

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
**Doplňující úlohy**  
**ze středoškolské fyziky**

<b>Vypracoval:</b>	Tereza ŠLITROVÁ
<b>Studijní program:</b>	B1701 Fyzika
<b>Studijní obor:</b>	Fyzika - Biologie
<b>Forma studia:</b>	prezenční
<b>Vedoucí bakalářské práce:</b>	Mgr. Jan ŘÍHA, Ph. D.
<b>Termín odevzdání práce:</b>	květen 2021

## **PROHLÁŠENÍ**

Čestně prohlašuji, že jsem závěrečnou práci na téma „Doplňující úlohy ze středoškolské fyziky“ zpracovala samostatně pod vedením Mgr. Jana Říhy, Ph. D. a s použitím informačních zdrojů a literatury, které dále cituji v seznamu zdrojů.

V Olomouci dne 17. 5. 2021

.....  
Tereza Šlitrová

## **PODĚKOVÁNÍ**

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu bakalářské práce Mgr. Janu Říhovi, Ph. D. za poskytnuté rady při tvorbě bakalářské práce, a především za jeho čas. Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Lukášovi Richterkovi, Ph. D. z Univerzity Palackého v Olomouci, RNDr. Pavlu Křížovi, Ph. D. z Jihočeské univerzity a doc. RNDr. Janu Křížovi, Ph. D. z Univerzity Hradec Králové za poskytnuté statistiky a pomoc při tvorbě této práce. Mimo to bych ráda poděkovala své rodině a svému příteli Janu Chasákovi, za podporu během celého studia.

## **BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE**

JMÉNO A PŘÍJMENÍ AUTORA:	Tereza Šlitrová
NÁZEV PRÁCE:	Doplňující úlohy ze středoškolské fyziky
TYP PRÁCE:	bakalářská
PRACOVNÍŠTĚ:	Katedra experimentální fyziky
VEDOUCÍ PRÁCE:	Mgr. Jan Říha, Ph. D.
ROK OBHAJOBY PRÁCE:	2021
ABSTRAKT:	Předložená bakalářská práce je sbírkou úloh fyzikální olympiády kategorií A a B oblasti elektřiny a magnetismu od 39. ročníku po současnost. Úlohy jsou roztrženy do kapitol dle témat a seřazeny podle obtížnosti. Součástí práce je také statistická analýza, kde jsou jednotlivé úlohy a kapitoly se tak porovnávají i mezi sebou.
KLÍČOVÁ SLOVA:	fyzikální olympiáda, fyzikální úloha, elektřina magnetismus, obtížnost úlohy, citlivost úlohy
POČET STRAN:	142
POČET PŘÍLOH:	1
JAZYK:	čeština

## **BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION**

**AUTOR'S NAME AND SURNAME:** Tereza Šlitrová

**TITLE:** Complementary tasks in high school physics

**TYPE OF THESIS:** Bachelor

**DEPARTMENT:** Department of Experimental Physics

**SUPERVISOR:** Mgr. Jan Říha, Ph. D.

**THE YEAR OF PRESENTATION:** 2021

**ABSTRACT:** The presented bachelor thesis is a collection of tasks of the Physics Olympiad, categories A and B (the field of electricity and magnetism), from the 39th Physics Olympiad to the present. The tasks are divided into chapters according to the topics and sorted by difficulty. The thesis also contains statistical analysis where the individual tasks and also chapters are compared to each other.

**KEYWORDS:** Physics Olympiad, physics task, electricity, magnetism, difficulty index, discrimination index

**NUMBER OF PAGES:** 142

**NUMBER OF APPENDICES:** 1

**LANGUAGE:** Czech

---

# OBSAH

ÚVOD.....	8
1 STATISTICKÁ ČÁST.....	9
1.1 Rozbor počtu příkladů ve FO.....	9
1.2 Rozbor vlastností příkladů ve FO.....	15
1.2.1 Obecná analýza vlastností testových úloh.....	15
1.2.1.1 Obtížnost úloh.....	15
1.2.1.2 Citlivost úloh.....	16
1.2.1.3 Analýza nenormovaných odpovědí.....	16
1.2.2 Konkrétní analýza vlastností úloh FO.....	17
2 PŘÍKLADOVÁ ČÁST.....	28
2.1 Elektrický náboj a pole.....	30
2.1.1 Základní pojmy a vztahy.....	30
2.1.2 Řešené příklady.....	32
2.1.2.1 Bodové náboje.....	32
2.1.2.2 Kondenzátory.....	39
2.1.3 Statistická úspěšnost příkladů.....	46
2.2 Elektrický proud v kovech.....	48
2.2.1 Základní pojmy a vztahy.....	48
2.2.2 Řešené příklady.....	50
2.2.2.1 Spojování rezistorů.....	50
2.2.2.2 Elektrické obvody.....	55
2.2.2.3 Výkon, příkon, účinnost.....	65
2.2.2.4 Měrný odpor drátu.....	74
2.2.3 Statistická úspěšnost příkladů.....	77
2.3 Elektrický proud v elektrolytech.....	80
2.3.1 Základní pojmy a vztahy.....	80
2.3.2 Řešené příklady.....	81
2.3.3 Statistická úspěšnost příkladů.....	83
2.4 Elektrický proud v polovodičích.....	84
2.4.1 Základní pojmy a vztahy.....	84
2.4.2 Řešené příklady.....	84

2.4.3	Statistická úspěšnost příkladů .....	89
2.5	Elektrický proud v plynech a ve vakuu .....	91
2.5.1	Základní pojmy a vztahy .....	91
2.5.2	Řešené příklady .....	91
2.5.3	Statistická úspěšnost příkladů .....	95
2.6	Magnetické pole .....	97
2.6.1	Základní pojmy a vztahy .....	97
2.6.2	Řešené příklady .....	99
2.6.2.1	Stacionární magnetické pole.....	99
2.6.2.2	Nestacionární magnetické pole .....	107
2.6.3	Statistická úspěšnost příkladů .....	113
2.7	Střídavý proud.....	116
2.7.1	Základní pojmy a vztahy .....	116
2.7.2	Řešené příklady .....	118
2.7.2.1	Střídavé napětí a střídavý proud .....	118
2.7.2.2	RLC obvody .....	122
2.7.3	Statistická úspěšnost příkladů .....	133
2.8	Elektromagnetické kmitání.....	136
2.8.1	Základní pojmy a vztahy .....	136
2.8.2	Řešené příklady .....	136
2.8.3	Statistická úspěšnost příkladů .....	138
	ZÁVĚR.....	139
	CITOVANÁ LITERATURA.....	141

---

# ÚVOD

Cílem této práce bylo sestavit sbírku příkladů elektřiny a magnetismu pro střední školy. Příklady do této práce byly čerpány z jednotlivých ročníků fyzikální olympiády kategorií A a B. Sbíрка obsahuje nejen samotné řešené příklady, ale je doplněna i o úvody kapitol popisující vztahy mezi veličinami a o statistické komentáře, které umožňují porovnávat příklady mezi sebou. Práce je rozdělena na dvě části – statistickou a příkladovou.

Statistická část porovnává procentuální zastoupení příkladů různých oblastí fyziky. Dále se poté zaměřuje především na téma elektřiny a magnetismu, kde jsou porovnávána jednotlivá témata spadající pod tuto oblast mezi sebou. Jsou v ní uvedeny počty příkladů v jednotlivých ročnících, kolech i kategoriích, a také úspěšnosti řešení a další parametry konkrétních příkladů. Práce porovnává kategorie A a B mezi sebou, ale také se snaží podat přehled za obě kategorie dohromady. Z dostupných výsledkových listin bylo také provedeno porovnání úspěšností jednotlivých krajů ČR mezi sebou, a to jak v kategorii A a B, tak v obou kategoriích dohromady.

Příkladová část obsahuje konkrétní kapitoly elektřiny a magnetismu, které jsou seřazeny dle klasických sbírek příkladů, především dle sbírky [1]. Každá kapitola obsahuje základní informace o veličinách, vztazích a konstantách, dále řešené příklady seřazené podle obtížnosti od nejjednodušších po nejnáročnější, a statistický přehled o výskytu příkladů dané kapitoly v jednotlivých ročnících a jejich úspěšnost řešení v jednotlivých krajích. Mimo to jsou příklady v rámci kapitoly porovnávány mezi sebou. Všechny tyto příklady jsou dostupné na oficiálních stránkách fyzikální olympiády v archivu [2]. V práci nejsou uvedeni autoři úloh, pouze odkaz na ročník, kategorii, kolo a číslo příkladu v daném testu. U příkladů, u nichž je uvedeno na oficiálních stránkách více řešení, je v této práci poznámka na konci příkladu, že alternativní řešení je možné dohledat. Příklady jsou přepsány v doslovném znění, ale pokud byla během přepisu nalezena chyba, byla opravena. Přílohou této práce je soubor vytvořený v programu EXCEL, v němž byla všechna data zpracována, byly v něm vypočítány potřebné parametry a vytvořeny všechny grafy.

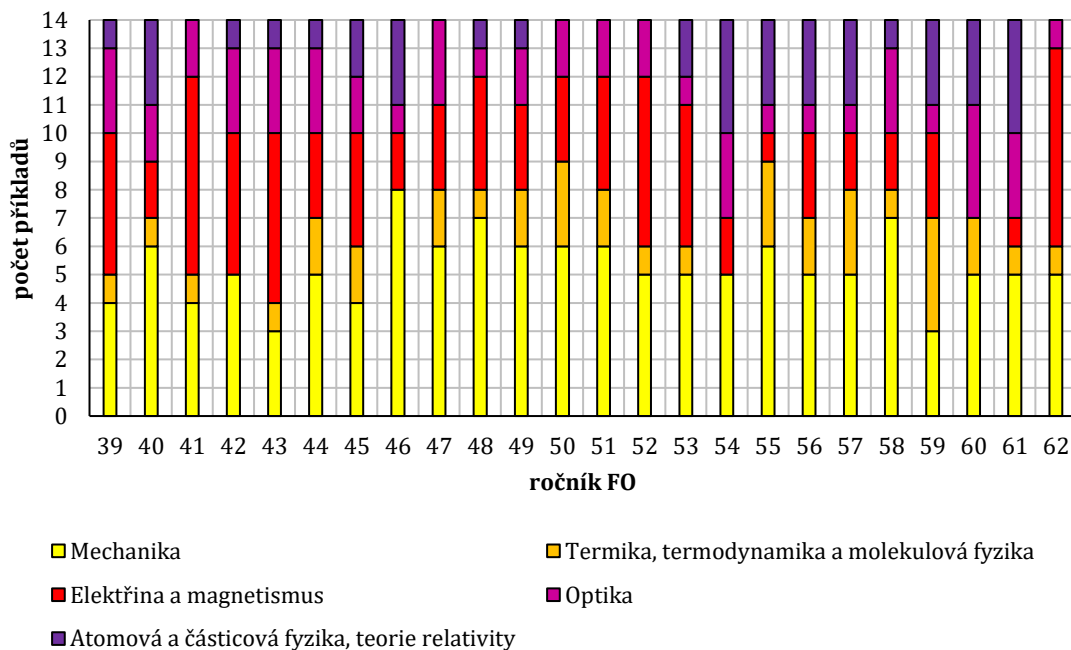


# 1 STATISTICKÁ ČÁST

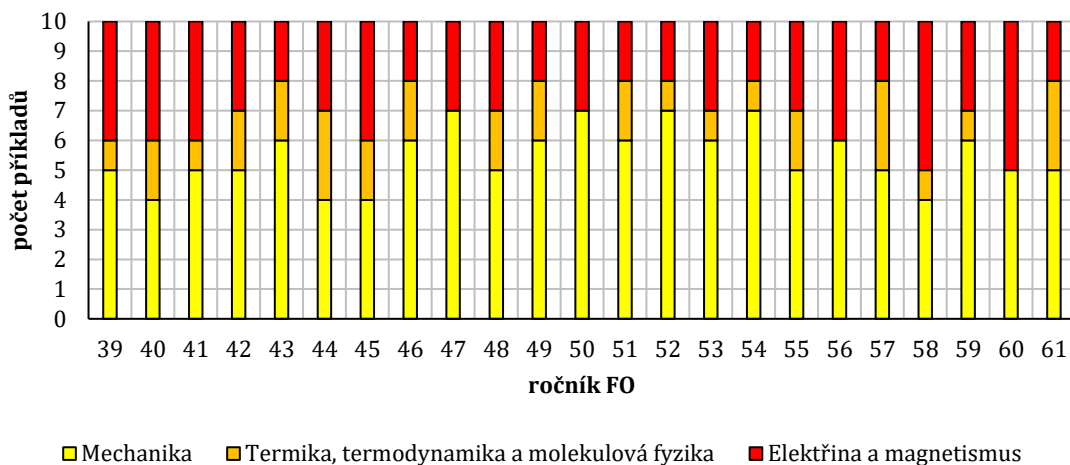
## 1.1 Rozbor počtu příkladů ve FO

V letošním roce se koná již 62. ročník fyzikální olympiády. Uvědomíme-li si, že jak v kategorii A, tak v kategorii B je 6 příkladů v domácích kolech (praktickou úlohu nezapočítáváme), 4 příklady v regionálních nebo krajských kolech a v kategorii A ještě 4 příklady v celostátním kole, jedná se o 576 úloh za posledních 24 let z kategorií A a B. Vzhledem k nedohledatelným údajům není jisté, zda dané počty úloh byly již od prvních ročníků. Pro tuto bakalářskou práci nebyla v letošním roce použita kategorie B, protože výsledky v době psaní práce ještě nebyly kompletní, jelikož ještě neproběhlo druhé kolo olympiády. To je důvodem, proč bylo použito pouze 566 úloh na následující zpracování. Všechny tyto úlohy jsou dostupné na oficiálních stránkách fyzikální olympiády.

Kategorie A, protože má o jedno kolo více, obsahuje poměrově více příkladů než kategorie B. Na kategorii A připadá 336 příkladů, na kategorii B jen 230. Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky vidíme v grafech na obrázcích 1.1.1 a 1.1.2.

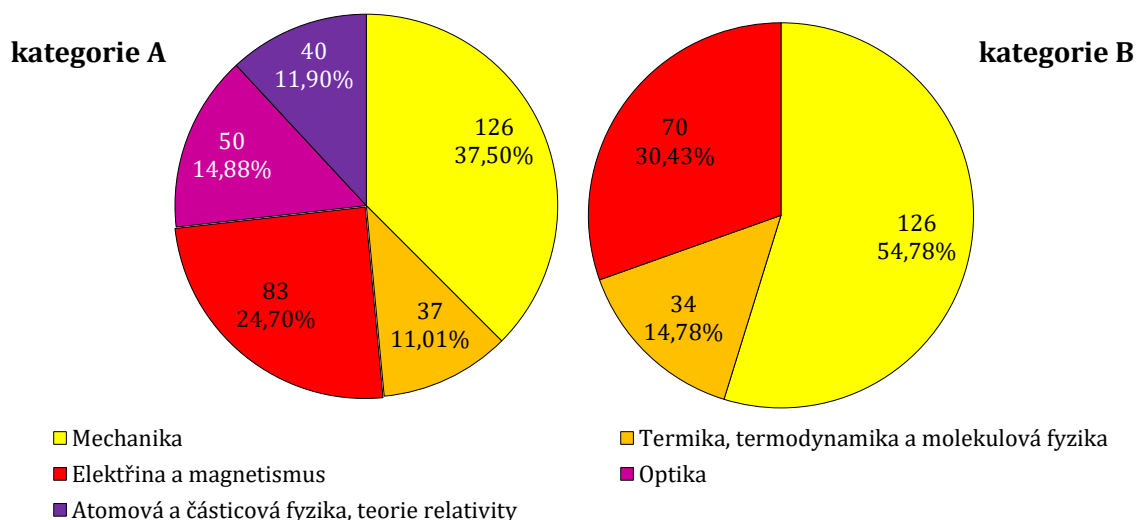


**Obrázek 1.1.1:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých ročnících FO v kategorii A.



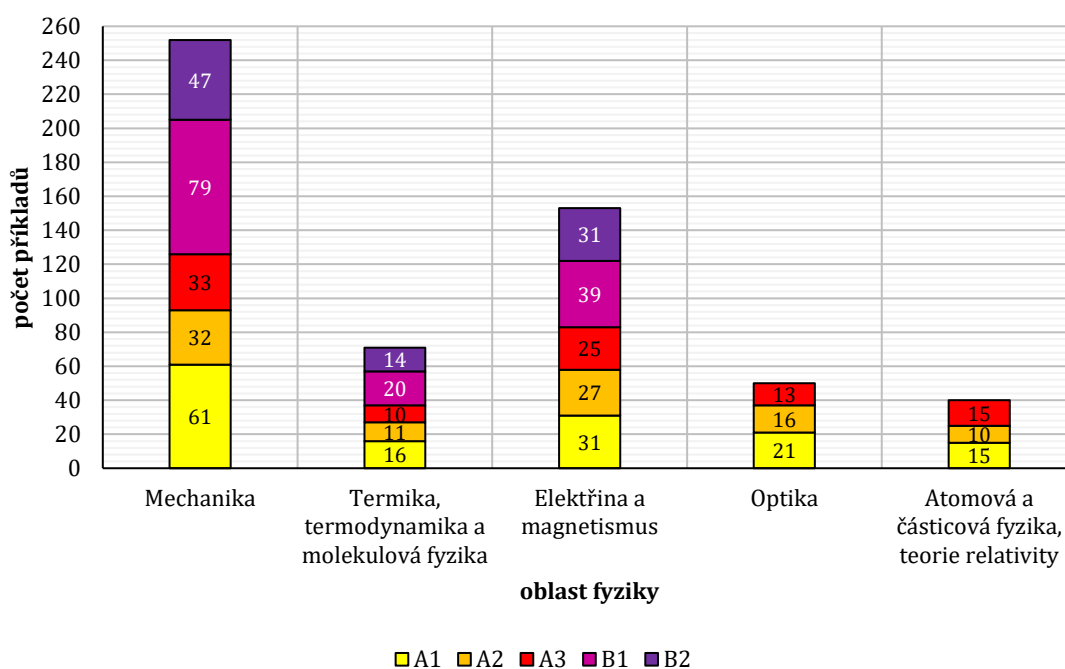
**Obrázek 1.1.2:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých ročnících FO v kategorii B.

Z obrázků 1.1.1 a 1.1.2 je patrné, že v kategorii A se oproti kategorii B vyskytuje více oblastí fyziky – v kategorii A je navíc oblast optiky, atomové a částicové fyziky a teorie relativity. Díky tomu je v kategorii B poměrově více příkladů z mechaniky, elektřiny a magnetismu, ale také z termiky, termodynamiky a molekulové fyziky. Jak v kategorii A, tak v kategorii B zastává největší podíl příkladů oblast mechaniky a druhým největším okruhem je oblast elektřiny a magnetismu. Třetím největším odvětvím je v kategorii A oblast optiky, v kategorii B oblast termiky, termodynamiky a molekulové fyziky. Ta je v kategorii A zastoupena až na posledním místě. Tyto výsledky by nebyly změněny pravděpodobně ani v případě, kdybychom zahrnuli také 62. ročník kategorie B. Procentuální zastoupení oblastí fyziky v jednotlivých kategoriích je zakresleno v koláčových grafech na obr. 1.1.3.



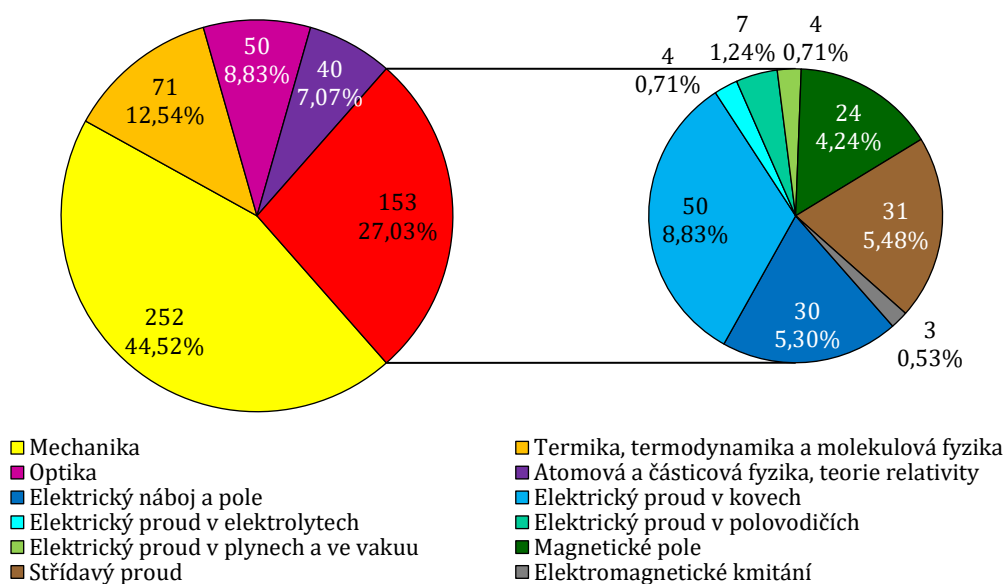
**Obrázek 1.1.3:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých kategoriích.

Doposud jsme porovnávali obě kategorie mezi sebou, nyní budeme obě kategorie brát dohromady. Jak již bylo nastíněno, nejvíce zastoupenou oblastí fyziky je mechanika, již je v posledních 24 ročnících (kromě 62. ročníku kategorie B) 252 příkladů ze všech kol obou kategorií. Druhou nejvíce zastoupenou oblastí fyziky je elektřina a magnetismus, které se věnuje tato práce, a která obsahuje 153 příkladů ve všech kolech obou kategorií. Pomyslné třetí místo obsadila oblast termiky, termodynamiky a molekulové fyziky se 71 příklady. Počty příkladů všech oblastí fyziky v jednotlivých kolech obou kategorií jsou ukázány na obr. 1.1.4.

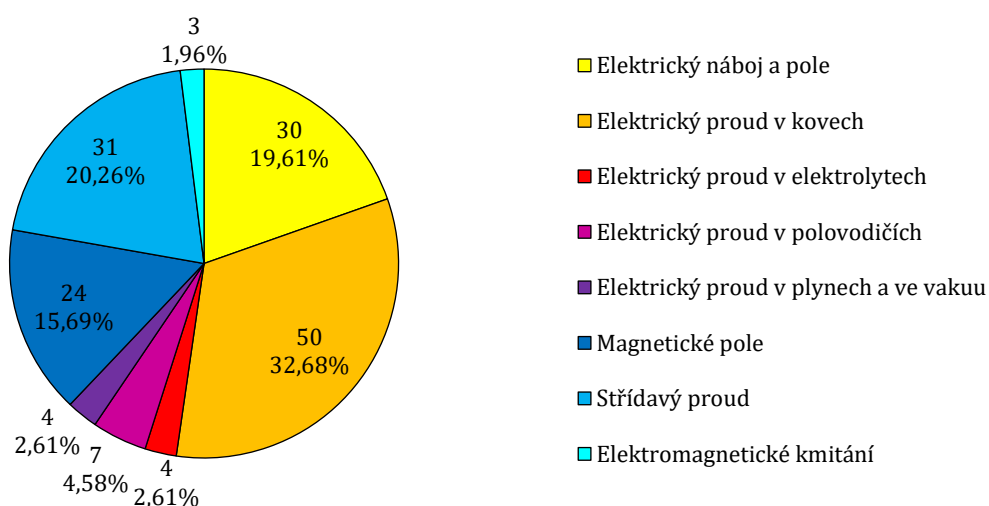


**Obrázek 1.1.4:** Počty příkladů jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých kolech obou kategorií.

Jak již bylo řečeno, tato práce se věnuje pouze úlohám zaměřeným na elektřinu a magnetismus. Takových úloh se za posledních 24 let (nepočítaje ročník 62 kategorie B) vyskytlo 153, což činí 27,03 %. Úlohy jsou rozděleny do osmi kapitol, jejichž procentuální zastoupení vzhledem ke všem úlohám ve fyzikálních olympiádách za posledních 24 let (bez 62B) je uvedeno v koláčovém grafu na obr. 1.1.5. Červená oblast nevyznačená v legendě je oblast elektřiny a magnetismu. Největší podíl z kapitol elektřiny má kapitola elektrický proud v kovech, která je stejně velká jako celá oblast optiky, a tedy dokonce větší, než oblast atomové a částicové fyziky a teorie relativity. Naopak nejmenší kapitola elektromagnetické kmitání má pouze 3 příklady, což činí 0,53 % všech příkladů v olympiádách za posledních 24 let (bez 62B). Na obr. 1.1.6 je naopak vidět procentuální zastoupení jednotlivých kapitol v celkovém počtu příkladů elektřiny a magnetismu.

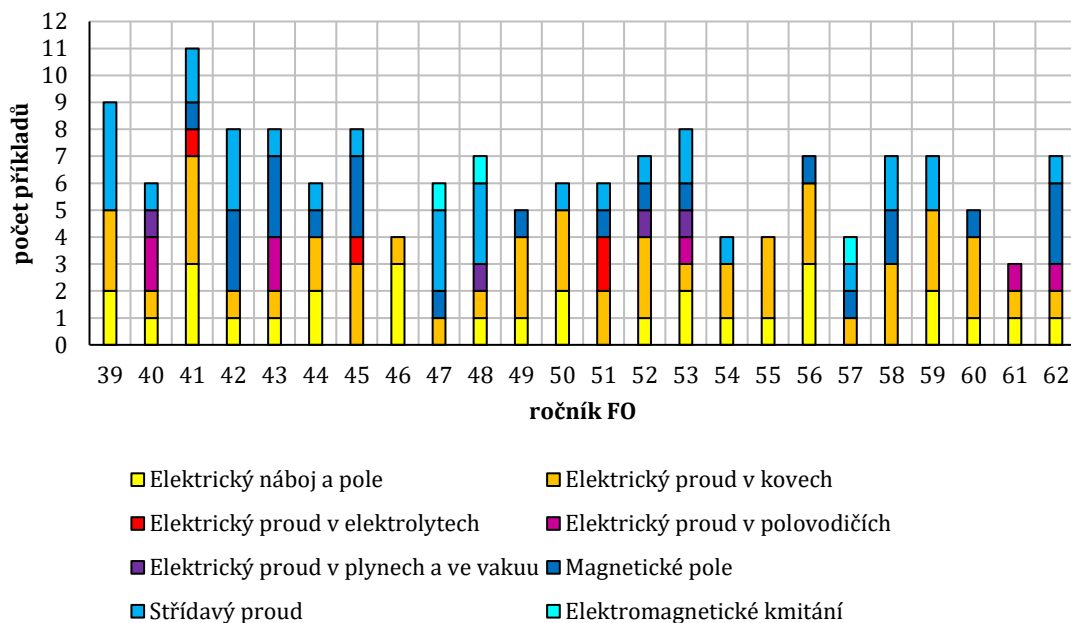


**Obrázek 1.1.5:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky a jednotlivých kapitol elektřiny a magnetismu v obou kategoriích v ročnících 39-62 (kat. A) a 39-61 (kat B).



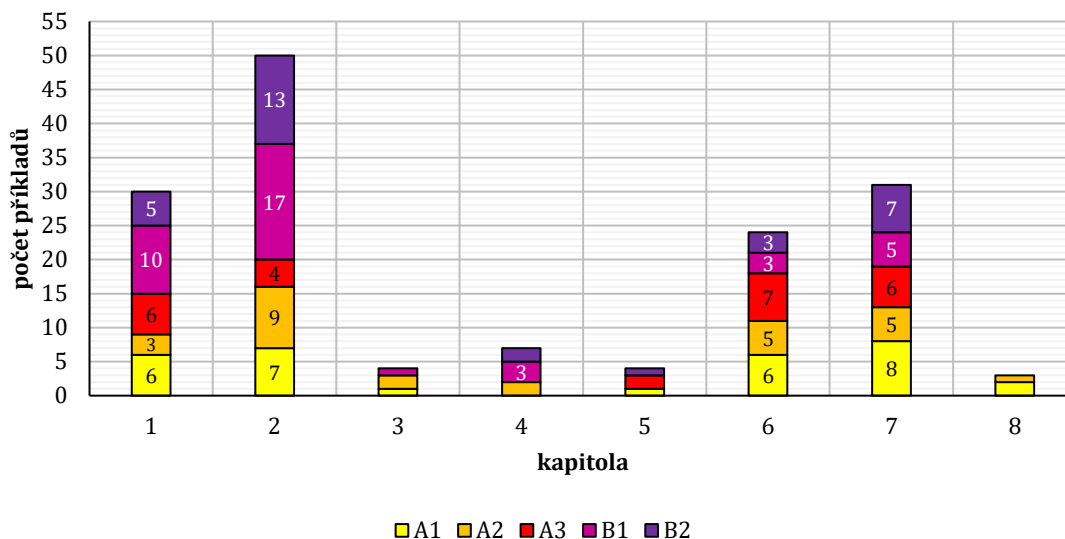
**Obrázek 1.1.6:** Zastoupení jednotlivých kapitol v oblasti elektřiny a magnetismu.

Vzhledem k tomu, jak jsou některé z kapitol elektřiny a magnetismu malé, je jasné, že ne každá kapitola se vyskytuje v každém ročníku fyzikální olympiády. V grafu na obr. 1.1.7 je vidět, které kapitoly se v jednotlivých ročnících fyzikálních olympiád vyskytují, a které se vyskytují pouze zřídka. Z obrázku je zřejmé, že v každém ročníku se vyskytuje alespoň 1 příklad na elektrický proud v kovech, a ve většině ročníků také příklad na elektrický náboj a pole či střídavý proud. Největší počet příkladů z elektřiny a magnetismu, který se za posledních 24 let (nepočítaje 62B) vyskytl v jednom ročníku (z obou kategorií dohromady) je 11 (ročník 41), naopak nejméně pouhé 3 příklady (ročník 61).



**Obrázek 1.1.7:** Zastoupení jednotlivých kapitol v jednotlivých ročnících FO.

V neposlední řadě je dobré si ukázat, kolik příkladů z jednotlivých kapitol se vyskytuje ve druhých kol a ve třetím kole, protože pro vyhodnocení úspěšnosti příkladů jsou dostupné pouze výsledkové listiny druhých kol a třetího kola kategorie A, žádný z uvedených příkladů s řešením není z prvního kola. Z grafu na obr. 1.1.8 a výpočtů lze říci, že postupová kola (A2, A3, B2) tvoří v rozmezí 33,33 % až 75,00 % všech příkladů kapitoly, u malých kapitol je to zkreslující, protože obsahují jen malé množství příkladů. Celkem je postupových příkladů 83, což je 54,25 % zastoupení celkového počtu 153 úloh. Z grafu je také patrné, že nejvíce příkladů z druhého kola kategorie A je z kapitoly elektrický proud v kovech, dále případně z kapitol magnetické pole a střídavý proud. Nejvíce příkladů druhého kola kategorie B je z kapitoly elektrický proud v kovech, dále ze střídavého proudu, případně elektrického náboje a pole, a nejvíce příkladů z třetího celostátního kola kategorie A je z kapitoly magnetické pole, nebo také z kapitol elektrický náboj a pole a střídavý proud. Naopak žádný z příkladů elektrického proudu v elektrolytech se nevyskytl v závěrečných kolech (B2, A3), žádný z příkladů kapitoly elektrický proud v polovodičích nebyl v celostátním kole (A3), žádný z příkladů elektrického proudu v plynech a ve vakuu nebyl v postupovém kole kategorie A (A2) a elektromagnetické kmitání se vyskytlo pouze v jednom postupovém kole (A2).



**Obrázek 1.1.8:** Zastoupení příkladů jednotlivých kol v kapitolách elektřiny a magnetismu (1 – elektrický náboj a pole, 2 – elektrický proud v kovech, 3 – elektrický proud v elektrolytech, 4 – elektrický proud v polovodičích, 5 – elektrický proud v plynech a ve vakuu, 6 – magnetické pole, 7 – střídavý proud, 8 – elektromagnetické kmitání).

# 1.2 Rozbor vlastností příkladů ve FO

## 1.2.1 Obecná analýza vlastností testových úloh

Při obecném posuzování kvality didaktického testu se zkoumají vlastnosti nejen úloh jako samostatných celků, ale také vlastnosti celého testu jako celku [3]. Posouzení vlastností celých testů jednotlivých ročníků, kategorií a kol fyzikálních olympiád není cílem této práce. Cílem této práce je porovnat úspěšnosti řešení jednotlivých příkladů – proto se budeme zabývat pouze analýzou vlastností testových úloh. Mezi takové vlastnosti patří obtížnost úloh, citlivost úloh a analýza nenormovaných odpovědí [4]. Všechny tyto zkoumané parametry se počítají na základě výsledků žáků, kteří test řešili.

### 1.2.1.1 Obtížnost úloh

Pro určení obtížnosti úloh se využívá výpočtů dvou veličin – hodnotě obtížnosti  $Q$  a indexu obtížnosti  $P$  [3]. Tyto dva parametry lze vypočítat z následujících vztahů

$$Q = 100 \frac{n_n}{n}, \quad P = 100 \frac{n_s}{n},$$

kde  $n_n$  je počet žáků, kteří odpověděli na úlohu chybně nebo na ni neodpověděli vůbec,  $n_s$  je počet žáků, kteří na úlohu odpověděli správně a  $n$  odpovídá celkovému počtu odpovědí. Dle [4] mezi parametry platí vztah

$$P = 100 - Q.$$

U úloh fyzikální olympiády není pevně dané, kolik bodů značí, že student úlohu vyřešil správně či špatně. Z tohoto důvodu je vhodnější využít obecný index obtížnosti

$$P_o = \frac{\bar{x}}{x_m}, \tag{1.2.1}$$

kde  $\bar{x}$  je aritmetický průměr získaných bodů za danou úlohu a  $x_m$  maximální počet bodů, který je možné za danou úlohu získat [5]. Pokud takto vypočítaný obecný index obtížnosti převedeme na procenta, dostaneme procentuální úspěšnost příkladu. Úlohy vysoce obtížné mají velké hodnoty obtížnosti  $Q$  a malé hodnoty indexu obtížnosti  $P$  [3]. Za velmi obtížné úlohy jsou považované takové úlohy, u nichž je hodnota obtížnosti vyšší než 80, naopak za velmi snadné úlohy se berou úlohy s hodnotou obtížnosti nižší než 20. Vztáhneme-li toto pravidlo na obecný index obtížnosti, se kterým se v této práci pracuje, za velmi náročné úlohy se považují úlohy s úspěšností nižší než 20 %, za velmi snadné úlohy poté úlohy s úspěšností vyšší než 80 %. Za nejvhodnější úlohy jsou považovány úlohy z úspěšností kolem 50 %.

### 1.2.1.2 Citlivost úloh

Citlivost úloh nám jinak také charakterizuje rozlišovací schopnost úloh [3]. Vyjadřuje, jak moc jsou zvýhodněni žáci s „lepšími vědomostmi“ oproti žákům s „horšími vědomostmi“. K rozlišení takových žáků se používají výsledky z celého testu.

Citlivost úlohy se dá posoudit pomocí výpočtu koeficientu citlivosti [6]. Metod, jak tento koeficient vypočítat, je hned několik – např. koeficient ULI, tetrachorický koeficient citlivosti, nebo např. bodově biseriální koeficient citlivosti. Všechny tyto koeficienty mohou nabývat hodnot v intervalu  $(-1; 1)$  a platí, že čím vyšší je hodnota koeficientu úlohy, tím více úloha rozlišuje žáky na ty s „lepšími“ a „horšími“ vědomostmi. Pokud nabývá koeficient hodnoty 0, úloha nerozlišuje žáky mezi „lepší“ a „horší“. Kladné hodnoty koeficientu znamenají, že úloha zvýhodňuje žáky s „lepšími“ vědomostmi, tedy žáky s lepšími výsledky z celého testu, naopak záporné hodnoty upřednostňují žáky s „horšími“ vědomostmi. Nízké a záporné hodnoty signalizují, že úloha pravděpodobně je komplikovaně formulována.

Ve výpočtech citlivostí příkladů z elektřiny a magnetismu ve fyzikálních olympiádách kategorií A a B využijeme tzv. Pearsonův korelační koeficient daný vztahem

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(h_i - \bar{h})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}}, \quad (1.2.2)$$

kde  $x_i$  je bodový zisk v dané úloze  $i$ -tého žáka,  $\bar{x}$  je bodový průměr dosažený v dané úloze,  $h_i$  je bodový zisk  $i$ -tého žáka v celém testu a  $\bar{h}$  je bodový průměr dosažený v celém testu [5]. Pomocí tohoto vztahu studujeme závislost mezi úspěšností úlohy a úspěšností celého testu, v němž byla úloha zadána.

### 1.2.1.3 Analýza nenormovaných odpovědí

Kromě obtížnosti úloh a jejich citlivosti se provádí také rozbor úloh, u nichž byla odpověď vynechána nebo byla nesprávná [3]. Vynechání úlohy může být způsobeno např. špatnou formulací úlohy, nedostatkem času apod. Literatura dále uvádí, že je třeba zaměřit se na takové otevřené úlohy, u nichž více než 30 až 40 % žáků vynechalo odpověď. Co se týče nesprávných odpovědí u otevřených úloh, je třeba úlohy rozdělit na dvě skupiny – první skupinou by byly úlohy, ve kterých převažují základní chyby, druhou skupinou úlohy, v nichž převažují vedlejší chyby. Za základní chyby jsou považovány takové chyby, které jsou dané neznalostí učiva, vedlejší chyby jsou poté způsobeny nepozorností, numerickými chybami ve výpočtech apod. Pokud v úloze převažují vedlejší chyby, jde pravděpodobně o náhodu, pokud ale převažují v úloze základní chyby, úloha by se měla vyřadit.



## 1.2.2 Konkrétní analýza vlastností úloh FO

Pro konkrétní analýzu vlastností úloh fyzikální olympiády ročníků 39 až 62 pro kategorii A a 39 až 61 pro kategorii B nejsou všechny statistiky dostupné na internetu. Pro řádné vyhodnocení výsledků jsem požádala o zpřístupnění výsledkových listin předsedu Ústřední komise FO pana doc. RNDr. Jana Kříže, Ph. D. z Univerzity Hradec Králové, u něhož je možné výsledkové listiny vyžádat v případě potřeby. Mimo něj jsem některé listiny získala od dalších dvou členů komise FO uvedených v poděkování práce. Ani tak ale nejsou pro tuto práci kompletní všechny výsledkové listiny – dostupné výsledkové listiny krajských kol kategorií A a B a celostátního kola kategorie A jsou shrnuty v tabulce č. 1. Některé výsledkové listiny především z pozdějších let jsou dohledatelné na oficiálních stránkách fyzikální olympiády a na některých stránkách krajských fyzikálních olympiád [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]. Všechny dostupné statistiky jsou přepsané do přiloženého excelovského souboru bakalářské práce a je s nimi dále pracováno.

**Tabulka 1:** Dostupné výsledkové listiny.

ROČNÍK KRAJ		39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
PHA	A	x	x	x	x	x	x	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
JHČ	A	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
JHM	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓	✓
KVK	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
VYS	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓
HKK	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
LBK	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
MSK	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓	✓
OLK	A	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PAK	A	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PLK	A	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
STČ	A	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
ULK	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
ZLK	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CELOSTÁTNÍ		x	x	✓	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Z tabulky č. 1 je zřejmé, že ke každému příkladu kromě třech celostátních kol je dostupná alespoň jedna výsledková listina, a tedy z 83 příkladů z postupových kol elektřiny a magnetismu je možné provést rozbor 79 příkladů.

Dle kapitoly 1.2.1 budeme u jednotlivých úloh zjišťovat tři vlastnosti úloh – obtížnost, citlivost a analýzu nenormovaných odpovědí. Obtížnost úloh vypočítáme dle vztahu 1.2.1 a získanou hodnotu převedeme na procenta, čímž dostaneme procentuální úspěšnost úlohy. Všechny hodnoty úspěšností jsou vypočítané z bodů jednotlivých žáků, nikoli z průměrů krajů. Citlivost úloh posoudíme podle vypočítaného Pearsonova korelačního koeficientu dle vztahu (1.2.2), v excelovském souboru jsou hodnoty tohoto koeficientu spočítány funkcí CORREL. Nenormované odpovědi posoudíme na základě relativního podílu počtu žáků, kteří dostali za úlohu 0 bodů nebo ji úplně vynechali. Dle [17] by se výsledné hodnoty měly pohybovat v rozmezích uvedených v tabulce č. 2.

**Tabulka 2:** Vyhovující hodnoty vlastností úloh, převzato z [17], upraveno.

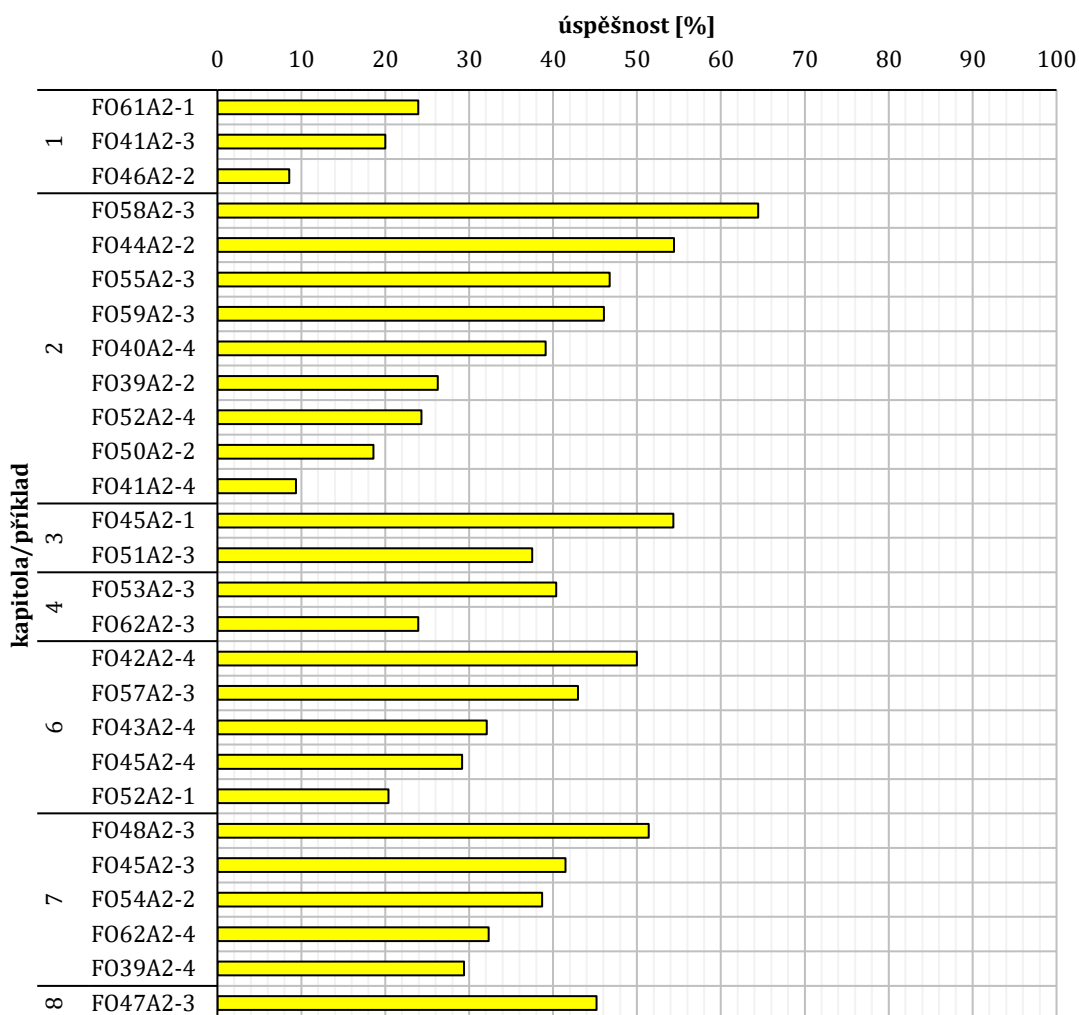
<b>vlastnosti úlohy</b>	<b>vyhovující parametr</b>
index obtížnosti $P_0$	30 – 90 %
Pearsonův korelační koeficient	> 0,4
analýza nenormovaných odpovědí	< 30 %

Nyní se podívejme na jednotlivé příklady a jejich parametry. V tabulce č. 3 jsou uvedeny vypočítané hodnoty pro příklady z elektřiny a magnetismu druhého kola kategorie A. V tomto kole bylo za posledních 24 let 27 příkladů na téma elektřinu a magnetismu, z kterých ale pouze 11 (40,74 %) splňuje všechny tři vyhovující intervaly dle tabulky 2. Ze zbylých příkladů 8 nesplňuje vlastnosti úloh v jedné podmínce a 8 ve dvou podmínkách. Žádný z příkladů této kategorie není nevyhovující ve všech třech parametrech vlastností úloh. Všechny úlohy mají vyhovující koeficient korelace. Nejnižší koeficient korelace má úloha FO46A2-2, naopak nejvyšší úloha FO55A2-3. Co se týče procentuálního zastoupení nenormovaných odpovědí, téměř polovina úloh (13 úloh) spadá do uvedeného intervalu pod 30 %, dalších 10 úloh spadá do intervalu pod 50 %, a 4 úlohy mají nad 50 % nenormovaných odpovědí. Obtížnost (tedy procentuální úspěšnost úloh) se pohybuje mezi 8,57 % a 64,46 %, což je zároveň i nejvyšší hodnota úspěšnosti pro obě druhá kola (A2 i B2). Na obr. 1.2.1 je poté vykreslena procentuální úspěšnost nejen jednotlivých příkladů, ale i kapitol, ve kterých se příklady druhého kola kategorie A vyskytují. Nejvyšší hodnoty je dosaženo v kapitole 2 (elektrický proud v kovech), nejnižší poté v kapitole 1 (elektrický náboj a pole). Nejnižší průměrnou hodnotu úspěšnosti (17,5 %) vztáženou pouze ke druhému kolu kategorie A má kapitola 1, naopak nejvyšší (45,9 %) kapitola 3 (elektrický

proud v elektrolytech). Kapitola 5 (elektrický proud v plynech a ve vakuu) se v příkladech druhého kola kategorie A nevyskytuje vůbec.

**Tabulka 3:** Vypočítané hodnoty vlastností jednotlivých úloh druhého kola kategorie A.

Úloha	Index obtížnosti [%]	Pearsonův koeficient korelace	Nenormované odpovědi [%]	Výsledek
FO39A2-2	26,25 ×	0,693 ✓	18,75 ✓	×
FO39A2-4	29,39 ×	0,701 ✓	6,25 ✓	×
FO40A2-4	39,13 ✓	0,784 ✓	8,33 ✓	✓
FO41A2-3	20,00 ×	0,825 ✓	36,36 ×	×
FO41A2-4	9,38 ×	0,812 ✓	68,18 ×	×
FO42A2-4	50,00 ✓	0,794 ✓	27,78 ✓	✓
FO43A2-4	32,08 ✓	0,611 ✓	31,25 ×	×
FO44A2-2	54,42 ✓	0,841 ✓	20,41 ✓	✓
FO45A2-1	54,34 ✓	0,766 ✓	19,30 ✓	✓
FO45A2-3	41,49 ✓	0,754 ✓	47,37 ×	×
FO45A2-4	29,17 ✓	0,754 ✓	21,05 ✓	✓
FO46A2-2	8,57 ×	0,407 ✓	50,00 ×	×
FO47A2-3	45,18 ✓	0,727 ✓	32,20 ×	×
FO48A2-3	51,40 ✓	0,797 ✓	11,36 ✓	✓
FO50A2-2	18,60 ×	0,757 ✓	48,15 ×	×
FO51A2-3	37,50 ✓	0,427 ✓	26,42 ✓	✓
FO52A2-1	20,38 ×	0,720 ✓	51,16 ×	×
FO52A2-4	24,31 ×	0,675 ✓	48,84 ×	×
FO53A2-3	40,39 ✓	0,817 ✓	55,00 ×	×
FO54A2-2	38,70 ✓	0,824 ✓	30,77 ×	×
FO55A2-3	46,76 ✓	0,854 ✓	20,00 ✓	✓
FO57A2-3	42,96 ✓	0,787 ✓	26,43 ✓	✓
FO58A2-3	64,46 ✓	0,779 ✓	7,69 ✓	✓
FO59A2-3	46,05 ✓	0,801 ✓	29,10 ✓	✓
FO61A2-1	23,93 ×	0,749 ✓	31,40 ×	×
FO62A2-3	23,93 ×	0,740 ✓	48,42 ×	×
FO62A2-4	32,33 ✓	0,731 ✓	43,16 ×	×



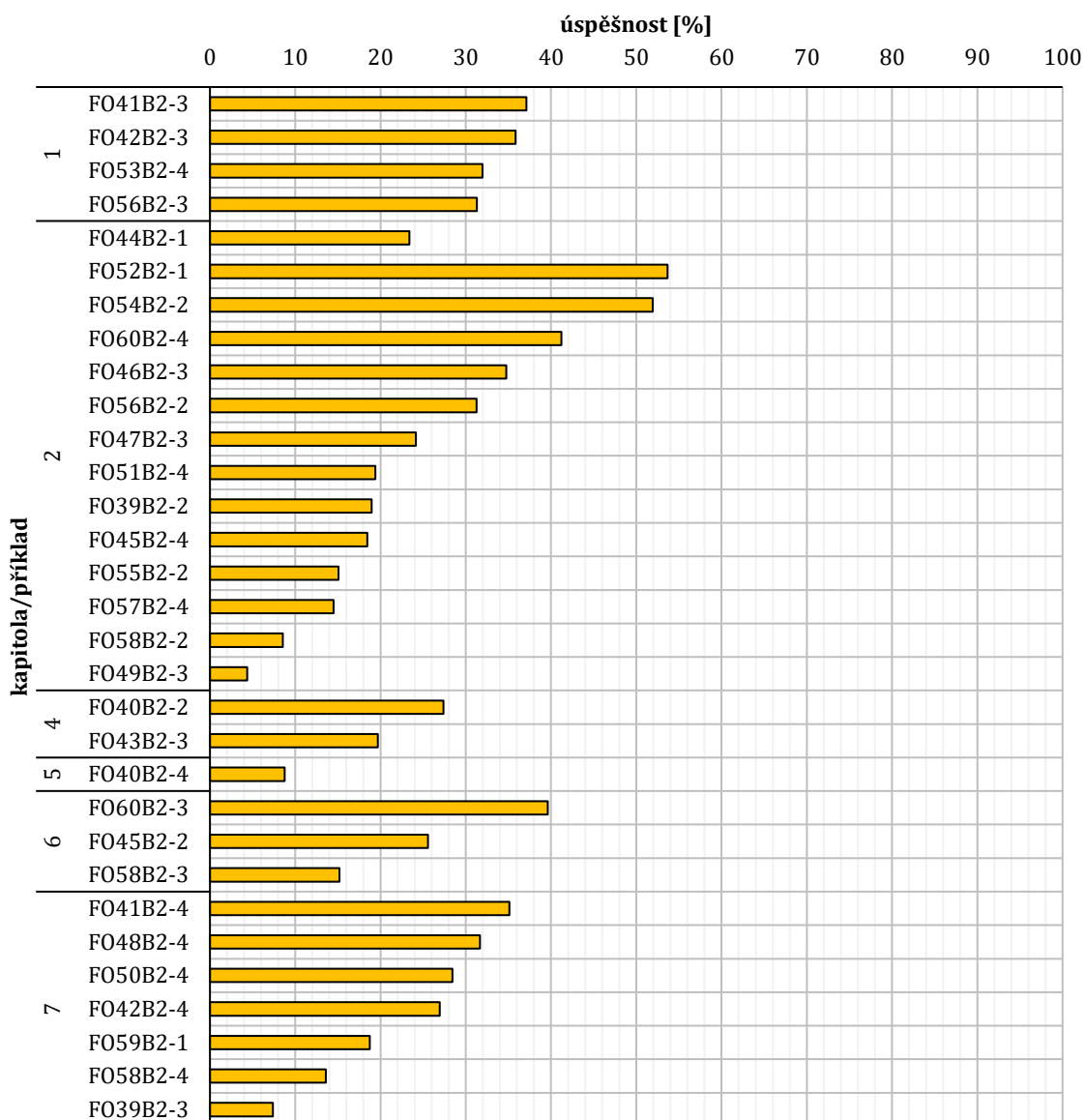
**Obrázek 1.2.1:** Procentuální úspěšnost příkladů druhého kola kategorie A (1 – elektrický náboj a pole, 2 – elektrický proud v kovech, 3 – elektrický proud v elektrolytech, 4 – elektrický proud v polovodičích, 6 – magnetické pole, 7 – střídavý proud, 8 – elektromagnetické kmitání).

V tabulce č. 4 jsou opět uvedeny vypočítané hodnoty vlastností jednotlivých úloh, ale pro druhé kolo kategorie B. Za posledních 23 let se v druhém kole kategorie B vyskytlo 31 příkladů z oblasti elektřiny a magnetismu, z nichž ale pouze 9 příkladů (29,03 %), tedy necelá třetina, splňuje všechny tři uvedené intervaly parametrů. 6 příkladů je poté nevyhovujících v jednom parametru, 15 příkladů ve dvou a jeden příklad dokonce nesplňuje ani jeden z uvedených parametrů. Pro tento konkrétní příklad, FO45B2-4 je totiž dopředu nutné nastudovat základní poučky pro elektrické obvody. Tento příklad je uveden v příkladové části především pro zajímavost. Všechny ostatní příklady spadají do určeného intervalu hodnot Pearsonova koeficientu korelace. Zajímavé je, že u této kategorie jen pouhá třetina (11 úloh, 35,48 %) spadá do odpovídajícího intervalu množství nenormovaných

odpovědí, téměř třetina má více než 50 % nenormovaných odpovědí, a jeden příklad má dokonce 80,95 % množství nenormovaných odpovědí. Tento příklad je jeden ze dvou příkladů kapitoly 5 a je opět uveden především pro zajímavost.

**Tabulka 4:** Vypočítané hodnoty vlastností jednotlivých úloh druhého kola kategorie B.

Úloha	Index obtížnosti [%]	Pearsonův koeficient korelace	Nenormované odpovědi [%]	Výsledek
FO39B2-2	18,95 ×	0,781 ✓	31,58 ×	×
FO39B2-3	31,32 ✓	0,657 ✓	35,00 ×	×
FO40B2-2	27,37 ×	0,797 ✓	47,62 ×	×
FO40B2-4	8,75 ×	0,819 ✓	80,95 ×	×
FO41B2-3	37,13 ✓	0,801 ✓	12,24 ✓	✓
FO41B2-4	35,11 ✓	0,734 ✓	14,29 ✓	✓
FO42B2-3	35,83 ✓	0,773 ✓	4,17 ✓	✓
FO42B2-4	26,96 ×	0,760 ✓	25,00 ✓	×
FO43B2-3	19,69 ×	0,589 ✓	48,72 ×	×
FO44B2-1	23,38 ×	0,555 ✓	22,37 ✓	×
FO45B2-2	25,57 ×	0,786 ✓	37,50 ×	×
FO45B2-4	18,46 ×	0,306 ×	39,58 ×	×
FO46B2-3	34,75 ✓	0,832 ✓	23,33 ✓	✓
FO47B2-3	24,14 ×	0,760 ✓	50,75 ×	×
FO48B2-4	31,67 ✓	0,808 ✓	47,30 ×	×
FO49B2-3	4,38 ×	0,446 ✓	70,59 ×	×
FO50B2-4	28,43 ×	0,681 ✓	49,33 ×	×
FO51B2-4	19,39 ×	0,787 ✓	51,67 ×	×
FO52B2-1	53,68 ✓	0,656 ✓	10,14 ✓	✓
FO53B2-4	31,96 ✓	0,762 ✓	21,28 ✓	✓
FO54B2-2	51,91 ✓	0,803 ✓	24,00 ✓	✓
FO55B2-2	15,08 ×	0,625 ✓	53,33 ×	×
FO56B2-2	31,27 ✓	0,774 ✓	42,24 ×	×
FO56B2-3	31,32 ✓	0,745 ✓	24,22 ✓	✓
FO57B2-4	14,51 ×	0,608 ✓	56,04 ×	×
FO58B2-2	8,56 ×	0,531 ✓	54,76 ×	×
FO58B2-3	15,19 ×	0,736 ✓	58,10 ×	×
FO58B2-4	13,61 ×	0,676 ✓	52,38 ×	×
FO59B2-1	18,73 ×	0,760 ✓	52,38 ×	×
FO60B2-3	39,63 ✓	0,784 ✓	29,70 ✓	✓
FO60B2-4	41,20 ✓	0,790 ✓	32,12 ×	×



**Obrázek 1.2.2:** Procentuální úspěšnost příkladů druhého kola kategorie B (1 – elektrický náboj a pole, 2 – elektrický proud v kovech, 4 – elektrický proud v polovodičích, 5 – elektrický proud v plynech a ve vakuu, 6 – magnetické pole, 7 – střídavý proud).

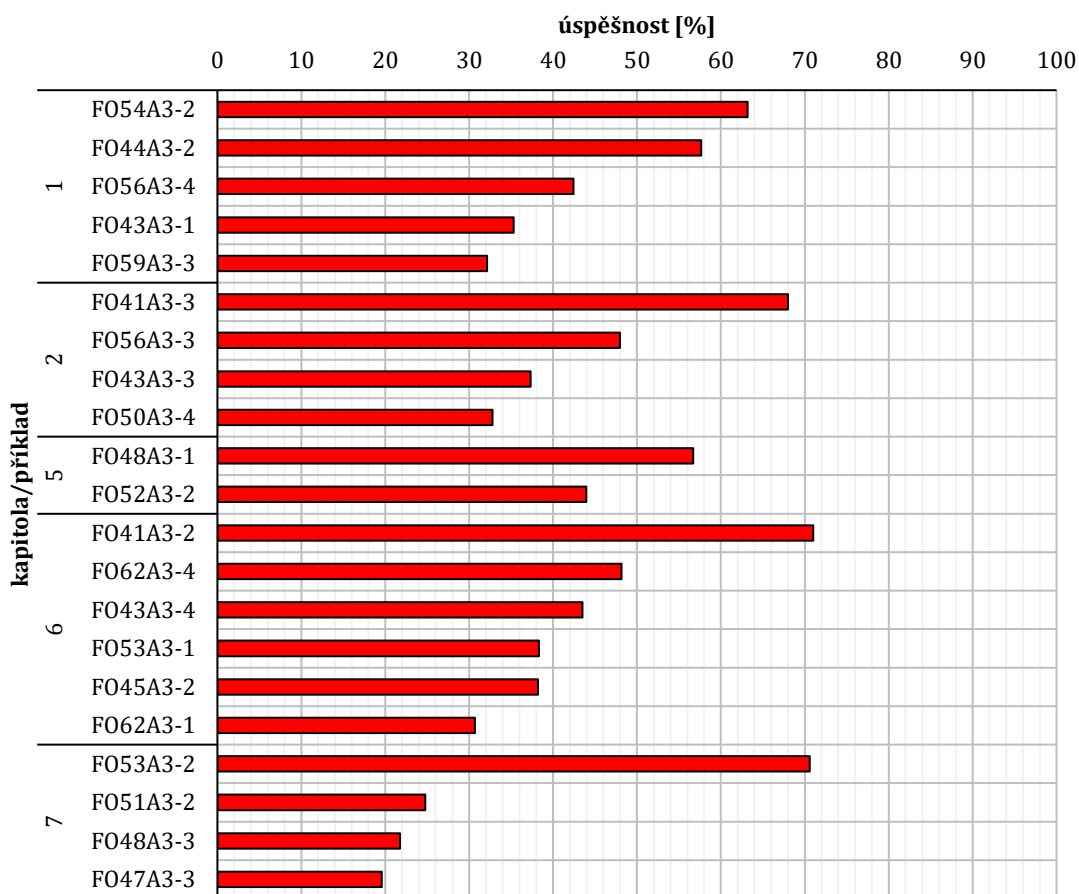
Na obr. 1.2.2 je vyjádřena procentuální úspěšnost příkladů z oblasti elektřiny a magnetismu druhého kola kategorie B. Je patrné, že nejvyšší úspěšnosti bylo dosaženo v kapitole 2, kde zároveň bylo dosaženo také nejnižší úspěšnosti všech příkladů elektřiny a magnetismu, kterými se tato práce zabývá (příklad FO49B2-3, úspěšnost 4,38 %). Kapitola 1 (elektrický náboj a pole), ve které bylo v druhém kole kategorie A dosaženo nejnižší průměrné úspěšnosti, má v druhém kole kategorie B průměrnou úspěšnost nejvyšší. Kapitoly 3 (elektrický proud v elektrolytech) a 8 (elektromagnetické kmitání) se v tomto kole nevyskytují.

**Tabulka 5:** Vypočítané hodnoty vlastností jednotlivých úloh třetího kola kategorie A.

Úloha	Index obtížnosti [%]	Pearsonův koeficient korelace	Nenormované odpovědi [%]	Výsledek
FO41A3-2	71,00 ✓	0,408 ✓	0,00 ✓	✓
FO41A3-3	68,00 ✓	0,791 ✓	12,00 ✓	✓
FO43A3-1	35,32 ✓	0,618 ✓	14,89 ✓	✓
FO43A3-3	37,34 ✓	0,632 ✓	23,40 ✓	✓
FO43A3-4	43,51 ✓	0,743 ✓	31,91 ×	×
FO44A3-2	57,65 ✓	0,718 ✓	0,00 ✓	✓
FO45A3-2	38,20 ✓	0,741 ✓	16,00 ✓	✓
FO47A3-3	19,59 ×	0,829 ✓	55,10 ×	×
FO48A3-1	56,70 ✓	0,587 ✓	8,00 ✓	✓
FO48A3-3	21,78 ×	0,743 ✓	64,00 ×	×
FO50A3-4	32,79 ✓	0,668 ✓	28,26 ✓	✓
FO51A3-2	24,77 ×	0,833 ✓	52,08 ×	×
FO52A3-2	43,98 ✓	0,855 ✓	12,24 ✓	✓
FO53A3-1	38,30 ✓	0,751 ✓	10,00 ✓	✓
FO53A3-2	70,60 ✓	0,573 ✓	8,00 ✓	✓
FO54A3-2	63,20 ✓	0,764 ✓	16,00 ✓	✓
FO56A3-3	47,98 ✓	0,751 ✓	0,00 ✓	✓
FO56A3-4	42,45 ✓	0,808 ✓	36,17 ×	×
FO59A3-3	32,13 ✓	0,760 ✓	31,91 ×	×
FO62A3-1	30,68 ✓	0,790 ✓	40,43 ×	×
FO62A3-4	48,17 ✓	0,711 ✓	17,02 ✓	✓

Tabulka č. 5 ukazuje vypočítané hodnoty pro celostátní kolo kategorie A. Z uvedených hodnot je jasné, že příklady celostátního kola dopadly v analýze nejlépe, největší poměr příkladů totiž splňuje všechny tři parametry. V celostátních kolech se od 39. ročníku vyskytlo 25 úloh, u 4 úloh ale nejsou dostupné výsledkové listiny. Ze zbývajících úloh 14 splňuje všechny tři podmínky, 4 nesplňují jednu podmínku a 3 dvě podmínky. Všechny úlohy splňují kritérium Pearsonova koeficientu korelace, 3 úlohy nespádají do vhodného intervalu indexu obtížnosti a 7 úloh má větší počet nenormovaných odpovědí než 30 %. V tomto kole se také nachází příklad s největší dosaženou procentuální úspěšností, a to příklad FO41A3-2 s procentuální úspěšností 71,00 %. Úspěšnosti příkladů jsou vykresleny v obrázku č. 1.2.3Z grafu je jasné, že toto kolo má nejvyšší průměrnou úspěšnost ze všech tří zkoumaných kol (A2, B2, A3). V celostátních kolech se nevyskytl žádný příklad kapitol 3 (elektrický proud v elektrolytech), 4 (elektrický proud v polovodičích) a kapitoly 8

(elektromagnetické kmity), a to ani pokud bychom uvažovali příklady, u nichž nejsou dostupné výsledkové listiny.

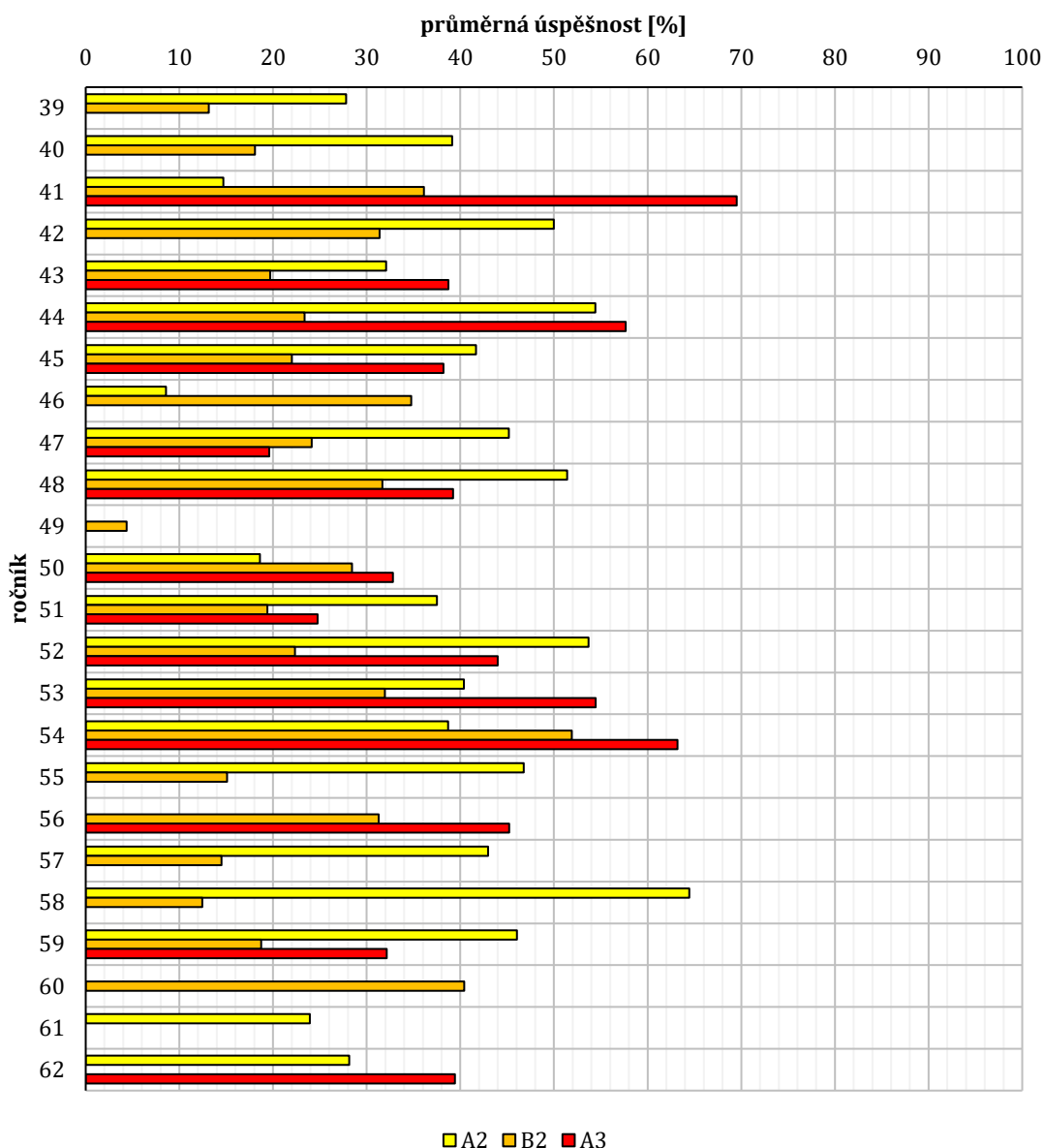


**Obrázek 1.2.3:** Procentuální úspěšnost příkladů třetího kola kategorie A

(1 – elektrický náboj a pole, 2 – elektrický proud v kovech, 5 – elektrický proud v plynech a ve vakuu, 6 – magnetické pole, 7 – střídavý proud).

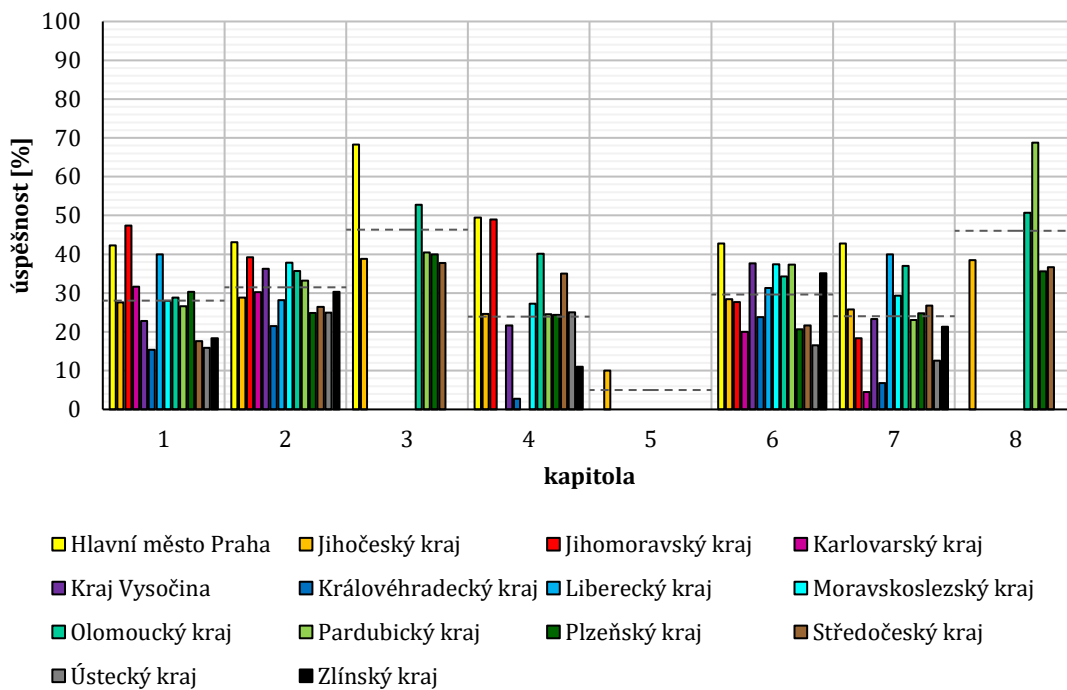
Na následujícím grafu je znázorněna průměrná úspěšnost příkladů v jednotlivých kategoriích v různých ročnících fyzikálních olympiád. Průměrnými úspěšnostmi se rozumí průměry úspěšností příkladů, nikoli data získaná z výsledků jednotlivých žáků. Nejvyšší průměrné procentuální úspěšnosti bylo dosaženo v celostátním kole kategorie A 41. ročníku, a to úspěšnosti 69,50 %, naopak nejnižší průměrnou úspěšností je úspěšnost kategorie B ve 49. ročníku s hodnotou 4,38 %. Pro některé ročníky není v grafu zaznamenána žádná hodnota, protože pro danou kategorii nebyl v olympiádě žádný příklad. V 62. ročníku nebyla analyzována kategorie B.





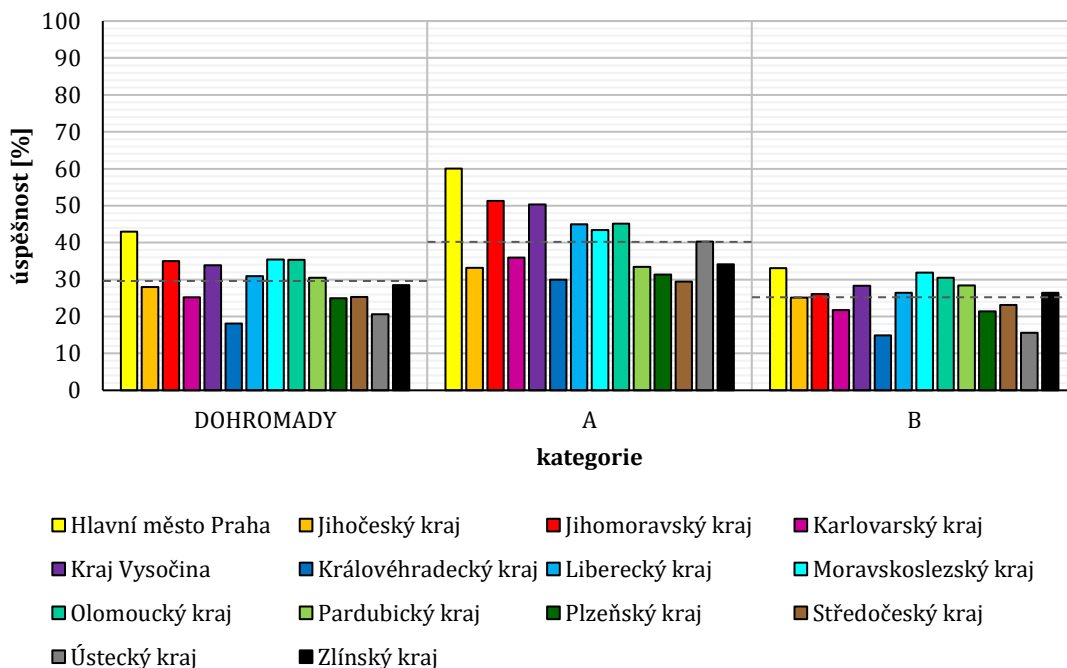
**Obrázek 1.2.4:** Průměrná procentuální úspěšnost příkladů všech zkoumaných kategorií a kol v jednotlivých ročnících fyzikálních olympiád.

Doposud jsme se zabývali výslednou úspěšností příkladů spočítanou z výsledků všech soutěžících (z dostupných výsledkových listin) z různých krajů. Podívejme se ještě na hodnoty v jednotlivých krajích pro kapitoly elektřiny a magnetismu. Na obr. 1.2.5 graf uvádí zaznamenané úspěšnosti jednotlivých krajů pro všech 8 kapitol elektřiny a magnetismu, které jsou uvedeny v příkladové části této práce. Úspěšnosti krajů jsou opět vypočítány jako průměry úspěšností příkladů dané kapitoly. U kapitoly 4 jsou pro Karlovarský a Liberecký kraj průměrné úspěšnosti nulové, pro ostatní nevykreslené kraje nejsou dostupné výsledkové listiny. Černými přerušovanými čarami jsou znázorněny průměrné hodnoty kapitol.



**Obrázek 1.2.5:** Průměrná procentuální úspěšnost kapitol v jednotlivých krajích.

Protože celkové porovnání krajů mezi sebou je z obr. č. 1.2.5 obtížné, je níže přiložen ještě obr. č. 1.2.6, na němž je graf s celkovými průměrnými úspěšnostmi jednotlivých krajů v kategorii A, v kategorii B a v obou druhých kolech dohromady. Tyto průměrné úspěšnosti jsou spočítány z úspěšností příkladů a jejich hodnoty jsou uvedeny v tabulce č. 6.



**Obrázek 1.2.6:** Průměrná procentuální úspěšnost oblasti elektřiny a magnetismu v jednotlivých krajích.

**Tabulka 6:** Průměrné procentuální úspěšnosti oblasti elektřiny a magnetismu v jednotlivých krajích.

	<b>DOHROMADY</b>	<b>A</b>	<b>B</b>
<b>Hlavní město Praha</b>	43,00	60,02	33,10
<b>Jihočeský kraj</b>	27,99	33,14	25,10
<b>Jihomoravský kraj</b>	24,95	51,27	26,08
<b>Karlovarský kraj</b>	25,17	35,91	21,69
<b>Kraj Vysočina</b>	33,82	50,29	28,33
<b>Královéhradecký kraj</b>	18,08	29,95	14,87
<b>Liberecký kraj</b>	30,94	45,00	26,38
<b>Moravskoslezský kraj</b>	35,47	43,40	31,91
<b>Olomoucký kraj</b>	35,30	45,16	30,50
<b>Pardubický kraj</b>	30,47	33,40	28,42
<b>Plzeňský kraj</b>	24,91	31,36	21,37
<b>Středočeský kraj</b>	25,31	29,44	23,10
<b>Ústecký kraj</b>	20,63	40,32	15,58
<b>Zlínský kraj</b>	28,53	34,11	26,41

Dle vypočítaných hodnot je jak v kategorii A a kategorii B, tak i v celkovém hodnocení příkladů elektřiny a magnetismu nejúspěšnějším krajem Hlavní město Praha. V kategorii A by se na další dvě místa umístily kraje Jihomoravský a Vysočina, v kategorii B kraje Moravskoslezský a Olomoucký. V celkovém hodnocení jsou tyto čtyři kraje velmi vyrovnané, ale druhou příčku by obsadil Moravskoslezský kraj a třetí Olomoucký kraj. Naopak na posledním místě by se v kategorii A umístil Středočeský kraj v těsném závěsu kraje Královéhradeckého, v kategorii B je posledním krajem Královéhradecký a předposledním Ústecký. V celkovém hodnocení je posledním krajem Královéhradecký a předposlední Ústecký kraj.

Bližší statistické hodnocení jednotlivých kapitol je uvedeno v příkladové části bakalářské práce.

---

## 2 PŘÍKLADOVÁ ČÁST

Příkladová část bakalářské práce se věnuje konkrétním okruhům elektřiny a magnetismu. Je rozdělena do hlavních kapitol, které poměrově k zastoupení ve fyzikálních olympiádách obsahují různé počty příkladů. Rozdělení do kapitol bylo inspirováno sbírkou Miroslava Kružíka [1], a každá kapitola je dále dělena vždy do třech podkapitol.

První podkapitola se věnuje základním pojmům a vztahům a jsou v ní uvedeny důležité veličiny, vztahy a jednotky z elektřiny a magnetismu, které by řešitel mohl k řešení příkladů potřebovat. Kapitoly na sebe navazují, proto je předpokládána znalost předcházejících kapitol a vztahy až na výjimky nejsou uváděny u každé kapitoly znovu. Kromě vztahů a veličin jsou u některých kapitol uvedeny i konkrétní fyzikální zákony ve svém plném slovním znění, které umožňují lepší pochopení fyzikálních vztahů. Většina vztahů a pojmů je popsána dle mých vlastních znalostí, popřípadě s inspirací ve sbírkách Miroslava Kružíka [1], Miroslava Vondry [18], a z publikací FYZIKA bez nervů [19], Přehled středoškolské fyziky [20], Odmaturuj! z fyziky [21] a Fyzika v kostce [22]. Doslovně uvedené fyzikální zákony jsou psané kurzívou a řádně citovány.

Druhá podkapitola obsahuje řešené příklady. U některých kapitol jsou i řešené příklady dále děleny – je tomu tak v případě, že daná kapitola obsahuje velké množství příkladů a dělení proto bylo žádoucí. Počty příkladů jsou vybírány poměrově – čím větší je zastoupení kapitoly ve fyzikálních olympiádách, tím větší je zastoupení řešených příkladů v této práci. Tento počet příkladů se pohybuje v rozmezí 33 % až 50 % všech příkladů kapitoly, horní část tohoto rozmezí je zvolena u kapitol, které mají velmi malý celkový počet příkladů. Každý příklad je označen číslem příkladu v práci (1 až 55), zkratkou příkladu ve fyzikálních olympiádách, názvem příkladu a procentuální úspěšností příkladu, která je vypočítána z údajů ve výsledkových listinách. U některých příkladů nebyl uveden název, pro přehlednost byl dle autora této práce vhodný název doplněn. Příklady jsou seřazeny od nejjednodušších (nejúspěšnějších) po nejtěžší (nejméně úspěšné). Není samostatně rozdělena kategorie A a kategorie B, příklady jsou vyhodnoceny dohromady. Všechny příklady a jejich řešení jsou převzaty z Archivu zadání a řešení soutěžních úloh FO 1997-2020 a z podkladů pro letošní ročník FO. Jakoukoli úlohu lze tedy dohledat na webových stránkách FO: fyzikalniolympiada.cz.

Poslední podkapitola shrnuje výsledky dané kapitoly statistickými údaji. Vždy je poznamenáno procentuální zastoupení kapitoly ve všech příkladech elektřiny a

magnetismu a vyveden sloupcový graf, v němž jsou znázorněny počty příkladů kapitoly v jednotlivých ročnících fyzikálních olympiád. Dále je pro shrnutí uveden sloupcový graf ukazující úspěšnost jednotlivých příkladů a graf uvádějící úspěšnost jednotlivých krajů u daného příkladu. Díky tomu je možné vyhodnotit, z kolika krajů je vypočítaná úspěšnost příkladu a jak moc relevantní tedy je. V grafech jsou uvedeny také průměrné hodnoty, které jsou vyznačeny přerušovanou čarou a jsou spočítány jako průměr vyznačené oblasti.

## 2.1 Elektrický náboj a pole

### 2.1.1 Základní pojmy a vztahy

Elektrický náboj  $Q$  je základní veličinou elektřiny a magnetismu. Jedná se o skalární fyzikální veličinu, která popisuje vlastnosti a interakce těles, která jsou elektricky nabitá. Jeho jednotkou je coulomb (C). Nejmenší elektrický náboj nese elektron (záporný náboj) a proton (kladný náboj) a nazýváme jej jako elementární. Jeho hodnota je  $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$  C pro elektron, respektive  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C pro proton. Na náboje umístěné v elektrickém poli působí elektrické síly, jejichž velikost můžeme vyjádřit z Coulombova zákona daného vztahem

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q_1Q_2}{r^2},$$

kde  $F_e$  je velikost elektrické síly,  $Q_1$  a  $Q_2$  velikosti nábojů,  $r$  vzdálenost těchto bodových nábojů,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  C<sup>2</sup> · N<sup>-1</sup> · m<sup>-2</sup> je permitivita vakua a  $\epsilon_r$  relativní permitivita prostředí, která je pro vakuum rovna jedné. Výsledná permitivita prostředí  $\epsilon$  je součinem permitivity vakua a relativní permitivity. Při výpočtech se často člen  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  nahrazuje již vypočítanou konstantou  $k = 9 \cdot 10^9$  N · m<sup>2</sup> · C<sup>-2</sup>.

Vektorová veličina, která charakterizuje elektrické pole v daném bodě, se nazývá intenzita elektrického pole  $E$  a její jednotkou je newton na coulomb (N · C<sup>-1</sup>), případně také volt na metr (V · m<sup>-1</sup>). Z Coulombova zákona lze velikost této intenzity zapsat vztahem

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{r^2}.$$

Rovnoměrné rozmístění náboje na ploše  $S$  popisuje skalární veličina zvaná plošná hustota elektrického náboje  $\sigma$  daná vztahem

$$\sigma = \frac{Q}{S}.$$

Pro povrch tvaru koule můžeme plochu nahradit vztahem  $S = 4\pi r^2$  a dostaneme tak vztah

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r E r^2}{4\pi r^2} = E\epsilon.$$

Hustota elektrického náboje se udává v coulombech na metr čtverečný (C · m<sup>-2</sup>).

Potenciál elektrického pole  $\varphi$  v daném bodě je určen pomocí práce  $A$ , která je potřebná k přesunu náboje v elektrickém poli

$$\varphi = \frac{A}{Q},$$

a jeho jednotkou je volt (V). Rozdílem elektrických potenciálů mezi dvěma body je elektrické napětí  $U$ , tedy platí

$$A = QU.$$

Elektrický potenciál bodového náboje lze opět zapsat z Coulombova zákona

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{r} = Er.$$

Konstantou úměrnosti mezi nábojem a elektrickým potenciálem je kapacita  $C$ , můžeme tedy zapsat

$$Q = C\varphi = CU, \quad (2.1.1)$$

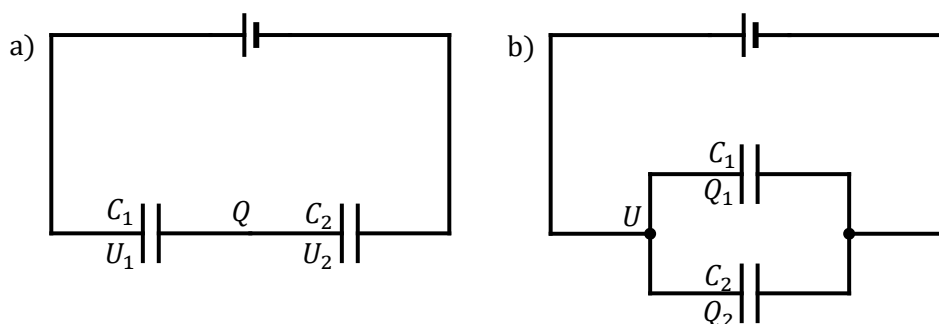
Kapacita je udávána v jednotkách farad (F). Vztah (2.1.1) s elektrickým potenciálem platí pro samotný vodič, vztah s elektrickým napětím pro uspořádání dvou izolovaných vodičů, tedy pro kondenzátorem. Vztah pro kapacitu deskového kondenzátoru je možné zapsat jako

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon_r S}{d},$$

kde  $S$  je účinná plocha vodiče (obsah plochy, kde se desky překrývají), a  $d$  vzdálenost těchto desek. Energie  $W_e$  nabitého kondenzátoru je dána vztahem

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}. \quad (2.1.2)$$

Jednotlivé kondenzátory můžeme spojovat, a to buď sériově, nebo paralelně, jak můžeme vidět na obr. 2.1.1.



**Obrázek 2.1.1:** Zapojení kondenzátorů: (a) sériově, (b) paralelně.

U paralelního zapojení je na všech kondenzátorech stejné napětí, proto platí, že celkový náboj je součtem nábojů na jednotlivých kondenzátorech, a tím i celková kapacita je součtem kapacit jednotlivých kondenzátorů

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n.$$

Při sériovém zapojení naopak na všech kondenzátorech stejný náboj, a vycházíme ze součtu napětí, z čehož vyplývá, že výsledná kapacita soustavy kondenzátorů je dána vztahem

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

## 2.1.2 Řešené příklady

### 2.1.2.1 Bodové náboje

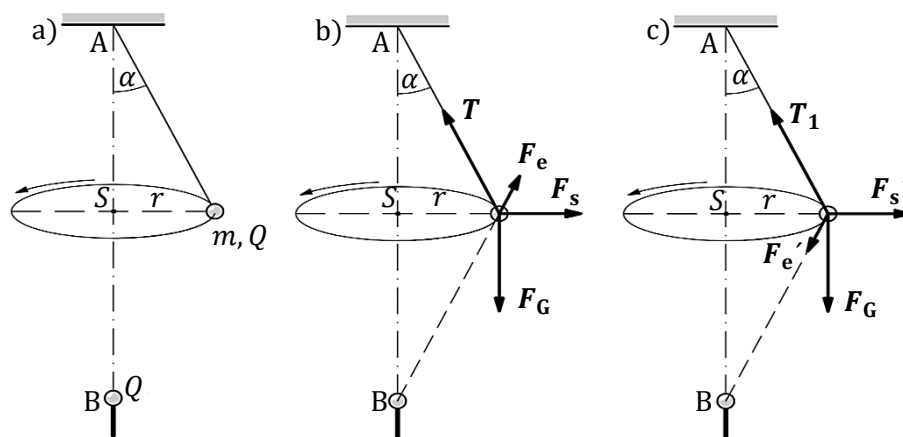
#### Příklad č. 1: FO54A3-2: Nabité kuželové kyvadlo

[63,20 %]

Kuželové kyvadlo upevněné v bodě A (obr. 2.1.2a) je tvořeno nabitou kuličkou hmotnosti  $m$  zavěšenou na vlákně, která obíhá ve vodorovné rovině stálou úhlovou rychlostí  $\omega$ . Náboj kuličky je  $Q$ , hmotnost nitě je v porovnání s hmotností kuličky zanedbatelná. Poloměr kružnice, po které obíhá kulička, je  $r$ . V ose otáčení kyvadla je v bodě B umístěna druhá kulička nabitá stejně velkým souhlasným nábojem. Vzdálenost  $|AS| = |BS|$ . Závěs kyvadla svírá se svislým směrem úhel  $\alpha$ .

- Jak velký je náboj  $Q$  kuliček?
- Jakou silou  $T$  je napínána nit, na které je kyvadlo zavěšeno?
- Jakou úhlovou rychlostí  $\omega_1$  by musela kulička kyvadla obíhat po stejné trajektorii, kdyby kuličky nesly náboj shodné velikosti  $Q_1$ , ale opačného znaménka? Jakou silou  $T_1$  teď bude napínána nit?

Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty:  $\omega = 10,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $r = 5,0 \text{ cm}$ ,  $m = 10,0 \text{ g}$ ,  $\alpha = 30,0^\circ$ ,  $Q_1 = 0,1 \text{ } \mu\text{C}$ ,  $k = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ .



Obrázek 2.1.2: Kulička na vlákně, k úloze FO54A3-2: (a) k zadání, (b, c) k řešení.

#### Řešení příkladu č. 1:

- V neinerciální vztažné soustavě otáčející se spolu s kuličkou působí na kuličku tíhová síla  $F_G$ , tlaková síla závěsu  $T$ , setrvačná síla  $F_s$  a elektrická síla  $F_e$ , které jsou v rovnováze (obr. 2.1.2b). Ve vodorovném směru platí

$$T \sin \alpha = m\omega^2 r + F_e \sin \alpha, \quad (2.1.3)$$

ve svislém směru platí

$$T \cos \alpha + F_e \cos \alpha = mg. \quad (2.1.4)$$



Z (2.1.3) vyjádříme

$$T = F_e + \frac{m\omega^2 r}{\sin \alpha}, \quad (2.1.5)$$

dosadíme do (2.1.4) a upravíme:

$$F_e = \frac{mg}{2 \cos \alpha} - \frac{m\omega^2 r}{2 \sin \alpha} \quad (2.1.6)$$

Po dosazení  $F_e = \frac{kQ^2}{\left(\frac{r}{\sin \alpha}\right)^2}$  a úpravě dostaneme

$$|Q| = \frac{r}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{m}{2k} \left( \frac{g}{\cos \alpha} - \frac{\omega^2 r}{\sin \alpha} \right)}.$$

Aby úloha měla řešení, musí být splněna podmínka  $\frac{g}{\cos \alpha} - \frac{\omega^2 r}{\sin \alpha} > 0$ , která v našem případě splněna je. Číselně:  $|Q| = 8,6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ . **5 bodů**

b) Dosazením z (2.1.6) do (2.1.5) a úpravou dostaneme

$$T = \frac{mg}{2 \cos \alpha} - \frac{m\omega^2 r}{2 \sin \alpha} + \frac{m\omega^2 r}{\sin \alpha} = \frac{mg}{2 \cos \alpha} + \frac{m\omega^2 r}{2 \sin \alpha}.$$

Číselně:  $T = 0,107 \text{ N}$ .

**1 bod**

c) Elektrická síla  $F_e'$  má teď opačný směr (obr. 2.1.2c) a vztahy (2.1.3), (2.1.4) a (2.1.5) se změň na:

$$T_1 \sin \alpha = m\omega_1^2 r - F_e' \sin \alpha, \quad (2.1.7)$$

$$T_1 \cos \alpha - F_e' \cos \alpha = mg, \quad (2.1.8)$$

$$T_1 = -F_e' + \frac{m\omega_1^2 r}{\sin \alpha}. \quad (2.1.9)$$

Dosazením ze (2.1.9) do (2.1.8) a úpravou dostaneme

$$\frac{m\omega_1^2 r \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2F_e' \cos \alpha + mg,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2F_e' \sin \alpha}{mr} + \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r}} = \sqrt{\frac{2kQ_1^2 \sin^3 \alpha}{mr^3} + \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r}}.$$

Číselně:  $\omega_1 = 11,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Ze vztahu (2.1.8) vyjádříme

$$T_1 = F_e' + \frac{mg}{\cos \alpha} = \frac{kQ_1^2 \sin^2 \alpha}{mr^2} + \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

Číselně:  $T_1 = 0,122 \text{ N}$ .

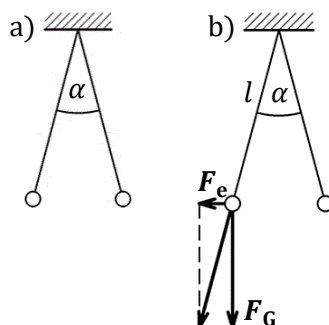
**4 body**

## Příklad č. 2: F041B2-3: Dvě kuličky v dielektriku

[37,13 %]

Dvě stejné malé kuličky o průměru  $d$  a hustotě  $\rho$  jsou zavěšeny v témže bodě na tenkých nevodivých vláknech délky  $l$ . Kuličky mají stejný elektrický náboj a vlákna svírají úhel  $\alpha$  (obr. 2.1.3a). Po ponoření do dielektrické kapaliny o hustotě  $\rho_0$  se úhel změň na  $\beta$ .

Určete relativní permitivitu  $\epsilon_r$  kapaliny a náboj kuliček  $Q$ . Řešte obecně a pak pro hodnoty:  $\rho = 1,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_0 = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\alpha = 30,0^\circ$ ,  $\beta = 20,0^\circ$ ,  $d = 10,0 \text{ mm}$ ,  $l = 20,0 \text{ cm}$ ,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



Obrázek 2.1.3: Kuličky v dielektriku, k úloze FO41B2-3: (a) k zadání, (b) k řešení.

### Řešení příkladu č. 2:

Kuličky na sebe ve vakuu vzájemně působí odpudivou silou

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}, \text{ kde } r = 2l \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Výsledná síla, která vzniká složením síly elektrické a tíhové, má směr vlákna a platí

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{F_e}{F_G} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m g 4l^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{3Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \rho g l^2 d^3 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Elektrický náboj kuliček je

$$Q = \sqrt{\frac{8\pi^2}{3} \epsilon_0 \rho g l^2 d^3 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 54 \text{ nC.} \quad \mathbf{5 \text{ bodů}}$$

Po ponoření do dielektrické kapaliny se elektrické síly zmenší  $\epsilon_r$ krát a proti tíhové síle bude působit síla vztlaková.

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{F_{er}}{F_G - F_V} = \frac{3Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r (\rho - \rho_0) g l^2 d^3 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}.$$

Vydělením rovnic dostaneme

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \epsilon_r \frac{(\rho - \rho_0) \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\rho \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \text{z čehož} \quad \epsilon_r = \frac{\rho \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{(\rho - \rho_0) \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = 8,7. \quad \mathbf{5 \text{ bodů}}$$

### Příklad č.3: FO59A3-3: Přenos náboje

[32,13 %]

Dvě stejné vodivé koule A a B s poloměrem  $R$  nesou každá náboj stejného znaménka  $Q_{A_0}$  a  $Q_{B_0}$ . Náboj budeme přenášet pomocí malé, vodivé, zprvu nenabitě kuličky s poloměrem  $r$  tak, že se nejprve dotkne koule A, pak koule B a pak zase koule A. Označme  $Q_{A_k}$  a  $Q_{B_k}$  náboje koulí po  $k$ -tém přenosu. Jedním přenosem rozumíme dotyk koule B nabitou kuličkou a následný dotyk koule A.

- a) Necht' se na kouli s poloměrem  $R$  nachází náboj  $Q$ . Po dotyku bude na malé kuličce s poloměrem  $r$  náboj  $q = \gamma Q$ . Určete obecně součinitel  $\gamma$ , který budeme dále považovat za známý.

- b) Určete náboje koulí  $Q_{A_k}$  a  $Q_{B_k}$  po  $k$ -tém přenosu náboje. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $Q_{A_0} = 10,0 \text{ nC}$ ,  $Q_{B_0} = 1,0 \text{ nC}$ ,  $\gamma = 0,02$  a  $k = 10$ . Velikost přenášeného náboje je při daném součiniteli  $\gamma$  v porovnání s velikostí náboje koulí zanedbatelná.
- c) Určete, kolikrát bude třeba přenos náboje opakovat, je-li součinitel  $\gamma = 0,02$  a poměr  $\frac{Q_{A_0}}{Q_{B_0}} = 10$ , aby konečný rozdíl nábojů koulí ( $Q_{A_k} - Q_{B_k}$ ) nebyl větší, než 1 % součtu ( $Q_{A_0} + Q_{B_0}$ ).

### Řešení příkladu č. 3:

- a) Při dotyku malé kuličky a velké koule budou mít obě stejný potenciál

$$\varphi = \frac{Q}{C+c_0} = \frac{q}{c_0}.$$

Odtud  $q = \frac{c_0}{C+c_0} Q$ . Protože kapacita kulového vodiče závisí na jeho poloměru, tedy

platí  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ , je hledaný součinitel  $\gamma = \frac{c_0}{C+c_0} = \frac{r}{R+r}$ . **2 body**

- b) Potenciál koule A po dotyku malé kuličky bude  $\varphi_{A_0} = \frac{Q_{A_0}}{C+c_0}$ . Náboj malé kuličky bude

$q = \frac{Q_{A_0}c_0}{C+c_0} = c_0\varphi_{A_0}$ ; na kouli zůstane náboj  $C\varphi_{A_0}$ . Dotkneme-li se nyní malou

kuličkou koule B, bude na soustavě celkový náboj  $C\varphi_{B_0} + c_0\varphi_{A_0}$  a její potenciál bude

$$\varphi_{B_1} = \frac{C\varphi_{B_0} + c_0\varphi_{A_0}}{C+c_0} = (1-\gamma)\varphi_{B_0} + \gamma\varphi_{A_0}.$$

Na malé kuličce zůstane náboj  $q = c_0\varphi_{B_1}$ , na kouli B zůstane náboj  $Q_{B_1} = C\varphi_{B_1}$ . Při

dotyku koule A bude celkový náboj ( $C\varphi_{A_0} + c_0\varphi_{B_1}$ ), jejich potenciál bude

$$\varphi_{A_1} = \frac{C\varphi_{A_0} + c_0\varphi_{B_1}}{C+c_0} = (1-\gamma)\varphi_{A_0} + \gamma\varphi_{B_1}.$$

Rozdíly potenciálů budou

$$\varphi_{A_0} - \varphi_{B_1} = \varphi_{A_0} - (1-\gamma)\varphi_{B_0} - \gamma\varphi_{A_0} = (1-\gamma)(\varphi_{A_0} - \varphi_{B_0}),$$

$$\varphi_{A_1} - \varphi_{B_1} = (1-\gamma)\varphi_{A_0} - \gamma\varphi_{B_1} - \varphi_{B_1} = (1-\gamma)(\varphi_{A_0} - \varphi_{B_1}),$$

$$\varphi_{A_1} - \varphi_{B_1} = (1-\gamma)^2(\varphi_{A_0} - \varphi_{B_0}),$$

Provedeme-li  $k$  přenosů, bude

$$\varphi_{A_k} - \varphi_{B_k} = (1-\gamma)^{2k}(\varphi_{A_0} - \varphi_{B_0}).$$

Uvážíme-li, že přenášený náboj je v porovnání s náboji velkých koulí zanedbatelný a že potenciál je úměrný náboji, můžeme napsat

$$Q_{A_k} - Q_{B_k} = (1-\gamma)^{2k}(Q_{A_0} - Q_{B_0}).$$

a podle zákona zachování náboje

$$Q_{A_k} + Q_{B_k} = Q_{A_0} + Q_{B_0}.$$

Sečtením vztahů dostaneme



výslednice má směr tělesové úhlopříčky k protilehlému vrcholu  $H$  (směru vektoru  $\mathbf{BH}$ ). Velikost výslednice je

$$F_1 = \sqrt{F_0^2 + F_0^2 + F_0^2} = \sqrt{3}F_0. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Každý z trojice nábojů ve vrcholu  $D, E, G$  a ve vzdálenostech  $\sqrt{2}a$  působí na náboj ve vrcholu  $B$  odpudivou silou o velikosti  $\frac{F_0}{2}$ . Jejich výslednice má směr tělesové úhlopříčky (vektoru  $\mathbf{HB}$ ) a velikost

$$F_2 = 3 \frac{F_0}{2} \cos \beta = 3 \frac{F_0 \sqrt{2}}{2 \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} F_0,$$

kde  $\beta$  je úhel mezi stěnovou a tělesovou úhlopříčkou. **2 body**

Zbývající náboj ve vrcholu  $H$ , který je ve vzdálenosti  $\sqrt{3}a$ , působí na náboj ve vrcholu  $B$  ve směru tělesové úhlopříčky (vektoru  $\mathbf{BH}$ ) přitažlivou silou o velikosti

$$F_3 = \frac{F_0}{3}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Výsledná elektrická síla působící na libovolný vrcholový náboj má směr příslušné tělesové úhlopříčky k protilehlému vrcholu (je přitažlivá) a má velikost

$$F = |F_1 - F_2 + F_3| = \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{3}\right) F_0 = \frac{2-3\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{6} k \frac{Q^2}{a^2} \doteq 0,841k \frac{Q^2}{a^2}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

b) Při vzdálení náboje např. ve vrcholu  $B$  od trojice nábojů ve vrcholech  $A, C, F$  vykoná vnější síla práci

$$W_1 = 3k \frac{Q^2}{a}.$$

Při vzdálení náboje ve vrcholu  $B$  od trojice nábojů ve vrcholech  $D, E, G$  vykoná elektrická síla práci

$$W_2 = 3k \frac{Q^2}{\sqrt{2}a}.$$

Při vzdálení náboje ve vrcholu  $B$  od náboje ve vrcholu  $H$  vykoná vnější síla práci

$$W_3 = k \frac{Q^2}{\sqrt{3}a}.$$

Celková práce vykonaná vnější silou pak je

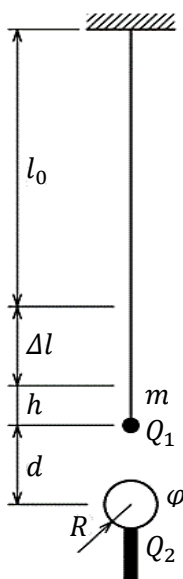
$$W = W_1 - W_2 + W_3 = \left(3 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) k \frac{Q^2}{a} = \frac{18-9\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6} k \frac{Q^2}{a^2} \doteq 1,46k \frac{Q^2}{a}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

### **Příklad č. 5: FO42A2-3: Kovová kulička na gumovém vlákně** **[20,00 %]**

Kovovou kuličku o hmotnosti  $m$  zavěsíme na tenké gumové vlákno, jehož délka se tím zvětší z  $l_0$  na  $l_0 + \Delta l$ . Pak na kuličku přeneseme elektrický náboj  $Q_1$  a zdola zvolna přiblížíme kovovou kouli o poloměru  $R$ , kterou jsme předtím rovněž nabili, a to připojením ke svorce vysokonapěťového zdroje, který má potenciál  $\varphi$ . Působením elektrické síly se kulička vychýlí do nové rovnovážné polohy, která je ve vzdálenosti  $h$  pod původní rovnovážnou polohou. Střed koule je přitom ve vzdálenosti  $d$  od středu kuličky (obr. 2.1.5).

- a) Určete tuhost  $k$  gumového vlákna.  
 b) Určete náboje  $Q_1$  a  $Q_2$  na kouli a kuličce.  
 c) Jestliže nyní rychle pohneme kouli do malé vzdálenosti dolů a zpět, kulička se rozkmitá. Určete periodu těchto kmitů za předpokladu, že jejich amplituda je mnohem menší než vzdálenost  $d$ .

Řešte obecně a potom pro hodnoty:  $m = 5,00$  g,  $l_0 = 1,00$  m,  $\Delta l = 20,00$  cm,  $h = 2,00$  cm,  $R = 2,00$  cm,  $d = 5,00$  cm,  $\varphi = +20,00$  kV,  $g = 9,8$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ . Gumové vlákno považujte za dokonale nevodivé a jeho prodloužení za přímo úměrné působící síle. Jeho hmotnost zanedbáváme. Náboj  $Q_2$  považujte za rovnoměrně rozdělený na povrchu koule i po přiblížení k náboji  $Q_1$ .



**Obrázek 2.1.5:** Kovová kulička na gumovém vlákně, k úloze FO41A2-3.

### Řešení příkladu č. 5:

- a) Tuhost gumového vlákna je

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = 0,245 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- b) Náboj koule určíme ze vztahu pro výpočet potenciálu. Protože potenciál je kladný, je i náboj koule kladný.

$$\varphi = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad Q_2 = 4\pi\epsilon_0 R\varphi = 44 \text{ nC}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Náboj na kuličce určíme užitím Coulombova zákona. Protože elektrická síla je zřejmě přitažlivá, je náboj kuličky záporný. V rovnovážné poloze platí

$$mg + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{d^2} = k(\Delta l + h), \quad mg = k\Delta l \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{d^2} = kh.$$

Spojením předcházejících vztahů dostaneme:

$$Q_1 = -\frac{kh4\pi\epsilon_0 d^2}{Q_2} = -\frac{mgh4\pi\epsilon_0 d^2}{\Delta l 4\pi\epsilon_0 R\varphi} = -\frac{mghd^2}{\Delta l R\varphi} = -31 \text{ nC}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- c) Během kmitání působí na kuličku síla vlákna, tíhová síla a elektrická přitažlivá síla nabitě koule. Pro svislou souřadnici výsledné síly při okamžité výchylce  $y$  platí

$$F = k(\Delta l + h - y) - mg - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{(d+y)^2} = k(h - y) - kh \frac{d^2}{(d+y)^2}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Pro  $y \ll d$  můžeme provést úpravu

$$F = k(h - y) - kh \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{d}\right)^2} \doteq -k(h - y) - kh \left(1 - 2\frac{y}{d}\right) = -ky \left(1 - \frac{2h}{d}\right)$$

a napsat pohybovou rovnici kmitů

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \left(1 - \frac{2h}{d}\right) y = -m\omega^2 y,$$

ze které plyne

$$\omega = \sqrt{\frac{k\left(1 - \frac{2h}{d}\right)}{m}} = \sqrt{\frac{g\left(1 - \frac{2h}{d}\right)}{\Delta l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g\left(1 - \frac{2h}{d}\right)}} = 2,0 \text{ s}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

Obecné řešení vyhovuje, pokud  $d > 2h$ . Kdyby platilo  $d \leq 2h$ , byla by předpokládaná rovnovážná poloha kuličky labilní. Kulička by přiskočila ke kouli, získala by náboj souhlasného znaménka a podmínky úlohy by se změnily. **1 bod**

## 2.1.2.2 Kondenzátory

### Příklad č. 6: F044A3-2: Kelvinovy váhy

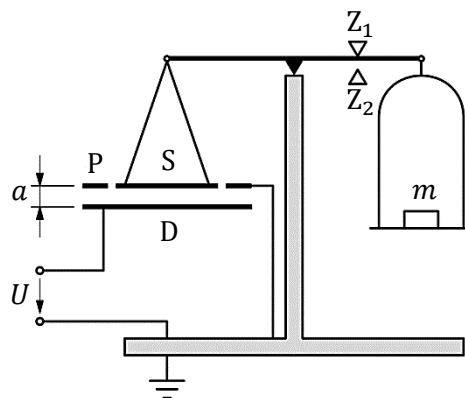
[57,65 %]

Na obr. 2.1.6 jsou znázorněny *Kelvinovy váhy*, které slouží jako elektrostatický voltmetr. Kruhová deska S o plošném obsahu  $S$  je zavěšena na vahadle a vyvážena. V rovnovážné poloze se nachází ve vzdálenosti  $a$  od pevné desky D, se kterou tvoří vzduchový kondenzátor, na který přivedeme měřené napětí. Tím se desky kondenzátoru nabijí, začnou se přitahovat a rovnováha se poruší.

Soustředný prstenec P je přes vahadlo a stojan vah vodivě spojen s deskou S. Jeho účelem je zajistit homogenní pole mezi deskami D a S. Zarážky  $Z_1$  a  $Z_2$  vymezují pohyb vahadla tak, že deska S se z původní rovnovážné polohy může pohybovat pouze nahoru. K tomu dojde, jestliže na miskou na pravé straně vahadla přidáme závaží, jehož tíha právě překoná elektrostatickou přitažlivou sílu mezi deskami.

- Určete kapacitu kondenzátoru tvořeného deskami S a D. Jaký náboj  $Q$  se vytvoří na deskách po připojení napětí  $U$ ?
- Určete velikost síly, kterou bude na desku S působit deska D. Potřebný vztah odvod'te.
- Určete hmotnost  $m$  závaží, jehož tíha obnoví rovnovážný stav.

Řešte obecně a pak pro hodnoty  $S = 100,00 \text{ cm}^2$ ,  $a = 2,00 \text{ mm}$ ,  $U = 2,00 \text{ kV}$ . Relativní permitivitu vzduchu považujte za rovnou 1.



Obrázek 2.1.6: Kelvinovy váhy, k úloze FO44A3-2.

**Řešení příkladu č. 6:**

- a) Kondenzátor tvořený deskami S a D má kapacitu

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{a} = 44,3 \text{ pF.}$$

Při napětí  $U$  vzniknou na jeho deskách nesouhlasné náboje o velikosti

$$Q = CU = 88,5 \text{ nC.} \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- b) Pole mezi deskami kondenzátoru, jehož intenzita je  $E = \frac{U}{a}$  vzniká superpozicí polí horní a dolní desky. Samotné pole dolní desky D má v každém místě prostoru intenzitu o velikosti  $E_1 = \frac{U}{2a}$  a působí na náboj  $Q$  horní desky silou o velikosti

$$F = E_1 Q = \frac{U}{2a} CU = \frac{CU^2}{2a} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2a^2} = 0,044 \text{ 3 N.} \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

*Intenzitu elektrického pole dolní desky lze určit také užitím Gaussovy věty, elektrická síla ze zákona zachování energie, což je dohledatelné na oficiálních stránkách FO.*

- c) Na obnovení rovnováhy musíme na misku vah položit závaží o hmotnosti

$$m = \frac{F}{g} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2a^2 g} = 4,51 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 4,51 \text{ g.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

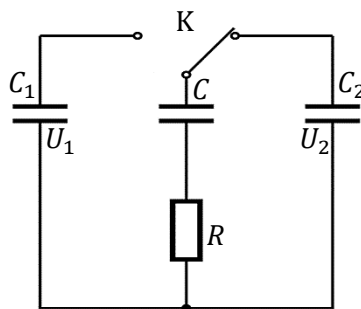
**Příklad č. 7: FO56A3-4: Přepínání kondenzátorů**

**[42,45 %]**

Dva nabité kondenzátory s kapacitami  $C_1 = 5,0 \mu\text{F}$  a  $C_2 = 7,0 \mu\text{F}$  jsou zapojeny podle obr. 2.1.7. Napětí na kondenzátorech je  $U_1 = 20 \text{ V}$  a  $U_2 = 70 \text{ V}$ . Třetí kondenzátor s kapacitou  $C$  je připojen ke kondenzátoru s kapacitou  $C_2$ . Klíč K přepneme z pravé do levé polohy a po vyrovnání napětí zase zpět do pravé polohy. Po provedení sedmi takových dvojích přepojení rozdíl  $U_2 - U_1$  napětí na kondenzátorech klesl na  $5,5 \text{ V}$ .

- Jaká je kapacita  $C$  třetího kondenzátoru?
- Jaké bude napětí  $U_m$  na kondenzátorech, budeme-li přepínat klíč tak dlouho, až na kondenzátorech bude prakticky stejné napětí?
- Jaké teplo se při tom uvolní na rezistoru  $R$ ?





Obrázek 2.1.7: Kondenzátory, k úloze FO56A3-4.

**Řešení příkladu č. 7:**

- a) Při prvním přepojení klíče vlevo se napětí na kondenzátorech  $C$  a  $C_1$  vyrovná na hodnotě  $U_A$ . Platí:

$$C(U_2 - U_A) = C_1(U_A - U_1), \quad U_A = \frac{C_1 U_1 + C U_2}{C + C_1}.$$

Po přepojení klíče do původní polohy se napětí na kondenzátorech  $C$  a  $C_2$  vyrovná na hodnotě  $U_B$ . Platí:

$$C(U_B - U_A) = C_2(U_2 - U_B),$$

$$U_B = \frac{C_2 U_2 + C U_A}{C + C_2} = \frac{U_2 (C C_2 + C_1 C_2 + C^2) + U_1 C C_1}{(C + C_1)(C + C_2)}.$$

Rozdíl napětí po prvním cyklu tedy bude

$$U_B - U_A = \frac{U_2 (C C_2 + C_1 C_2 + C^2) + U_1 C C_1}{(C + C_1)(C + C_2)} - \frac{C_1 U_1 + C U_2}{C + C_1} = \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} (U_2 - U_1).$$

Rozdíl napětí po 7 cyklech je

$$5,5 \text{ V} = \left[ \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} \right]^7 (U_2 - U_1) = \left[ \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} \right]^7 \cdot 50 \text{ V}.$$

Po úpravě:

$$\left[ \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} \right]^7 = 0,11, \quad \log \frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} = \frac{\log 0,11}{7} = -0,1369,$$

$$\frac{C_1 C_2}{(C + C_1)(C + C_2)} = 10^{-0,1369} = 0,7296,$$

dojdeme ke kvadratické rovnici pro číselnou hodnotu kapacity  $C$  v mikrofaradech:

$$\{C\}^2 + 12\{C\} - 12,97 = 0.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen  $C \doteq 1,0 \mu\text{F}$ .

**5 bodů**

- b) Podle zákona zachování náboje

$$C_1 U_1 + (C + C_2) U_2 = (C_1 + C_2 + C) U_m, \quad U_m = \frac{C_1 U_1 + (C + C_2) U_2}{C_1 + C_2 + C} \doteq 51 \text{ V} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

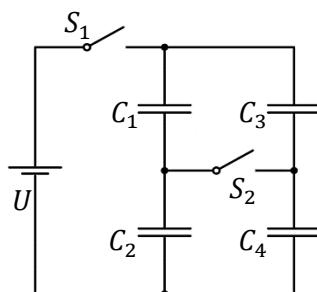
- c) Teplo uvolněné na rezistoru je rovno rozdílu počáteční a konečné energie soustavy kondenzátorů:

$$E = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{(C + C_2) U_2^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2 + C) U_m^2}{2} \doteq 3,8 \text{ mJ}$$

**Příklad č. 8: FO53B2-4: Kondenzátory****[31,96 %]**

Na obr. 2.1.8 je znázorněn elektrický obvod, který se skládá ze zdroje napětí  $U$ , čtyř kondenzátorů o kapacitách  $C_1 = C_2 = C_3 = C$ ,  $C_4 = 2C$  a dvou spínačů  $S_1$ ,  $S_2$ . Kondenzátory nabijeme sepnutím spínače  $S_1$ . Určete celkovou kapacitu soustavy, celkovou energii nabitých kondenzátorů, náboje a napětí na jednotlivých kondenzátorech v těchto případech:

- $S_2$  je při sepnutí  $S_1$  rozpojen,
- $S_2$  je při sepnutí  $S_1$  sepnut,
- $S_2$  je při sepnutí  $S_1$  rozpojen; pak  $S_1$  rozpojíme a  $S_2$  sepneme.
- Jak se změní energie soustavy kondenzátorů v případech b), c) vzhledem k a)? Vzniklé rozdíly zdůvodněte.



**Obrázek 2.1.8:** Kondenzátory, k úloze FO53B2-4.

**Řešení příkladu č. 8:**

- a) Je-li  $S_2$  rozpojen a  $S_1$  sepnut, platí

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C},$$

z čehož plyne  $C_{12} = \frac{C}{2}$ , a obdobně platí také

$$\frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} = \frac{3}{2C},$$

z čehož  $C_{34} = \frac{2C}{3}$ . Celková kapacita soustavy

$$C_a = C_{12} + C_{34} = \frac{C}{2} + \frac{2C}{3} = \frac{7C}{6}.$$

Celková energie soustavy je  $E_a = \frac{1}{2} C_a U^2 = \frac{7}{12} C U^2$  a celkový náboj dodaný zdrojem při nabíjení je  $Q_a = \frac{7}{6} C U$ . Náboje na jednotlivých kondenzátorech jsou

$$Q_1 = Q_2 = C_{12} U = \frac{1}{2} C U, \quad Q_3 = Q_4 = C_{34} U = \frac{2}{3} C U.$$

Napětí na jednotlivých kondenzátorech pak jsou

$$U_1 = U_2 = \frac{1}{2} U, \quad U_3 = \frac{Q_3}{C} = \frac{2}{3} U, \quad U_4 = \frac{Q_4}{2C} = \frac{1}{3} U. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- b) Po sepnutí spínače  $S_2$  se změní kapacita soustavy ( $C_1$  a  $C_3$  jsou spojeny paralelně, k tomu je sériově připojena paralelní kombinace  $C_3$  a  $C_4$ ). Platí

$$C_{13} = C_1 + C_3 = 2C, \quad C_{24} = C_2 + C_4 = C + 2C = 3C,$$

$$\frac{1}{C_b} = \frac{1}{C_{13}} + \frac{1}{C_{24}} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{3C} = \frac{5}{6C},$$

z čehož plyne  $C_b = \frac{6C}{5}$ . Celková energie soustavy pak bude  $E_b = \frac{1}{2}C_b U^2 = \frac{3}{5}CU^2$ .

Celkový náboj pak bude  $Q_b = C_b U = \frac{6}{5}CU$ . Napětí na jednotlivých kondenzátorech jsou

$$U_1 = U_3 = \frac{Q_b}{C_{13}} = \frac{3}{5}U, \quad U_2 = U_4 = \frac{Q_b}{C_{24}} = \frac{2}{5}U.$$

Nakonec určíme náboje na jednotlivých kondenzátorech

$$Q_1 = C_1 U_1 = \frac{3}{5}CU, \quad Q_2 = C_2 U_2 = \frac{2}{5}CU,$$

$$Q_3 = C_3 U_3 = \frac{3}{5}CU, \quad Q_4 = C_4 U_4 = \frac{4}{5}CU. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Kondenzátory jsou v tomto případě nabity tak, že celkový náboj dodaný zdrojem při nabíjení je stejně velký jako v a), tj.  $Q_c = Q_a = \frac{7}{6}CU$ . Po odpojení zdroje (rozepnutím  $S_1$ ) sepne spínač  $S_2$ , v důsledku čehož dojde k přerozdělení náboje na kondenzátorech oproti a) a ke změně kapacity soustavy, která teď bude stejně velká jako v případě b). Další postup bude shodný s postupem v případě b). Dostaneme

$$C_c = C_b = \frac{6C}{5}.$$

Na rozdíl od úlohy b) ale dojde ke změně napětí na kondenzátorech. Vyjde

$$U_1' = U_3' = \frac{\frac{7}{6}CU}{C_{13}} = \frac{7}{12}U, \quad U_2' = U_4' = \frac{\frac{7}{6}CU}{C_{24}} = \frac{7}{18}U.$$

Celkové napětí na kondenzátorech při odpojeném zdroji pak bude

$$U' = U_1' + U_2' = \left(\frac{7}{12} + \frac{7}{18}\right)U = \frac{35}{36}U,$$

a energie soustavy bude  $E_c = \frac{1}{2}C_c U'^2 = \frac{1}{2} \frac{6}{5}C \left(\frac{35}{36}U\right)^2 = \frac{245}{432}CU^2$ . Náboje na kondenzátorech pak jsou

$$Q_1' = C_1 U_1' = \frac{7}{12}CU, \quad Q_2' = C_2 U_2' = \frac{7}{18}CU,$$

$$Q_3' = C_3 U_3' = \frac{7}{12}CU, \quad Q_4' = C_4 U_4' = \frac{7}{9}CU. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- d) Změna energie soustavy v jednotlivých případech je

$$\Delta E_b = E_b - E_a = \frac{3}{5}CU^2 - \frac{7}{12}CU^2 = \frac{1}{60}CU^2 > 0,$$

$$\Delta E_c = E_c - E_a = \frac{245}{432}CU^2 - \frac{7}{12}CU^2 = -\frac{7}{432}CU^2 < 0.$$

V případě b) energie soustavy vzroste, protože vzrostla kapacita soustavy a zdroj kondenzátory dobije, zatímco v případě c) energie soustavy klesne, třebaže vzroste kapacita soustavy, ale tentokrát k tomu dojde při odpojeném zdroji. Při přesunu nábojů na kondenzátorech vzniká ve vodičích Jouleovo teplo, což vede k celkovému poklesu energie soustavy. **2 body**

**Příklad č. 9: F061A2-1: Deskový kondenzátor****[23,93 %]**

Deskový kondenzátor se skládá ze dvou čtvercových desek o straně  $a$ , jejichž vzájemná vzdálenost je  $d$ ,  $d \ll a$ . Mezi deskami je vzduch. Kondenzátor je nabit zdrojem o elektromotorickém napětí  $U_e$  a odpojen od zdroje. Vzdálenost mezi deskami kondenzátoru zvětšíme na dvojnásobek.

- Jakou nejmenší sílu k tomu potřebujeme a jak tato síla závisí na vzdálenosti desek?
- Jakou nejmenší práci přitom musíme vykonat?
- Jak se změní výsledky a) a b), když kondenzátor necháme po nabití připojen ke zdroji? Je splněn zákon zachování energie?

**Řešení příkladu č. 9:**

- ab) Intenzita elektrického pole mezi deskami kondenzátoru je  $E = \frac{U_e}{d}$ . Protože se velikost nábojů na deskách nemění, nemění se ani hustota elektrického náboje a pro intenzitu elektrického pole můžeme napsat  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Odtud

$$\sigma = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{U_e}{d}.$$

Podle ZZE síla vykoná práci, která je rovna rozdílu energií kondenzátoru. Náboj na deskách kondenzátoru se nemění, jeho kapacita se zmenšila na polovinu:

$$W = Fd = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{C} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 S^2}{2\epsilon_0 \frac{S}{d}} = \frac{\sigma^2 S d}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U_e}{d}\right)^2 a^2 d$$

Síla potřebná k posunutí desky nezávisí na velikosti a je

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U_e}{d}\right)^2 a^2. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Tato síla vykoná práci  $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} U_e^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{a^2}{d} U_e^2$ . **2 body**

*Alternativní možnost odvození vztahu pro velikost síly v části a) pomocí derivace je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

- c) Napětí mezi deskami se v tomto případě nemění. Při posouvání desky se mění intenzita elektrického pole  $E = \frac{U_e}{x}$  a velikost síly závisí na vzdálenosti desek:

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U_e}{x}\right)^2 a^2. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Situace je obdobná jako při posouvání bodového náboje v poli druhého náboje, kde intenzita elektrického pole je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti nábojů a potenciál je nepřímo úměrný první mocnině jejich vzdálenosti.

Pro vykonanou práci můžeme napsat:

$$W = \int_d^{2d} F dx = \int_d^{2d} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U_e}{x}\right)^2 a^2 dx = \frac{1}{2} \epsilon_0 U_e^2 a^2 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2d}\right),$$

$$W = \frac{\epsilon_0 U_e^2 a^2}{4d} = \frac{1}{4} C U_e^2. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

ZZE je splněn. Rozdíl energií kondenzátoru na konci posunutí desky a na začátku je

$$\Delta E = \frac{1}{4}CU_e^2 - \frac{1}{2}CU_e^2 = -\frac{1}{4}CU_e^2.$$

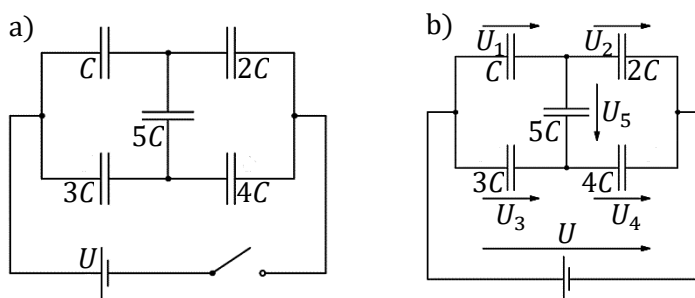
Náboj na deskách kondenzátoru se zmenšil o  $\Delta Q = \Delta CU_e = \frac{1}{2}CU_e$  a zvýšila se energie o zdroje o  $\Delta E_z = \Delta QU_e = \frac{1}{2}CU_e^2$ . **2 body**

### Příklad č. 10: FO46A2-2: Kondenzátorová síť

[8,57 %]

Ke zdroji o svorkovém napětí  $U$  připojíme podle obr. 2.1.9a soustavu pěti kondenzátorů  $C$ ,  $2C$ ,  $3C$ ,  $4C$  a  $5C$ .

- Jaké náboje se vytvoří na jednotlivých kondenzátorech a jaké na nich bude napětí?
- Který kondenzátor bude mít největší energii?
- Daná soustava kondenzátorů se navenek chová jako jediný kondenzátor o kapacitě  $C_v$ . Určete její velikost.



Obrázek 2.1.9: Kondenzátory, k úloze FO46A2-2: (a) k zadání, (b) k řešení.

### Řešení příkladu č. 10:

- Označme  $U_1$  až  $U_5$  napětí na jednotlivých kondenzátorech podle obr. 2.1.9b. Příslušné náboje na kondenzátorech označme  $Q_1$  až  $Q_5$ . Ze zákona zachování náboje plyne

$$Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4, \quad Q_2 - Q_1 + Q_5 = 0.$$

Dále platí:

$$U_1 + U_5 - U_3 = 0, \quad \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_5}{5C} - \frac{Q_3}{3C} = 0, \quad 15Q_1 + 3Q_5 - 5Q_3 = 0,$$

$$U_2 - U_5 - U_4 = 0, \quad \frac{Q_2}{2C} - \frac{Q_5}{5C} - \frac{Q_4}{4C} = 0, \quad 10Q_2 - 4Q_5 - 5Q_4 = 0,$$

$$U_1 + U_2 = U, \quad \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2}{2C} = U, \quad 2Q_1 + Q_2 = 2UC. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Dostali jsme soustavu pěti rovnic, jejímž řešením dostaneme

$$Q_1 = \frac{44}{71}CU, \quad Q_2 = \frac{54}{71}CU, \quad Q_3 = \frac{126}{71}CU, \quad Q_4 = \frac{116}{71}CU, \quad Q_5 = -\frac{10}{71}CU.$$

Příslušná napětí na kondenzátorech jsou

$$U_1 = \frac{44}{71}U, \quad U_2 = \frac{27}{71}U, \quad U_3 = \frac{42}{71}U, \quad U_4 = \frac{29}{71}U, \quad U_5 = -\frac{2}{71}U. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

b) Energie kondenzátorů jsou v poměru

$$\frac{1}{2}CU_1^2 : \frac{1}{2}2CU_2^2 : \frac{1}{2}3CU_3^2 : \frac{1}{2}4CU_4^2 : \frac{1}{2}5CU_5^2 = 1\,936 : 1\,458 : 5\,292 : 3\,364 : 20.$$

Největší energii má kondenzátor o kapacitě  $3C$ .

**2 body**

c) Aby se soustava kondenzátoru nabíla na celkové napětí  $U$ , musí zdroj dodat náboj

$$Q = Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4 = \frac{170}{71}CU.$$

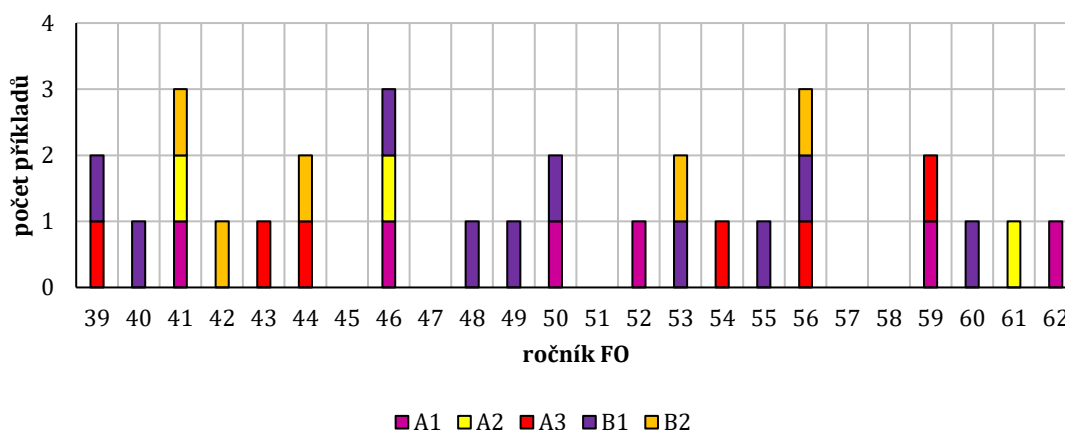
Celková kapacita soustavy je tedy

$$C_v = \frac{Q}{U} = \frac{170}{71}C \doteq 2,39C.$$

**2 body**

## 2.1.3 Statistická úspěšnost příkladů

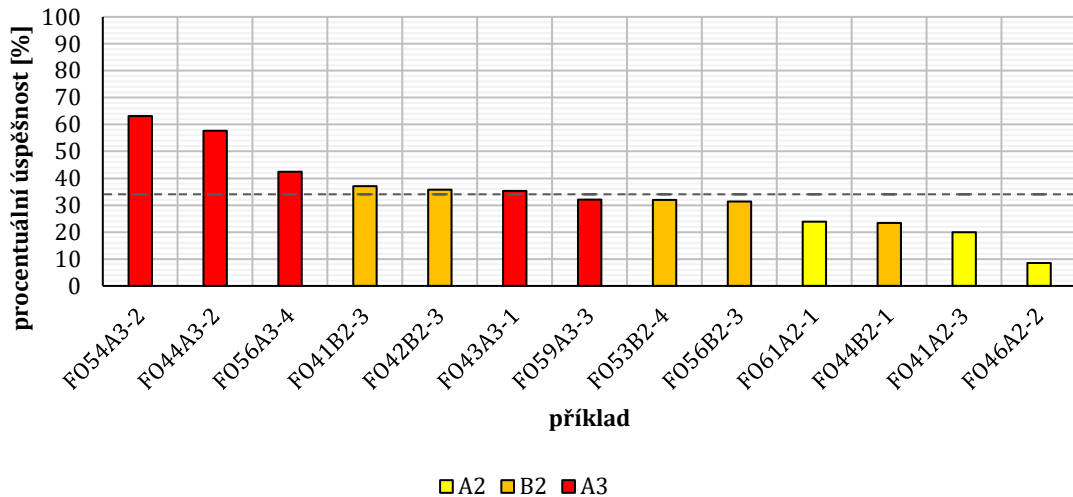
Zastoupení příkladů na elektrický náboj a pole ve fyzikálních olympiádách kategorie A a kategorie B je 19,61 % ze všech příkladů elektřiny a magnetismu v ročnících 39-62 pro kategorii A a 39-61 pro kategorií B. Jak můžeme vidět v grafu na obrázku 2.1.10, jedná se o 30 příkladů ve všech kolech těchto kategorií.



**Obrázek 2.1.10:** Zastoupení příkladů na elektrický náboj a elektrické pole v jednotlivých ročnících a kolech fyzikální olympiády.

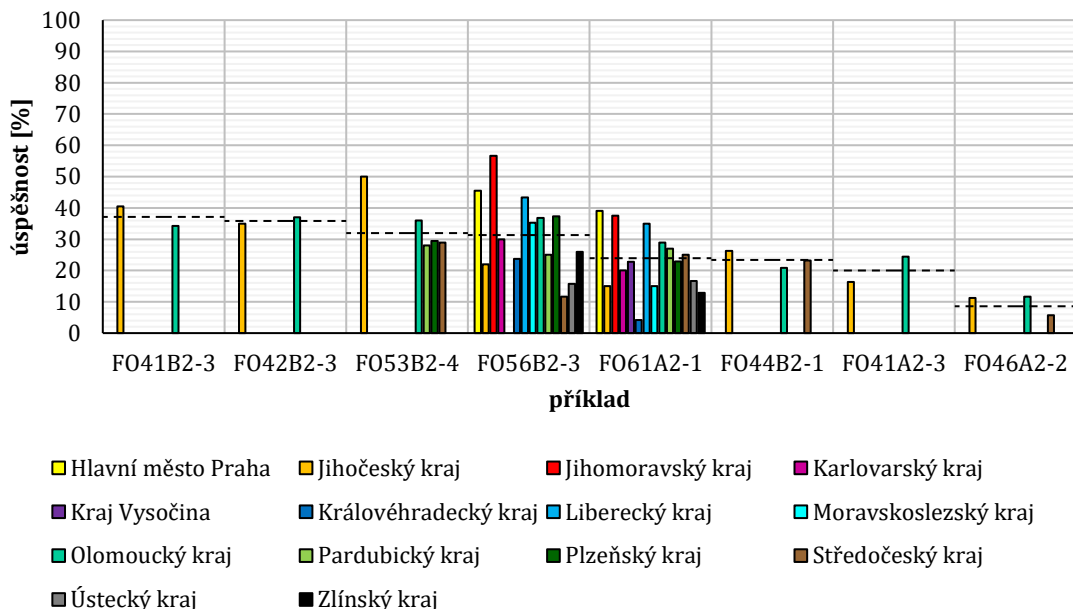
Největší počet příkladů, které se objevily v jednom ročníku, je 3, přičemž se nikdy v jednom ročníku nevyskytovaly více než 2 příklady z této oblasti fyziky na jednu kategorii. Naopak ve čtyřech ročnících se neobjevil žádný příklad, a to v ročnících 45, 47, 57 a 58. Z grafu 2.1.1 je názorné, že ze všech příkladů jen necelá polovina tvoří postupová kola (A2, A3, B2) – jedná se o 8 příkladů z krajských kol kategorií A a B a 6 příkladů z celostátních kol kategorie A. V grafu na obrázku 2.1.11 je uvedena procentuální úspěšnost většiny těchto příkladů (pro příklad FO39A3-3 nebylo možné dohledat výsledkovou listinu s hodnotami udělených bodů každého účastníka kola). Průměrná úspěšnost všech těchto příkladů je 34,07 %, u kategorie A je to 35,41 %, u kategorie B 31,92 %. Příklady na kondenzátory se jeví

obtížnější než příklady na bodové náboje, jejich průměrná úspěšnost je 31,32 %, zatímco u příkladů na bodové náboje je to 36,42 %. Průměr úspěšnosti příkladů na kondenzátory je nízký především díky příkladu FO46A2-2, jehož úspěšnost je na základě výsledkových listin ze tří krajů pouze 8,57 %.



**Obrázek 2.1.11:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů na elektrický náboj a elektrické pole.

V grafu na obrázku 2.1.12 je zaznamenána procentuální úspěšnost příkladů druhých kol kategorií A a B v jednotlivých krajích ČR.



**Obrázek 2.1.12:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů na elektrický náboj a elektrické pole v jednotlivých krajích.

## 2.2 Elektrický proud v kovech

### 2.2.1 Základní pojmy a vztahy

Elektricky nabitě částice vytvářejí svým uspořádaným pohybem elektrický proud  $I$ , který je možné vyjádřit jako celkový náboj  $Q$ , který projde průřezem vodiče za jednotku času  $t$

$$I = \frac{Q}{t}. \quad (2.2.1)$$

Jednotkou elektrického proudu je ampér (A). Ze vztahu (2.2.1) je možné také určit jednotku náboje pomocí ampéru, jeho jednotkou je kromě coulombu také ampérsekunda (A · s). Elektrický proud lze také vyjádřit pomocí charakteristik nabitých částic, které proud vytvářejí

$$I = SN_V ev,$$

kde  $S$  je průřez vodiče,  $N_V$  počet vodivostních elektronů v 1 m<sup>3</sup> (hustota vodivostních elektronů),  $e$  elementární náboj a  $v$  rychlost unášivého pohybu elektronů.

Pro elektrické obvody můžeme zavést Ohmův zákon

$$U = RI,$$

kde  $U$  je elektrické napětí a  $R$  elektrický odpor, jehož jednotkou je ohm ( $\Omega$ ). Elektrické napětí bylo zmíněno již v předchozí kapitole, jedná se o skalární veličinu, jejíž jednotkou je volt (V). Při počítání elektrických obvodů musíme rozlišovat dva typy napětí – elektromotorické napětí zdroje  $U_e$  a svorkové napětí  $U$ . Pokud zdroj není zatížen, je elektromotorické napětí zdroje rovno svorkovému.

Elektrický odpor  $R$  je skalární veličina, která vyjadřuje schopnost daného vodiče vést elektrický proud. Převrácenou hodnotou je elektrická vodivost  $G$ , tedy platí

$$G = \frac{1}{R}.$$

Jednotkou elektrické vodivosti je siemens (S). Odpor můžeme také kromě Ohmova zákona vyjádřit pomocí měrného elektrického odporu  $\rho$  a geometrických rozměrů vodiče

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

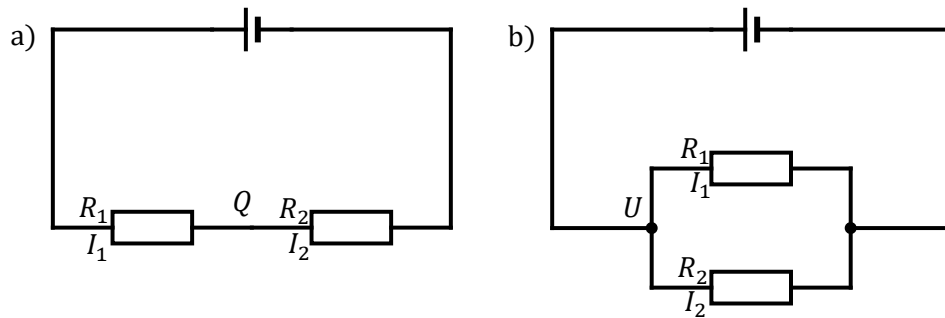
kde  $l$  je délka vodiče a  $S$  průřez vodiče. Vztah platí pro konstantní průřez vodiče. Měrný elektrický odpor je dán tabulkami a závisí na materiálu, ze kterého je vodič vyroben. Jeho jednotkou je ohmmetr ( $\Omega \cdot \text{m}$ ). Odpor závisí také na teplotě, tato závislost je vyjádřena vztahem

$$R = R_0[1 + \alpha(t_2 - t_1)],$$

kde  $R_0$  je odpor při teplotě  $t_1$ ,  $R$  odpor při teplotě  $t_2$  a  $\alpha$  teplotní součinitel odporu daný tabulkami.



Elektrické odpory můžeme stejně jako kondenzátory spojovat sériově nebo paralelně, jak vidíme na obrázku 2.2.1.



**Obrázek 2.2.1:** Zapojení odporů: (a) sériově, (b) paralelně.

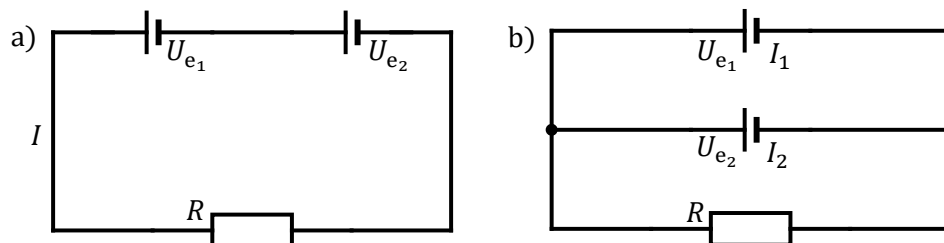
U paralelního zapojení je na všech odporech stejné napětí, celkový odpor je tedy součtem proudů na jednotlivých odporech, tedy celkový odpor je dán vztahem

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

Při sériovém zapojení všemi odpory prochází stejný proud, a vycházíme ze součtu napětí, tedy celkový odpor je součtem jednotlivých odporů

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

Kromě odporů se dají také spojovat zdroje napětí – opět sériově nebo paralelně, jak vidíme na obrázku 2.2.2.



**Obrázek 2.2.2:** Zapojení zdrojů napětí: (a) sériově, (b) paralelně.

Při sériovém zapojení je všude v obvodu stejný proud, celkové napětí je součtem jednotlivých napětí zdrojů. Při paralelním zapojení je elektromotorické napětí na všech zdrojích stejné a platí, že proud v obvodu je součtem proudů protékajících jednotlivými zdroji.

Ohmův zákon se využívá pro jednoduché obvody – platí, že napětí na zdroji je rovno součinu proudu v obvodu a celkovému odporu v obvodu  $R_c$ , který je dán součtem odporu vnitřního odporu zdroje  $R_i$  a odporu ve zbytku obvodu  $R$ , tedy

$$U_e = R_c I = (R_i + R) I = U_i + U,$$

kde  $U_i$  je úbytek napětí způsobený vnitřním odporem zdroje.

Složitější obvody se řeší Kirchhoffovými zákony, které jsou na Ohmově zákoně postavené. Jejich znění je následující:

I. Kirchhoffův zákon: „Součet proudů přitékajících do uzlu je roven součtu proudů odtékajících.“ [1]

$$\sum I = 0$$

II. Kirchhoffův zákon: „Součet ohmických napětí  $RI$  v uzavřeném obvodu je roven součtu elektromotorických napětí zdrojů v obvodu zapojených.“ [1]

$$\sum RI = \sum U_e$$

Pro kategorii B byl v Knihovničce fyzikální olympiády zpracován soubor *Elektrické obvody (stejnoseměrný proud)* [23], ve kterém jsou sepsány poučky k řešení elektrických obvodů, zejména je dobré si nastudovat Millmanovu a Théveniovu poučku. V souboru je každá poučka názorně ukázána na příkladu.

Pro úplnost zmiňme ještě práci, výkon a účinnost elektrického proudu. Přenesením náboje  $Q$  mezi dvěma místy ve vodiči s napětím  $U$  dochází k vykonání práce  $A$  dané vztahem

$$A = UQ = UIt = RI^2t = \frac{U^2}{R}t,$$

kde  $t$  je čas. Tento vztah je zároveň roven Joulovu teple, tedy teple, které vodič předá do okolí. Výkon je poté dán jako vykonaná práce za čas, tedy platí

$$P = \frac{A}{t} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

Mimo to můžeme výkon zapsat také pomocí elektromotorického napětí a vnitřního odporu zdroje

$$P = U_e I - R_i I^2.$$

Účinnost spotřebiče vyjádříme z poměru svorkového napětí a elektromotorického napětí

$$\eta = \frac{U}{U_e} = \frac{RI}{(R_i+R)I} = \frac{R}{R_i+R}.$$

## 2.2.2 Řešené příklady

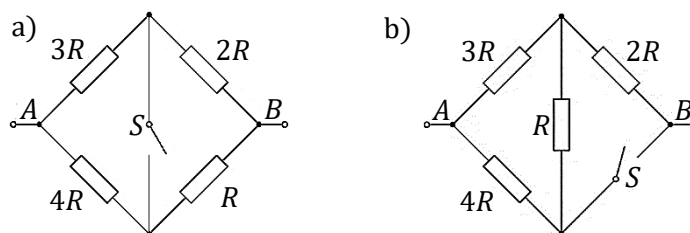
### 2.2.2.1 Spojování rezistorů

#### Příklad č. 11: F052B2-1: Elektrický obvod I.

[53,68 %]

Řešte následující úlohy:

- 1) Na obr. 2.2.3a je znázorněn elektrický obvod s rezistory a se spínačem. Je-li spínač  $S$  rozepnut, je celkový odpor obvodu  $R_{AB} = 105 \Omega$ . Určete celkový odpor obvodu  $R_{AB}'$ , je-li spínač  $S$  sepnut.
- 2) V obvodu nyní vyměníme rezistor o odporu  $R$  a spínač  $S$  (obr. 2.2.3b). Určete poměr mezi celkovým odporem obvodu  $\frac{R_{AB}}{R_{AB}'}$  při rozepnutém a sepnutém spínači  $S$ .



**Obrázek 2.2.3:** Elektrický obvod s rezistory, k zadání úlohy FO52B2-1.

**Řešení příkladu č. 11:**

- a) Když je spínač rozepnut, potom je možno obvod z obr. 2.2.3a překreslit na obr. 2.2.4a. Celkový odpor obvodu určíme pomocí vztahu

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{3R+2R} + \frac{1}{4R+R'}$$

z čehož  $R_{AB} = \frac{5}{2}R$ .

**2 body**

Když je spínač sepnut, je možno obvod z obr. 2.2.3a překreslit tak, jak je uvedeno na obr. 2.2.4b. Celkový odpor obvodu určíme pomocí vztahu

$$R_{AB}' = R_1 + R_2 = \frac{12}{7}R + \frac{2}{3}R = \frac{50}{21}R.$$

$R_1$  a  $R_2$  jsme si určili níže:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{4R'}, \quad \text{z čehož} \quad R_1 = \frac{12}{7}R,$$

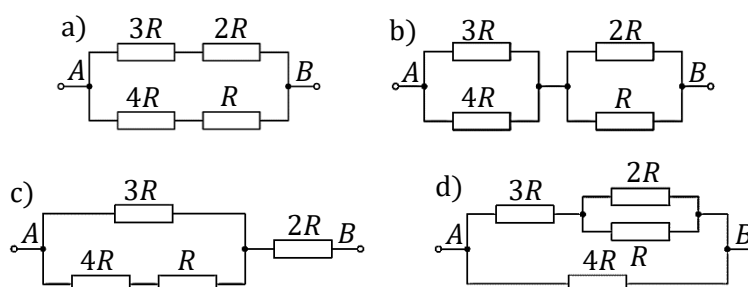
$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R'}, \quad \text{z čehož} \quad R_2 = \frac{2}{3}R.$$

**2 body**

Z výrazu  $R_{AB} = \frac{5}{2}R$  můžeme vyjádřit  $R = \frac{2}{5}R_{AB}$  a dosadit do výrazu  $R_{AB}' = \frac{50}{21}R$ .

Dostaneme  $R_{AB}' = \frac{50 \cdot 2}{21 \cdot 5}R_{AB} = \frac{50 \cdot 2}{21 \cdot 5} \cdot 105 \Omega = 100 \Omega$ .

**1 bod**



**Obrázek 2.2.4:** Elektrický obvod s rezistory, k řešení úlohy FO52B2-1.

- b) Je-li spínač rozepnut, pak obvod možno překreslit podle obr. 2.2.4.c. Označme na tomto obrázku celkový odpor levé části obvodu jako  $R_1$ . Platí

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{5R'}, \quad \text{z čehož} \quad R_1 = \frac{15}{8}R.$$

Potom  $R_{AB} = R_1 + 2R = \frac{31}{8}R$ .

**2 body**

Je-li spínač sepnut, pak je obvod možno překreslit podle obr. 2.2.4d. Pak platí

$$\frac{1}{R_{AB'}} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{3R + \frac{2}{3}R}, \quad \text{z čehož} \quad R_{AB'} = \frac{44}{23}R. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

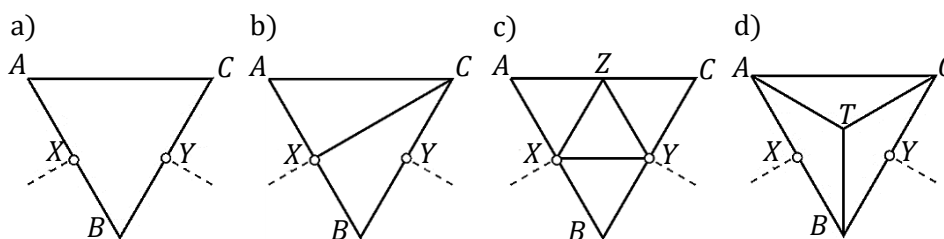
Poměr  $\frac{R_{AB}}{R_{AB'}} = \frac{\frac{31}{8}R}{\frac{44}{23}R} = 2,03.$  **1 bod**

### Příklad č. 12: F056B2-2: Vodivý trojúhelník

[31,27 %]

Z homogenního vodiče o stejném průřezu byl zhotoven rovnostranný trojúhelník  $ABC$ . Připojíme-li ohmmetr k bodům  $X$  a  $Y$  ve středech stran  $AB$  a  $BC$  (obr. 2.2.5a), naměříme odpor  $R$ . Jaký odpor naměříme mezi body  $X$  a  $Y$ ,

- spojíme-li stejným vodičem body  $X$  a  $C$  (obr. 2.2.5b),
- spojíme-li stejným vodičem středy všech stran (obr. 2.2.5c),
- spojíme-li stejným vodičem všechny vrcholy trojúhelníka s jeho těžištěm (obr. 2.2.5d)?



Obrázek 2.2.5: Vodivé trojúhelníky, k zadání úlohy F056B2-2.

### Řešení příkladu č. 12:

- a) Označme  $r$  odpor jedné strany rovnostranného trojúhelníku. Pak

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r}, \quad \text{z čehož} \quad r = \frac{3}{2}R.$$

Výška rovnostranného trojúhelníka má odpor  $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ .

Odpor mezi body  $X$  a  $C$  bez dolní větve vedené bodem  $B$  je

$$R_{XC} = \frac{\frac{3r}{2} \frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{3r}{2} + \frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{3r\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}}$$

Celkový odpor mezi body  $X$  a  $Y$ :

$$R_{XY} = \frac{(R_{XC} + \frac{r}{2})r}{R_{XC} + \frac{r}{2} + r} = \frac{(\frac{3r\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} + \frac{r}{2})r}{\frac{3r\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} + \frac{r}{2} + r} = \frac{3+4\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}R \doteq 0,77R. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- b) Odpor mezi body  $X$  a  $Z$  v trojúhelníku  $AZX$  je stejný jako odpor mezi body  $Z$  a  $Y$  v trojúhelníku  $ZYC$ :

$$R_{AXZ} = \frac{r}{r + \frac{r}{2}} = \frac{r}{3} = R_{ZYC}.$$

Pro odpor mezi body  $X$  a  $Y$  pak platí:

$$\frac{1}{R_{XY}} = \frac{3}{2r} + \frac{2}{r} + \frac{1}{r}, \quad \text{z čehož} \quad R_{XY} = \frac{2}{9}r = \frac{1}{3}R \doteq 0,33R. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Protože síť je souměrná podle osy procházející body  $T$  a  $B$ , budou mít tyto body při měření stejný potenciál a odpor mezi nimi nemusíme uvažovat. Odpor mezi body  $A$  a  $C$  bez dolní větve vedené bodem  $B$  je

$$R_{AC} = \frac{\frac{2r\sqrt{3}}{3}r}{\frac{2r\sqrt{3}}{3}+r} = \frac{2r\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}$$

Mezi body  $X$  a  $Y$  je pak odpor

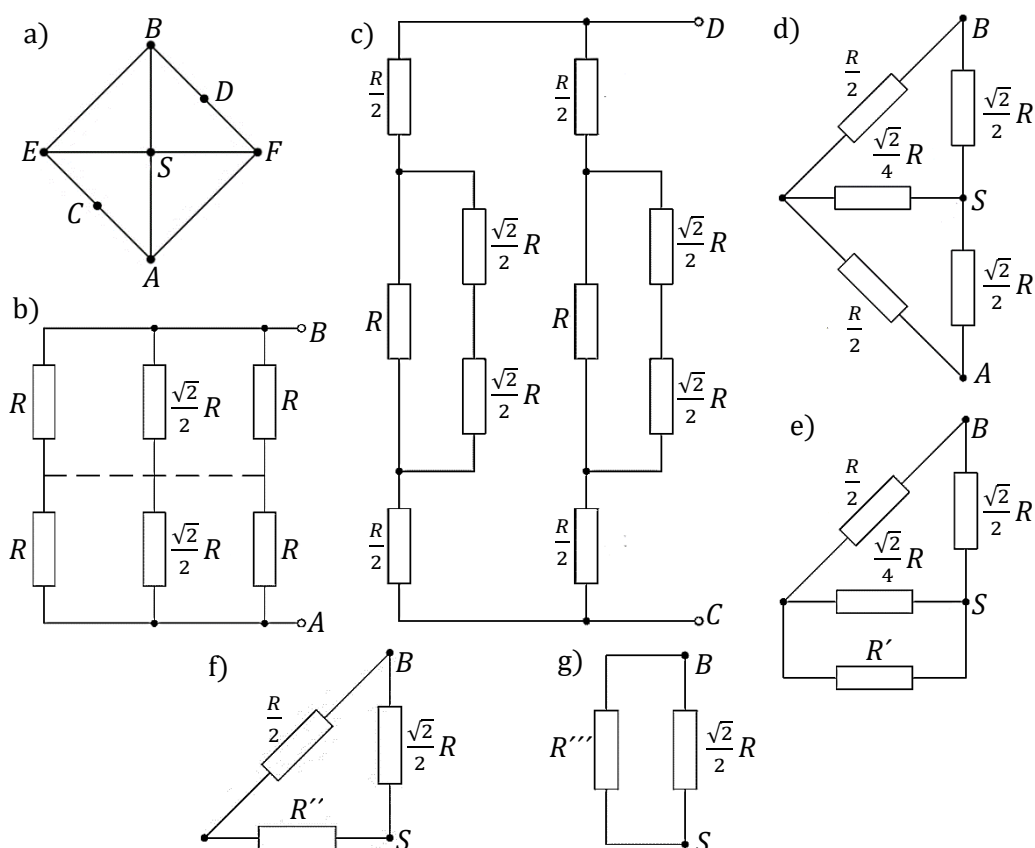
$$R_{XY} = \frac{(R_{AC}+r)r}{R_{AC}+2r} = \frac{\left(\frac{2r\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}+r\right)r}{\frac{2r\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}+2r} = \frac{3+4\sqrt{3}}{6+6\sqrt{3}}r = \frac{3+4\sqrt{3}}{4+4\sqrt{3}}R = \frac{9-\sqrt{3}}{8}R \doteq 0,91R. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

### Příklad č. 13: FO51B2-4: Hrátky se čtvercem

[19,39 %]

Na obr. 2.2.6a je znázorněn drátěný čtverec s úhlopříčkami. Velikost odporu strany čtverce je  $R$ , všechny vodiče jsou ze stejného materiálu a mají stejně velký průřez. Určete

- Velikost elektrického odporu mezi body  $A$  a  $B$ ,
- velikost elektrického odporu mezi body  $C$  a  $D$ , které leží ve středech stran čtverce,
- velikost elektrického odporu mezi body  $B$  a  $S$ .



Obrázek 2.2.6: Hrátky se čtvercem, k úloze FO51B2-4: (a) k zadání, (b-g) k řešení.

**Řešení příkladu č. 13:**

- a) Připojíme-li zdroj k bodům  $A$  a  $B$ , mají body  $E$ ,  $S$  a  $F$  stejný potenciál. Můžeme tedy spoje  $ES$  a  $SF$  vypustit, protože jimi neprochází žádný proud. Nakreslíme náhradní schéma zapojení (obr. 2.2.6b). Platí

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{\sqrt{2}R} + \frac{1}{2R}, \quad \text{z čehož} \quad R_{AB} = (2 - \sqrt{2})R = 0,59R. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Vzhledem k symetrii můžeme větve  $ASF$  a  $ESB$  v bodě  $S$  od sebe oddělit a nakreslit náhradní schéma zapojení (obr. 2.2.6c). Dostaneme dvě paralelně spojené větve o stejném odporu  $R''$ . Platí

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{2}R}, \quad \text{z čehož} \quad R' = (2 - \sqrt{2})R.$$

Potom

$$R'' = \frac{R}{2} + (2 - \sqrt{2})R + \frac{R}{2} = (3 - \sqrt{2})R,$$

z čehož

$$R_{CD} = \frac{R''}{2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}R = 0,79R. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) „Překlopíme“ pravou část obvodu podle osy souměrnosti  $AB$  doleva. Paralelní kombinací rezistorů  $R$ ,  $R$  dostaneme  $\frac{R}{2}$ ; paralelní kombinací rezistorů o odporu  $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}R$  dostaneme  $\frac{\sqrt{2}}{4}R$ . Náhradní schéma takto vzniklého obvodu je uvedeno na obr. 2.2.6d. Toto náhradní schéma dále překreslíme dle obr. 2.2.6e. Velikost odporu  $R'$  je z tohoto obrázku dána vztahem

$$R' = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{\sqrt{2}+1}{2}R.$$

Dalším zjednodušením obvodu z obr. 2.2.6e vznikne obvod na obr. 2.2.6f, kde velikost odporu  $R''$  je dána vztahem

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R'} + \frac{4}{\sqrt{2}R'}$$

z čehož po dosazení za  $R'$  a úpravě dostaneme

$$R'' = \frac{(2+\sqrt{2})R}{2(3\sqrt{2}+2)}$$

Tento obvod dále zjednodušíme dle obr. 2.2.6g, kde

$$R''' = R'' + \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{2}+4}{7}R.$$

Nakonec můžeme psát

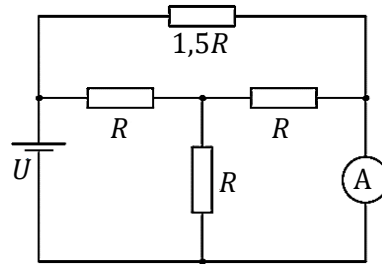
$$\frac{1}{R_{BS}} = \frac{1}{R'''} + \frac{2}{\sqrt{2}R'} \quad \text{z čehož} \quad R_{BS} = \frac{(4-\sqrt{2})}{7}R = 0,37R. \quad \mathbf{5 \text{ bodů}}$$

## 2.2.2.2 Elektrické obvody

### Příklad č. 14: F046B2-3: Měříme v obvodu s rezistory

[34,75 %]

- a) Jaký proud naměříme ampérmetrem zapojeným v obvodu na obr. 2.2.7? Odpor ampérmetru je zanedbatelný.
- b) Ampérmetr nahradíme voltmetrem. Jaké na něm bude napětí, jestliže jeho odpor je mnohem větší než odpory rezistorů a proud procházející voltmetrem je zanedbatelný?



Obrázek 2.2.7: Obvod s rezistory, zadání k úloze F046B2-3.

### Řešení příkladu č. 14:

- a) Proudů v síti se nezmění, jestliže ampérmetr nahradíme zkratem a schéma překreslíme podle obr. 2.2.8a. Celkový odpor obvodu je

$$R_c = \frac{1,5R(R+0,5R)}{R+(1,5R+0,5R)} = \frac{3}{4}R.$$

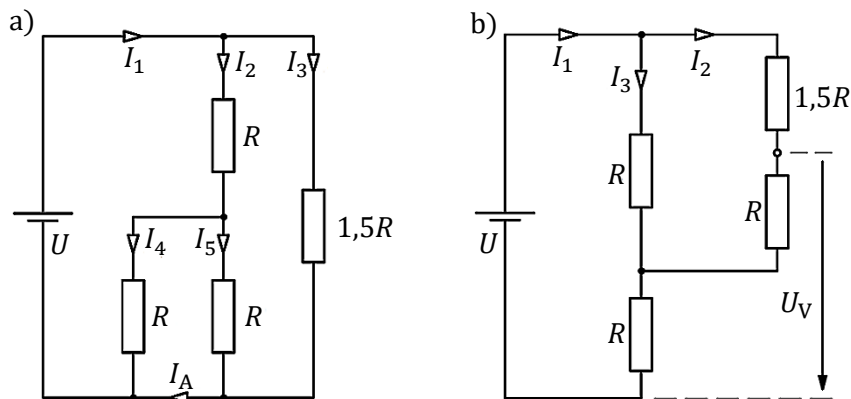
Proudy v jednotlivých větvích určíme pomocí Ohmova zákona a prvního Kirchhoffova zákona:

$$I_1 = \frac{U}{R_c} = \frac{4U}{3R}, \quad I_3 = \frac{U}{1,5R} = \frac{2U}{3R} = 0,5I_1,$$

$$I_2 = I_1 - I_3 = 0,5I_1 = \frac{2U}{3R}, \quad I_4 = I_5 = 0,5I_2 = \frac{U}{3R},$$

$$I_A = I_3 + I_5 = \frac{3U}{3R} = \frac{U}{R}.$$

5 bodů



Obrázek 2.2.8: Obvod s rezistory, k řešení úlohy F046B2-3.

- b) Proud v síti se nezmění, jestliže voltmetr odpojíme a obvod překreslíme podle obr. 2.2.8b. Celkový odpor obvodu je

$$R_c = R + \frac{2,5R \cdot R}{3,5R} = \frac{12}{7}R.$$

Jednotlivými větvemi procházejí proudy

$$I_1 = \frac{U}{R_c} = \frac{7U}{12R}, \quad I_3 = \frac{U - RI_1}{R} = \frac{U}{R} - I_1 = \frac{U}{R} \left(1 - \frac{7}{12}\right) = \frac{5U}{12R},$$

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{U}{6R}.$$

Mezi body, kam byl připojen voltmetr, je napětí

$$U_V = RI_1 + RI_2 = \frac{9}{12}U = \frac{3}{4}U.$$

**5 bodů**

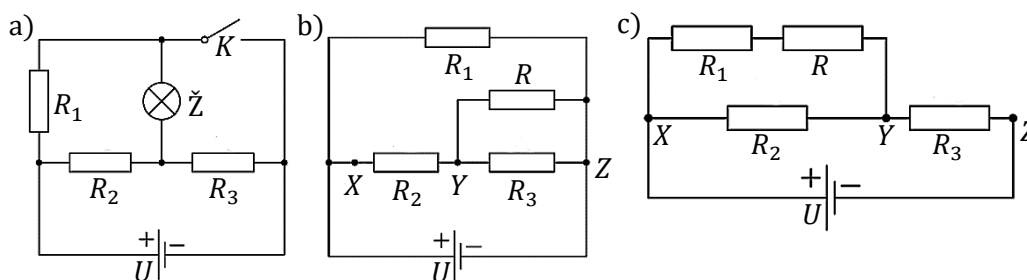
### Příklad č. 15: FO47B2-3: Elektrický obvod se žárovkou

**[24,14 %]**

Na obr. 2.2.9a je znázorněn elektrický obvod obsahující žárovku o odporu  $R$ . Velikosti odporů rezistorů na obr. 2.2.9a jsou  $R_1 = R_3 = 90 \Omega$ ,  $R_2 = 180 \Omega$ , napětí zdroje  $U = 54 \text{ V}$ , vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný.

- Vyjádřete napětí na žárovce  $U_S$  při zapnutém klíči jako funkci odporu  $R$  žárovky.
- Vyjádřete napětí na žárovce  $U_S'$  při vypnutém klíči jako funkci odporu  $R$  žárovky.
- Určete hodnotu elektrického odporu žárovky a napětí na žárovce, jestliže se napětí na žárovce při zapnutém nebo vypnutém klíči  $K$  nezmění.

Úlohy a), b) řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty, úlohu c) řešte pouze pro zadané hodnoty.



**Obrázek 2.2.9:** Obvod se žárovkou, k úloze FO47B2-3: (a) k zadání, (b-c) k řešení.

### Řešení příkladu č. 15:

- a) Je-li klíč  $K$  zapnut, je možno obvod překreslit tak, jak je znázorněno na obr. 2.2.9b. Velikost odporu mezi body  $Y, Z$  je dána vztahem

$$R_{YZ} = \frac{RR_3}{R+R_3}.$$

Velikost odporu mezi body  $X, Z$  je dána vztahem

$$R_{XZ} = R_2 + R_{YZ} = R_2 + \frac{RR_3}{R+R_3} = \frac{(R_2+R_3)R+R_2R_3}{R+R_3}.$$

Pro poměr napětí pak platí:



$$\frac{U_S}{U} = \frac{U_{YZ}}{U_{XZ}} = \frac{R_{YZ}}{R_{XZ}} = \frac{\frac{RR_3}{R+R_3}}{\frac{(R_2+R_3)R+R_2R_3}{R+R_3}} = \frac{RR_3}{(R_2+R_3)R+R_2R_3}.$$

Napětí na spotřebiči je pak dáno vztahem

$$U_S = \frac{RR_3}{(R_2+R_3)R+R_2R_3} U.$$

Pro dané hodnoty

$$U_S = \frac{90\{R\}}{270\{R\}+180 \cdot 90} U = \frac{\{R\}}{3(\{R\}+60)} U. \quad (2.2.2)$$

**3 body**

b) Je-li klíč  $K$  vypnut, můžeme schéma z obr. 2.2.9a překreslit tak, jak je znázorněno na obr. 2.2.9c. Pak můžeme psát

$$R_{XY} = \frac{(R_1+R)R_2}{R_1+R_2+R},$$

$$R_{XZ} = R_3 + R_{XY} = R_3 + \frac{(R_1+R)R_2}{R_1+R_2+R} = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+(R_2+R_3)R}{R_1+R_2+R}.$$

Pro poměr napětí pak platí

$$\frac{U_{XY}}{U} = \frac{U_{XY}}{U_{XZ}} = \frac{R_{XY}}{R_{XZ}} = \frac{R_1R_2+RR_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+(R_2+R_3)R'}$$

z čehož

$$U_{XY} = \frac{R_1R_2+RR_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+(R_2+R_3)R} U.$$

Dále pak můžeme psát

$$\frac{U_S'}{U_{XY}} = \frac{R}{R_1+R'}$$

$$U_S' = \frac{R}{R_1+R'} \frac{(R_1+R)R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+(R_2+R_3)R} U = \frac{RR_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+(R_2+R_3)R} U.$$

Pro dané hodnoty

$$U_S' = \frac{2\{R\}}{3(150+\{R\})} U. \quad (2.2.3)$$

**4 body**

c) Dle zadání má platit

$$U_S = U_S'.$$

Po dosazení vztahů (2.2.2) a (2.2.3) do výše uvedeného vztahu dostaneme

$$\frac{\{R\}}{3(\{R\}+60)} U = \frac{2\{R\}}{3(150+\{R\})} U.$$

po úpravě

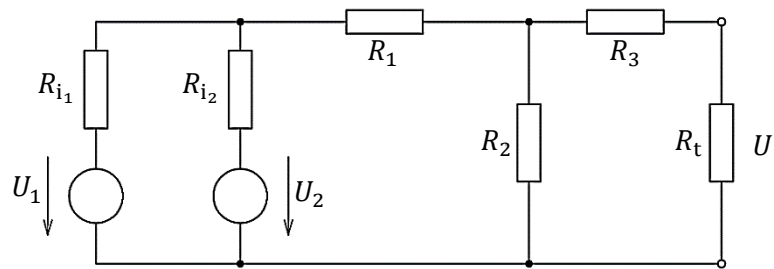
$$150 + \{R\} = 2(\{R\} + 60), \quad \text{z čehož} \quad R = 30 \Omega.$$

Po dosazení do vztahu (2.2.2) nebo (2.2.3) dostaneme  $U_S = U_S' = 6 \text{ V}$ . **3 body**

**Příklad č. 16: FO45B2-4: Elektrický obvod II.****[18,46 %]**

Na obr. 2.2.10 je zakreslen elektrický obvod skládající se ze dvou paralelně zapojených zdrojů o napětích  $U_1 = 12,0 \text{ V}$ ,  $U_2 = 10,0 \text{ V}$  a vnitřních odporech  $R_{i1} = 1,0 \Omega$ ,  $R_{i2} = 1,0 \Omega$ . V obvodu jsou též zapojeny teplotně nezávislé rezistory  $R_1 = 2,0 \Omega$ ,  $R_2 = 10,0 \Omega$ ,  $R_3 = 4,0 \Omega$  a teplotně závislý rezistor  $R_t$  o odporu  $R_0 = 10,0 \Omega$  při teplotě  $0^\circ \text{C}$ . Teplotní součinitel odporu tohoto rezistoru je  $4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

- Zjednodušte schéma zapojení tak, že zdroje  $U_1$ ,  $U_2$  nahradíte jediným o napětí  $U_0$  a vnitřním odporem  $R_i$  dle Millmanovy poučky.
- Pomocí Théveniovy poučky určete proud  $I$  protékající rezistorem  $R_t$  při teplotě  $0^\circ \text{C}$  a napětí  $U$  na rezistoru.
- Zapište vztah  $I = I(t)$  vyjadřující teplotní závislost proudu protékajícího rezistorem na teplotě.
- Určete, při jaké teplotě protéká rezistorem  $R_t$  proud  $I' = 0,5 \text{ A}$ .
- Určete proud protékající rezistorem  $R_t$  při teplotě  $0^\circ \text{C}$  užitím metody smyčkových proudů.



**Obrázek 2.2.10:** Elektrický obvod, k zadání úlohy FO45B2-4.

**Řešení příkladu č. 16:**

- Obvod překreslíme dle obr. 2.2.11a. Dle Millmanovy poučky platí

$$U_0 = \frac{U_1 R_{i1} + U_2 R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}},$$

$$R_i = \frac{R_{i1} R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}}.$$

Pro dané hodnoty  $U_0 = 11 \text{ V}$ ,  $R_i = 0,50 \Omega$ .

**1 bod**

- Schéma dále zjednodušíme užitím Théveniovy poučky (obr. 2.2.11b):

$$U_{0T} = U_0 \frac{R_2}{R_i + R_2 + R_1} = 8,8 \text{ V},$$

$$R_{iT} = R_3 + \frac{R_2(R_1 + R_i)}{R_i + R_2 + R_1} = 6,0 \Omega$$

Potom

$$I = \frac{U_{0T}}{R_{iT} + R_t} = 0,55 \text{ A},$$

$$U = \frac{U_{0T} R_t}{R_{iT} + R_t} = 5,5 \text{ V}.$$

**3 body**

- c)  $I = \frac{U_{0T}}{R_{iT} + R_t}$ , za  $R_t$  dosadíme  $R_t = R_0(1 + \alpha\Delta t)$ , kde  $R_0$  je odpor teplotně závislého rezistoru při teplotě  $t = 0$  °C. Potom

$$I = \frac{U_{0T}}{R_{iT} + R_0(1 + \alpha\Delta t)}. \quad (2.2.4)$$

**1 bod**

- d) Ze vztahu (2.2.4) vyjádříme  $t$ :

$$t = \frac{U_{0T} - I'R_{iT} - I'R_0}{I'R_0\alpha} = 40 \text{ °C}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

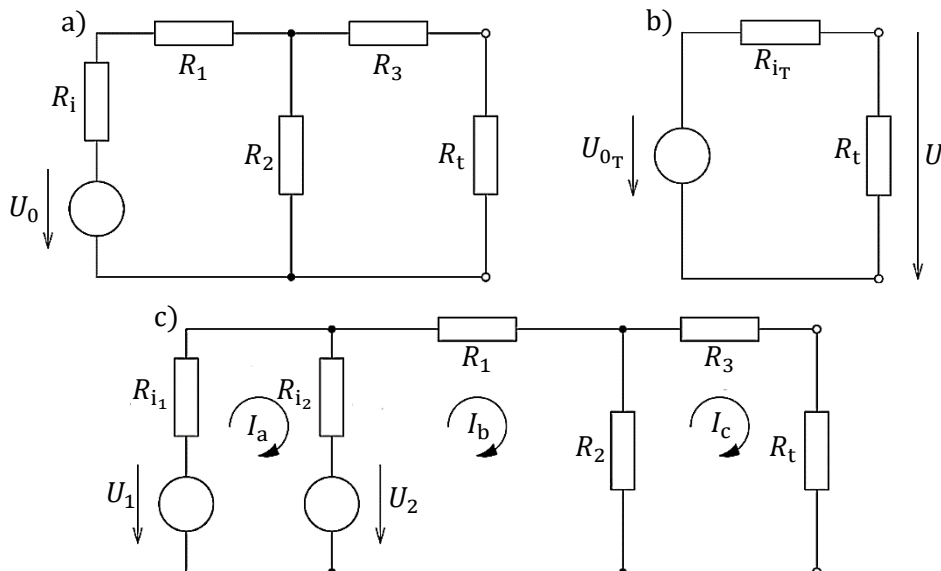
- e) Užitím metody smyčkových proudů (obr. 2.2.11c):

$$\begin{aligned} R_{i_2}(I_a - I_b) + U_2 - U_1 + R_{i_1}I_a &= 0, \\ R_1I_b + R_2(I_b - I_c) - U_2 + R_{i_2}(I_b - I_a) &= 0, \\ R_3I_c + R_tI_c + R_2(I_c - I_b) &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení konkrétních hodnot napětí a odporů dostaneme pro číselné hodnoty proudů soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2I_a - I_b &= 2, \\ -I_a + 13I_b - 10I_c &= 10, \\ -10I_b + 24I_c &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme jeden z proudů  $I_c = 0,55$  A, což je také hledaný proud protékající rezistorem  $R_t$ . **4 body**



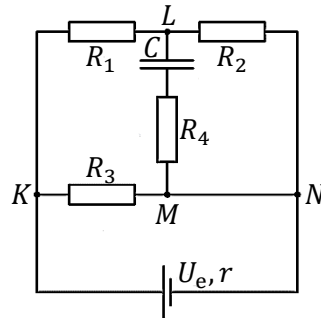
**Obrázek 2.2.11:** Elektrický obvod, k řešení úlohy FO45B2-4.

**Příklad č. 17: FO55B2-2: Obvod s kondenzátorem****[15,08 %]**

Čtyři rezistory o odporech  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R = 20 \Omega$  a kondenzátor o kapacitě  $C = 10 \mu\text{F}$  jsou trvale zapojeny ke zdroji o elektromotorickém napětí  $U_e = 12 \text{ V}$  a vnitřním odporu  $r = 2 \Omega$  (obr. 2.2.12). Určete

- náboj  $Q$  na kondenzátoru,
- jak se změní výsledky, když jeden z rezistorů nahradíme rezistorem o odporu  $2R$ .

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty.



**Obrázek 2.2.12:** Obvod s kondenzátorem, k zadání úlohy FO55B2-2.

**Řešení příkladu č. 17:**

- Protože větví  $LM$  proud neprochází a všechny odpory mají stejnou hodnotu  $R$ , je celkový odpor obvodu připojeného ke zdroji

$$R_c = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3}R.$$

Celkový proud zdroje  $I = \frac{U_e}{\frac{2}{3}R + r}$  se dělí do větví  $KLN$  a  $KMN$  v poměru 1:2. Na odporu

$R_2$  a tedy i na kondenzátoru je napětí

$$U_{LN} = R \frac{I}{3} = \frac{U_e R}{2R + 3r}.$$

Náboj na kondenzátoru je

$$Q = C U_{LN} = \frac{C U_e R}{2R + 3r} = 52 \mu\text{C}.$$

**5 bodů**

- Nahradíme-li rezistor  $R_4$  rezistorem o odporu  $2R$ , výsledek se nezmění. Pokud nahradíme rezistor  $R_3$ , je celkový odpor  $R$ , celkový proud je  $I = \frac{U_e}{R + r}$ , proud mezi body  $L$  a  $N$  je  $\frac{I}{2}$  a náboj na kondenzátoru je

$$Q = C R \frac{I}{2} = \frac{C U_e R}{2(R + r)} = 55 \mu\text{C}.$$

Nahradíme-li rezistor  $R_2$ , je celkový odpor  $\frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R$ , celkový proud je  $I = \frac{U_e}{\frac{3}{4}R + r}$ ,

proud mezi body  $L$  a  $N$  je  $\frac{I}{4}$  a náboj na kondenzátoru je

$$Q = 2C R \frac{I}{4} = \frac{C U_e R}{\frac{3}{2}R + 2r} = 71 \mu\text{C}.$$

Nahradíme-li rezistor  $R_1$ , je celkový odpor  $\frac{3R \cdot R}{3R+R} = \frac{3}{4}R$ , celkový proud  $I = \frac{U_e}{\frac{3}{4}R+r}$ ,

proud mezi body  $L$  a  $N$  je  $\frac{I}{4}$  a náboj na kondenzátoru je

$$Q = CR \frac{I}{4} = \frac{CU_e R}{3R+4r} = 35 \mu\text{C}.$$

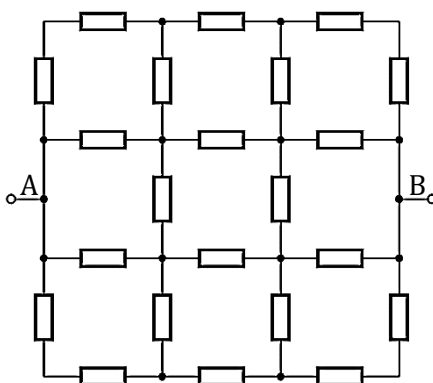
**5 bodů**

**Příklad č. 18: FO57B2-4: Proudů v rezistorech**

**[14,51 %]**

22 stejných rezistorů, každý s odporem  $R$ , je zapojeno podle obr. 2.2.13. Určete

- celkový odpor mezi body A a B,
- proudy v jednotlivých rezistorech, připojíme-li k bodům A a B ideální zdroj s elektromotorickým napětím  $U_e$ .

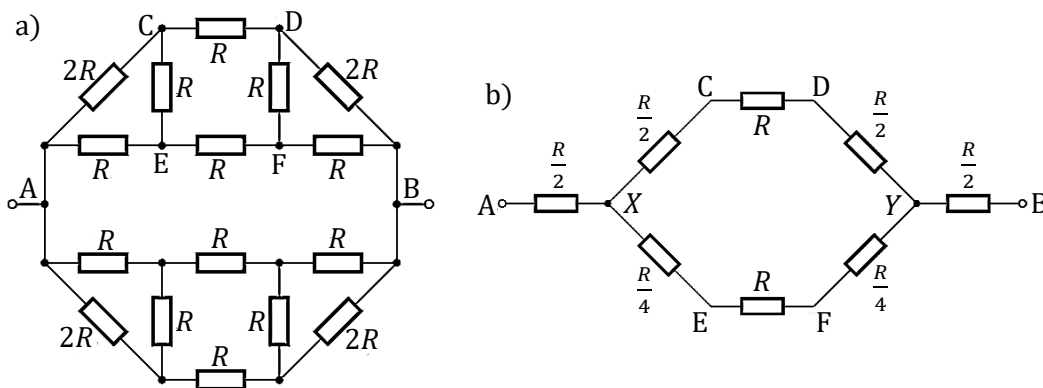


**Obrázek 2.2.13:** Rezistorová síť, k zadání úlohy FO57B2-4.

**Řešení příkladu č. 18:**

- Vzhledem k souměrnosti obvodu nebude dvěma prostředními rezistory v ose AB procházet proud a můžeme je ze sítě vynechat. Schéma překreslíme (obr. 2.2.14a). Pro výpočet odporu v horní polovině sítě můžeme použít transfiguraci trojúhelníkové hvězdy (obr. 2.2.14b). Odpor v horní polovině sítě pak bude  $R_H = \frac{13}{7}R$  a celkový odpor mezi body A a B pak bude  $R_c = \frac{R_H}{2} = \frac{13}{14}R$ .

**5 bodů**



**Obrázek 2.2.14:** Rezistorová síť, k řešení části a) úlohy FO57B2-4.

b) Užitím náhradního schématu při transfiguraci trojúhelník-hvězda určíme potenciály v jednotlivých uzlových bodech. Zvolíme-li potenciál bodu B roven nule, pak postupně:

$$\varphi_Y = \frac{\frac{R}{2}}{R_H} U_e = \frac{7}{26} U_e, \quad \varphi_X = U_e - \frac{7}{26} U_e = \frac{19}{26} U_e, \quad \varphi_D = \frac{5}{13} U_e,$$

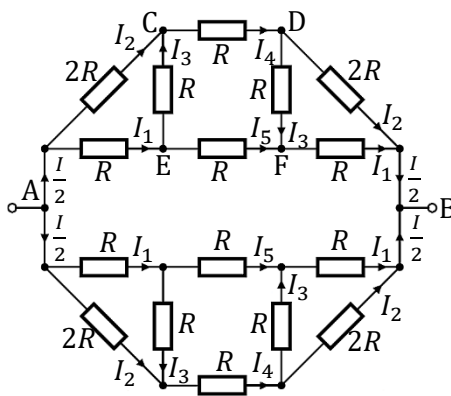
$$\varphi_C = \frac{8}{13} U_e, \quad \varphi_F = \frac{9}{26} U_e, \quad \varphi_E = \frac{17}{26} U_e, \quad \varphi_A = U_e.$$

Mezi body C a D prochází tedy proud  $I_{CD} = I_4 = \frac{\varphi_C - \varphi_D}{R} = \frac{3U_e}{13R}$ , mezi body E a F prochází proud  $I_{EF} = I_5 = \frac{\varphi_E - \varphi_F}{R} = \frac{4U_e}{13R}$ . Protože potenciál bodu C je menší než potenciál bodu E, prochází mezi těmito body proud  $I_{EC} = I_3 = \frac{\varphi_E - \varphi_C}{R} = \frac{1U_e}{26R}$  od bodu E k bodu C, zatímco stejně velký proud prochází od bodu D k bodu F v pravé části schématu. Vrátime se k původnímu schématu:

$$I_{AC} = I_2 = I_4 - I_3 = \frac{U_e - \varphi_C}{2R} = \frac{5U_e}{26R},$$

$$I_{AE} = I_1 = I_3 + I_5 = \frac{U_e - \varphi_E}{R} = \frac{9U_e}{26R}.$$

**5 bodů**



**Obrázek 2.2.15:** Rezistorová síť, k alternativnímu řešení úlohy F057B2-4.

*Alternativní řešení:* Pro výpočet proudů využijeme Kirchhoffovy zákony. Vzhledem k symetrii obvodu je neznámých proudů jen pět, potřebujeme tedy 5 rovnic.

$$\frac{I}{2} = I_1 + I_2,$$

$$I_2 = I_4 - I_3,$$

$$I_1 - I_3 = I_5,$$

$$2RI_2 - RI_3 - RI_1 = 0, \quad \text{z čehož} \quad I_1 = 2I_2 - I_3,$$

$$RI_4 + 2RI_3 - RI_5 = 0, \quad \text{z čehož} \quad I_4 + 2I_3 = I_5.$$

Postupnou úpravou určíme:  $I_1 = \frac{9}{28}I$ ,  $I_2 = \frac{5}{28}I$ ,  $I_3 = \frac{1}{28}I$ ,  $I_4 = \frac{3}{14}I$ ,  $I_5 = \frac{2}{7}I$ .

Z větve A-E-F-B pro napětí mezi body A a B dostáváme:

$$U_e = 2RI_1 + RI_5 = \frac{13}{14}RI, \quad \text{z čehož} \quad R_c = \frac{13}{14}R.$$

Pro jednotlivé proudy pak platí  $I_1 = \frac{9}{28}I = \frac{9U_e}{26R}$ ,  $I_2 = \frac{5}{28}I = \frac{5U_e}{26R}$ ,  $I_3 = \frac{1}{28}I = \frac{U_e}{26R}$ ,  
 $I_4 = \frac{3}{14}I = \frac{3U_e}{13R}$ ,  $I_5 = \frac{2}{7}I = \frac{4U_e}{13R}$ .

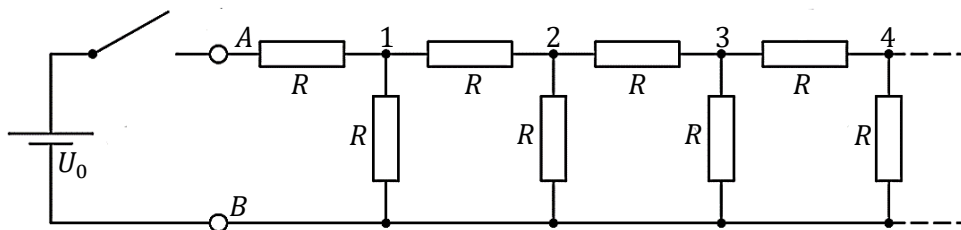
Jiné alternativní řešení je dohledatelné na oficiálních stránkách FO.

**Příklad č. 19: FO41A2-4: Nekonečný řetěz rezistorů**

**[9,38 %]**

Nekonečný řetěz rezistorů o stejném odporu  $R$  je zapojen podle obr. 2.2.16.

- Jaký odpor  $R_x$  bychom naměřili ohmmetrem připojeným ke vstupním svorkám  $A$  a  $B$ ?
- Ke vstupním svorkám připojíme zdroj o svorkovém napětí  $U_0$ . Jaké napětí  $U_1$  naměříme mezi uzlem 1 a svorkou  $B$ ?
- Jaké pořadové číslo  $i$  má nejbližší uzel, jehož napětí  $U_i$  vzhledem ke svorce  $B$  je menší než  $0,01 U_1$ ?



**Obrázek 2.2.16:** Nekonečný řetěz rezistorů, k zadání úlohy FO41A2-4.

**Řešení příkladu č. 19:**

- Odpor mezi svorkami  $A, B$  by se nezměnil, kdybychom na začátek řetězce přidali další dva rezistory. Můžeme tedy použít náhradní schéma podle obr. 2.2.17a, ze kterého odvodíme

$$R_x = R + \frac{RR_x}{R+R_x}.$$

Úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici

$$R_x^2 - RR_x - R^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen

$$R_x = \frac{R(1+\sqrt{5})}{2}.$$

**4 body**

- Schéma na obr. 2.2.17a představuje dělič napětí, na jehož vstupu je napětí  $U_0$  a na výstupu (uzel 1 a svorka  $B$ ) je napětí  $U_1$ . Platí:

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{RR_x}{R+R_x}}{R + \frac{RR_x}{R+R_x}}, \quad \frac{RR_x}{R+R_x} = \frac{R \frac{R(1+\sqrt{5})}{2}}{R + \frac{R(1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{R(1+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}} = R \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{R \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{R + R \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \doteq 0,382, \quad \text{z čehož} \quad U_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} U_0 \doteq 0,382 U_0. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Pro určení napětí  $U_2$  překreslíme schéma podle obr. 2.2.17b. Řetěz rezistorů napravo od uzlu 1 se opět chová jako dělič napětí z obr. 2.2.17a. Proto

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_1}{U_0} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}.$$

Obdobně bychom postupovali u dalších uzlů. Vidíme, že uzlová napětí tvoří geometrickou posloupnost

$$U_i = U_0 q^i, \quad \text{přičemž} \quad q = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \doteq 0,382.$$

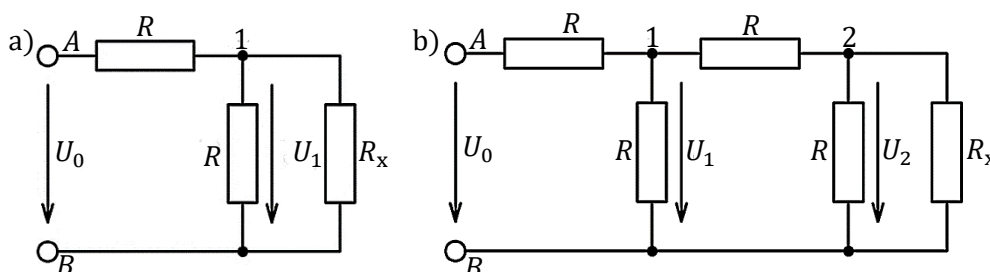
Pořadové číslo nejbližšího uzlu, kde napětí klesne pod  $0,01U_0$ , určíme řešením nerovnice:

$$U_i = U_0 q^i < 0,01U_0, \quad q^i < 0,01, \quad i \log q < -2,$$

$$i > \frac{-2}{\log q} \doteq \frac{-2}{\log 0,382} \doteq 4,8.$$

Podmínce vyhovuje  $i = 5$ .

**3 body**

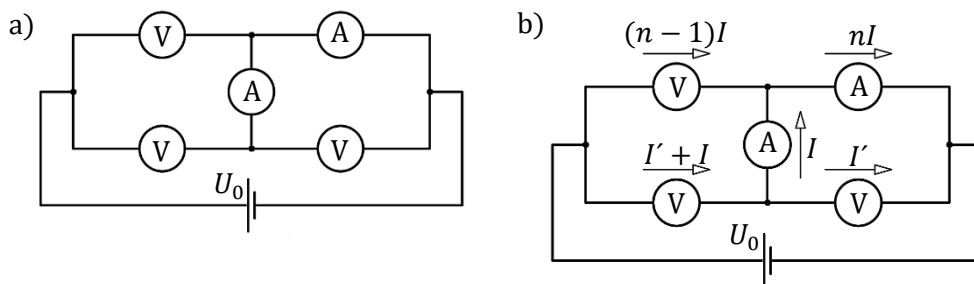


**Obrázek 2.2.17:** Nekonečný řetěz rezistorů, k řešení úlohy FO41A2-4.

**Příklad č. 20: FO49B2-3: Můstkové zapojení**

**[4,38 %]**

Ke galvanickému článku je připojena můstková síť sestavená ze tří stejných voltmetrů a dvou stejných miliampérmetrů podle obr. 2.2.18a. Svorkové napětí článku je  $U_0$ . Víme ještě, že údaj jednoho miliampérmetru je  $n$ krát větší než údaj druhého. Za předpokladu, že odpor voltmetru je větší než odpor miliampérmetru, určete údaje každého z voltmetrů. Úlohu řešte obecně a pro hodnoty  $U_0 = 1,3 \text{ V}$ ,  $n = 3$ .



**Obrázek 2.2.18:** Můstkové zapojení, k úloze FO49B2-3: (a) k zadání, (b) k řešení.



### Řešení příkladu č. 20:

Vzhledem k polaritě zdroje a vzhledem k tomu, že odpor voltmetru je větší než odpor miliampérmetru, můžeme předpokládat, že proudy ve větvích sítě budou mít směry vyznačené na obr. 2.2.18b. Proud procházející miliampérmetrem v diagonále můstku označíme  $I$ . Druhým miliampérmetrem prochází proud větší o proud horního voltmetru. Podle předpokladu úlohy má velikost  $nI$  a horním voltmetrem prochází podle prvního Kirchhoffova zákona proud  $(n - 1)I$ . Proudů procházející zbývajícími voltmetry označme v souladu s prvním Kirchhoffovým zákonem  $I'$  a  $I' + I$ .

Označme  $R_V$ ,  $R_A$  odpory voltmetru a miliampérmetru. Podle druhého Kirchhoffova zákona

$$(I' + I)R_V + IR_A = (n - 1)IR_V, \quad (2.2.5)$$

$$I'R_V = IR_A + nIR_A \quad (2.2.6)$$

**3 body**

Dosazením  $I'R_V$  (2.2.6) do (2.2.5) a úpravou dostaneme

$$(n + 2)IR_A = (n - 2)IR_V, \quad \text{z čehož} \quad \frac{R_V}{R_A} = \frac{n+2}{n-2} = 5.$$

Jednotlivými voltmetry procházejí proudy

$$(n - 1)I = \frac{(n-1)(n+2)}{n+2} I = 2I,$$

$$I' = I(n + 1) \frac{R_A}{R_V} = \frac{(n+1)(n-2)}{n+2} I = \frac{4}{5} I,$$

$$I + I' = \left( \frac{(n+1)(n-2)}{n+2} + 1 \right) I = \frac{n^2}{n+2} I = \frac{9}{5} I.$$

Napětí na voltmetrech jsou tedy v poměru

$$U_1 : U_2 : U_3 = (n - 1)(n + 2) : (n + 1)(n - 2) : n^2 = 10 : 4 : 9. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

Řešením soustavy rovnic

$$U_2 + U_3 = U_0, \quad U_2 : U_3 = (n + 1)(n - 2) : n^2,$$

dostaneme

$$U_3 = \frac{n^2}{(n+1)(n-2)+n^2} U_0 = \frac{9}{13} U_0 = 0,9 \text{ V}, \quad U_2 = \frac{(n+1)(n-2)}{(n+1)(n-2)+n^2} U_0 = \frac{4}{13} U_0 = 0,4 \text{ V}.$$

Zbývající napětí je

$$U_1 = \frac{(n-1)(n+2)}{n^2} U_3 = \frac{(n-1)(n+2)}{(n+1)(n-2)+n^2} U_0 = \frac{10}{13} U_0 = 1 \text{ V}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

## 2.2.2.3 Výkon, příkon, účinnost

### Příklad č. 21: F058A2-3: Dva elektrické kalorimetry

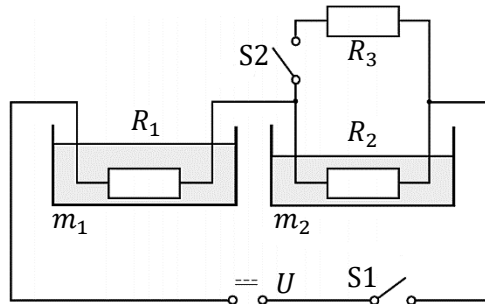
**[64,46 %]**

Topná tělesa dvou elektrických kalorimetrů jsou spojena sériově a připojena ke zdroji stejnosměrného napětí  $U = 15 \text{ V}$  se spínačem S1. Odpor prvního topného tělesa je  $R_1 = 4 \Omega$ , odpor druhého topného tělesa  $R_2 = 6 \Omega$ . K druhému topnému tělesu je paralelně připojen rezistor o odporu  $R_3 = 3 \Omega$  se spínačem S2. V prvním kalorimetru je voda o hmotnosti

$m_1 = 150$  g, v druhém voda o hmotnosti  $m_2 = 110$  g. Voda v obou kalorimetrech má stejnou počáteční teplotu. Měrná tepelná kapacita vody je  $4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Nyní sepne spínač S1 a za čas  $\tau_0 = 90$  s sepne i spínač S2.

- Určete dobu  $\tau$ , po kterou musí být spínač S2 sepnutý, aby se teplota vody v obou kalorimetrech vyrovnala.
- Určete přírůstek  $\Delta t$  teploty vody.

Tepelnou kapacitu každého kalorimetru, vnitřní odpor zdroje a odpor přívodních vodičů zanedbejte.



**Obrázek 2.2.19:** Dva elektrické kalorimetry, k úloze FO58A2-3.

### Řešení příkladu č. 21:

- Při rozepnutém spínači S2 mají topná tělesa elektrické příkony

$$P_1 = R_1 \left( \frac{U}{R_1 + R_2} \right)^2 = 9 \text{ W},$$

$$P_2 = R_2 \left( \frac{U}{R_1 + R_2} \right)^2 = 13,5 \text{ W}.$$

Při sepnutém spínači S2 je odpor paralelně spojených rezistorů

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 2 \Omega$$

a topná tělesa mají elektrické příkony

$$P_1' = R_1 \left( \frac{U}{R_1 + R_{23}} \right)^2 = 25 \text{ W},$$

$$P_2' = R_2 \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{U}{R_1 + R_{23}} \right)^2 = \frac{25}{6} \text{ W} = 4,17 \text{ W}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

Teplo přijaté vodou v každém kalorimetru v okamžiku vyrovnání teplot je

$$Q_1 = m_1 c \Delta t = P_1 \tau_0 + P_1' \tau, \quad (2.2.7)$$

$$Q_2 = m_2 c \Delta t = P_2 \tau_0 + P_2' \tau. \quad (2.2.8)$$

Ze vztahů plyne

$$\tau = \frac{m_1 P_2 - m_2 P_1}{m_2 P_1' - m_1 P_2'} \tau_0 = 44 \text{ s}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

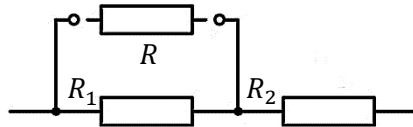
- Přírůstek teploty získáme z rovnice (2.2.7) nebo z rovnice (2.2.8):

$$\Delta t = \frac{P_1 \tau_0 + P_1' \tau}{m_1 c} = \frac{P_2 \tau_0 + P_2' \tau}{m_2 c} = 3,0 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

**Příklad č. 22: FO55A2-3: Příkon rezistoru****[46,76 %]**

K jednomu ze dvou sériově spojených rezistorů o stejném odporu  $R_1$  můžeme ze zdičky připojit třetí rezistor o odporu  $R$  (obr. 2.2.20). Soustava je napájena stejnosměrným zdrojem o elektromotorickém napětí  $U_e$  a se zanedbatelným vnitřním odporem.

- Určete elektrický příkon  $P$  třetího rezistoru, jestliže jeho odpor je  $R = 3R_1$ .
- Určete elektrický odpor  $R$  třetího rezistoru, jestliže požadujeme, aby jeho příkon byl aspoň  $\frac{U_e^2}{9R_1}$ .
- Určete elektrický odpor třetího rezistoru tak, aby jeho elektrický příkon byl maximální. Určete tento maximální příkon  $P_{\max}$ .
- Určete, při jakém odporu třetího rezistoru je účinnost zapojení největší, a určete tuto maximální účinnost  $\eta_{\max}$ . Účinností zapojení rozumíme poměr elektrického příkonu třetího rezistoru a elektrického příkonu celé soustavy.



**Obrázek 2.2.20:** Soustava rezistorů, k úloze FO55A2-3.

**Řešení příkladu č. 22:**

- Napětí na třetím rezistoru je  $U = \frac{R'}{R_c} U_e$ , kde  $R' = \frac{RR_1}{R+R_1}$  je odpor paralelně spojených rezistorů a

$$R_c = R' + R_1 = \frac{(2R+R_1)R_1}{R+R_1}$$

je celkový odpor soustavy. Elektrický příkon třetího rezistoru pak je

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{R'^2}{R_c^2 R} U_e^2 = \frac{R}{(2R+R_1)^2} U_e^2. \quad (2.2.9)$$

Dosazením  $R = 3R_1$  dostaneme hledaný příkon  $P = \frac{3U_e^2}{49R_1}$ . **2 body**

- Na základě rovnice (2.2.9) platí

$$\frac{R}{(2R+R_1)^2} U_e^2 \geq \frac{U_e^2}{9R_1}.$$

Úpravami dostaneme kvadratickou nerovnici

$$4R^2 - 5R_1R + R_1^2 \leq 0,$$

z níž pro nulové body plyne  $R = \frac{5R_1 \pm \sqrt{25R_1^2 - 16R_1^2}}{8}$ . Nulové body jsou  $R_1$  a  $\frac{R_1}{4}$ . Uvedené

nerovnici vyhovuje odpor  $R \in \langle \frac{R_1}{4}, R_1 \rangle$ . **2 body**

- Derivací závislosti (2.2.9) příkonu třetího rezistoru na jeho odporu dostaneme

$$\frac{dP}{dR} = \frac{(2R+R_1)^2 - 4R(2R+R_1)}{(2R+R_1)^4} U_e^2 = \frac{R_1 - 2R}{(2R+R_1)^3} U_e^2.$$

Derivace je nulová pro  $R = \frac{R_1}{2}$ . Pro  $R < \frac{R_1}{2}$  je kladná, pro  $R > \frac{R_1}{2}$  je záporná. Funkce (2.2.122) tedy v bodě  $R = \frac{R_1}{2}$  dosahuje maxima.

Dosazením dostaneme  $P_{\max} = \frac{U_e^2}{8R_1}$ .

**3 body**

d) Účinnost zapojení je

$$\eta = \frac{P}{P_c} = \frac{\frac{U^2}{R}}{\frac{U_e^2}{R_c^2}} = \frac{\frac{R}{(2R+R_1)^2} U_e^2}{\frac{R+R_1}{(2R+R_1)R_1} U_e^2} = \frac{R_1 R}{(2R+R_1)(R+R_1)} = \frac{R_1 R}{2R^2 + 3R_1 R + R_1^2}$$

Derivací dostaneme

$$\frac{d\eta}{dR} = \frac{R_1(2R+R_1)(R+R_1) - R_1 R(4R+3R_1)}{(2R+R_1)^2(R+R_1)^2} = \frac{R_1(R_1^2 - 2R^2)}{(2R+R_1)^2(R+R_1)^2}$$

Derivace je nulová pro  $R = \frac{R_1}{\sqrt{2}} \doteq 0,71R_1$ . Pro  $R < \frac{R_1}{\sqrt{2}}$  je kladná, pro  $R > \frac{R_1}{\sqrt{2}}$  je záporná.

Účinnost obvodu tedy pro  $R = \frac{R_1}{\sqrt{2}}$  dosahuje maxima.

Dosazením dostaneme  $\eta_{\max} = 3 - 2\sqrt{2} \doteq 0,17$ .

**3 body**

### Příklad č. 23: FO60B2-4: Krychle s rezistory

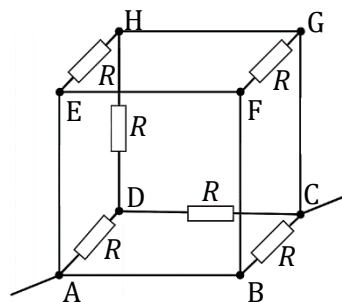
**[41,20 %]**

V šesti hranách drátěné krychle jsou zapojeny stejné rezistory (obr. 2.2.21), každý s odporem  $R = 100 \Omega$ .

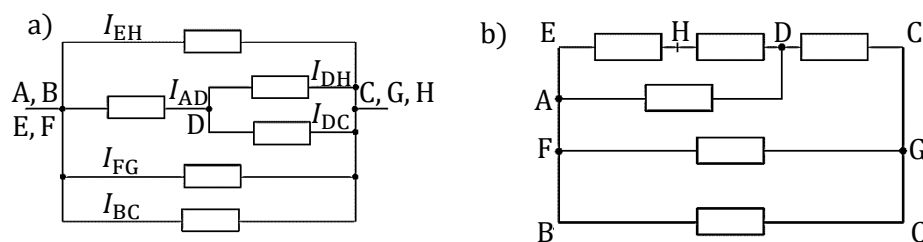
- a) Jaký bude celkový odpor a jaký proud bude procházet každým z rezistorů, připojíme-li k vrcholům krychle A a C zdroj s napětím  $U = 24 \text{ V}$ ? Odpory samotného drátu a spojovacích vodičů jsou zanedbatelné.

Mezi vrcholy G a H přerušíme vodivé spojení.

- b) Porovnejte celkový příkon před a po přerušení.  
c) Rozhodněte a zdůvodněte, u kterých rezistorů se příkon zvětší, u kterých se zmenší a u kterých rezistorů se příkon nezmění.



**Obrázek 2.2.21:** Krychle s rezistory, k zadání úlohy FO60B2-4.



**Obrázek 2.2.22:** Krychle s rezistory, k řešení úlohy FO60B2-4.

**Řešení příkladu č. 23:**

Zapojení si můžeme překreslit dle obr. 2.2.22a.

a) Pro celkový odpor platí

$$\frac{1}{R_C} = \frac{3}{R} + \frac{2}{3R}, \quad \text{z čehož} \quad R_C = \frac{3}{11}R = 27,3 \, \Omega \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Označme

$$I_{EH} = I_{FG} = I_{BC} = I_1, \quad I_{AD} = I_2, \quad I_{DH} = I_{DC} = I_3,$$

$$I_1 = \frac{U}{R} = I_{EH} = I_{FG} = I_{BC} = 0,24 \, \text{A}.$$

Protože

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{3}{2}R}{R} = \frac{3}{2}, \quad \text{z čehož} \quad I_2 = \frac{2}{3}I_1 = I_{AD} = 0,16 \, \text{A}.$$

$$I_3 = \frac{1}{2}I_2 = I_{DH} = I_{DC} = 0,08 \, \text{A}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

b) Schéma zapojení je nyní dle obr. 2.2.22b. Pro celkový odpor platí

$$\frac{1}{R_C} = \frac{2}{R} + \frac{3}{5R}, \quad \text{z čehož} \quad R_C = \frac{5}{13}R = 38,5 \, \Omega.$$

Celkové napětí se nezměnilo, celkový odpor se zvětšil, celkový příkon je nyní menší než před přerušením vodiče GH. **2 body**

c) Protože se celkové napětí ani odpor každého rezistoru po přerušení vodiče GH nezmění, staří porovnat proudy nebo napětí na jednotlivých rezistorech.

*Porovnáním proudů:*

Proudy  $I_{FG} = I_{BC}$  se nezměnily. Nezměnil se tedy ani příkon na rezistorech mezi body FG a BH.

Proud mezi body D a C:

$$I_{DC} = \frac{3U}{5R} > \frac{U}{3R}$$

Příkon na rezistoru mezi body D a C se tedy zvětší. Dále platí:

$$I_{AD} = 2I_{AEHD}, \quad I_{AD} + I_{AEHD} = I_{DC}, \quad \text{z čehož} \quad I_{AEHD} = \frac{I_{DC}}{3} = \frac{U}{5R} < \frac{U}{3R} < \frac{U}{R}$$

z čehož plyne, že příkon na rezistorech EH a HD bude menší a

$$I_{AD} = \frac{2I_{DC}}{3} = \frac{2U}{5R} < \frac{2U}{3R}$$

a tedy příkon na rezistoru AD bude menší.

**3 body**

Porovnáním napětí:

Před přerušením vodiče GH platilo:

$$U_{EH} = U_{FG} = U_{BC} = U, \quad U_{AD} = \frac{2}{3}U, \quad U_{DH} = U_{DC} = \frac{1}{3}U.$$

Po přerušení vodiče HD platí:

$$\begin{aligned} U_{FG} &= U_{BC} = U && \text{příkon se nezměnil,} \\ U_{EH} = U_{HD} &= \frac{1}{5}U < \frac{1}{3}U < U && \text{příkon se zmenšil,} \\ U_{AD} &= \frac{2}{5}U < \frac{2}{3}U && \text{příkon se zmenšil,} \\ U_{DC} &= \frac{3}{5}U > \frac{1}{3}U && \text{příkon se zvětšil.} \end{aligned}$$

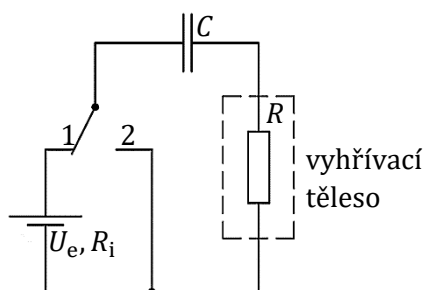
### Příklad č. 24: FO40A2-4: Elektrický ohřívač

[39,13 %]

Elektrický ohřívač, jehož schéma je na obr. 2.2.23, pracuje následujícím způsobem: Kontakt přepínače se nejprve přepne do polohy 1 a kondenzátor o kapacitě  $C$  se nabije na elektromotorické napětí  $U_e$ . Potom se kontakt přepínače přepne do polohy 2 a kondenzátor se úplně vybije přes vyhřívací těleso ohřívače, které má odpor  $R$ . Celý děje se opakuje s frekvencí  $f$ . Zdroj má vnitřní odpor  $R_i$  a nachází se mimo vyhřívaný prostor.

- V které části cyklu a kde v elektrickém obvodu nastává nežádoucí přeměna elektrické energie na vnitřní energii?
- Jaké teplo  $Q_1$  vznikne ve vyhřívacím tělese během nabíjení kondenzátoru?
- Jaké teplo  $Q_2$  vznikne ve vyhřívacím tělese během vybíjení kondenzátoru?
- Určete průměrný výkon  $P$  ohřívače.
- Určete účinnost ohřívače a porovnejte ji s účinností v případě, že by vyhřívací těleso bylo trvale připojeno ke svorkám zdroje.

Odpor spojovacích vodičů zanedbáváme. Úlohu řešte obecně a pro hodnoty:  $C = 100 \mu\text{F}$ ,  $R = 20 \Omega$ ,  $U_e = 90 \text{ V}$ ,  $R_i = 80 \Omega$ ,  $f = 20 \text{ s}^{-1}$ .



Obrázek 2.2.23: Obvod s ohřívačem, k zadání úlohy FO40A2-4.

**Řešení příkladu č. 24:**

- a) K nežádoucí přeměně elektrické energie na vnitřní energii dochází při průchodu proudem vnitřním odporem zdroje během nabíjení kondenzátoru. **1 bod**

- b) Během nabíjení kondenzátoru dodá zdroj náboj  $Q = U_e C$  a vykoná práci

$$W_z = U_e Q = C U_e^2.$$

Kondenzátor získá energii  $E_c = \frac{1}{2} C U_e^2$ . Zbývající energie  $\frac{1}{2} C U_e^2$  se spotřebuje ve vnitřním odporu zdroje a ve vyhřívacím tělese v poměru okamžitých výkonů:

$$\frac{P}{P_v} = \frac{R I^2}{R_i I^2} = \frac{R}{R_i}.$$

Ve vyhřívacím tělese tedy během nabíjení kondenzátoru vznikne teplo

$$Q_1 = \frac{C U_e^2 R}{2(R+R_i)} = 0,081 \text{ J.} \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Během vybíjení kondenzátoru se celá jeho energie spotřebuje ve vyhřívacím tělese, kde vznikne teplo

$$Q_2 = E_c = \frac{1}{2} C U_e^2 = 0,405 \text{ J.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- d) Průměrný výkon ohříváče je

$$P = f(Q_1 + Q_2) = \frac{f C U_e^2 (2R+R_i)}{2(R+R_i)} \doteq 9,7 \text{ W.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- e) Celkový elektrický výkon v obvodu je  $P_0 = f W_z = f C U_e^2$  a zařízení má účinnost

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{2R+R_i}{2(R+R_i)} = 0,60.$$

Kdyby bylo vyhřívací těleso trvale připojeno ke zdroji, mělo by zařízení účinnost

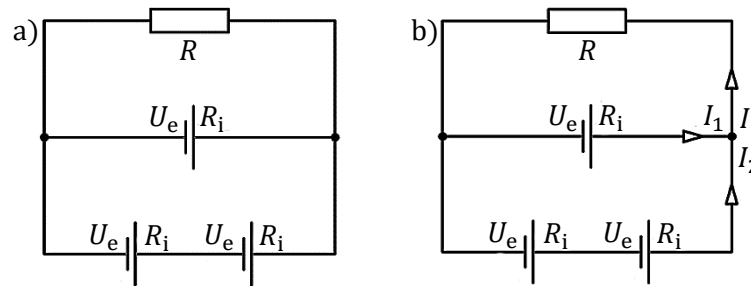
$$\eta' = \frac{R}{R+R_i} = 0,20.$$

Pokud  $R_i > 0$ , platí  $\eta > \eta'$ . **2 body**

**Příklad č. 25: FO50A2-2: Elektrický obvod se třemi zdroji [18,60 %]**

Tři články, každý s elektromotorickým napětím  $U_e$  a s vnitřním odporem  $R_i$ , a rezistor o odporu  $R$  jsou zapojeny podle schématu na obr. 2.2.24a.

- Určete napětí  $U$  na rezistoru.
- Určete podmínku pro odpor  $R$  rezistoru, aby každým zdrojem procházel proud souhlasně s jeho polaritou.
- Určete odpor  $R'$  rezistoru, při němž je jeho příkon maximální, a tento maximální příkon  $P_{\max}$ .
- Určete odpor  $R''$  rezistoru, při němž je účinnost elektrického obvodu maximální, a tuto maximální účinnost  $\eta_{\max}$ .



**Obrázek 2.2.24:** Obvod se třemi zdroji, k úloze FO50A2-2: (a) k zadání, (b) k řešení.

**Řešení příkladu č. 25:**

- a) Při volbě směrů proudů podle obr. 2.2.24b sestavíme rovnice na základě Kirchhoffových zákonů:

$$\begin{aligned} U_e &= R_i I_1 + RI, \\ 2U_e &= 2R_i I_2 + RI, \\ I_1 + I_2 &= I. \end{aligned}$$

Z rovnic plyne

$$I = \frac{4U_e}{2R_i + 3R}, \quad U = RI = \frac{4RU_e}{2R_i + 3R}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Z rovnic dále plyne

$$I_1 = \frac{2R_i - R}{R_i(2R_i + 3R)} U_e, \quad (2.2.10)$$

$$I_2 = \frac{2R_i + R}{R_i(2R_i + 3R)} U_e, \quad (2.2.11)$$

Podmínka je splněna pro kladné hodnoty proudů. Tedy  $I_1 > 0$ , pro  $R < 2R_i$ ,  $I_2 > 0$  pro libovolný odpor  $R$ . Kladný proud  $I_2$  lze zdůvodnit i tím, že v této větvi je největší elektromotorické napětí.  $\mathbf{2 \text{ body}}$

- c) Příkon rezistoru je

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} = \frac{16R}{(2R_i + 3R)^2} U_e^2. \quad (2.2.12)$$

Provedeme derivaci příkonu  $P$  podle odporu  $R$ :

$$\frac{dP}{dR} = 16U_e^2 \frac{2R_i - 3R}{(2R_i + 3R)^3}.$$

Z podmínky  $\frac{dP}{dR} = 0$  plyne, že hledaný odpor je  $R' = \frac{2}{3}R_i$  (je roven vnitřnímu odporu zdroje jako celku). Provedeme druhou derivaci:

$$\frac{d^2P}{dR^2} = 16U_e^2 \frac{-24R_i + 18R}{(2R_i + 3R)^4}.$$

Pro  $R = R' = \frac{2}{3}R_i$  je  $\frac{d^2P}{dR^2} = 16U_e^2 \frac{-12R_i}{(4R_i)^4} < 0$ , tedy jedná se o maximum.

(Místo druhé derivace lze uvážit, že vzorec (2.2.12) představuje podíl přímé úměrnosti a kvadratické funkce, kde vzhledem ke kladným hodnotám odporů je jmenovatel nenulový v tudíž funkce je spojitá na intervalu od nuly do nekonečna.



Funkční hodnota v nule je nulová stejně jako limita v nekonečno a funkce na uvedeném intervalu nabývá nezáporných hodnot. Proto jediný nalezený extrém pomocí první derivace musí být maximem.)

Dosažením do rovnice (2.2.12) za proměnnou  $R$  dostaneme  $P_{\max} = \frac{2U_e^2}{3R_i}$ . **3 body**

d) Celkový elektrický příkon zapojení je  $P_0 = U_e I_1 + 2U_e I_2$ . Dosažením z rovnic (2.2.10) a (2.2.11) dostaneme

$$P_0 = \frac{6R_i + R}{R_i(2R_i + 3R)} U_e^2.$$

Účinnost zapojení je

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{16R_i R}{(2R_i + 3R)(6R_i + R)} = \frac{16R_i R}{3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2}. \quad (2.2.13)$$

Provedeme derivaci účinnosti  $\eta$  podle odporu  $R$ :

$$\frac{d\eta}{dR} = 48R_i \frac{4R_i^2 - R^2}{(3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2)^2}.$$

Z podmínky  $\frac{d\eta}{dR} = 0$  plyne, že hledaný odpor je  $R'' = 2R_i$  (mimořadně též  $I_1 = 0$ ).

Provedeme druhou derivaci:

$$\frac{d^2\eta}{dR^2} = 48R_i \frac{-2R(3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2)^2 - 2(4R_i^2 - R^2)(3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2)(6R + 20R_i)}{(3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2)^4},$$

$$\frac{d^2\eta}{dR^2} = 48R_i \frac{6R^3 - 72R_i^2 R - 160R_i^3}{(3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2)^3},$$

Pro  $R = R'' = 2R_i$  je  $\frac{d^2\eta}{dR^2} = 48R_i \frac{-256R_i^3}{(64R_i^2)^3} < 0$ , jedná se tedy o maximum.

(Místo druhé derivace lze uvážit, že vzorec (2.2.13) představuje stejně jako vzorec (2.2.12) podíl přímé úměrnosti a kvadratické funkce. Další zdůvodnění je pak stejné jako v úloze c.) Dosažením do rovnice (2.2.13) za proměnnou  $R$  dostaneme

$$\eta = \frac{1}{2}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

### Příklad č. 26: F058B2-2: Účinnost obvodů

**[8,56 %]**

Připojíme-li k baterii s vnitřním odporem  $r$  rezistor o odporu  $R_1$ , uvolňuje se na něm tepelný výkon  $P_1 = 10 \text{ W}$  a účinnost přenosu energie v elektrickém obvodu je  $\eta_1 = 0,5$ . Nahradíme-li první rezistor jiným rezistorem o odporu  $R_2$ , bude tepelný výkon spotřebiče  $P_2 = 7,5 \text{ W}$ .

- Jaká bude účinnost obvodu  $\eta_2$ ?
- Jaká bude účinnost obvodu  $\eta_3$  a jaký bude tepelný výkon  $P_3$  ve vnější části obvodu, připojíme-li k baterii oba rezistory sériově?
- Jaká bude účinnost obvodu  $\eta_4$  a jaký bude tepelný výkon  $P_4$  ve vnější části obvodu, připojíme-li k baterii oba rezistory paralelně?

### Řešení příkladu č. 26:

- a) Bude-li  $R$  odpor ve vnější části odporu a  $r$  vnitřní odpor zdroje, platí pro účinnost přenosu energie v obvodu:

$$\eta = \frac{RI^2}{(r+R)I^2} = \frac{R}{(r+R)}, \quad \text{z čehož} \quad R = \frac{r\eta}{1-\eta} \quad (2.2.14)$$

a pro tepelný výkon na vnějším odporu

$$P = RI^2 = \frac{RU_e^2}{(r+R)^2} = \frac{U_e^2\eta^2}{R} = \frac{U_e^2\eta(1-\eta)}{r}.$$

Protože  $P_1 = \frac{U_e^2\eta_1(1-\eta_1)}{r}$  a  $P_2 = \frac{U_e^2\eta_2(1-\eta_2)}{r}$ , dostaneme vydělením

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\eta_1(1-\eta_1)}{\eta_2(1-\eta_2)}. \quad (2.2.15)$$

Úpravou obdržíme kvadratickou rovnici  $P_1\eta_2^2 - P_1\eta_2 + P_2\eta_1(1-\eta_1) = 0$ . Rovnice má dva kořeny:

$$\eta_2 = \frac{P_1 \pm \sqrt{P_1^2 - 4P_1P_2\eta_1(1-\eta_1)}}{2P_1},$$

po dosazení  $\eta_{21} = 0,25$  a  $\eta_{22} = 0,75$ . První kořen odpovídá situaci, kdy je  $R_2 < r$ , druhý situaci, kdy  $R_2 > r$ . **4 body**

- b) Podle (2.2.14) odpovídá účinnosti  $\eta_1$  odpor  $R_1 = \frac{r\eta_1}{1-\eta_1} = r$ , účinnosti  $\eta_{21}$  poté odpor

$$R_{21} = \frac{r\eta_{21}}{1-\eta_{21}} = \frac{r}{3} \text{ a účinnosti } \eta_{22} \text{ odpor } R_{22} = \frac{r\eta_{22}}{1-\eta_{22}} = 3r. \quad \text{2 body}$$

Při sériovém zapojení rezistorů  $\eta_3 = \frac{R_1+R_2}{r+R_1+R_2}$ . Pro účinnost dostáváme dvě možné hodnoty  $\eta_{31} = 0,57$  a  $\eta_{32} = 0,8$ . Výkon na rezistorech vyjádříme pomocí vztahu (2.2.15):

$$P_3 = P_1 \frac{\eta_3(1-\eta_3)}{\eta_1(1-\eta_1)}.$$

Číselně  $P_{31} = 9,8 \text{ W}$  a  $P_{32} = 6,4 \text{ W}$ . **2 body**

- c) Při paralelním zapojení rezistorů  $\eta_4 = \frac{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{r+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$ . Opět dostáváme dvě možné hodnoty

$\eta_1 = 0,2$  a  $\eta_{42} = 0,43$  a odpovídající výkony  $P_{41} = 6,4 \text{ W}$  a  $P_{42} = 9,8 \text{ W}$ . **2 body**

### 2.2.2.4 Měrný odpor drátu

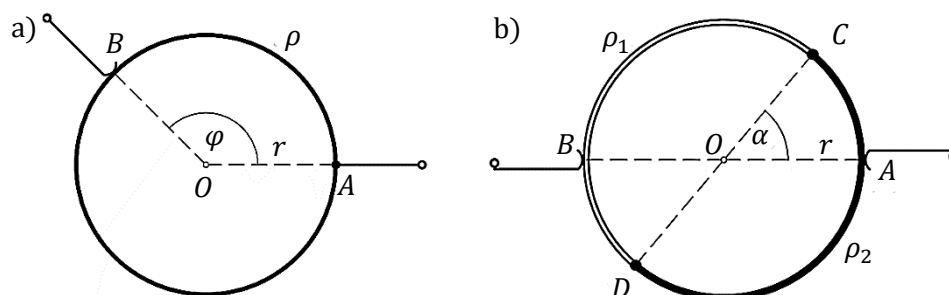
#### Příklad č. 27: F044A2-2: Odporový drát

[54,42 %]

Řešte následující úlohy:

- a) Odporový drát konstantního průřezu vyrobený z materiálu o rezistivitě  $\rho$  je stočen do kružnice o poloměru  $r$  se středem v bodě  $O$ . Jeden vývod je připojen pevně v bodě  $A$ , druhý je spojen s kartáčkem  $B$ , který se může otáčet pod různým úhlem  $\varphi$  vzhledem k polopřímce  $OA$  (obr. 2.2.25a).

- I. Určete závislost elektrického odporu  $R$  mezi body  $A$  a  $B$  a na úhlu  $\varphi$ .
- II. Určete úhel  $\varphi$ , při kterém je tento odpor největší.
- b) Odporový drát konstantního průřezu stočený do kružnice se středem v bodě  $O$  se skládá ze dvou půlkružnic vyrobených z materiálů o rezistivitách  $\rho_1$  a  $\rho_2$ . V protilehlých bodech k němu přiléhají kartáčky  $A, B$  vnějšího vedení (obr. 2.2.25b).
- I. Určete závislost odporu  $R$  mezi kartáčky na úhlu  $\alpha$ , o který se otočí průměr  $CD$ .
- II. Jak musíme zvolit úhel  $\alpha$ , aby odpor byl co největší?
- V obou případech a) i b) určete obecně také hodnotu maximálního odporu.



Obrázek 2.2.25: Odporový drát, zadání k úloze FO44A2-2.

**Řešení příkladu č. 27:**

a) I. Platí 
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{\rho r \varphi}{S}} + \frac{1}{\frac{\rho r (2\pi - \varphi)}{S}},$$

po úpravě

$$\frac{1}{R} = \frac{S}{\rho r} \left( \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\pi - \varphi} \right), \quad \text{z čehož} \quad R = \frac{\rho r}{S} \frac{\varphi(2\pi - \varphi)}{2\pi}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

II. Určíme lokální extrémy funkce  $R = R(\varphi)$ .

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{\rho r}{\pi S} (\pi - \varphi) = 0, \quad \text{z čehož} \quad \varphi = \pi.$$

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{\rho r}{\pi S} < 0. \quad \text{Pro úhel } \varphi = \pi \text{ nastává lokální maximum.}$$

$$\text{Potom } R_{\max} = \frac{\rho \pi r}{2S}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

b) I. Pro obecný úhel  $\alpha$  je

$$R_1 = \rho_1 \frac{(\pi - \alpha)r}{S} + \rho_2 \frac{\alpha r}{S}, \quad R_2 = \rho_1 \frac{\alpha r}{S} + \rho_2 \frac{(\pi - \alpha)r}{S}.$$

Potom

$$\frac{1}{R} = \frac{S}{r} \left[ \frac{1}{\rho_1(\pi - \alpha) + \rho_2 \alpha} + \frac{1}{\rho_1 \alpha + \rho_2(\pi - \alpha)} \right].$$

Po úpravě

$$R = \frac{r}{S} \frac{[(\rho_2 - \rho_1)\alpha + \pi\rho_1][(\rho_1 - \rho_2)\alpha + \pi\rho_2]}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

II. Nyní určíme lokální extrémy této funkce:

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{r}{S\pi(\rho_1 + \rho_2)} (\rho_2 - \rho_1) [(\rho_1 - \rho_2)\alpha + \pi\rho_2] + (\rho_1 - \rho_2) [(\rho_2 - \rho_1)\alpha + \pi\rho_1],$$

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{r(\rho_1 - \rho_2)^2}{S\pi(\rho_1 + \rho_2)} (\pi - 2\alpha).$$

Z podmínky  $\frac{dR}{d\alpha} = 0$  dostaneme  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

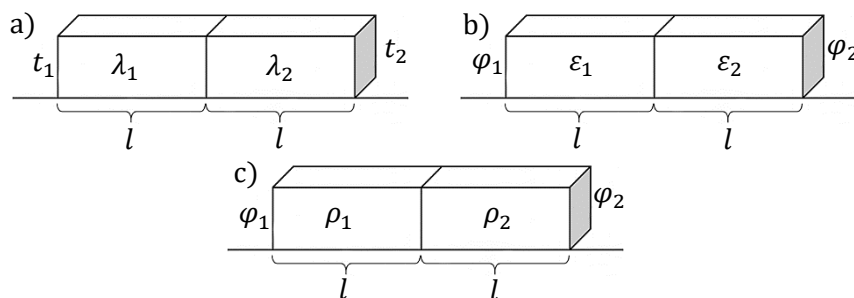
Druhá derivace:  $\frac{d^2R}{d\alpha^2} = -\frac{4r(\rho_1 - \rho_2)^2}{S\pi(\rho_1 + \rho_2)} < 0$ , nastává lokální maximum.

Potom  $R_{\max} = \frac{\pi r}{4S} (\rho_1 + \rho_2)$ .

**3 body**

**Příklad č. 28: FO59A2-3: Pokles teploty a potenciálový spád [46,05 %]**

- a) Planparalelní destička se skládá ze dvou homogenních, stejně velkých částí o délce  $l$  (obr. 2.2.26a) Součinitel tepelné vodivosti je v levé části  $\lambda_1$ , v pravé části  $\lambda_2$ . Levý konec destičky je udržován při teplotě  $t_1$ , teplota na pravém konci je  $t_2 < t_1$ . Jaká je teplota  $t$  uprostřed destičky na rozhraní obou prostředí?
- b) Planparalelní destička z dielektrika se skládá ze dvou homogenních, stejně velkých částí o délce  $l$  (obr. 2.2.26b). Relativní permitivita v levé části destičky je  $\varepsilon_1$ , v pravé části  $\varepsilon_2$ . Elektrický potenciál je na levém konci destičky  $\varphi_1$ , na pravém konci pak  $\varphi_2 < \varphi_1$ . Určete:
- I. Intenzitu elektrického pole  $E_1$  v levé části a intenzitu elektrického pole  $E_2$  v pravé části destičky.
  - II. Elektrický potenciál  $\varphi$  uprostřed destičky na rozhraní obou prostředí.
- c) Planparalelní vodivá destička se skládá ze dvou homogenních, stejně velkých částí o délce  $l$  (obr. 2.2.26c). Elektrický potenciál je na levém konci destičky  $\varphi_1$ , na pravém konci  $\varphi_2 < \varphi_1$ . Rezistivita v levé části je  $\rho_1$ , v pravé části  $\rho_2$ . Určete elektrický potenciál  $\varphi$  uprostřed destičky.



**Obrázek 2.2.26:** Planparalelní destičky, zadání k úloze FO59A2-3.

**Řešení příkladu č. 28:**

- a) Tepelný výkon procházející destičkou závisí na rozdílu teplot:

$$\frac{Q}{\tau} = S\lambda_1 \frac{\Delta t_1}{l} = S\lambda_2 \frac{\Delta t_2}{l}, \quad \text{z čehož} \quad \lambda_1 \Delta t_1 = \lambda_2 \Delta t_2,$$

pro pokles teplot dále platí  $\Delta t_1 + \Delta t_2 = t_1 - t_2$ . Dosazením za  $\Delta t_2$ :  $\Delta t_2 = \frac{\lambda_1 \Delta t_1}{\lambda_2}$

můžeme vyjádřit  $\Delta t_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (t_1 - t_2)$ . Teplota na rozhraní obou prostředí pak bude:

$$t = t_1 - \Delta t_1 = t_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (t_1 - t_2) = \frac{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad \text{3 body}$$

b) I. Plošná hustota náboje na společném rozhraní je stejná:  $E_1 \varepsilon_1 = E_2 \varepsilon_2$ . Pro spád potenciálů platí:  $\varphi_1 - \varphi_2 = E_1 l + E_2 l$ . Úpravou těchto vztahů dostaneme:

$$E_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad E_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad \text{2 body}$$

II. Potenciál uprostřed destičky bude

$$\varphi = \varphi_2 + E_2 l = \varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{\varphi_1 \varepsilon_1 + \varphi_2 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad \text{2 body}$$

c) Proud v levé a v pravé části je stejný

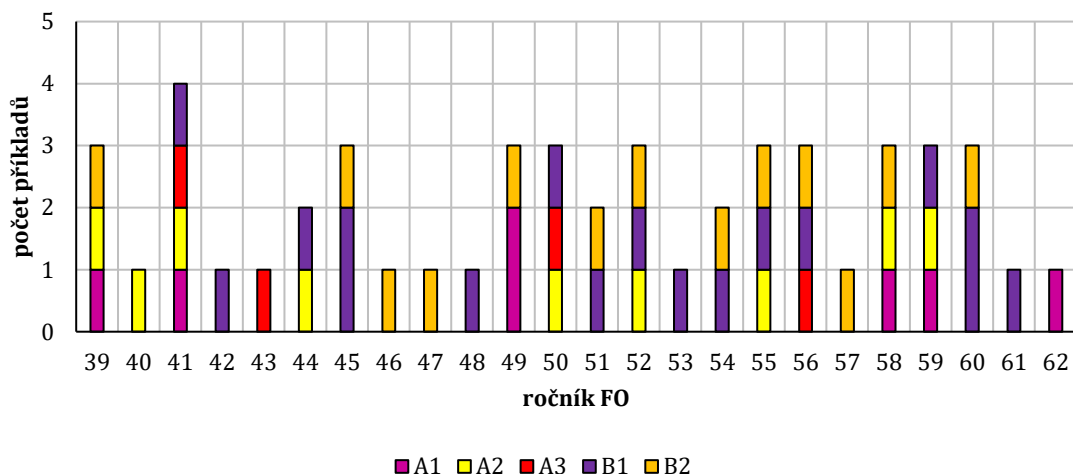
$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{\rho_1 \frac{l}{S}} = \frac{\varphi - \varphi_2}{\rho_2 \frac{l}{S}},$$

odtud

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \rho_2 + \varphi_2 \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}. \quad \text{3 body}$$

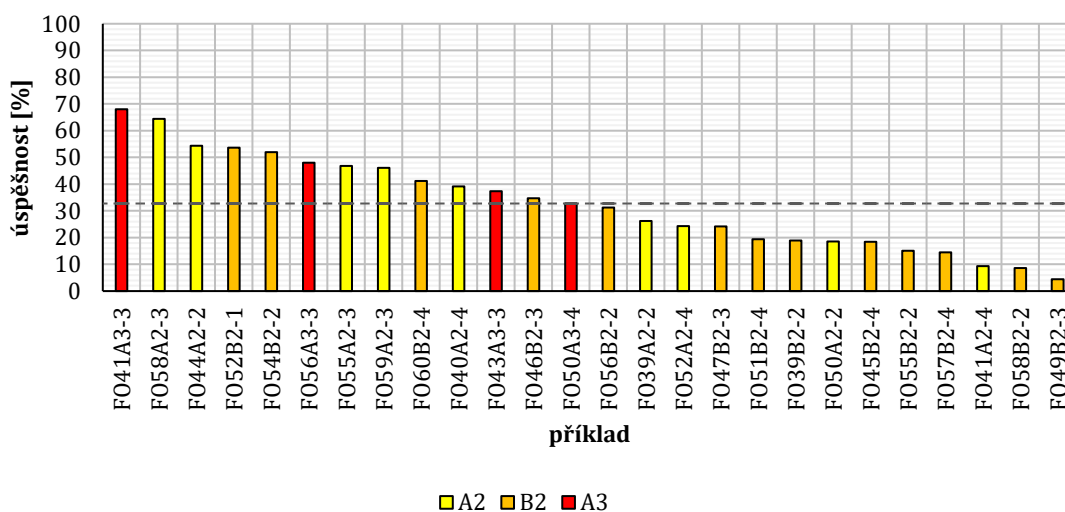
## 2.2.3 Statistická úspěšnost příkladů

Příklady této kapitoly jsou v olympiádách nejčastější, v ročnících 39-62 pro kategorii A a 39-61 pro kategorii B má podíl 32,68 % příkladů na elektřinu a magnetismus. Na obrázku 2.2.27 jsou znázorněny počty příkladů v jednotlivých ročnících ze všech kol těchto dvou kategorií.



**Obrázek 2.2.27:** Zastoupení příkladů na elektrický proud v kovech v jednotlivých ročnících a kolech fyzikální olympiády.

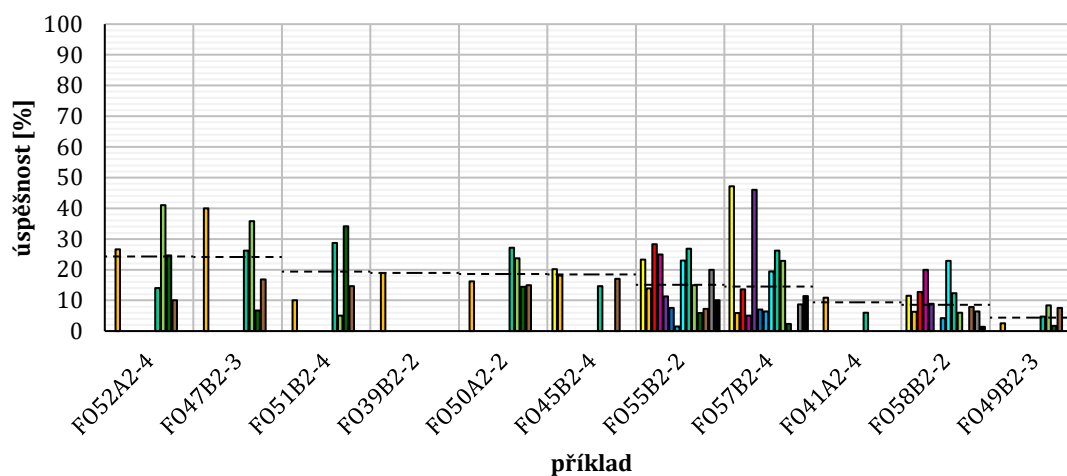
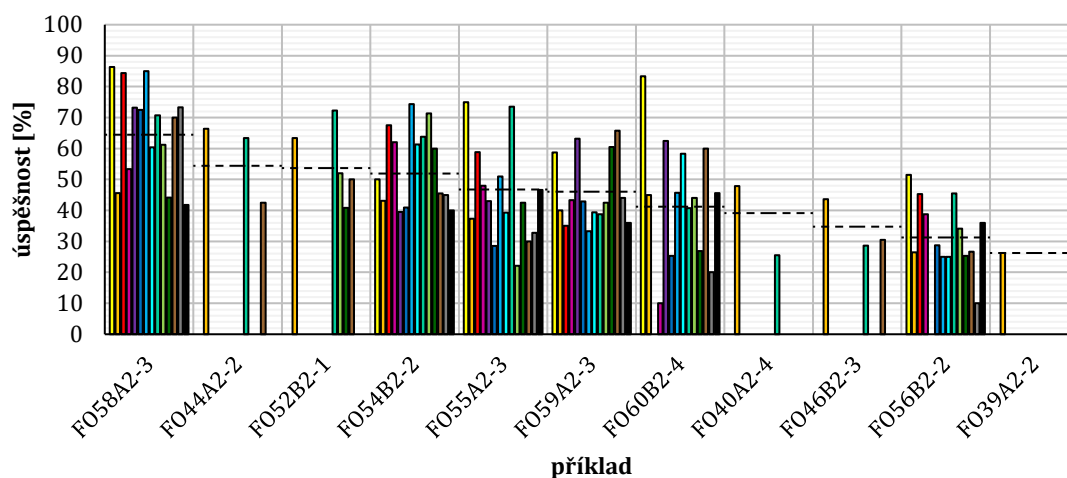
Jak je z tohoto obrázku patrné, v každém ročníku fyzikální olympiády se alespoň v jedné z těchto kategorií vyskytuje příklad na elektrický proud v kovech, v některých ročnících jsou dokonce dva příklady v jednom kole. Je dobré zmínit, že jeden z příkladů se v olympiádách vyskytoval dvakrát ve stejném znění – jednou jako příklad FO39A2-2, podruhé jako FO41A1-5. Z grafu na obrázku 2.2.27 můžeme dále vyčíst, že více než polovina příkladů se nachází v postupových kolech – jedná se o 22 příkladů krajských kategorií A i B a 4 příklady třetího kola kategorie A. V grafu na obrázku 2.2.28 je vyjádřena procentuální úspěšnost všech příkladů z postupových kol včetně průměrné úspěšnosti, která je 32,76 %. Nejobtížněji se jeví kapitola zaměřená na elektrické obvody, naopak největší úspěšnosti bylo dosaženo v příkladech na měrný odpor drátu. V kapitole na měrný odpor drátu je i neúspěšněji řešený příklad s procentuální úspěšností 68 %. Z hlediska kategorií jsou úspěšnější příklady kategorie A. Zhruba třetina všech příkladů obou kategorií dosahuje procentuální úspěšnosti nižší než 20 %, 3 příklady dokonce nižší než 10 %. Jedná se zejména o příklady na elektrické obvody (6 příkladů), poté o příklady na výkon, příkon a účinnost (2 příklady) a úlohy na spojování rezistorů (1 příklad). Vůbec nejnižší procentuální úspěšnost má příklad FO49B2-3, jehož procentuální úspěšnost je na základě výsledků z pěti krajů pouze 4,38 %.



**Obrázek 2.2.28:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů na elektrický proud v kovech.

V grafu na obrázku 2.2.29 je vyjádřena procentuální úspěšnost příkladů druhých kol v jednotlivých krajích ČR. Z důvodu velkého počtu příkladů je graf rozdělen na dvě části. Graf znázorňuje, že žádný z krajů (z dostupných dat) není ve všech příkladech nad průměrem, nebo pod průměrem, žádný z krajů není stoprocentně úspěšnější než jiné.

Průměrná hodnota úspěšnosti je spočítána jako průměr získaných bodů všech soutěžících u daného příkladu.



- |                      |                        |                     |                        |
|----------------------|------------------------|---------------------|------------------------|
| ■ Hlavní město Praha | ■ Jihočeský kraj       | ■ Jihomoravský kraj | ■ Karlovarský kraj     |
| ■ Kraj Vysočina      | ■ Královéhradecký kraj | ■ Liberecký kraj    | ■ Moravskoslezský kraj |
| ■ Olomoucký kraj     | ■ Pardubický kraj      | ■ Plzeňský kraj     | ■ Středočeský kraj     |
| ■ Ústecký kraj       | ■ Zlínský kraj         |                     |                        |

**Obrázek 2.2.29:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladech na elektrický proud v kovech v jednotlivých krajích.

## 2.3 Elektrický proud v elektrolytech

### 2.3.1 Základní pojmy a vztahy

V kovech je vedení elektrického proudu možné díky volným elektronům, v kapalinách (elektrolytech) díky volným iontům, které vznikají elektrolytickou disociací. Klasickým příkladem elektrolytické disociace je rozklad kuchyňské soli NaCl na kationty sodíku a anionty chloru



Kationty, tedy kladné ionty (v tomto případě sodík), se po zapnutí elektrického proudu budou pohybovat k záporně nabitě katodě, anionty (záporné ionty, v tomto případě chlor) se budou pohybovat ke kladně nabitě anodě. Při elektrolýze tedy dochází k chemickým změnám – ionty odevzdají na elektrodách svůj náboj a mění se na částice bez náboje. Ty se obvykle vylučují na elektrodách (pokovování), popř mohou elektrolyticky systém opouštět vlivem přeměny svého skupenství (např. na plynný chlor).

Pro elektrolýzu byly v 19. století stanoveny Faradayovy zákony elektrolýzy:

I. Faradayův zákon: *Hmotnost  $m$  vyloučené látky je přímo úměrná náboji  $Q$ , který prošel povrchem elektrody.* [21]

$$m = AQ = AIt = \frac{M_m}{F\nu} It$$

II. Faradayův zákon: *„Látková množství různých látek vyloučených při elektrolýze týmž nábojem jsou chemicky ekvivalentní.“* [21]

Ve vztazích platí, že  $A$  je elektrochemický ekvivalent látky, který vyjadřuje hmotnost látky, která se vyloučí průchodem náboje o velikosti 1 C. Jeho jednotkou je kilogram na coulomb ( $\text{kg} \cdot \text{C}^{-1}$ ). Dále  $I$  je elektrický proud,  $t$  čas,  $M_m$  molární hmotnost vyloučené látky,  $\nu$  počet elementárních nábojů, které jsou nutné k vyloučení jedné molekuly látky a  $F$  je Faradayova konstanta daná vztahem

$$F = N_A e,$$

kde  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  je Avogadrova konstanta a  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  elementární náboj. Faradayova konstanta má tedy tabelovanou hodnotu  $F = 9,649 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

V souvislosti s elektrolýzou je vhodné uvést také chemické vztahy pro látkové množství  $n$

$$n = \frac{m}{M_m} = \frac{N}{N_A} = \frac{V}{V_m},$$

kde  $N$  je počet částic v látce,  $V$  objem plynu a  $V_m = 22,414 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$  molární objem ideálního plynu. Pro ideální plyn platí stavová rovnice



$$pV = nRT,$$

kde  $p$  je tlak plynu,  $T$  termodynamická teplota a  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  molární plynová konstanta.

## 2.3.2 Řešené příklady

### Příklad č. 29: F045A2-1: Výroba vodíku

[54,34 %]

Elektrolyzátor pro průmyslovou výrobu vodíku se skládá z  $k = 100$  sériově zapojených velkých rozkladných článků, ve kterých probíhá elektrolýza zředěné kyseliny sírové.

- Jaký proud prochází obvodem, jestliže vodík vyloučený za jednu hodinu by za normálních podmínek zaujímal objem  $V_0 = 250 \text{ m}^3$ ?
- Jaká je energetická účinnost výroby, jestliže na každém rozkladném článku je napětí  $U = 2,2 \text{ V}$ ? Spálením 1 kg vodíku získáme teplo 143 MJ.

#### Řešení příkladu č. 29:

- Látkové množství vodíku vyloučené za jednu hodinu v jednom rozkladném článku je

$$n = \frac{V_0}{kV_m} = \frac{250}{100 \cdot 2,2414 \cdot 10^{-2}} = 111,5 \text{ mol.}$$

Protože na vyloučení jedné molekuly vodíku jsou zapotřebí dva elementární náboje, projde každým článkem za hodinu náboj

$$Q = 2Ne = 2nN_A e = 2nF = 2,15 \cdot 10^7 \text{ C,}$$

kde  $N$  je počet molekul vodíku vyloučených za jednu hodinu v jednom článku.

Obvodem tedy prochází proud  $I = \frac{Q}{t} = 6 \cdot 10^3 \text{ A.}$

**6 bodů**

- Celková hmotnost vodíku vyloučeného elektrolýzou za jednu hodinu je

$$m = nM_m = \frac{V_0}{V_m} M_m = 22,5 \text{ kg.}$$

Jeho spálením se získá teplo  $Q_s = 22,5 \text{ kg} \cdot 143 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1} = 3,19 \cdot 10^9 \text{ J.}$  Elektrická práce za stejnou dobu je  $W_{el} = kUQ = 4,74 \cdot 10^9 \text{ J.}$  Energetická účinnost výroby je

$$\eta = \frac{Q_s}{W_{el}} M_m = 67 \%.$$

**4 body**

### Příklad č. 30: F051A2-3: Třaskavá směs

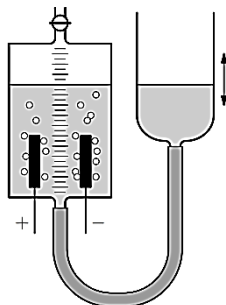
[37,50 %]

V zařízení na obr. 2.3.1 dochází elektrolýzou pětiprocentního roztoku kyseliny sírové k rozkladu vody na kyslík a vodík, které se v horní části elektrolyzátoru mísí na tzv. „třaskavou směs“. Tlak jímání plynu pohyblivou pomocnou nádobou vyrovnává s atmosférickým

tlakem  $p_{\text{at}} = 9,85 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ . Teplota plynu se vyrovnává s teplotou okolí  $t = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ . V určitém okamžiku je objem nashromážděného plynu  $V = 2\,250 \text{ cm}^3$ . Určete

- hmotnost  $m$  rozložené vody,
- náboj  $Q$ , který prošel elektrolyzérem.

Počítejte s tím, že v získaném plynu je kromě kyslíku a vodíku také nasycená pára roztoku, která má při teplotě  $30 \text{ }^\circ\text{C}$  tlak  $p_a = 4\,040 \text{ Pa}$ .



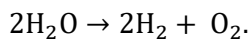
**Obrázek 2.3.1:** Elektrolyzér s „třaskavou směsí“, zadání k úloze F051A2-3.

**Řešení příkladu č. 30:**

- Tlak vyloučené třaskavé směsi je

$$p = p_{\text{at}} - p_a = 94\,460 \text{ Pa} \approx 94\,500 \text{ Pa.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Elektrolýza probíhá podle vzorce



To znamená, že ze dvou molů vody vzniknou dva moly vodíku a jeden mol kyslíku a že látkové množství  $n_1$  vyloučeného vodíku je stejné jako látkové množství rozložené vody a dvakrát větší než látkové množství  $n_2$  vyloučeného kyslíku. Látkové množství třaskavé směsi určíme pomocí stavové rovnice:

$$n = n_1 + n_2 = 1,5n_1 = \frac{pV}{RT}.$$

Z toho

$$n_1 = \frac{pV}{1,5RT} = \frac{94\,460 \cdot 2,25 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 8,315 \cdot 303,15} \text{ mol} = 0,056\,2 \text{ mol.}$$

Hmotnost rozložené vody je

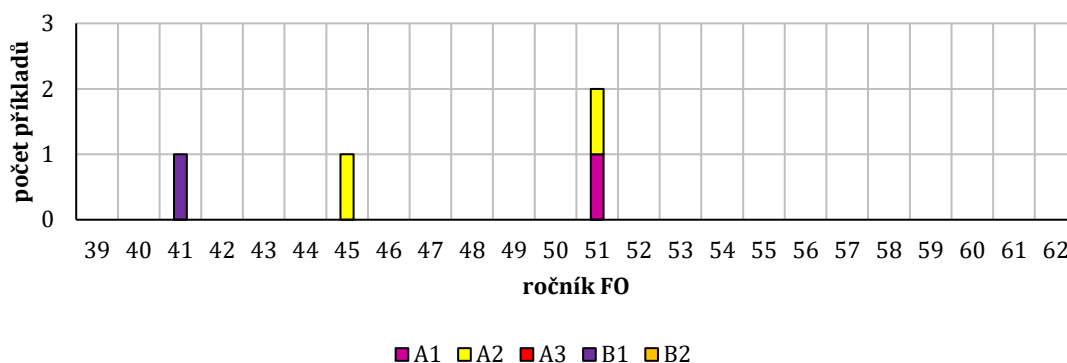
$$m = n_1 M_m(\text{H}_2\text{O}) = 0,056\,2 \cdot 18,016 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 1,01 \text{ g.} \quad \mathbf{5 \text{ bodů}}$$

- K rozložení jedné molekuly vody jsou zapotřebí 2 elementární náboje. Elektrolytem prošel celkový náboj

$$Q = 2n_1 N_A e = 0,056\,2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 10\,800 \text{ C.} \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

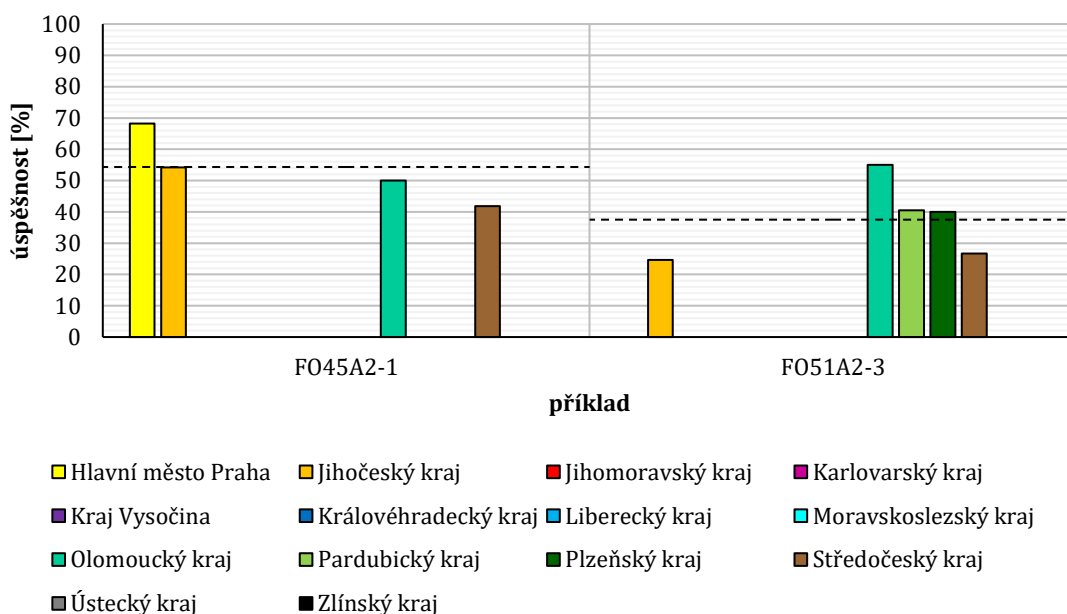
## 2.3.3 Statistická úspěšnost příkladů

Tato kapitola je velmi málo frekventovanou kapitolou v zadáních fyzikální olympiády, ve všech ročnících od 39. ročníku se v obou kategoriích dohromady vyskytují pouze 4 příklady, což činí 2,61 % ze všech příkladů elektřiny a magnetismu. Zastoupení těchto příkladů ročnících můžeme vidět v grafu na obrázku 2.3.2.



**Obrázek 2.3.2:** Zastoupení příkladů na elektrický proud v elektrolytech v jednotlivých ročnících a kolech fyzikální olympiády.

V současné době se už 11 ročníků žádný příklad týkající se elektrolyzy neobjevil ani v kategorii A, ani v kategorii B. V kategorii B se takový příklad neobjevil dokonce už 21 ročníků. Co se týče postupových kol, v grafu na obrázku 2.3.3 můžeme vidět, že jsou pouze dva příklady, oba krajské, oba z kategorie A. V grafu je zaznamenána i průměrná úspěšnost.



**Obrázek 2.3.3:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů na elektrický proud v elektrolytech v jednotlivých krajích.

## 2.4 Elektrický proud v polovodičích

### 2.4.1 Základní pojmy a vztahy

Polovodiče jsou látky, jejichž elektrické vlastnosti závisí na okolním prostředí – mění se s teplotou a osvětlením. Obecně platí, že jsou to látky s vysokým měrným odporem, který ale s rostoucí teplotou a osvětlením klesá, což umožňuje vést proud.

Vedení elektrického proudu je u polovodičů umožněno díky volným a vázaným elektronům. Vodivost u polovodičů může být vlastní a příměsová – vlastní vodivost je u polovodičů bez příměsí, u kterých dochází ke vznikům (generacím) a zánikům (rekombinacím) párů elektron-díra, což umožňuje vedení proudu. Příměsové polovodiče obsahují kromě samotného čistého polovodiče také příměs, která vlastnosti polovodiče zlepšuje, protože příměsové atomy mají oproti čistému polovodiči přebytek nebo nedostatek valenčních elektronů. Přebytek elektronů mají polovodiče typu N, vodivost se proto nazývá elektronová, nedostatek elektronů mají polovodiče typu P, vodivost se tedy nazývá děrová.

Polovodiče typu N a P se často kombinují a vznikají elektrotechnické polovodičové součástky, které se dále využívají v usměrňovacích obvodech, stabilizátorech stejnosměrného napětí, nebo jako svítidla, popř. přístroje, k měření a regulaci teploty apod. Mezi takové součástky patří např. dioda, která je tvořena jedním přechodem PN. Podle toho, zda diodu zapojíme v propustném, nebo v závěrném směru, prochází přes diodu proud. Kombinací diod lze zkonstruovat například usměrňovač proudu. Dalšími polovodičovými součástkami jsou například termistor, fotorezistor, nebo tranzistor.

### 2.4.2 Řešené příklady

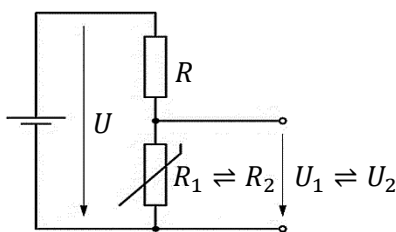
#### Příklad č. 31: F053A2-3: Teplotní čidlo

[40,39 %]

Ze zdroje o stálém svorkovém napětí  $U$  je napájen nezatížený odporový dělič tvořený rezistorem o stálém odporu  $R$  a termistorem, jehož odpor kolísá v závislosti na teplotě mezi minimální hodnotou  $R_1$  a maximální hodnotou  $R_2 = nR_1$ . Napětí na termistoru proto kolísá mezi hodnotami  $U_1$  a  $U_2$  (obr. 2.4.1).

- Jaký musí být odpor  $R$  rezistoru, aby rozdíl  $\Delta U = U_2 - U_1$  byl co největší?
- Jaké budou při této optimální volbě odporu  $R$  hodnoty  $U_1$  a  $U_2$ ?
- V jakém poměru budou výkony  $P_1$  a  $P_2$  na termistoru při napětích  $U_1$  a  $U_2$ ?

Řešte obecně a pak pro  $n = 9$ .



**Obrázek 2.4.1:** Odporový dělič, zadání k úloze FO53A2-3.

**Řešení příkladu č. 31:**

a) Platí

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R}, \quad U_2 = U \frac{R_2}{R_2 + R}, \quad (2.4.1)$$

$$U_2 - U_1 = U \left( \frac{R_2}{R_2 + R} - \frac{R_1}{R_1 + R} \right) = U \frac{R_1 R_2 + R_2 R - R_1 R_2 - R_1 R}{(R_2 + R)(R_1 + R)} = U \frac{R(R_2 - R_1)}{(R_2 + R)(R_1 + R)}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Odpor  $R$ , při kterém je hodnota získaného výrazu maximální, určíme užitím první derivace. Podmínka

$$\frac{d(\Delta U)}{dR} = U(R_2 - R_1) \frac{(R_2 + R)(R_1 + R) - R(R_1 + R_2 + 2R)}{[(R_2 + R)(R_1 + R)]^2} = U(R_2 - R_1) \frac{R_1 R_2 - R^2}{[(R_2 + R)(R_1 + R)]^2} = 0.$$

je splněna pro

$$R = \sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{R_1 n R_1} = R_1 \sqrt{n}. \quad (2.4.2)$$

Pro  $R < \sqrt{R_1 R_2}$  je první derivace kladná, pro  $R > \sqrt{R_1 R_2}$  je záporná. Jedná se tedy o maximum. **3 body**

b) Dosazením z (2.4.2) do (2.4.1) dostaneme

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_1 \sqrt{n}} = U \frac{1}{1 + \sqrt{n}}, \quad U_2 = U \frac{n R_1}{n R_1 + R_1 \sqrt{n}} = U \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Platí

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R)^2}, \quad P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{U^2 R_2}{(R_2 + R)^2},$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2 (R_1 + R)^2}{R_1 (R_2 + R)^2} = \frac{n R_1^2 (1 + \sqrt{n})^2}{R_1^2 (n + \sqrt{n})^2} = \frac{n R_1^2 (1 + \sqrt{n})^2}{R_1^2 (\sqrt{n})^2 (1 + \sqrt{n})^2} = 1.$$

Výkon termistoru je v obou krajních případech stejný. **2 body**

Pro dané  $n = 9$  je a)  $R = 3R_1$ , b)  $U_1 = \frac{U}{4}$ ,  $U_2 = \frac{3U}{4}$ . **1 bod**

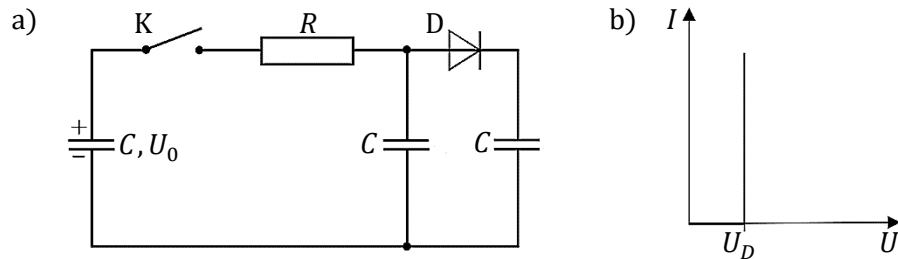
**Příklad č. 32: FO62A2-3: Přerozdělení náboje** **[23,93 %]**

Tři stejné kondenzátory o kapacitě  $C$ , rezistor s dostatečně velkým odporem  $R$  a dioda  $D$  jsou zapojeny do obvodu podle schématu 2.4.2a. Voltampérová charakteristika diody je na obr. 2.4.2b. Na počátku je levý kondenzátor nabit na napětí  $U_0$ . Zbylé kondenzátory nejsou na počátku nabity a spínač  $K$  je rozepnutý. Spínač  $K$  sepneme. Určete

- minimální hodnotu napětí  $U_0$ , při kterém začne protékat proud diodou,
- napětí na každém kondenzátoru po vzniku ustáleného stavu,

- c) teplo, které se v systému za tuto dobu uvolní,
- d) teplo, které se za tuto dobu uvolní v diodě,
- e) teplo, které se za tuto dobu uvolní na rezistoru.

Úlohy b), d) řešte pro oba případy:  $U_0$  je menší nebo rovna mezní hodnotě určené v úloze a) i  $U_0$  je větší než tato mezní hodnota.



**Obrázek 2.4.2:** Obvod s kondenzátory a diodou, zadání k úloze FO62A2-3.

**Řešení příkladu č. 32:**

- a) Uvažujme druhý Kirchhoffův zákon pro smyčku vpravo. Aby diodou protékal elektrický proud, je nutné, aby na prostředním kondenzátoru bylo napětí větší než  $U_D$ . Na počátku tedy teče proud pouze levou smyčkou obvodu a nabíjí se pouze prostřední kondenzátor.

Pokud bude  $U_0 \leq 2U_D$ , napětí na prostředním kondenzátoru nedosáhne takové hodnoty, aby proud pravou smyčkou tekł. **2 body**

Uvažujme situaci  $U_0 \leq 2U_D$ . Po vzniku ustáleného stavu budou na kondenzátorech napětí

$$U_1 = \frac{U_0}{2}, \quad U_2 = \frac{U_0}{2}, \quad U_3 = 0. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- b) Teplo, které se za tuto dobu uvolní v síti, zjistíme ze ZZE:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - 2 \frac{C\left(\frac{U_0}{2}\right)^2}{2} = \frac{CU_0^2}{4}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- cd) Protože diodou proud neprocházela, uvolní se celé teplo na rezistoru. **0,5 bodu**

Nyní počítejme případ  $U_0 > 2U_D$ :

- b) V případě, že proud poteče diodou, bude při nabíjení pravého kondenzátoru napětí  $U_3$  na něm menší než  $U_2$  na prostředním kondenzátoru o napětí na diodě; napětí na levém a prostředním kondenzátoru budou stejná:  $U_1 = U_2 = U$ .

Ze zákona zachování náboje

$$CU_0 = 2CU + C(U - U_D).$$

Odtud  $U = \frac{U_0 + U_D}{3}$ . **2 body**

c) Celkové uvolněné teplo určíme ze ZZE:

$$Q = \frac{cU_0^2}{2} - 2 \frac{cU^2}{2} - \frac{c(U-U_D)^2}{2} = \frac{c(U_0^2 - U_D^2)}{3}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

d) Teplo, které se uvolní na diodě, je rovno  $Q_D = q_D U_D$ , kde  $q_D = C U_3$  je náboj pravého kondenzátoru po skončení nabíjení. Po dosazení

$$Q_D = C U_3 U_D = C(U - U_D)U_D = C \left( \frac{U_0 + U_D}{3} - U_D \right) U_D = \frac{cU_D(U_0 - 2U_D)}{3}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

e) Na rezistoru se uvolní teplo

$$Q_R = Q - Q_D = \frac{c(U_0^2 - U_D^2)}{3} - \frac{c(U_0 U_D - 2U_D^2)}{3} = \frac{c(U_0^2 - U_0 U_D + U_D^2)}{3}. \quad \mathbf{0,5 \text{ bodu}}$$

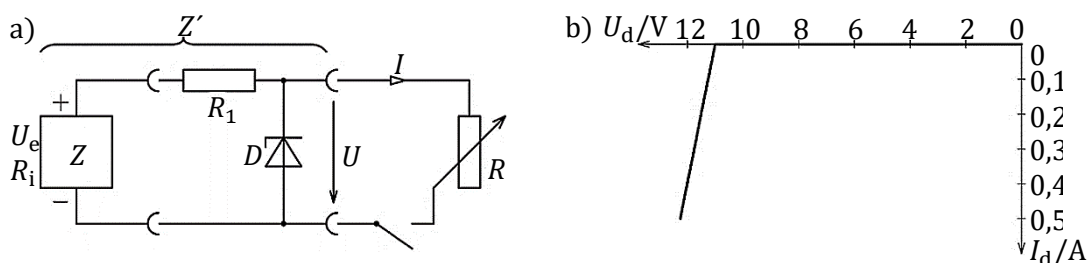
**Příklad č. 33: FO43B2-3: Rezistor a Zenerova dioda [19,69 %]**

Ke zdroji  $Z$  o elektromotorickém napětí  $U_e = 35,0 \text{ V}$  a vnitřním odporu  $R_i = 25,0 \Omega$  připojíme stabilizátor tvořený rezistorem o odporu  $R_1 = 220,0 \Omega$  a Zenerovou diodou (obr. 2.4.3a). Voltampérová charakteristika Zenerovy diody je v pracovní oblasti lineární (obr. 2.4.3b) a můžeme ji popsat vztahem

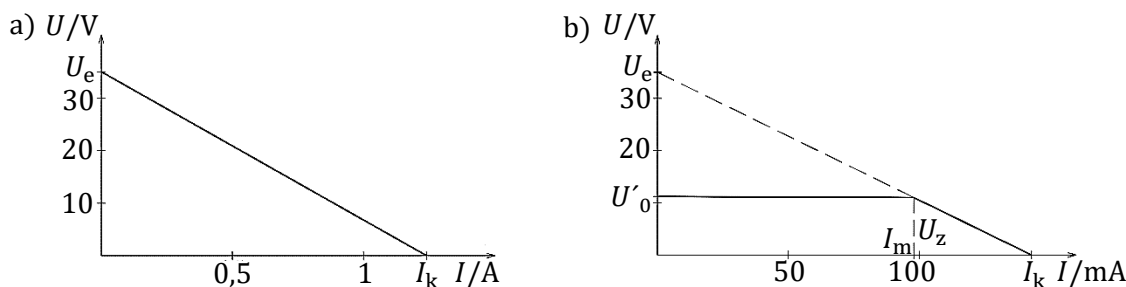
$$I_d = \frac{U - U_z}{R_d},$$

kde  $U_z$  je Zenerovo napětí a  $R_d$  je dynamický odpor diody. Použitá dioda má hodnoty:  $U_z = 11,0 \text{ V}$ ,  $R_d = 2,5 \Omega$ . Připojením stabilizátoru jsme získali stabilizovaný zdroj  $Z'$ .

- Nakreslete zatěžovací charakteristiku stabilizovaného zdroje  $Z$  (zatěžovací charakteristika zdroje je graf závislosti svorkového napětí na odebíraném proudu).
- Jaké bude svorkové napětí  $U_0'$  nezatíženého stabilizovaného zdroje  $Z'$ ?
- Při které hodnotě  $I_m$  odebíraného proudu se u stabilizovaného zdroje  $Z'$  přestane uplatňovat stabilizační účinek Zenerovy diody a jaké bude při tomto proudu jeho svorkové napětí?
- Nakreslete zatěžovací charakteristiku stabilizovaného zdroje  $Z'$ .
- Určete vnitřní odpor  $R_i'$  zdroje  $Z'$  v oblasti stabilizace.



**Obrázek 2.4.3:** Obvod se Zenerovou diodou, zadání k úloze FO43B2-3.



**Obrázek 2.4.4:** Obvod se Zenerovou diodou, k řešení úlohy FO43B2-3.

**Řešení příkladu č. 33:**

- a) Nestabilizovaný zdroj  $Z$  má lineární zatěžovací charakteristiku popsanou vztahem  $U = U_e - R_1 I$ . Získáme ji spojením bodu  $[0, U_e]$  na ose napětí a bodu  $[I_k, 0]$  na ose proudu (obr. 2.4.4a).  $I_k = \frac{U_e}{R_1}$  je proud nakrátko, v našem případě  $I_k = 1,4$  A. **2 body**

- b) V nezatíženém stavu je na Zenerově diodě napětí  $U_0'$  a prochází jí proud

$$I_{d_0} = \frac{U_0' - U_z}{R_d} = \frac{U_e - U_0'}{R_1 + R_1}$$

Úpravou dostaneme

$$U_0' = \frac{U_e R_d - U_z (R_1 + R_1)}{R_d + R_1 + R_1} = 11,2 \text{ V.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- c) Stabilizační účinek Zenerovy diody se přestane uplatňovat, když svorkové napětí klesne právě na Zenerovo napětí  $U_z$  a diodou přestane procházet proud. V tomto případě platí

$$I_m = \frac{U_e - U_z}{R_1 + R_1} = 98 \text{ mA.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- d) Zatěžovací charakteristika zdroje  $Z'$  má dva lineární úseky (obr. 2.4.4b). Stabilizovaný úsek leží mezi body  $[0, U_0']$  a  $[I_m, U_z]$ . Po překročení proudu  $I_m$  se Zenerova dioda neuplatňuje a platí  $U = U_e - (R_1 + R_1)I$ . Tento úsek zatěžovací charakteristiky je omezen body  $[I_m, U_z]$  a  $[I_k', 0]$ , kde

$$I_k' = \frac{U_e}{R_1 + R_1} = 143 \text{ mA.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- e) Průběh zatěžovací charakteristiky v oblasti stabilizace určíme řešením rovnice

$$\frac{U_e - U}{R_1 + R_1} = I_d + I = \frac{U_e - U_z}{R_d} + I$$

Úpravou dojdeme ke vztahu

$$U = \frac{U_e R_d + U_z (R_1 + R_1)}{R_d + R_1 + R_1} - I \frac{R_d (R_1 + R_1)}{R_d + R_1 + R_1} = U_0' + R_1' I$$

Vnitřní odpor zdroje  $Z'$  v oblasti stabilizace je tedy

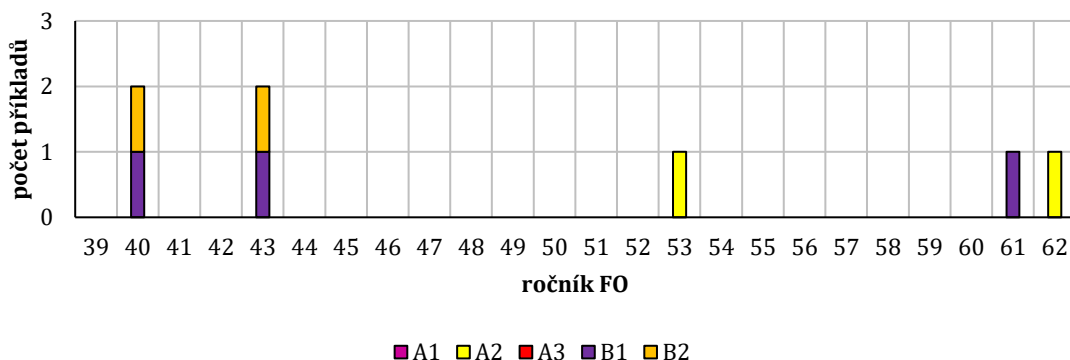
$$R_1' = \frac{R_d (R_1 + R_1)}{R_d + R_1 + R_1} \doteq R_d = 2,5 \Omega$$

- (Ke stejnému výsledku dojdeme i úpravou vztahu  $U_0' - U_z = R_1' I_m$ .) **2 body**



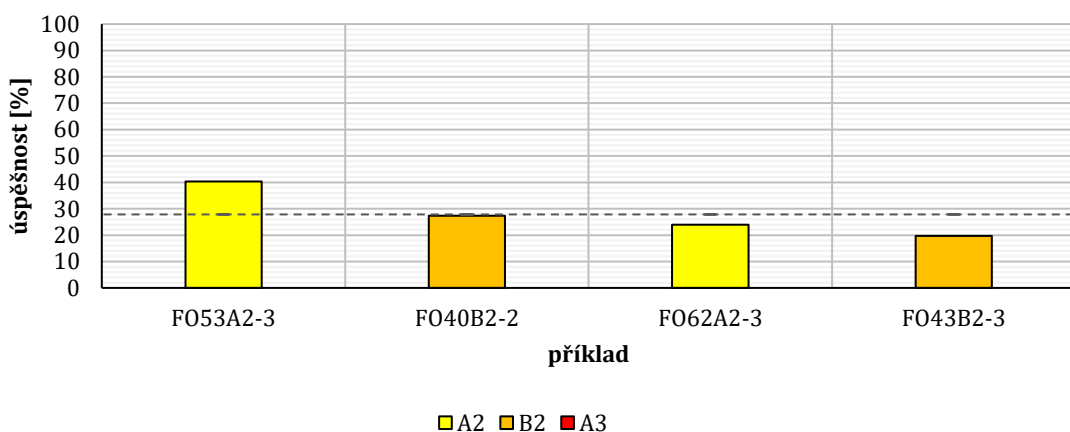
## 2.4.3 Statistická úspěšnost příkladů

Kapitola elektrický proud v polovodičích souvisí s předchozími kapitolami – do obvodů se společně s kondenzátory a odpory zapojují polovodičové elektrotechnické součástky, které mají specifické vlastnosti. Ze všech olympiád od 39. ročníku sem řadíme 7 příkladů, což je poměrově 4,58 % příkladů z elektřiny a magnetismu. Zastoupení v kolech a kategoriích jednotlivých ročníků je vyobrazeno v grafu na obrázku 2.4.5.



**Obrázek 2.4.5:** Zastoupení příkladů na elektrický proud v polovodičích v jednotlivých ročnících a kolech fyzikální olympiády.

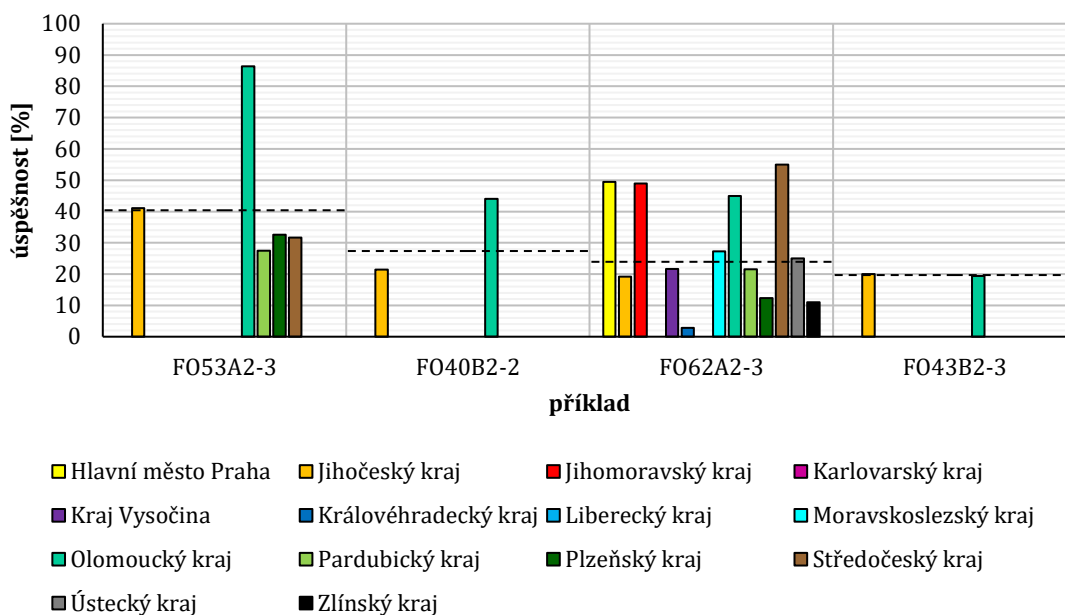
Z grafu je patrné, že ze 7 příkladů jsou pouze 4 příklady z postupových kol, jeden příklad byl i v letošním ročníku kategorie A. Žádný z příkladů na elektrický proud v polovodičích se neobjevil v celostátním kole kategorie A.



**Obrázek 2.4.6:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů na elektrický proud v polovodičích.

V grafech na obrázcích 2.4.6 a 2.4.7 se můžeme podívat na úspěšnost jednotlivých příkladů v krajských kolech kategorie A a B. Dle průměrů vyvedených do sloupcového grafu 2.4.6 je

průměrná úspěšnost příkladů kapitoly na elektrický proud v polovodičích 27,84 %, což je v průměru nižší úspěšnost v průměru v porovnání s předchozími kapitolami. Hlavním faktorem toho, že je tento průměr tak nízký, je ale především nízký počet příkladů, nižší, než je tomu u prvních dvou kapitol. Co se týče krajských dat, která jsou vykreslena v grafu 2.4.7, pouze u jednoho z příkladů jsou data kompletní (Karlovarský a Liberecký kraj mají u příkladu FO62A2-3 nulovou úspěšnost). U prvních třech příkladů v grafu 2.4.7 je patrná velká rozdílnost v úspěšnosti příkladů mezi jednotlivými kraji.



**Obrázek 2.4.7:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů na elektrický proud v polovodičích v jednotlivých krajích.

## 2.5 Elektrický proud v plynech a ve vakuu

### 2.5.1 Základní pojmy a vztahy

V plynech je proud veden díky přítomnosti iontů, ale také volných elektronů. Plyny jsou za normálních podmínek nevodivé, naopak jsou velmi dobrými izolanty. Ionty a volné elektrony v plynu vznikají procesem ionizace po dodání elektrické energie do plynu.

Rychlost pohybu elektronu  $v$  ve vakuové trubici lze odvodit z rovnosti kinetické energie elektronu a elektrické energie

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eU,$$

kde  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg je hmotnost elektronu,  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C elementární náboj a  $U$  napětí mezi elektrodami, rychlost elektronu lze tedy vyjádřit jako

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Relativistická kinetická energie  $E_k$  je poté dána vztahem

$$E_k = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

kde  $m_0$  je klidová hmotnost částice,  $v$  rychlost částice a  $c = 2,998 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup> rychlost světla ve vakuu.

### 2.5.2 Řešené příklady

#### Příklad č. 34: F052A3-2: Částice v elektrickém poli

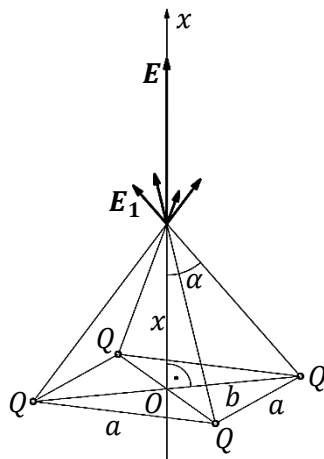
[43,98 %]

Každý ze čtyř hmotných bodů nacházejících se ve vrcholech čtverce o straně délky  $a$  ve vakuu má elektrický náboj  $Q$  shodného znaménka.

- Uvažujte osu  $x$  totožnou s osou souměrnosti čtverce kolmou k rovině čtverce a s počátkem ve středu čtverce. Najděte souřadnici  $x_m$  bodu osy, kde je intenzita elektrického pole maximální. Určete obecně i číselně velikost této intenzity  $E_{\max}$ .
- Do středu čtverce umístíme částici o klidové hmotnosti  $m_0$  a s nábojem  $q$  shodného znaménka s nábojem  $Q$ , a nepatrně vychýlíme kolmo k rovině čtverce. Určete limitní velikost rychlosti částice ve velmi velké vzdálenosti. Řešte obecně klasicky i obecně relativisticky.

- c) Vypočtete velikost rychlosti z úlohy b) pro částici alfa s nábojem  $q = 2e$  a s klidovou hmotností  $m_\alpha = 6,644 \cdot 10^{-27}$  kg a pro elektron s nábojem  $q = -e$  s klidovou hmotností  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg.

Další hodnoty pro číselná řešení:  $|Q| = 1,8 \cdot 10^{-7}$  C,  $a = 4,0 \cdot 10^{-2}$  m,  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C,  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9$  N · m<sup>2</sup> · C<sup>-2</sup>,  $k = 3,00 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup>.



**Obrázek 2.5.1:** Částice v elektrickém poli, k řešení úlohy FO52A3-2.

#### Řešení příkladu č. 34:

- a) Předpokládejme pro jednoduchost  $Q > 0$ . Intenzita elektrického pole každého ze čtyř nábojů má v bodě o souřadnici  $x$  velikost

$$E_1 = \frac{kQ}{x^2 + b^2},$$

kde  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$  je polovina délky úhlopříčky čtverce (obr. 2.5.1). Průmět intenzity  $E_1$  do osy  $x$  má velikost

$$E_{1x} = E_1 \cos \alpha = E_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}}.$$

Celková velikost intenzity je

$$E = 4E_{1x} = \frac{4kQ}{x^2 + b^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{4kQx}{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.5.1)$$

Derivace velikosti intenzity podle souřadnice  $x$  je

$$\frac{dE}{dx} = 4kQ \frac{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x(x^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2 + b^2)^{\frac{6}{2}}} = 4kQ \frac{b^2 - 2x^2}{(x^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Z podmínky nulové derivace plyne

$$x_m = \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{a}{2}. \quad (2.5.2)$$

Pro  $x < x_m$  je derivace kladná a funkce je tedy rostoucí, pro  $x > x_m$  je derivace záporná a funkce je klesající, proto je nalezený extrém maximum. (Tuto skutečnost lze též dokázat pomocí druhé derivace

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = 4kQ \frac{3x(2x^2 - 3b^2)}{(x^2 + b^2)^{\frac{7}{2}}}$$

kteřá pro  $x_m = \frac{\sqrt{2}}{2}b$  vychází záporná.) Dosazením hodnoty (2.5.2) do vztahu (2.5.1) dostaneme

$$E_{\max} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \frac{kQ}{a^2} = 3,11 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

b) Elektrický potenciál ve středu čtverce je

$$\varphi = \frac{4kQ}{b} = \frac{4\sqrt{2}kQ}{a}.$$

Ze zákona zachování energie plyne pro limitní kinetickou energii urychlené částice

$$E_k = q\varphi = \frac{4\sqrt{2}kqQ}{a}. \quad (2.5.3)$$

Podle klasické fyziky je kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2. \quad (2.5.4)$$

Ze vztahů (2.5.3) a (2.5.4) plyne

$$v = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}kqQ}{m_0 a}}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Podle teorie relativity je kinetická energie

$$E_k = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (2.5.5)$$

Ze vztahů (2.5.3) a (2.5.5) plyne

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left( \frac{4\sqrt{2}kqQ}{am_0 c^2} + 1 \right)^2}} = c \sqrt{1 - \frac{a^2 m_0^2 c^4}{(am_0 c^2 + 4\sqrt{2}kqQ)^2}}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Podle klasické fyziky vychází pro částici alfa  $v_\alpha = 4,70 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , pro elektron  $v_e = 2,84 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Jestliže  $v_\alpha \ll c$ , lze výsledek podle klasické fyziky pro částici alfa považovat za dostatečně přesný. Velikost rychlosti elektronu je však blízká rychlosti světla, proto je nutné počítat podle relativistického vzorce, kde vychází  $v_e = 2,17 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .  $\mathbf{2 \text{ body}}$

### Příklad č. 35: F040B2-4: Elektronka

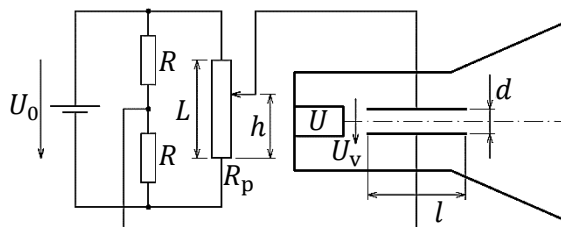
**[8,75 %]**

Elektrony urychlené napětím  $U$  v elektronové trysce obrazové elektrony vlétají mezi dvě rovnoběžné vychylovací destičky délky  $l$ , jejichž vzdálenost je  $d$ . Osa trysky splývá s osou souměrnosti destiček (obr. 2.5.2). Vychylovací napětí  $U_v$  je získáno ze zdroje o napětí  $U_0$  pomocí potenciometru o odporu  $R_p$  a odporového děliče tvořeného dvěma stejnými rezistory o odporu  $R$ .

a) Jak závisí vychylovací napětí  $U_v$  na vzdálenosti  $h$  jezdce potenciometru od koncové odporové dráhy, jestliže celá odporová dráha má délku  $L$ ?

- b) Jak velké musí být napětí  $U_0$ , aby elektronový paprsek při maximální výchylce právě zasáhl kraj destičky?
- c) Jaký maximální úhel může svírat odchýlený elektronový paprsek s osou trysky?

Řešte obecně a pro hodnoty:  $U = 2\,000\text{ V}$ ,  $l = 20\text{ mm}$ ,  $d = 5\text{ mm}$ . Tloušťku elektronového paprsku zanedbejte. Elektrické pole mezi vychylovacími destičkami je prakticky homogenní. Jeho rozptyl na okraji destiček zanedbejte.



**Obrázek 2.5.2:** Elektronka, k zadání úlohy FO40B2-4.

**Řešení příkladu č. 35:**

- a) Dolní destička má proti zápornému pólu zdroje napětí  $0,5U_0$ , horní destička má napětí  $U_0 \frac{h}{L}$ . Vychylovací napětí je jejich rozdíl

$$U_v = U_0 \left( \frac{h}{L} - 0,5 \right) = U_0 \frac{h-0,5L}{L}. \quad \mathbf{2\text{ body}}$$

Vychylovací napětí tedy můžeme měnit od  $U_{v\min} = -0,5U_0$  pro  $h = 0$  do  $U_{v\max} = 0,5U_0$  pro  $h = L$ .

- b) Zvolme vztažnou soustavu s počátkem v  $O$  v místě vstupu elektronu mezi destičky tak, že osa  $x$  splývá s osou trysky a osa  $y$  je kolmá k destičkám (obr. 2.5.3 – není v měřítku). Elektron získal v trysce rychlost  $v_0$ , se kterou vletá mezi destičky. Platí:

$$U_e = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2Ue}{m}}. \quad \mathbf{1\text{ bod}}$$

kde  $e$  je elementární náboj a  $m$  je hmotnost elektronu. Mezi destičkami působí na elektron ve směru osy  $y$  stálá elektrická síla o velikosti

$$F = Ee = \frac{U_v e}{d},$$

která mu uděluje zrychlení o velikosti

$$a = \frac{F}{m} = \frac{U_v e}{md}. \quad \mathbf{1\text{ bod}}$$

Je-li vychylovací napětí  $U_v$  kladné, směřuje elektrická síla vzhůru, je-li záporné, směřuje elektrická síla dolů.

Pohyb elektronu mezi destičkami je složen z rovnoměrného pohybu ve směru osy  $x$  a z rovnoměrného zrychleného pohybu ve směru osy  $y$ . Platí:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{ax^2}{2v_0^2} = \frac{1}{2} \frac{U_v e}{md} \frac{mx^2}{2Ue} = \frac{U_v x^2}{4dU}.$$

Elektronový paprsek se právě dotkne destičky, jestliže  $\frac{d}{2} = \frac{|U_v|l^2}{4dU}$ . Z toho

$$U_{v_{\max}} = |U_{v_{\min}}| = \frac{U_0}{2} = \frac{2d^2}{l^2} U, \quad U_0 = \frac{4d^2}{l^2} U.$$

Pro dané hodnoty  $U_0 = 500 \text{ V}$ .

**3 body**

- c) Rychlost elektronu při výstupu z prostoru destiček je odchýlena od osy trysky o úhel  $\alpha$ , pro který platí:

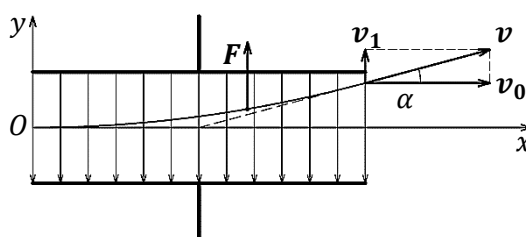
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v_0} = \frac{at}{v_0} = \frac{U_v e l}{md v_0^2} = \frac{U_v l}{2Ud}.$$

V krajním případě

$$U_{v_{\max}} = \frac{2d^2}{l^2} U, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{d}{l}.$$

Pro dané hodnoty  $\operatorname{tg} \alpha_{\max} = 0,25$ ,  $\alpha_{\max} = 14^\circ$ .

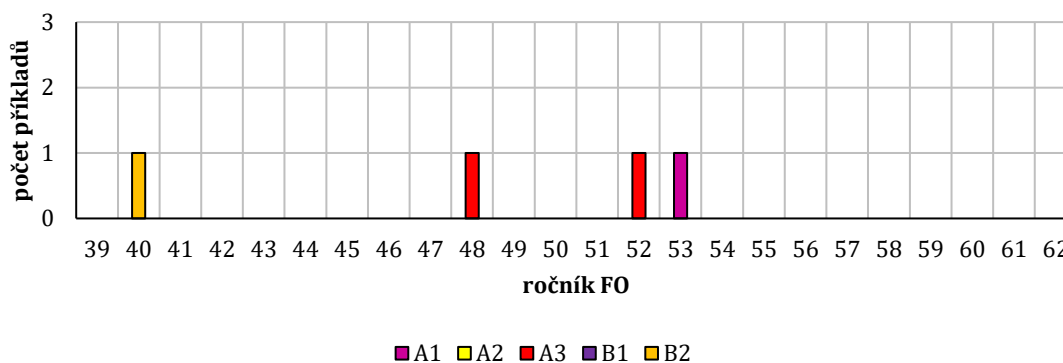
**3 body**



**Obrázek 2.5.3:** Elektronka, k řešení úlohy FO40B2-4.

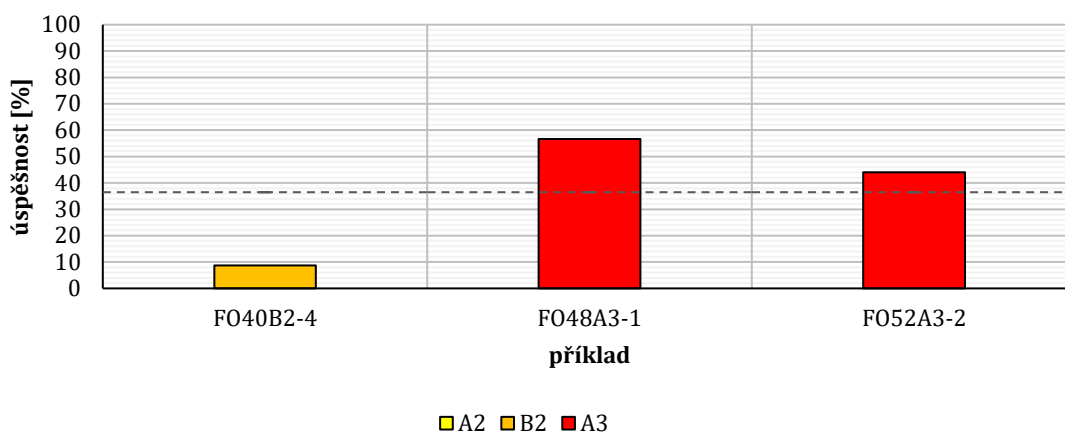
## 2.5.3 Statistická úspěšnost příkladů

Elektrický proud v plynech a ve vakuu je jednou z nejméně zastoupených kapitol ve fyzikálních olympiádách. Procentuální výskyt v kapitolách elektřiny a magnetismu je od 39. ročníku 2,61 %. Zastoupení v jednotlivých ročnících a kolech je vykresleno v grafu na obrázku 2.5.4.



**Obrázek 2.5.4:** Zastoupení příkladů na elektrický proud v plynech a ve vakuu v jednotlivých ročnících a kolech fyzikální olympiády.

Ve všech dostupných ročnících jsou pouze 4 příklady, z toho pouze 3 jsou z postupových kol, jak je možné vidět v grafu na obrázku 2.5.5.



**Obrázek 2.5.5:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů na elektrický proud v plynech a ve vakuu.

Ačkoli je tato kapitola malá, polovina dostupných příkladů je z celostátních kol kategorie A, a průměrná úspěšnost kapitoly je jedna z nejlepších – 36,48 %. Pro jediné krajské kolo není vykreslen graf s úspěšnostmi z jednotlivých krajů, protože se jedná o data pouze z Jihočeského a Olomouckého kraje, přičemž v Olomouckém kraji byla nulová úspěšnost.



## 2.6 Magnetické pole

### 2.6.1 Základní pojmy a vztahy

Magnetické pole, které vznikne v okolí permanentních magnetů a vodičů s konstantním proudem, a jeho veličiny se s časem nemění, se nazývá stacionární. Veličinu, která popisuje silové působení tohoto pole, je magnetická indukce, jejíž velikost se značí  $B$  a její jednotkou je tesla (T). Velikost magnetické síly  $F_m$  se poté vyjádří jako

$$F_m = BIl \sin \alpha,$$

kde  $I$  je elektrický proud procházející vodičem,  $l$  aktivní délka vodiče (taková délka vodiče, která je v magnetickém poli) a  $\alpha$  je úhel, který svírají magnetické indukční čáry a vodič.

Pro magnetické pole přímého vodiče platí Flemingovo pravidlo levé ruky a Ampérovo pravidlo pravé ruky. Pomocí Flemingova pravidla určujeme směr magnetické síly, pomocí Ampérova pravidla pravé ruky směr magnetických indukčních čar (magnetické indukce). Velikost magnetické indukce přímého vodiče lze vypočítat ze vztahu

$$B = \frac{\mu I}{2\pi d},$$

kde  $d$  je vzdálenost od přímého vodiče a  $\mu$  je permeabilita prostředí a je dána součinem permeability vakua  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ , a relativní permeability  $\mu_r$ , která je pro vakuum rovna jedné. Vztah je možné modifikovat pro velikost indukce magnetického pole solenoidu

$$B = \frac{\mu NI}{l},$$

kde  $N$  je počet závitů cívky, a také pro velikost magnetického pole ve středu smyčky

$$B = \frac{\mu I}{2r},$$

kde  $r$  je poloměr smyčky.

Kromě vztahů pro přímý vodič můžeme také definovat vztahy pro dva rovnoběžné vodiče s proudem, které vložíme do magnetického pole. Pro určení směru magnetických indukčních čar a magnetické síly se opět užívá Flemingova a Ampérova pravidla. Vztah pro magnetickou sílu dvou rovnoběžných vodičů vypadá následovně:

$$F_m = \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l,$$

kde  $I_1$  a  $I_2$  jsou proudy protékající prvním a druhým vodičem a  $d$  je vzdálenost vodičů.

I magnetické pole má svou intenzitu pole, jejíž velikost je dána vztahem

$$B = \mu H,$$

kde  $H$  je intenzita magnetického pole udávaná v jednotkách ampér na metr ( $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ ).

Magnetická síla, která působí na vodič, působí také na částice uvnitř vodiče, které vedou elektrický proud. Velikost magnetické síly, která působí na částici s nábojem  $Q$  se vyjadřuje vztahem

$$F_m = QvB \sin \alpha,$$

kde  $v$  je rychlost částice a  $\alpha$  je úhel, který svírá vektor rychlosti částice s vektorem magnetické indukce.

Pokud se magnetické pole s časem mění, označuje se jako nestacionární magnetické pole. Takové pole vzniká nejčastěji pohybujícím se vodičem nebo pohybem permanentního magnetu či elektromagnetu. Těsnou souvislost mezi magnetickým a elektrickým polem popisuje jev zvaný elektromagnetická indukce. Tento jev popisují dva zákony, Faradayův a Lenzův. Faradayův zákon definuje indukované napětí  $U_i$ :

$$U_i = -\frac{d\phi}{dt}, \quad (2.6.1)$$

tedy indukované napětí je záporná časová změna magnetického indukčního toku  $\phi$ , který je dán vztahem

$$\phi = BS \cos \alpha,$$

a jeho jednotkou je weber (Wb). Ve vztahu  $B$  je magnetická indukce,  $S$  plocha, ke které se magnetická indukce vztahuje, a  $\alpha$  je úhel mezi touto plochou a vektorem magnetické indukce. Znaménko ve vztahu (2.6.1) je vysvětleno Lenzovým zákonem, který definuje indukovaný proud, jenž působí svými účinky proti změně magnetického indukčního toku, která ho vyvolala.

Vztah (2.6.1) můžeme vyjádřit také jako

$$U_i = Blv,$$

kde  $l$  je délka vodiče, kterým pohybujeme, a  $v$  je rychlost pohybu. Pohyb je vykonáván kolmo k indukci  $B$ .

Podívejme se ještě na vlastní indukci – k takovému jevu dochází, pokud se proud v cívce stane proměnným v čase. Poté platí

$$U_i = -L \frac{dI}{dt}, \quad (2.6.2)$$

kde  $L$  je vlastní indukčnost cívky a její jednotkou je henry (H). Porovnáním vztahu (2.6.1) a (2.6.2) platí

$$\phi = LI.$$

Indukčnost je možné vyjádřit pomocí počtu závitů cívky  $N$

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l},$$

kde  $S$  je plocha závitu a  $l$  jeho poloměr. Energie magnetického pole cívky  $W_m$  je dána vztahem

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \phi I. \quad (2.6.3)$$

## 2.6.2 Řešené příklady

### 2.6.2.1 Stacionární magnetické pole

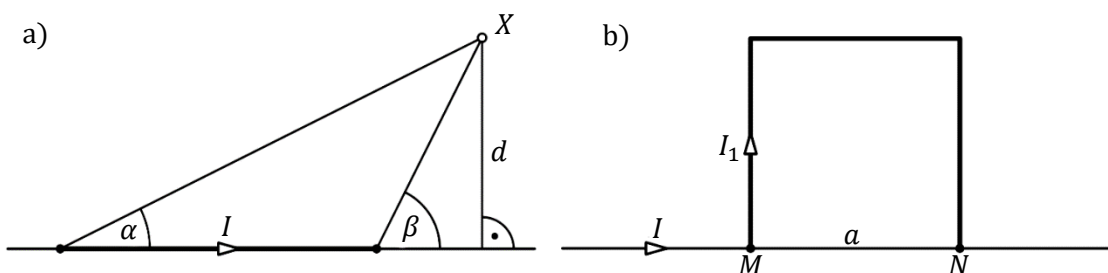
#### Příklad č. 36: FO42A2-4: Magnetická indukce ve smyčce

[50,00 %]

- a) Jak velká je magnetická indukce ve středu čtvercové smyčky o straně  $a$  ve vakuu, kterou prochází proud  $I$ ? Porovnejte ji s indukcí ve středu kruhové smyčky o stejné obvodu, kterou prochází stejný proud. Vodič tvaru úsečky (obr. 2.6.1a) vytváří magnetické pole, jehož indukce má v bodě  $X$  velikost

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\cos \alpha - \cos \beta).$$

- b) Dlouhým přímým vodičem ve vakuu prochází proud  $I$ . V bodech  $M, N$  je k němu připojena smyčka tvaru čtverce bez jedné strany vyrobená ze stejného materiálu (obr. 2.6.1b). Obsah průřezu vodiče smyčky je  $k$ -krát větší než obsah průřezu původního vodiče. Jak velký proud  $I_1$  prochází smyčkou?
- c) Jak velké musí být  $k$ , aby ve středu čtverce byla nulová magnetická indukce?



Obrázek 2.6.1: Magnetická indukce ve smyčce, k zadání úlohy FO42A2-4.

#### Řešení příkladu č. 36:

- a) Čtverec je tvořen čtyřmi úsečkami. Umístíme-li bod  $X$  do jeho středu, platí pro všechny úsečky v souladu s označením na obr. 2.6.1a:

$$d = \frac{a}{2}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \beta = 135^\circ, \quad \cos \alpha - \cos \beta = \sqrt{2}.$$

Indukce ve středu čtverce má velikost

$$B = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \sqrt{2} = \frac{2\mu_0 I}{\pi a} \sqrt{2}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Ve středu kruhové smyčky o poloměru  $r$  je indukce  $B' = \frac{\mu_0 I}{2r}$ . Aby měl kruh stejný obvod jako čtverec o straně  $a$ , musí platit  $r = \frac{4a}{2\pi} = \frac{2a}{\pi}$ . Indukce jsou tedy v poměru

$$\frac{B'}{B} = \frac{\frac{\mu_0 I}{2 \frac{2a}{\pi}}}{\frac{2\mu_0 I}{\pi a} \sqrt{2}} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16} \doteq 0,87.$$

Ve středu kruhu je o 13 % menší magnetická indukce než ve středu čtverce. **2 body**

- b) Označme  $R$  odpor úseku délky  $a$  původního vodiče. Smyčka pak má odpor  $\frac{3R}{k}$ . Podle Kirchhoffových zákonů

$$(I - I_1)R = I_1 \frac{3R}{k}, \quad I_1 = \frac{k}{3+k} I. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- c) Proud  $I - I_1$  tekoucí mezi kontakty  $M, N$  původním vodičem lze rozložit na proud  $I$  tekoucí doprava a proud  $I_1$  tekoucí doleva. Magnetické pole ve středu smyčky je tedy složeno z magnetického pole ve středu čtvercového závitu o straně  $a$ , kterým prochází proud  $I_1$  a pole ve vzdálenosti  $\frac{a}{2}$  od dlouhého přímého vodiče, kterým prochází proud  $I$ . Aby výsledná indukce byla nulová, musí platit

$$\frac{2\mu_0 I_1}{\pi a} \sqrt{2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{a}{2}}, \quad \text{z čehož} \quad 2\sqrt{2} = \frac{I}{I_1} = 1 + \frac{3}{k}$$

$$k = \frac{3}{2\sqrt{2}-1} = \frac{6\sqrt{2}+3}{7} \doteq 1,64. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

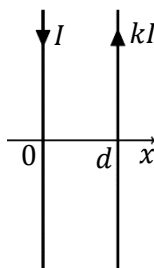
### Příklad č. 37: F057A2-3: Magnetické pole dvou vodičů

[42,96 %]

Dvěma rovnoběžnými dlouhými vodiči umístěnými ve vzájemné vzdálenosti  $d$  ve vakuu protékají v navzájem opačných směrech proudy  $I$  a  $kI$ , kde  $k \geq 1$  (obr. 2.6.2).

- Určete velikost magnetické indukce  $B_0$  v místě o souřadnici  $x = \frac{d}{2}$ .
- Určete souřadnici  $x_1$  místa mezi vodiči na ose  $x$ , v němž je velikost magnetické indukce nejmenší a velikost  $B_{\min}$  této minimální indukce.
- Určete souřadnici  $x_2$  místa na ose  $x$ , v němž je velikost magnetické indukce nulová.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $k = 1, k = 2,25$ .



**Obrázek 2.6.2:** Rovnoběžné vodiče s proudem, k zadání úlohy F057A2-3.

### Řešení příkladu č. 37:

- a) V pásu mezi vodiči má při nesouhlasných směrech proudů magnetická indukce souhlasný směr, velikosti magnetické indukce sečteme. Platí

$$B_0 = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{0,5d} + \frac{\mu}{2\pi} \frac{kI}{0,5d} = 2(k+1) \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{d}$$

Pro dané hodnoty  $k$  dostaneme  $B_0(1) = 4 \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{d}$ ,  $B_0(2,25) = 6,5 \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{d}$ . **2 body**

- b) Mezi vodiči, kde má magnetická indukce obou magnetických polí shodný směr kolmý k nákrešně, je velikost magnetické indukce dána vztahem

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{x} + \frac{\mu}{2\pi} \frac{kI}{d-x} = \frac{\mu I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{k}{d-x} \right), \quad (2.6.4)$$

kde  $0 < x < d$ . Označme  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{k}{d-x}$ . Derivací dostaneme

$$\frac{d}{dx} f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{k}{(d-x)^2}.$$

Z podmínky nulové derivace plyne  $\frac{1}{x^2} = \frac{k}{(d-x)^2}$ . Vzhledem k podmínky  $0 < x < d$  je rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$d - x = \sqrt{k}x,$$

z níž plyne  $x_1 = \frac{d}{\sqrt{k}+1}$ . Dosazením do (2.6.4) a úpravami dostaneme

$$B_{\min} = \frac{\mu I}{2\pi} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{k}{d-x_1} \right) = \frac{\mu I}{2\pi d} (\sqrt{k} + 1)^2.$$

Pro  $k = 1$  je v místě  $x_1(2.6.4) = 0,5d$  minimální velikost magnetické indukce

$$B_{\min}(1) = 4 \frac{\mu I}{2\pi d}.$$

Pro  $k = 2,25$  je v místě  $x_1(2,25) = 0,4d$  minimální velikost magnetické indukce

$$B_{\min}(2,25) = 6,25 \frac{\mu I}{2\pi d}. \quad \mathbf{5 \text{ bodů}}$$

- c) Pro  $k = 1$  neexistuje místo na ose, kde je indukce nulová, respektive pouze ve velké vzdálenosti se k nule blíží. Pro  $k > 1$  hledané místo leží vně vnitřního pásu určeného vodiči, kde má magnetická indukce navzájem opačný směr, a to v polovině přiléhající k vodiči s menším proudem. V této oblasti, tj. pro  $x < 0$ , platí

$$\frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{-x} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{kI}{-x+d}.$$

Z rovnice plyne

$$x_2 = \frac{d}{1-k}.$$

Pro  $k = 2,25$  je  $x_2(2,25) = -0,8d$ , tedy nulová indukce je ve vzdálenosti od levého vodiče.

**3 body**

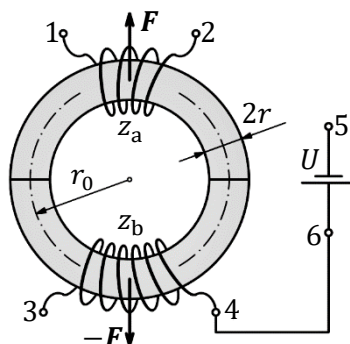
### Příklad č. 38: F043A2-4: Elektromagnet

**[32,08 %]**

Elektromagnet na obr. 2.6.3 sestává z ocelového jádra ve tvaru anuloidu rozděleného na dvě poloviny (které se dokonale dotýkají), a ze dvou cívek. Jedna má  $z_a = 160$  závitů a elektrický odpor  $R_a = 2,4 \Omega$ , druhá je vinuta ze stejného drátu a má  $z_b = 240$  závitů. Cívky jsou zapojeny do série a připojeny ke zdroji o konstantním napětí  $U = 6,0 \text{ V}$ . V závislosti na propojení cívek je v jednom případě zapotřebí k odtržení obou polovin jádra od sebe síla  $F_1 = 518 \text{ N}$ , ve druhém případě síla  $F_2 = 63,5 \text{ N}$ . Jádro má střední poloměr  $r_0 = 100 \text{ mm}$  a kruhový průřez o poloměru  $r = 12 \text{ mm}$ .

- a) Na základě úvahy rozhodněte o spojení nezapojených vývodů cívek v prvním a druhém případě.

- b) Vypočtete velikost relativní permeability oceli  $\mu_{r_1}$ ,  $\mu_{r_2}$  v uvažovaných případech.  
 c) Vypočtete energii magnetického pole elektromagnetu v uvažovaných případech.  
 Permeabilita vakua je  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .



**Obrazek 2.6.3:** Elektromagnet, k zadání úlohy FO43A2-4.

**Řešení příkladu č. 38:**

- a) Ze zákona celkového proudu je zřejmé, že když oběma cívkami bude procházet proud souhlasného směru, bude magnetické pole intenzivnější a síly, kterými se vzájemně přitahují obě půlky jádra, budou větší. Proto v případě síly

$$F_1 \text{ musí být spojeny svorky } 2-3, 1-5,$$

$$F_2 \text{ musí být spojeny svorky } 1-3, 2-5.$$

**2 body**

- b) Nejprve určíme proud procházející cívkami. Cívka „b“ má odpor

$$R_b = R_a \frac{z_b}{z_a} = 3,6 \Omega.$$

Celkový odpor je  $R_a + R_b = 6,0 \Omega$  a cívkami protéká proud  $I = 1,0 \text{ A}$ . Pro nosnou sílu elektromagnetu platí v případě nulové vzduchové mezery ( $\delta = 0$ ) vzorec:

$$F = \mu_0 S \left( \frac{\mu_r z I}{l} \right)^2, \quad \text{kde} \quad S = \pi r^2, \quad l = 2\pi r_0,$$

$$z = z_a + z_b \text{ pro sílu } F_1, \quad z = z_b - z_a \text{ pro sílu } F_2.$$

Pak

$$\mu_{r_1} = \frac{z}{(z_a + z_b) l} \frac{r_0}{r} \sqrt{\frac{\pi F_1}{\mu_0}} = 1500, \quad \mu_{r_2} = \mu_{r_1} \frac{z_a + z_b}{z_b - z_a} \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} = 2625. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- c) energii elektromagnetu  $E_{\text{mg}}$  určíme užitím její hustoty:

$$E_{\text{mg}} = \omega_{\text{mg}} V = \frac{1}{2} B H V = \frac{1}{2} \mu H^2 S l.$$

Intenzitu  $H$  určíme ze zákona celkového proudu:

$$2\pi r_0 H = z I, \quad \text{z čehož} \quad H = \frac{z I}{2\pi r_0}.$$

Pak

$$E_{\text{mg}} = \frac{\mu_0 \mu_r z^2 I^2 r^2}{4 r_0} = \frac{z I r}{2} \sqrt{\pi \mu_0 F}.$$

(Akceptovatelná jsou obě vyjádření.)

$$E_{mg_1} = \frac{(z_a + z_b)lr}{2} \sqrt{\pi \mu_0 F_1} = 0,109 \text{ J},$$

$$E_{mg_2} = E_{mg_1} \frac{z_b - z_a}{z_a + z_b} \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} = 7,60 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

**4 body**

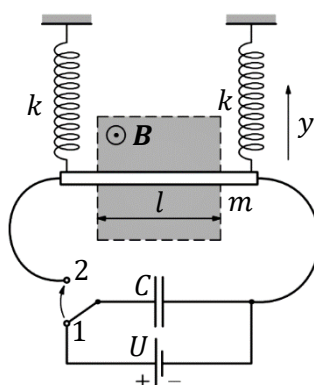
**Příklad č. 39: FO45B2-2: Vodič na pružinách**

**[25,57 %]**

Na dvou stejných pružinách o stejné tuhosti  $k$  a zanedbatelné hmotnosti je zavěšen masivní vodorovný přímý vodič o hmotnosti  $m$ , jehož úsek délky  $l$  se nachází ve svislé mezeře elektromagnetu (obr. 2.6.4). Magnetická indukce  $\mathbf{B}$  v mezeře má vodorovný směr a je orientována před nákresu. Vodorovný vodič je tenkými ohebnými vodiči o zanedbatelné hmotnosti zapojen do elektrického obvodu s kondenzátorem o kapacitě  $C$  a přepínačem. Pomocí přepínače v poloze 1 nejprve kondenzátor připojíme ke zdroji o svorkovém napětí  $U$ . Pak přepneme do polohy 2 a kondenzátor vybijeme přes vodorovný vodič, který tím uvedeme do mechanických kmitů. Odpor obvodu je malý a jeho indukčnost zanedbatelná, takže vybití kondenzátoru proběhne jako aperiodický děj, jehož trvání je velmi krátké ve srovnání s periodou mechanických kmitů vodiče.

- Určete periodu mechanických kmitů vodiče.
- Určete velikost  $v_0$  rychlosti vodiče bezprostředně po vybití kondenzátoru a porovnejte jeho kinetickou energii v tomto okamžiku s elektrickou energií kondenzátoru před jeho vybitím.
- Určete amplitudu kmitů vodiče.
- Vyjádřete okamžitou výchylku  $y$  vodiče z rovnovážné polohy během kmitání jako funkci času, jestliže osa  $y$  vztažné soustavy je orientována vzhůru.

Úlohu řešte obecně a pak pro hodnoty:  $k = 2,0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $m = 0,150 \text{ kg}$ ,  $l = 120 \text{ mm}$ ,  $B = 0,70 \text{ T}$ ,  $C = 1\,000 \text{ } \mu\text{F}$  a  $U = 500 \text{ V}$ .



**Obrázek 2.6.4:** Vodič na pružinách, k zadání úlohy FO45B2-2.

**Řešení příkladu č. 39:**

a) Perioda mechanických kmitů vodiče je  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 1,22$  s. **1,5 bodu**

b) Při vybíjení kondenzátoru prochází vodorovným vodičem proud zleva doprava a na vodič působí podle Flemingova pravidla levé ruky směrem dolů magnetická síla o velikosti  $F_m = BIl$ , kde  $I$  je okamžitá hodnota proudu. Změna hybnosti vodiče za velmi krátkou dobu  $\Delta t$  má velikost

$$m\Delta v = F_m\Delta t = BIl\Delta t = Bl\Delta Q,$$

kde  $\Delta Q$  je úbytek náboje na kondenzátoru za uvažovanou dobu  $\Delta t$ . Během úplného vybití kondenzátoru získá vodorovný vodič hybnost  $mv_0 = BlQ = BlCU$ . Počáteční rychlost kmitavého pohybu bude směřovat dolů a bude mít velikost

$$v_0 = \frac{BlCU}{m} = 0,28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

Vodorovný vodič získá kinetickou energii  $E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{B^2k^2U^2C^2}{2m} = 0,0059$  J, která je nepatrná ve srovnání s energií nabitého kondenzátoru

$$E_C = \frac{1}{2}CU^2 = 125 \text{ J}.$$

Téměř celá energie kondenzátoru se při jeho vybití spotřebuje na Joulovo teplo.

**1,5 bodu**

c) Amplituda kmitů je  $y_m = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{2k}{m}}} = \frac{BlCU}{\sqrt{2km}} = 5,4$  cm. **1,5 bodu**

d) Protože kmitavý pohyb vodorovného vodiče začíná z rovnovážné polohy směrem dolů, má rovnice okamžité výchylky tvar

$$y = -y_m \sin(\omega t) = -\frac{BlCU}{\sqrt{2km}} \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right).$$

Pro číselné hodnoty platí  $\{y\} = -5,4 \cdot 10^{-2} \sin(5,2\{t\})$ . **1,5 bodu**

*Pozn.:* Zanedbali jsme fakt, že vodorovný vodič se při kmitání v magnetickém poli stává zdrojem střídavého napětí o amplitudě  $U_m = Blv_0 = 0,024$  V, ke kterému zůstal připojen kondenzátor. Ten má při nízké frekvenci kmitů značnou kapacitní reaktanci a obvodem prochází jen velmi malý střídavý proud o amplitudě

$$I_m = \frac{U_m}{X_C} = Blv_0\omega C = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ A},$$

který předbíhá napětí o čtvrtinu periody. Na vodorovný vodič tedy působí kromě tíhové síly pružin ještě síla magnetická, která je přímo úměrná okamžité výchylce a je v souladu s Lenzovým zákonem namířena směrem od rovnovážné polohy. Tato proměnná síla má však jen nepatrnou amplitudu

$$F_m = BI_m l = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

a můžeme ji zanedbat.

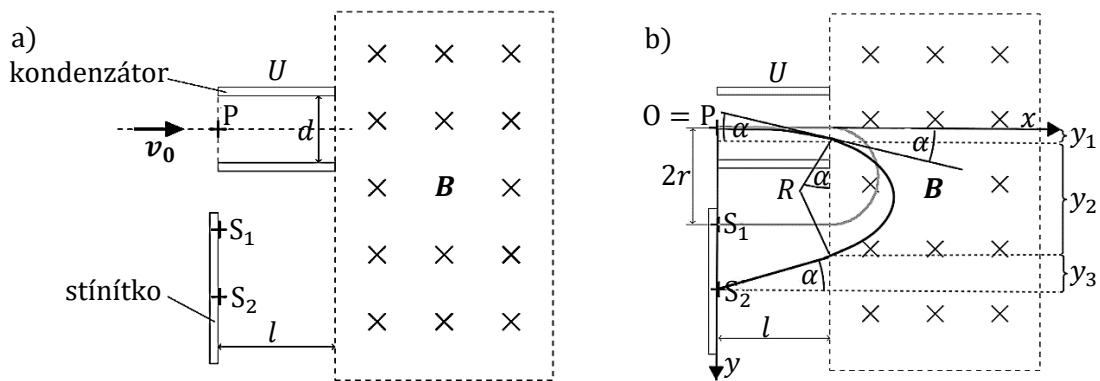


**Příklad č. 40: FO58B2-3: Pohyb elektronů v elektrickém a v magnetickém poli** **[15,19 %]**

Desky kondenzátoru jsou od sebe vzdáleny 6,0 cm a jejich délka je  $l = 8,0$  cm. V bodě P, který je uprostřed mezi deskami kondenzátoru, vstupuje do elektrického pole proud elektronů urychlených na rychlost  $v_0 = 4,0 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  rovnoběžně s deskami kondenzátoru. Vedle kondenzátoru je magnetické pole, jehož vektor magnetické indukce je rovnoběžný s deskami kondenzátoru a kolmý k počáteční rychlosti elektronu (obr. 2.6.5a). Elektrony po průchodu magnetickým polem dopadají na stínítko, kde lze odečítat jejich stopu. Není-li kondenzátor nabit, dopadají elektrony do bodu  $S_1$ , který je od bodu P vzdálen  $\overline{PS_1} = 7,0$  cm. Bude-li na kondenzátoru napětí  $U = 24$  V, dopadnou elektrony do bodu  $S_2$ .

- Určete vzdálenost bodu  $S_2$  od bodu P, velikost a směr rychlosti  $v$  elektronů dopadajících na stínítko.
- Budeme-li měnit napětí na kondenzátoru, budou elektrony dopadat do různých míst na stínítku. Určete polohu bodu  $S_3$ , nejvíce vzdáleného od bodu P, do kterého ještě mohou elektrony dopadat, a napětí  $U_1$ , při kterém se tak stane. Jaká bude v tomto případě rychlost dopadajících elektronů  $v_1$ ?

Hmotnost elektronu  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg můžeme považovat za konstantní, elementární náboj  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Elektrické pole mezi deskami kondenzátoru považujte za homogenní.



**Obrázek 2.6.5:** Pohyb elektronů v elektrickém a magnetickém poli, k úloze FO58B2-3: (a) k zadání, (b) k řešení.

**Řešení příkladu č. 40:**

- Nebude-li na kondenzátoru napětí, budou se elektrony v magnetickém poli pohybovat po půlkružnici s poloměrem  $r = \frac{\overline{PS_1}}{2}$ . Dostředivou silou je síla magnetická, pak

$$Bev_0 = \frac{m_e v_0^2}{r}, \quad \text{z čehož} \quad B = \frac{m_e v_0}{er} = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ T.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Po vložení napětí na desky kondenzátoru se elektrony mezi deskami pohybují po trajektorii ve tvaru části paraboly a opouští elektrické pole v místě o souřadnici

$$y_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{eU}{2m_e d} \frac{l^2}{v_0^2} = 1,4 \text{ cm}$$

rychlostí, jejíž složky jsou  $v_x = v_0$  a  $v_y = at = \frac{eUl}{m_e d v_0}$ . Výstupní rychlost  $v$  pak svírá se vstupní rychlostí  $v_0$  úhel  $\alpha$ , pro který platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eUl}{m_e d v_0^2}, \quad \text{z čehož} \quad \alpha = 19,4^\circ$$

a její velikost je  $v = \frac{v_0}{\cos \alpha} = 4,24 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

V magnetickém poli se pak elektrony pohybují stálou rychlostí  $v$  po části kružnice s poloměrem

$$R = \frac{m_e v}{eB} = \frac{\frac{m_e v_0}{\cos \alpha}}{e \frac{m_e v_0}{er}} = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{\overline{PS}_1}{2 \cos \alpha} = 3,7 \text{ cm}.$$

Z magnetického pole elektrony vystoupí ve vzdálenosti

$$y_2 = 2R \cos \alpha = 2r = \overline{PS}_1 = 7 \text{ cm},$$

kteřá nezávisí na napětí mezi deskami kondenzátoru, a dále se pohybují po přímce, která svírá s rovinou desek kondenzátoru úhel  $\alpha$  a na stínítku dopadnou ve vzdálenosti

$$\overline{PS}_2 = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{eU}{2m_e d} \frac{l^2}{v_0^2} + 2R \cos \alpha + l \operatorname{tg} \alpha = \frac{eU}{2m_e d} \frac{l^2}{v_0^2} + 2r + \frac{eUl^2}{m_e d v_0^2},$$

$$\overline{PS}_2 = \frac{3eU}{2m_e d} \frac{l^2}{v_0^2} + 2r = 0,112 \text{ m} = 11,2 \text{ cm}.$$

Elektrony tedy dopadají na stínítko ve vzdálenosti 11,2 cm od bodu P rychlostí o velikosti  $v = 4,24 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pod úhlem  $\alpha = 19,4^\circ$  (měřeno od kolmice ke stínítku).

**5 bodů**

- b) Napětí  $U_1$  může být nejvýše takové, aby elektrony ještě procházely mezi deskami a nedopadaly na jednu z nich. V tomto případě platí

$$y_1' = \frac{d}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{eU_1}{2m_e d} \frac{l^2}{v_0^2}, \quad \text{z čehož} \quad U_1 = \frac{m_e d^2 v_0^2}{e l^2} = 51,2 \text{ V}.$$

Pak

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_0} = \frac{eU_1 l}{m_e d v_0^2}, \quad \text{z čehož} \quad \beta = 36,7^\circ$$

velikost rychlostí dopadu  $v_1 = \frac{v_0}{\cos \beta} = 5,0 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a vzdálenost

$$\overline{PS}_3 = y_1' + y_2' + y_3' = \frac{d}{2} + \overline{PS}_1 + \frac{eU_1 l^2}{m_e d v_0^2} = 3,0 \text{ cm} + 7,0 \text{ cm} + 6,0 \text{ cm} = 16,0 \text{ cm}.$$

Aby elektrony dopadaly ještě na stínítko, musí být napětí  $U_1$  menší než 51,2 V.

Elektrony budou dopadat nejdále do bodu  $S_3$  vzdáleném od bodu P o  $\overline{PS}_3 = 16 \text{ cm}$ , rychlostí o velikosti  $v_1 = 5,0 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , která svírá s kolmicí ke stínítku úhel  $\beta = 36,7^\circ$ .

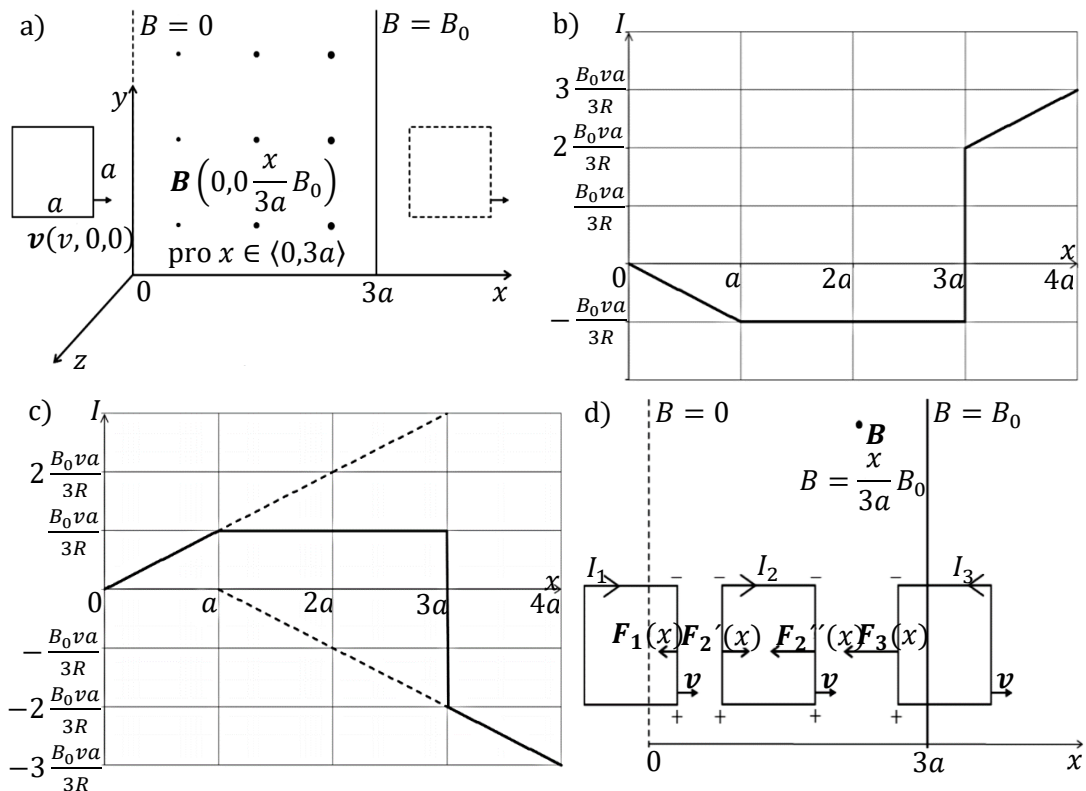
**4 body**

## 2.6.2 Nestacionární magnetické pole

### Příklad č. 41: FO62A3-4: Rámeček tažený magnetickým polem [48,17 %]

V rovinné vrstvě tloušťky  $3a$  orientované kolmo k ose  $x$  se nachází magnetické pole, jehož magnetická indukce má směr osy  $z$  a velikost přímo úměrnou souřadnici  $x$  s maximem  $B_0$  pro  $x = 3a$ . Všude vně této vrstvy je magnetická indukce nulová. Vodič o celkovém odporu  $R$  je vytvarován do čtvercového rámečku s délkou strany  $a$ . Čtvercový rámeček se nachází v rovině  $xy$  mimo magnetické pole vlevo od vrstvy a jeho strany jsou rovnoběžné s osami  $x$  a  $y$ . Rámeček rovnoměrně posouváme ve směru osy  $x$  magnetickým polem stálou rychlostí o velikosti  $v$ , dokud se celý neocitne opět mimo magnetické pole.

- Sestrojte graf závislosti proudu v rámečku na poloze určené souřadnicí  $x$  pravé strany rámečku, tj. pro  $x \in \langle 0; 4a \rangle$ .
- Určete celkovou práci nutnou k rovnoměrnému posunutí rámečku skrz magnetické pole.
- Určete elektrický náboj, který během pohybu rámečku magnetickým polem projde s rozlišením směru daným průřezem vodiče.



**Obrázek 2.6.6:** Rámeček tažený magnetickým polem, k úloze FO62A3-4: (a) k zadání, (b-d) k řešení.

### Řešení příkladu č. 41:

a) Užijeme

$$\begin{aligned} dx &= v dt, \\ U_i &= -\frac{d\phi}{dt} = -v \frac{d\phi}{dx}, \\ I &= \frac{U_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{v}{R} \frac{d\phi}{dx}. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

V první fázi pro  $x \in \langle 0; a \rangle$  je indukční tok procházející rámečkem

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2} B(x) S(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{3a} B_0 a x = \frac{B_0}{6} x^2.$$

Faktor  $\frac{1}{2}$  vychází z toho, že díky linearitě použijeme průměrnou hodnotu indukce  $B$ .

V druhé fázi pro  $x \in \langle a; 3a \rangle$  je indukční tok procházející rámečkem

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{3a} B_0 + \frac{x-a}{3a} B_0 \right) a^2 = \frac{B_0}{6} a (2x - a).$$

V třetí fázi pro  $x \in \langle 3a; 4a \rangle$  je indukční tok procházející rámečkem

$$\phi_3(x) = \frac{1}{2} \left( B_0 + \frac{x-a}{3a} B_0 \right) a (4a - x) = \frac{B_0}{6} (-x^2 + 2ax + 8a^2).$$

Podle vztahu (2.6.5) dostaneme v jednotlivých fázích proudy

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{v}{R} \frac{d\phi_1(x)}{dx} = -\frac{v}{R} \frac{B_0}{6} \frac{d}{dx} x^2 = -\frac{B_0 v}{3R} x, \\ I_2 &= -\frac{v}{R} \frac{d\phi_2(x)}{dx} = -\frac{v}{R} \frac{B_0}{6} a \frac{d}{dx} (2x - a) = -\frac{B_0 v}{3R} a = \text{konst.}, \\ I_3 &= -\frac{v}{R} \frac{d\phi_3(x)}{dx} = -\frac{v}{R} \frac{B_0}{6} a \frac{d}{dx} (-x^2 + 2ax + 8a^2) = \frac{B_0 v}{3R} (x - a). \end{aligned}$$

V první a druhé fázi je proud záporný, protože indukční tok procházející rámečkem roste, ve třetí fázi je proud kladný, protože indukční tok klesá. **4 body**

b) V první fázi pro  $x \in \langle 0; a \rangle$  působí na pravý vodič, a tedy na rámeček, magnetická síla o velikosti

$$F_1(x) = B(x) I_1(x) a = \frac{x}{3a} B_0 \frac{B_0 v}{3R} x a = \frac{B_0^2 v}{9R} x^2.$$

Práce stejně velké vnější síly opačného směru je

$$W_1 = \int_0^a F_1(x) dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \int_0^a x^2 dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{B_0^2 v}{27R} a^3.$$

V druhé fázi pro  $x \in \langle a; 3a \rangle$  působí na rámeček výsledná magnetická síla o velikosti

$$\begin{aligned} F_2(x) &= F_2'(x) - F_2''(x) = B'(x) I_2 a - B''(x) I_2 a, \\ F_2(x) &= \frac{x}{3a} B_0 \frac{B_0 v}{3R} a^2 - \frac{x-a}{3a} B_0 \frac{B_0 v}{3R} a^2 = \frac{B_0^2 v}{9R} a^2 = \text{konst.}, \end{aligned}$$

práce stejně velké vnější síly opačného směru je

$$W_2 = \int_0^{3a} F_2(x) dx = \frac{B_0^2 v}{9R} a^2 \int_0^{3a} dx = \frac{B_0^2 v}{9R} a^2 [x]_0^{3a} = \frac{2B_0^2 v}{9R} a^3,$$

nebo vzhledem ke konstantní síle přímo

$$W_2 = F_2 \cdot 2a = \frac{6B_0^2 v}{27R} a^3 = \frac{2B_0^2 v}{9R} a^3.$$

Ve třetí fázi pro  $x \in \langle 3a; 4a \rangle$  působí na levý vodič, a tedy na rámeček, magnetická síla o velikosti

$$F_3(x) = B(x)I_3(x)a = \frac{x-a}{3a} B_0 \frac{B_0 v}{3R} (x-a)a = \frac{B_0^2 v}{9R} (x-a)^2.$$

Práce stejně velké vnější síly opačného směru je

$$W_3 = \int_{3a}^{4a} F_3(x) dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \int_{3a}^{4a} (-x^2 + 2ax + 8a^2) dx.$$

$$W_3 = \frac{B_0^2 v}{9R} \left[ \frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2 x \right]_{3a}^{4a} = \frac{19B_0^2 v}{27R} a^3$$

Celková práce vykonaná vnější silou je  $W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{26B_0^2 v}{27R} a^3$ . **4 body**

- c) Využijeme graf získaný v části a) a obsah plochy mezi tímto grafem a osou  $x$ . Během první a druhé fáze teče proud jedním směrem, během třetí fáze teče proud opačně. Uvažovaná plocha pro první a druhou fázi má stejnou velikost jako plocha pro třetí fázi.

Označme  $T = \frac{a}{v}$  dobu, za kterou se rámeček posune o délku  $a$ . Jednotkovému obsahu plochy  $I_2 a$  odpovídá náboj  $\Delta Q$ , pro který platí

$$I_2 a = \frac{\Delta Q}{T} a = \Delta Q \frac{a}{T} = \Delta Q v.$$

Celkový obsah plochy je  $\frac{5}{2} I_2 a$  a celkový náboj

$$Q = \frac{5}{2} \Delta Q = \frac{5B_0 a^2}{6R}.$$

Tento náboj projde v první a druhé fázi jedním směrem a ve třetí fázi opačným směrem. **2 body**

*Alternativní řešení všech částí úlohy jsou dostupná na oficiálních stránkách FO.*

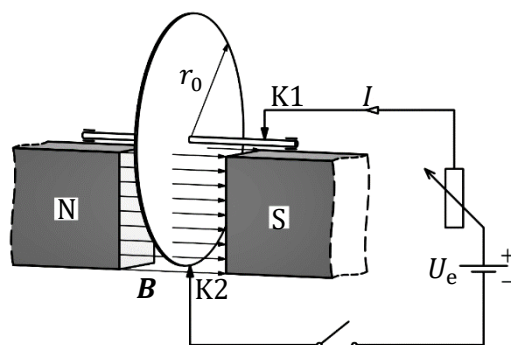
#### **Příklad č. 42: F045A3-2: Barlowovo kolečko**

**[38,20 %]**

Barlowovo kolečko (obr. 2.6.7) je jednoduchý motor, jehož konstrukce je obdobná jako u Faradayova kotouče, avšak činnost je opačná. Ze zdroje o elektromotorickém napětí  $U_e = 3,0$  V přivedeme elektrický proud do kovového kotouče přes kluzný kontakt K1 dotýkající se osy kotouče a kapalný kontakt K2 realizovaný pomocí nádoby se rtutí, která se dotýká dolního okraje kotouče. Odpor obvodu můžeme regulovat reostatem v rozmezí od  $R_1 = 3,0 \Omega$  do  $R_2 = 6,0 \Omega$ . Dolní část kotouče mezi osou a kontaktem K2 se nachází v příčném magnetickém poli mezi póly magnetu. Pro jednoduchost předpokládejte, že v celé této oblasti má magnetická indukce konstantní velikost  $B = 800$  mT. Působením magnetického pole se kotouč roztočí. Kotouč má poloměr  $r_0 = 120$  mm, moment setrvačnosti kotouče i s osou je  $J = 5,0 \cdot 10^{-4}$  kg  $\cdot$  m<sup>2</sup>. Mechanické odporové síly neuvažujte.

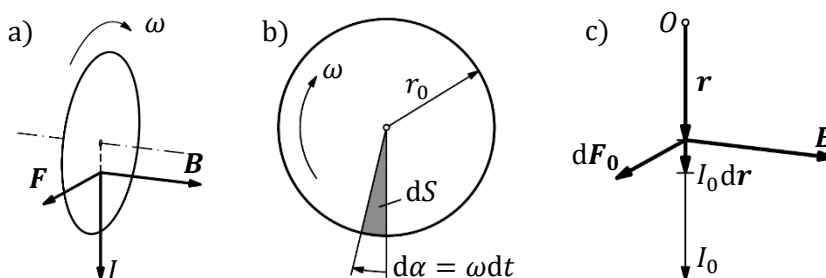
- a) Určete směr otáčení kolečka při pohledu od jižního k severnímu pólu magnetu.

- b) Vypočtete mezní úhlovou rychlost  $\omega_m$  kolečka pro obě mezní hodnoty  $R_1$  a  $R_2$  odporu obvodu.
- c) Určete počáteční úhlové zrychlení  $\varepsilon_{0_1}$  a  $\varepsilon_{0_2}$  kotouče po zapnutí elektrického proudu pro obě mezní hodnoty  $R_1$  a  $R_2$  odporu obvodu.
- d) Odvoďte funkční závislost úhlové rychlosti na čase a vypočtete úhlovou rychlost  $\omega_1$  a  $\omega_2$  po uplynutí deseti sekund od zapnutí proudu pro obě uvažované hodnoty odporu  $R_1$  a  $R_2$ .



**Obrázek 2.6.7:** Barlowovo kolečko, k zadání úlohy FO45A3-2.

**Řešení příkladu č. 42:**



**Obrázek 2.6.8:** Barlowovo kolečko, k řešení úlohy FO45A3-2.

- a) Flemingovým pravidlem levé ruky určíme, že kotouč se bude při pohledu od jižního pólu magnetu k pólu severnímu otáčet ve směru hodinových ručiček (obr. 2.6.8a).

**1 bod**

- b) Otáčí-li se kotouč v magnetickém poli, vzniká v něm indukované elektrické pole. Indukované napětí bude:

$$U_i = -\frac{d\phi}{dt} = -B \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} B \omega r_0^2,$$

neboť podle obr. 2.6.8b  $dS = \frac{1}{2} r_0^2 d\alpha = \frac{1}{2} r_0^2 \omega dt$ .

Indukované napětí je namířeno proti elektromotorickému napětí zdroje. V mezním případě rotace úhlovou rychlostí  $\omega_m$  by se obě napětí vyrovnala a obvodem by neprocházel proud

$$U_e + U_i = 0, \quad \text{z čehož} \quad U_e = \frac{1}{2} B \omega_m r_0^2, \quad \text{z čehož} \quad \omega_m = \frac{2U_e}{Br_0^2} = 521 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Mezní úhlová rychlost zřejmě nezávisí na odporu obvodu, je tedy stejná pro odpor  $R_1$  i  $R_2$ . **3 body**

- c) Počáteční úhlové zrychlení  $\varepsilon_0$  je dáno pohybovou rovnicí pro  $\omega = 0$ , kdy se ještě v kotouči neindukuje napětí. Platí

$$M_0 = J\varepsilon_0,$$

kde  $M_0$  je velikost počátečního momentu magnetických sil působících na kotouč, když obvodem prochází počáteční proud  $I_0 = \frac{U_e}{R}$ . Určíme jej integrací elementárních momentů síly  $\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_0$  o velikosti  $BI_0 r dr$  (obr. 2.6.8c). Pak

$$M_0 = BI_0 \int_0^{r_0} r dr = \frac{BI_0 r_0^2}{2} = \frac{BU_e r_0^2}{2R}.$$

Počáteční úhlové zrychlení je

$$\varepsilon_0 = \frac{M_0}{J} = \frac{BU_e r_0^2}{2RJ}.$$

Pro  $R = R_1$  dostaneme  $\varepsilon_{0_1} = 11,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ ,

pro  $R = R_2$  dostaneme  $\varepsilon_{0_2} = 5,76 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ . **2 body**

- d) Při rotaci se bude v kotouči indukovat napětí  $U_i$  (viz bod b), které je namířeno proti napětí  $U_e$ . Obvodem bude procházet proud  $I < I_0$ :

$$I = \frac{U_e + U_i}{R} = \frac{1}{R} \left( U_e - \frac{Br_0^2 \omega}{2} \right)$$

a v souladu s odvozením v bodě c) bude na kotouč působit menší hnací moment síly

$$M = \frac{BIr_0^2}{2} = \frac{Br_0^2}{2R} \left( U_e - \frac{Br_0^2 \omega}{2} \right).$$

Pohybová rovnice pak je

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{Br_0^2}{2R} \left( U_e - \frac{Br_0^2 \omega}{2} \right) = \frac{B^2 r_0^4}{4R} \left( \frac{2U_e}{Br_0^2} - \omega \right) = \frac{B^2 r_0^4}{4R} (\omega_m - \omega),$$

kde  $\omega_m$  je mezní úhlová rychlost. Provedeme separaci proměnných a integraci:

$$\int_0^\omega \frac{d\omega}{\omega_m - \omega} = -\ln \frac{\omega_m - \omega}{\omega_m} = \frac{B^2 r_0^4}{4RJ} t, \quad \frac{\omega_m - \omega}{\omega_m} = 1 - \frac{\omega}{\omega_m} = e^{-\frac{B^2 r_0^4}{4RJ} t},$$

$$\omega = \omega_m \left( 1 - e^{-\frac{B^2 r_0^4}{4RJ} t} \right) = \frac{2U_e}{Br_0^2} \left( 1 - e^{-\frac{B^2 r_0^4}{4RJ} t} \right).$$

V čase  $t = 10 \text{ s}$  pro  $R = R_1$  dostaneme  $\omega_1 = 103 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , pro  $R = R_2$  dostaneme  $\omega_2 = 54,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . **4 body**

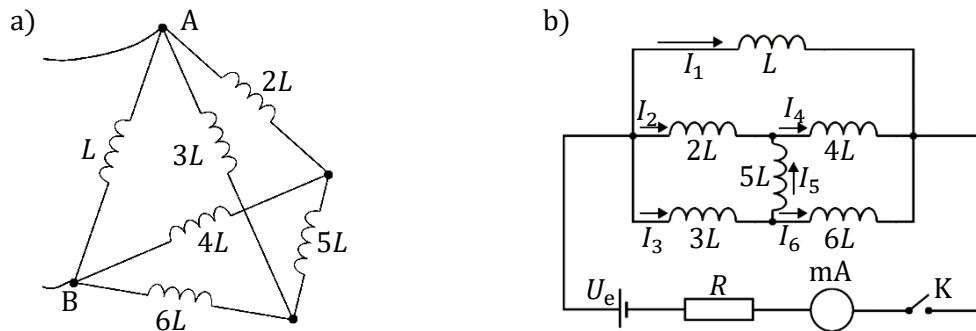
### Příklad č. 43: FO62A3-1: Čtyřstěn s cívkami

[30,68 %]

Šest ideálních cívek je spojeno tak, že tvoří hrany čtyřstěnu (obr. 2.6.9a). K cívce o vlastní indukčnosti  $L = 2 \text{ mH}$ , zapojené mezi body A a B, připojíme ideální zdroj s elektromotorickým napětím  $U_e = 4,5 \text{ V}$ ; v sérii se zdrojem pak rezistor o odporu

$R = 100 \Omega$ , miliampérmetr se zanedbatelným vnitřním odporem a klíč, který je rozepnutý. Vzájemná indukčnost cívek je zanedbatelná.

- a) Připojíme-li sériově zapojený rezistor o odporu  $R$  a cívku o indukčnosti  $L$  k ideálnímu zdroji stejnosměrného napětí, platí pro závislost proudu na čase od sepnutí obvodu  $I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ . Odvod'te tento vztah.
- b) Jaký proud ukáže miliampérmetr 30 s po zapnutí klíče v našem schématu?
- c) Jaký proud protéká každou z cívek k okamžiku, kdy miliampérmetr ukazuje proud  $I_A = 34,5 \text{ mA}$ ?



**Obrázek 2.6.9:** Čtyřstěn s cívkami, k úloze FO62A3-1: (a) k zadání, (b) k řešení.

**Řešení příkladu č. 43:**

- a) Při zapnutí proudu se na cívce indukuje napětí, takže pro procházející proud platí:

$$I = \frac{U_e - L \frac{dI}{dt}}{R}$$

Označíme-li konečný proud  $I_0 = \frac{U_e}{R}$ , pak  $I_0 - I = \frac{L}{R} \frac{dI}{dt}$ . Napíšeme-li  $dI = -d(I_0 - I)$ , vychází

$$\frac{d(I_0 - I)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L} dt$$

Integrací této diferenciální rovnice obdržíme

$$\ln(I_0 - I) = -\frac{R}{L}t + \ln C$$

Integrační konstantu stanovíme z počátečních podmínek. Pro  $t = 0$  je  $I = 0$  a tedy  $\ln C = \ln I_0$ , takže platí

$$\ln \frac{I_0 - I}{I_0} = -\frac{R}{L}t \quad \text{neboli} \quad I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- b) Bez ohledu na celkovou indukčnost zapojení cívek má podíl  $\frac{R}{L}$  hodnotu řádově  $10^4$  až  $10^5 \text{ s}^{-1}$ . V čase 30 s po zapojení klíče bude tedy hodnota proudu již stálá a rovna hodnotě

$$I_0 = \frac{U_e}{R} = 45 \text{ mA} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$



c) Schéma překreslíme (viz. obr. 2.6.9b). Podle prvního Kirchhoffova zákona

$$I_2 + I_5 = I_4, \quad I_3 = I_5 + I_6, \quad I_A = I_1 + I_2 + I_3.$$

Hodnotu 34,5 mA ukazuje miliampérmetr v době, kdy proud v obvodu není stálý a na cívkách se indukují napětí, které závisí na indukčnosti každé cívky.

Na každé cívce se při změně proudu indukují napětí  $U_i = -L \frac{dI}{dt}$ . Zapišeme Kirchhoffovy zákony pro smyčky, které neobsahují zdroj:

$$-2L \frac{dI_2}{dt} + 5L \frac{dI_5}{dt} + 3L \frac{dI_3}{dt} = 0,$$

nebo

$$-2L\Delta I_2 + 5L\Delta I_5 + 3L\Delta I_3 = 0.$$

Protože počáteční proud je roven nule, můžeme napsat

$$-2I_2 + 5I_5 + 3I_3 = 0.$$

Analogicky můžeme napsat

$$-I_1 + 4I_4 + 2I_2 = 0.$$

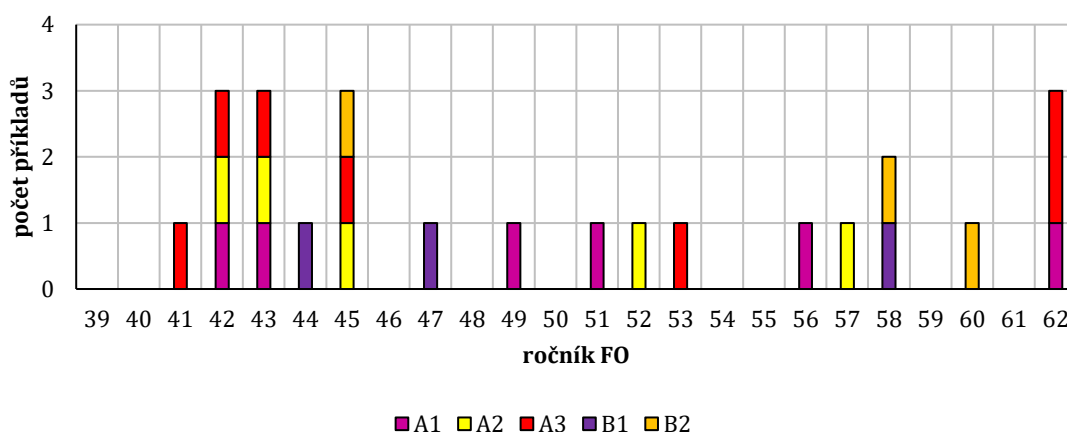
$$-4I_4 - 5I_5 + 6I_6 = 0.$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme:  $I_1 = 27$  mA,  $I_2 = I_4 = 4,5$  mA,  $I_3 = I_6 = 3$  mA,  $I_5 = 0$  mA.

**5 bodů**

*Alternativní řešení části c) je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

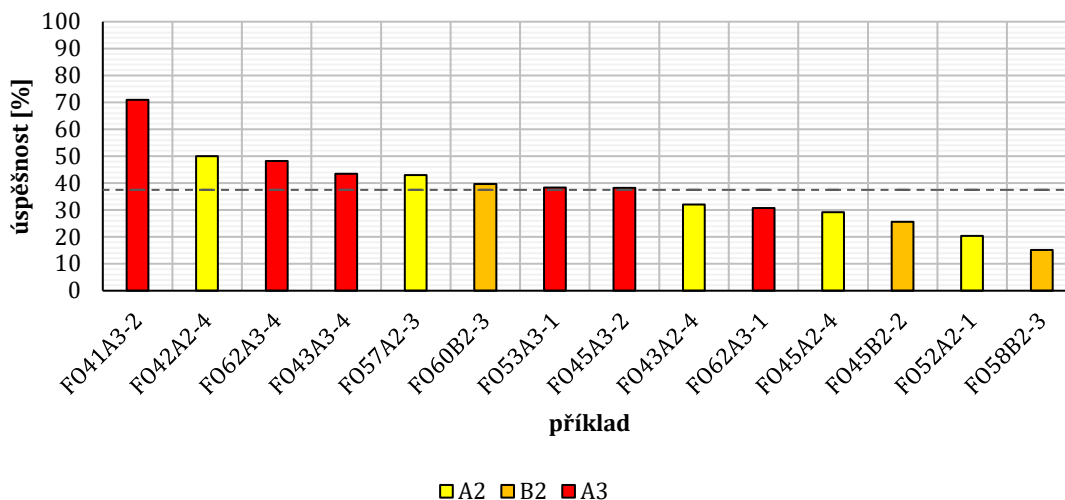
## 2.6.3 Statistická úspěšnost příkladů



**Obrázek 2.6.10:** Zastoupení příkladů na magnetické pole v jednotlivých ročnících a kolech fyzikální olympiády.

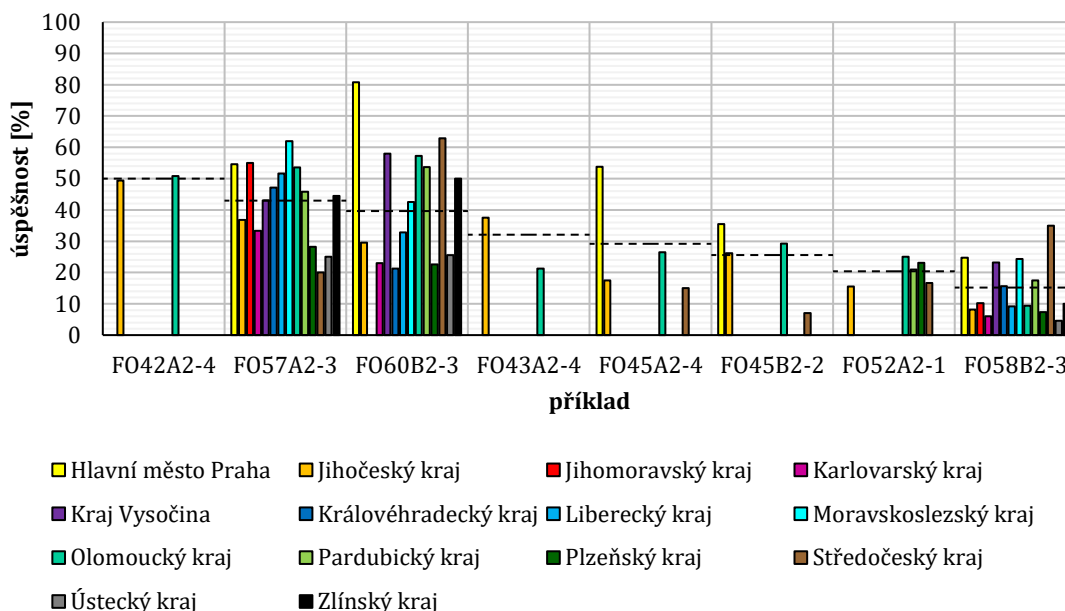
Kapitola magnetické pole patří v ročnících fyzikální olympiády kategorií A a B mezi méně zastoupené kapitoly – výskyt mezi kapitolami elektřiny a magnetismu je 15,69 %. Graf na

obrázku 2.6.10 vykresluje zastoupení příkladů v jednotlivých ročnících a kolech fyzikální olympiády těchto dvou kategorií.



**Obrázek 2.6.11:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladech na magnetické pole.

Z tohoto grafu je patrné, že větší podíl příkladů tvoří příklady kategorie A, dokonce v celostátním kole kategorie A se za posledních 24 ročníků vyskytlo 7 příkladů, což tvoří 29,17 % příkladů této kapitoly. Navíc téměř dvě třetiny příkladů jsou postupová kola těchto kategorií. Do grafu na obrázku 2.6.11 je zaznamenána procentuální úspěšnost těchto postupových kol včetně průměrné úspěšnosti, která činí 37,49 %.



**Obrázek 2.6.12:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladech na magnetické pole v jednotlivých krajích.

Jako nepatrně obtížnější se jeví podkapitola nestacionární magnetické pole, i když pouze o 3,64 %. Z hlediska kategorií se obtížněji jeví příklady kategorie B. Nejnáročnější příklad kapitoly magnetické pole (FO58B2-3) spadá do podkapitoly stacionární magnetické pole a jeho úspěšnost byla na základě výsledků ze všech krajů stanovena na 15,19 %. Procentuální úspěšnosti příkladů v jednotlivých krajích jsou vykresleny v grafu na obrázku 2.6.12.

## 2.7 Střídavý proud

### 2.7.1 Základní pojmy a vztahy

Rozdíl mezi stejnosměrným a střídavým proudem spočívá v tom, že u střídavého proudu se jeho hodnoty periodicky mění s časem a je tedy možné psát

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

kde  $i$  je okamžitá hodnota proudu,  $I_m$  amplituda proudu,  $\omega$  úhlová frekvence,  $t$  čas a  $\varphi$  je počáteční fáze, o kterou je proud posunut oproti okamžité hodnotě napětí  $u$  daného rovnicí

$$u = U_m \sin \omega t,$$

kde  $U_m$  je amplituda napětí. Převod mezi efektivními hodnotami  $U$  a proudu  $I$  a amplitudami napětí a proudu je dán vztahy

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Poměr mezi amplitudou napětí a amplitudou proudu se nazývá impedance  $Z$  a je dána vztahem

$$Z = \frac{U_m}{I_m}.$$

Připojíme-li do obvodu se střídavým proudem pouze rezistor  $R$ , je impedance rovna odporu tohoto rezistoru (rezistanci), tedy platí

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = R.$$

Pokud do obvodu připojíme pouze cívku, nazývá se poměr amplitudy napětí a amplitudy proudu indukance  $X_L$ . Induktance

$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L,$$

kde  $\omega L$  má rozměr odporu. Platí, že  $L$  je indukčnost cívky a proud je oproti napětí zpožděn o  $\frac{\pi}{2}$ , napětí tedy před proudem o  $\frac{\pi}{2}$  předbíhá. Opačný případ nastane, pokud do obvodu místo cívky zapojíme pouze kondenzátor – v takovém případě je napětí oproti proudu zpožděno o  $\frac{\pi}{2}$  a proud tedy napětí předbíhá o  $\frac{\pi}{2}$ . Poměr amplitudy napětí a amplitudy proudu se v takovém případě nazývá kapacitance  $X_C$  a je dán vztahem

$$X_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C},$$

kde  $\omega C$  má opět rozměr odporu a  $C$  je kapacita kondenzátoru.

Rezistor, kondenzátor a cívku můžeme zapojovat do obvodu i společně a vzniká RLC obvod (případně pouze rezistor a kondenzátor, rezistor a cívku, nebo kondenzátor a cívku).

Zapojení do takového obvodu může být sériově nebo paralelně. Při sériovém zapojení je impedance dána vztahem

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Pokud některá ze součástí není přítomna, je odpovídající člen roven nule. Při paralelním zapojení by impedance byla dána vztahem

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$

Pokud platí, že kapacitance a induktance jsou si rovné, dochází k rezonanci a platí

$$X_L = X_C, \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Pro střídavý proud je odpor v Ohmově zákoně nahrazen impedancí  $Z$ , tedy

$$U = ZI.$$

Z grafického odvození by poměr mezi odporem  $R$  a impedancí  $Z$  byl dán jako

$$\frac{R}{Z} = \cos \varphi,$$

kde  $\cos \varphi$  je účinník. Pomocí účinníku je možné spočítat činný výkon střídavého proudu

$$P = UI \cos \varphi,$$

kde  $U$  a  $I$  jsou okamžité hodnoty napětí a proudu. Činný výkon je tedy součinem zdánlivého výkonu (součin  $UI$ ) a účinníku.

V souvislosti s výkonem zmiňme ještě transformátor. Jedná se o zařízení, díky kterému je možné měnit velikost střídavého napětí v síti. Pro transformátor platí

$$P_1 = P_2,$$

$$k = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2}{I_1},$$

kde  $P_1$  výkon primární cívky,  $P_2$  výkon sekundární cívky,  $N_1$ ,  $N_2$  počty závitů primární a sekundární cívky,  $I_1$ ,  $I_2$  proudy procházející primární a sekundární cívkou a  $U_1$ ,  $U_2$  napětí na cívkách. Účinnost transformátoru lze spočítat jako poměr výkonu ze sekundární cívky a příkonu transformátoru.

V energetice se využívá tzv. trojfázová soustava střídavého napětí, přičemž je možné vodiče spojovat do dvou typů zapojení – do hvězdy a do trojúhelníku. Při zapojení do hvězdy se tři fázové vodiče spojují do jednoho bodu (nulového bodu), a platí, že mezi sdruženým napětím  $U_s$  mezi dvěma fázovými vodiči a fázovým napětím  $U_f$  mezi fázovým vodičem a nulovým vodičem je vztah

$$U_s = \sqrt{3}U_f.$$

Do takového typu zapojení je zapojována většina spotřebičů. Při zapojení do trojúhelníka platí, že fázová napětí jsou rovna sdruženým, tedy platí

$$U_s = U_f.$$

## 2.7.2 Řešené příklady

### 2.7.2.1 Střídavé napětí a střídavý proud

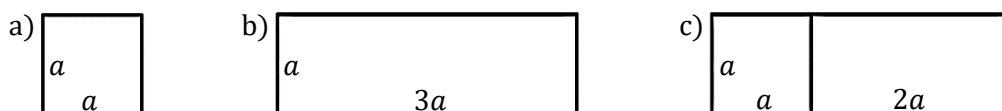
#### Příklad č. 44: FO62A2-4: Rámečky v harmonickém magnetickém poli

[32,33 %]

Homogenní magnetické pole má harmonický průběh podle rovnice  $B = B_0 \sin \omega t$ . Do roviny kolmé k měnící se magnetické indukci vložíme čtvercová rámeček s délkou strany  $a$  a o odporu  $R$  (obr. 2.7.1a).

- Určete střední výkon  $\bar{P}_0$  elektrického proudu tekoucího rámečkem vlivem elektromagnetické indukce.
- Určete střední výkon  $\bar{P}_1$ , nahradíme-li rámeček čtvercovým rámečkem obecně jiné velikosti s délkou strany  $ka$ .
- Určete střední výkon  $\bar{P}_2$ , nahradíme-li rámeček obdélníkovým rámečkem s délkami stran  $a$  a  $3a$  (obr. 2.7.1b).
- Určete střední výkon  $\bar{P}_3$ , přidáme-li do obdélníkového rámečku příčku délky  $a$  kolmou k delší straně ve vzdálenosti  $a$  od kratší strany (obr. 2.7.1c).

V částech b), c), d) vyjádřete střední výkony pomocí  $\bar{P}_0$ , který považujte za známý. Každý rámeček je vytvořen z odporového drátu téhož materiálu a téhož kruhového průřezu, jehož průměr je zanedbatelný vzhledem k rozměru  $a$ .



Obrázek 2.7.1: Rámečky v magnetickém poli, k zadání úlohy FO62A2-4.

#### Řešení příkladu č. 44:

- a) Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce je

$$u = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}Ba^2 = -a^2\frac{d}{dt}B_0 \sin \omega t = -a^2B_0\omega \cos \omega t,$$

kde  $U_m = a^2B_0\omega$  je amplituda napětí. Efektivní napětí má hodnotu

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2}U_m = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2B_0\omega.$$

Střední výkon pak je

$$\bar{P}_0 = \frac{U^2}{R} = \frac{a^4B_0^2\omega^2}{2R}.$$

**3 body**

- b) Obsah rámečku je  $k^2$ -násobný, tudíž indukované napětí je též  $k^2$ -násobné. Obvod rámečku je  $k$ -násobný, tudíž jeho odpor je také  $k$ -násobný. Proto platí

$$\bar{P}_1 = \frac{(k^2 U)^2}{kR} = k^3 \frac{U^2}{R} = k^3 \bar{P}_0. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Obsah rámečku vzrostl třikrát, jeho obvod dvakrát, proto platí

$$\bar{P}_2 = \frac{(3U)^2}{2R} = \frac{9U^2}{2R} = \frac{9}{2} \bar{P}_0. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

d) Označme efektivní proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$  podle obrázku 2.7.2,  $U$  je opět efektivní napětí indukované ve čtvercovém rámečku s délkou strany  $a$ . Pomocí Kirchhoffových zákonů dostaneme

$$U = \frac{3}{4} R I_1 - \frac{1}{4} R I_2, \quad (2.7.1)$$

$$2U = \frac{1}{4} R I_2 + \frac{5}{4} R I_3, \quad (2.7.2)$$

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (2.7.3)$$

Z rovnic (2.7.1) a (2.7.2) vyjádříme proud  $I_1$ ,  $I_3$

$$I_1 = \frac{4U}{3R} + \frac{1}{3} I_2,$$

$$I_3 = \frac{8U}{5R} - \frac{1}{5} I_2,$$

a dosadíme do rovnice (2.7.3). Po úpravě dostaneme

$$I_2 = \frac{4U}{23R}.$$

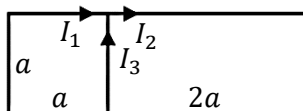
Zbývající proudy pak jsou

$$I_1 = \frac{32U}{23R},$$

$$I_3 = \frac{36U}{23R}.$$

Celkový střední výkon je součtem středních výkonů v jednotlivých větvích:

$$\bar{P}_3 = \frac{3}{4} R I_1^2 + \frac{1}{4} R I_2^2 + \frac{5}{4} R I_3^2 = \frac{3 \cdot 32^2 + 1 \cdot 4^2 + 5 \cdot 36^2}{4 \cdot 23^2} \frac{U^2}{R} = \frac{104}{23} \frac{U^2}{R} = \frac{104}{23} \bar{P}_0. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$



**Obrázek 2.7.2:** Rámečky v magnetickém poli, k řešení úlohy F062A2-4.

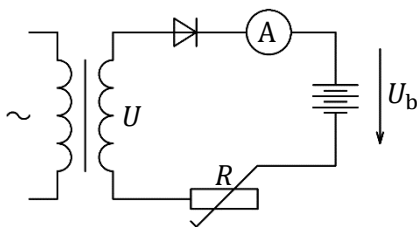
### **Příklad č. 45: F039A2-4: Akumulátorová baterie [29,38 %]**

Akumulátorovou baterii můžeme improvizovaně nabíjet tak, že ji přes polovodičovou diodu, reostat a ampérmetr připojíme k robustnímu síťovému transformátoru (obr. 2.7.3). Výstupní napětí transformátoru má efektivní hodnotu  $U$  a považujeme je za harmonické napětí o frekvenci 50 Hz. Vnitřní odpor zdroje, odpor ampérmetru a úbytek napětí na diodě v propustném směru zanedbáváme. Svorkové napětí baterie  $U_b$  se během nabíjení téměř nemění.

a) Jak dlouho během jedné periody střídavého napětí prochází obvodem nabíjecí proud?

- b) Jak velký musíme nastavit odpor  $R$  reostatu, aby nabíjecí proud měl střední hodnotu  $I_s$ ?
- c) Jaká bude špičková hodnota  $I_v$  nabíjecího proudu?
- d) Do společného grafu nakreslete časové průběhy okamžité hodnoty  $u$  výstupního napětí transformátoru a okamžité hodnoty  $i$  nabíjecího proudu.

Úlohu řešte pro hodnoty:  $U = 18,0 \text{ V}$ ,  $U_b = 12,8 \text{ V}$ ,  $I_s = 2,0 \text{ A}$ .



**Obrázek 2.7.3:** Akumulátorová baterie, k zadání úlohy FO39A2-4.

**Řešení příkladu č. 45:**

- a) Dioda propouští nabíjecí proud, když  $u = U_m \sin \omega t > U_b$ . Na počátku a na konci tohoto časového intervalu platí

$$\sin \omega t = \frac{U_b}{U_m} = \frac{U_b}{\sqrt{2}U} = 0,50283.$$

Řešením rovnice dostaneme:

$$\omega t_1 = 0,52687 \text{ rad}, \quad \omega t_2 = 2,61472 \text{ rad}, \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ s}^{-1},$$

$$t_1 = 0,00168 \text{ s}, \quad t_2 = 0,00832 \text{ s}.$$

Během jedné periody střídavého napětí prochází nabíjecí proud po dobu

$$t_2 - t_1 = 0,00664 \text{ s},$$

což je 33,2 % periody.

**3 body**

- b) Během jedné periody střídavého napětí přijme akumulátor náboj

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{U_m \sin \omega t - U_b}{R} \, dt = \left[ -\frac{U_m}{\omega R} \cos \omega t - \frac{U_b}{R} t \right]_{t_1}^{t_2},$$

$$Q = \frac{U_m}{\omega R} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_b}{R} (t_2 - t_1).$$

Střední hodnota nabíjecího proudu je  $I_s = \frac{Q}{T}$ . Z uvedených vztahů úpravou dostaneme

$$R = \frac{U_m}{\omega T I_s} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_b}{T I_s} (t_2 - t_1),$$

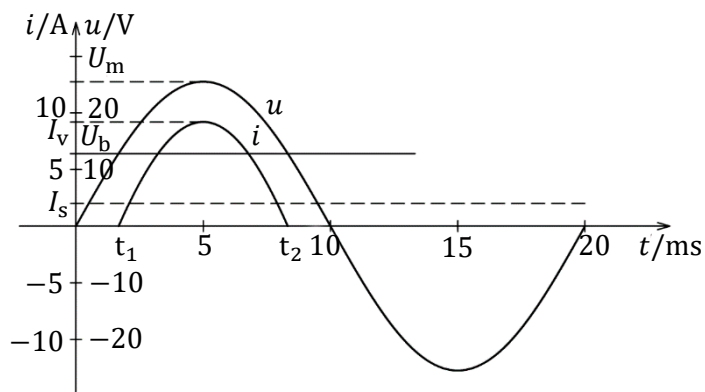
$$R = \frac{U\sqrt{2}}{2\pi I_s} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_b}{T I_s} (t_2 - t_1) = 1,38 \, \Omega. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- c) Nabíjecí proud má špičkovou hodnotu

$$I_v = \frac{U\sqrt{2} - U_b}{R} = 9,2 \text{ A}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- d) Časové průběhy okamžitých hodnot napětí  $u$  a proudu  $i$  jsou na obr. 2.7.4. **2 body**





**Obrázek 2.7.4:** Časové průběhy napětí a proudu, k řešení úlohy F039A2-4.

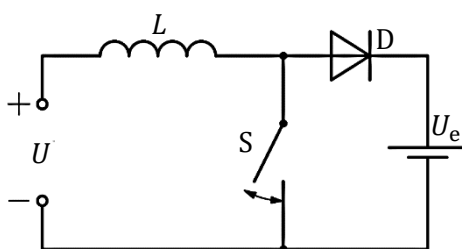
**Příklad č. 46: FO51A3-2 (FO48A3-3): Nabíjení akumulátoru ze zdroje o menším napětí** **[24,77 %]**

Zadání pozdějšího ročníku bylo oproti dřívějšímu mírně upraveno, uvedeno je úspěšnější a novější zadání. V ročníku č. 48 má úloha úspěšnost 21,78 %.

K nabíjení akumulátoru o elektromotorickém napětí  $U_e = 12,0 \text{ V}$  ze zdroje o svorkovém napětí  $U = 5,0 \text{ V}$  a zanedbatelném vnitřním odporu použijeme obvod podle obr. 2.7.5 sestavený z cívky o indukčnosti  $L = 1,0 \text{ H}$ , diody  $D$  a přerušovače  $S$ , který se periodicky zapíná a vypíná ve stejných časových intervalech  $\tau_1 = \tau_2 = 0,010 \text{ s}$ .

- Určete a graficky znázorníte, jak se bude v závislosti na čase měnit proud procházející cívkou.
- Určete střední hodnotu proudu nabíječícího akumulátor.

Cívku a diodu považujte za ideální, vnitřní odpor akumulátoru zanedbejte.



**Obrázek 2.7.5:** Obvod s akumulátorem, k zadání úlohy FO51A3-2.

**Řešení příkladu č. 46:**

- Po sepnutí kontaktů přerušovače začne cívkou procházet proud  $i$ , který postupně roste a v cívce se indukuje elektromotorické napětí  $U_i$  stejně velké jako elektromotorické napětí zdroje a orientované opačným směrem. Platí

$$U_i = -L \frac{di}{dt} = -U \quad \text{z čehož} \quad \frac{di}{dt} = \frac{U}{L} = \text{konst.}$$

Proud cívkou se tedy zvětšuje rovnoměrně a za dobu  $\tau_1$  dosáhne hodnoty

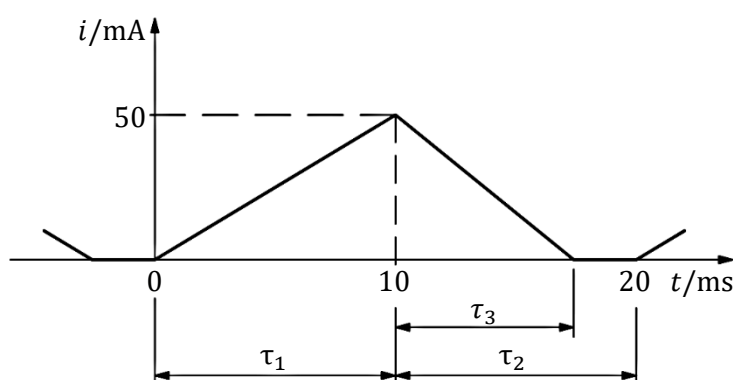
$$I_0 = \frac{U}{L} \tau_1 = 50 \text{ mA.}$$

Po rozpojení kontaktů začne proud v cívce klesat a indukované napětí je orientované stejně jako elektromotorické napětí zdroje a opačné než elektromotorické napětí akumulátoru. Proud prochází přes diodu do akumulátoru. Platí

$$U_i = -L \frac{di}{dt} = U - U_e \quad \text{z čehož} \quad \frac{di}{dt} = \frac{U_e - U}{L} = \text{konst.}$$

Proud se tedy bude zmenšovat lineárně podle vztahu  $i = I_0 - \frac{U_e - U}{L} t$ .

Za dobu  $\tau_3 = \frac{I_0 L}{U_e - U} = \frac{U}{U_e - U} \tau_1 = 0,00714 \text{ s} < \tau_2$  klesne na nulu a dioda přejde do závěrného režimu. Po uplynutí doby  $\tau_2$  se celý děj opakuje (obr. 2.7.6). **6 bodů**



**Obrázek 2.7.6:** Graf závislosti proudu na čase, k řešení úlohy FO51A3-2.

- b) Akumulátor se nabíjí po dobu  $\tau_3$  průměrným proudem  $\frac{I_0}{2}$  a získá při tom náboj

$$\Delta Q = \frac{I_0}{2} \tau_3 = \frac{U^2 \tau_1^2}{2L(U_e - U)}.$$

Sřední hodnota proudu nabíječícího akumulátor je

$$I_{\text{stř}} = \frac{\Delta Q}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\Delta Q}{2\tau_1} = \frac{U^2 \tau_1}{4L(U_e - U)} = 8,9 \text{ mA.}$$

**4 body**

## 2.7.2.2 RLC obvody

### Příklad č. 47: FO53A3-2: Kondenzátor a rezistor

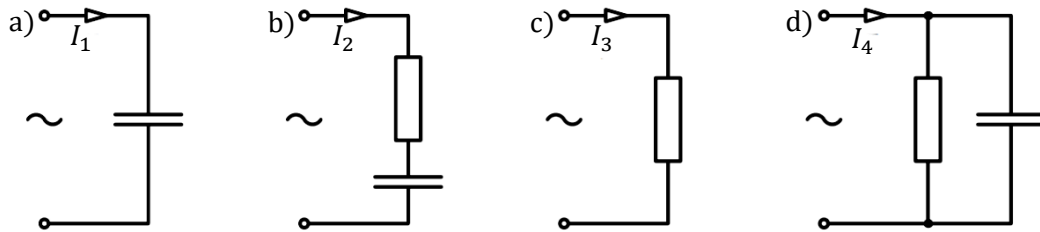
**[70,60 %]**

Kondenzátorem připojeným ke zdroji střídavého harmonického napětí procházel proud  $I_1$  (obr. 2.7.7a). Jestliže byl tentýž kondenzátor připojen sériově s rezistorem, procházel obvodem proud  $I_2$  (obr. 2.7.7b).

- Porovnejte rezistanci  $R$  rezistoru s kapacitancí  $X_C$  kondenzátoru.
- Jaké bylo fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu  $I_2$ ?
- Jaký proud  $I_3$  by procházel obvodem, kdybychom ke zdroji připojili samotný rezistor (obr. 2.7.7c)?

- d) Jaký celkový proud  $I_4$  by procházel obvodem, kdybychom kondenzátor a rezistor připojili paralelně (obr. 2.7.7d)?
- e) Jaké by bylo fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu  $I_4$ ?

Vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný, ve všech případech je tedy jeho svorkové napětí stejné. Řešte obecně, pak pro hodnoty  $I_1 = 50$  mA,  $I_2 = 40$  mA.



Obrázek 2.7.7: Kondenzátor a rezistor, k zadání úlohy FO53A3-2.

### Řešení příkladu č. 47:

- a) V obvodu se samotným kondenzátorem platí  $I_1 = \frac{U}{X_C}$ . Z fázorového diagramu sériového zapojení kondenzátoru s rezistorem na obr. 2.7.8a plyne

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{(RI_2)^2 + (X_C I_2)^2} = I_2 \sqrt{R^2 + X_C^2}.$$

Platí tedy

$$\frac{I_1^2}{I_2^2} = \frac{R^2 + X_C^2}{X_C^2} \quad \text{z čehož} \quad R^2 = X_C^2 \left( \frac{I_1^2}{I_2^2} - 1 \right), \quad \text{a tedy}$$

$$R = X_C \sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1} = 0,75 X_C. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- b) Fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu  $I_2$  určíme z obr. 2.7.8a. Platí

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{U_C}{U_R} = -\frac{X_C}{R} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}} = -\frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = -\frac{4}{3}, \quad \varphi_2 = -53^\circ.$$

Proud  $I_2$  tedy předbíhá před svorkovým napětím fázově o  $53^\circ$ .

**1 bod**

- c) Samotným rezistorem bude procházet proud

$$I_3 = \frac{U}{R} = \frac{X_C I_1}{X_C \sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}} = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = 67 \text{ mA}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- d) Z fázorového diagramu paralelního zapojení kondenzátoru s rezistorem na obr. 2.7.8b odvodíme

$$I_4 = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{\frac{U^2}{R^2} + \frac{U^2}{X_C^2}} = \frac{U \sqrt{X_C^2 + R^2}}{R X_C} = \frac{X_C I_1 X_C \sqrt{1 + \frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}}{X_C^2 \sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}}.$$

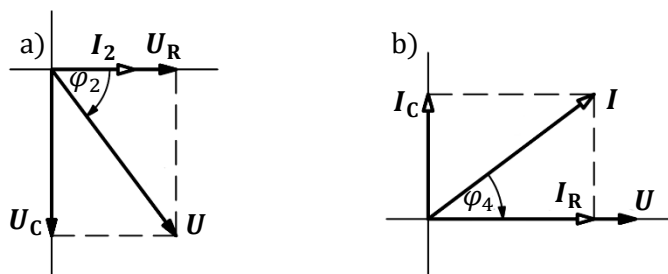
$$I_4 = \frac{I_1^2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = 83 \text{ mA}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

e) Fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu  $I_4$  určíme z obr. 2.7.8b. Platí

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = -\frac{I_C}{I_R} = -\frac{I_1}{I_3} = -\frac{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}}{I_2} = -\frac{3}{4}, \quad \varphi_4 = -37^\circ.$$

Proud  $I_4$  tedy předbíhá před svorkovým napětím fázově o  $37^\circ$ .

**1 bod**



**Obrázek 2.7.8:** Fázorové diagramy, k řešení úlohy FO53A3-2.

**Příklad č. 48: FO48A2-3: Cívka**

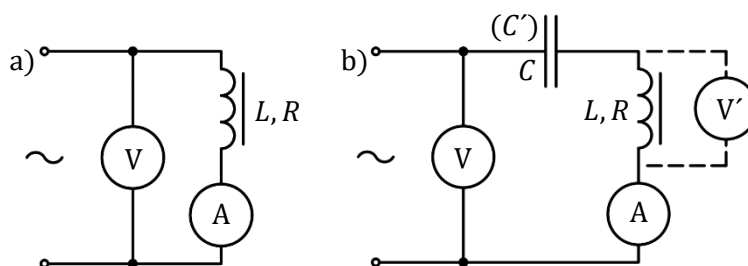
**[51,60 %]**

Zadání je téměř totožné s příkladem FO48B2-3, kde byl pouze místo kondenzátoru použit rezistor. Příklad v kategorii B měl mnohem nižší úspěšnost.

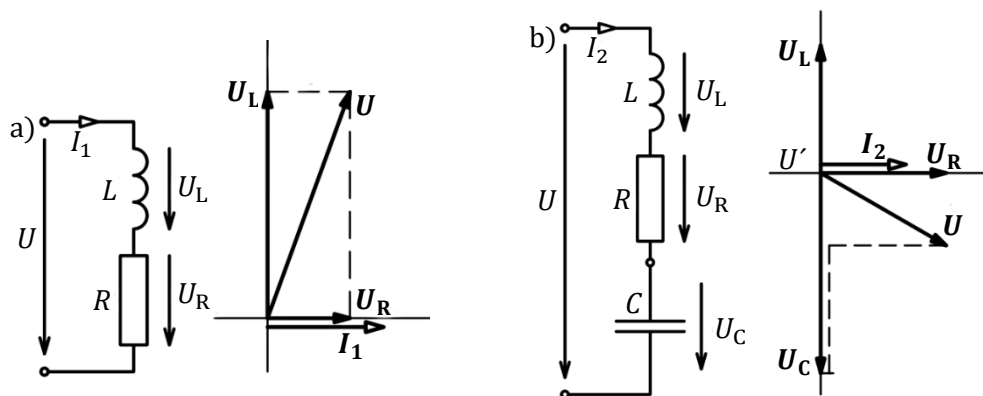
Po připojení cívky ke zdroji harmonického střídavého napětí o frekvenci  $f$  a efektivní hodnotě svorkového napětí  $U$  procházel obvodem proud o efektivní hodnotě  $I_1$  (obr. 2.7.9a). Zapojením kondenzátoru o kapacitě  $C$  sériově s cívkou se při stejném svorkovém napětí efektivní hodnota proudu změnila na  $I_2$  (obr. 2.7.9b).

- Určete indukčnost  $L$  ideální cívky a rezistanci  $R$  ideálního rezistoru, jejichž sériovým spojením bychom mohli danou skutečnou cívku nahradit.
- Jakou kapacitu  $C'$  by musel mít kondenzátor, aby obvodem při daném svorkovém napětí procházel maximální proud? Určete jeho efektivní hodnotu  $I'$  a efektivní hodnotu  $U'$  napětí, které bychom v tomto případě naměřili na samotné cívce.

Řešte pro hodnoty:  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $U = 20 \text{ V}$ ,  $I_1 = 250 \text{ mA}$ ,  $C = 16 \mu\text{F}$  a  $I_2 = 165 \text{ mA}$ . Měřicí přístroje považujte za ideální.



**Obrázek 2.7.9:** Obvod s cívkou, k zadání úlohy FO48A2-3.



Obrázek 2.7.10: Náhradní schémata a fázorové diagramy, k řešení úlohy FO48A2-3.

**Řešení příkladu č. 48:**

- a) Vyjdeme z náhradních schémat a fázorových diagramů na obr. 2.7.10. V prvním obvodu platí

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = (RI_1)^2 + (\omega LI_1)^2, \quad \text{z čehož} \quad \left(\frac{U}{I_1}\right)^2 = R^2 + \omega^2 L^2,$$

ve druhém

$$U^2 = U_R^2 + (U_C - U_L)^2 = (RI_2)^2 + \left(\frac{I_2}{\omega C} - \omega LI_2\right)^2,$$

z čehož 
$$\left(\frac{U}{I_2}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - \left(\frac{U}{I_2}\right)^2 = 2\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2} \quad \text{z čehož} \quad L = \frac{\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - \left(\frac{U}{I_2}\right)^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}{2} C.$$

Z první rovnice vyjádříme  $R = \sqrt{\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - \omega^2 L^2}.$

Pro dané hodnoty  $L = 0,25 \text{ H}, R = 14,7 \Omega.$

**5 bodů**

- b) Efektivní hodnota proudu v druhém obvodu je  $I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}.$

Budeme-li měnit kapacitu kondenzátoru, dosáhne proud maxima při takové hodnotě  $C'$ , která splňuje podmínku

$$\frac{1}{\omega C'} = \omega L \quad \text{z čehož} \quad C' = \frac{1}{\omega^2 L} \text{ (sériová rezonance).}$$

Obvodem pak prochází proud  $I' = \frac{U}{R}.$

Pro dané hodnoty  $C' = 40,5 \mu\text{F}, I' = 1,36 \text{ A}.$

**3 body**

Cívka je lineární jednobran, napětí na ní je přímo úměrné procházejícímu proudu.

Platí tedy  $U = ZI_1, U' = ZI',$  kde  $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$  je impedance cívky. Z toho

$$\frac{U'}{U} = \frac{I'}{I_1} \quad \text{z čehož} \quad U' = \frac{UI'}{I_1}.$$

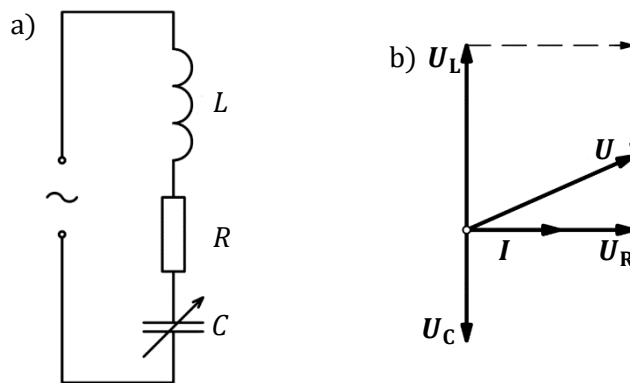
Pro dané hodnoty  $U' = 109 \text{ V}.$

**2 body**

**Příklad č. 49: FO45A2-3: Elektrický obvod III.****[41,49 %]**

K vysokofrekvenčnímu generátoru, jehož svorkové napětí má frekvenci  $f = 700$  kHz a stálou efektivní hodnotu  $U = 2,00$  V je sériově připojena cívka a otočný kondenzátor opatřený stupnicí kapacit. Nastavíme-li kapacitu  $C_1 = 200$  pF nebo kapacitu  $C_2 = 300$  pF, prochází obvodem proud o stejné efektivní hodnotě  $I_1 = I_2 = 5,00$  mA.

- Určete indukčnost ideální cívky a rezistanci ideálního rezistoru, jejichž sériovým spojením by se dala daná skutečná cívka nahradit (obr. 2.7.11a).
- Jak musíme změnit kapacitu kondenzátoru, aby obvodem procházel maximální proud? Určete jeho velikost.
- Jaká bude v tomto případě efektivní hodnota napětí na kondenzátoru?



**Obrázek 2.7.11:** RLC obvod, k úloze FO45A2-3: (a) k zadání, (b) k řešení.

**Řešení příkladu č. 49:**

- Z fázorového diagramu sériového obvodu RLC (obr. 2.7.11b) odvodíme pro impedanci obvodu vztah

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Platí tedy

$$Z_1^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2, \quad Z_2^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2.$$

Z rovnosti  $Z_1^2 = Z_2^2$  dostaneme

$$\frac{2L}{C_2} - \frac{2L}{C_1} + \frac{1}{\omega^2 C_1^2} - \frac{1}{\omega^2 C_2^2} = 0, \quad L = \frac{C_1 + C_2}{2\omega^2 C_1 C_2},$$

$$R^2 = Z_1^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2 = Z_1^2 - \left(\omega \frac{C_1 + C_2}{2\omega^2 C_1 C_2} - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2 = Z_1^2 - \left(\frac{C_1 - C_2}{2\omega C_1 C_2}\right)^2.$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - \left(\frac{C_1 - C_2}{2\omega C_1 C_2}\right)^2}.$$

Pro dané hodnoty  $L = 2,15 \cdot 10^{-4}$  H,  $R = 352 \Omega$ .

**5 bodů**

- Obvodem bude procházet maximální proud, bude-li impedance minimální, tedy když  $X_C = X_L$  (sériová rezonance). Pak

$$C = C_r = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{2C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2,4 \cdot 10^2 \text{ pF.}$$

Při sériové rezonanci platí  $Z = R$  a obvodem prochází proud

$$I_r = \frac{U}{R} = 5,68 \text{ mA.} \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

c) Při sériové rezonanci bude na kondenzátoru napětí

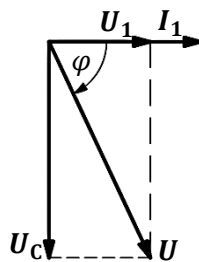
$$U_{C_r} = X_{C_r} I_r = \frac{I_r}{\omega C_r} = 5,38 \text{ V.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

**Příklad č. 50: FO54A2-2: Připojení nízkovoltové žárovky k síti [38,70 %]**

Žárovka se jmenovitým efektivním napětím  $U_1 = 12 \text{ V}$  a jmenovitým příkonem  $P_1 = 40 \text{ W}$  má být napájena z rozvodné sítě střídavého napětí s efektivní hodnotou  $U = 230 \text{ V}$  a frekvencí  $f = 50 \text{ Hz}$ .

- Určete odpor  $R$  rezistoru, který musíme k žárovce připojit sériově, aby svítila se jmenovitým příkonem.
- Určete kapacitu  $C$  kondenzátoru, který musíme k žárovce připojit sériově, aby svítila se jmenovitým příkonem.
- Určete činné výkony  $P$  a  $P'$ , kterými je v prvním a druhém případě zatěžován zdroj.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.



**Obrázek 2.7.12:** Fázorový diagram, k řešení úlohy FO54A2-2.

**Řešení příkladu č. 50:**

a) Na rezistoru je napětí  $U - U_1$  a obvodem prochází proud  $I_1 = \frac{P_1}{U_1}$ . Odpor rezistoru je

$$R_1 = \frac{U - U_1}{I_1} = \frac{(U - U_1)U_1}{P_1} = 65 \Omega. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

b) Obvodem opět prochází proud  $I_1$ . Z fázorového diagramu (obr. 2.7.12) určíme napětí na kondenzátoru

$$U_C = \sqrt{U^2 - U_1^2}.$$

Kondenzátor má kapacitanci  $X_C = \frac{U_C}{I_1} = \frac{1}{2\pi f C}$  a kapacitu

$$C = \frac{I_1}{2\pi f U_C} = \frac{P_1}{2\pi f U_1 U_C} = \frac{P_1}{2\pi f U_1 \sqrt{U^2 - U_1^2}} = 46 \mu\text{F.} \quad \mathbf{5 \text{ body}}$$

- c) Připojíme-li žárovku přes rezistor, je proud v obvodu ve fázi s napětím a zdroj je zatěžován činným výkonem

$$P = UI_1 = \frac{U}{U_1} P_1 = 770 \text{ W.}$$

Připojíme-li žárovku přes kondenzátor, platí pro fázové posunutí napětí zdroje oproti proudu  $\cos \varphi = \frac{U_1}{U}$ . Činný výkon zdroje

$$P' = UI_1 \cos \varphi = \frac{U_1}{U} UI_1 = U_1 I_1 = P_1 = 40 \text{ W.}$$

spotřebovává pouze žárovka.

**3 body**

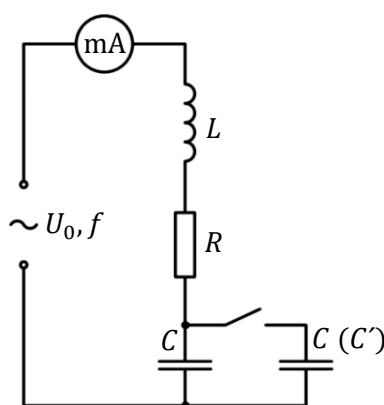
**Příklad č. 51: FO50B2-4: Rezonance**

**[28,43 %]**

Kondenzátor o kapacitě  $C = 4,0 \mu\text{F}$  a reálná cívka, kterou modelujeme jako sériové spojení ideální cívky o indukčnosti  $L$  a rezistoru o rezistanci  $R$ , byly sériově připojeny ke zdroji harmonického střídavého napětí o frekvenci  $f = 50 \text{ Hz}$  a zanedbatelném vnitřním odporu (obr. 2.7.13). Obvodem procházel proud o efektivní hodnotě  $I_1 = 6,3 \text{ mA}$ . Jestliže jsme k prvnímu kondenzátoru připojili paralelně druhý kondenzátor o stejné kapacitě  $C$ , efektivní hodnota proudu se nezměnila.

- Určete indukčnost cívky.
- Určete kapacitu  $C'$  kondenzátoru, kterým jsme museli nahradit druhý kondenzátor, aby nastala sériová rezonance a proud v obvodu byl co největší.
- Při rezonanci jsme naměřili efektivní hodnotu proudu  $I_r = 10,0 \text{ mA}$ . Určete rezistanci  $R$  cívky, efektivní hodnotu  $U_0$  svorkového napětí zdroje a efektivní hodnotu  $U_C$  rezonančního napětí na kondenzátorech.

Úlohu řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.



**Obrázek 2.7.13:** Elektrický obvod, k zadání úlohy FO50B2-4.



**Řešení příkladu č. 51:**

a) Z rovnosti

$$I_1 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)^2}}$$

plyne

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \left(\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)^2, \quad \text{z čehož} \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\omega C} - \omega L.$$

$$2\omega L = \frac{3}{2\omega C}, \quad L = \frac{3}{4\omega^2 C} = \frac{3}{16\pi^2 f^2 C} = 1,9 \text{ H.} \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

b) Z podmínky rezonance  $\omega L - \frac{1}{\omega(C+C')} = 0$  dostaneme

$$C + C' = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{4}{3} C, \quad C' = \frac{C}{3} = 1,33 \text{ } \mu\text{F.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Porovnáním vztahů  $I_r = \frac{U_0}{R}$ ,

$$I_1 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{3}{4\omega C} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{16\omega^2 C^2}}}$$

dostaneme

$$U_0^2 = R^2 I_r^2 = \left(R^2 + \frac{1}{16\omega^2 C^2}\right) I_1^2,$$

$$R^2 (I_r^2 - I_1^2) = \frac{I_1^2}{16\omega^2 C^2}, \quad R = \frac{I_1}{4\omega C \sqrt{I_r^2 - I_1^2}} = \frac{I_1}{8\pi f C \sqrt{I_r^2 - I_1^2}} = 161 \text{ } \Omega.$$

Pak

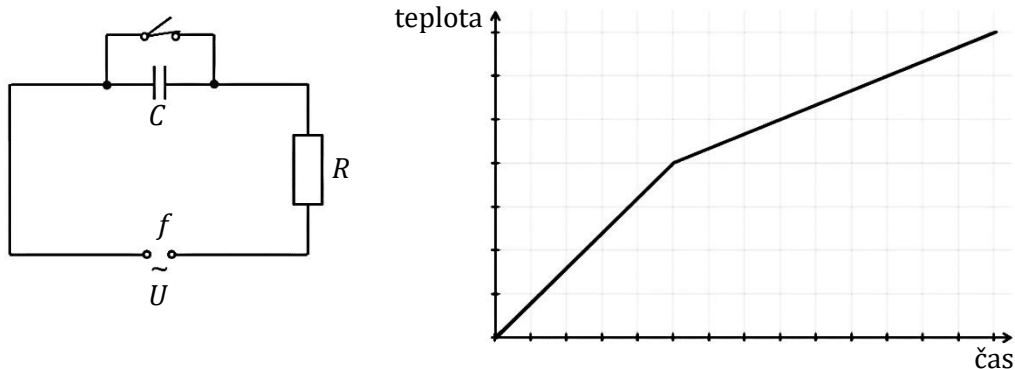
$$U_0 = R I_r = \frac{I_1 I_r}{8\pi f C \sqrt{I_r^2 - I_1^2}} = 1,61 \text{ V,}$$

$$U_C = \frac{I_r}{\omega(C+C')} = \frac{3I_r}{4\omega C} = \frac{3I_r}{8\pi f C} = 6,0 \text{ V.} \quad \mathbf{5 \text{ bodů}}$$

**Příklad č. 52: F059B2-1: Topné těleso s kondenzátorem [18,73 %]**

Ke zdroji střídavého napětí s efektivní hodnotou  $U$  a frekvencí  $f = 50 \text{ Hz}$  je připojeno topné těleso o odporu  $R = 45 \text{ } \Omega$  sériově s kondenzátorem, k němuž je paralelně připojen spínač. Voda v nádobě s topným tělesem se ohřívá podle grafu závislosti teploty vody na čase, přičemž se v průběhu ohřívání změnila poloha spínače. Tepelné ztráty během ohřevu zanedbáme.

- Určete kapacitu kondenzátoru.
- Určete fázové posunutí  $\varphi$  mezi napětím zdroje a proudem v obvodu v době, kdy je spínač rozpojen.
- Určete efektivní napětí  $U_R$  na rezistoru při rozepnutém spínači.



**Obrázek 2.7.14:** Topné těleso s kondenzátorem, k zadání úlohy FO59B2-1.

**Řešení příkladu č. 52:**

- a) Příkon topné spirály se sepnutým spínačem (kondenzátor zkratován) je

$$P_1 = \frac{U^2}{R}.$$

Příkon spirály s rozepnutým spínačem je

$$P_2 = RI^2 = R \frac{U^2}{Z^2} = R \frac{U^2}{R^2 + X_C^2}. \quad \text{2 body}$$

Poměr příkonů je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R^2 + X_C^2}{R^2} > 1. \quad (2.7.4)$$

První část grafu s rychlejším růstem teploty tak odpovídá příkonu  $P_1$  (sepnutý spínač), druhá část grafu příkonu  $P_2$  (rozepnutý spínač).

Označíme-li  $C$  tepelnou kapacitu vody v nádobě,  $t$  teplotu vody a  $\tau$  čas, lze poměr příkonů vyjádřit jako poměr časových změn teploty, které poté vyčteme z grafu:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{C\Delta t_1}{\Delta \tau_1}}{\frac{C\Delta t_2}{\Delta \tau_2}} = \frac{\frac{\Delta t_1}{\Delta \tau_1}}{\frac{\Delta t_2}{\Delta \tau_2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{7-4}{14-5}} = \frac{12}{5} = 2,4. \quad \text{2 body}$$

Dosažením do vztahu (2.7.4) dostaneme  $X_C = \sqrt{1,4}R$ . Užitím rovnice  $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$  pak dostaneme kapacitu kondenzátoru

$$C = \frac{1}{2\pi f\sqrt{1,4}R} = 60 \mu\text{F}. \quad \text{2 body}$$

- b) Fázové posunutí je  $\text{tg } \varphi = -\frac{X_C}{R} = -\sqrt{1,4}$ ,  $\varphi = -50^\circ$ . Proud fázově předbíhá napětí o  $50^\circ$ . 2 body

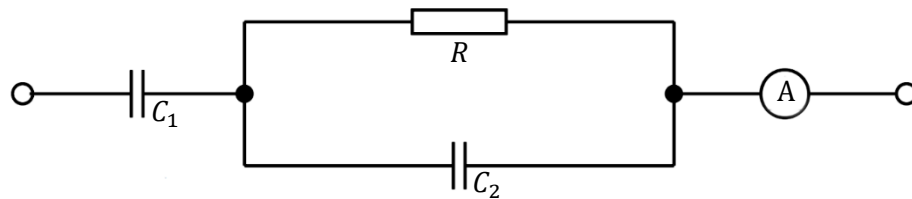
- c) Vyjdeme z rovnice  $P_1 = 2,4P_2$ , kde  $P_1 = \frac{U^2}{R}$ ,  $P_2 = \frac{U_R^2}{R}$ . Po dosazení a úpravě dostaneme

$$U_R = \frac{U}{\sqrt{2,4}} = 0,65U. \quad \text{2 body}$$

**Příklad č. 53: FO58B2-4: Obvod střídavého proudu se dvěma kondenzátory**

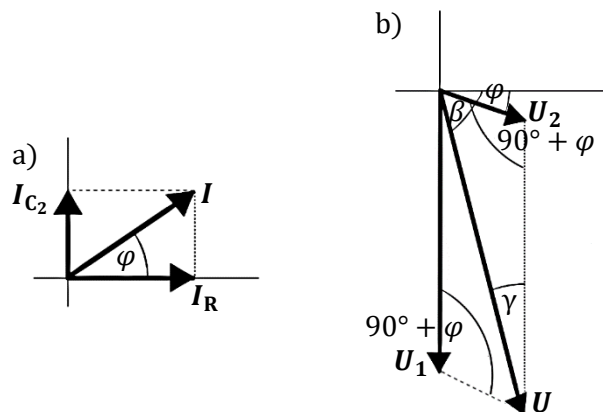
[13,61 %]

Na obrázku 2.7.15 je obvod složený ze dvou kondenzátorů, rezistoru a ampérmetru se zanedbatelným vnitřním odporem. Kapacita prvního kondenzátoru se dá nastavit v rozmezí  $C_1 = (5,0 - 50,0) \mu\text{F}$ , kapacita druhého kondenzátoru  $C_2 = 10,0 \mu\text{F}$ , odpor rezistoru  $R = (100 - 500) \Omega$ . Obvod připojíme ke generátoru střídavého proudu o stálém napětí  $U = 10 \text{ V}$ , jehož frekvenci  $f$  lze měnit od 10 Hz do 10 kHz. Jaká bude minimální hodnota proudu procházejícího ampérmetrem? Jaké bude za těchto podmínek fázové posunutí mezi napětím a proudem?



**Obrázek 2.7.15:** Obvod se dvěma kondenzátory, k zadání úlohy FO58B2-4.

**Řešení příkladu č. 53:**



**Obrázek 2.7.16:** Fázorové diagramy, k řešení úlohy FO58B2-4.

Protože ampérmetrem má procházet minimální proud, musí být frekvence nastavena na nejnižší hodnotu, stejně tak i kapacita kondenzátoru  $C_1$ , zatímco odpor musí být nastaven na hodnotu největší. **1 bod**

Nejprve určíme impedanci  $Z_2$  paralelního spojení druhého kondenzátoru a cívky. Protože napětí je na obou prvních stejné a na kapacitě proud předbíhá napětí o  $\frac{\pi}{2}$  (obr. 2.7.16a), platí

$$\sqrt{I_R^2 + I_{C_2}^2} = \frac{U_2}{Z_2} = U_2 \sqrt{\frac{1}{R^2} + (2\pi f C_2)^2}, \quad \frac{1}{Z_2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (2\pi f C_2)^2},$$

$$Z_2 = \frac{R}{\sqrt{1+(2\pi f R C_2)^2}} = 477 \Omega.$$

Proud předbíhá napětí o úhel  $\varphi$ , pro nějž platí  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{X_C} = R\omega C_2$ , tedy  $\varphi = 17,4^\circ$ . **4 body**

Impedance prvního kondenzátoru  $Z_1 = X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} = 3\,183\ \Omega$ , proud předbíhá napětí o  $\frac{\pi}{2}$ , fázory napětí na paralelním spojení odporu s kondenzátorem a na prvním kondenzátoru spolu svírají úhel  $90^\circ - \varphi = 72,6^\circ$  (obr. 2.7.16b). Pak podle kosinové věty je celková impedance

$$Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_1Z_2 \cos(90^\circ + \varphi)} = 3\,357\ \Omega.$$

Minimální hodnota proudu je pak  $I_{\min} = \frac{U}{Z} = 2,98\ \text{mA}$ . **3 body**

Fázové posunutí mezi napětím a proudem bude  $\beta = 90^\circ - \gamma$ . Úhel  $\gamma$  určíme pomocí sinové věty:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin(90^\circ + \varphi)} = \frac{Z_2}{Z}, \quad \sin \gamma = \frac{Z_2}{Z} \sin(90^\circ + \varphi) = 0,135\,6,$$

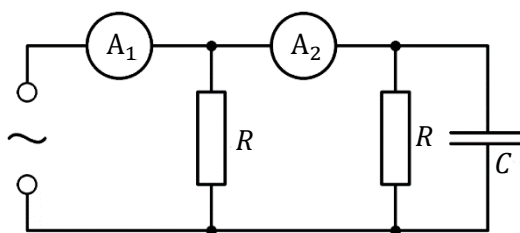
z čehož  $\gamma = 7,8^\circ$  a  $\beta = 82,2^\circ$ . **2 body**

*Alternativní řešení symbolickou metodou je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

#### **Příklad č. 54: F039B2-3: Dva rezistory a kondenzátor** **[7,37 %]**

Ke zdroji harmonického střídavého napětí o efektivní hodnotě 36 V a frekvenci 50 Hz byly paralelně připojeny dva stejné rezistory a kondenzátor (obr. 2.7.17). Dále byly do obvodu zařazeny dva ampérmetry  $A_1$ ,  $A_2$  o zanedbatelném odporu. Jimi byly naměřeny proudy  $I_1 = 0,30\ \text{A}$ ,  $I_2 = 0,20\ \text{A}$ .

- Určete proudy, které procházejí jednotlivými rezistory a kondenzátorem.
- Určete odpory rezistorů a kapacitu kondenzátoru.
- Určete fázové posunutí proudů  $I_1$ ,  $I_2$  vzhledem k napětí zdroje.



**Obrázek 2.7.17:** Dva rezistory a kondenzátor, k zadání úlohy F039B2-3.

#### **Řešení příkladu č. 54:**

- Z fázorových diagramů na obr. 2.7.18 plyne:

$$I_1^2 = (2I_R)^2 + I_C^2, \quad I_2^2 = I_R^2 + I_C^2.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$I_R^2 = \frac{I_1^2 - I_2^2}{3}, \quad I_C^2 = \frac{4I_2^2 - I_1^2}{3}, \quad I_R = 0,129\ \text{A}, \quad I_C = 0,153\ \text{A}. \quad \mathbf{4\ body}$$

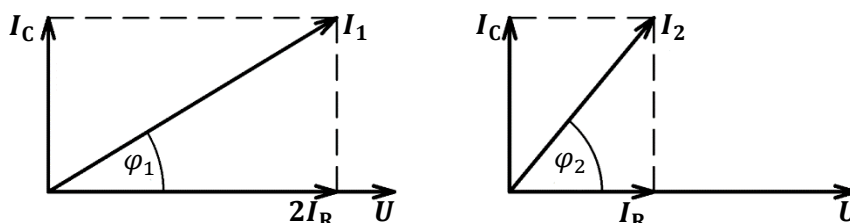
b) Odporů rezistorů a kapacita kondenzátorů jsou:

$$R = \frac{U}{I_R} \doteq 280 \, \Omega, \quad C = \frac{I_C}{2\pi f U} \doteq 14 \, \mu\text{F}. \quad \text{3 body}$$

c) Z fázorových diagramů dále plyne:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{I_C}{2I_R} \doteq 31^\circ, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{I_C}{I_R} \doteq 50^\circ.$$

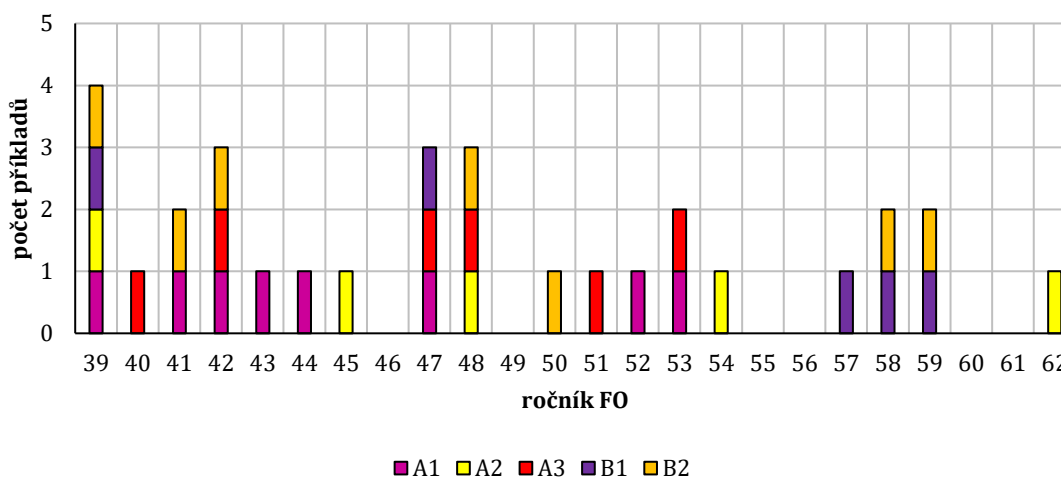
Proudy  $I_1, I_2$  předbíhají fázově před napětím zdroje o  $31^\circ$  a  $50^\circ$ . 3 body



Obrázek 2.7.18: Dva rezistory a kondenzátor, k řešení úlohy F039B2-3.

## 2.7.3 Statistická úspěšnost příkladů

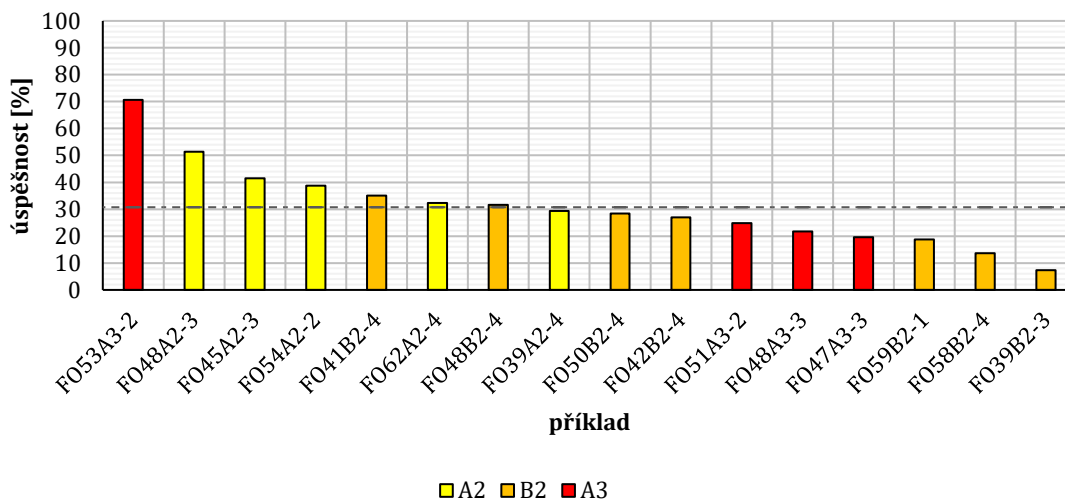
Střídavý proud je druhá největší příkladová kapitola této práce, její procentuální poměr v zastoupení mezi příklady elektřiny a magnetismu činí 20,26 %. Jedná se o 31 příkladů kategorie A a B, z nichž je více než polovina (18 příkladů) z postupových kol. Zastoupení příkladů v jednotlivých ročnících je vidět v grafu na obrázku 2.7.19.



Obrázek 2.7.19: Zastoupení příkladů na střídavý proud v jednotlivých ročnících a kolech fyzikální olympiády.

Je nutné podotknout, že tato kapitola obsahuje nejvíce příkladů, které se opakují. Příklad FO41A1-3 je totožný s příkladem FO39A2-4. V části řešených příkladů si bylo možné všimnout, že také příklady FOA482-3 a FOB482-4 jsou si podobné, drobnou modifikací je

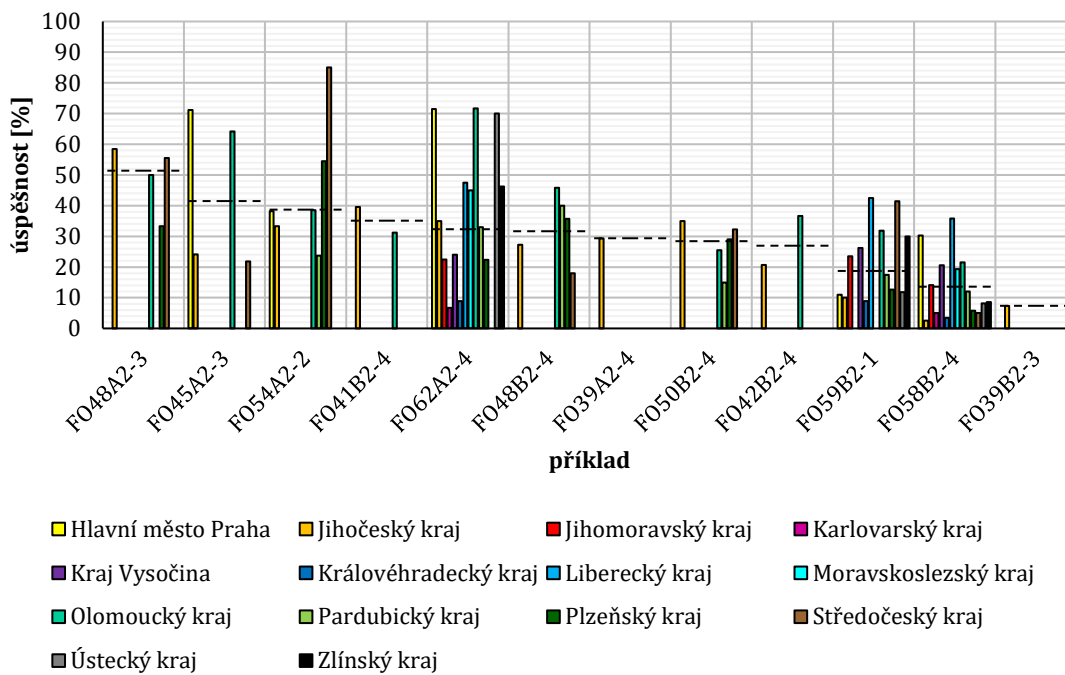
pouze záměna cívky za kondenzátor, a u příkladů FO48A3-3 a FO51A3-2 je zadání u novějšího ročníku pouze upraveno. Do řešených příkladů bylo vždy převzato úspěšnější a novější zadání. Úspěšnost všech příkladů z postupových kol kategorií A a B je možné sledovat v grafu na obrázku 2.7.20.



**Obrázek 2.7.20:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladech na střídavý proud.

Průměrná procentuální úspěšnost řešení této kapitoly byla stanovena na 30,74 %. Z grafu je patrné, že většina příkladů druhého kola kategorie A je nad stanoveným průměrem, naopak většina příkladů druhého kola kategorie B a třetího kola kategorie A je pod stanoveným průměrem. Jako nejtěžší příklady se jeví příklady na RLC obvody kategorie B, příklad FO58B2-4 dosáhl úspěšnosti pouze 13,61 % a příklad FO39B2-3 úspěšnosti pouze 7,37 %.

V grafu 2.7.21 lze poté porovnat úspěšnosti v jednotlivých krajích. Zajímavé je porovnání dvou téměř totožných příkladů (FO48A2-3 a FO48B2-4) mezi kategoriemi – 3 z pěti dostupných krajů v kategorii B mají lepší výsledky než Plzeňský kraj v kategorii A, dokonce porovnáme-li pouze Plzeňský kraj, mají mladší žáci kategorie B lepší výsledky než starší žáci kategorie A. Vůbec nejlepších výsledků této kapitoly dosáhli žáci ze Středočeského kraje u příkladu FO54A2-2, a to 85,00 %, přičemž průměr řešení tohoto příkladu je pouze 38,70 %. Žáci tedy dosáhli více než dvojnásobných výsledků, než je stanovený průměr. Nutno ale podotknout, že v tomto ročníku ve Středočeském kraji v kategorii A soutěžili pouze 2 žáci, což daný výsledek Středočeského kraje proti ostatním krajům výrazně zkresluje.



**Obrázek 2.7.21:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladech na střídavý proud v jednotlivých krajích.

## 2.8 Elektromagnetické kmitání

### 2.8.1 Základní pojmy a vztahy

Elektromagnetické kmitání vzniká činností elektromagnetického oscilátoru (např. obvod s cívkou a kondenzátorem). V takovém obvodu se vzájemně přeměňuje elektrická energie  $W_e$  daná vztahem 2.1.2

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

a magnetická energie  $W_m$  daná vztahem 2.6.3

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\phi I.$$

kde  $Q$  je elektrický náboj,  $U$  elektrické napětí,  $C$  kapacita kondenzátoru,  $L$  indukčnost cívky,  $I$  elektrický proud a  $\phi$  magnetický indukční tok. Průchodem proudu cívkou se indukuje napětí  $U_i$  dané vztahem 2.6.2

$$U_i = -L \frac{dI}{dt},$$

kde  $t$  je čas. Je-li oscilátor ideální (odpor cívka a vodičů je roven nule), platí vztah pro rezonanci (induktance a kapacitance jsou si rovny)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost. Dosazením frekvence  $f$  nebo periody  $T$  získáváme Thomsonovy vztahy

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

### 2.8.2 Řešené příklady

#### Příklad č. 55: F047A2-3: Kmitavý obvod

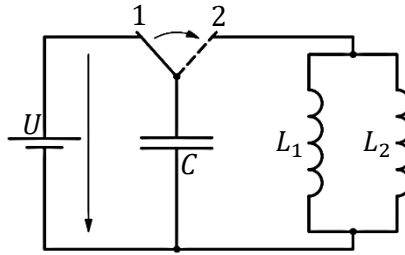
[45,18 %]

Kondenzátor o kapacitě  $C$  nabijeme ze zdroje o svorkovém napětí  $U$  a pak jej připojíme k paralelně připojeným cívкам o indukčnostech  $L_1$  a  $L_2$  (obr. 2.8.1).

- S jakou frekvencí se obvod rozkmitá?
- Jaké amplitudy budou mít proudy procházející cívkami?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $U = 10$  V,  $C = 4,0$   $\mu$ F,  $L_1 = 0,25$  H,  $L_2 = 1,0$  H. Kondenzátor a cívky považujte za ideální.





Obrázek 2.8.1: Kmitavý obvod, k úloze FO47A2-3.

**Řešení příkladu č. 55:**

- a) Paralelně spojené cívky se v obvodu chovají jako jediná cívka s indukčností  $L$ , která s kondenzátorem tvoří kmitavý obvod, jehož frekvence vlastních kmitů je

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Při vybíjení kondenzátoru přes cívky bude na obou stejné okamžité napětí

$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = L \frac{d(i_1+i_2)}{dt}.$$

Z toho plyne

$$d(i_1 + i_2) = \frac{u}{L} dt = di_1 + di_2 = \frac{u}{L_1} dt + \frac{u}{L_2} dt, \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

Celková indukčnost je tedy  $L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$  a obvod bude kmitat s frekvencí

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{CL_1 L_2}} = 178 \text{ Hz.} \quad \mathbf{5 \text{ bodů}}$$

- b) Po připojení kondenzátoru k cívкам proudy v cívkách porostou až do vybití kondenzátoru a pro jejich přírůstky platí

$$L_1 di_1 = L_2 di_2.$$

Proto i pro amplitudy  $I_{m_1}$ ,  $I_{m_2}$  proudů v cívkách platí

$$L_1 I_{m_1} = L_2 I_{m_2}. \quad (2.8.1)$$

Ze zákona zachování energie plyne

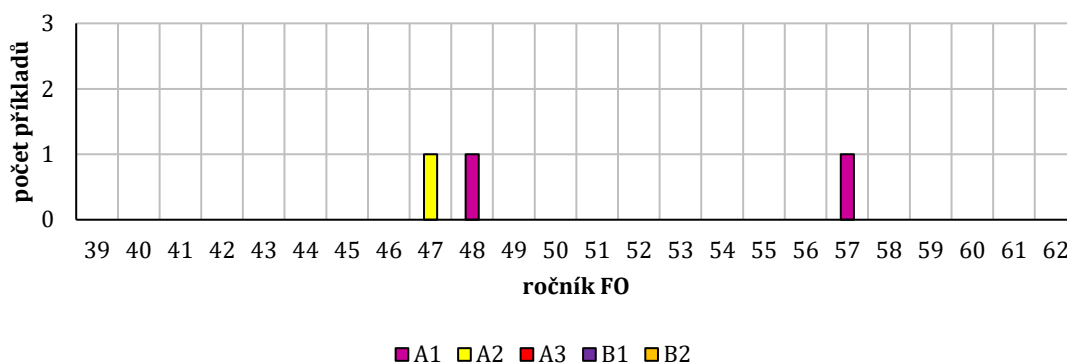
$$\frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} L_1 I_{m_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_{m_2}^2. \quad (2.8.2)$$

Řešením soustavy rovnic (2.8.1), (2.8.2) dostaneme

$$I_{m_1} = U \sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1+L_2)}} = 36 \text{ mA}, \quad I_{m_2} = U \sqrt{\frac{CL_1}{L_2(L_1+L_2)}} = 9 \text{ mA.} \quad \mathbf{5 \text{ bodů}}$$

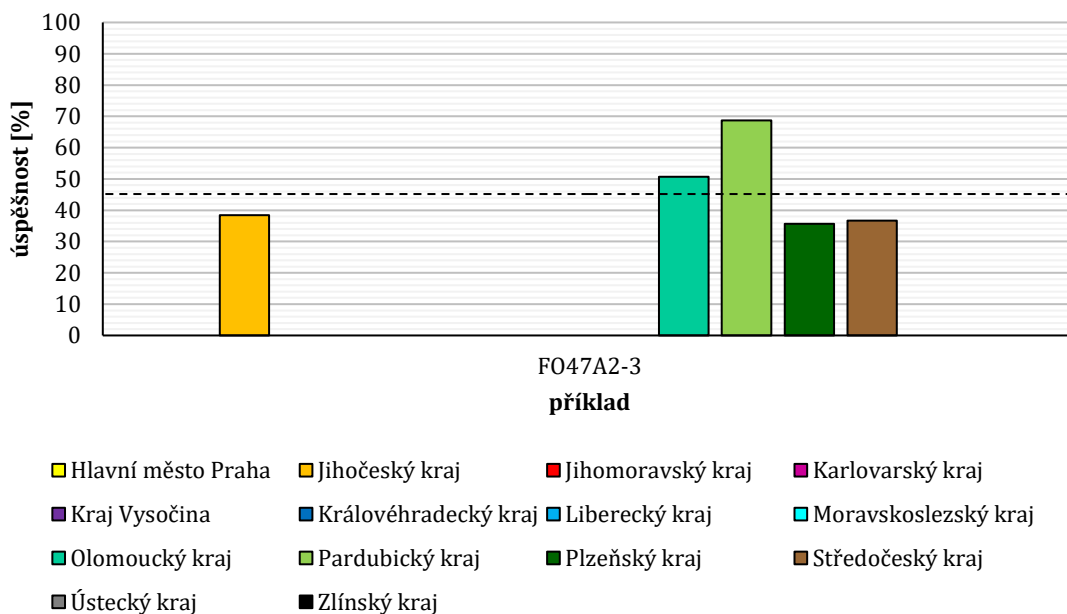
## 2.8.3 Statistická úspěšnost příkladů

Elektromagnetické kmitání je nejméně rozsáhlou kapitolou elektřiny a magnetismu, spadají do ní pouhé 3 příklady, což činí 1,96 % všech příkladů elektřiny a magnetismu. V grafu na obrázku 2.8.2 je znázorněno zastoupení těchto příkladů v jednotlivých ročnících fyzikálních olympiád.



**Obrázek 2.8.2:** Zastoupení příkladů na elektromagnetické kmitání v jednotlivých ročnících a kolech fyzikální olympiády.

Všechny tyto příklady spadají do kategorie A, a pouze jeden z nich je z postupového kola. Procentuální úspěšnost v jednotlivých krajích je vyznačena v grafu na obrázku 2.8.3. Průměrná procentuální úspěšnost tohoto příkladu je 45,18 %.



**Obrázek 2.8.3:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů na elektromagnetické kmitání v jednotlivých krajích.

---

# ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo sestavit tematickou sbírku úloh fyzikální olympiády zaměřenou na příklady z oblasti elektřiny a magnetismu, a to z co největšího možného rozsahu ročníků. Vzhledem k dostupnosti testů a výsledkových listin byl zvolen interval od 39. ročníku do 61. ročníku pro kategorii B a do 62. ročníku pro kategorii A. V jiných kategoriích fyzikální olympiády pro střední školy se tato oblast nevyskytuje. Práce je rozdělena na dvě velké části – na statistickou a příkladovou.

První část, statistická, je věnována obecné charakteristice příkladů fyzikální olympiády. Je rozdělena na dvě kapitoly. První se zaměřuje na rozbor počtu příkladů, a to v jednotlivých ročnících, kolech, i kategoriích. Všechny závěry jsou vyvedeny do přehledných barevných grafů, některé z nich pro vyšší názornost obsahují mimo jiné také popisky dat. Druhá kapitola se zabývá rozbohem jednotlivých úloh už jen konkrétně z oblasti elektřiny a magnetismu. U úloh jsou určovány tři důležité parametry – obtížnost, citlivost a nenormované odpovědi. Nejprve je popsáno, jak se tyto parametry určují, a poté jsou ze získaných hodnot vytvořeny tabulky a grafy, které umožňují úlohy porovnávat mezi sebou. Na dalších stranách je už pracováno pouze s obtížností (respektive úspěšností řešení úloh), a jsou mezi sebou porovnávány ročníky, kategorie a kraje ČR. Z dostupných dat plyne závěr, že nejúspěšnějším kolem je třetí kolo kategorie A, a nejúspěšnějším krajem je Hlavní město Praha. Naopak nejméně úspěšným krajem v příkladech oblasti elektřiny a magnetismu je kraj Královéhradecký.

Druhá část práce, příkladová část, obsahuje již samotné řešené úlohy. Příkladová část je rozdělena do celkem osmi kapitol, přičemž každá zahrnuje jednu oblast elektřiny a magnetismu (elektrický náboj a pole, elektrický proud v kovech, elektrický proud v elektrolytech, elektrický proud v polovodičích, elektrický proud v plynech a ve vakuu, magnetické pole, střídavý proud a elektromagnetické kmitání). Každá tato kapitola je členěna do dalších třech podkapitol – úvodní, příkladové a statistické. V úvodní podkapitole jsou vždy uvedeny vzorce, jednotky, zákony, konstanty apod., které by se mohly řešiteli hodit při procvičování úloh. V příkladové podkapitole jsou uvedeny vybrané úlohy, které jsou seřazeny podle obtížnosti od nejúspěšnějších po nejméně úspěšné. V práci je celkem 55 řešených příkladů, přičemž počet příkladů v kapitole se odvíjí od poměrového zastoupení kapitoly v olympiádách. Toto poměrové zastoupení příkladů v olympiádách se odvíjí od ŠVP. Největší počet příkladů obsahují kapitoly elektrický proud v kovech, střídavý

proud a elektrický náboj a pole, naopak nejmenší počet příkladů je uveden v kapitolách elektromagnetické kmitání, elektrický proud v elektrolytech a elektrický proud v plynech a vakuu. V práci jsou i takové příklady, které nesplňují parametry obtížnosti, citlivosti a nenormovaných odpovědí, tyto příklady jsou uvedeny ale především pro zajímavost. U příkladů jsou též uvedena bodování jednotlivých částí příkladů. V poslední podkapitole, statistické, je shrnutí – jsou vždy uvedeny počty příkladů v jednotlivých ročnících olympiád, srovnání obtížností všech příkladů (i těch, které nejsou uvedeny včetně řešení), a nakonec i porovnání mezi kraji ČR. Výsledkem této statistické podkapitoly by měl být přehled toho, jak často se příklady dané kapitoly v olympiádách vyskytují a jak obtížné pro řešitele bývají.

V práci jsem si dala záležet na tom, aby si v ní každý našel to, co hledá – ať už prosté zajímavosti ve statistické části, nebo alespoň co největší počet řešených příkladů z olympiád uvedených na jednom místě, aniž by bylo třeba projít všechny ročníky a příklady hledat. Navíc díky tomu, že jsou příklady rozděleny do kapitol, měl by být každý schopen si najít to, co mu dělá největší problém, a postupně se zlepšovat na příkladech s rostoucí obtížností. Vřele doufám v to, že práce poslouží svému účelu a pomůže v procvičování příkladů elektřiny a magnetismu nejen účastníkům fyzikálním olympiád, ale i například zájemcům o fyziku na seminářích na středních školách. V práci bych ráda v jiné oblasti fyziky pokračovala při dalším studiu.

---

# CITOVANÁ LITERATURA

- [1] **KRUŽÍK, Miroslav.** *Sbírka úloh z fyziky pro žáky středních škol.* Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1969.
- [2] **FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA.** *Archiv zadání a řešení soutěžních úloh FO 1997–2020.* [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/zadani-a-reseni>.
- [3] **CHRÁSKA, Miroslav.** *Metody pedagogického výzkumu: Základy kvantitativního výzkumu.* Praha : Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1369-4.
- [4] **JEŘÁBEK, Ondřej a Martin, BÍLEK.** *Teorie a praxe tvorby didaktických testů.* Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. ISBN 978-80-244-2494-1.
- [5] **VAFKOVÁ, Lada.** *Položková analýza v systému STATISTICA.* Bakalářská práce. Brno : Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2015. [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/t350m/Plny\\_text\\_BP.pdf](https://is.muni.cz/th/t350m/Plny_text_BP.pdf).
- [6] **CHRÁSKA, Miroslav.** *Didaktické testy: příručka pro učitele a studenty učitelství.* Brno : Paido, 1999. ISBN 80-85931-68-0.
- [7] **FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA JIHOČESKÉHO KRAJE.** *Výsledkové listiny.* [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z: <http://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kaft/pro-verejnost/fyzikalni-olympiada/fyzikalni-olympiada-vysledkove-listiny/>.
- [8] **FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA KARLOVY VARY.** *Výsledkové listiny.* [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z: <http://kvary.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/>.
- [9] **FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA.** *Krajská komise fyzikální olympiády Zlínského kraje.* [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z: <https://www.guh.cz/fyzikalni-olympiada/>.
- [10] **FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA PLZEŇSKÝ KRAJ.** *Aktuality.* [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z: <https://kof.zcu.cz/fo/index.php>.
- [11] —. *Archiv FO.* [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z: <https://kof.zcu.cz/fo/archiv.php>.
- [12] **FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA PRAHA.** *Výsledkové listiny.* [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z: <http://praha.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/>.

- [13] **FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA STŘEDOČESKÉHO KRAJE.** *Archiv.* [online, cit. 11. 4. 2021].  
Dostupné z: <http://fo.czechian.net/stranky/archiv.php>.
- [14] **FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA V ÚSTECKÉM KRAJI.** *Výsledkové listiny krajských kol.*  
[online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z: <http://physics.ujep.cz/~fo/vysledky.html>.
- [15] **FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA VYSOČINA.** *Výsledkové listiny.* [online, cit. 11. 4. 2021].  
Dostupné z: <http://vysocina.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/>.
- [16] **FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA.** *Výsledky krajských kol FO v Olomouckém kraji.* [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z: <http://fo.upol.cz/archivkk.html>.
- [17] **MICHALCOVÁ, Jana.** *Analýza vlastností souboru úloh vybraných ročníků Fyzikální olympiády.* Bakalářská práce. Olomouc : Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, 2020. [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z:  
[http://muj.optol.cz/~richterek/data/media/bp\\_michalcova.pdf](http://muj.optol.cz/~richterek/data/media/bp_michalcova.pdf).
- [18] **VONDRA, Miroslav.** *Cvičení k fyzice v kostce: pro střední školy.* Havlíčkův Brod :  
Fragment, 2000. ISBN 80-7200-379-8.
- [19] **CHASÁK, Jan a Tereza, ŠLITROVÁ.** *FYZIKA bez nervů: přehled středoškolské fyziky.*  
Rychnov nad Kněžnou : vydali vlastním nákladem autoři, 2017. ISBN 978-80-270-2401-8.
- [20] **SVOBODA, Emanuel, a další.** *Přehled středoškolské fyziky.* Praha : Prometheus, 1998.  
ISBN 80-7196-116-7.
- [21] **TARÁBEK, Pavol a Petra, ČERVINKOVÁ.** *Odmaturuj! z fyziky.* Brno : Didaktis, c2006.  
ISBN 80-7358-058-6.
- [22] **LANK, Vladimír a Miroslav, VONDRA.** *Fyzika v kostce: pro střední školy.* Praha :  
Fragment, 2007. ISBN 978-80-253-0228-6.
- [23] **JAREŠOVÁ, Miroslava.** *Elektrické obvody (stejnoseměrný proud): studijní text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku.* [online, cit. 11. 4. 2021]. Dostupné z:  
<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf>.