psi_2^e(x_1^e) Q_1^e - \psi_2^e(x_3^e) Q_3^e, \quad (21)$$

$$0 = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{d\psi_3^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{\psi_j^e}{dx} \right) \right) dx - \int_{x_1^e}^{x_3^e} \psi_3^e q dx - \psi_3^e(x_1^e) Q_1^e - \psi_3^e(x_3^e) Q_3^e,$$

Rovnice môžeme ďalej upraviť prevedením členov so záporným znamienkom na druhú stranu rovnice. Taktiež vyjmemé konštanty z integrálu či využijeme možnosť zámény integrálu so sumou. S využitím (12) potom získame nasledovný tvar sústavy rovníc:

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{d\psi_1^e}{dx} \frac{\psi_j^e}{dx} \right) dx \right] u_j^e = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \psi_1^e q dx + Q_1^e,$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{d\psi_2^e}{dx} \frac{\psi_j^e}{dx} \right) dx \right] u_j^e = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \psi_2^e q dx + Q_2^e, \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{d\psi_3^e}{dx} \frac{\psi_j^e}{dx} \right) dx \right] u_j^e = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \psi_3^e q dx + Q_3^e.$$

V rovnici (22) bol zavedený parameter $Q_2^e = 0$, ktorý umožní vyjadriť sústavu rovníc (23) v kompaktnom tvare:

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{\psi_j^e}{dx} \right) dx \right] u_j^e = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \psi_i^e q dx + Q_i^e, \quad \text{pre } i \in \langle 1,2,3 \rangle. \quad (23)$$

Zavedieme substitúcie, ktoré zjednodušia ďalší zápis jednotlivých členov rovnice (23) [5]:

$$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left(ES \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{\psi_j^e}{dx} \right) dx, \quad f_i^e = \int_{x_1^e}^{x_3^e} q \psi_i^e dx, \quad (24)$$

kde $[K_{ij}^e]$ predstavuje takzvanú prvkovú maticu koeficientov (v štruktúrálnej úlohe označovaná ako **prvková matica tuhosti**). $\{f_i^e\}$ predstavuje takzvaný zdrojový vektor (v štruktúrálnej úlohe označovaný ako **prvkový vektor spojitého externého zaťaženia**). [5] Zavedením substitúcií môžeme rovnicu (23) prepísať do kompaktnejšieho maticového zápisu:

$$[K^e]\{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}. \quad (25)$$

Môžeme vidieť, že sústava rovníc (25) obsahuje $2j$ neznámych (pre kvadratický prvok $j = 3$). Tieto neznáme označujeme ako primárne a sekundárne **lokálne stupne voľnosti prvku** [5]. Z toho vyplýva, že pre riešenie sústavy rovníc je potrebných j podmienok pre každý z prvkov. Niektoré z týchto podmienok pochádzajú z okrajových podmienok (napríklad zamedzené posuvy v niektorých uzloch) a zvyšné vyjdú z rovnováhy sekundárnych premenných Q_i^e (vektoru stykových síl) v spoločných uzloch prvkov [5].

2.5 Prepojenie elementov v konečno-prvkovom modeli, prechod na globálnu sústavu rovníc

Pre odvodenie rovníc na úrovni prvkov sme izolovali jeden všeobecný element e z celého telesa, formulovali preň variačný problém (slabú formuláciu) a odvodili

konečno-prvkový model. Pre riešenie problému ako celku je však nutné zložiť prvky naspäť dokopy. Pred samotnou diskretizáciou predpokladáme spojitost' primárnych neznámych u a rovnováhu sekundárnych neznámych Q . Kontinuita primárnych premenných je založená na jednoznačnosti riešenia. Rovnováha sekundárnych premenných zasa na rovnováhe v bodoch spojenia elementov. Iná interpretácia znie, že rovnováha sekundárnych premenných je založená na spojitosti derivácie skutočného riešenia $\frac{du}{dx}$ na hraniciach prvkov. Z toho vyplýva [5]:

- 2 prvky na hranici zdieľajú navzájom práve 1 uzol (viz obr. (6)),
- ak na uzol nepôsobí externé zaťaženie vo forme osamelej sily, je celková sila pôsobiaca v tomto uzle nulová (sila pôsobiaca na uzol od prvku vľavo je v rovnováhe s rovnako veľkou opačne orientovanou silou pôsobiacou na uzol od prvku vpravo).

2.5.1 Redukcia počtu neznámych a počtu rovníc

V našich rovniciach zabezpečíme podmienku spojitosti premenovaním lokálnych stupňov voľnosti u_i^e na globálne stupne voľnosti U_i , pre $i \in \{1, \dots, n\}$, kde n predstavuje počet uzlov (pre sieť s m kvadratickými prvkami platí $n = 2m + 1$), na ktoré je teleso rozdelené [5]. Uzly počítame zľava doprava (v smere orientácie osi x), preto v našom prípade vyzerá prepis nasledovne:

$$\begin{aligned}
 u_1^1 &= U_1 \\
 u_2^1 &= U_2 \\
 u_3^1 &= u_1^2 = U_3 \\
 u_2^2 &= U_4 \\
 &\vdots \\
 u_3^{m-1} &= u_1^m = U_{n-2} \\
 u_2^m &= U_{n-1} \\
 u_3^m &= U_n
 \end{aligned} \tag{26}$$

Počet neznámych posuvov (jeden v každom uzle) je teda v novom značení n . Pre výpočet n neznámych však potrebujeme n rovníc. Počet rovníc v prvkovej sústave rovníc je 3. V globálnej sústave rovníc to predstavuje $3m$ rovníc, čo je o $3m - n$ viac ako je potrebných. Pre kvadratický prvok to predstavuje $3m - (2m + 1) = m - 1$ prebytočných rovníc. Prebytočné množstvo rovníc vzniklo prechodom z prvkových rovníc na globálne rovnice. Za testovaciu funkciu sme totiž dosadili bázové funkcie, ktoré nadobúdajú hodnotu 0 alebo 1, podľa uzlu, v ktorom daná funkcia vystupuje. Prvky však niektoré z uzlov zdieľajú, preto sa aj hodnoty bázových funkcií v niektorých rovniciach vyskytli duplicitne, čo spôsobilo nárast množstva rovníc v globálnej sústave rovníc. Funkčné hodnoty bázových funkcií na hraniciach, boli teda použité dvakrát. Napríklad funkčné hodnoty ψ_3^1 a ψ_1^2 v uzle $i = 3$, ktorému odpovedá globálny posuv U_3 , majú obe hodnotu 1 a získali sme z nich 2 rovnice. Sčítaním ľavých a pravých strán týchto rovníc získame jednu rovnicu, ktorá správne popíše správanie sa uzlu 3 a zároveň zredukuje počet rovníc [5]. Opakovaním tohto postupu znížime počet rovníc z $3m$ na $2m + 1$, čo odpovedá n neznámym.

Po týchto úpravách možno zapísať maticový tvar globálnej sústavy konečno-prvkového modelu nasledovne [5]:

$$[K]\{U\} = \{f\} + \{Q\}, \tag{27}$$

pričom platí, že $[K]$ je **globálnou maticou tuhosti** o veľkosti $n \times n$. Vektor $\{U\}$ je stĺpcový vektor označovaný ako **globálny vektor deformačných parametrov**. $\{U\} = \{U_1, U_2, U_3, \dots, U_n\}^T$. Na pravej strane rovnice vystupuje **globálny vektor spojitého zaťaženia** $\{f\} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}^T$, ktorý predstavuje rozloženie spojitého zaťaženia $q(x)$ do uzlov prútu. [8] Aplikované spojité zaťaženie tak nie je v MKP reprezentované spojite, ale ako diskrétna staticky ekvivalentná náhrada spojitého zaťaženia v jednotlivých uzloch. Posledný vektor, $\{Q\} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n\}^T$, predstavuje vonkajšie zaťaženie osamelých síl pôsobiacich na uzly telesa. Tieto sily môžu byť zadané z okrajových podmienok, no môžu vystupovať aj ako neznáme, ako sily vo väzbách či v mieste predpísanej hodnoty posuvu. Označujeme ho **globálny vektor osamelých síl** [5].

Na základe rovnakej fyzikálnej podstaty vektorov $\{f\}$ a $\{Q\}$ ich možno zlúčiť dokopy, pre zjednodušenie zápisu: $\{f\} + \{Q\} = \{F\}$. Vektor $\{F\}$ tak predstavuje **vektor celkového zaťaženia (globálny vektor zaťaženia)** v uzloch telesa [8].

2.5.2 Matematický zápis globálnych matíc

Ako neznáme môžu v našom MKP modeli vystupovať posuvy $\{U\}$ ale aj zaťaženia $\{Q\}$. Platí však, že v každom uzle poznáme vždy hodnotu práve jednej z týchto dvoch veličín [5]. Hodnota $\{Q\}$ je častokrát nulová, prípadne zadaná. Ako neznáma sa môže teda v rovnici vyskytnúť, pokiaľ bude známa hodnota posuvu v danom uzle. Pokiaľ je hodnota posuvu neznáma, musí byť hodnota osamelej sily tom istom uzle známa [5]. Zostavenie vektorov $\{Q\}$ a $\{U\}$ teda nepredstavuje väčší problém.

Globálne matice tuhosti a spojitého zaťaženia je vhodné zostavovať pomocou prvkových matíc, ktoré sme odvodili v kapitole 2.4. Za týmto účelom odvodíme **maticu konektivity** $[B]$, ktorá reprezentuje vzťah medzi prvkovým značením uzlov a globálnym značením uzlov. Člen matice konektivity b_{ij} predstavuje pozíciu v globálnom číslovaní uzlov i – *tého* prvku a j – *tého* uzlu [5]. Pre prút zobrazený na obr. (6), veľkosti 2×3 (2 prvky, 3 uzly), by táto matica mala tvar:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Pre demonštráciu pracujme aj ďalej s príkladom uvedeným na obr. (6). Nakoľko je prút rozdelený na 2 prvky, budeme potrebovať dve prvkové matice: K^1, K^2 a dva vektory f^1, f^2 . Prvková matica tuhosti a vektor spojitého zaťaženia by mali všeobecne tvar:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}, \quad \{f^e\} = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

kde počet prvkov $e = \{1,2\}$. Do (z počiatku) nulovej matice $[K]$ s rozmermi $n \times n$ vložíme prvkovú maticu tuhosti odpovedajúcu 1. prvku $[K^1]$ tak, že koeficienty 1. riadku matice konektivity $B(1, :) = [1 \ 2 \ 3]$ určia postupne stĺpce a riadky, kam hodnoty uložíme [5]. Po prvom kroku tak matica $[K]$ vyzerá nasledovne:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

V ďalšom kroku nás matica konektivity $B(2, :) = [3 \ 4 \ 5]$ odkazuje na „štvorcovú“ oblasť od riadku 3, stĺpca 3, po riadok 5, stĺpec 5. Prvky z matice K^2 však musíme do globálnej matice tuhosti **pričítať**, nie ich nahradiť [5].

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Môžeme si všimnúť, že prvková matica $[K^e]$ je symetrická. Rovnako ako aj globálna matica tuhosti $[K]$. Zároveň môžeme pozorovať na matici $[K]$ oblasti s hodnotou 0. Pri vysokom počte uzlov počet nulových hodnôt výrazne narastá. Matica tuhosti je vlastne maticou plnou núl, okrem hlavnej diagonály, diagonály nad a pod hlavnou diagonálou. Globálny vektor spojitého zaťaženia $\{f^1\}$ zostavíme podobne ako maticu $[K]$ [5]. Do (z počiatku) nulového stĺpcového vektora rozmeru 5×1 ukladáme prvkový vektor $\{f^1\}$, ktorý umiestnime na pozície podľa hodnôt matice konektivity v prvom riadku, odpovedajúcemu prvému prvku $B(1, :) = [1 \ 2 \ 3]$:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (32)$$

V ďalšom kroku využijeme druhý riadok matice konektivity, odpovedajúci druhému prvku a opäť pričítame, nie nahrádzame, hodnoty prvkového vektora pre druhý prvok $\{f^2\}$ [5]:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \end{Bmatrix}. \quad (33)$$

Nakoľko bolo zavedené pravidelné číslovanie prvkov i uzlov zľava doprava, je možné zostaviť globálne matice $[K]$ a $\{f\}$ i bez použitia matice konektivity $[B]$. Všeobecne však môže byť číslovanie náhodné. V takom prípade je pre zostavenie globálnych matíc matica konektivity nevyhnutná.

Pre riešenie sústav rovníc v MKP riešiči je možné používať Gaussovú eliminačnú metódu, Jacobiho metódu, Gauss-Seidlovu metódu či iné. Najvhodnejšie je však voliť riešiče optimalizované pre sústavy s vysokým počtom nulových členov, pre skrátenie výpočtového času.

2.6 Implementovanie okrajových podmienok

Implementovanie okrajových podmienok riešeného problému do sústavy rovníc (28) je nutnou podmienkou pre vyriešenie tejto sústavy [5]. Bez nej, je totiž matica $[K]$ singulárna, teda nemá jednoznačné riešenie. Konkrétne je možných nájst' nekonečne veľa riešení, čo možno fyzikálne interpretovať ako pohyb telesa ako tuhého celku [8]. Zadaním dostatočného množstva okrajových podmienok tak konkretizujeme hľadané riešenie na práve jedno.

Okrajové podmienky zadávame formou predpísania hodnôt primárnych (u) či sekundárnych (Q) neznámych [5]. Pre príklad, môžeme uviesť okrajové podmienky:

$$\begin{aligned} u_1^1 &= U_1 = 0, \\ Q_3^2 &= Q_5 = 100, \end{aligned} \quad (34)$$

čo v prípade prúťového telesa rozdeleného na 2 kvadratické prvky, môžeme interpretovať ako zamedzenie posuvov na ľavej časti prútu (v prvom uzle) a podľa vzťahov (18), pôsobenie ťahovej sily (smerujúcej von z telesa) o veľkosti 100 N v poslednom uzle prútu. Známých hodnôt však môže byť aj viac. Ich zápis by bol rovnaký, ako bolo uvedené v rovniciach (34). V prípade, že v danom uzle nepôsobí žiadne externé zaťaženie a nie je predpísaná hodnota posuvu, je sila v tomto uzle nulová ($Q_i^e = 0$). Platí však, že pre každú z rovníc, vystupujúcu v lineárnej sústave rovníc poznáme vždy posuv alebo zaťažovaciu silu. Nikdy nie oboje. Z toho však vyplýva, že predpísaním hodnoty posuvu nám budú vystupovať neznáme na ľavej i pravej strane rovníc. Riešením tohto problému je nasledujúca modifikácia sústavy lineárnych rovníc:

- z pravej strany rovnice (vektor celkového zaťaženia $\{F\}$) odčítame súčin známeho posuvu a príslušného stĺpca globálnej matice tuhosti

$$\{F\} = \{F\} - \begin{Bmatrix} K_{1i}U_i \\ \vdots \\ K_{ni}U_i \end{Bmatrix}, \quad (35)$$

- z matice $[K]$ a vektorov $\{F\}$ a $\{U\}$ odstránime riadky odpovedajúce číslam uzlov, v ktorých hodnotu posuvov poznáme
- z matice $[K]$ odstránime všetky stĺpce odpovedajúce číslam uzlov, v ktorých hodnotu posuvov poznáme

Uvedenými úpravami získame modifikovanú sústavu rovníc, ktorej riešením budú hľadané posuvy $\{U\}$:

$$[K^*]\{U^*\} = \{F^*\}. \quad (36)$$

Aplikovať nenulové okrajové podmienky je možné aj rozpísaním sústavy rovníc (28) na dve sústavy rovníc:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Vektor U_2 potom obsahuje iba známe, predpísané, posuvy a vektor F_1 iba známe externé zaťaženia [8]. Tento prístup nebol využitý v našom riešení, no využíva sa častejšie, kvôli nižšiemu výpočtovému času.

3 Postprocessing výsledkov

Vypočítané hodnoty posuvov v jednotlivých uzloch môžeme ďalej využiť pre spočítanie sekundárnych neznámych (napríklad normálových napätí σ , z ktorých následne možno, pomocou vzťahov (1), (2) a (3), spočítať hodnoty normálových síl pôsobiacich v telese). Zároveň možno získané hodnoty využiť pre grafické zobrazenie priebehu vzniknutej deformácie. Ak pre daný problém existuje aj analytické riešenie, je možné porovnať analytické riešenie s numerickým riešením a výsledky zhodnotiť. V prípade, že sa numerické riešenie nezhoduje s analytickým, je možné zvýšiť počet použitých prvkov a výpočet zopakovať. Rovnako je vhodné postupovať pri neznalosti analytického riešenia. Po výpočte neznámych s daným počtom je vhodné počet prvkov navýšiť a výpočet zopakovať. Ak sa výsledky riešenia zhodujú s predchádzajúcimi, prípadne sa iba minimálne odlišujú, znamená to, že ďalším navýšením počtu prvkov nedosiahneme vyššiu presnosť, iba predĺžime výpočetný čas.

Pomocou metódy konečných prvkov získame hodnoty neznámych posuvov v uzloch. Zároveň poznáme bázové funkcie, ktorých lineárnou kombináciou aproximujeme hľadané riešenie nad každým z prvkov. Tým sme získali funkčný predpis aproximácie hľadaného riešenia, a preto môžeme spočítať hodnotu posuvu aj v inom bode ako v mieste uzla, čo je možné využiť pre jemnejšie vykreslenie priebehov posuvov, napätí či normálových síl.

Pre kvadratický prvok platí, že aproximované posuvy sú po častiach kvadratické. Nakoľko sú normálové sily a normálové napätia úmerné derivácii posuvov, vyjdú tieto priebehy vo všeobecnosti po častiach nespojité a lineárne [5]. Lineárnym priebehom však nemusí byť riešenie aproximované presne, preto môže byť nutné rozdeliť teleso na väčší počet konečných prvkov, čím získame hladší priebeh týchto kriviek a minimalizujeme rozdiely medzi skutočným a aproximovaným riešením.

4 Vlastná implementácia MKP

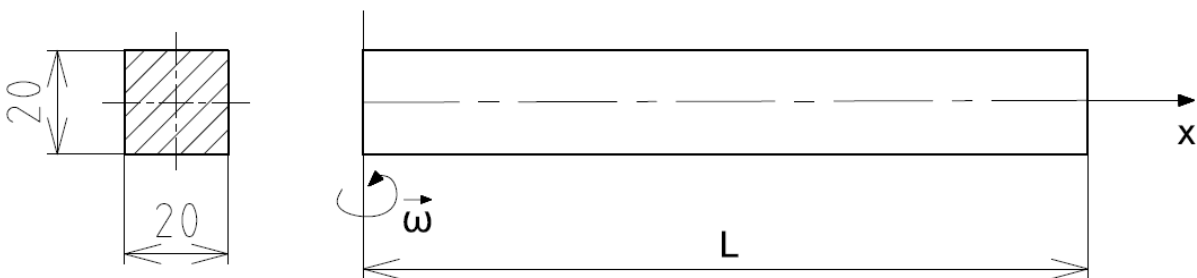
V predchádzajúcich kapitolách sme uvideli a odvodili teóriu potrebnú k naprogramovaniu metódy konečných prvkov. Na tomto teoretickom základe bol zostavený skript v softvéri Matlab, v ktorom je možné numericky vyriešiť zaťažovanie prútových telies namáhaných na ťah a tlak. Nakoľko program Matlab poskytuje širokú škálu príkazov, medzi ktorými sú funkcie pre integrovanie, derivovanie a pod., boli tieto príkazy využité aj pri programovaní nášho riešiča MKP. Nebolo tak potrebné programovať vlastné metódy pre riešenie lineárnych rovníc či iné matematické operácie využívané metódou konečných prvkov.

V druhej kapitole bola odvodená globálna matica tuhosti a globálny vektor spojitého zaťaženia, ktoré boli zostavené z prvkových matíc a vektorov. Pre výpočet prvkových matíc a vektorov (25) je potrebné derivovať bázové funkcie a následne vzťahy, v ktorých vystupuje derivácia zintegrovat' podľa dx . V zjednodušenej podobe MKP riešiča by bolo možné urobiť tento krok analyticky, pre konkrétny prípad zaťažovania, materiálu, priečného prierezu a podobne. Následne možno nadobudnuté analytické vzťahy aplikovať do zvyšku metódy. Prístup, ktorý bol zvolený v tomto prípade berie do úvahy možnosti softvéru Matlab a pre riešenie prvkových matíc a vektorov využíva symbolickú a numerickú integráciu a deriváciu. Dôsledkom je univerzálnosť naprogramovaného riešiča, v ktorom možno všetky vstupy zadať ako ľubovoľnú funkciu súradnice x . Nie len zaťaženie $q(x)$, ale aj priečny prierez $S(x)$ či modul pružnosti materiálu $E(x)$ môžu byť zadané podľa potrieb užívateľa.

Pre demonštráciu kvalít a obmedzení naprogramovaného riešiča boli vybrané príklady, ktoré boli pre porovnanie riešené analyticky, vlastnou implementáciou MKP a komerčným softvérom (v tomto prípade bol zvolený ANSYS Workbench, skrátene Ansys). Skripty pre softvér Matlab s naprogramovaným riešením upraveným pre každú úlohu tvoria prílohu tejto práce.

4.1 Prút namáhaný odstredivou silou

Prvým z príkladov, na ktorom budeme demonštrovať výpočtovú kapacitu nášho MKP riešiča je zaťaženie prútového telesa odstredivou silou (obr. (8)). Pomyselné sa teda jedná o 3D teleso, rotujúce okolo stálej osi otáčania. V našom prípade budeme toto teleso uvažovať ako 1D prútové teleso zaťažené líniovou (odstredivou) silou. Funkčnú závislosť popisujúcu zaťaženie odstredivou silou odvodíme zo vstupných údajov (hustota $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, uhlová rýchlosť $\omega = 2000 \text{ ot/min}$, plocha štvorcového priečného prierezu $S = 20^2 \text{ mm}^2 = 400 \text{ mm}^2$). V mieste upevnenia prútového telesa na os otáčania zamedzíme posuvy ($U_1 = 0$). Dĺžku telesa uvažujme $L = 1 \text{ m}$ a Youngov modul pružnosti $E = 210 \text{ GPa}$.



Obr. 8: Grafické zobrazenie prvej demonštračnej úlohy

Funkčnú závislosť pre líniovú (odstredivú) silu potom môžeme vyjadriť ako:

$$\begin{aligned} dF(r) &= a(r)dm \\ &= \omega^2 r \rho S dr \\ N(x) &= \int_x^L dF(r) = \int_x^L \omega^2 r \rho S dr = \frac{\omega^2 \rho S (L^2 - x^2)}{2} \end{aligned} \quad (38)$$

$$q(x) = -\frac{dN(x)}{dx} = \omega^2 \rho S x \quad (39)$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame:

$$q(x) = 137,7358 \cdot x \text{ N/mm} . \quad (40)$$

Pre overenie výsledkov odvodíme pre takto definovanú úlohu aj analytické riešenie, pričom vyjdeme z rovnice (7):

$$\begin{aligned} q &= -\frac{d}{dx} \left(ES \frac{du}{dx} \right) \\ \frac{d^2 u}{dx^2} &= -\frac{1}{ES} q = -\frac{\rho \omega^2 x}{E} \\ \varepsilon(x) = \frac{du}{dx} &= \int \left(-\frac{\rho \omega^2 x}{E} \right) dx = -\frac{\rho \omega^2 x^2}{2E} + c_1 \\ u(x) &= \int \left(-\frac{\rho \omega^2 x^2}{2E} + c_1 \right) dx = -\frac{\rho \omega^2 x^3}{6E} + c_1 x + c_2 \end{aligned} \quad (41)$$

Dosadením okrajových podmienok vyplývajúcich zo zadania, získame konštanty c_1 a c_2 :

$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\Rightarrow c_2 = 0 \\ \varepsilon(L) = 0 &\Rightarrow c_1 = \frac{\rho \omega^2 L^2}{2E} \end{aligned} \quad (42)$$

Výsledná analytická rovnica popisujúca posuvy má potom tvar:

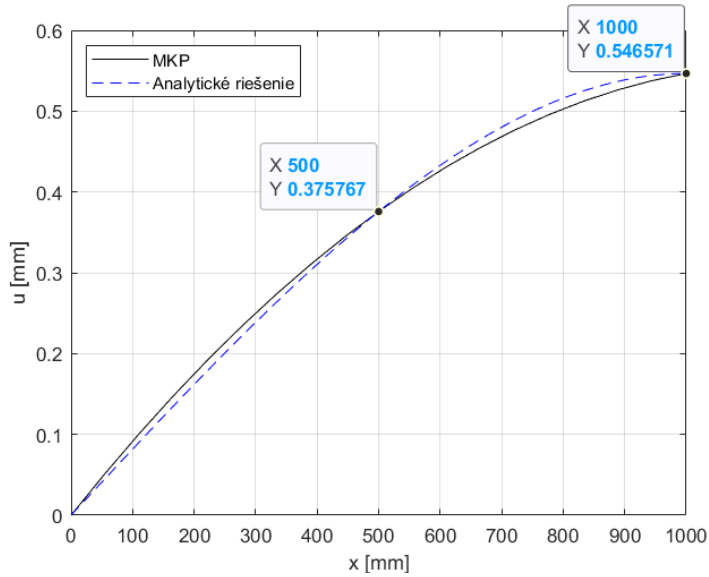
$$u(x) = -\frac{\rho \omega^2}{6E} x^3 + \frac{\rho \omega^2 L^2}{2E} x = \frac{\rho \omega^2}{6E} (-x^3 + 3L^2 x) \quad (43)$$

S využitím vzťahu (3) a pomerného pretvorenia ε , odvodeného v rovnici (42) získame rovnicu popisujúcu normálové napätia v prúte:

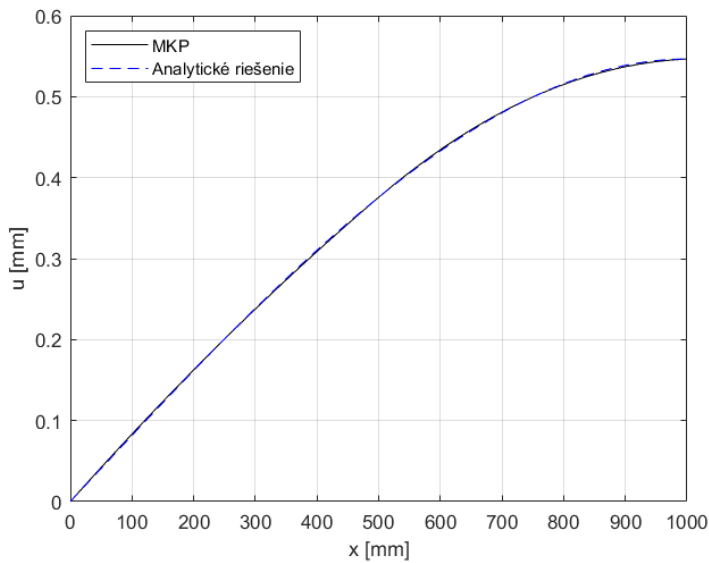
$$\sigma(x) = E \left(-\frac{\rho \omega^2 x^2}{2E} + \frac{\rho \omega^2 L^2}{2E} \right) = \frac{\rho \omega^2 (L^2 - x^2)}{2} \quad (44)$$

Na obrázku (9) môžeme pozorovať porovnanie priebehu posuvov pre 1 prvok. Navýšením počtu prvkov v MKP dosiahneme presnejšie výsledky, čo môžeme vidieť už pri 2 prvkoch (obr. (10)). Pri prúte rozdelenom na 3 kvadratické prvky (obr. (11)) už prakticky nebadáť rozdiel medzi analytickým a numerickým riešením. Zvýšením počtu prvkov však zároveň zväčšujeme globálnu maticu tuhosti, a teda pridávame ďalšie rovnice a neznáme, ktoré je potrebné vyriešiť. Pri vysokom počte prvkov sa tak môže výpočtový čas výrazne predĺžiť.

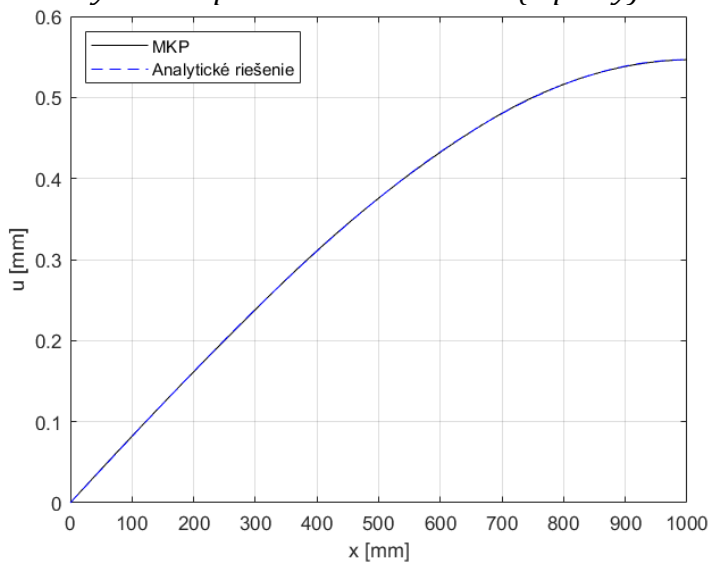
Rozdiel vo výsledku medzi analytickým a numerickým riešením je viditeľný vďaka skutočnosti, že zaťaženie pôsobiace na prút sa mení v závislosti od polohy x . Pokiaľ by bol prút zaťažený konštantnou líniovou silou, už jeden kvadratický prvok by aproximoval hľadané riešenie presne. Naopak, ak by líniová sila závisela od polohy x vo vyššej mocnine, bolo by nutné, pre presnejšie výsledky, zvýšiť počet prvkov.



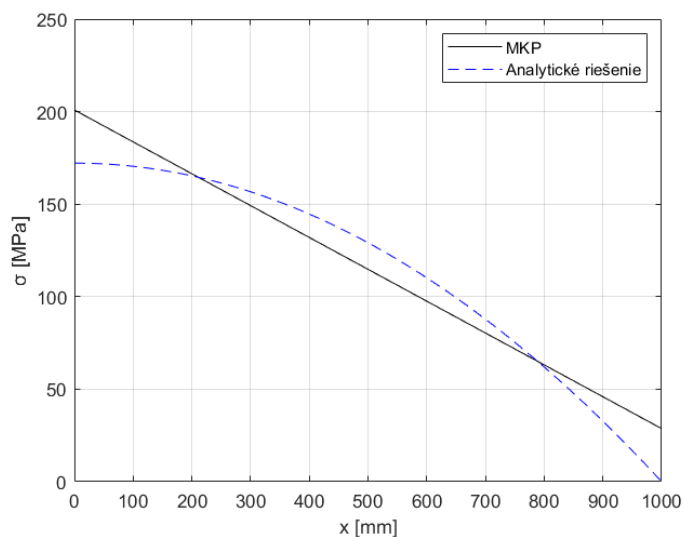
Obr. 9: Porovnanie výsledkov posuvov: MKP riešenie (1 prvok) a analytické riešenie



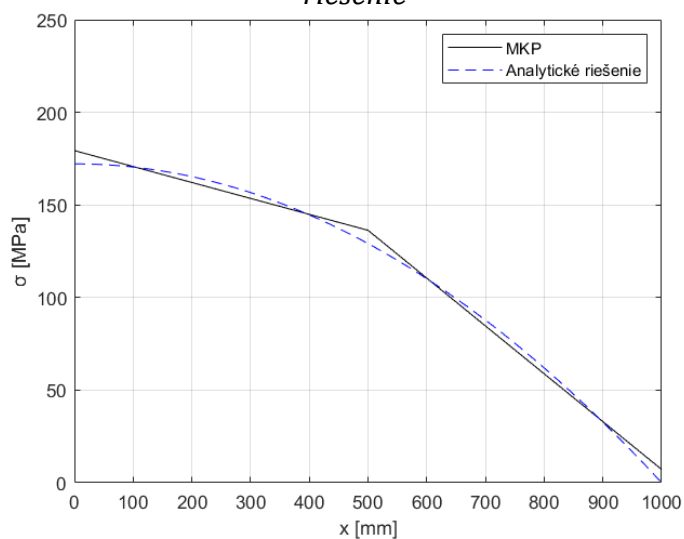
Obr. 10: Porovnanie výsledkov posuvov: MKP riešenie (2 prvky) a analytické riešenie



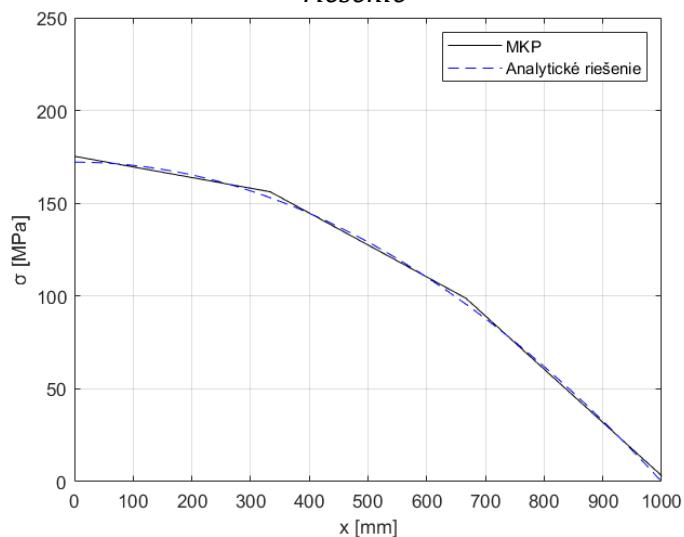
Obr. 11: Porovnanie výsledkov posuvov: MKP riešenie (3 prvky) a analytické riešenie



Obr. 12: Porovnanie výsledkov normálových napätí: MKP riešenie (1 prvok) a analytické riešenie



Obr. 13: Porovnanie výsledkov normálových napätí: MKP riešenie (2 prvky) a analytické riešenie



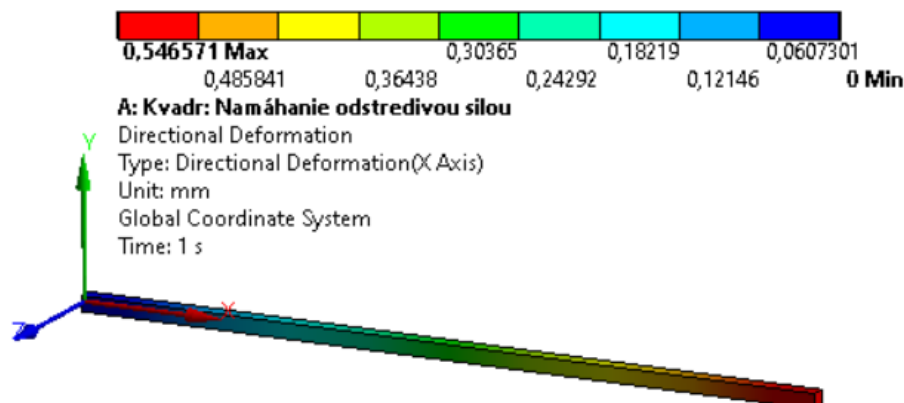
Obr. 14: Porovnanie výsledkov normálových napätí: MKP riešenie (3 prvky) a analytické riešenie

Na grafoch normálových napätí (obr. (12) až (14)) si môžeme všimnúť, že pre kvadratický prvok platí, že napätia sú po častiach lineárne. Vychádza to z rovníc (1), (2) a (3), ktoré definujú, že napätie je priamo úmerné derivácii posuvov. Nakoľko posuvy u aproximujeme kvadratickými bázovými funkciami, ich derivácie sú lineárne. Zvyšovaním počtu prvkov znižujeme chybu, ktorá je s týmto problémom spojená. Pridaním dostatočného množstva prvkov môžeme dosiahnuť výsledky, ktoré budú presnejšie popisovať reálne normálové napätia, ktoré v prúte po zaťažení vzniknú.

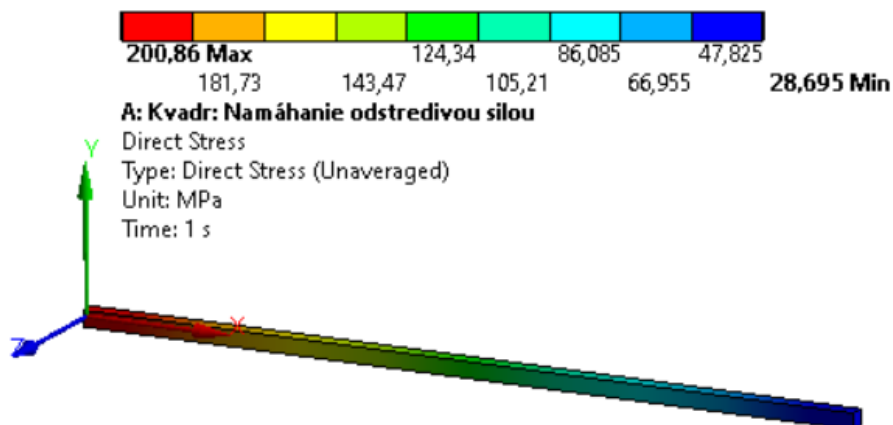
Pre porovnanie sme úlohu riešili aj v programe ANSYS Workbench. Prúťové teleso v Ansyse je vymodelované pomocou jednej čiary, ktorej je priradený štvorcový priečny prierez. Pre celé teleso je nastavený 1 prvok (lineárny: obr. (18) a (19), kvadratický: obr. (16) a (17)). Typ použitého prúťového telesa je „Beam“. ANSYS Workbench ponúka pre prúťové telesá aj prvky typu „Link“, ktorých uzly majú v priestore iba 3 stupne voľnosti (posuvy v troch osiach) a prenášajú iba ťahové či tlakové zaťaženia, čo by bolo pre našu aplikáciu vyhovujúce. Neumožňujú však aplikovanie premenlivého líniového zaťaženia, preto neboli použité. V okrajových podmienkach bolo nutné zaistiť posuvy a natočenia v ľavej časti prúťu, nakoľko uzly prúťov typu „Beam“ majú 6 stupňov voľnosti (okrem 3 posuvov aj 3 natočenia). Práve z tohto dôvodu bola použitá pre prvý uzol väzba „Fixed Support“, ktorá položí všetky stupne voľnosti rovné nule. Prúť bol zaťažený, podľa zadania, premenlivým líniovým zaťažením definovaným rovnicou (40) (obr. (15)).



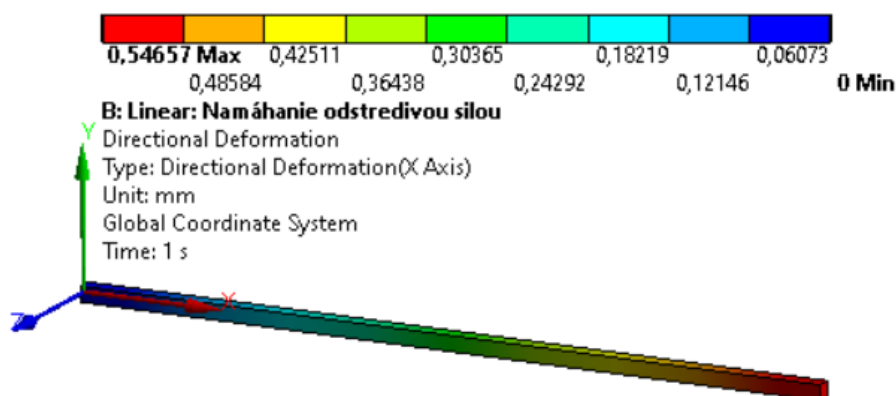
Obr. 15: Okrajové podmienky v programe Ansys pre zaťaženie odstredivou silou



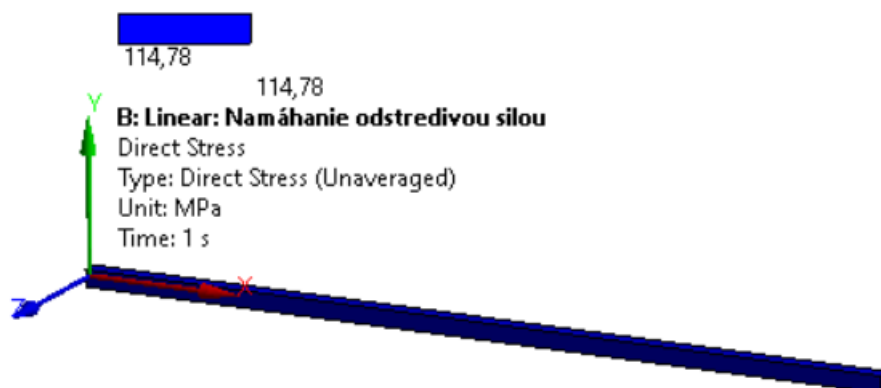
Obr. 16: Posuv vypočítaný programom Ansys (kvadratický prvok) pre zaťaženie odstredivou silou



Obr. 17: Normálové napätie vypočítané programom Ansys (kvadratický prvok) pre zaťaženie odstredivou silou



Obr. 18: Posuv vypočítaný programom Ansys (lineárny prvok) pre zaťaženie odstredivou silou



Obr. 19: Normálové napätie vypočítané programom Ansys (lineárny prvok) pre zaťaženie odstredivou silou

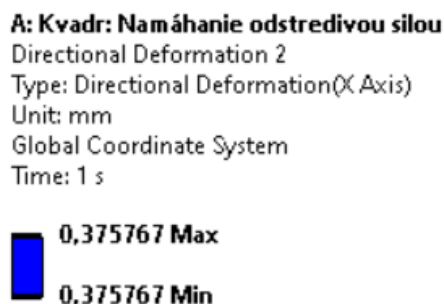
Porovnaním výsledkov posuvov z Ansysu, nášho MKP riešiča a analytického riešiča, môžeme dôjsť k niekoľkým záverom. Výsledky nášho MKP riešiča s kvadratickými prvkami sa zhodujú s výsledkami posuvov z Ansysu vo všetkých uzloch, keď nastavíme rozdelenie prútu na 1 kvadratický prvok. Nakoľko lineárnym prvkom chýba stredný uzol, môžeme porovnať hodnoty iba v krajných uzloch. Z teórie metódy konečných prvkov predstavenej v kapitole 2 však vyplýva, že posuvy sú nad lineárnym prvkom aproximované lineárnou funkciou, teda priamkou. Zo znalosti 2 bodov (2 výsledkov v krajných uzloch) tak môžeme dopočítať aj hodnotu posuvu v mieste, kde sa pre

kvadratický prvok nachádza stredný uzol. Ten sme zvolili ekvidistančne medzi 2 krajné uzly prvku a teda sa nachádza v polovici telesa, 500 mm od ľavého konca.

Z uvedeného potom vyplýva, že hodnotu posuvu v strede telesa pre lineárny prvok vypočítame ako:

$$u(x = 500) = \frac{u(x = 1000)}{2} = \frac{0,54657}{2} \text{ mm} = 0,273285 \text{ mm}, \quad (45)$$

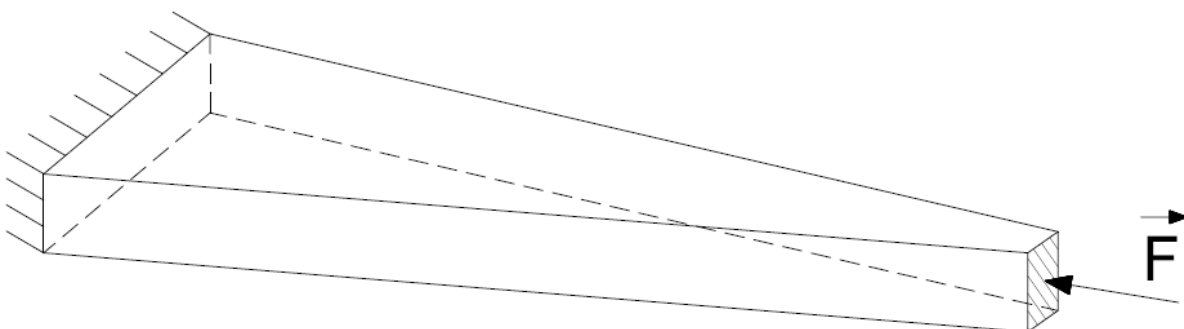
čo môžeme porovnať s hodnotou posuvu v strednom uzle (ktorý odpovedá rovnakej polohe $x = 500 \text{ mm}$) nášho riešiča, zobrazenej na obr. (9) a hodnotou zo softvéru Ansys, ktorú vykreslíme pomocou príkazu „Mesh by Id“, obr. (20). Porovnaním týchto hodnôt môžeme opäť potvrdiť tvrdenie, že sa výsledky z nášho riešiča zhodujú s tými z komerčného softvéru Ansys, pri nastavení kvadratického prvku. Oproti lineárnemu prvku si môžeme všimnúť, že kvadratický prvok aproximuje hľadané riešenie v tomto bode presnejšie. Presná hodnota z analytického riešenia predstavuje $u_{an}(x = 500) = 0,375767 \text{ mm}$, čo je totožná hodnota s výsledkom z nášho riešiča i Ansysu.



Obr. 20: Posuv v strednom uzle kvadratického prvku – Ansys

Môžeme taktiež pozorovať zaujímavý rozdiel, ktorý vznikol pri vykreslení vzniknutých normálových napätí. Ako bolo uvedené, napätia sú úmerné derivácii posuvu, z čoho vyplýva, že pre bazové funkcie polynómu 1. stupňa budú napätia nad prvkami konštantné (viz obr. (19)). Pre kvadratický prvok, sú napätia nad prvkami lineárne (obr. (12) až (14)). Toto demonštruje výrazné nepresnosti, ktorých sa pri použití malého počtu lineárnych prvkov môžeme dopustiť. Nevýhoda kvadratického prvku, teda vyšší počet uzlov, ktorý je priamo previazaný s nárastom počtu lineárnej sústavy rovníc a tým aj výpočtového času, je kompenzovaná vyššou presnosťou aproximovaného riešenia pri rovnakom počte použitých prvkov.

4.2 Prút s premenlivým priečnym prierezom



Obr. 21: Grafické zobrazenie druhej demonštračnej úlohy

Ďalšou z úloh zvolených pre demonštráciu možností a funkčnosti nášho riešiča je prútové teleso s premenlivým priečnym prierezom, ktoré budeme zaťažovať osamelou

silou, pôsobiacou na konci prútu. Druhý koniec prútu bude votknutý, teda z nášho pohľadu stačí poznamenať, že posuv prvého uzlu bude stanovený na nulu. Plocha prierečného prierezu má konštantnú výšku $a = 20 \text{ mm}$ a premenlivú šírku $b = (50 - 0,04 \cdot x) \text{ mm}$. Platí teda $S(x) = a \cdot b(x)$. Youngov modul pružnosti uvažujeme $E = 210 \text{ GPa}$ a dĺžku telesa $L = 1000 \text{ mm}$. Zaťažovacia sila o veľkosti $F = 35 \text{ kN}$ pôsobí do telesa (tlak) a vyvolá v telese normálovú silu $N = -35 \text{ kN}$. V riešiči však predpíšeme silu zápornú, $F = -35 \text{ kN}$, čím v programe definujeme, že smer pôsobenia sily je proti kladnému smeru osi x .

Pre kontrolu a zhodnotenie numerických výsledkov odvodíme analytické riešenie. Odvodenie bude vychádzať z rovníc (1), (2), (3) :

$$u(x) = \int \left(\frac{N}{ES(x)} \right) dx, \quad (46)$$

$$u(x) = \frac{N}{E} \int \left(\frac{1}{ab} \right) dx = \frac{N}{E} \int \left(\frac{25}{a(1250 - x)} \right) dx, \quad (47)$$

$$u(x) = \frac{-25N}{Ea} \ln|1250 - x| + c_1. \quad (48)$$

Aplikovaním okrajovej podmienky, vychádzajúcej zo zadania úlohy, získame:

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{25N}{Ea} \ln(1250). \quad (49)$$

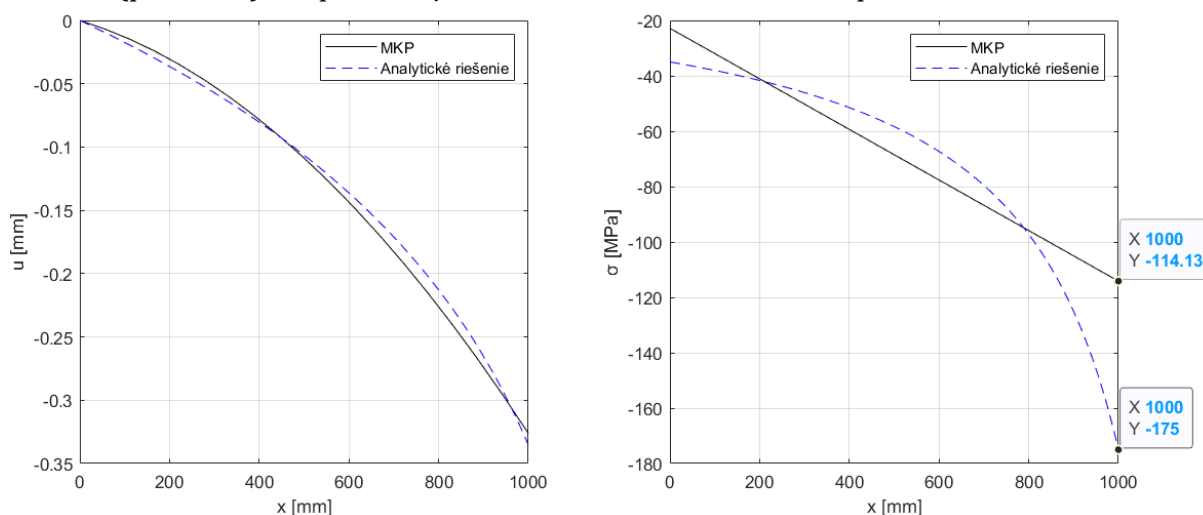
Výsledná analytická rovnice má potom tvar:

$$u(x) = \frac{-25N}{Ea} \ln|1250 - x| + \frac{25N}{Ea} \ln(1250). \quad (50)$$

Pre odvodenie normálového napätia využijeme vzťah (1), odkiaľ dostaneme:

$$\sigma(x) = \frac{N}{S} = \frac{N}{a(50 - 0,04x)}. \quad (51)$$

Nastavením podmienok v našom riešiči podľa zadania a s využitím jedného prvku získame výsledky, ktoré zobrazuje obr. (22). 1 kvadratický prvok neaproximuje hľadané riešenie presne, čo naznačuje už rovnica (50), popisujúca posuv analyticky. Funkcia predpisujúca posuv bodov (či uzlov) telesa je totiž logaritmická, preto ju kvadratická funkcia (parabola) neaproximuje v celom hľadanom intervale presne.

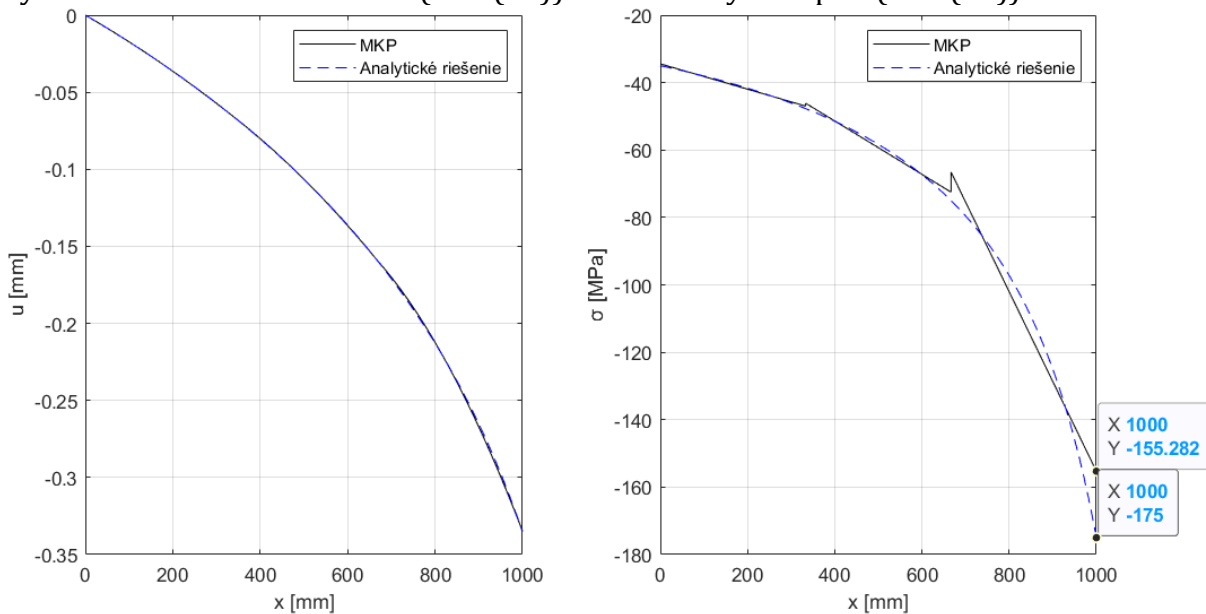


Obr. 22: Premennivý prierez, 1 prvok; zľava: posuv [mm], normálové napätie [MPa]

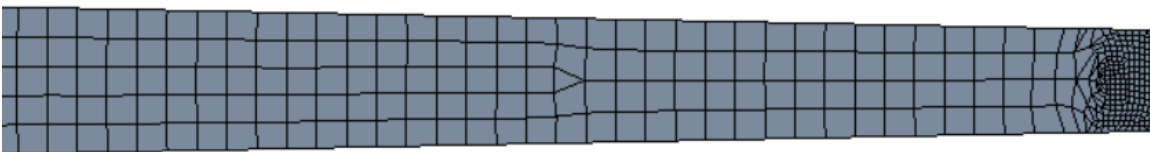
Rovnaká úvaha platí pre normálové napätie, ktoré taktiež nie je aproximované 1 prvkom dokonale. Napätia pri kvadratickom prvku sú po častiach (nad prvkami)

lineárne, preto funkciu popisujúcu priebeh napätí v tvare $\frac{1}{x}$ nemožno popísať za pomoci jedného prvku. Navýšením počtu prvkov však získame presnejšie numerické riešenie a odchýlka od presného riešenia klesne. Na obrázku (23) môžeme vidieť výsledky po navýšení počtu prvkov na 3. Napriek tomu, že krivka posuvu takmer kopíruje analytické riešenie, pre presnejšie zobrazenie priebehu napätí by bolo nutné navýšiť počet prvkov ešte viac. Zároveň vidíme, že platí, že napätia sú nie len po častiach lineárne, ale zároveň nemusia byť ani spojité.

Riešenie aj v tomto prípade porovnáme s programom ANSYS Workbench. V tomto programe však nemožno definovať premenlivý pričný prierez prútového telesa, preto budeme riešenie hľadať pomocou 2D úlohy, ktorej správanie definujeme ako rovinnú napätosť. Rovinnou napätosťou možno úlohu riešiť, nakoľko napätia vznikajú iba v rovine, v ktorej sa mení pričný prierez. Po vymodelovaní telesa zostavíme sieť konečných prvkov z kvadratických rovinných prvkov. Sieť nastavíme dostatočne jemnú po celej dĺžke telesa, aby spoľahlivo aproximovala hľadané riešenie (obr. (24)). Zároveň ju, kvôli vykresleniu šmykových napätí (obr. (28)), zjemníme v okolí najužšej časti prierezu. Zátťažovú silu aplikujeme na celú plochu telesa. Druhý koniec telesa zaväzbíme podmienkou „Fixed Support“, ktorá odoberie všetky stupne voľnosti prvkov. Následne vykreslíme deformácie v osi x (obr. (25)) a normálových napätí (obr. (26)).



Obr. 23: Premennivý prierez, 3 prvky; zľava: posuv [mm], normálové napätie [MPa]



Obr. 24: Ukážka siete konečných prvkov prútu s premenlivým pričným prierezom so zjemnením v oblasti aplikovanej sily F ; Ansys

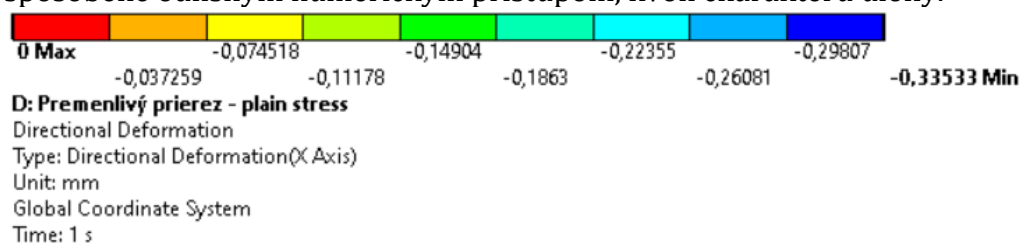
Pre porovnanie výsledkov simulácie v komerčnom softvéri, analytického riešenia a výsledkov nášho MKP riešiča využijeme posledný uzol (posledný bod telesa). V tomto bode je posuv i napätie maximálne. Hodnota posuvu analytického riešenia v poslednom bode telesa je $u_{an}(L) = -0,3353$. Výsledok posuvu z programu Ansys je $u_{Ansys}(L) = -0,33533$ (viz obr. (25)). Posuv posledného bodu v našom riešiči sa líši podľa počtu použitých prvkov. Preto pre porovnanie využijeme tabuľku 1.

Tab. 1: Porovnanie výsledkov posuvov pri použití rôzneho počtu prvkov v Matlab riešiči

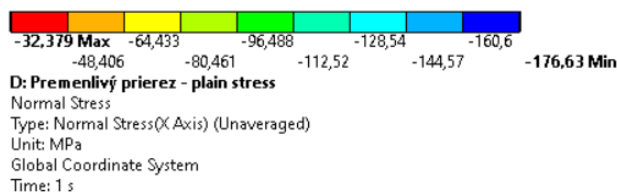
Počet prvkov	1	3	5	7	10	15
$u_{matlab}(L)[mm]$	-0,32609	-0,33481	-0,33521	-0,33527	-0,33529	-0,33530
$\sigma_{matlab}(L)[MPa]$	-114,13	-155,28	-165,21	-169,14	-171,73	-173,38

Porovnaním výsledkov z tabuľky 1 s výsledkom z analytického riešenia vidíme, že riešenie konverguje k presnému výsledku a dokonca pri použití 15 kvadratických prvkov je výsledok zhodný s analytickým riešením. Posuv krajného bodu prútvého telesa vypočítaný programom Ansys sa však mierne líši napriek jemnej sieti, ktorá bola pre výpočet zvolená. Hodnota posuvu dokonca mierne prevyšuje analytické riešenie, čo môže byť spôsobené numerickým prístupom, ktorým k úlohe softvér pristupuje, nakoľko sa jedná o 2D úlohu.

Porovnaním hodnôt normálových napätí dospejeme k podobnému záveru. Hodnota normálového napätia vypočítaná analyticky dosahuje v poslednom bode prútu $\sigma_{an}(L) = -175 MPa$. Napätie vypočítané softvérom Ansys je $\sigma_{Ansys}(L) = -176,63 MPa$ (viz obr. (26)) a napätie, ktoré sme vypočítali pre rôzny počet prvkov v našom riešiči zobrazuje tabuľka 1. Riešenie v našom MKP naprogramovanom v Matlabe postupne konverguje k výsledku analytického riešenia, hoci kvôli tomu, že sú napätia pre kvadratický prvok po častiach lineárne konverguje riešenie pomalšie ako pre posuvy. Výsledok z Ansysu mierne prevyšuje napätie z analytického riešenia, čo môže byť opäť spôsobené odlišným numerickým prístupom, kvôli charakteru úlohy.



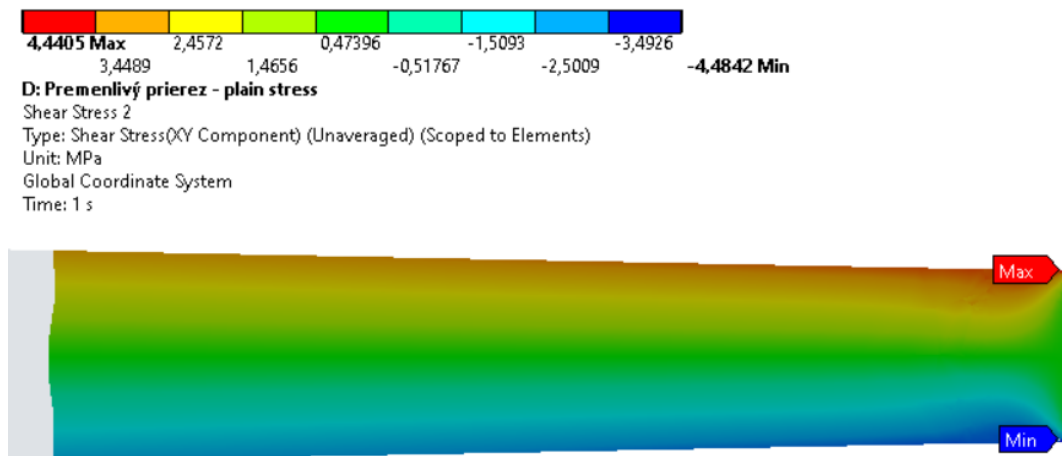
Obr. 25: Deformácia [mm] prútu s premenlivým priečnym prierezom; Ansys



Obr. 26: Normálové napätie [MPa] prútu s premenlivým priečnym prierezom; Ansys

Poslednou zaujímavosťou je výsledok šmykových napätí τ_{xy} získaný z numerického riešenia v programe Ansys, zobrazený na obr. (27). Vykreslením šmykového napätia sú totiž hodnoty symetrické okolo osi prútového telesa, ktorých veľkosť závisí na vzdialenosti od strednice a veľkosti priečného prierezu. V osi telesa (na strednici) je hodnota šmykového napätia nulová, no v krajných bodoch najužšej časti prútu (mierne vzdialenej od pôsobiska sily) je zobrazený extrém šmykového napätia. Nejedná sa však o numerickú odchýlku, ale fakt, ktorý reflektuje aj teória popísaná v [1], kde je analyticky odvodené, že pri jednoduchom ťahu či tlaku prútového telesa s meniacim sa priečnym prierezom vznikajú v telese šmykové napätia. Toto správanie náš 1D numerický model nevie zohľadniť. Naopak použitie 3D modelu v tomto prípade nebolo potrebné, pretože sa v smere osi z priečny prierez nemení (z čoho vyplýva hodnota šmykových napätí: $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$) ani nie je v tomto smere nijako inak obmedzovaná deformácia či aplikované zaťaženie (normálové napätie σ_z je preto rovné nule). Použitie 2D modelu, ktorého prvky majú menší počet stupňov voľnosti v porovnaní s objemovými prvkami, sa tak javí ako najvhodnejšie riešenie.

Hodnoty šmykových napätí, sú v porovnaní s normálovými nízke, no je vhodné na túto skutočnosť pamätať pri riešení telies so zložitejšie meniacim sa priečnym prierezom. Pri prudkých zmenách, z malého prierezu na väčší, by vzniknuté šmykové napätie mohlo mať významný vplyv, čo by náš MKP riešič vo výpočtoch nezohľadnil.



Obr. 27: Šmykové napätie [MPa] prútu s premenlivým priečnym prierezom; Ansys

4.3 Staticky neurčito uložený prút

Posledným z demonštračných príkladov bude staticky neurčito uložený prút, pre ktorý overíme hodnoty napätí a reakčných síl. Tieto hodnoty následne porovnáme s analytickým riešením a riešením v Ansyse. V kapitole 2.6 bolo uvedené, že okrajové podmienky možno predpísať aj pre viac ako jeden uzol, dokonca je to možné i pre všetky. V takom prípade by sme však poznali celé riešenie úlohy a strácal by sa význam použitia MKP.

V dôsledku výrobných nepresností, požiadaviek zákazníka, montážnym postupom či vplyvom iných okolností môže dôjsť k situácií, kedy prútové teleso nie je možné zaväzbiť v nedeformovanom stave. Majme situáciu, kedy je na jednom konci prútové teleso votknuté. Druhý koniec telesa by sme chceli zaväzbiť rovnako, no kvôli niektorému z vyššie uvedených dôvodov, je nutné teleso elasticky zdeformovať a zaväzbiť v deformovanom stave. Takáto deformácia v telese vyvolá normálové napätie. Zároveň, vplyvom elasticity materiálu bude mať teleso tendenciu vrátiť sa do pôvodnej

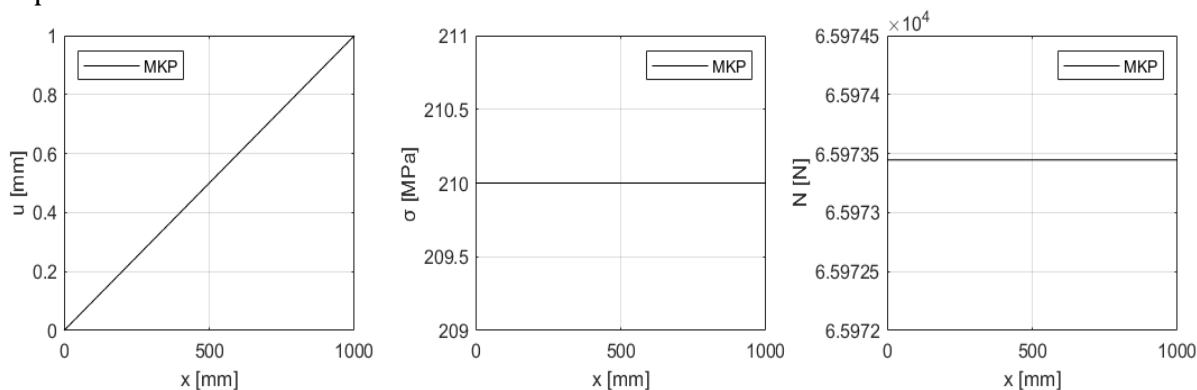
polohy, aby znížilo energiu napätosti, ktorá bola navýšená, čím vo väzbách vyvodí reakčné sily.

V nasledujúcom príklade budeme uvažovať prút dĺžky $L = 1\,000\text{ mm}$ s kruhovým pričným prierezom s priemerom $d = 20\text{ mm}$ a Youngovým modulom pružnosti $E = 210\,000\text{ MPa}$. Na ľavom konci telesa votkneme, teda v našom prípade, predpíšeme podmienku $U_1 = 0$. Druhý koniec telesa budeme uvažovať taktiež zaväzbený proti pohybu, no po natiahnutí o $\delta = 1\text{ mm}$. Pre posledný uzol teda predpíšeme nulový posuv: $U_{end} = 1\text{ mm}$.



Obr. 28: Grafické zobrazenie tretej demonštračnej úlohy

V tomto prípade nie je nutné odvodzovať vzniknuté normálové napätia analyticky, nakoľko je riešenie uvedené v kapitole 1, zavedením Hookovho zákona. Pomerná deformácia ε bola v rovnici (2) definovaná ako pomer zmeny dĺžky a pôvodnej dĺžky telesa, čo v našom prípade odpovedá $\varepsilon = \frac{1\text{ mm}}{L} = 0,001$. Prenásobením pomernej deformácie s Youngovým modulom pružnosti tak získame, podľa rovnice (3), normálové napätie $\sigma = 210\text{ MPa}$.



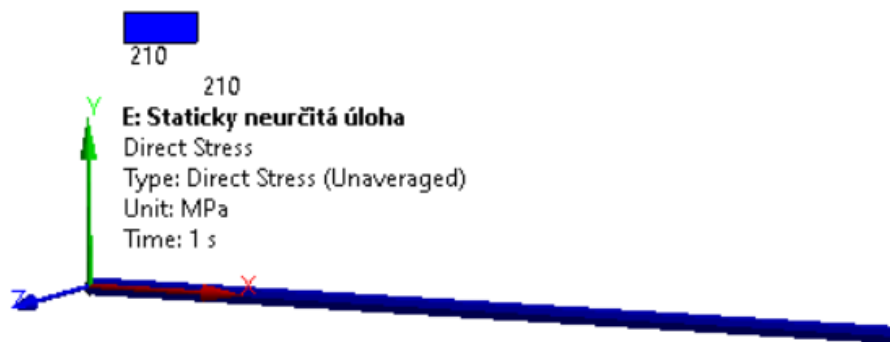
Obr. 29: Výsledky riešiča MKP, 1 prvok; zľava: posuv [mm], normálové napätie [MPa], posúvajúca sila [N]

Porovnaním výsledkov normálových napätí z MKP riešiča s teóriou definovanou v kapitole 1 môžeme vidieť, že sa výsledky zhodujú. Priebeh napätia je, podľa očakávaní, konštantný a deformácia, zapríčinená okrajovou podmienkou, vytvorila v telese lineárny priebeh posuvov, ktorý takisto odpovedá teoretickým predpokladom, ktoré stanovuje teória v kapitole 1. Úpravou vzťahu (1), môžeme overiť veľkosť normálovej sily, ktorá vznikne v dôsledku deformácie:

$$N = \sigma S = 210 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{20}{1\,000}\right)^2 \approx 65\,973,45\text{ N}. \quad (52)$$

Táto sila zároveň odpovedá veľkosti reakčných síl, ktoré vzniknú vo väzbách prútového telesa. Môžeme si všimnúť, že hodnota vypočítaná numericky (obr. (29)) je totožná s analytickým výsledkom.

Pre porovnanie numerických výsledkov reakčných síl a vzniknutého napätia opäť využijeme softvér Ansys. Okrajové podmienky nastavíme podľa zadania. Typ prvku zvolíme „Beam“ a počet prvkov prútového telesa nastavíme na jeden kvadratický. Výsledok normálových napätí demonštruje obrázok (30), na ktorom možno pozorovať konštantný priebeh napätia a zároveň zhodnú hodnotu s výsledkami z predchádzajúcich riešení, 210 MPa . Reakčné sily vypočítané softvérom Ansys majú v oboch väzbách veľkosť $F_B = 65\,922 \text{ N}$ a orientáciu von z telesa (väzby sa snažia zabrániť navráteniu telesa do pôvodného stavu). O niečo presnejší výsledok získame, ak prepneme typ prvku na „Link“, ktorého stupne voľnosti sú iba posuvy. Hodnota reakčných síl je potom $F_L = 65\,970 \text{ N}$, čo však stále neodpovedá presnej hodnote, získanej z analytického riešenia. K rovnakej veľkosti sily sa nedostaneme ani po navýšení počtu prvkov. Všetky veličiny (posuv, napätia, zložky síl) v iných osiach ako osi x sú nulové. Vedúci práce po overení výsledku v programe ANSYS Mechanical APDL prišiel s hypotézou, že nezrovnalosť mohla spôsobiť presnosť čísla π , ktoré má ANSYS Workbench definované interne. Číslo π je pravdepodobne pri výpočte plochy kruhového prierezu definované na malé množstvo desatinných číslic. Prepočítame preto plochu kruhového prierezu na plochu štvorcového prierezu o strane $a = \sqrt{\frac{\pi d^2}{4}} \approx 17,724539 \text{ mm}$. Výsledná reakčná sila v telese typu „Beam“ je potom $F_B' = 65\,973 \text{ N}$, čo odpovedá hodnote nášho numerického riešiča i analytickému riešeniu.



Obr. 30: Normálové napätie vypočítané programom Ansys (kvadratický prvok) pre zaťaženie deformáciou 1 mm

Úlohu môžeme ešte trochu modifikovať a využiť odlišný spôsob zaťaženia. Ak by takto uchytené prútové teleso bolo po montáži vystavené zmene teploty $\Delta T = +20 \text{ }^\circ\text{C}$, došlo by, kvôli tepelnej rozťažnosti materiálu $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$, k elastickej deformácii. Znamienko zmeny teploty je kladné, preto dôjde k rozťahnutiu materiálu, čo zmenší vzdialenosť δ , medzi koncom prútu a väzbou. Ak sa teleso rozťahne dostatočne, zmení sa aj charakter zaťaženia prútu z ťahu na tlak. Celkové predĺženie telesa zistíme pomocou vzťahu uvedenom v [1]:

$$\frac{du}{dx} = \alpha \Delta T, \quad (53)$$

$$u(L) = \alpha \Delta T [x]_0^L = \alpha \Delta T L, \quad (54)$$

$$u(L) = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 1000 \text{ mm} = 0,24 \text{ mm}. \quad (55)$$

Maximálny posuv, ktorý vznikne zaťažením ΔT tak predstavuje $0,24 \text{ mm}$, čo je menej ako rozdiel medzi koncom telesa v nedeformovanom stave a väzbou, δ . Z teórie pružnosti a pevnosti popísanej v [1] však vyplýva, že môžeme uvažovať akoby bola

vzdialenosť medzi väzbou a telesom v nedeformovanom stave o 0,24 mm zmenšená, teda $\delta' = (1 - 0,24) \text{ mm} = 0,76 \text{ mm}$.

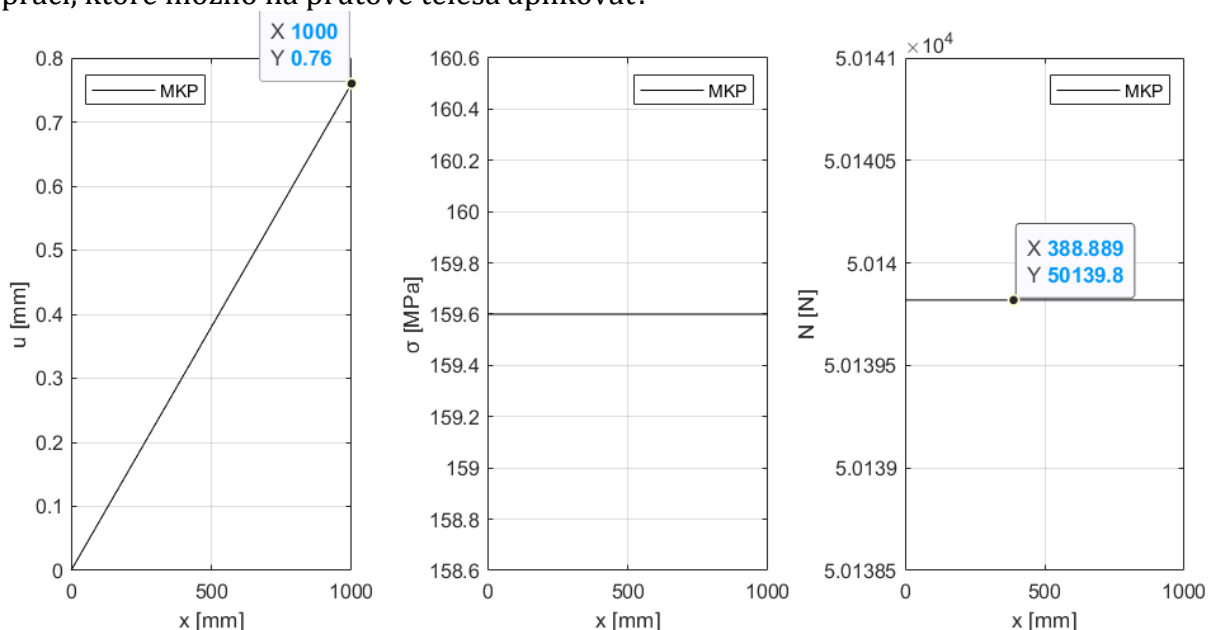
Zadaním takto definovaných okrajových podmienok do MKP riešiča v Matlabe získame výsledky uvedené na obr. (31). Opätovným využitím rovníc (1), (2) a (3) získame analytické výsledky normálového napätia a posúvajúcej sily:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0,76}{1\,000} = 76 \cdot 10^{-5}, \quad (56)$$

$$\sigma = \varepsilon E = 76 \cdot 10^{-5} \cdot 210\,000 \text{ MPa} = 159,6 \text{ MPa}, \quad (57)$$

$$N = \sigma \cdot S = 159,6 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{20}{1\,000}\right)^2 \approx 50\,139,82 \text{ N}. \quad (58)$$

Výsledky z MKP riešiča sa opäť zhodujú s výsledkami, ktoré sme získali analyticky. Takýto postup otvára možnosti pre iné charaktery zaťažovania, ako boli uvedené v tejto práci, ktoré možno na prúťové telesá aplikovať.



Obr. 31: Výsledky riešiča MKP po zaväzbení a zaťažení zmenou teploty, 1 prvok; zľava: posuv [mm], normálové napätie [MPa], posúvajúca sila [N]

Záver

Algoritmus tvorby MKP modelu axiálne zaťaženého priameho prútu pri použití kvadratického prvku, popísaný v kapitole 2, vychádzal z Rayleigh-Ritzovej metódy (teda odvodením slabej formulácie diferenciálnej rovnice), ktorú uvádza Reddy [5]. Iný postup uvádza, napríklad, Zienkiewicz [9], ktorý MKP v prípade deformačného prístupu definuje na základe Lagrangeovho variačného princípu, ktorého základom je minimalizácia celkovej potenciálnej energie (funkcionálu). Výsledkom sú však totožné globálne matice, ako v našom prípade. Primárnou neznámou vo všeobecnosti nemusia byť posuvy u , ale napríklad normálové napätia σ , z ktorých získame v postprocessingu hľadané posuvy a normálové sily vo všetkých uzloch.

Prvá úloha v kapitole 4 ukazuje nepresnosť numerického riešenia, ku ktorej môže dôjsť v prípade zložitého namáhania, alebo ako ukazuje druhá úloha, v prípade premenlivého priečného prierezu. Naopak na poslednej z demonštračných úloh vidíme, že namáhanie ťahom a tlakom od osamelej sily či deformácie by správne popísal už jeden lineárny prvok (teda aj jeden kvadratický). Ku každej riešenej úlohe treba preto pristupovať individuálne. Počet prvkov po prvom riešení navýšiť a pozorovať či riešenie konverguje k presnejšiemu výsledku alebo sa ďalej nemení. Indikátorom nízkej presnosti riešenia môže byť, napríklad, nespojitosť priebehu normálových napätí, ako zobrazuje obrázok (23). Prvá demonštračná úloha zároveň poukazuje na rozdiel v použití kvadratického a lineárneho prvku a možných nepresností, ktorých by sme sa použitím lineárneho prvku dopustili. Naopak pre kvadratický prvok platí, že pri rovnakom počte prvkov ako s použitím lineárneho prvku, majú globálne matice vyšší rád, čo spôsobuje vyššiu výpočtovú náročnosť riešenia a tým predlžujú výpočtový čas. Namáhanie prútových telies je však väčšinou jednoduchého charakteru, preto výpočty nevyžadujú vysoký počet prvkov.

Druhá úloha ukazuje jednu z možností MKP riešiča, ktorú komerčný softvér, ANSYS Workbench, nemá a to možnosť zadania premenlivého priečného prierezu ako všeobecnej funkcie súradnice x . Okrem toho možno zadať ako všeobecnú funkciu súradnice x aj líniové zaťaženie q , alebo modul pružnosti E . Zároveň však ukazuje nedostatky nášho 1D riešiča v porovnaní s 2D či 3D riešením v Ansyse. Šmykové napätia, ktoré vznikajú pri meniacom sa priečnom priereze totiž náš MKP model nevie zohľadniť. V prudko meniacich sa priečných prierezoch sa potom môže vyskytnúť šmykové napätie, ktorého hodnota nebude zanedbateľne malá, na čo je nutné pamätať.

Posledný príklad definuje riešenie staticky neurčitých úloh a zároveň predkladá možnosť kombinácie analytických vzťahov s MKP riešičom. Možno tak zadávať špecifické okrajové podmienky vyplývajúce z iných typov zaťažení. Kombináciou s analytickými postupmi možno rozšíriť možnosti nášho MKP riešiča. Toto platí i pre koncentrátory napätia (zvary, závity, otvory a iné vruby), ktorých súčiniteľ tvaru α možno odčítať z nomogramov a z MKP riešiča získať iba nominálne hodnoty normálového napätia. Výsledné, špičkové, hodnoty napätia potom zistíme analyticky.

Implementácia metódy konečných prvkov v programe Matlab bola realizovaná s použitím dostupných nástrojov, ktoré Matlab ponúka. Bola preto využitá symbolická a numerická derivácia a integrácia, ktorá je pôvodom variabilnosti nášho riešiča. Vzťahy, v ktorých vystupujú derivácie či integrály je však možné odvodiť pre špecifické úlohy analyticky. Odvodené vzťahy je potom možné implementovať do MKP a naprogramovať riešič orientovaný na konkrétny typ úlohy (napríklad pre zaťaženie odstredivou silou).

5 Použitá literatúra

- [1] JANÍČEK, Přemysl, et al. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I.* 3. vyd. Brno: CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [2] PTÁČEK, Luděk. *Nauka o materiálu I.* 2., opr. a rozš. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2003. ISBN 80-720-4283-1.
- [3] Oblast' platnosti Hookovho zákona je medzi bodmi 1 a 2. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2022-04-21]. Dostupné z: https://sk.wikipedia.org/wiki/Hookov_z%C3%A1kon
- [4] PETRUŠKA, Jindřich. *P16-vzpěr: Mezní stav vzpěrné stability prutů.* Brno, 2021. Dostupné také z: https://moodle-archiv-2019-2020.ro.vutbr.cz/pluginfile.php/353302/mod_resource/content/1/P16-vzp%C4%9Br.pdf
- [5] REDDY, Junuthula N. *Introduction to the Finite Element Method.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1993. ISBN 0-07-051355-4.
- [6] MURÍN, Justín, Juraj HRABOVSKÝ a Vladimír KUTIŠ. *METÓDA KONEČNÝCH PRVKOV: Vybrané kapitoly pre mechatronikov* [online]. 1. vydanie. Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2014 [cit. 2022-03-30]. ISBN 978-80-227-4298-6. Dostupné z: http://uamt.fei.stuba.sk/web/sites/default/files/Metoda_konecných_prvkov.pdf
- [7] Základy mechaniky poddajných telies: Úvod do mechaniky poddajných telies. In: *Základy technických vied 1* [online]. Žilina: FBI UNIZA [cit. 2022-04-12]. Dostupné z: http://fbiw.uniza.sk/ktvi/leitner/2_predmety/ZMPT/Podklady/Zhrnutie_PaP.pdf
- [8] JIROUŠEK, Ondřej. *Metoda konečných prvků* [online]. In: . 2006 [cit. 2022-04-23]. Dostupné z: http://mech.fd.cvut.cz/members/jirousek/download/k618y2m2/ymkp_fem.pdf
- [9] ZIENKIEWICZ, O. C., Robert L. TAYLOR a J. Z. ZHU. *The finite element method: its basis and fundamentals.* 6th ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN 07-506-6320-0.