

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITY PALACKÉHO V OLOMOUCI

Katedra optiky



**Využití elipsometrie pro měření
Muellerových matic k charakterizaci
vlastností vybraných
polarizačních komponent**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Šimon Bräuer

2017

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITY PALACKÉHO V OLOMOUCI

Katedra optiky



**Využití elipsometrie pro měření
Muellerových matic k charakterizaci
vlastností vybraných
polarizačních komponent**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval:

Šimon Bräuer

Studijní program:

B1701 Fyzika

Studijní obor:

Optika a optoelektronika

Forma studia:

prezenční

Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Josef Kapitán, Ph.D.

FACULTY OF SCIENCE
PALACKÝ UNIVERSITY OLOMOUC

Department of Optics



**Characterization of selected
polarization components
by Mueller matrix
ellipsometry**

BACHELOR THESIS

Author:	Šimon Bräuer
Study program:	B1701 Physics
Field of study:	Optics and Optoelectronics
Form of study:	Full-time
Supervisor:	RNDr. Josef Kapitán, Ph.D.

Abstrakt

Hlavním cílem této bakalářské práce je seznámit se s problematikou analýzy polarizačního stavu záření a charakterizací polarizačních vlastností optických komponent pomocí Muellerova elipsometru. Dále byla provedena analýza Stokesova polarimetru a Muellerova elipsometru z hlediska analýzy chyb měření a volby optimálních parametrů sestavy.

Klíčová slova

Polarizace, Stokesův vektor, Muellerova matice, Stokesův polarimetr, Muellerův elipsometr.

Abstract

The main aim of this Bachelor thesis is to analyze the polarization state of the light and characterization of polarization properties of optical components using Mueller's ellipsometer. We also performed analysis of Stokes polarimeter and Mueller's ellipsometer in terms of analysis of measurement errors and selection of optimal parameters of the assembly.

Key words

Polarization, Stokes vector, Mueller matrix, Stokes polarimeter, Mueller matrix ellipsometry.

Poděkování

Velice rád bych poděkoval svému vedoucímu mé bakalářské práce, panu RNDr. Josefu Kapitánovi, Ph.D., za pevné vedení, cenné a odborné rady, pomoc, hlavně pak za trpělivost, kapku humoru, za vstřícnost a přátelské prostředí při konzultacích a vypracování této bakalářské práce. Také bych velice rád poděkoval své rodině a přítelkyni za jejich psychickou podporu.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci „Využití elipsometrie pro měření Muellerových matic k charakterizaci vlastností vybraných optických komponent“ napsal samostatně s použitím uvedené literatury. Souhlasím, aby byla práce použita pro potřeby výuky a prezentována na internetových stránkách katedry optiky.

V Olomouci dne

Obsah

Úvod	1
1 Teoretický úvod	2
1.1 Popis polarizace světla	2
1.2 Stokesův vektor	3
1.2.1 Poincarého sféra	4
1.3 Muellerova matice	5
1.4 Polarizační komponenty a jejich popis	5
1.4.1 Diatenuátor	5
1.4.2 Fázová destička	6
1.4.3 Depolarizátor	7
1.4.4 Rotátor	7
2 Stokesova polarimetrie	9
2.1 Přesné nastavení komponent	9
2.2 Kalibrace Stokesova polarimetru	11
2.3 Simulace měření zatížená Gaussovským šumem	14
3 Muellerova elipsometrie	19
3.1 Kalibrace Muellerova elipsometru	20
3.2 Analýza chyb při určování parametrů Muellerovy matice komponent	23
4 Experimentální část	27
4.1 Aparatura	27
4.2 Realizace experimentu	29
4.3 Porovnání výsledků měření	30
Závěr	35
Reference	36

Úvod

Polarizační komponenty tvoří velkou část optických sestav, které zaznamenávají spektra Ramanovy optické aktivity. Úkolem těchto polarizačních komponent je vytvořit co nejčistší polarizační stav, aby jsme toho dosáhli musíme eliminovat určité artefakty a snažit se najít co nejlepší nastavení těchto komponent.

K prověření polarizačních vlastností je nutné provést analýzu těchto komponent. Proměření optických komponent můžeme provést na Muellerově elipsometru, který byl sestaven na Katedře optiky PřF Up. V této bakalářské práci se zaměříme na proměření transmisních optických komponent a na přesnost určení Muellerovy matice těchto komponent. Budeme se také věnovat chybové analýze a optimalizaci nastavení měření.

Práci není možno provést bez teoretických základů popisu polarizace světla. Proto první kapitulu budeme věnovat popisu polarizačních stavů světla formou Stokesových vektorů a popisu optických komponent Muellerovým formalismem. Druhá kapitola bude zaměřena na Stokesův polarimetr, pomocí kterého můžeme analyzovat polarizační stavy neznámého záření. V třetí části se dostaneme k teoretickému popisu samotného Muellerova elipsometru, k jeho správnému nastavení a kalibraci.

Poslední část bude experimentální, kdy se budeme snažit proměřit prvky které by mohly zvýšit přesnost měření Muellerova elipsometru.

1 Teoretický úvod

1.1 Popis polarizace světla

Polarizace je přirozenou vlastností světla. Je dána směrem vektoru elektrického pole \vec{E} . Pro zjednodušení si nadefinujeme že se vlna šíří ve směru osy z , potom vektor elektrické intenzity \vec{E} je kolmá na směr šíření. Komponenty elektrického pole, které jsou funkcí souřadnice z a času t , můžeme psát

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x), \quad (1.1)$$

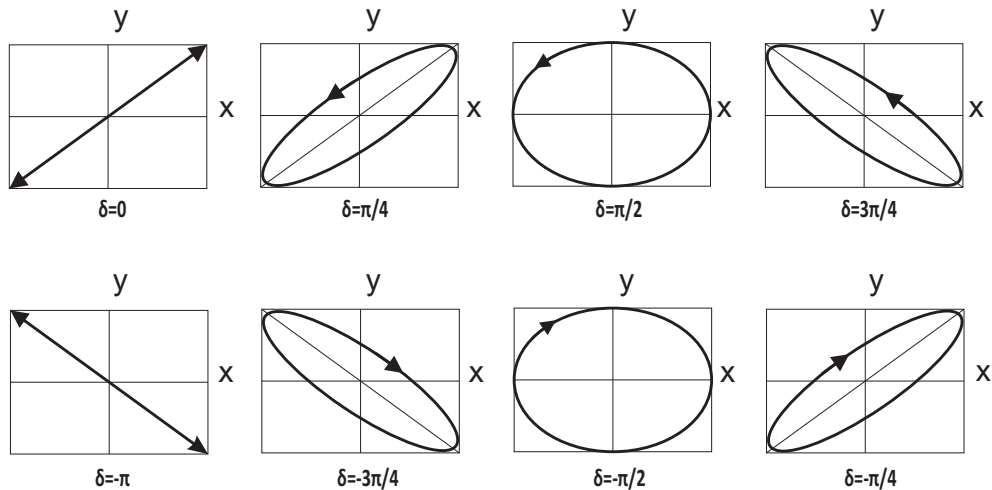
$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y), \quad (1.2)$$

kde E_{0x} , E_{0y} reprezentují maximální amplitudy vektoru elektrické intenzity, ω je úhlová frekvence, k je vlnové číslo, δ_x a δ_y jsou fáze. [3]

Typ polarizace světla můžeme určit z tvaru křivky která je opisována koncovým bodem vektoru. Pohyb tohoto bodu sledujeme v rovině $z=0$. Metodou vyloučení časového parametru t dospějeme k následující rovnici

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\delta = \sin^2\delta. \quad (1.3)$$

Tato rovnice popisuje polarizační elipsu. δ zde znázorňuje fázový rozdíl výsledného vektoru elektrické intenzity \vec{E} . Polarizace může být pravotočivá ($\sin\delta > 0$) nebo levotočivá ($\sin\delta < 0$).



Obr. 1: Různé tvary elipsy jako funkce fázového posuvu. Horní oddíl obrázku znázorňuje levotočivou polarizace a dolní oddíl znázorňuje pravotočivou polarizaci.

Pro úplný popis polarizační elipsy máme další dva parametry – azimut a elipticitu. Azimut $\psi \in \langle 0, \pi \rangle$ je parametr, který popisuje natočení polarizační elipsy vůči osám x a y . Tento parametr získáme z rovnice (1.3) a platí pro něj vztah

$$\tan(2\psi) = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}. \quad (1.4)$$

Druhý parametr, elipticita $\chi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle$, nám udává poměr mezi hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b . Můžeme ji definovat vztah ^[1]

$$\sin(2\chi) = \frac{2E_{0x}E_{0y} \sin \delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}. \quad (1.5)$$

1.2 Stokesův vektor

Pomocí Stokesova vektoru, můžeme popsat polarizační stav světla. Stokesovým vektorem je možné popsat jak nepolarizované tak částečně polarizované světlo. Vektor je složen ze čtyř Stokesových parametrů:

$$\begin{aligned} S_0 &= E_{0x}^2 + E_{0y}^2 = I_x + I_y \\ S_1 &= E_{0x}^2 - E_{0y}^2 = I_x - I_y \\ S_2 &= 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta = I_{45^\circ} - I_{135^\circ} \\ S_3 &= 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta = I_R - I_L \end{aligned} \quad (1.6)$$

Jednotlivé parametry jsou reálné. Parametr S_0 představuje celkovou intenzitu dopadajícího záření, S_1 popisuje rozdíl intenzit horizontální (I_x) a vertikální (I_y) polarizace, S_2 obdobně jak u S_1 popisuje rozdíl intenzit, ale tentokrát lineárních polarizací při azimutu 45° (I_{45°) a 135° (I_{135°). Poslední Stokesův parametr S_3 charakterizuje intenzitní rozdíl mezi pravotočivou (I_R) a levotočivou (I_L) kruhovou polarizací. Stokesovy parametry musí splňovat relaci

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (1.7)$$

Tato relace platí pro všechny polarizační stavy. Speciálním případem je úplně nepolarizované světlo, kdy parametry S_1, S_2, S_3 jsou rovny 0. Pro případ plně polarizovaného záření u vztahu (1.7) platí rovnost.

Příklad plně polarizovaných stavů světla:

$$\begin{aligned} S &= (1, 1, 0, 0)^T \dots \text{lineární polarizace - osa x} \\ S &= (1, -1, 0, 0)^T \dots \text{lineární polarizace - osy y} \\ S &= (1, 0, 1, 0)^T \dots \text{lineární polarizace - } 45^\circ \text{ od osy x} \\ S &= (1, 0, -1, 0)^T \dots \text{lineární polarizace - } 135^\circ \text{ od osy x} \\ S &= (1, 0, 0, 1)^T \dots \text{kruhová polarizace - pravotočivá} \\ S &= (1, 0, 0, -1)^T \dots \text{kruhová polarizace - levotočivá} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Azimut (1.4) a elipticitu (1.5) můžeme zapsat i pomocí Stokesových parametrů jako

$$\tan 2\psi = \frac{S_2}{S_1}, \quad (1.9)$$

$$\sin 2\chi = \frac{S_3}{S_0}. \quad (1.10)$$

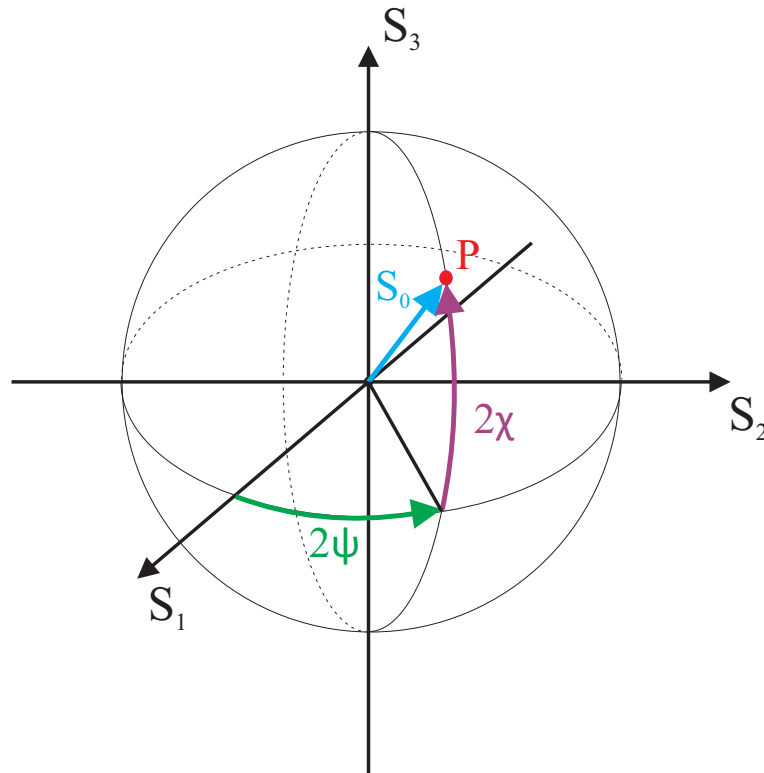
Dalším důležitým parametrem je stupeň polarizace $P \in \langle 0, 1 \rangle$. Stupeň polarizace nám vyjadřuje míru polarizace světla. Je-li $P = 0$ tak se jedná o nepolarizované záření, je-li $P = 1$ potom máme plně polarizované záření a jestli $P \in (0, 1)$ potom se jedná o částečně polarizované záření. Stupeň polarizace je definován jako

$$P = \sqrt{\frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}{S_0^2}}. \quad (1.11)$$

1.2.1 Poincarého sféra

Na Poincarého sféře můžeme zobrazovat polarizační stavy světla. Stokesovy parametry S_1, S_2 a S_3 jsou souřadnice, které popisují polarizační stav na povrchu nebo uvnitř Poincarého sféry. Můžeme si Stokesovy parametry přepsat do tvaru sférických souřadnic s využitím vztahů (1.7), (1.9) a (1.10). Potom dostáváme

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 \cos(2\chi) \cos(2\psi), \\ S_2 &= S_0 \cos(2\chi) \sin(2\psi), \\ S_3 &= S_0 \sin(2\chi). \end{aligned} \quad (1.12)$$



Obr. 2: Poincarého sféra.

Body na rovníku charakterizují lineární polarizaci, pak na severní, resp. na jižní polokouli, můžeme najít pravotočivé, resp. levotočivé polarizační stavy světla. Na povrchu sféry můžeme najít čistě polarizované stavy a uvnitř sféry můžeme znázornit a to částečně polarizované stavy. Ve středu pak nacházíme stav plně nepolarizovaného světla. [1]

1.3 Muellerova matice

Muellerova matice představuje reálnou čtvercovou matici. Pomocí této matice můžeme popisovat polarizační vlastnosti jednotlivých optických prvků. Obecný zápis této matice

$$M = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Bude-li světelné záření o Stokesově vektoru \vec{S} dopadat na obecnou polarizační komponentu charakterizovanou Muellerovou maticí M , pak se Stokesův vektor transformuje na \vec{S}' . Můžeme zapsat jako

$$\vec{S}' = M \cdot \vec{S}. \quad (1.14)$$

1.4 Polarizační komponenty a jejich popis

Polarizační stav světla můžeme změnit různými způsoby, například: modulací složek amplitudy E_{0x} a E_{0y} vektoru elektrické intenzity, formováním fáze vlny, snížením stupně polarizace nebo změnou směru ortogonálních složek \vec{E} . Odpovídající prvky, které zajišťují tyto změny polarizace jsou po řadě: diatenuátor, fázová destička, depolarizátor a rotátor. [2]

1.4.1 Diatenuátor

Diatenuátor je polarizační prvek. Propustnost intenzity vystupujícího paprsku závisí na polarizačním stavu dopadajícího paprsku. Propouští kolmé složky vektoru elektrické intenzity \vec{E} na směr šíření nerovnoměrně. Jedna z amplitud záření dvou ortogonálních směrů p_x a p_y je více tlumena než ta druhá. Vektor elektrické intenzity \vec{E}' vystupující z polarizátoru je ve vztahu s vstupním vektorem elektrické intenzity \vec{E} definován těmito vztahy

$$E'_x = p_x E_x \quad (1.15)$$

$$E'_y = p_y E_y \quad (1.16)$$

Hodnoty koeficientů úměrnosti p_x a p_y nacházíme v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Je-li jedna z koeficientů nulová, pak pro daný směr složka elektrického pole zaniká, naopak je-li koeficient roven jedné, potom nedochází k žádnému útlumu elektrické intenzity. Diatenuátor můžeme obecně popsat Muellerovou maticí tohoto tvaru [4]

$$M_D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Speciálním případem je pak lineární polarizátor, kdy jeden z koeficientů je nulový a druhý je roven 1. Je-li $p_x = 1$ a $p_y = 0$ pak se jedná o ideální horizontální lineární polarizátor a jeho Muellerovu matici můžeme psát

$$M_{pol_x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Potom tedy, když $p_x = 0$ a $p_y = 1$, tak se jedná o ideální vertikální lineární polarizátor, reprezentovaný Muellerovou maticí

$$M_{pol_y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

1.4.2 Fázová destička

Fázová destička (někdy také označována jako retardační destička nebo retardér) je polarizační optická komponenta, která zavádí fázové zpoždění Γ mezi ortogonální prvky elektrické intenzity \vec{E} dopadajícího záření. Toho můžeme dosáhnout například tehdy, když způsobíme fázový posuv $\frac{\Gamma}{2}$ podél osy x a fázový posuv $-\frac{\Gamma}{2}$ podél osy y. Tyto osy fázové destičky se nazývají v tomto pořadí rychlá a pomalá osa. Vztah mezi vstupním a výstupním zářením je dán vztahem

$$E'_x = e^{i\frac{\Gamma}{2}} E_x \quad (1.20)$$

$$E'_y = e^{-i\frac{\Gamma}{2}} E_y \quad (1.21)$$

Obecný zápis Muellerovy matice pro fázovou destičku s rychlou osou orientovanou podél osy x vypadá takto ^[1]

$$M_{ret_x}(\Gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\Gamma) & \sin(\Gamma) \\ 0 & 0 & -\sin(\Gamma) & \cos(\Gamma) \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Ale zmínit bychom ještě měli také dvě známe konfigurace fázových destiček a to půlvlnnou a čtvrtvlnnou fázovou destičku.

Půlvlnná destička je specifická fázovým zpožděním $\Gamma = \pi$, potom její Muellerovu matici můžeme psát

$$M_{ret}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Druhou konfigurací je čtvrtvlnná retardační destička s fázovým zpožděním $\Gamma = \frac{\pi}{2}$, píšeme

$$M_{ret}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Tato konfigurace je velice užitečná, protože dokáže například z lineární polarizovaného záření orientovaného ve směru pod úhlem 45° vůči ose x vytvořit kruhově polarizované záření, nebo naopak.

1.4.3 Depolarizátor

Depolarizátor je optický prvek, který ovlivňuje polarizaci záření. Snižuje stupeň polarizace (1.11). Muellerova matice charakterizující tento prvek

$$M_{dep} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

parametry g_1, g_2, g_3 se nazývají parametry depolarizace a náleží do intervalu $(0, 1)$. Záření na výstupu můžeme označit za plně nebo částečně depolarizované. ^[4]

1.4.4 Rotátor

Dalším způsobem, jak změnit stav polarizace optického pole je, že necháme svazek šířit skrze polarizační elementy, které provádí rotaci ortogonálních složek pole E_x a E_y o úhel θ . Vztah mezi vstupními E_x, E_y a výstupními E'_x, E'_y složkami elektrické intenzity \vec{E} můžeme psát

$$E'_x = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta \quad (1.26)$$

$$E'_y = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta. \quad (1.27)$$

A maticový zápis

$$M_{rot}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Při odvození Muellerových matic polarizátoru a fázové destičky jsme předpokládali, že osy těchto optických prvků jsou vyrovnány podél osy E_x a E_y . Polarizační prvek může být v libovolné orientaci vůči souřadné soustavě, proto je nutné vyjádřit Muellerova matice pro toto obecné nastavení komponent. ^[1]

$$M'(\theta) = M_{rot}(-\theta) M M_{rot}(\theta) \quad (1.29)$$

Podle vztahu (1.29) pak Muellerova matice lineárního horizontálního polarizátoru (1.18) natočeného o úhel θ

$$M_{pol_x}(\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \cos^2(2\theta) & \sin(2\theta) \cos(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \sin(2\theta) \cos(2\theta) & \sin^2(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Teď už jen podle vztahu (1.29) přepsat matici pro obecnou fázovou destičku (1.22). Ta má tvar

$$M_{ret}(\Gamma, 2\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \Gamma \sin^2 2\theta & (1 - \cos \Gamma) \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin \Gamma \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \Gamma) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \Gamma \cos^2 2\theta & \sin \Gamma \cos 2\theta \\ 0 & \sin \Gamma \sin 2\theta & -\sin \Gamma \cos 2\theta & \cos \Gamma \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

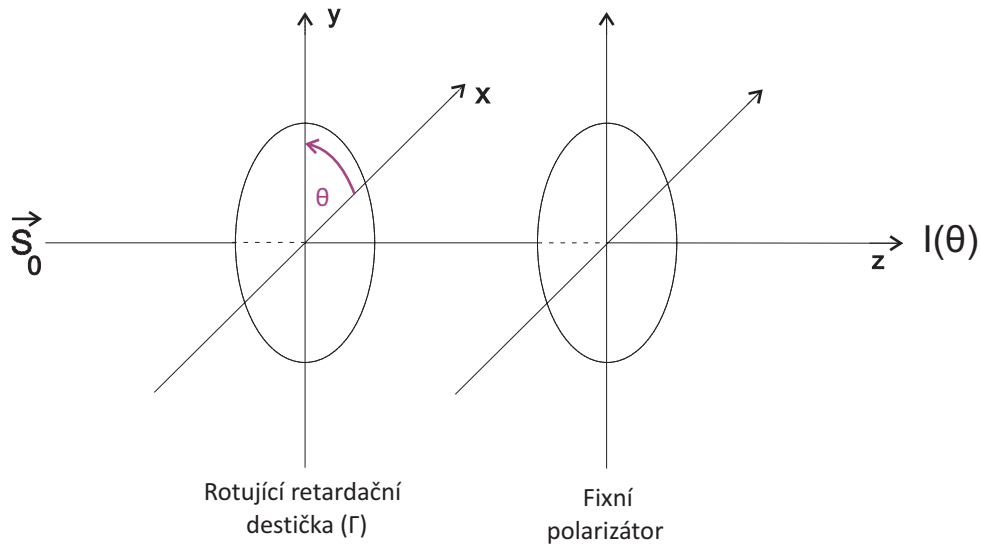
2 Stokesova polarimetrie

Stokesova polarimetrie je disciplýna, která se zabývá analýzou polarizačního stavu záření. Zařízení, které je k tomu použito se nazývá Stokesův polarimetr. Obecně Stokesovy parametry záření můžeme získat z detekované intenzity I . Vztah popisující detekovanou intenzitu vypadá takto

$$I = \vec{a}^T \cdot \vec{S}. \quad (2.1)$$

Na levé straně vzorce (2.1) vystupuje námi detekovaná intenzita záření I , na pravé straně je vektorový součin \vec{a}^T a hledaného Stokesova vektoru \vec{S} . Vektor \vec{a}^T zastupuje první řádek Muellerovy matice optického systému. Prvky vektoru \vec{a} jsou dány součinem Muellerových matic jednotlivých komponent. Pro získání všech čtyř Stokesových parametrů je nutné provést nejméně čtyři měření.

Jednou z možných realizací Stokesova polarimetru je zařízení, které se skládá ze zdroje záření, čtvrtvlnné fázové destičky, polarizátoru orientovaného v ose x a detektoru intenzity. Detekovaná intenzita záření je modulována v čase vlivem jednotlivých komponent.



Obr. 3: Schéma Stokesova polarimetru. Vektor \vec{S}_0 popisuje vstupní záření, $I(\theta)$ popisuje intenzitu detekovaného záření.

2.1 Přesné nastavení komponent

Přesným nastavením rozumíme stav, kdy lineární horizontální polarizátor má osu propustnosti v ose x a čtvrtvlnná fázová destička, rychlou osu v ose x. Potom vztah pro detekovanou intenzitu

$$I(\theta) = \vec{a}^T \cdot \vec{S}_0, \quad (2.2)$$

kde,

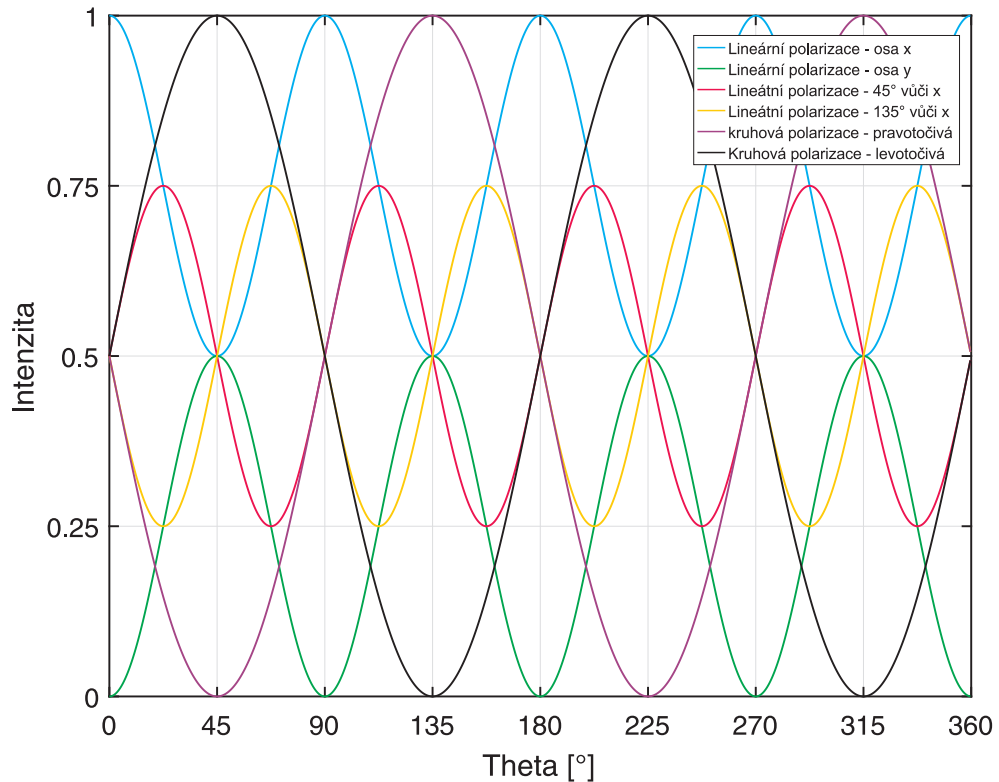
$$\vec{a}^T = (1, 0, 0, 0) \cdot M_{pol} \cdot M_{ret} \left(\frac{\pi}{2}, \theta \right). \quad (2.3)$$

\vec{S}_0 je Stokesův vektor vstupního polarizačního stavu, M_{ret} je Muellerova matice čtvrtvlnné retardační destičky rotované o úhel θ (2.4) a M_{pol} je Muellerova matice pro pevně nastavený horizontální lineární polarizátor (1.18).

$$M_{ret} \left(\frac{\pi}{2}, \theta \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta)^2 & \cos(2\theta) \cdot \sin(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \cos(2\theta) \cdot \sin(2\theta) & \sin(2\theta)^2 & \cos(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Intenzitní funkci pro tuto konfiguraci můžeme vyjádřit

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(S_0 + \frac{S_1}{2} \right) - \frac{S_3}{2} \sin(2\theta) + \frac{S_1}{4} \cos(4\theta) + \frac{S_2}{4} \sin(4\theta). \quad (2.5)$$



Obr. 4: Intenzitní funkce (2.5) pro různé vstupní polarizační stavy (1.8).

Funkce intenzity je harmonickou funkcí úhlu θ , proto ji můžeme porovnat s Fourierovou řadou zapsanou ve tvaru

$$I(\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)), \quad (2.6)$$

kde a_0 , a_n a b_n jsou Fourierovi koeficienty

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad (2.7)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad (2.8)$$

které získáme různými úpravami a integrací (2.6). Numericky je možné koeficienty získat diskrétní Fourierovou transformací,

$$a_n = \frac{2}{N} \operatorname{Re} [\operatorname{FT}[I(\theta)]], \quad (2.9)$$

$$b_n = \frac{2}{N} \operatorname{Im} [\operatorname{FT}[I(\theta)]], \quad (2.10)$$

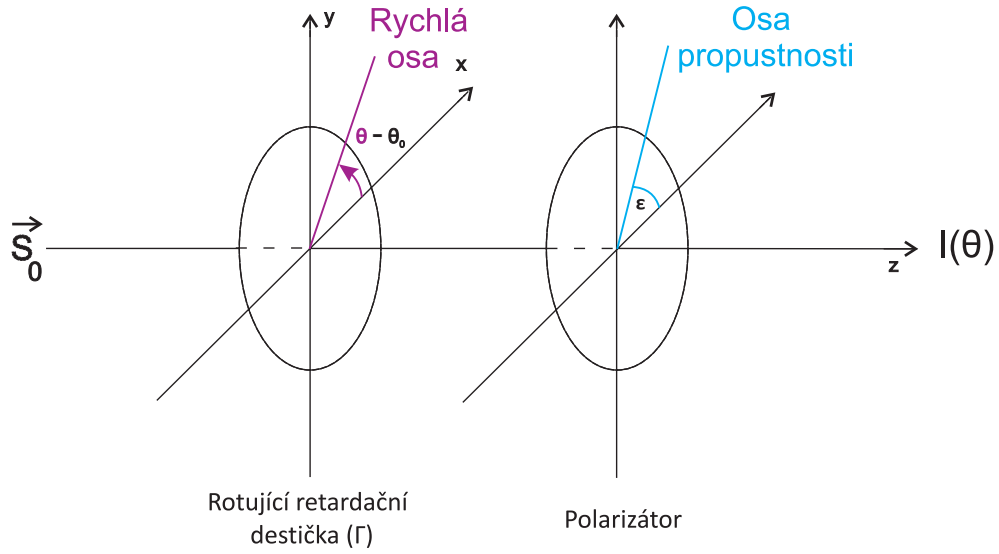
která je výpočetně efektivnější.

Porovnáním vztahu (2.2) a (2.6) získáme hledané parametry Stokesova vektoru

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 - a_4, \\ S_1 &= 2a_4, \\ S_2 &= 2b_4, \\ S_3 &= -b_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2 Kalibrace Stokesova polarimetru

Doposud jsme předpokládali přesné nastavení. Teď se budeme zabývat nastavením, kdy všechny optické komponenty jsou popsány parametry. U fázové destičky zavádíme dva parametry a to θ_0 vychýlení rychlé osy od osy x a Γ fázové zpoždění. U polarizátoru zavádíme ϵ vychýlení osy propustnosti od osy x .



Obr. 5: Schéma Stokesova polarimetru s nedokonalým nastavením. Úhel θ_0 je výchylka rychlé osy retardační destičky o fázovém zpoždění Γ , úhel ϵ popisuje směr osy propustnosti polarizátoru vůči ose x.

Měli bychom tedy upravit rovnici (2.2) a započítat jednotlivé koeficienty.

$$I(\theta) = \vec{a}^T \cdot \vec{S}_0, \quad (2.12)$$

kde

$$\vec{a}^T = (1, 0, 0, 0) \cdot M_{pol}(\epsilon) \cdot M_{ret}(\Gamma, \theta - \theta_0) \quad (2.13)$$

\vec{S}_0 Stokesův vektor vstupního polarizačního stavu, $M_{ret}(\Gamma, \theta - \theta_0)$ je Muellerova matice retardační destičky s neznámým fázovým posunem Γ a výchylkou její rychlé osy od osy x o úhel θ_0 , M_{pol} je muellerova matice pro horizontální lineární polarizátor natočený o úhel ϵ vůči ose x. Potom závislost intenzity na θ je:

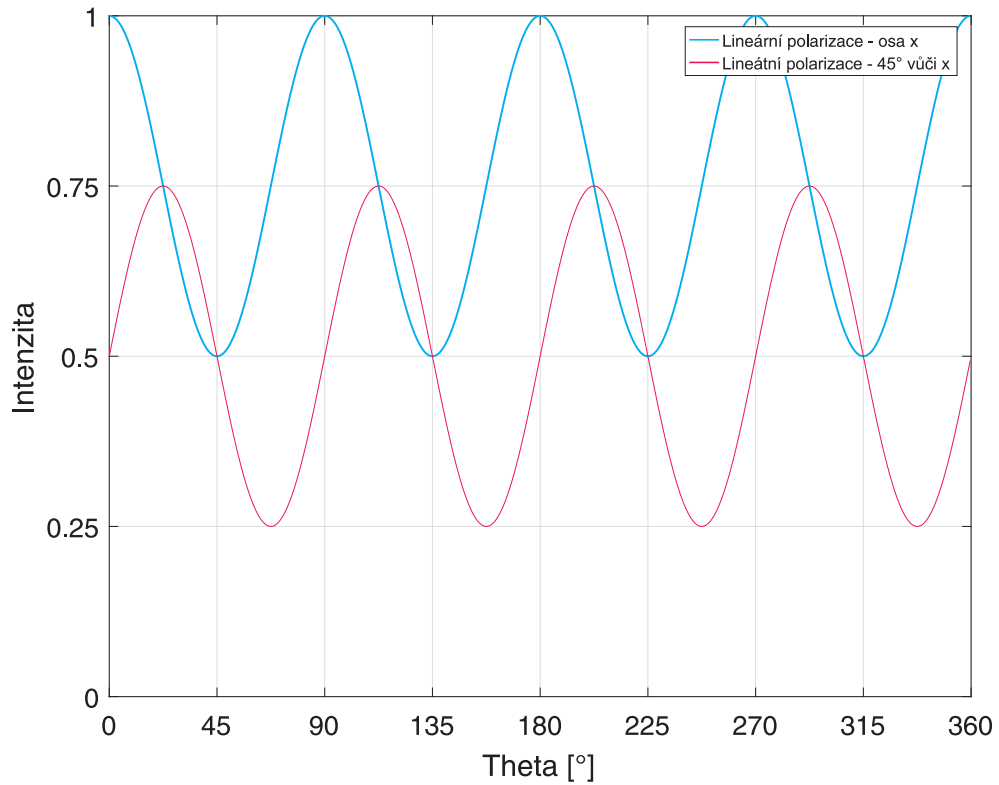
$$\begin{aligned} I(\theta) = & \frac{1}{2} \left[S_0 + \frac{1}{2} (1 + \cos(\Gamma)) (S_1 \cos(2\epsilon) + S_2 \sin(2\epsilon)) \right] + \\ & + \frac{1}{2} S_3 \sin(\Gamma) \sin(2\epsilon + 2\theta_0) \cos(2\theta) - \frac{1}{2} S_3 \sin(\Gamma) \cos(2\epsilon + 2\theta_0) \sin(2\theta) + \\ & + \frac{1}{4} (1 - \cos(\Gamma)) [S_1 \cos(2\epsilon + 4\theta_0) - S_2 \cos(2\epsilon + 4\theta_0)] \cos(4\theta) + \\ & + \frac{1}{4} (1 - \cos(\Gamma)) [S_1 \sin(2\epsilon + 4\theta_0) + S_2 \cos(2\epsilon + 4\theta_0)] \sin(4\theta). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Porovnáním s Fourierovou řadou (2.6), dopočítáme jednotlivé parametry Stokesova vektoru vstupního záření \vec{S}_0 .

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0 - \frac{1}{2}(1 + \cos(\Gamma))(S_1 \cos(2\epsilon) + S_2 \sin(2\epsilon)) \\
S_1 &= \frac{4[a_4 \cos(2\epsilon + 4\theta_0) + b_4 \sin(2\epsilon + 4\theta_0)]}{1 - \cos(\Gamma)} \\
S_2 &= \frac{4[b_4 \cos(2\epsilon + 4\theta_0) + a_4 \sin(2\epsilon + 4\theta_0)]}{1 - \cos(\Gamma)} \\
S_3 &= \frac{-b_2}{\sin(\Gamma) \cos(2\epsilon + 2\theta_0)}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Koeficienty ϵ , Γ a θ_0 získáme kalibrací tak, že předpokládáme dva známé polarizační stavy, které dopadají na polarimetr, lineární polarizace ve směru osy x a lineární polarizaci natočená o 45° vůči ose x. Nadefinujeme si tak osu x pomocí těchto dvou polarizačních stavů.

Fourierovy koeficienty a'_0, a'_4, b'_2, b'_4 se vztahují ke kalibraci pomocí lineární polarizace v ose x a $a''_0, a''_4, b''_2, b''_4$ k lineární polarizace při otočení 45° vůči ose x.



Obr. 6: Závislost intenzity na θ lineární polarizace ve směru osy x a lineární polarizace natočené o 45° vůči ose x. ($\epsilon = 0$, $\theta_0 = 0$, $\Gamma = \frac{\pi}{2}$)

Nejdříve pro zjednodušení byly zavedeny tyto substituce

$$\alpha = 4\theta_0 + 2\epsilon = \frac{\arctan\left(-\frac{a''_4}{b''_4}\right) + \arctan\left(\frac{b'_4}{a'_4}\right)}{2}, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
A &= a'_4 \cos(\alpha) + b'_4 \sin(\alpha), \\
A' &= -a''_4 \sin(\alpha) + b''_4 \cos(\alpha), \\
B &= a''_0 A - 2AA', \\
C &= a'_0 A' - a''_0 A, \\
D &= a'_0 A' - 2AA'.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Dosadíme li Stokesovy parametry těchto dvou různých polarizačních stavů do (2.15), tak po množství matematických úprav dostaneme kompenzační parametry pro nedokonalé nastavení

$$\theta_0 = \frac{1}{4} \left[\arctan \left(-\frac{a''_4}{b''_4} \right) - 2\epsilon \right], \tag{2.18}$$

$$\Gamma = \arccos \left(\frac{a'_0 - 2A \cos(2\epsilon) - 4A}{a'_0 + 2A \cos(2\epsilon)} \right), \tag{2.19}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{-2CD - \sqrt{4C^2 D^2 - 4(B^2 + D^2)(C^2 - B^2)}}{2(B^2 + D^2)} \right). \tag{2.20}$$

2.3 Simulace měření zatížená Gaussovským šumem

Při simulaci nejsou jediným problémem kalibrační odchylky samotné aparatury, ale také zatížení měření šumem. Námi zvolený šum byl Gaussovský. Je to statistický šum, který má hustoty pravděpodobnost rovnu normálnímu rozdělení. Předpokládáme výslednou intenzit zatíženou šumem ve tvaru

$$I'(\theta) = I(\theta) + \eta. \tag{2.21}$$

$I(\theta)$ je funkce intenzity (2.14) a η představuje náhodný šum (2.22).

$$\eta = n_l \cdot Gauss, \tag{2.22}$$

kde $n_l \in (0, 1)$ je zastoupení šumu vůči normované intenzitě I a $Gauss$ je normální rozdělení s průměrnou hodnotou 0 a střední kvadratickou odchylkou 1.

Zajímá nás jak jsou jednotlivé koeficienty závislé na šumu, a jaký bude vliv šumu na odchylku Stokesových parametrů. Také nás zajímá jestli velikost standardní směrodatné odchylky závisí na stupni polarizace. Nejdříve kalibrujeme Stokesův polarimetr (kapitola 2.2) bez zastoupení šumu, po té provedeme simulaci $I'(\theta)$ (2.21) pro pevně nadefinované kalibrační konstanty a různé typy stupňů polarizace.

Stupeň polarizace

První věcí, kterou jsme chtěli prověřit bylo, jak moc velký vliv na chybu určení Stokesova vektoru má stupeň polarizace (kapitola 1.2) a polarizační stav záření. Provedly jsme tedy simulace měření pro různé stupně polarizací a různé typy polarizace, při konstantně zvolených parametrech aparatury. Výsledky simulace byly zapsány do Tab.1.

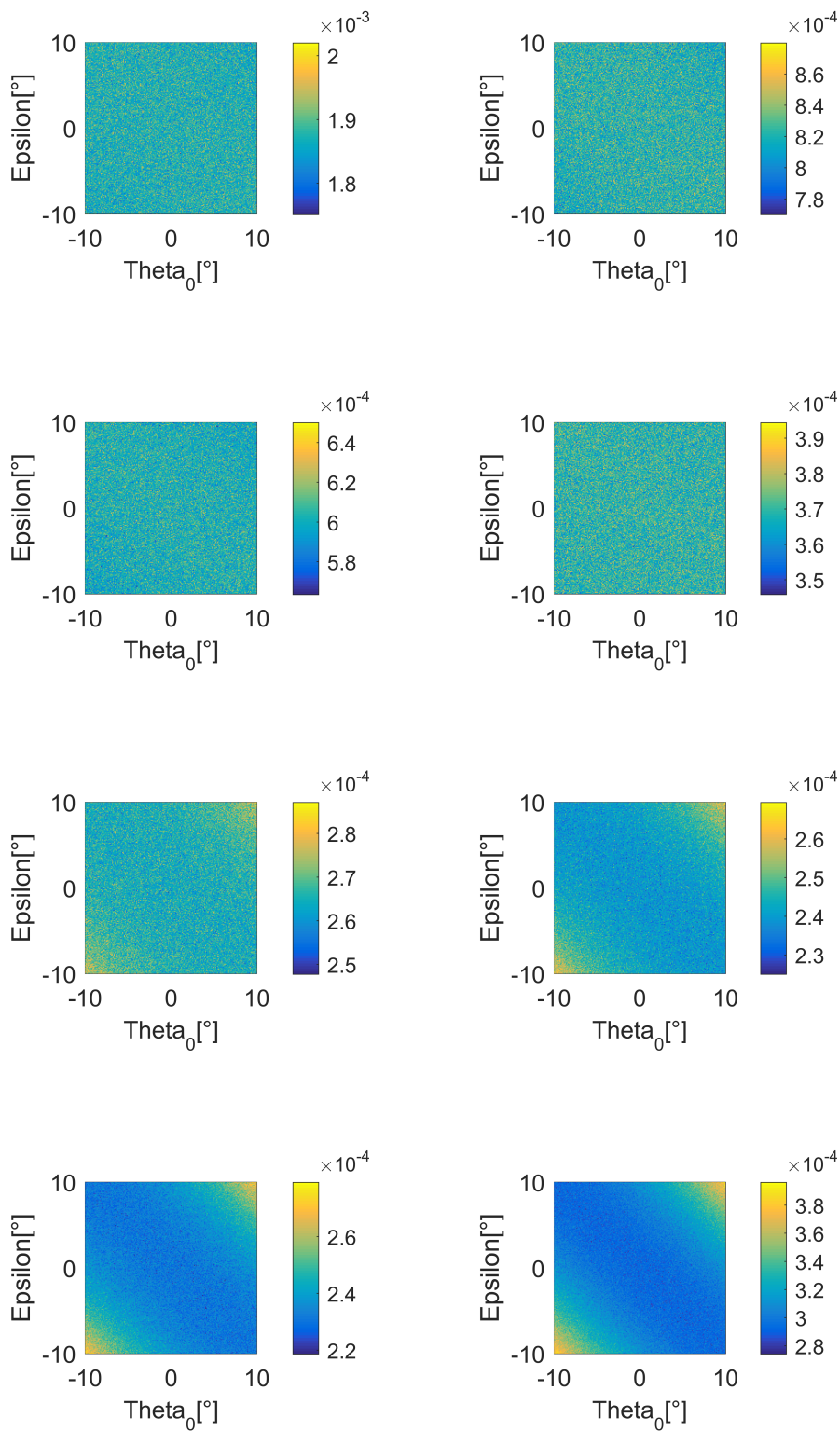
Polarizace	P=0,25	P=0,50	P=0,75	P=1,00
Lineární v ose x	0,00038	0,00040	0,00040	0,00035
Lineární v ose y	0,00038	0,00041	0,00041	0,00035
Lineární, azimutace 45°	0,00037	0,00040	0,00036	0,00032
Lineární, azimutace 135°	0,00033	0,00042	0,00036	0,00034
Kruhová levotočivá	0,00039	0,00037	0,00040	0,00040
Kruhová pravotočivá	0,00038	0,00036	0,00036	0,00038

Tab. 1: Normovaná standardní směrodatná odchylka σ určení Stokesových parametrů pro různé typy polarizací a stupně polarizace P . (Parametry sestavy byly zvoleny $\Gamma = \frac{\pi}{2}$, $\epsilon = 0$, $\theta_0 = 0$. Velikost šumu $n_l = 0,001$.)

Každá hodnota v tabulce je aritmetickým průměrem 100 simulovaných hodnot. Vidíme, že standardní směrodatná odchylka simulace, pro všechny typy polarizací a polarizačních stavů není příliš odlišná a liší se až v řádu 10^{-4} . Proto můžeme všechna tato data zprůměrovat a pokračovat s průměrnou hodnotou. Směrodatná odchylka tedy nezávisí ani na polarizačním stavu světla a ani na jeho stupni polarizace.

Vliv počátečního nastavení os fázové destičky a polarizátoru

Dalším krokem bylo prošetřit, jak moc velký vliv mají koeficienty ϵ a θ_0 , na chybu určení parametrů Stokesova vektoru. Provedly jsme tedy simulaci měření, kdy bylo konstantní fázové zpoždění Γ a měnili jsme koeficienty ϵ , θ_0 . Simulaci jsme provedly pro více hodnot Γ , aby jsme prověřili, jestli není závislost mezi těmito třemi koeficienty a chybou určení parametrů Stokesova vektoru.

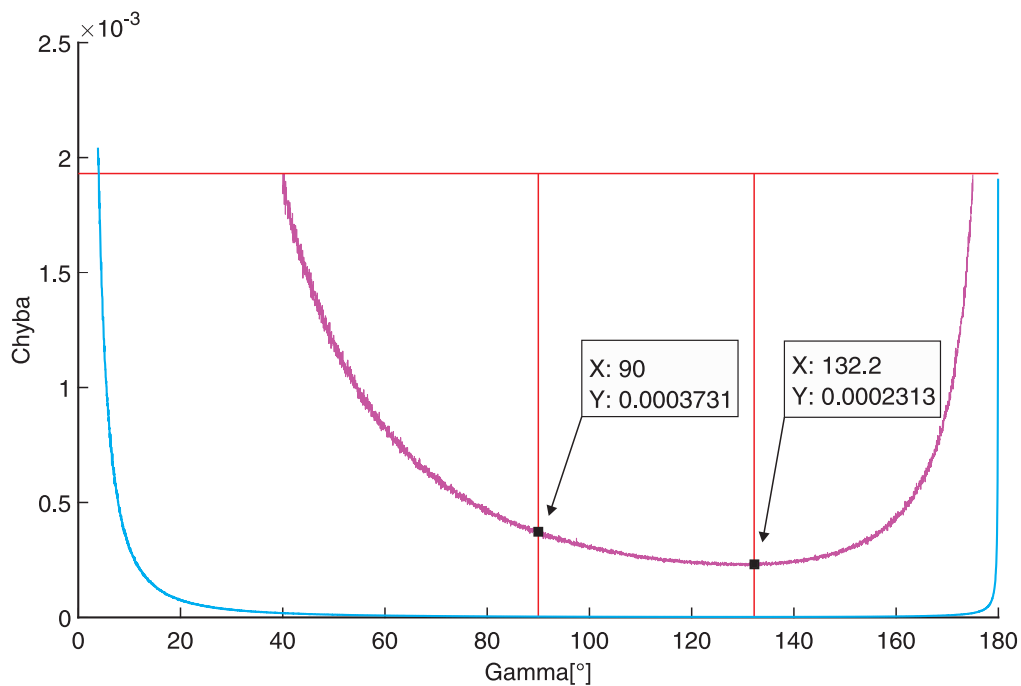


Obr. 7: Velikost standardní směrodatné odchyly, při změně koeficientů θ a ϵ . Fázové zpoždění: a) $\Gamma = 40^\circ$, b) $\Gamma = 60^\circ$, c) $\Gamma = 70^\circ$, d) $\Gamma = 90^\circ$, e) $\Gamma = 110^\circ$, f) $\Gamma = 120^\circ$, g) $\Gamma = 132^\circ$, h) $\Gamma = 150^\circ$. (Parametry sestavy byly zvoleny $\epsilon \in \langle -10^\circ, 10^\circ \rangle$, $\theta_0 \in \langle -10^\circ, 10^\circ \rangle$. Velikost šumu $n_l = 0,001$.)

Z grafů (Obr.7) vidíme, že v mezích $\epsilon \in \langle -5^\circ, 5^\circ \rangle$, $\theta_0 \in \langle -5^\circ, 5^\circ \rangle$, v kterých se v reálných podmínkách pohybujeme, tak není chyba určení Stokesových koeficientů závislá na koeficientech ϵ, θ_0 . Závislost se projevuje až při větších úhlech a také pouze při fázovém zpoždění nad 90° .

Vliv fázové zpoždění retardéru

Pro prověření závislosti chyby určení Stokesových koeficientů na fázovém zpoždění Γ a šumu, jsme nejdříve použili interval $\langle 3, 5^\circ, 179^\circ \rangle$. Tento interval byl příliš velký, proto jsme ho zúžili a provedli novou simulaci. Výsledek byl zajímavý. Minimální chyba vzniká při fázovém zpoždění 132° a ne při fázovém zpoždění 90° . U zpoždění 132° máme až 1,6 krát lepší poměr mezi šumem a signálem, než u čtvrtvlnné retardační destičky.

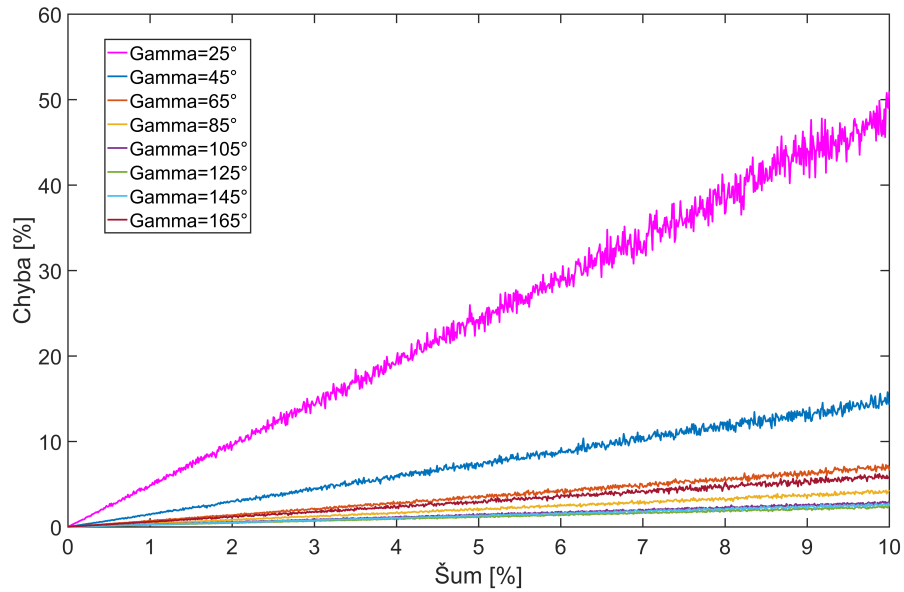


Obr. 8: Průběh závislosti chyby na změně fázového zpoždění. Modrá křivka znázorňuje průběh závislosti v intervalu $\langle 3, 5^\circ, 179^\circ \rangle$, hodnoty křivky jsou násobeny hodnotou 0,01. Fialová křivka znázorňuje průběh závislosti v užším intervalu $\langle 40^\circ, 175^\circ \rangle$. (Parametry sestavy byly zvoleny $\epsilon = 0, \theta_0 = 0$. Velikost šumu $n_l = 0,001$.)

Z grafu (Obr.9) vyplývá, že závislost chyby na šumu je lineární. Ze znalosti velikosti chyby pro jednotlivé hodnoty Γ a úrovně šumu (v našem případě $n_l = 0,001$) můžeme dopočítat jak by vypadala chyba pro jinou úroveň šumu. Vztah který můžeme použít

$$\sigma_n = \frac{\sigma_0}{n_{l_0}} n_{l_n}, \quad (2.23)$$

kde σ_0 je naše naměřená odchylka, n_{l_0} úroveň šumu při měření, n_{l_n} nová úroveň šumu, u které by nás zajímalo jaká bude odchylka/chyba.



Obr. 9: Průběh závislosti chyby na šumu pro různé parametry Γ . (Parametry sestavy byly zvoleny $\epsilon = 0, \theta_0 = 0$.)

3 Muellerova elipsometrie

Muellerův elipsometr měří kompletní Muellerovu matici M optického vzorku a tím úplně charakterizuje jeho polarizační vlastnosti. Elipsometr je složen z dvou základních částí: generátoru polarizačního záření (PSG) a analyzátoru polarizačního záření (PSA) mezi kterými je umístěn měřený vzorek. Generátor polarizačního záření je složen ze zdroje záření, lineárního horizontálního polarizátoru s fixní osou propustnosti definující osu x (1.18) a čtvrtvlnné fázové destičky (2.4). Analyzátor polarizovaného záření je tvořen čtvrtvlnnou fázovou destičkou (2.4) a horizontálním lineárním polarizátorem (1.18). Detekovaná intenzita záření je dána rovnicí [1]

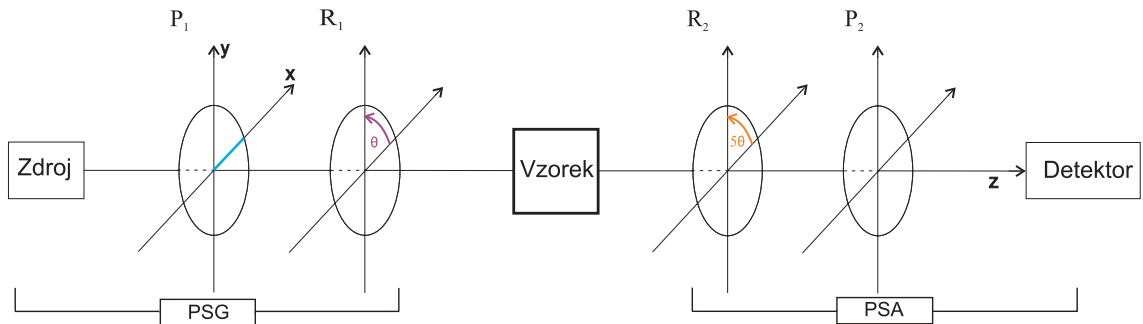
$$I(\theta) = \sum_{i,j}^4 a_i p_j M_{ij}, \quad (3.1)$$

kde

$$\vec{a} = (1, 0, 0, 0) \cdot M_{P_2} \cdot M_{R_2}, \quad \vec{p} = M_{R_1} \cdot M_{P_1} \cdot I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a M_{ij} jsou prvky Muellerovy matice vzorku. I_0 je intenzita vstupního záření. M_{P_2} a M_{P_1} jsou Muellerovy matice polarizátorů. M_{R_2} a M_{R_1} jsou Muellerovy matice retardérů. Vzhledem k tomu, že Muellerova matice je reálná matice 4x4, je nutné provést nejméně 16 jednotlivých měření pro určení matice.[5]

Uvažujme konfiguraci Muellerova polarimetru s duální rotační retardační destičkou (DRR). Tato konfigurace je znázorněna na obrázku (Obr.10).



Obr. 10: Schéma Muellerova polarimetru v přesném nastavení. P_1 , P_2 jsou lineární horizontální polarizátory a R_1 , R_2 jsou čtvrtvlnné fázové destičky rotující v poměru rychlostí 5:1.

Když se dva retardéry otáčí v poměru 5:1, 16 parametrů vzorku v Muellerově matici je kódováno do Fourierových složek detekovaného signálu. Modulovaný signál obsahuje 12

harmonických frekvencí. porovnáním detekované intenzity (3.1) se vztahem (2.6), získáme soustavu 25 rovnic, jejichž řešení vede k matici obecného vzorku

$$M = \begin{pmatrix} a_0 - 2a_4 + 2a_{16} - 2a_{20} + 2a_{24} & -4(-a_4 + a_{16} + a_{24}) & -4(-b_4 - b_{16} + b_{24}) & (b_2 + 2b_{18} - 2b_{22}) \\ 4(a_{20} - a_{16} - a_{24}) & 8(a_{16} + a_{24}) & 8(b_{16} + b_{24}) & -4(b_{18} - b_{22}) \\ 4(-b_{16} + b_{20} - b_{24}) & 8(b_{16} + b_{24}) & -8(-a_{16} + a_{24}) & 4(a_{18} - a_{22}) \\ -2(-b_6 + b_{10} - b_{14}) & -4(b_6 + b_{14}) & -4(a_6 - a_{14}) & (2a_{12} - 2a_8) \end{pmatrix} I_0^{-1}. \quad (3.2)$$

Fourierovy koeficienty se vyčíslí ze vztahů (2.9) a (2.10) z experimentálních dat. Vztah (3.2) je odvozený pro lineárně polarizované záření zdroje ve směru osy x (v případě nepolarizovaného záření je nutno celou matici M (3.2) vynásobit parametrem 2). Ale abychom získali matici vzorku, musíme nejdříve provést kalibraci. Provedeme měření bez vzorku, tedy chceme získat Muellerovu matici volného prostředí (vzduchu) a ta má tvar

$$M_{air} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Dosadíme do vztahu (3.1) a dopočítáme I_0 . Vztah který potom získáme pro I_0 :

$$I_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} a_0 + 2a_4 - a_8 + a_{12} + 2a_{16} + 2a_{20} \right), \quad (3.4)$$

kde a_0 a a_n jsou Fourierovy koeficienty získané diskretní Fourierovou transformací (2.9) z naměřené intenzity I .

3.1 Kalibrace Muellerova elipsometru

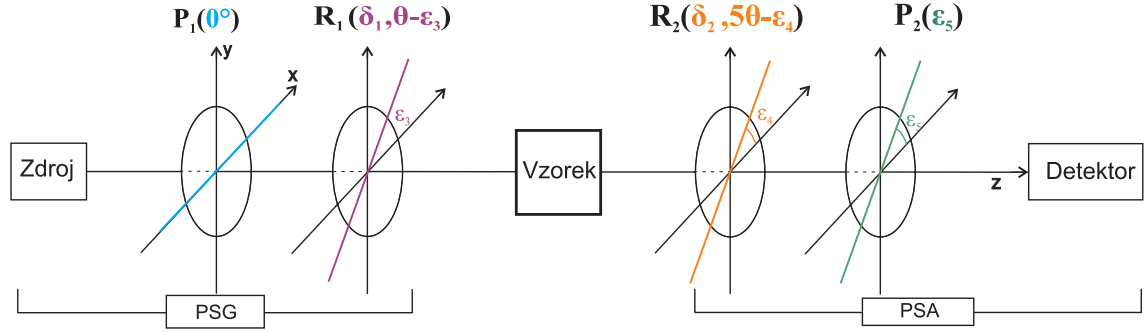
Z důvodů vlastností jednotlivých optických komponent elipsometru vznikají systematické chyby, z tohoto důvodu musíme provést kalibraci pro dosažení co nejpřesnějších výsledků měření. Osy komponent se nastavují vůči ose propustnosti prvního polarizátoru, který v našem případě definuje osu x. Veškerá vychýlení os ostatních komponent jsou značena ϵ_3, ϵ_4 a ϵ_5 . V potaz musíme brát i rozdílná fázová zpoždění u retardačních destiček, tento rozdíl od ideální hodnoty značíme δ_1 a δ_2 . Zobecněná detekovaná intenzita lze tedy psát

$$I(\theta) = \sum_{i,j}^4 a_i p_j M_{ij}, \quad (3.5)$$

kde

$$\vec{a} = (1, 0, 0, 0) \cdot M_{P_2}(\epsilon_5) \cdot M_{R_2}(\delta_2, 5\theta - \epsilon_4), \quad \vec{p} = M_{R_1}(\delta_1, \theta - \epsilon_3) \cdot M_{P_1} \cdot I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a M_{ij} jsou prvky Muellerovy matice vzorku. I_0 je intenzita vstupního záření. $M_{P_2}(\epsilon_5)$ je Muellerova matice druhého lineárního polarizátoru, M_{P_1} je Muellerova matice prvního lineárního polarizátoru. M_{R_2} a M_{R_1} jsou Muellerovy matice druhého a prvního retardéru.



Obr. 11: Schéma Muellera polarimetru v nedokonalém nastavení, se znázorněním jednotlivých odchylek.

Porovnáním naměřené intenzity $I(\theta)$ s Fourierovou řadou (2.6) vede na soustavu rovnic, kde vystupují Fourierovy koeficienty jako funkce definovaných kalibračních koeficientů. Abychom soustavu mohli vyřešit, musíme provést kalibrační měření bez vzorku. Při kalibraci se dosazují do soustavy jednotlivé jednotkové prvky Muellerovy matice (3.3) a tím se nám soustava rovnic dosti zjednoduší. Je možné vyjádřit kalibrační koeficienty ve tvaru

$$\epsilon_3 = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{b_{16}}{a_{16}}\right) - \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{b_{20}}{a_{20}}\right), \quad (3.6)$$

$$\epsilon_4 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b_4}{a_4}\right) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b_{12}}{a_{12}}\right) + \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{b_{16}}{a_{16}}\right), \quad (3.7)$$

$$\epsilon_5 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b_4}{a_4}\right) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b_{16}}{a_{16}}\right) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b_{20}}{a_{20}}\right), \quad (3.8)$$

$$\delta_1 = \arccos\left(\frac{a_{10} \cos(4\epsilon_4 - 4\epsilon_3 - 2\epsilon_5) - a_8 \cos(4\epsilon_4 - 2\epsilon_5)}{a_{10} \cos(4\epsilon_4 - 4\epsilon_3 - 2\epsilon_5) + a_8 \cos(4\epsilon_4 - 2\epsilon_5)}\right), \quad (3.9)$$

$$\delta_2 = \arccos\left(\frac{a_4 \cos(4\epsilon_4 - 4\epsilon_3 - 2\epsilon_5) - a_8 \cos(4\epsilon_4 - 2\epsilon_5)}{a_4 \cos(4\epsilon_4 - 4\epsilon_3 - 2\epsilon_5) + a_8 \cos(4\epsilon_4 - 2\epsilon_5)}\right). \quad (3.10)$$

Parametry a a b jsou Fourierovy koeficienty získané vztahy (2.9) a (2.10) z naměřené intenzity. Nejdříve provedeme substituci pro zjednodušení.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1 - \cos \delta_1 \\ \beta_2 &= 1 - \cos \delta_2 \\ \beta_3 &= 1 + \cos \delta_1 \\ \beta_4 &= 1 + \cos \delta_2 \\ \alpha_1 &= 2\epsilon_4 - 2\epsilon_3 - 2\epsilon_5 \\ \alpha_2 &= 2\epsilon_4 + 2\epsilon_3 - 2\epsilon_5 \\ \alpha_3 &= 2\epsilon_4 - 4\epsilon_3 - 2\epsilon_5 \\ \alpha_4 &= 2\epsilon_4 + 4\epsilon_3 - 2\epsilon_5 \\ \alpha_5 &= 2\epsilon_5 - 2\epsilon_4 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_6 &= 2\epsilon_5 - 4\epsilon_4 + 2\epsilon_3 \\
\alpha_7 &= 2\epsilon_5 - 4\epsilon_4 - 2\epsilon_3 \\
\alpha_8 &= -2\epsilon_5 + 4\epsilon_4 - 2\epsilon_3 = -\alpha_6 \\
\alpha_9 &= 4\epsilon_4 - 4\epsilon_3 - 2\epsilon_5 \\
\alpha_{10} &= 4\epsilon_4 + 2\epsilon_3 - 2\epsilon_5 \\
\alpha_{11} &= 4\epsilon_4 - 2\epsilon_5
\end{aligned}$$

Díky této substituci je zápis jednotlivých parametrů Muellerovi matice přehlednější. Pomocí $\epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \delta_1$ a δ_2 můžeme zapsat Muellerovu matici pro vzorek:

$$\begin{aligned}
m_{33} &= \frac{4}{\sin \delta_1 \sin \delta_2} \left(-\frac{a_8}{\cos \alpha_1} + \frac{a_{12}}{\cos \alpha_2} \right) \\
m_{32} &= 8 \frac{-a_6 \cos \alpha_3 + b_6 \sin \alpha_3 + a_{14} \cos \alpha_4 - b_{14} \cos \alpha_4}{\beta_1 \sin \delta_2} \\
m_{31} &= -8 \frac{a_6 \cos \alpha_3 + b_6 \sin \alpha_3 + a_{14} \cos \alpha_4 + b_{14} \cos \alpha_4}{\beta_1 \sin \delta_2} \\
m_{30} &= \frac{-\beta_3 m_{31}}{2} - \frac{4b_5}{\cos \alpha_5 \sin \delta_2} \\
m_{13} &= 8 \frac{a_{18} \sin \alpha_6 - b_{18} \cos \alpha_6 - a_{22} \sin \alpha_7 + b_{22} \cos \alpha_7}{\beta_2 \sin \delta_1} \\
m_{23} &= 8 \frac{a_{18} \cos \alpha_6 + b_{18} \sin \alpha_6 - a_{22} \cos \alpha_7 - b_{22} \sin \alpha_7}{\beta_2 \sin \delta_1} \\
m_{03} &= \frac{-\beta_4 \cos 2\epsilon_5 m_{13}}{2} + \frac{4b_1}{\cos 2\epsilon_2 \sin \delta_1} - \frac{\beta_4 \sin 2\epsilon_5 m_{23}}{2} \\
m_{11} &= 16 \frac{a_{16} \cos \alpha_9 + a_{24} \cos \alpha_{10} - b_{16} \sin \alpha_9 - b_{24} \sin \alpha_{10}}{\beta_1 \beta_2} \\
m_{22} &= 16 \frac{a_{16} \cos \alpha_9 - a_{24} \cos \alpha_{10} - b_{16} \sin \alpha_9 + b_{24} \sin \alpha_{10}}{\beta_1 \beta_2} \\
m_{12} &= 16 \frac{-a_{16} \sin \alpha_9 + a_{24} \sin \alpha_{10} - b_{16} \cos \alpha_9 + b_{24} \cos \alpha_{10}}{\beta_1 \beta_2} \\
m_{21} &= 16 \frac{a_{16} \sin \alpha_9 + a_{24} \sin \alpha_{10} + b_{16} \cos \alpha_9 + b_{24} \cos \alpha_{10}}{\beta_1 \beta_2} \\
m_{01} &= \frac{16a_4 \cos 4\epsilon_3 - 16b_4 \sin 4\epsilon_3 - \beta_1 \beta_4 \cos 2\epsilon_5 m_{11} - \beta_1 \beta_4 \sin 2\epsilon_5 m_{21}}{2\beta_1} \\
m_{02} &= \frac{16a_4 \sin 4\epsilon_3 + 16b_4 \cos 4\epsilon_3 - \beta_1 \beta_4 \cos 2\epsilon_5 m_{12} - \beta_1 \beta_4 \sin 2\epsilon_5 m_{22}}{2\beta_1} \\
m_{10} &= \frac{16a_{10} \cos \alpha_{11} - 16b_{10} \sin \alpha_{11} - \beta_2 \beta_3 m_{11}}{2\beta_2}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

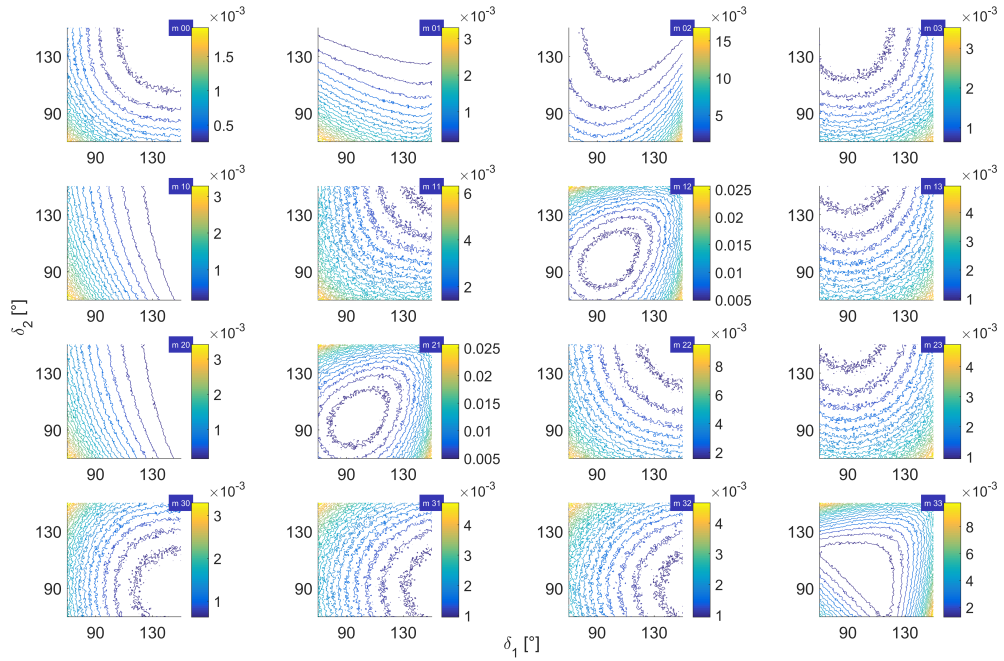
$$m_{20} = \frac{-(\beta_2\beta_3m_{21} - 16b_{10} \cos \alpha_{11} - 16a_{10} \sin \alpha_{11})}{2\beta_2}$$

$$m_{00} = 4a_0 - \frac{1}{2}\beta_3m_{01} - \frac{1}{2}\beta_4 \cos 2\epsilon_5m_{10} - \frac{1}{4}\beta_3\beta_4 \cos 2\epsilon_5m_{11}$$

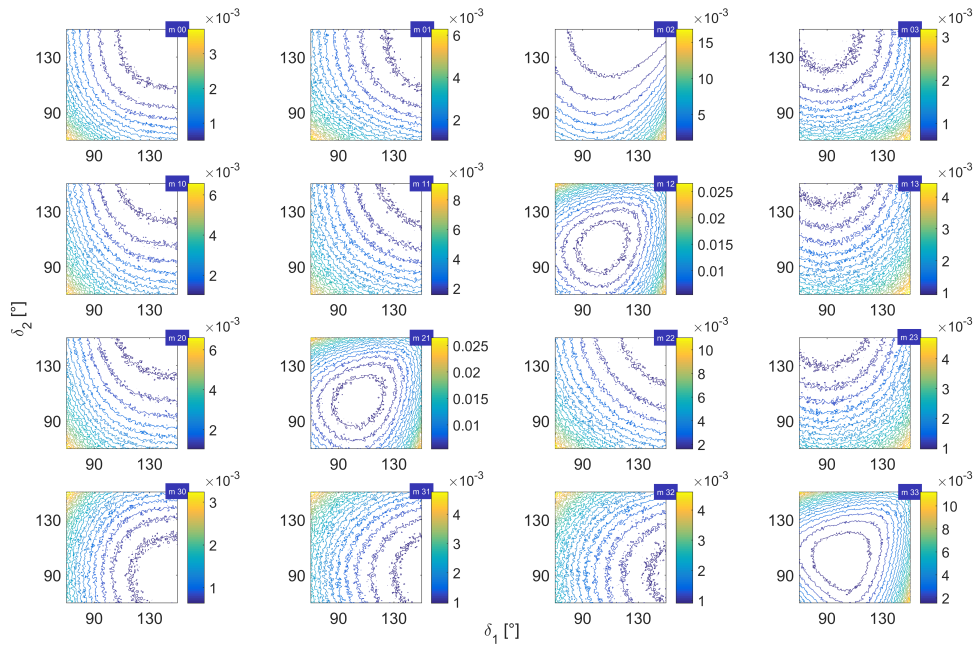
$$- \frac{1}{2}\beta_4 \sin 2\epsilon_5m_{20} - \frac{1}{4}\beta_3\beta_4 \sin 2\epsilon_5m_{21}$$

3.2 Analýza chyb při určování parametrů Muellerovy matice komponent

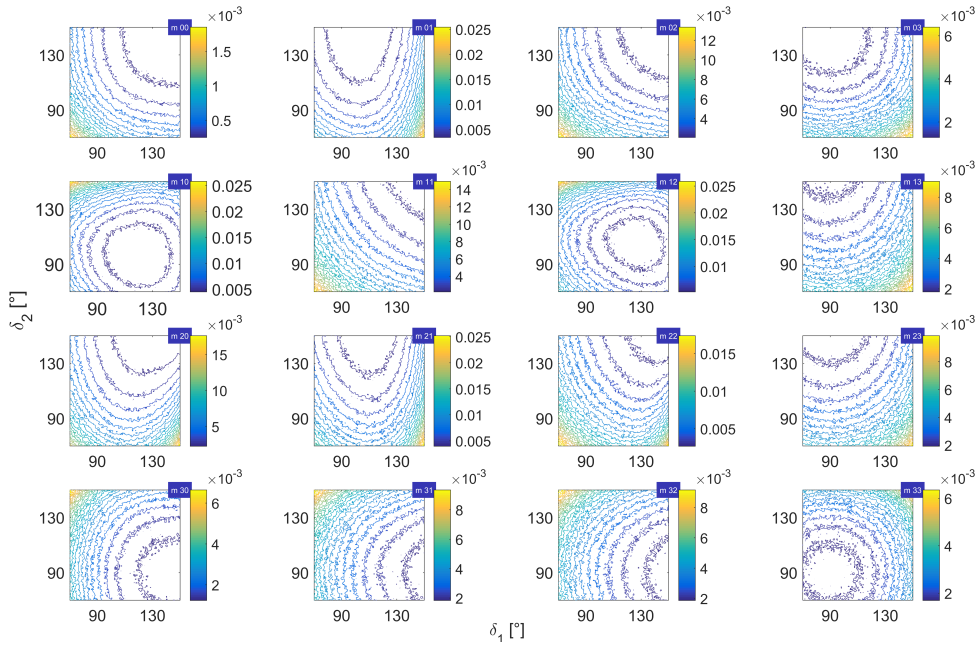
Parametr, který nejvíce ovlivňuje přesnost určení parametrů Muellerovi matice vzorku, je fázové zpoždění retardačních destiček. Ostatní parametry, odchýlení od os, byly položeny nule. Byla provedena analýza, simulace měření s různými nastaveními fázového zpoždění rotujících retardačních destiček. Interval fázových zpoždění, pro analýzu, byl zvolen $\langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$ (při zvolení širšího intervalu nešlo příliš dobře rozpoznat minimum z důvodů chyb limitně blížících se k nekonečnu). Simulace byla provedena pro tyto vzorky: prázdné prostředí (vzduch), lineární horizontální polarizátor, lineární horizontální polarizátor rotovaný o 45° od osy x, čtvrtvlnová fázová destička a půlvlnová fázová destička. Komponenty volíme tak, aby bylo možno prozkoumat dopad chyby určení na co největší počet nenulových prvků Muellerovy matice.



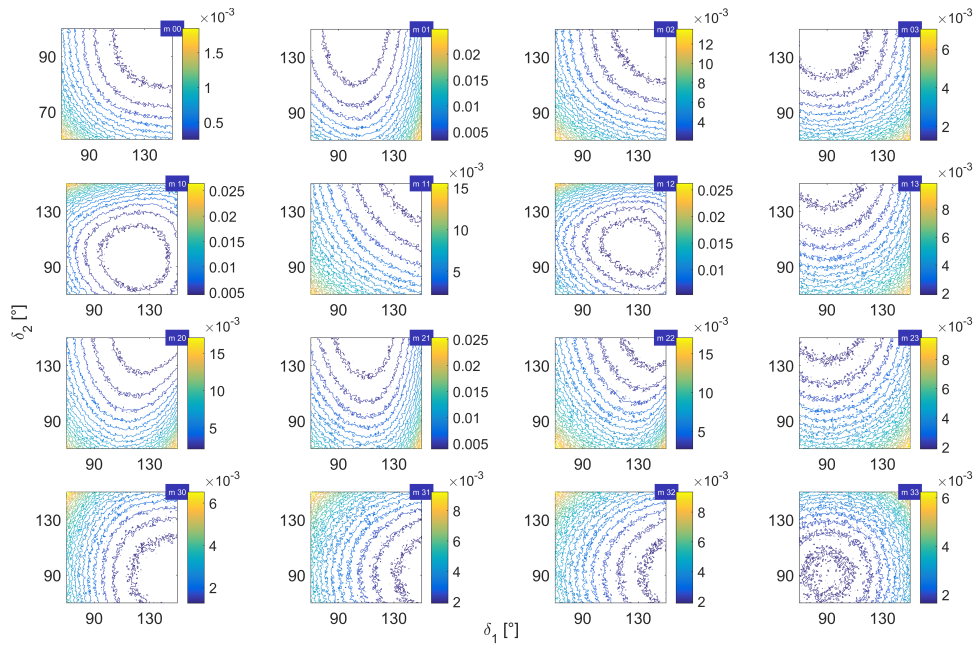
Obr. 12: Simulací získaná normalizovaná matice směrodatné odchylky dosažené při určování Muellerovi matice volného prostředí, vzduchu (Muellerova matice komponenty (3.3)). Parametry sestavy byly zvoleny $\delta_1 \in \langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$, $\delta_2 \in \langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$, $\epsilon = 0$, $\theta_0 = 0$. Velikost šumu $n_l = 0,001$.



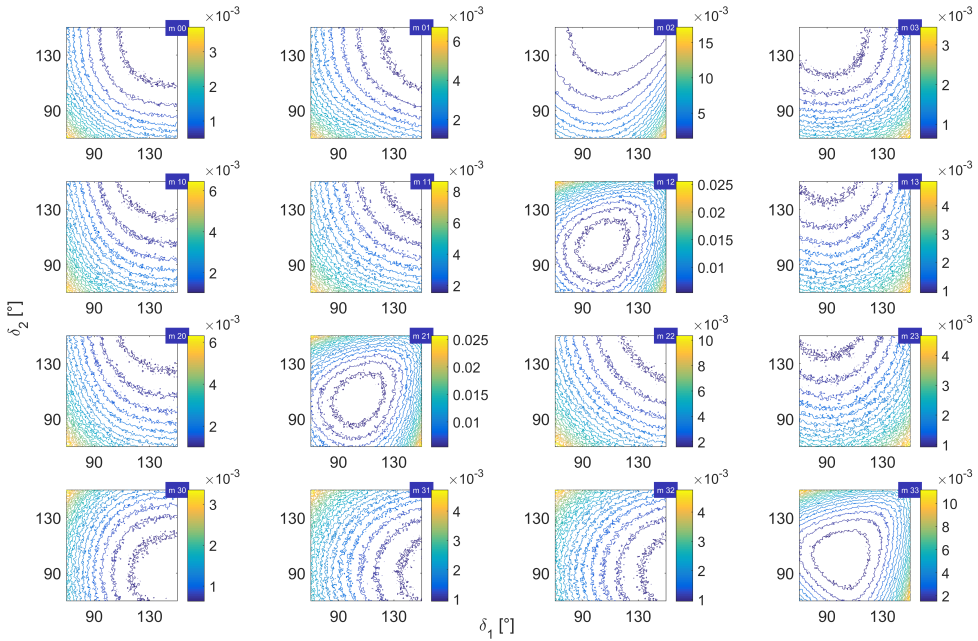
Obr. 13: Simulací získaná normalizovaná matice směrodatné odchylky dosažené při určování Muellerovi matice lineárního horizontálního polarizátoru (Muellerova matice komponenty (1.18)). Parametry sestavy byly zvoleny $\delta_1 \in \langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$, $\delta_2 \in \langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$, $\epsilon = 0$, $\theta_0 = 0$. Velikost šumu $n_l = 0,001$.



Obr. 14: Simulací získaná normalizovaná matice směrodatné odchylky dosažené při určování Muellerovi matice lineárního polarizátoru rotoveném o 45° od osy x (Muellerova matice komponenty (3.13)). Parametry sestavy byly zvoleny $\delta_1 \in \langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$, $\delta_2 \in \langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$, $\epsilon = 0$, $\theta_0 = 0$. Velikost šumu $n_l = 0,001$.



Obr. 15: Simulací získaná normalizovaná matice směrodatné odchylky dosažené při určování Muellerovi matice čtvrtvlnné retardační destičky (Muellerova matice komponenty (1.24)). Parametry sestavy byly zvoleny $\delta_1 \in \langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$, $\delta_2 \in \langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$, $\epsilon = 0$, $\theta_0 = 0$. Velikost šumu $n_l = 0,001$.



Obr. 16: Simulací získaná normalizovaná matice směrodatné odchylky dosažené při určování Muellerovi matice půlvlnné retardační destičky (Muellerova matice komponenty (1.23)). Parametry sestavy byly zvoleny $\delta_1 \in \langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$, $\delta_2 \in \langle 70^\circ, 150^\circ \rangle$, $\epsilon = 0$, $\theta_0 = 0$. Velikost šumu $n_l = 0,001$.

Mueller matice pro lineární polarizátor s rotovanou osou propustnosti o 45°

$$M_{pol_{45^\circ}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Jak můžeme vidět (Obr.12 – 16), prvky matic mají různé závislosti fázových zpoždění na určení chyby. Vezměme si například Obr.13. Když se zaměříme na prvky m_{00} , m_{01} , m_{10} a m_{11} , tak ideálním fázovým zpožděním pro získání co nejmenší chyby by bylo 180° , což odpovídá půlvlnné fázové destičce. Kdybychom však zvolili retardační destičku s tímto fázovým zpožděním, tak by se chyba komponent m_{12} , m_{21} a m_{33} blížila limitně k nekonečnu. Z tohoto můžeme usoudit, že pro jednotlivé prvky Muellerovy matice existuje ideální fázové zpoždění pro získání co nejmenší chyby, ale nejde zvolit ideální retardance, u které by byla chyba určení všech prvků Muellerovy matice nejmenší. Tato chyba určení je na úrovni šumu a to v řádu 10^{-3} až 10^{-2} .

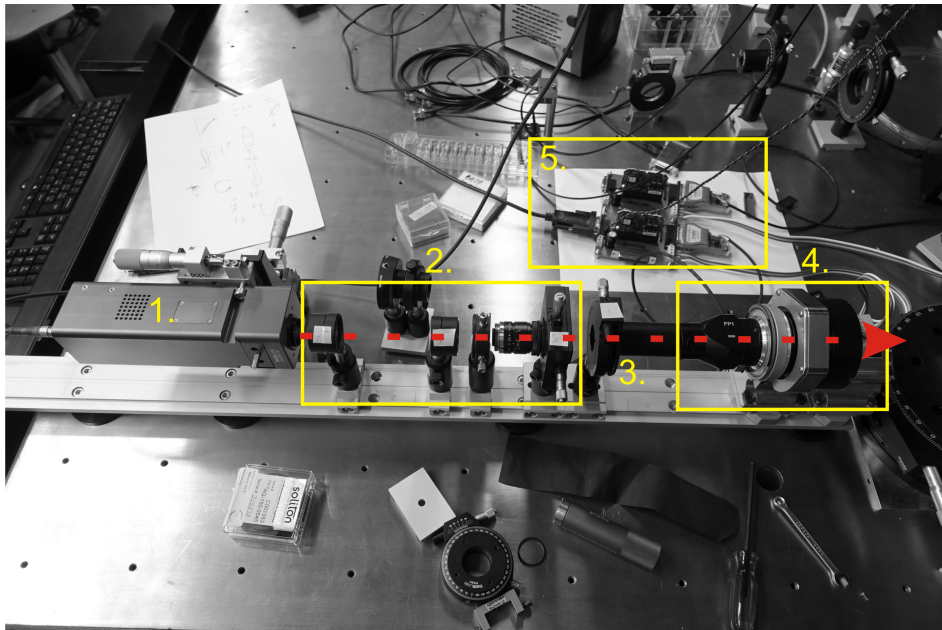
4 Experimentální část

Byly proměřeny a porovnány výsledky měření dvou různých realizací Muellerova elipsometru. První adaptací byl Muellerův elipsometr s dvojicí rotujících achromatických fázových destiček, kdežto druhé nastavení bylo tvořeno Muellerovým elipsometrem s dvojicí rotujících Fresnelových hranolů ve funkci achromatických fázových destiček. První krok byl provést kalibraci a porovnat výsledek určení kompenzačních koeficientů. Po kalibraci jsme použili optický polarizační prvek (lineární polarizátor s rotovanou osou propustnosti o 45° od osy x), který jsme změřili na obou realizacích a porovnali určení Muellerovy matice. Další věcí bylo určit vlastnosti reálné retardační destičky $\frac{\lambda}{4}$ (retardance, azimu, elipticity), měření bylo provedeno na obou realizacích. Poslední krok byl proměřit fázovou destičku použitou v první realizaci a Fresnelův hranol použit v druhém nastavení. Určili jsme jejich vlastnosti a porovnali průběh jejich fázového zpoždění s průběhem fázového zpoždění získaného při kalibraci.

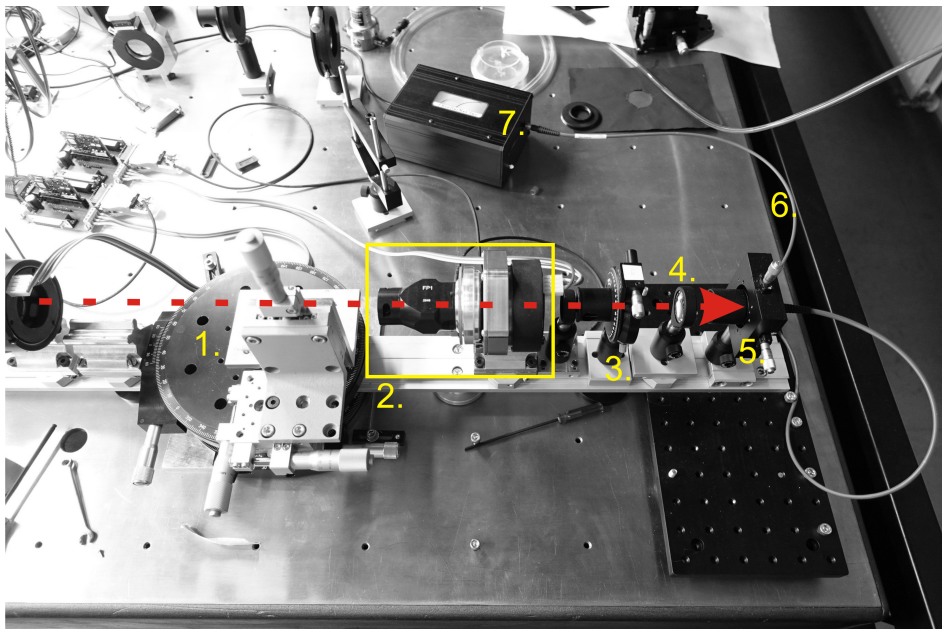
4.1 Aparatura

Pro měření byl použit Muellerův elipsometr zkonstruovaný na Katedře optiky PŘF UP v Olomouci s dvojicí rotujících retardačních destiček (funkce polarimetru byla popsána v kapitole 3).

Jako polychromatický zdroj záření byla použita wolframová žárovka (Thorlabs, model SLS201/M) napájenou stabilizovaným zdrojem konstantního proudu s rozsahem spektra 360 – 2600 nm. Za zdrojem je umístěna dvojice asférických čoček s ohniskovou vzdáleností 26,5 mm (Thorlabs, model ACL3026), která má za úkol kolimovat záření ze zdroje a následně fokusovat do dírkové clony o průměru 25 μm . Prvek před polarizačními prvky je CCTV objektiv o ohniskové vzdálenosti 8 mm (Thorlabs, model MLV8), který kolimuje záření na svazek o poloměru 0,5 – 1 mm. Po objektivu následuje generátor (PSG) a analyzátor polarizačního záření (PSA). PSG, tak jako PSA je tvořeno dvojicí lineární polarizátor a fázová destička. Polarizátory (Bernhard Halle Nachfl. GmbH, model PGL 10.2) jsou vyrobeny z islandského vápence. Byly použity dva různé typy fázových destiček. První případ, který byl použit jsou achromatické retardační destičky (vyrobeny na zakázku u společnosti Bernhard Halle Nachfl. GmbH) s fázovým zpožděním v intervalu $135^\circ - 120^\circ$ pro vlnové délky 400 – 700 nm. Jako druhý typ byly použity Fresnelovy hranoly s fázovým zpožděním $130^\circ - 129^\circ$ pro vlnovou délku 450 – 800 nm (hranoly byly navrženy na Katedře optiky a vyrobeny ve firmě Meopta). Po polarizačních prvcích a vzorkem je umístěna čočka s ohniskovou vzdáleností 50 mm, která fokusuje svazek na vstup do optického vlákna (Thorlabs, model M35L01), které vede do spektrometru (StellarNet Inc, model Black – Comet C–SR–25) citlivém v rozmezí 200 – 1080 nm vlnové délky.



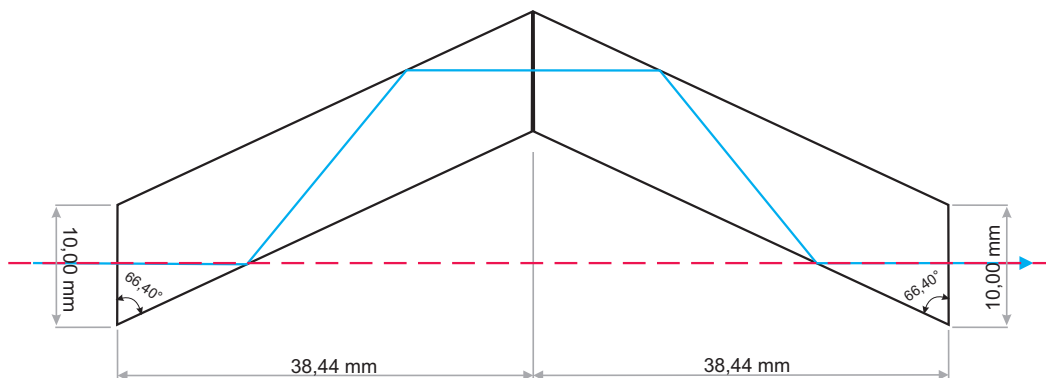
Obr. 17: Fotografie první části Muellera elipsometru, tvořena: 1. zdrojem polychromatického záření, 2. zúžením záření na úzký svazek (kolimační asférická čočka, fokusační asférická čočka, dírková clona, kolimační objektiv), 3. fixní polarizátor, 4. fázová destička tvořená Fresnelovým hranolem v motorizované rotační montáži, 5. řídicí jednotka.



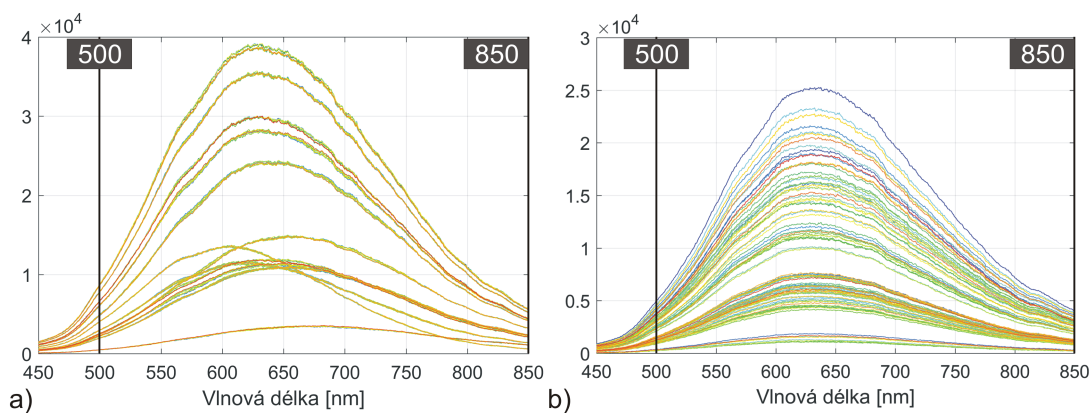
Obr. 18: Fotografie druhé části Muellera elipsometru, tvořena: 1. goniometr (míto pro vzorek), 2. fázová destička tvořená Fresnelovým hranolem v motorizované rotační montáži, 3. fixní polarizátor, 4. fokusační čočka, 5. vstup do vlákna, 6. optické vlákno, 7. spektrometr.

4.2 Realizace experimentu

První adaptací byl Muellerův elipsometr s dvojicí rotujících retardačních destiček s fázovým zpožděním $135^\circ - 120^\circ$ pro vlnovou délku $400 - 700$ nm. Druhou realizací byl Muellerův elipsometr s dvojicí Fresnelových hranolů (vyrobených z taveného křemene) ve funkci fázových destiček s fázovým zpožděním $131^\circ - 129,6^\circ$ pro interval vlnových délek $400 - 800$ nm. Vstupní a výstupní stěna hranolu není pokryta antireflexní vrstvou.



Obr. 19: Průřez Fresnelovým hranolem a jeho parametry. Modře vyznačená cesta svazku. Osa rotace hranolu je vyznačená čárkovaně červeně.



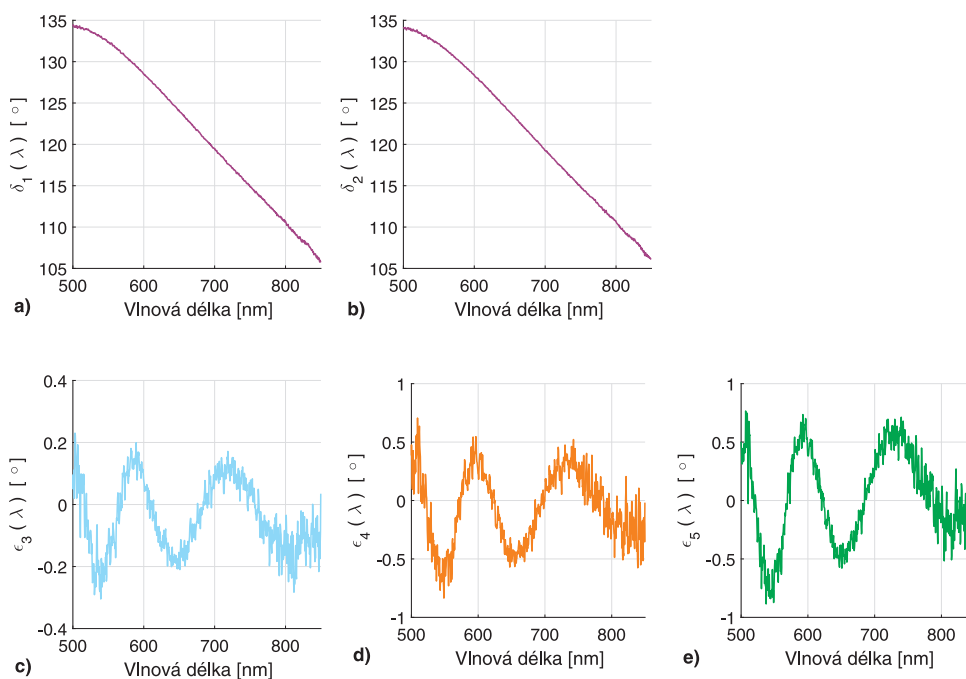
Obr. 20: a) Spektrální rozdělení detekované intenzity při kalibraci elipsometru, měření bez vzorku, nastavení s dvojicí fázových destiček pro všech 200 kroků záznamu. b) Spektrální rozdělení detekované intenzity při kalibraci elipsometru, měření bez vzorku, nastavení s dvojicí Fresnelových hranolů pro všech 200 kroků záznamu.

Při kalibraci obou adaptací, tedy pro měření bez vzorku, byla naměřena intenzita záření. Její průběh je znázorněn na (Obr.20), vidíme, že na krajích spektrálního rozsahu je signál intenzity nízký, proto interval zúžíme na $500 - 850$ nm. Veškeré následující grafy budou vykresleny v tomto spektrálním intervalu

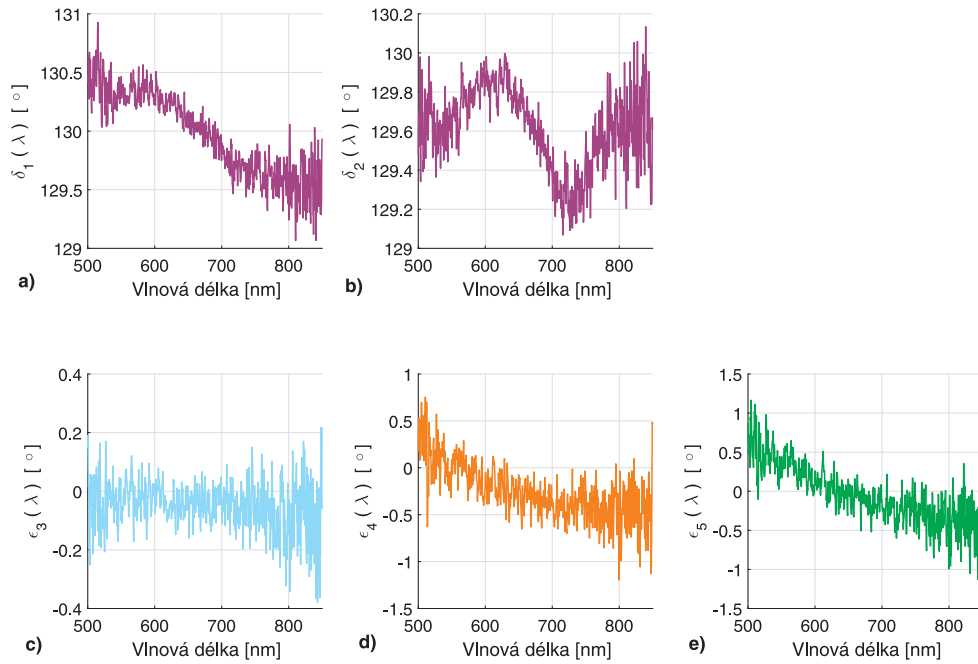
4.3 Porovnání výsledků měření

Kompenzační koeficienty

První krok byl provést kalibraci obou nastavení, pro volný prostor (měření bez vzorku). Z detekované intenzity jsme dopočítali kompenzační koeficienty (kapitola 3.1) v závislosti na vlnové délce a vykreslili do grafů (Obr. 21,22). Na Obr.21 v grafu a) a b) vidíme fázové zpoždění retardačních destiček. Průběh závislosti fázového zpoždění na vlnové délce je u obou komponent stejný. Výrobce specifikoval fázové zpoždění v rozsahu $135^\circ - 120^\circ$ pro vlnovou délku $400 - 700$ nm. Z našeho měření je zřejmé, že tyto parametry jsou v tomto rozsahu splněny. Podíváme-li se na Obr.22 tak v grafu a) a b) vidíme, že průběh závislosti fázového zpoždění na vlnové délce je rozdílný, i když se jedná o stejný model Fresnelova hranolu. Odlišnost je způsobena malými nepřesnostmi realizací samotného Fresnelova hranolu nebo jeho nepřesným nastavením. Náš model, nezahrnuje vlastnosti destiček, které se projeví právě v grafech c), d), e) (Obr.21) formou fluktuací.



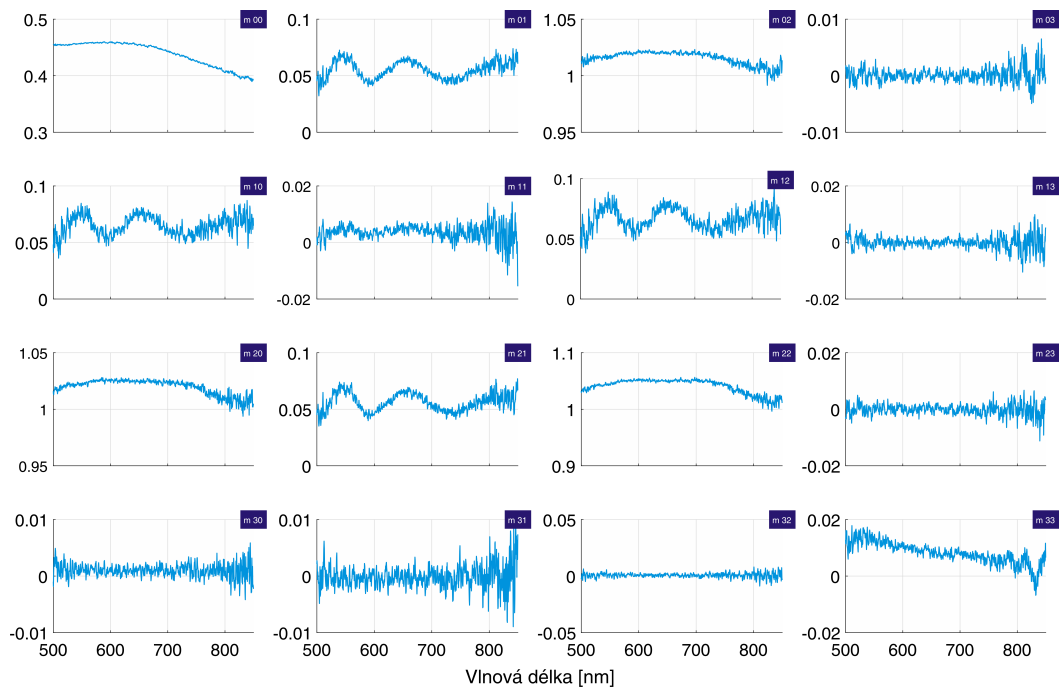
Obr. 21: Grafy kompenzačních koeficientů získaných při kalibraci Muellerova elipsometru pro dvojici fázových destiček. a) fázové zpoždění první fázové destičky, b) fázové zpoždění druhé fázové destičky, c) vychýlení rychlé osy první fázové destičky, d) vychýlení rychlé osy druhé fázové destičky, e) vychýlení osy propustnosti druhého polarizátoru



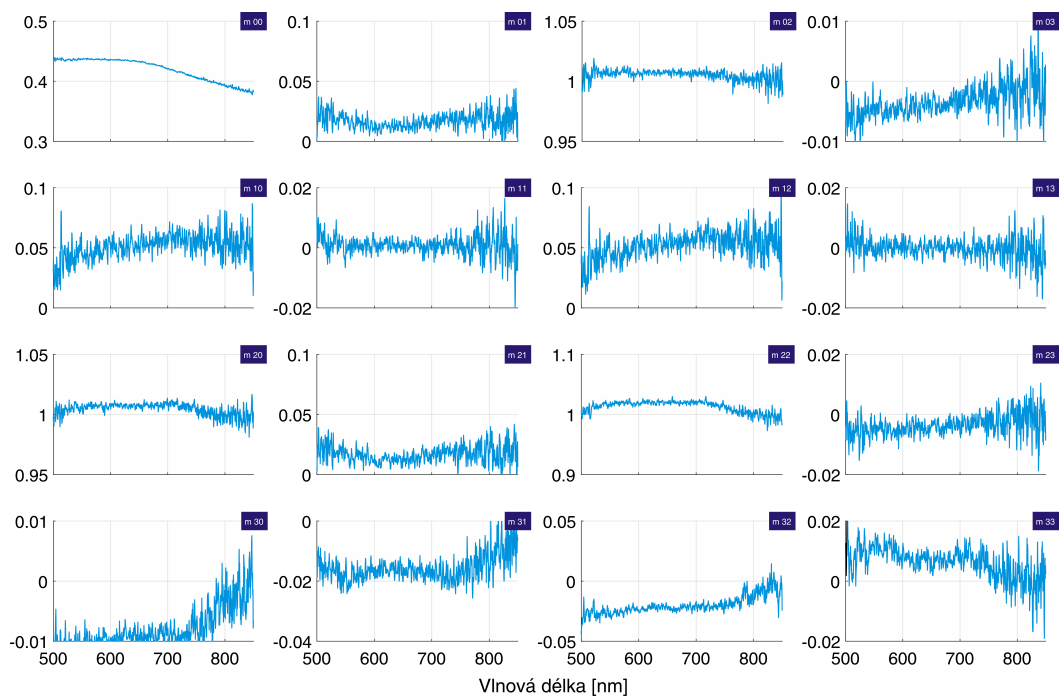
Obr. 22: Grafy kompenzačních koeficientů získaných při kalibraci Muellerova elipsometru pro dvojicí Fresnelových hranolů. a) fázové zpoždění prvního Fresnelova hranolu, b) fázové zpoždění druhého Fresnelova hranolu, c) vychýlení rychlé osy prvního hranolu, d) vychýlení rychlé osy druhého hranolu, e) vychýlení osy propustnosti druhého polarizátoru

Muellerova matice lineárního polarizátoru rotovaného o 45° vůči ose x

Další částí je analýza Muellerovy matice optického vzorku (Obr.23, 24). Námi zvolený prvek byl lineární polarizátor s rotovanou osou propustnosti o 45° (3.13) vůči ose nedefinované lineárního polarizátoru v PSG. Porovnáme-li nenulové prvky matice, tedy $m_{00}, m_{02}, m_{20}, m_{22}$, tak vidíme, že tam zásadní rozdíly nejsou, což u nulových prvků Muellerovy matice není pravda. U nastavení s dvojicí fázových destiček vidíme fluktuace u parametrů Muellerovi matice m_{01}, m_{10}, m_{12} a m_{21} . U adaptace s Fresnelovými hranoly fluktuace u těchto prvků nenalezneme. Tyto fluktuace jsou způsobeny vlastnostmi fázových destiček, které náš kalibrační model nezahrnuje. Další velký rozdíl vidíme u prvků m_{30}, m_{31} a m_{32} . U realizace s dvojicí Fresnelových hranolů je značné vychýlení od předpokládané nulové hodnoty. Tato vychýlení jsou zřejmě způsobena rotací hranolu, kdy může dojít k vychýlení svazku a to způsobí pokles intenzity na detektoru. Všechny parametry Muellerovy matice jsou normovány prvním prvkem této matice.



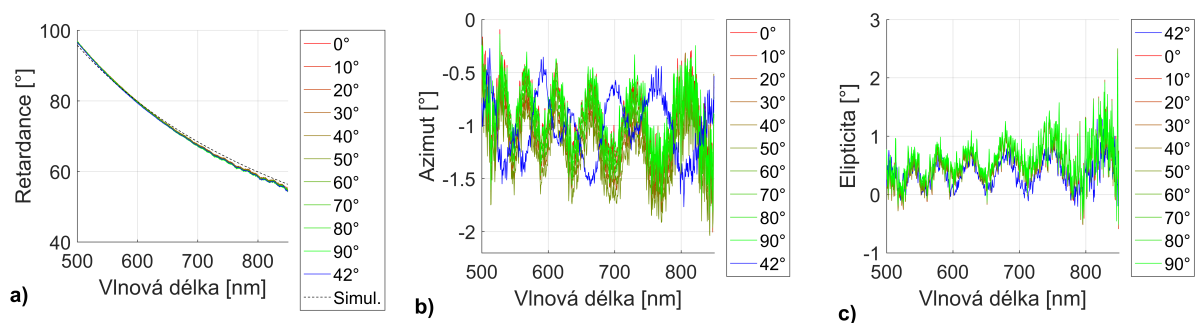
Obr. 23: Experimentálně získaná normalizovaná Muellerova matice pro polarizátor rotovaný o 45° . Nastavení Muellerova elipsometru s dvojicí fázových destiček.



Obr. 24: Experimentálně získaná normalizovaná Muellerova matice pro polarizátor rotovaný o 45° . Nastavení Muellerova elipsometru s dvojicí Fresnelových hranolů.

Vlastnosti fázové destičky $\frac{\lambda}{4}$

Předposlední část je věnována proměření fázové destičky $\frac{\lambda}{4}$ (B.Halle L4) pro vlnovou délku 532 nm a dopočítání jejich vlastností z Muellerovy matice [6]. Měření bylo provedeno jak s Fresnelovými hranoly, tak i s fázovými destičkami. Pro nastavení Muellerova elipsometru s Fresnelovými hranoly byla retardační destička proměřena v 10 různých nastaveních azimutu, abychom zjistili, chybu měření v závislosti na nastavení azimutu. Měření bylo provedeno v rozsahu $0^\circ - 90^\circ$. Veškeré výsledky byly vykresleny v grafu (Obr.25). Jak můžeme vidět, tak průběh retardance, ani elipticity se nějak zásadně nezměnil po změně azimutu, což je očekávané. Následně jsme proměřili destičku i realizaci s dvojicí fázových destiček, aby jsme mohli porovnat výsledky. Výsledek tohoto měření byl zakreslen do grafu (Obr.25). Hodnoty dopočítané ze získaných dat z obou realizací odpovídají nasimulované retardanci ideální fázové destičky $\frac{\lambda}{4}$ pro vlnovou délku 532 nm (černá přerušovaná křivka). Na Obr.25 v grafu b) si můžeme všimnout převráceného průběhu azimutu při měření s fázovými destičkami. Azimut je převrácený, že vzorek byl umístěn obráceně (strana, která směřovala ke zdroji v první aparatuře směřovala k detektoru v druhé aparatuře). Z výsledku je vidět, že určení parametrů destičky nezávisí na detailní realizaci elipsometru.

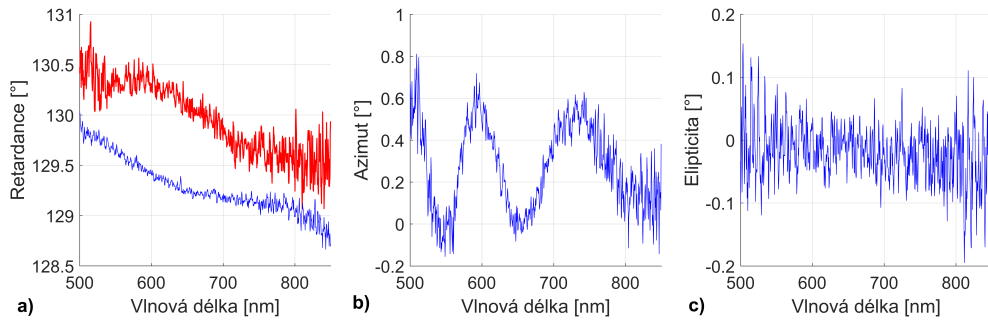


Obr. 25: Proložení grafů získaných z měření na obou realizacích k porovnání výsledků. a) závislost retardance na vlnové délce (porovnání s nasimulovanou ideální fázovou destičkou $\frac{\lambda}{4}$ pro vlnovou délku 532nm, vyznačeno černou přerušovanou křivkou), b) azimut vlastního vektoru retardéru (od každé hodnoty bylo odečtené její vychýlení a vykreslen byl zbytkový azimut), c) eliptičita vlastního vektoru retardéru.

Vlastnosti fázové destičky a Fresnelova hranolu použitých v realizacích Muellerova elipsometru

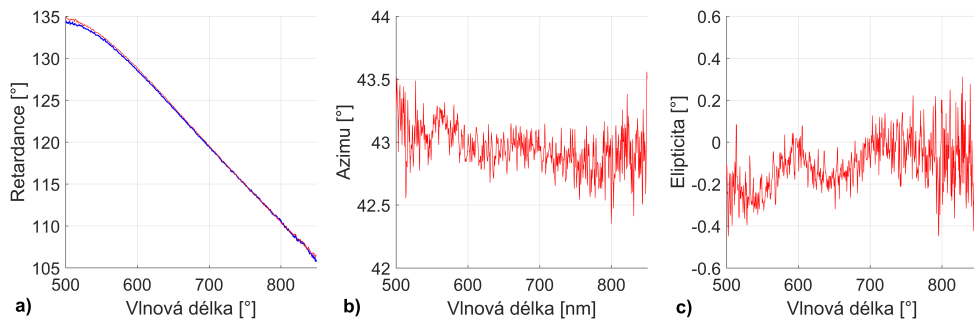
Posledním bodem je porovnat vlastnosti polarizačních komponent, které byly dopočítány z měření s retardancí získanou při kalibraci. Fresnelův hranol byl proměřen na nastavení Muellerova elipsometru s dvojicí fázových destiček a porovnán s retardancí, která byla získána při kalibraci realizace elipsometru s hranoly. Z grafu (Obr.26 graf a)) vidíme, že je rozdíl mezi retardancemi přibližně $0,5^\circ$, tato relativně malá chyba je způsobena systematickou chybou kalibrace měření. Hranol má velkou optickou dráhu a při rotaci této komponenty dochází k vychýlení svazku. Svazek je fokusován na úzkou štěrbinu a jakýkoliv jeho posuv způsobuje

změnu intenzity. Rozdíl retardance může být také způsoben, že hodnoty byly získány různými způsoby. První způsob je, dopočítání fázového zpoždění z Muellerovy matice (modrá křivka Obr.26), u tohoto postupu započítáváme i vlastnosti jako je elipticita. Kdežto u získání retardance z kalibrace (červená křivka Obr.26) se tyto parametry nezapočítávají.



Obr. 26: Červená křivka znázorňuje retardanci Fresnelova hranolu získanou kalibrací. a)retardance, b)azimut vlastního vektoru Fresnelova hranolu, c)elipticita vlastního vektoru Fresnelova hranolu.

Určení fázového zpoždění retardační destičky vyšlo téměř totožné, jak vidíme (Obr.27 graf a)).



Obr. 27: Modrá křivka znázorňuje retardanci fázové destičky získanou kalibrací. a)retardance, b)azimut vlastního vektoru fázové destičky, c)elipticita vlastního vektoru fázové destičky.

Závěr

Bakalářská práce se zabývá analýzou polarizačního stavu záření a polarizačními vlastnostmi optických komponent. Velká část byla věnována chybovým analýzám nastavení aparatury a její optimalizací.

Popisu polarizačního stavu světla byl proveden pomocí Stokesova vektoru a následně popis optických komponent Muellerovou maticí.

U Stokesovy polarimetrie byl kladem důraz na analýzu závislosti přesnosti určení Stokesova vektoru na parametrech aparatury. Byla provedena řada simulací s různými nastaveními. Závěrem je, že chyba určení parametrů Stokesova vektoru nezáleží na stupni polarizace ani typu polarizačního stavu zkoumaného záření. Vychýlení rychlé osy retardéru a vychýlení osy propustnosti polarizátoru jsou parametry, které taky nemají vliv na určení parametrů Stokesova vektoru, když se pohybují v intervalu $\langle -5^\circ, 5^\circ \rangle$. Hlavním parametrem, který hraje velkou roli v určení parametrů, je fázové zpoždění retardéru. Zjištění bylo takové, že čtvrtvlnná destička není ideální a vzniká 1,6x větší chyba než u retardéru s fázovým zpožděním 132° .

Třetí část mé bakalářské práce je věnovaná teoretickému popisu samotného Muellerova elipsometru, včetně kalibrace elipsometru. Část kapitoly byla věnována chybové analýze určování parametrů Muellerovy matice měřeného vzorku, a závěrem bylo, že není možné globálně zvolit fázové zpoždění tak, aby chyba určení jednotlivých parametrů Muellerovy matice byla nejmenší.

V poslední, experimentální části jsme se věnovali porovnání měření realizovaných na dvou různých nastaveních Muellerova elipsometru. Jako prvek způsobující fázové zpoždění v generátoru a analyzátoru polarizačního stavu byl použit Fresnelův hranol a achromatická fázová deska z anizotropních krystalických materiálů. Zajímavé zjištění bylo, že některé nežádoucí artefakty, které se vyskytovaly při měření s destičkami, se nevyskytovaly v získaných výsledcích u realizace elipsometru s dvojicí Fresnelových hranolů. Porovnali jsme také dopočítanou Muellerovy matice vzorku z naměřených dat obou realizací a můžeme říci, že u realizace s Fresnelovými hranoly jsme dosáhli lepšího výsledku měření, protože u této adaptace vymizely fluktuace, které se vyskytovaly u retardačních destiček. Také bylo ověřeno, že se Fresnelův hranol chová jako achromatická fázová destička s fázovým zpožděním $130^\circ - 129^\circ$.

Reference

- [1] Goldstein, D.; Collett, E., *Polarized light*. 2nd ed., Marcel Dekker: New York, 2003.
- [2] Michal, P., *Muellerova polarimetrie rozhraní dvou izotropních prostředí*. Bakalářská práce, Univerzita Palackého: Olomouc, 2015.
- [3] Malý, P., *Optika*. 2. vyd., Karolinum: Praha, 2013.
- [4] Bass, M., *Handbook of optics: Volume II*. 2nd ed., McGraw-Hill: New York, 1995-2001.
- [5] Compain, E.; Poirier, S.; Drevillon, B., *General and self-consistent method for the calibration of polarization modulators, polarimeters, and Mueller-matrix ellipsometers*. Applied Optics. 1999, 38, 3490-3502.
- [6] Shih-Yau Lu, Russell A. Chipman, *Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition*. Optical Society of America. 1996, Vol.13, No.5, 1106-1113.