VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

STURMOVA-LIOUVILLEOVA ÚLOHA V KMITÁNÍ SPOJITÝCH SOUSTAV

STURM-LIOUVILLE PROBLEM IN VIBRATION OF CONTINUOUS SYSTEMS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — **ALANIS VARMUSOVÁ**

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — **doc. Ing. JIŘÍ ŠREMR, Ph.D.**

SUPERVISOR

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	**Alanis Varmusová**
Studijní program:	Matematické inženýrství
Studijní obor:	bez specializace
Vedoucí práce:	**doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.**
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Sturmova–Liouvilleova úloha v kmitání spojitých soustav

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V základních matematických modelech kmitání spojitých soustav se vyskytují parciální diferenciální rovnice druhého řádu hyperbolického typu. Při hledání jejich analytických řešení se často objevují různé okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. Jednou z nich je Sturmova–Liouvilleova úloha pro obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu.

Cíle bakalářské práce:

Teoretická část:
1) Nastudování základních poznatků z teorie Sturmovy–Liouvilleovy úlohy.
2) Doplnění potřebných znalostí z teorie parciálních diferenciálních rovnic.

Praktická část:
1) Srozumitelné zpracování potřebného teoretického základu.
2) Odvození vlastních čísel a vlastních funkcí vybrané okrajové úlohy. Odvození tvarů Greenovy funkce.
3) Popis modelu vybraného procesu vedoucího na počátečně–okrajovou úlohu pro parciální diferenciální rovnici 2. řádu.
4) Řešení konkrétní úlohy vedoucí na použití výsledků Sturmovy–Liouvilleovy úlohy včetně grafického zpracování získaných výsledků.

Seznam doporučené literatury:

KNOBEL, R. An Introduction to the Mathematical Theory of Waves. Student Mathematical Library, 3, IAS/Park City Mathematical Subseries, American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ: 2000. ISBN: 978-0-8218-2039-1.

DRÁBEK, P., HOLUBOVÁ, G. Parciální diferenciální rovnice [online], Plzeň: 2011. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/modul/parcialni-diferencialni-rovnice.

KALAS, J., RÁB, M. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1130-0.

HARTMAN, P. Ordinary Differential Equations. New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, 1964.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Cílem této práce je zpracování teorie týkající se Sturmovy-Liouvilleeovy úlohy a parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Na základě uvedených poznatků se v práci odvozují potřebná vlastní čísla, vlastní funkce a Greenovy funkce, které jsou se Sturmovou-Liouvillovou úlohou spjaty. Výsledky odvozování se využívají při řešení počátečně-okrajové úlohy vlnové rovnice, jejíž výsledky jsou následně graficky interpretovány.

Summary
The goal of this thesis is to compile the theory concerning the Sturm-Liouville problem and partial diferential equations of the second order. Based on the findings the necessary eigenvalues, eigenfunctions and Green's functions, which are connected with the Sturm-Liouville problem, are derived in the thesis. Results of derivation are used in the solution of the initial-boundary value problem for wave equation, which results are then interpreted graphically.

Klíčová slova
Sturmova-Liouvilleeova úloha, Dirichletova úloha, vlastní číslo, vlastní funkce, Greenova funkce, parciální diferenciální rovnice, kmitání struny, vlnová rovnice

Keywords
Sturm-Liouville problem, Dirichlet's problem, eigenvalue, eigenfunciton, Green's function, partial diferential equation, string vibration, wave equation

VARMUSOVÁ, A.*Sturmova-Liouvilleeova úloha v kmitání spojitých soustav.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2022. 29 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením doc. Ing. Jiřího Šremra, Ph.D. s užitím zdrojů uvedených v seznamu literatury.

Alanis Varmusová

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu doc. Ing. Jiřímu Šremrovi, Ph.D. za veškerý čas, který mi věnoval a za ochotu, trpělivost, cenné rady, které mi během psaní práce dal. Také bych chtěla poděkovat svému snoubenci Martinovi za podporu a pomoc, své nejlepší kamarádce Adéle za oporu, kterou mi je, a na závěr bych chtěla poděkovat všem svým přátelům, známým, celé radě VKH Brno a rodině za modlitby.

Alanis Varmusová

Obsah

Úvod

V základních matematických modelech kmitání spojitých soustav se vyskytují parciální diferenciální rovnice (dále jen PDR), při jejichž řešení se nám často vyskytnou okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice (dále jen ODR). Mezi tyto úlohy patří mimo jiné i Sturmova-Liouvilleova úloha pro ODR druhého řádu, kterou budeme podrobněji zkoumat v této práci.

Hlavním cílem práce je zpracovat teoretický základ z oblasti soustav lineárních ODR prvního řádu, parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, představení Sturmovy-Liouvilleovy úlohy a následně získané poznatky využít při výpočtu ilustrativního příkladu.

V první kapitole se budeme věnovat definování základních pojmů týkajících se soustav lineárních ODR prvního řádu pro homogenní i nehomogenní soustavy, a zavedeme si tvary řešení těchto soustav. Dále si představíme dvoubodovou okrajovou úlohu pro soustavy lineárních ODR, definujeme si Greenovou matici, kterou budeme využívat při odvození Greenových funkcí v následující kapitole.

Ve druhé kapitole se zaměříme na formulaci Sturmovy-Liouvilleovy úlohy a Dirichletovu úlohu pro rovnici s konstantními koeficienty. Teoretické poznatky budeme využívat při vyjádření vlastních čísel a vlastních funkcí, které budou řešeními dané úlohy. Také se budeme věnovat vyjádření Greenových funkcí Dirichletovy úlohy na základě poznatků o Greenových maticích.

Ve třetí kapitole zavedeme pojem parciálních diferenciálních rovnic, okrajových podmínek a představíme Fourierovu metodu řešení počátečně-okrajové úlohy, kterou budeme využívat při výpočtu ilustrativního příkladu.

Poslední kapitola bude věnovaná modelu kmitání struny, ve které bude zahrnuto představení vlnové rovnice spolu s počátečními a okrajovými podmínkami, a následný výpočet ilustrativního příkladu. V tomto příkladu budeme pro výpočet užívat Fourierovu metodu řad a využijeme dříve získaná vlastní čísla a vlastní funkce. Výsledky příkladu následně graficky interpretujeme.

1. Soustavy lineárních ODR 1. řádu

Mějme soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t), \\ y_2' &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t), \\ \dots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t), \end{aligned}$$

kde a_{ik}, b_i $(i, k = 1, \dots, n)$ jsou spojité funkce na intervalu I. Tuto soustavu budeme zapisovat ve tvaru

$$y' = A(t)y + b(t), \tag{1.1}$$

kde $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n$ je maticová funkce řádu n a $b = (b_i)_{i=1}^n$ je n-vektorová funkce. V případě, že $b(t) \equiv 0$, nazveme soustavu (1.1) *homogenní*, v opačném případě mluvíme o soustavě *nehomogenní*.

Definice 1.1. Řešením soustavy (1.1) na intervalu $J \subseteq I$ budeme rozumět n-vektorovou funkci φ, která je spojitě diferencovatelná na intervalu J a splňuje $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t)$ pro každé $t \in J$.

Definice 1.2. *Počáteční problém* nebo *počáteční úloha* se nazývá problém určení řešení soustavy (1.1) splňujícího podmínku $y(t_0) = \xi$, kde $t_0 \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Tento problém můžeme zapsat ve tvaru

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = \xi. \tag{1.2}$$

Věta 1.3 (O existenci a jednoznačnosti řešení)**.** *Nechť maticová funkce A a vektorová funkce b jsou spojité na intervalu I. Pak má problém (1.2) právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu I. Toto řešení je limitou tzv. Picardovy posloupnosti postupných aproximací*

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &\equiv 0, \\ \varphi_{k+1}(t) &= \xi + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi_k(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s, \quad t \in I, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Důkaz. Viz např. [4]. □

1.1. Homogenní soustava

Nechť y_1, y_2 jsou řešení homogenní soustavy

$$y' = A(t)y \tag{1.3}$$

a c_1, c_2 jsou konstanty. Pak funkce $y = c_1y_1 + c_2y_2$ je řešením této soustavy, neboť

$$\begin{aligned} y'(t) &= c_1y_1'(t) + c_2y_2'(t) = c_1A(t)y_1(t) + c_2A(t)y_2(t) = A(t)c_1y_1(t) + A(t)c_2y_2(t) \\ &= A(t)\big(c_1y_1(t) + c_2y_2(t)\big) = A(t)y(t) \quad \text{pro } t \in I. \end{aligned}$$

Odtud je vidět, že množina všech řešení soustavy (1.3) tvoří vektorový prostor.

Definice 1.4. Řešení $y_1, \ldots, y_k$ soustavy (1.3) se nazývají *lineárně závislá*, když existují konstanty $c_1, \ldots, c_k$, které nejsou všechny rovny nule, takové, že platí

$$c_1 y_1(t) + \cdots + c_k y_k(t) \equiv 0.$$

V opačném případě se řešení $y_1, \ldots, y_k$ nazývají *lineárně nezávislá*.

Definice 1.5. Libovolná n-tice lineárně nezávislých řešení soustavy (1.3) se nazývá *fundamentální systém řešení soustavy* (1.3).

Poznámka 1.6 (Existence fundamentálního systému). Nechť $c_k \in \mathbb{R}^n$ $(k = 1, ..., n)$ je libovolná báze prostoru $\mathbb{R}^n$ a t_0 libovolný pevný bod z I. Z věty 1.3 vyplývá, že soustava (1.3) má pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$ jediné řešení y_k vyhovující počáteční podmínce $y_k(t_0) = c_k$. Z lineární nezávislosti vektorů $c_1, \ldots, c_n$ vyplývá, že řešení $y_1, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislá, tvoří tedy fundamentální systém řešení soustavy (1.3). Vzhledem k tomu, že báze $c_1, \ldots, c_n$ může být libovolná, je zřejmé, že systém (1.3) má nekonečně mnoho fundamentálních systémů řešení (viz např. [5]).

Definice 1.7. *Fundamentální maticí* soustavy (1.3) nazýváme maticovou funkci $Y : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, jejíž sloupce tvoří fundamentální systém řešení soustavy (1.3).

Poznámka 1.8 (Obecné řešení). Tvoří-li $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fundamentální systém řešení homogenní soustavy (1.3) na intervalu I, potom každé řešení y této soustavy lze jednoznačně psát ve tvaru

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n, \tag{1.4}$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou vhodné konstanty (viz např. [4]). Položíme-li

$$c := (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T,$$

potom lze psát (1.4) stručně ve tvaru

$$y = Yc = c^T Y^T, \tag{1.5}$$

kde Y je fundamentální matice soustavy (1.3).

Tvrzení 1.9. *Je-li Y fundamentální matice, pak*

$$\det(Y(t)) \neq 0 \qquad \forall t \in I.$$

Definice 1.10. Maticová funkce $C : I^2 \to \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá *Cauchyova matice* soustavy (1.3), jestliže pro libovolné $s \in I$ je maticová funkce $C(\cdot, s) : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ fundamentální maticí soustavy (1.3) vyhovující počáteční podmínce

$$C(s, s) = E.$$

Věta 1.11 ([5, Věta 1.5.]). *Cauchyova matice soustavy* (1.3) *existuje a je jediná. Tato matice je tvaru*

$$C(t, s) = Y(t)Y^{-1}(s),$$

kde Y je libovolná fundamentální matice soustavy (1.3).

1.2. Počáteční úloha pro soustavy lineárních ODR

Mějme nehomogenní soustavu

$$y' = A(t)y + b(t), \tag{1.6}$$

kde A je spojitá maticová funkce řádu n a b je spojitá n-vektorová funkce na intervalu I. Z věty 1.3 plyne, že má soustava (1.6) jediné řešení splňující počáteční podmínku

$$y(t_0) = c_0, \tag{1.7}$$

kde $c_0 \in \mathbb{R}$. Odvodíme nyní integrální reprezentaci řešení y pomocí Cauchyovy matice homogenní soustavy (1.3).

Nechť Y je fundamentální matice soustavy (1.3) a y_0 nějaké řešení soustavy (1.6). Pak lze přímým výpočtem ověřit, že vektorová funkce

$$y(t) = Y(t)c + y_0(t) \quad \text{pro } t \in I$$

je řešením soustavy (1.6) pro každé $c \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka 1.12 (Tvar řešení). V nehomogenním případě nahradíme ve vztahu (1.5) konstantní vektor c za neznámou vektorovou funkci z a následně zkoumáme transformaci

$$y(t) = Y(t)z(t). \tag{1.8}$$

Je-li y řešením soustavy (1.6), pak

$$z = Y^{-1}(t)y(t)$$

je řešením soustavy

$$z' = Y^{-1}(t)b(t). \tag{1.9}$$

Zde platí i obrácené tvrzení: když uvažujeme, že z je řešení soustavy (1.9), pak vektorová funkce y, která je zadaná rovností (1.8), je řešením soustavy (1.6). Vektorová funkce y, daná vztahem (1.8), vyhovuje počáteční podmínce (1.7) právě tehdy, když

$$z(t_0) = Y^{-1}(t_0)c_0. \tag{1.10}$$

Z toho vyplývá, že nám vzorec (1.8) určuje vztah mezi řešeními úlohy (1.6), (1.7) a úlohy (1.9), (1.10), který je vzájemně jednoznačný.

Tvrzení 1.13 ([5])**.** *Jestliže $b : I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá vektorová funkce, pak soustava diferenciálních rovnic*

$$y' = b(t)$$

má jediné řešení y vyhovující počáteční podmínce (1.7) a toto řešení je tvaru

$$y(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{d}s \quad \textit{pro } t \in I.$$

Podle tvrzení 1.13 můžeme řešení úlohy (1.9), (1.10) zapsat do tvaru

$$z(t) = Y^{-1}(t_0)c_0 + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s.$$

Pokud funkci z dosadíme do (1.8), obdržíme následně

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)c_0 + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \in I.$$

Poslední vzorec můžeme přepsat ve tvaru

$$y(t) = C(t,t_0)c_0 + \int_{t_0}^{t} C(t,s)b(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \in I, \tag{1.11}$$

kde C je Cauchyova matice soustavy (1.3) (viz definici 1.10). Odtud vyplývá následující věta.

Věta 1.14. *Řešení y úlohy (1.6), (1.7) lze psát ve tvaru (1.11), kde C je Cauchyova matice soustavy (1.3).*

Poznámka 1.15. Toto vyjádření se nazývá *Cauchyův vzorec* pro nehomogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic.

1.3. Dvoubodová okrajová úloha pro soustavy lineárních ODR

V této kapitole se budeme zabývat otázkou existence řešení y nehomogenní soustavy (1.6), které vyhovuje okrajové podmínce

$$P_1 y(p) + P_2 y(q) = c_0, \tag{1.12}$$

kde $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Předpokládáme, že $I = [p,q]$. Matici (P_1, P_2) budeme nazývat maticí okrajových podmínek dané úlohy. Spolu s úlohou (1.6), (1.12) uvažujeme odpovídající homogenní úlohu

$$y' = A(t)y, \tag{1.13}$$

$$P_1 y(p) + P_2 y(q) = 0. \tag{1.14}$$

Definice 1.16. Zobrazení $G : I^2 \to \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá *Greenovou maticí* úlohy (1.13), (1.14), jestliže:

(i) pro libovolné $s \in (p,q)$ jsou zúžení sloupců matice $G(\cdot,s)$ na intervaly $[p,s)$ a $(s,q]$ řešením soustavy (1.13), přičemž

$$G(s_+,s) - G(s_-,s) = E;$$

(ii) $G(t,\cdot) \in L^{+\infty}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$ pro libovolné $t \in I$;

(iii) pro libovolné $b \in C(I,\mathbb{R}^n)$ vyhovuje vektorová funkce

$$y(t) = \int_p^q G(t,s)b(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.15}$$

podmínce (1.14).

Věta 1.17 ([5])**.** *Pro jednoznačnou řešitelnost úlohy* (1.6), (1.12) *je nutné a stačí, aby odpovídající homogenní úloha* (1.13), (1.14) *měla pouze triviální řešení, tj. aby byla splněna podmínka*

$$\det(P_1Y(p) + P_2Y(q)) \neq 0, \tag{1.16}$$

kde Y je fundamentální matice soustavy (1.13)*. Jestliže je splněna podmínka* (1.16)*, potom jediné řešení y úlohy* (1.6), (1.12) *lze vyjádřit v následujícím tvaru (tzv. Greenova formule)*

$$y(t) = y_0(t) + \int_p^q G(t,s)b(s)\,\mathrm{d}s \quad \textit{pro } t \in [p,q],$$

kde y_0 je řešení úlohy (1.13), (1.12) *a G je Greenova matice úlohy* (1.13), (1.14).

Z [5] vyplývá, že Greenova matice úlohy (1.13), (1.14) je tvaru

$$G(t,s) = \begin{cases} Y(t)(P_1Y(p) + P_2Y(q))^{-1}P_1Y(p)Y^{-1}(s) & \text{pro } p \leq s \leq t \leq q, \\ -Y(t)(P_1Y(p) + P_2Y(q))^{-1}P_2Y(q)Y^{-1}(s) & \text{pro } p \leq t < s \leq q. \end{cases} \tag{1.17}$$

2. Sturmova-Liouvilleova úloha

2.1. Formulace úlohy

V této kapitole si představíme Sturmovu-Liouvilleovu okrajovou úlohu, která je jednou z typických úloh v teorii obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Nejprve si uvedeme rovnici

$$(p(t)u')' + [q(t) + \lambda]u = 0, \tag{2.1}$$

ve které funkce nabývají reálných hodnot a jsou spojité na $[0, T]$, $p(t) > 0$ pro $t \in [0, T]$ a λ je reálný parametr. Dále máme dána reálná čísla α, β a uvažujme úlohu nalezení, pokud možno, netriviálního řešení rovnice (2.1) vyhovujícího okrajovým podmínkám

$$u(0)\cos\alpha - p(0)u'(0)\sin\alpha = 0, \quad u(T)\cos\beta - p(T)u'(T)\sin\beta = 0. \tag{2.2}$$

Řešením úlohy (2.1), (2.2) rozumíme funkci $u : [0, T] \to \mathbb{R}$, která je spojitá na $[0, T]$ spolu se svou první derivací takovou, že funkce pu' je spojitě diferencovatelná funkce, rovnice (2.1) je splněna všude na $[0, T]$ a jsou splněny okrajové podmínky (2.2).

Věta 2.1. *Existuje neomezená posloupnost reálných čísel $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ taková, že:*

(i) *Úloha (2.1), (2.2) má netriviální řešení právě tehdy, když $\lambda = \lambda_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

(ii) *Jestli $\lambda = \lambda_n$ a $u_n(t) \not\equiv 0$ je řešením úlohy (2.1), (2.2), pak u_n je jediné (až na multiplikativní konstantu) a u_n má přesně n nulových bodů v $(0, T)$.*

(iii) *Jestli $n \neq m$, pak*

$$\int_0^T u_n(t)u_m(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(iv) *Jestli je λ reálné číslo a $\lambda \neq \lambda_n$ pro $n = 0, 1, \ldots$, pak existuje spojitá funkce $g(\cdot, \cdot, \lambda) : [0, T] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ s vlastností, že jestli f je funkce spojitá na $[0, T]$, pak rovnice*

$$(p(t)w')' + [q(t) + \lambda]w = f(t) \tag{2.3}$$

má jediné řešení w vyhovující podmínkám

$$w(0)\cos\alpha - p(0)w'(0)\sin\alpha = 0, \quad w(T)\cos\beta - p(T)w'(T)sin\beta = 0 \tag{2.4}$$

a w je dáno vztahem

$$w(t) = \int_0^T g(t, s, \lambda)f(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \in [0, T].$$

(v) *Jestli platí, že $\lambda = \lambda_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a f je funkce spojitá na $[0, T]$, pak úloha (2.3), (2.4) má řešení právě tehdy, když*

$$\int_0^T u_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0;$$

v tomto případě, když w je řešením úlohy (2.3), (2.4), pak $w + cu_n$ je také řešením a všechna řešení jsou tohoto tvaru.

(vi) *Jestli jsou funkce u_n takové, že*

$$\int_0^T u_n^2(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

pak $u_0, u_1, \dots$ tvoří úplnou ortonormální posloupnost v prostoru $L^2(0,T)$. Ke každé funkci $f \in L^2(0,T)$ lze tedy přiřadit Fourierovu řadu

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(t), \quad \textit{kde} \quad c_n = \int_0^T f(t) u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

a

$$\int_0^T \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k u_k(t) \right|^2 \mathrm{d}t \to 0 \quad \textit{pro} \quad n \to \infty.$$

Důkaz. Viz např. [3] str. 338. □

Definice 2.2. Čísla λ_n ve větě 2.1 nazýváme vlastní čísla úlohy (2.1), (2.2). Řešení u_n nazýváme vlastní funkcí příslušnou vlastnímu číslu λ_n.

2.2. Dirichletova úloha pro rovnici s konstantními koeficienty

V této části se zaměříme na rovnici (2.1) s konstantními koeficienty p, q a podmínku (2.2) s $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Na intervalu $[0, T]$ tedy budeme uvažovat rovnici

$$u'' + \lambda u = 0 \tag{2.5}$$

a okrajové podmínky

$$u(0) = 0, \qquad u(T) = 0, \tag{2.6}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Spolu s rovnicí (2.5) budeme ještě uvažovat odpovídající nehomogenní rovnici

$$u'' + \lambda u = f(t), \tag{2.7}$$

kde $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce.

Najdeme nejprve vlastní čísla a vlastní funkce úlohy (2.5), (2.6). Je známo, že obecné řešení rovnice (2.5) je tvaru

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a u_1, u_2 je tzv. fundamentální systém řešení rovnice (2.5). Dále je známo, že funkce u_1, u_2 lze získat z řešení charakteristické rovnice, jejíž výsledek závisí na tom, jakých hodnot bude nabývat λ. Tato charakteristická rovnice je tvaru

$$\rho^2 + \lambda = 0.$$

Nyní si ukážeme její řešení pro λ nabývající záporných hodnot, kladných hodnot anebo nuly.

1. Nechť $\lambda < 0$.
   Charakteristická rovnice je tvaru
$$\begin{aligned} \rho^2 - |\lambda| &= 0, \\ (\rho - \sqrt{|\lambda|})(\rho + \sqrt{|\lambda|}) &= 0. \end{aligned}$$
   Fundamentální systém řešení tvoří funkce u_1 a u_2 ve tvaru
$$u_1(t) = c_1 \, \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t}, \quad u_2(t) = c_2 \, \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} . \tag{2.8}$$
   Obecné řešení rovnice (2.5) je
$$u(t) = c_1 \, \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} + c_2 \, \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Dosadíme okrajové podmínky, abychom spočetli konstanty c_1 a c_2:
$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ 0 &= c_1 + c_2, \\ c_1 &= -c_2; \\ u(T) &= 0, \\ 0 &= c_1 \, \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} + c_2 \, \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T}, \\ 0 &= -c_2 \, \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} + c_2 \, \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T}, \\ 0 &= c_2(\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T}), \\ c_2 &= 0, c_1 = 0. \end{aligned}$$
   Odtud vyplývá, že pro $\lambda < 0$ má úloha (2.5), (2.6) pouze triviální řešení.

2. Nechť $\lambda = 0$.
   Pro řešení úlohy (2.5), (2.6), kde $\lambda = 0$, využijeme podobný postup řešení jako v případě $\lambda < 0$. Máme
$$\rho^2 = 0.$$
   Funkce u_1 a u_2 jsou tvaru
$$u_1(t) = c_1, \quad u_2(t) = c_2 t \tag{2.9}$$
   a obecné řešení rovnice (2.5) pro $\lambda = 0$ je
$$u(t) = c_1 + c_2 t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Následně dosadíme okrajové podmínky a vypočteme konstanty c_1 a c_2:
$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ 0 &= c_1; \\ u(T) &= 0, \\ 0 &= c_1 + c_2 T, \\ 0 &= c_2 T, \\ 0 &= c_2. \end{aligned}$$
   Jediné řešení úlohy (2.5), (2.6) pro $\lambda = 0$ je, stejně jako při $\lambda < 0$, triviální.

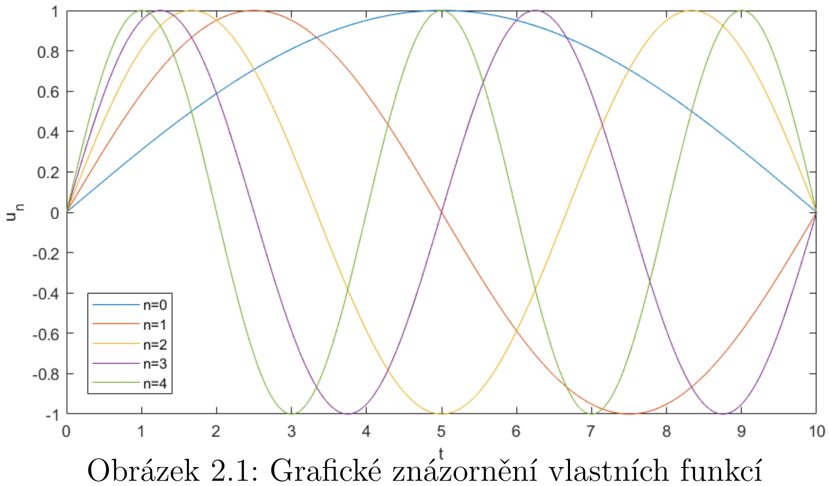
3. Nechť $\lambda > 0$.
   Poslední variantou je rovnice (2.5) s $\lambda > 0$ a její charakteristická rovnice je tvaru
$$\rho^2 + \lambda = 0,$$
$$\rho_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i.$$
   Obecné řešení je následující:
$$u(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$
   Dosazením okrajových podmínek do obecného řešení dostáváme konstanty c_1 a c_2:
$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ 0 &= c_1 \cos\sqrt{\lambda}0 + c_2 \sin\sqrt{\lambda}0, \\ 0 &= c_1; \\ u(T) &= 0, \\ 0 &= c_1 \cos\sqrt{\lambda}T + c_2 \sin\sqrt{\lambda}T, \\ 0 &= c_2 \sin\sqrt{\lambda}T. \end{aligned}$$
   V případě, že zvolíme $c_2 = 0$, bude řešení úlohy opět triviální. My však hledáme netriviální řešení. Rovnice $0 = c_2 \sin\sqrt{\lambda}T$ má nenulové řešení právě tehdy, když λ splňuje $\sin\sqrt{\lambda}T = 0$, tj.
$$\sqrt{\lambda}T = (n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$\lambda = \frac{(n+1)^2\pi^2}{T^2}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Příslušné netriviální řešení úlohy (2.5), (2.6) pak bude
$$u(t) = \sin\frac{(n+1)\pi}{T}t.$$

Odtud plyne následující tvrzení.

Tvrzení 2.3. *Vlastní čísla λ_n a vlastní funkce u_n Dirichletovy úlohy (2.5), (2.6) tvoří posloupnosti*
$$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{(n+1)^2\pi^2}{T^2}\right\}_{n=0}^{\infty},$$
$$\{u_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sin\frac{(n+1)\pi}{T}t\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Některé vlastní funkce úlohy (2.5), (2.6) jsou vykresleny na obrázku 2.1 (pro T=10). Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$, které není vlastním číslem úlohy (2.5), (2.6), najdeme tvar Greenovy funkce. Využijeme výsledky z kapitoly 1.3, neboť úlohu (2.7), (2.6) lze přepsat na dvoubodovou okrajovou úlohu (1.6), (1.14). Položme $p = 0$ a $q = T$,
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$



Obrázek 2.1: Grafické znázornění vlastních funkcí

Je-li u řešením úlohy (2.7), (2.6), pak $y = (u, u')$ je řešením úlohy (1.6), (1.14). Naopak, je-li $y = (y_1, y_2)$ řešením úlohy (1.6), (1.14), pak $y_1' = y_2$ a y_1 je řešením úlohy (2.7), (2.6). Tato ekvivalence pak dává fundamentální matici Y soustavy (1.13), která je tvaru

$$Y = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

kde u_1, u_2 je fundamentální systém řešení rovnice (2.5).

Důsledek 2.4. *Má-li úloha (2.5), (2.6) pouze triviální řešení, má úloha (2.7), (2.6) jediné řešení u a toto řešení lze zapsat ve tvaru*

$$u(t) = \int_0^T g(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s \quad \textit{pro} \quad t \in [0, T],$$

kde g je prvek Greenovy matice G úlohy (1.13), (1.14) ležící v této matici na pozici prvního řádku a druhého sloupce a A, P_1, P_2 jsou dány vztahy (2.11).

Důkaz. Předpokládejme, že homogenní úloha (2.5), (2.6) má pouze triviální řešení.

Výše jsme si uvedli, že úlohu (2.7), (2.6) můžeme přepsat na dvoubodovou okrajovou úlohu

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Z ekvivalence, která je taktéž uvedená výše, vyplývá (pro $f(t) \equiv 0$), že má homogenní úloha

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} y; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

pouze triviální řešení. Vzhledem k větě 1.17 má tedy úloha (2.13) jediné řešení $y = (y_1, y_2)$. Opětovným použitím výše zmíněné ekvivalence tedy zjistíme, že úloha (2.7), (2.6) má jediné řešení y_1. Navíc z věty 1.17 víme, že řešení y můžeme zapsat pomocí rovnice (1.15) jako

$$y(t) = \int_0^T G(t,s) b(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^T \begin{pmatrix} G_{11}(t,s) & G_{12}(t,s) \\ G_{21}(t,s) & G_{22}(t,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s,$$

kde G je Greenova matice úlohy (2.14). Zjistili jsme, že řešení y_1 úlohy (2.7), (2.6) můžeme vyjádřit v následujícím tvaru

$$y_1(t) = \int_0^T G_{12}(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde G_{12} je prvek Greenovy matice na pozici prvního řádku a druhého sloupce.
Tím je důsledek dokázán. □

Poznámka 2.5. Funkci g v důsledku 2.4 budeme nazývat Greenovou funkcí úlohy (2.5), (2.6).

Vzhledem k tomu, že známe umístění funkce g v Greenově matici úlohy (2.14), nemusíme ve výpočtu vyjadřovat všechny prvky Greenovy matice, ale stačí pouze ty, které potřebujeme na výpočet dané Greenovy funkce.

Tvar Greenových matic zapíšeme podle vyjádření (1.17) a vypočteme z nich funce g pro λ nabývající kladných hodnot, záporných anebo nuly.

Nechť $\lambda = 0$. Z (2.9) a (2.12) dostaneme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a pro $0 \le s \le t \le T$ je tedy

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & T \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{T} \begin{pmatrix} T-t & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} T-t & -s(T-t) \\ -1 & s \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

to je

$$g(t,s) = -\frac{1}{T}(T-t)s \quad \text{pro } 0 \le s \le t \le T.$$

Na druhé straně, pro $0 \le t < s \le T$, bude

$$\begin{aligned} G(t,s) &= -\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & T \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & T-s \end{pmatrix} = -\frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & T-s \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{T} \begin{pmatrix} T-t & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & T-s \end{pmatrix} = -\frac{1}{T} \begin{pmatrix} t & (T-s)t \\ 1 & T-s \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

to je

$$g(t,s) = -\frac{1}{T}(T-s)t \quad \text{pro } 0 \le t < s \le T.$$

Nechť $\lambda < 0$. Členy v Greenově matici $G(t,s)$, které nepotřebujeme k výpočtu $g(t,s)$, označíme $\sim$. Z (2.8) a (2.12) dostaneme fundamentální matici

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \end{pmatrix}$$

a pro $0 \le s \le t \le T$ je tedy

$$\begin{aligned}
G(t,s) = &\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \end{pmatrix} \times \\
&\times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{|\lambda|} & \sqrt{|\lambda|} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} \end{pmatrix} \right)^{-1} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{|\lambda|} & \sqrt{|\lambda|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} \end{pmatrix}^{-1} \\
= &\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} \end{pmatrix} \right)^{-1} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} & -\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} \\ \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} & \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} \end{pmatrix} \\
= &\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} & -\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} \\ \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} & \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} \end{pmatrix} \\
= &\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T})} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} & -1 \\ -\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & 1 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} + \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s}) & \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} - \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
= &\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T})} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}(T-t)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}(T-t)} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} \\ \sim & \sim \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} + \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s}) & \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} - \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
= &\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T})} \begin{pmatrix} \sim & (\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}(T-t)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}(T-t)})(\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} - \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s}) \\ \sim & \sim \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

to je

$$g(t,s) = -\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T})}(e^{\sqrt{|\lambda|}(T-t)} - e^{-\sqrt{|\lambda|}(T-t)})(e^{\sqrt{|\lambda|}s} - e^{-\sqrt{|\lambda|}s})$$

pro $0 \le s \le t \le T$.

Pro $0 \le t < s \le T$ bude

$$
\begin{aligned}
G(t,s) = &-\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \end{pmatrix} \times \\
&\times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{|\lambda|} & \sqrt{|\lambda|} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} \end{pmatrix} \right)^{-1} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} \end{pmatrix}^{-1} \\
= &-\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} \end{pmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} & -\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}s} \\ \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} & \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}s} \end{pmatrix} \\
= &-\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T})} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \\ -\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} & \sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} & -1 \\ -\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T} & 1 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sim & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}(T-s)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}(T-s)} \end{pmatrix} \\
= &-\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T})} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}(T-t)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}(T-t)} & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} \\ \sim & \sim \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sim & \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}(T-s)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}(T-s)} \end{pmatrix} \\
= &-\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T})} \begin{pmatrix} \sim & (\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}(T-s)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}(T-s)})(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t}) \\ \sim & \sim \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

to je

$$g(t,s) = -\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T})}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}(T-s)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}(T-s)})(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t})$$

pro $0 \le t < s \le T$.

Nechť $\lambda > 0$, $\lambda \neq \dfrac{(n+1)^2\pi^2}{T^2}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Opět nepotřebné prvky v Greenově matici označíme $\sim$. Z (2.10) a (2.12) dostaneme fundamentální matici ve tvaru

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\lambda}t & \sin\sqrt{\lambda}t \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t \end{pmatrix}$$

a pro $0 \le s \le t \le T$ je tedy

$$G(t,s) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\lambda}t & \sin\sqrt{\lambda}t \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t \end{pmatrix} \times$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{\lambda}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}T&\sin\sqrt{\lambda}T\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}T\end{pmatrix}\right)^{-1}\times\\
&\times\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}s&\sin\sqrt{\lambda}s\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}s&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}s\end{pmatrix}^{-1}\\
=&\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}t&\sin\sqrt{\lambda}t\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\\cos\sqrt{\lambda}T&\sin\sqrt{\lambda}T\end{pmatrix}\right)^{-1}\times\\
&\times\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}s&-\sin\sqrt{\lambda}s\\\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}s&\cos\sqrt{\lambda}s\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}t&\sin\sqrt{\lambda}t\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\cos\sqrt{\lambda}T&\sin\sqrt{\lambda}T\end{pmatrix}^{-1}\times\\
&\times\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}s&-\sin\sqrt{\lambda}s\\0&0\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}t&\sin\sqrt{\lambda}t\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\sqrt{\lambda}T&0\\-\cos\sqrt{\lambda}T&1\end{pmatrix}\times\\
&\times\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}s&-\sin\sqrt{\lambda}s\\0&0\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}t\sin\sqrt{\lambda}T-\sin\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}T&\sin\sqrt{\lambda}t\\\sim&\sim\end{pmatrix}\times\\
&\times\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}s&-\sin\sqrt{\lambda}s\\0&0\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T}\begin{pmatrix}\sim&-(\cos\sqrt{\lambda}t\sin\sqrt{\lambda}T-\sin\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}T)\sin\sqrt{\lambda}s\\\sim&\sim\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

to je

$$g(t,s)=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T}\sin(\sqrt{\lambda}(T-t))\sin\sqrt{\lambda}s\quad\text{pro } 0\le s\le t\le T.$$

Na druhé straně, pro $0\le t<s\le T$, bude

$$
\begin{aligned}
G(t,s)=&-\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}t&\sin\sqrt{\lambda}t\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t\end{pmatrix}\times\\
&\times\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{\lambda}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}T&\sin\sqrt{\lambda}T\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}T\end{pmatrix}\right)^{-1}\times\\
&\times\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}T&\sin\sqrt{\lambda}T\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}s&\sin\sqrt{\lambda}s\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}s&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}s\end{pmatrix}^{-1}\\
=&-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}t&\sin\sqrt{\lambda}t\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\\cos\sqrt{\lambda}T&\sin\sqrt{\lambda}T\end{pmatrix}\right)^{-1}\times\\
&\times\begin{pmatrix}0&0\\\cos\sqrt{\lambda}T&\sin\sqrt{\lambda}T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}s&-\sin\sqrt{\lambda}s\\\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}s&\cos\sqrt{\lambda}s\end{pmatrix}\\
=&-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda}t&\sin\sqrt{\lambda}t\\-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t&\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\cos\sqrt{\lambda}T&\sin\sqrt{\lambda}T\end{pmatrix}^{-1}\times
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sim & \sin\sqrt{\lambda}T\cos\sqrt{\lambda}s - \cos\sqrt{\lambda}T\sin\sqrt{\lambda}s \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{\lambda}t & \sin\sqrt{\lambda}t \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\sqrt{\lambda}T & 0 \\ -\cos\sqrt{\lambda}T & 1 \end{pmatrix}\times \\
&\times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sim & \sin\sqrt{\lambda}T\cos\sqrt{\lambda}s - \cos\sqrt{\lambda}T\sin\sqrt{\lambda}s \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{\lambda}t\sin\sqrt{\lambda}T - \sin\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}T & \sin\sqrt{\lambda}t \\ \sim & \sim \end{pmatrix}\times \\
&\times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sim & \sin\sqrt{\lambda}T\cos\sqrt{\lambda}s - \cos\sqrt{\lambda}T\sin\sqrt{\lambda}s \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T}\begin{pmatrix} \sim & (\sin\sqrt{\lambda}T\cos\sqrt{\lambda}s - \cos\sqrt{\lambda}T\sin\sqrt{\lambda}s)\sin\sqrt{\lambda}t \\ \sim & \sim \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

to je

$$
g(t,s) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T}\sin(\sqrt{\lambda}(T-s))\sin\sqrt{\lambda}t \quad \text{pro } 0 \le t < s \le T.
$$

Dokázali jsme tedy následující tvrzení.

Tvrzení 2.6. *Greenovy funkce g Dirichletovy úlohy (2.5), (2.6) jsou tvaru:*

1) $\lambda = 0$

$$
g(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{T}(T-t)s & \textit{pro } 0 \le s \le t \le T, \\ -\frac{1}{T}(T-s)t & \textit{pro } 0 \le t < s \le T, \end{cases}
$$

2) $\lambda < 0$

$$
g(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T})}(e^{\sqrt{|\lambda|}(T-t)} - e^{-\sqrt{|\lambda|}(T-t)})(e^{\sqrt{|\lambda|}s} - e^{-\sqrt{|\lambda|}s}) \\ \textit{pro } 0 \le s \le t \le T, \\ -\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}T} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}T})}(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}(T-s)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}(T-s)})(\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t}) \\ \textit{pro } 0 \le t < s \le T, \end{cases}
$$

3) $\lambda > 0,\ \lambda \neq \dfrac{(n+1)^2\pi^2}{T^2} \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$
g(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T}\sin(\sqrt{\lambda}(T-t))\sin\sqrt{\lambda}s & \textit{pro } 0 \le s \le t \le T, \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}T}\sin(\sqrt{\lambda}(T-s))\sin\sqrt{\lambda}t & \textit{pro } 0 \le t < s \le T. \end{cases}
$$

3. PDR 2. řádu

V této kapitole si zavedeme pojem parciální diferenciální rovnice a také si představíme metodu řešení parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu zvanou Fourierova metoda řad. Ke zpracování byly využity zdroje [1] a [2].

3.1. Základní pojmy

Parciální diferenciální rovnice je rovnice, ve které se vyskytuje neznámá funkce více reálných proměnných a její parciální derivace. Řád rovnice určuje stupeň nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Mějme rovnici tvaru

$$\begin{aligned} F\Bigg(&x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \cdots \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \\ &\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{(k-1)} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\Bigg) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde funkce u je neznámá funkce n proměnných definovaná na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial^k}{\partial x_i^k} u$ je parciální derivace funkce u podle proměnné x_i $(i = 1, \dots, n)$ a $k \in \mathbb{N}$ udává řád rovnice.

Poznámka 3.1. Z výše uvedeného vyplývá, že parciální diferenciální rovnice druhého řádu je taková rovnice, v níž se vyskytuje aspoň jedna parciální derivace druhého řádu a žádná derivace vyššího řádu než druhého.

Poznámka 3.2. Pojem řešení parciální diferenciální rovnice (3.1) se může lišit v závislosti na „tvaru" oblasti Ω, vlastnostech funkce F a formulaci úlohy, proto zde obecnou definici řešení nebudeme uvádět.

Spolu s rovnicí (3.1) obvykle uvažujeme různé podmínky počátečního a okrajového typu. Uveďme zde tři z často se vyskytujících podmínek (je-li Ω omezená):

Dirichletova podmínka

$$u(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n), \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega,$$

Neumannova podmínka

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n), \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega,$$

Newtonova (Robinova) podmínka

$$A\frac{\partial u}{\partial n}(x_1, \dots, x_n) + Bu(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n), \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega,$$

kde $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ je derivace funkce u podle vnější normály k povrchu hranice Ω a A, B jsou dané konstanty, pro které platí $A^2 + B^2 \neq 0$. Pokud je funkce $g(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$, pak nazýváme podmínky *homogenními*, v opačném případě mluvíme o podmínkách *nehomogenních*.

3.2. Fourierova metoda řešení počátečně-okrajové úlohy

Fourierova metoda řad je metoda řešení počátečně-okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Princip metody ukážeme na příkladu nehomogenní lineární hyperbolické rovnice v jedné prostorové proměnné s Dirichletovými okrajovými podmínkami a obecně zadanými počátečními podmínkami.

Uvažujeme parciální diferenciální rovnici

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \tag{3.2}$$

kde $f : (0,l) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $c > 0$. Řešením této rovnice rozumíme spojitou funkci $u : (0,l) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, která má spojité všechny parciální derivace až do druhého řádu na oblasti $\Omega := (0,l) \times (0,\infty)$ a splňuje rovnici (3.2) všude na Ω. Spolu s rovnicí (3.2) uvažujeme homogenní Dirichletovy okrajové podmínky

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \qquad \text{pro } t > 0 \tag{3.3}$$

a počáteční podmínky

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \qquad \text{pro } x \in (0,l), \tag{3.4}$$

kde φ, ψ jsou spojité funkce splňující $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(l) = 0$. Terminologie počáteční a okrajové podmínky vychází z aplikací rovnice (3.2), neboť rovnice (3.2) modeluje např. kmitání tenké struny délky l (proměnná t, resp. x, pak značí čas, resp. prostorovou proměnnou).

Budeme hledat řešení rovnice (3.2) splňující podmínky (3.3) a (3.4). Předpokládejme, že existuje řešení rovnice (3.2), které je ve tvaru

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{3.5}$$

kde X a T jsou reálné funkce se separovanými proměnnými mající spojitou druhou derivaci.

Nejprve rovnici (3.2) uvažujeme jako homogenní, tj.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \tag{3.6}$$

Po dosazení (3.5) do (3.6) získáme rovnici ve tvaru

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t), \qquad t > 0,\ x \in (0,l),$$

kterou upravíme na

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \qquad t > 0,\ x \in (0,l),$$

kde λ je reálná konstanta. Parciální diferenciální rovnici jsme převedli na dvě obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \qquad x \in (0,l), \\ T''(t) + c^2 \lambda T(t) &= 0, \qquad t > 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

s neznámými funkcemi X a T. Následně do (3.5) dosadíme homogenní Dirichletovy okrajové podmínky

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{3.8}$$

Získáme tak

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0, \qquad t > 0.$$

Jelikož nás zajímá nenulové řešení úlohy, řešení X rovnice (3.7) musí splňovat podmínky

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{3.9}$$

Hledaná funkce X je tedy netriviálním řešením okrajové úlohy (3.7), (3.9). Tato úloha má však netriviální řešení právě tehdy, když je λ vlastním číslem. Hledaná funkce X je pak vlastní funkcí příslušnou vlastním číslu λ. Z Tvrzení 2.3 víme, že úloha (3.7), (3.9) má posloupnost vlastních čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnost odpovídajících vlastních funkcí $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvaru

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pro každé λ_n je T_n řešením diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} T_n'' + c^2\lambda_n T_n &= 0, \\ T_n'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2} T_n &= 0. \end{aligned}$$

Funkce T_n vyjdou ve tvaru

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{cn\pi t}{l} + b_n \sin\frac{cn\pi t}{l}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{3.10}$$

kde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Následně funkce X_n a T_n dosadíme zpět do vyjádření (3.5) a získáme funkci

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos\frac{cn\pi t}{l} + b_n \sin\frac{cn\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

která je (pro každé $n \in \mathbb{N}$) řešením homogenní rovnice (3.6) a splňuje homogenní Dirichletovy okrajové podmínky (3.8). Pak je řešením úlohy (3.6), (3.8) také každá konečná suma

$$u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\frac{cn\pi t}{l} + b_n \sin\frac{cn\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Přejdeme-li k limitě pro $N \to \infty$, zjistíme, že pro každé $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ je funkce

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{cn\pi t}{l} + b_n \sin\frac{cn\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.11}$$

řešením úlohy (3.6), (3.8), pokud řada na pravé straně stejnoměrně konverguje v $(0,l) \times (0,\infty)$.

Zbývá najít konstanty a_n, b_n tak, aby (3.11) splňovala počáteční podmínky (3.4). Za předpokladu stejnoměrné konvergence řady v (3.11) dostaneme dosazením do (3.4) vztahy

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{cn\pi}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} = \psi(x). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Funkce φ, ψ rozvineme do sinových Fourierových řad a koeficienty a_n a b_n pak získáme z vyjádření (3.12).

Nyní ukážeme, jak nalézt řešení nehomogenní rovnice (3.2) splňující homogenní okrajové podmínky (3.3) a homogenní počáteční podmínky

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \qquad \text{pro } x \in (0,l). \tag{3.13}$$

Pravou stranu f diferenciální rovnice rozvineme pro každé $t > 0$ do Fourierovy řady

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{3.14}$$

Řešení hledáme opět ve tvaru nekonečné řady

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{3.15}$$

Derivací, dosazením do (3.2) a užitím (3.14) dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin \frac{n\pi x}{l} + c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{3.16}$$

Díky úplnosti systému vlastních funkcí $\left\{\sin \frac{n\pi x}{l}\right\}$ z rovnice (3.16) získáme

$$T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Z počátečních podmínek (3.13) dostaneme

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0, \quad u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0,$$

odkud

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Rovnice (3.17) je obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu a tu vyřešíme. Funkce T_n bude tvořena součtem homogenního a partikulárního řešení. Homogenní řešení jsme vyjádřili výše ve tvaru pravé strany vztahu (3.10) a partikulární řešení získáme metodou variace konstant nebo metodou neurčitých koeficientů. Koeficienty a_n, b_n určíme tak, aby řešení T_n splňovalo počáteční podmínky (3.18). Následně funkce T_n dosadíme do (3.15) a získáme tak řešení úlohy (3.2), (3.3), (3.13).

Zbývá poznamenat, že díky linearitě studované úlohy lze řešení úlohy (3.2), (3.3), (3.4) nalézt jako součet řešení úlohy (3.6), (3.3), (3.4) s řešením úlohy (3.2), (3.3), (3.13). Výpočet si ukážeme v ilustrativním příkladu v následující kapitole.

4. Model kmitání struny

4.1. Vlnová rovnice

Jedním z nejznámějších parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu v jedné prostorové proměnné je vlnová rovnice

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

kde konstanta $c > 0$ představuje rychlost šíření vlny. Uvažujeme také vnější buzení, které se popisuje funkcí $f(x,t)$, dostaneme tak nehomogenní vlnovou rovnici

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t).$$

Tato rovnice popisuje např. kmitání struny délky l. Rovnici pak uvažujeme na oblasti $\Omega : (0,l) \times (0,\infty)$. V případě, kdy je struna uchycena v obou koních, využijeme Dirichletovy okrajové podmínky ve tvaru

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \qquad t > 0.$$

V předchozí kapitole jsme si uváděli i Neumannovu a Newtonovu okrajovou podmínku, ale ty v našem případě nebudeme využívat. Spolu s okrajovými podmínkami budeme uvažovat počáteční podmínky tvaru

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in (0,l),$$

kde funkce φ nám označuje počáteční výchylku v jednotlivých bodech struny. Předpokládáme, že $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(l) = 0$.

4.2. Ilustrativní příklad

Mějme počátečně-okrajovou úlohu s vlnovou rovnicí, Dirichletovými okrajovými podmínkami a počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ &u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \qquad t > 0, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in (0,l), \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde $c > 0$, $f(x,t) = 3\cos\Omega t \sin\frac{\pi x}{l} - \sin\Omega t \sin\frac{2\pi x}{l}$, $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{l} - 2\sin\frac{3\pi x}{l} + \sin\frac{4\pi x}{l}$ a $\Omega \neq \frac{cn\pi}{l} \forall n \in \mathbb{N}$.

Nejprve najdeme řešení homogenní rovnice s nehomogenní počáteční podmínkou, poté řešení nehomogenní rovnice s homogenní počáteční podmínkou a posledním typem bude nehomogenní rovnice s nehomogenní počáteční podmínkou.

1. V první části úlohy uvažujeme

   $$f(x,t) \equiv 0.$$

   Úlohu řešíme metodou separace proměnných, jak bylo popsáno v kapitole 3.2. Získáme řešení u ve tvaru Fourierovy řady (3.11).

Nyní porovnáme vyjádření počátečních podmínek (3.12) se skutečnými hodnotami ze zadání

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \sin\frac{\pi x}{l} - 2\sin\frac{3\pi x}{l} + \sin\frac{4\pi x}{l},$$
$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{cn\pi}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Odtud vidíme, že máme pouze tři nenulové koeficienty a_n a to $a_1 = 1$, $a_3 = -2$ a $a_4 = 1$. Koeficienty b_n jsou v tomto případě všechny nulové.
Po dosazení koeficientů do vyjádření (3.11) získáváme

$$u(x,t) = \cos\frac{c\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l} - 2\cos\frac{3c\pi t}{l}\sin\frac{3\pi x}{l} + \cos\frac{4c\pi t}{l}\sin\frac{4\pi x}{l},$$

což je řešením homogenní vlnové rovnice splňující uvažované okrajové podmínky a nehomogenní počáteční podmínku.

2. V druhé části úlohy se budeme věnovat řešení nehomogenní vlnové rovnice s homogenními okrajovými i počátečními podmínkami. Položíme tedy

$$\varphi(x) \equiv 0.$$

Řešení vyjádříme ve tvaru Fourierovy řady (3.15). Porovnáme rozvinutí pravé strany do Fourierovy řady (3.14) s hodnotami ze zadání

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} = 3\cos\Omega t\sin\frac{\pi x}{l} - \sin\Omega t\sin\frac{2\pi x}{l}.$$

Z porovnání vidíme, že máme pouze dva nenulové koeficienty f_n, kterými jsou $f_1(t) = 3\cos\Omega t$ a $f_2(t) = -\sin\Omega t$. Z kapitoly 3.2 víme, že hledané funkce T_n jsou řešení počáteční úlohy (3.17), (3.18).

Mějme rovnici

$$T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = C_n\cos\Omega t + D_n\sin\Omega t, \quad C_n, D_n \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Řešení odpovídající homogenní rovnice je tvaru

$$T_n(t)_h = a_n\cos\frac{cn\pi t}{l} + b_n\sin\frac{cn\pi t}{l},$$

kde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení budeme počítat metodou neurčitých koeficientů:

$$\begin{aligned} C_n\cos\Omega t + D_n\sin\Omega t \Rightarrow T_n(t)_p &= A_n\cos\Omega t + B_n\sin\Omega t,\\ T_n'(t)_p &= -\Omega A_n\sin\Omega t + \Omega B_n\cos\Omega t,\\ T_n''(t)_p &= -\Omega^2 A_n\cos\Omega t - \Omega^2 B_n\sin\Omega t. \end{aligned}$$

Vyjádřené derivace dosadíme zpět do rovnice (4.2) a dostaneme

$$\begin{aligned} &-\Omega^2 A_n\cos\Omega t - \Omega^2 B_n\sin\Omega t + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 A_n\cos\Omega t + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 B_n\sin\Omega t = \\ &= C_n\cos\Omega t + D_n\sin\Omega t. \end{aligned}$$

Nyní porovnáme koeficienty vyskytující se postupně u $\cos \Omega t$ a poté u $\sin \Omega t$:

$$\cos \Omega t : -\Omega^2 A_n + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 A_n = C_n,$$

$$A_n = \frac{C_n}{\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2},$$

$$\sin \Omega t : -\Omega^2 B_n + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 B_n = D_n,$$

$$B_n = \frac{D_n}{\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2}.$$

Vyjádřené konstanty A_n a B_n dosadíme do partikulárního řešení

$$T_n(t)_p = \frac{C_n}{\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \cos \Omega t + \frac{D_n}{\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \sin \Omega t.$$

Nyní najdeme partikulární řešení rovnice (3.17) pro jednotlivá n. Vzhledem k tomu, že máme pouze dva nenulové koeficienty f_n a to pro $n = 1$ a $n = 2$, budeme mít pouze dvě nenulová partikulární řešení:

$$f_1(t) = 3 \cos \Omega t \quad \Rightarrow \quad C_1 = 3, D_1 = 0 \quad \text{v rovnici (4.2)} \quad \Rightarrow$$

$$T_1(t)_p = \frac{3}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \cos \Omega t,$$

$$f_2(t) = -\sin \Omega t \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, D_2 = -1 \quad \text{v rovnici (4.2)} \quad \Rightarrow$$

$$T_2(t)_p = -\frac{1}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \sin \Omega t.$$

Sečtením homogenního a partikulárního řešení získáme obecná řešení T_1 a T_2 rovnice (3.17), která následně porovnáme s počátečními podmínkami (3.18) pro to, abychom získali koeficienty a_1, b_1 a a_2, b_2. Pro T_1 máme

$$T_1(t) = a_1 \cos \frac{c\pi t}{l} + b_1 \sin \frac{c\pi t}{l} + \frac{3}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \cos \Omega t,$$

$$T_1'(t) = -\frac{c\pi}{l} a_1 \sin \frac{c\pi t}{l} + \frac{c\pi}{l} b_1 \cos \frac{c\pi t}{l} - \frac{3\Omega}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \sin \Omega t.$$

Provedeme porovnání koeficientů se zadanými hodnotami:

$$T_1(0) = a_1 + \frac{3}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} = 0,$$

$$a_1 = -\frac{3}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2},$$

$$T_1'(0) = \frac{c\pi}{l} b_1 = 0,$$

$$b_1 = 0.$$

Získali jsme řešení T_1 ve tvaru

$$\begin{aligned} T_1(t) &= -\frac{3}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \cos \frac{c\pi t}{l} + \frac{3}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \cos \Omega t \\ &= \frac{3}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \left(\cos \Omega t - \cos \frac{c\pi t}{l} \right). \end{aligned}$$

Stejný postup opakujeme i pro funkci T_2:

$$\begin{aligned} T_2(t) &= a_2 \cos \frac{2c\pi t}{l} + b_2 \sin \frac{2c\pi}{l} - \frac{1}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \sin \Omega t, \\ T_2'(t) &= -\frac{2c\pi}{l} a_2 \sin \frac{2c\pi t}{l} + \frac{2c\pi}{l} b_2 \cos \frac{2c\pi t}{l} - \frac{\Omega}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Opět porovnáme koeficienty:

$$\begin{aligned} T_2(0) &= a_2 = 0, \\ a_2 &= 0, \\ T_2'(0) &= \frac{2c\pi}{l} b_2 - \frac{\Omega}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} = 0, \\ b_2 &= \frac{\Omega}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \cdot \frac{l}{2c\pi}. \end{aligned}$$

Řešení T_2 je tvaru

$$\begin{aligned} T_2(t) &= \frac{\Omega}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \cdot \frac{l}{2c\pi} \sin \frac{2c\pi t}{l} - \frac{1}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \\ &= \frac{1}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \left(\frac{\Omega l}{2c\pi} \sin \frac{2c\pi t}{l} - \sin \Omega t \right). \end{aligned}$$

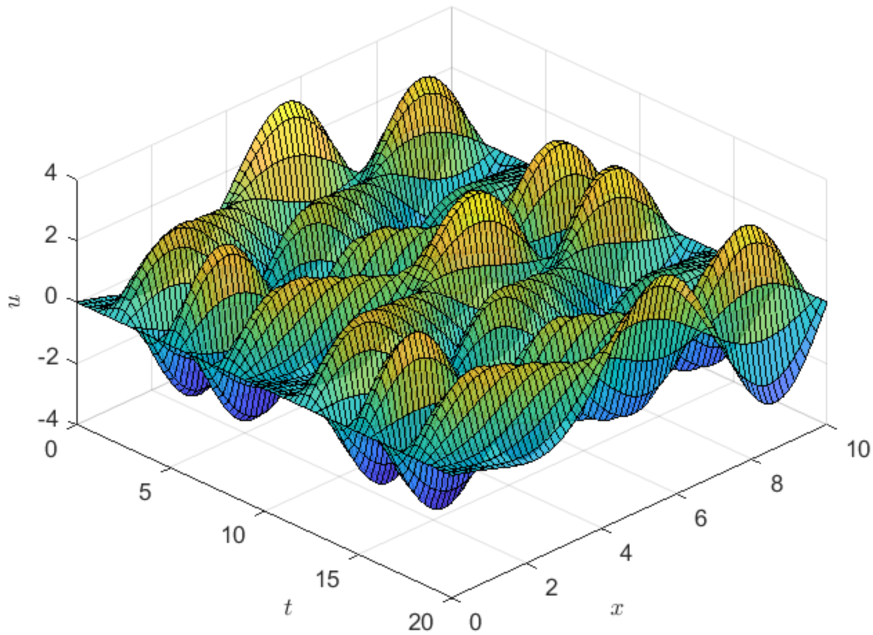
Pro $n \geq 3$ jsou řešení T_n úlohy (3.17), (3.18) nulová. Řešení úlohy (4.1) s homogenní počáteční podmínkou je tvaru

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{3}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \left(\cos \Omega t - \cos \frac{c\pi t}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l} \\ &+ \frac{1}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2} \left(\frac{\Omega l}{2c\pi} \sin \frac{2c\pi t}{l} - \sin \Omega t \right) \sin \frac{2\pi x}{l}. \end{aligned}$$

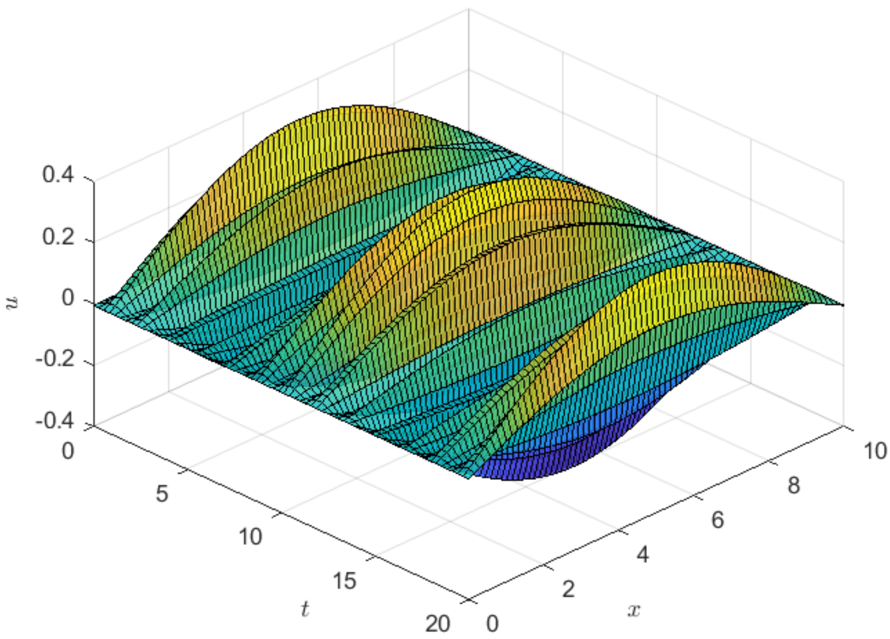
3. V poslední části příkladu se budeme věnovat zadané úloze (4.1). V předchozích dvou částech jsme řešili nejprve homogenní rovnici s nehomogenní počáteční podmínkou a v následující části nehomogenní rovnici s homogenní podmínkou. Když výsledky těchto dvou částí sečteme, získáme řešení úlohy (4.1) ve tvaru

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = {} & \cos\frac{c\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l} - 2\cos\frac{3c\pi t}{l}\sin\frac{3\pi x}{l} + \cos\frac{4c\pi t}{l}\sin\frac{4\pi x}{l} \\
& + \left(-\frac{3}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2}\cos\frac{c\pi t}{l} + \frac{3}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2}\cos\Omega t \right)\sin\frac{\pi x}{l} \\
& + \frac{1}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2}\left(\frac{\Omega l}{2c\pi}\sin\frac{2c\pi t}{l} - \sin\Omega t \right)\sin\frac{2\pi x}{l} \\
= {} & \frac{1}{\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2}\left(\left(\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2 - 3 \right)\cos\frac{c\pi t}{l} + 3\cos\Omega t \right)\sin\frac{\pi x}{l} \\
& + \frac{1}{\left(\frac{2c\pi}{l}\right)^2 - \Omega^2}\left(\frac{\Omega l}{2c\pi}\sin\frac{2c\pi t}{l} - \sin\Omega t \right)\sin\frac{2\pi x}{l} - 2\cos\frac{3c\pi t}{l}\sin\frac{3\pi x}{l} \\
& + \cos\frac{4c\pi t}{l}\sin\frac{4\pi x}{l}.
\end{aligned}
$$

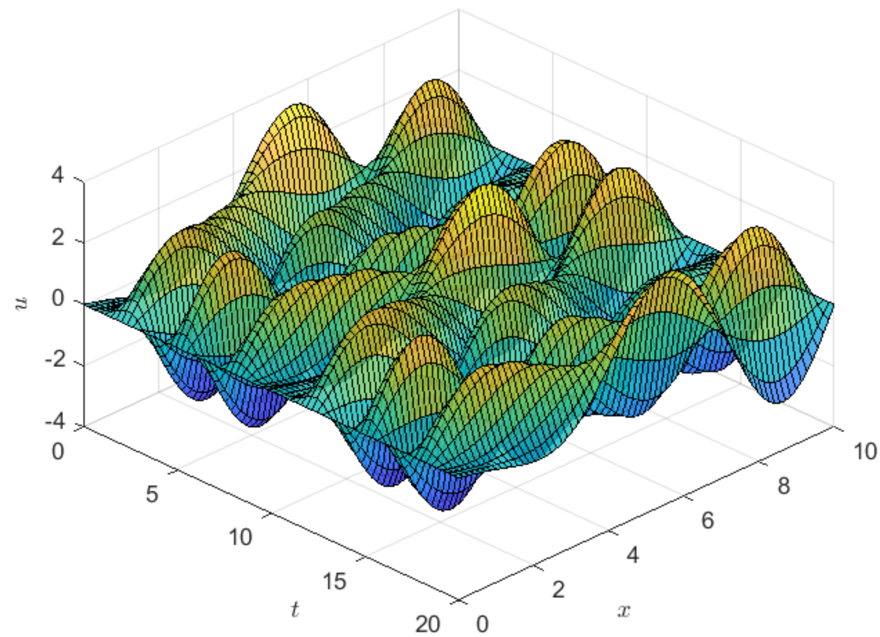
Grafické ilustrace řešení jsou v obrázcích 4.1–4.3 ($l = 10$, $\Omega = 4$, $c = 2$).



Obrázek 4.1: Grafické znázornění řešení homogenní vlnové rovnice s nehomogenní počáteční podmínkou



Obrázek 4.2: Grafické znázornění řešení nehomogenní vlnové rovnice s homogenní počáteční podmínkou



Obrázek 4.3: Grafické znázornění řešení nehomogenní vlnové rovnice s nehomogenní počáteční podmínkou

Závěr

Cílem práce bylo zpracování základních poznatků z Sturmovy-Liouvilleeovy úlohy, které se následně využily při odvozování vlastních čísel, vlastních funkcí, Greenových funkcí a poté i ve výpočtu ilustrativního příkladu pro kmitání struny.

V první kapitole jsme se věnovali zavedení pojmů ze soustav lineárních ODR a představili jsme si dvoubodovou okrajovou úlohu pro tyto soustavy.

Ve druhé kapitole jsme se zaměřili na teorii, která byla spojená se Sturmovou-Liouvilleeovou úlohou a Dirichletově úloze. Pro Dirichletovu úlohu jsme odvodili vlastní čísla a jim příslušné vlastní funkce, které jsou netriviálním řešením této úlohy. Vlastní funkce jsme graficky interpretovali pomoci softwaru MATLAB. V případě, kdy λ není vlastním číslem Dirichletovy úlohy, jsme odvodili tvar Greenových funkcí.

Ve třetí kapitole jsme zpracovali základní pojmy spjaté s PDR 2. řádu. Uvedli jsme si tři typy okrajových podmínek, kdy jsme jeden z nich zavedli v počátečně-okrajové úloze. Následně jsme se věnovali Fourierově metodě řešení počátečně-okrajové úlohy, na kterou jsme se při řešení ilustrativního příkladu odkazovali.

Ve čtvrté kapitole jsme rozebírali model kmitání struny. V této kapitole byla popsána vlnová rovnice a následně vypočten ilustrativní příklad. Na něm jsme si ukázali možný způsob řešení tří variant úlohy pro vlnovou rovnici. První variantou byla homogenní vlnová rovnice s nehomogenní počáteční podmínkou. Druhou byla nehomogenní rovnice s homogenní počáteční podmínkou a okrajovou podmínkou Dirichletova typu. Následnou syntézou předchozích poznatků jsme byli schopni určit řešení nehomogenní vlnové rovnice s nehomogenní počáteční podmínkou.

Získané výsledky jsme opět graficky interpretovali pomoci softwaru MATLAB. Na grafech vidíme kmitání struny, na kterou má vliv nejprve pouze počáteční tvar struny (obrázek 4.1), poté pouze vnější buzení (obrázek 4.2) a v posledním obrázku 4.3 vidíme graf, který znázorňuje spojení vlivu počátečního tvaru struny s vnějším buzením struny.

Literatura

[1] DRÁBEK, Pavel a Gabriela HOLUBOVÁ. Parciální diferenciální rovnice: úvod do klasické teorie. Plzeň: Západočeská univerzita, 2001. ISBN 80-7082-766-1.

[2] FRANCŮ, Jan. Parciální diferenciální rovnice. 3. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2003. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 80-214-2334-X.

[3] HARTMAN, Philip (2002) [1964], Ordinary differential equations, Classics in Applied Mathematics, 38, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, ISBN 978-0-89871-510-1, MR 1929104.

[4] KALAS, Josef a Miloš RÁB. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-2589-1.

[5] KIGURADZE, Ivan. Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Brno: Masarykova univerzita, 1997. ISBN 80-210-1664-7.