VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

APLIKACE KOOPERATIVNÍ TEORIE HER PRO COURNOTOVY OLIGOPOLY
APPLICATION OF COOPERATIVE GAME THEORY IN COURNOT OLIGOPOLY

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE — **Bc. Ivan Eryganov**
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — **doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.**
SUPERVISOR

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Bc. Ivan Eryganov**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.**
Akademický rok:	2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Aplikace kooperativní teorie her pro Cournotovy oligopoly

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Kooperativní teorie hry je schopna kvantifikovat vyjednávací schopnosti jednotlivých aktérů rozhodovacího procesu. Tato kvantifikace umožňuje následné rozdělení případného společného zisku.

Cíle diplomové práce:

Nastudování pokročilých partií teorie her.
Nastudování teorie kooperativních her.
Aplikace vybraných partií pro problém Cournotových oligopolů.

Seznam doporučené literatury:

GILLES, Robert P. The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies. Heidelberg: Springer, 2010.

OWEN, Guillermo. Game Theory. Philadelphia: W. B. Saunders, 1968.

PETERS, Hans. Game Theory - A Multi-Leveled Approach, Springer 2008.

WEBB, James N. Game Theory - Decisions, Interaction and Evolution, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2007.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Tato diplomová práce se zabývá aplikací kooperativní teorie her pro řešení problematiky Cournotovych oligopolů. Zpracované poznatky z oblastí teorie oligopolů a teorie her se používají k sestavení modelu popisujícího chovaní firem na trhu splňujícím předpoklady Cournotova oligopolu. K definici kooperativní hry se používá koncept γ-charakteristické funkce, který oproti klasickým způsobům zohledňuje to, že firmy, které nejsou v koalici, následují vlastní zisky, nikoliv potlačení pozic koalice. Podrobně se zkoumají vlastnosti výsledných kooperativních her, hlavní pozornost je soustředěna na monotonii a konvexnosti. O těchto vlastnostech je odvozeno několik vět a jsou uvedené jejich ekonomické interpretace. Také se řeší otázka vypočtu hodnot γ-charakteristické funkce pomocí algoritmu best-reply dynamics, navíc je zdůvodněna jeho konvergence pro daný typ her. Vybudovány model se aplikuje na data z trhu ropy, který se dále charakterizuje pomocí výsledků kooperativní hry.

Summary
This Master's thesis deals with the application of cooperative game theory for solving the problems of Cournot's oligopolies. The knowledge of oligopoly theory and game theory has been elaborated to build a model describing the behavior of companies at a market that meets the preconditions of Cournot's oligopoly. The definition of cooperative game is based on the γ-characteristic function, which takes into account, compared to classical methods, that companies which are not in the coalition are pursuing their own profits, not suppressing coalition positions. The properties of the resulting cooperative games are examined in detail, focusing on monotony and convexity. Several theorems about these properties have been derived and their economic interpretations are given. Also, the question of calculation of the γ-characteristic function using the best-reply dynamics algorithm is being solved, and its convergence for a given type of games is justified. The model is applied to data from the oil market, which is further characterized by the results of the cooperative game.

Klíčová slova
teorie her, kooperativní hry, jádro, Cournotův model, oligopol, γ-charakteristická funkce, monotonie, konvexnost, trh ropy

Keywords
game theory, cooperative games, core, Cournot model, oligopoly, γ-characteristic function, monotony, convexity, oil market

ERYGANOV, I. *Aplikace kooperativní teorie her pro Cournotovy oligopoly.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2019. 59 s. Vedoucí doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Jaroslava Hrdiny, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Bc. Ivan Eryganov

Rád bych poděkoval svému vedoucímu diplomové práce doc. Mgr. Jaroslavu Hrdinovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, cenné rady a vstřícnost při konzultacích a vypracování mé diplomové práce.

Bc. Ivan Eryganov

Obsah

Úvod

Na teorii her se ze začátku pohlíželo jako na soubor nástrojů pro popis a analýzu interaktivních společenských rozhodovacích situací. Tento pohled vede k závěru, že teorie her je spíše kombinací různých oblastí vědy a přístupů reprezentujících odlišné způsoby popisu zmíněných situací než samostatná nezávislá oblast matematiky. Na druhou stranu je možné ve formalismu rozhodovacích situací budovat matematickou teorii.

Pravě interaktivní rozhodovací proces jako podstata celé problematiky sjednocuje velkou sadu nástrojů a teorií, které pak tvoří teorii her. Dle Gillese [1] interaktivní rozhodovací situace má následující vlastnosti:

- Do rozhodovací situace je zapojeno několik rozhodovatelů;

- Rozhodovatel může udělat určitá rozhodnutí dle situace. Potenciální volby mezi těmito rozhodnutími se nazývají akce. To znamená, že rozhodovací subjekt má množinu několika akcí, z nichž si může vybrat v každém okamžiku, ve kterém musí udělat rozhodnuti;

- Rozhodnutí jsou interaktivní v tom smyslu, že akce zvolené jednotlivými subjekty určují konečný výsledek rozhodovací situace.

Tyto společné rysy pak umožňují zavést některé dobře známé pojmy z terminologie teorie her. Tak například interaktivní rozhodovací situaci se říká hra a rozhodovacím subjektům hráči.

Skoro všechny situace, které řeší ekonomie jako věda, mají předchozí vlastnosti. Proto teorie her je zcela přirozeným aparátem pro popis různých ekonomických situací. Například několik firem-hráčů na trhu rozhoduje o cenách své produkce a objemu výroby, což ve výsledku pak určí jejich zisky podle toho, jaký vliv na spotřebitele bude mít výsledná kombinace těchto rozhodnutí.

Tato diplomová práce se zabývá problematikou použití aparátu kooperativní teorie her k popisu Cournotova modelu oligopolu, který řeší právě tu situaci, ve které se firmy na nějakém trhu snaží maximalizovat své zisky prostřednictvím rozhodnutí o svých výstupech.

První kapitola, ve které jsou popsané teoretické základy této práce, je rozdělena do dvou základních části.

První část vypráví o teoretických aspektech Cournotova modelu oligopolu. Na začátku se uvádí základní předpoklady modelu, pak je popsán průběh stanoveni rovnováhy na trhu a na závěr se řeší otázka, jak kartelové dohody mohou ovlivnit rovnováhu v modelu.

Druhá část je věnována kooperativní teorii her. V ní se definují základní pojmy jako množina hráčů, kooperativní hra s přenosným užitkem, její možné vlastnosti, řešení hry a jejich vlastnosti a jádro jako nejpoužívanější druh řešení. Pak je podrobně zpracována problematika neprázdnosti jádra prostřednictvím věty Bondareve-Shapley. Na konci druhé části jsou uvedené důsledky konvexnosti hry, které byly popsaný Lloydem Shapleym v roce 1971.

Druhá kapitola se zabývá přímo zpracováním Cournotova modelu prostřednictvím teorie her. Nejprve se uvádí motivace ke studování vlastností modelu pomocí aparátu kooperativní teorie her. Pak se definuje oligopolní situace jako struktura zahrnující firmy na trhu, inverzní poptávkovou funkci, nákladové funkce jednotlivých firem a jejich výrobní kapacity. Dále se Cournotův model oligopolu popisuje jako hra v normální formě se stanovenou množinou strategií a s výplatní (ziskovou) funkcí závisející na vektoru strategií zvolených všemi hráči. K vytvoření kooperativní hry se používá γ-charakteristická funkce, která oproti klasickým způsobům, jako jsou α- a β-charakteristické funkce, odpovídá maximálnímu zisku koalice v případě, že hráči, kteří nepatří do koalice, individuálně a nezávisle maximalizují své zisky. Což v podstatě odpovídá určité modifikaci Nashovy rovnováhy pro případ, kdy koalici chápeme jako jednoho z hráčů. Po definování kooperativních oligopolních her ve tvaru γ-charakteristické funkce se přistupuje ke studovaní jejich vlastností. Dvě základní vlastnosti, na které se soustředíme, jsou monotonie a konvexnost. Je odvozeno několik vět o podmínkách, při kterých studované hry mají uvažované vlastnosti. Na závěr se uvádí interpretace získaných teoretických výsledků.

Ve třetí kapitole se řeší otázka výpočtu γ-charakteristické funkce pro jednotlivé koalice prostřednictvím iteračního optimalizačního algoritmu, který je naprogramován v softwaru MATLAB. Vzhledem k problematice řešené v závěrečné čtvrté aplikační kapitole je uvažován pouze lineární případ. Také je stručně zdůvodněna konvergence zvoleného algoritmu.

Ve čtvrté kapitole se vybudovaný teoreticky model aplikuje na data z trhu ropy za účelem zjištěni shody mezi výsledky modelu a realitou. Nejdříve se definuje oligopolní situace, na které se provádí výpočty. Během dalšího ladění modelu za účelem zahrnováni reálných výrobních podmínek do modelu se tato situace značně mění. Tyto změny se také promítají do algoritmu výpočtu, ale z důvodu jejich jednoduchosti jsou uvedené pouze jejich matematické formulace. Výsledný model je pak použit jak pro interpretaci výsledků situace přiblížené k realitě s cílem odvodit vlastnosti skutečného trhu ropy, tak i pro ukázku na příkladu s menším počtem hráčů, který umožňuje grafickou demonstraci výsledků.

1. Teoretická východiska

1.1. Cournotův model oligopolu

1.1.1. Obecné poznatky

Oligopol je taková struktura trhu, která se vyznačuje vzájemnou závislostí firem. Rozhodnutí každé firmy významně ovlivňují zisky konkurentů. Mikroekonomie nabízí několik různých modelů oligopolu založených na různých předpokladech o tom, jak by se firmy mohly vzájemně ovlivňovat.

Augustin Cournot (1801-1877), francouzský matematik a ekonom, vyvinul první teorii oligopolu v roce 1838 ve své knize „Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth“ [2]. Ačkoli Cournotův model oligopolu byl součástí širšího matematického zpracování mikroekonomie, včetně poptávky, monopolu a daní, jeho teorie o oligopolu byla nejoriginálnější částí jeho knihy a měla největší dopad na ekonomii. Hlavním zdrojem ekonomické teorie uvedené v této části je kniha „Microeconomics“ od Besanka a Braeutigama [3].

1.1.2. Maximalizace zisku firmami

Cournotův model je založen na oligopolu s homogenním produktem. Zpočátku Cournot uvažoval duopolní trh: trh, ve kterém existují pouze dvě firmy. Původně Cournotův duopol analyzoval chování dvou prodejců pramenité vody. Abychom si Cournotovu teorii trošku přiblížili, představme si, že analyzujeme firmy Samsung a Lucky Goldstar (LG), které vyrábí čipy DRAM.

Předpokládejme, že DRAM čipy Samsung a LG jsou identické a že náklady firem jsou stejné, takže obě společnosti budou účtovat stejnou cenu. Jediné rozhodnutí, které musí udělat každá firma, je kolik produktů vyrobit. Firmy vybírají své výstupy současně, bez spolupráce (bez vzájemné dohody) a bez znalosti plánů konkurentů (bez špehování). Jakmile si obě firmy vyberou své výstupy, tržní cena se okamžitě přizpůsobí, aby se trh vyčistil. To znamená, že po rozhodnutí firem o výstupech se tržní cena stává cenou, za kterou jsou spotřebitelé ochotni koupit agregovaný výstup obou firem.

Výstup každé firmy závisí na tržní ceně, ale tržní cena závisí na celkovém výstupu obou prodejců, tj. tržní cena není známa, dokud obě firmy nezvolí velikost své nabídky. Proto každá firma vyrobí takové množství produkce, které by maximalizovalo její zisk na základě očekávaného výstupu druhé firmy. Samsung tedy zvolí takovou úroveň produkce, která maximalizuje jeho zisk, vzhledem k tomu, kolik si myslí, že LG bude produkovat. Analogicky postupuje i LG.

Takovou úroveň výstupu, která maximalizuje zisk jedné firmy pro daný výstup druhé firmy, pak nazveme *nejlepší odpovědí*. Pro každý možný výstup LG můžeme tedy stanovit nejlepší odpověď Samsungu. Funkcí, která přiřazuje nejlepší odpověď firmy každému možnému výstupu konkurenta, pak nazveme *reakční funkcí* nebo *reakční křivkou*.

1.1.3. Rovnováha

Při dokonalé konkurenci klíčovým rysem tržní rovnováhy je to, že žádná firma nemá důvod k odchýlení od rozhodnutí maximalizujícího zisk po dosažení rovnováhy na trhu. Totéž platí o rovnováze na Cournotově trhu: při Cournotově rovnováze je výstup každé firmy nejlepší odpovědí na výstup druhé firmy. Takže ani jedna firma nemá žádný důvod, proč by měla litovat své volby nabídky. Cournotova rovnováha je speciálním případem Nashovy rovnováhy. Proto Cournotova rovnováha je také známa jako Cournotova-Nashova rovnováha nebo Nashova rovnováha ve množstvích. Zřejmě bodem rovnováhy pro případ LG a Samsungu bude průsečík jejich reakčních křivek. Cournotova rovnováha je přirozeným výsledkem v případě, že obě firmy plně rozumí své vzájemné závislosti a mají důvěru v racionalitu druhé strany.

Se zvětšením počtu firem na trhu se Cournotova rovnováha vzdaluje od monopolní rovnováhy a konverguje k dokonale konkurenční rovnováze.

1.1.4. Kartely

Kartelem je skupina výrobců, která pomocí koluze určuje cenu a celkový výstup trhu. Jednou z nejznámějších historických kartelových organizací je Organizace zemí vyvážejících ropu, neboli OPEC, jejíž členové jsou například Saúdská Arábie, Kuvajt, Írán a Venezuela. Někdy jsou kartely dokonce schvalovány vládou. Například na počátku osmdesátých let minulého století 17 průmyslových podniků na japonském trhu elektrických kabelů získalo povolení od Ministerstva mezinárodního obchodu a průmyslu Japonska jednat jako kartel. Stanoveným cílem kartelové dohody bylo snížit produkci odvětví s cílem zvýšit ceny a zisky odvětví.

Cílem kartelové dohody je koordinace výroby a cen firem, které by si jinak konkurovaly, za účelem dosažení monopolního postavení. Pokud kartel funguje dokonale, výsledkem by měly být monopolní výstupy a zisky. V praxi se zřídka, pokud vůbec, kartelům podaří tento cíl dosáhnout. Překážkou k tomu jsou například problémy ve vyjednávání mezi firmami nebo nestabilita kartelových dohod [4].

1.1.5. Cournotův model a kartelové dohody

Cournotova rovnováha neodpovídá dokonale konkurenční rovnováze, při které je celkový výstup odvětví obecně vetší nebo stejný, z čehož plyne, že firmy v Cournotově oligopolu mají vetší zisk než v případě dokonalé konkurence. To však neznamená, že celkový zisk odvětví je maximální (monopolní).

Kdyby firmy působily jako kartel maximalizující zisk, pak celková produkce odvětví by byla obecně menší nebo rovna produkci odvětví v případě, že by firmy maximalizovaly své zisky nezávisle. To je důležitá vlastnost oligopolů: pronásledování vlastního zájmu obecně nezvyšuje bohatství odvětví jako celku.

V další části teoretických východisek práce budou uvedeny potřebné poznatky z oblasti kooperativní teorie her.

1.2. Kooperativní teorie her

1.2.1. Základní pojmy a vlastnosti her

Hra je kooperativní právě tehdy, když hráči mohou vytvářet závazné dohody o distribuci výplat mezi sebou nebo o volbě strategií, přičemž tyto dohody nemusí být specifikované pravidly hry. Podobné vzájemné závazky můžeme nalézt v ekonomice. Například dlouhodobé smlouvy mezi dodavatelem a odběratelem, kde v případě porušení této smlouvy jednou ze stran může hrozit vysoké penále. Základní pojmy a vlastnosti her jsou zpracované na základě „Introduction to the theory of cooperative games“ [5]. Také v této knize lze nalézt důkazy uvedených tvrzení.

Kooperativní hry se dělí na dva základní typy: hry s přenosným a nepřenosným užitkem. Nadále bude uvažován pouze první typ.

Nechť množina U je neprázdné univerzum hráčů, U může být jak konečné, tak nekonečné. Množinou hráčů nazveme neprázdnou konečnou podmnožinu U.

Definice 1.2.1. ***Koaliční hra s přenosným užitkem*** (TU hra) je dvojice $G = (N, v)$, kde N je *množina hráčů* a $v : 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická (koaliční) funkce*, která přiřazuje každé *koalici* $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$ reálné číslo $v(S)$, neboli *hodnotu koalice* S. Navíc pro prázdnou koalici platí $v(\emptyset) = 0$.

Poznámka. Nadále budeme předpokládat, že $|N| > 1$.

Poznámka. Přenosný užitek znamená, že nás bude zajímat rozdělení hodnoty $v(S)$ mezi hráči libovolným možným způsobem, tj. koalice S může dosáhnout libovolného vektoru výplat $x \in \mathbb{R}^S$, který je přípustný, neboli

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S).$$

Protože všechny námi studované koaliční hry budou s přenosným užitkem, budeme nadále tento přívlastek vynechávat.

Definice 1.2.2. Koaliční hra (N, v) je superaditivní právě tehdy, když

$$(S, T \subseteq N \wedge S \cap T = \emptyset) \implies v(S \cup T) \geq v(S) + v(T). \tag{1.2.1}$$

Pro mnoho aplikací TU her je tato vlastnost automaticky splněna, protože jinak by bylo možné zpochybnit racionalitu hráčů, kteří pokud by se rozhodli ke spolupracím, by tím získali méně, než kdyby jednali samostatně. Superaditivita není obecně splněna pro každou hru. Například pro typ her, kterému je věnována tato diplomová práce, je superaditivita porušena v případě, kdy firmy v koalici mají horši výrobní podmínky než jejich samostatně jednající konkurenti. Existuje slabší verze superaditivity, která může být užitečná.

Definice 1.2.3. Koaliční hra (N, v) je slabě superaditivni právě tehdy, když

$$v(S \cup \{i\}) \geq v(S) + v(\{i\}), \ \forall S \subseteq N, \ i \notin S. \tag{1.2.2}$$

Definice 1.2.4. Koaliční hra (N, v) je konvexní právě tehdy, když je splněna jedna z dvou následujících ekvivalentních podmínek:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \ \forall S, T \subseteq N \tag{1.2.3}$$

nebo

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T),\ \forall S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}. \tag{1.2.4}$$

To že podmínky jsou ekvivalentní je možné nalézt v [5].

Poznámka. Zřejmě každá konvexní hra je superaditivní: stačí zvolit dvě disjunktní koalice. Opačné tvrzeni však nemusí platit.

Konvexnost je jednou ze základních vlastností TU her, která implikuje existenci a konkrétní tvary určitých druhů řešení her. Navíc má celkem jednoduchou interpretaci ohledně průběhu hry, která bude zmíněna později. Velká část teto diplomové práce je věnována právě hledání podmínek konvexnosti oligopolních koaličních her ve tvaru γ-‑charakteristické funkce pro Cournotův model oligopolu.

Definice 1.2.5. Koaliční hra (N, v) je nepodstatná právě tehdy, když platí

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}),\ \forall S \subseteq N, \tag{1.2.5}$$

tj. charakteristická funkce je aditivní.

Poznámka. Nepodstatná hra je triviální z pohledu kooperativní teorie her: každý hráč bude požadovat alespoň $v(\{i\})$ a tím bude přesně určeno rozdělení $v(N)$.

Notace 1.2.6. Nechť N je množina hráčů a $x \in \mathbb{R}^N$, pak (N, x) můžeme chápat jako nepodstatnou koaliční hru, kde

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i,\ \forall S \subseteq N. \tag{1.2.6}$$

Definice 1.2.7. Dvě koaliční hry (N, v) a (N, w) jsou strategicky ekvivalentní právě tehdy, když existuji $\alpha > 0$ a $\beta \in \mathbb{R}^N$ takové, že

$$w(S) = \alpha v(S) + \beta(S),\ \forall S \subseteq N. \tag{1.2.7}$$

Poznámka. Pro zápis předchozí rovnosti se taky používá tvar $w = \alpha v + \beta$.

Tvrzení 1.2.8. *S*trategická ekvivalence je relací ekvivalence na množině všech koaličních her.

Tvrzení 1.2.9. *N*echť (N, v) a (N, w) jsou strategicky ekvivalentní. Jestliže (N, v) je konvexní, pak (N, w) je taky konvexní.

Poznámka. Analogické tvrzení platí i pro superaditivitu nebo slabou superaditivitu nebo nepodstatnost.

Definice 1.2.10. Koaliční hra (N, v) je nulově normalizována právě tehdy, když

$$v(\{i\}) = 0,\ \forall i \in N. \tag{1.2.8}$$

Poznámka. Každá koaliční hra je strategicky ekvivalentní s nulově normalizovanou hrou. Stačí uvažovat volbu $\alpha = 1$ a $\beta(\{i\}) = -v(\{i\}),\ \forall i \in N,\ \beta(S) = 0, \forall S \subseteq N, |S| > 1$.

Definice 1.2.11. Koaliční hra (N, v) je monotónní právě tehdy, když

$$S \subseteq T \subseteq N \implies v(S) \leq v(T). \tag{1.2.9}$$

Monotonie je základní vlastnosti každé koaliční hry a musí být splněna ve většině modelů teorie her. Nesplnění této vlastností říká, že hráči nemají žádný důvod ke spolupráci, což znamená, že nemá smysl pohlížet na hru prostřednictvím aparátu kooperativní teorie her. V praxi monotonie může být porušena v případě, kdy hráči mohou být potrestáni za spolupráci.

1.2.2. Jádro a jeho vlastnosti

Jednou ze základních otázek kooperativní teorie her je otázka, jak rozdělit celkovou hodnotu vyprodukovanou koalicí N mezi všemi hráči. Neboli jaká závazná dohoda o rozdělení výplat je nejvýhodnější pro všechny hráče. Tomuto rozděleni se říká řešení hry.

Notace 1.2.12. Nechť (N, v) je koaliční hra. Pak množinou přípustných výplatních vektorů hry (N, v) rozumíme:

$$X^*(N, v) = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \leq v(N)\right\}, \tag{1.2.10}$$

kde $x(N)$ je označení dle notace (1.2.6).

Definice 1.2.13. Nechť Γ_U je množina všech koaličních her nad univerzem U. Řešení na Γ_U je funkce σ, která přiřazuje každé hře $(N, v) \in \Gamma_U$ množinu $\sigma(N, v) \subseteq X^*(N, v)$.

Řešení můžeme chápat jako určitý systém „odůvodněných" požadavků na množinu $X^*(N, v)$. Například konkrétní řešení může být definováno pomocí určitých nerovnosti a charakterizováno pomocí axiomů.

Existují různé koncepty řešení koaličních her, přičemž nejčastěji používaným řešením je jádro. Jádro je často popisováno jako řešení, které je stabilní vůči možným odchylkám koalic. Hlavní myšlenkou je, že koalice odmítají proces vyjednávání, pokud nejsou spokojené se svými oprávněnými požadavky.

Definice 1.2.14. Jádro $C(N, v)$ hry (N, v) je definováno jako

$$C(N, v) = \{x \in X^*(N, v) \mid x(S) \geq v(S),\ \forall S \subseteq N\}. \tag{1.2.11}$$

Dále budou popsány některé obecné vlastnosti řešení. Na závěr pak uvedeme důležitý axiom charakterizující jádro prostřednictvím některých z uvedených vlastností. Teoretické poznatky o jádře, včetně všech lemmat a vět, jsou také převzaté z knihy Pelega a Sudhöltera [5].

Definice 1.2.15. Nechť σ je řešení na množině Γ_U. Řekneme, že σ je kovariantní podle strategické ekvivalence (COV), pokud splňuje následující podmínku: jestliže $(N, v), (N, w) \in \Gamma_U, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}^N$ a $w = \alpha v + \beta$, pak

$$\sigma(N, w) = \alpha\sigma(N, v) + \beta. \tag{1.2.12}$$

COV představuje následující jednoduchou podmínku. Jestliže dvě hry (N, v) a (N, w) jsou strategicky ekvivalentní, pak jejich řešení (v podstatě užitky jednotlivých hráčů) jsou vázané stejnou transformací, která svazuje jejich charakteristické funkce. Poznamenejme, že jádro splňuje COV, což se dá ukázat přímým použitím transformace na nerovnosti $x(S) \geq v(S)$ z definice jádra. To potom ve výsledku dá lineární transformaci původního jádra díky podmínce $\alpha > 0$.

Nechť (N, v) je hra a nechť $\pi : N \to U$ je injekce, kde U je univerzum hráčů. Hra $(\pi(N), \pi v)$ je definována jako $\pi v(\pi(S)) = v(S),\ \forall S \subseteq N$. Také jestliže $x \in \mathbb{R}^N$ pak $y = \pi(x) \in \mathbb{R}^{\pi(N)}$ je definované jako $y_{\pi(i)} = x_i,\ \forall i \in N$. Hra (N', w) je ekvivalentní nebo izomorfní s hrou (N, v), jestliže existuje injekce $\pi : N \to U$ taková, že $\pi(N) = N'$ a $\pi v = w$.

Definice 1.2.16. Nechť σ je řešení na množině Γ_U. Řekneme, že σ je anonymní (AN), pokud splňuje následující podmínku: jestliže $(N, v) \in \Gamma_U, \pi : N \to U$ je injekce a $(\pi(N), \pi v) \in \Gamma_U$, pak $\sigma(\pi(N), \pi v) = \pi(\sigma(N, v))$.

AN říká, že σ je nezávislá na jménech hráčů. Poznamenejme, že jádro splňuje AN, protože se změní jen „názvy“ koalic S v nerovnostech z definice jádra.

Dále budeme potřebovat následující notaci. Nechť (N, v) je hra, pak množinu

$$X(N,v) = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N)\right\} \tag{1.2.13}$$

nazýváme množinou Paretovsky optimálních výplatních vektorů nebo tzv. předimputací.

Definice 1.2.17. Řešení σ na množině Γ_U je Paretovsky optimální (PO), jestliže $\sigma(N,v) \subseteq X(N,v)$ pro každou hru $(N,v) \in \Gamma_U$.

PO je ekvivalentní s následující podmínkou: jestliže $x, y \in X^*(N,v)$ a $x_i > y_i$ pro všechna $i \in N$, pak $y \notin \sigma(N,v)$. PO je silná podmínka, ale stejně se hráči mohou nedomluvit na konkrétním rozdělení, vzhledem k různým preferencím na množině Paretovsky optimálních výplat. Poznamenejme, že jádro splňuje PO, protože $x(N) \geq v(N)$ je jednou z nerovností, které jádro musí splňovat.

Definice 1.2.18. Řešení σ na množině Γ_U je individuálně racionální (IR), pokud splňuje následující podmínku: jestliže $(N,v) \in \Gamma_U$ a $x \in \sigma(N,v)$, pak

$$x_i \geq v(\{i\}),\ \forall i \in N. \tag{1.2.14}$$

IR říká, že každý hráč i v libovolném bodě řešení obdrží minimálně hodnotu $v(\{i\})$. Poznamenejme, že jádro splňuje IR.

Množině řešení splňující PO a zároveň IR se říká množina imputací hry (N,v) a je definována následovně:

$$I(N,v) = \{x \in X(N,v) \mid x_i \geq v(\{i\}),\ \forall i \in N\}. \tag{1.2.15}$$

Poznámka. Vždy platí $C(N,v) \subseteq I(N,v)$.

Existuje také alternativní přístup k definici jádra, který je založen na dominanci jedné imputace jinou imputací.

Definice 1.2.19. Výplatní vektor x dominuje výplatnímu vektoru y, $x \neq y$ podle koalice S, $S \neq \emptyset$, pokud jsou splněny dvě následující podmínky:

1. $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$;
2. $x_i > y_i,\ \forall i \in S$.

Výplatní vektor x je nedominovaný, jestliže neexistuje výplatní vektor y takový, že y dominuje x podle nějaké koalice S.

Nyní můžeme definovat jádro $C(N,v)$ jako množinu nedominovaných imputací [1].

Notace 1.2.20. Nechť N je množina hráčů a $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$, pak

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}. \tag{1.2.16}$$

Definice 1.2.21. Řešení σ na Γ_U je superaditivni (SUPA) právě tehdy, když pro $(N,v_1), (N,v_2), (N, v_1 + v_2) \in \Gamma_U$ platí

$$\sigma(N,v_1) + \sigma(N,v_2) \subseteq \sigma(N, v_1 + v_2). \tag{1.2.17}$$

Poznamenejme, že jádro splňuje SUPA: zřejmě pokud bod patří do sumy jader potom, patří do jádra sumy her. Opačný závěr vzhledem k chování nerovnosti nemusí být obecně splněn.

Notace 1.2.22. Nechť (N, v) je hra a $i \in N$, pak

$$b^i_{\max}(N, v) = \max_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right), \tag{1.2.18}$$

$$b^i_{\min}(N, v) = \min_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right). \tag{1.2.19}$$

Definice 1.2.23. Řešení σ na množině Γ_U je

(1) rozumné shora (REAB) právě tehdy, když

$$((N, v) \in \Gamma_U \text{ a } x \in \sigma(N, v)) \implies x_i \leq b^i_{\max}(N, v), \ \forall i \in N; \tag{1.2.20}$$

(2) rozumné zdola (REBE) právě tehdy, když

$$((N, v) \in \Gamma_U \text{ a } x \in \sigma(N, v)) \implies x_i \geq b^i_{\min}(N, v), \ \forall i \in N; \tag{1.2.21}$$

(3) rozumné (RE) právě tehdy, když je REAB a REBE současně.

Důvod k zavedení REAB a REBE je jednoduchý. Pro koalici je nevýhodné, aby hráč dostal víc, než je jeho maximální možný přínos libovolné koalici. Na druhou stranu, když mu nějaká koalice nabídne méně, než je jeho minimální možný přínos libovolné koalici, tak nemá žádný důvod se této koalice zúčastnit. Navíc, hráč i může požadovat $b^i_{\min}(N, v)$ a připojit se k libovolné koalici, přičemž tento požadavek nebude mít žádný negativní dopad na výplaty ostatních členů koalice. Nakonec poznamenejme, že IR implikuje REBE [6].

Lemma 1.2.24. Jádro splňuje RE.

Definice 1.2.25. Nechť (N, v) je hra, $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, a nechť $x \in X^*(N, v)$. Redukovaná hra vzhledem k S a x je hra $(S, v_{S,x})$ definovaná jako

$$v_{S,x}(T) = \begin{cases} 0, \ T = \emptyset \\ v(N) - x(N \setminus S), \ T = S \\ \max_{Q \subseteq N \setminus S} \left(v(T \cup Q) - x(Q)\right), \text{ jinak,} \end{cases} \tag{1.2.22}$$

kde $T \subseteq S$.

Notace 1.2.26. Nechť M je množina hráčů a nechť $x \in \mathbb{R}^M$. Pak pro $T \subseteq M$, označíme x^T jako restrikci x na T.

Poznámka. Redukovaná hra $(S, v_{S,x})$ popisuje situaci, kdy část hráčů $N \setminus S$ akceptuje pevně zvolenou výplatu $x^{N \setminus S}$. Hodnota koalice $v_{S,x}(T)$, $T \subseteq S$, se tedy musí odvíjet od zbývajícího koaličního potenciálu vzhledem k $N \setminus S$.

Definice 1.2.27. Řešení σ na množině Γ_U má vlastnost redukované hry (RGP), pokud splňuje následující podmínku: jestliže $(N, v) \in \Gamma_U, S \subseteq N, S \neq \emptyset$ a $x \in \sigma(N, v)$, pak $(S, v_{S,x}) \in \Gamma_U$ a $x^S \in \sigma(S, v_{S,x})$.

Notace 1.2.28. Označíme $\Gamma_U^C = \{(N, v) \in \Gamma_U \mid C(N, v) \neq \emptyset\}$.

Lemma 1.2.29. Jádro splňuje RGP na Γ_U^C.

Také je užitečná následující slabší verze RGP.

Definice 1.2.30. Řešení σ na množině Γ_U má slabou vlastnost redukované hry (WRGP), pokud splňuje následující podmínku: jestliže $(N,v) \in \Gamma_U, S \subseteq N, 1 \leq |S| \leq 2$ a $x \in \sigma(N,v)$, pak $(S, v_{S,x}) \in \Gamma_U$ a $x^S \in \sigma(S, v_{S,x})$. Zřejmě RGP implikuje WRGP. Opačné tvrzení obecně neplatí.

Definice 1.2.31. Řešení σ na množině Γ_U je neprázdné (NE) právě tehdy, když

$$\sigma(N,v) \neq \emptyset, \ \forall (N,v) \in \Gamma_U. \tag{1.2.23}$$

Jádro není obecně neprázdné.

Věta 1.2.32. *J*ádro je jediné řešení na Γ_U^C, které splňuje NE, IR, WRGP a SUPA.

Jak můžeme vidět, jádro splňuje skoro všechny výše uvedené vlastnosti. Ale RGP je splněna, pouze pokud jádro je neprázdné. Dokonce podle předchozí věty jádro je unikátním řešením splňujícím NE, IR, WRGP a SUPA, ale zase pouze v případě neprázdnosti. Přirozeně vzniká otázka, kdy je jádro neprázdné. Na ni pomůže odpovědět věta Bondareve-Shapley.

1.2.3. Bondareva-Shapley

Před uvedením dvou verzí věty Bondareve-Shapley, která dává nutnou a postačující podmínku neprázdnosti jádra, potřebujeme zavést některá další označení a definice. Důkazy uvedených lemmat a vět lze nalézt v [1] nebo [5].

Notace 1.2.33. Nechť $S \subseteq N$. Charakteristický vektor χ_S je prvek $\mathbb{R}^N$, který je definován následovně

$$\chi_{S,i} = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \in N \setminus S. \end{cases} \tag{1.2.24}$$

Definice 1.2.34. Množinu $\mathcal{B} \subseteq 2^N, \emptyset \notin \mathcal{B}$, nazveme balancovanou kolekcí (nad N) pokud existují kladná čísla $\delta_S, S \in \mathcal{B}$, taková, že

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S \chi_S = \chi_N. \tag{1.2.25}$$

Množinu $(\delta_S)_{S \in \mathcal{B}}$ pak nazveme systémem balančních vah.

Poznámka. Každý rozklad N je balancovanou kolekcí. V podstatě můžeme chápat balancovanou kolekci jako zobecnění rozkladu množiny. Pro balancovanou kolekci $\mathcal{B}$ platí

$$\sum_{S \in \mathcal{B}: i \in S} \delta_S = 1, \ \forall i \in N. \tag{1.2.26}$$

Lemma 1.2.35. *S*jednocení balancovaných kolekcí je balancovanou kolekcí.

Věta 1.2.36. *Bondareva-Shapley, slabá forma.* Nutnou a postačující podmínkou neprázdnosti jádra hry (N,v) je, aby pro každou balancovanou kolekci $\mathcal{B}$ a každý jí odpovídající systém balančních vah $(\delta_S)_{S \in \mathcal{B}}$ platilo

$$v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S v(S). \tag{1.2.27}$$

Pro tzv. silnou formu věty Bondareve-Shapley potřebujeme ještě jeden další pojem.

Definice 1.2.37. Balancovaná kolekce je minimální balancovaná právě tehdy, když neobsahuje žádnou vlastní balancovanou podkolekci.

Lemma 1.2.38. *B*alancovaná kolekce je minimální balancovaná právě tehdy, když má unikátní systém balančních vah.

Lemma 1.2.39. *L*ibovolná balancovaná kolekce je sjednocením minimálních balancovaných kolekcí.

Věta 1.2.40. *Věta Bondareve-Shapley, silná forma.* Nutnou a postačující podmínkou neprázdnosti jádra hry (N, v) je, aby pro každou minimální balancovanou kolekci $\mathcal{B}$ platilo

$$v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S v(S), \tag{1.2.28}$$

kde $(\delta_S)_{S \in \mathcal{B}}$ je systém balančních vah pro $\mathcal{B}$. Žádná z předchozích nerovnosti není redundantní, kromě podmínky pro kolekci $\{N\}$, protože $v(N) \geq v(N)$ je vždy automaticky splněno.

Lemma 1.2.41. *M*inimální balancovaná kolekce na množině hráčů N může obsahovat maximálně $|N|$ koalic.

Důsledek 1.2.42. *P*ro koaliční hru (N, v), kde $N = \{1, 2, 3\}$, existuje jediná minimální balancovaná kolekce, která není rozkladem N. Tato kolekce je

$$\mathcal{K} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

a odpovídající systém balančních vah je $\delta_S = \frac{1}{2}$, $\forall S \in \mathcal{K}$.
Pro případ 3 hráčů můžeme přeformulovat větu Bondareve-Shapley následujícím způsobem:

Věta 1.2.43. *N*echť (N, v) je koaliční hra, kde $N = \{1, 2, 3\}$. Dále nechť R značí množinu všech rozkladů na N a $\mathcal{K} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ s odpovídajícím systémem balančních vah $\delta_S = \frac{1}{2}$, $\forall S \in \mathcal{K}$. Pak $C(N, v) \neq \emptyset$ pravě tehdy, když platí

$$v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{B}} v(S), \ \forall \mathcal{B} \in R,$$

a

$$2v(N) \geq v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\}) + v(\{2, 3\}).$$

Důkaz. Stačí aplikovat silnou formu věty Bondareve-Shapley a dostaneme uvedené nerovnosti. Jak už bylo zmíněno, rozklad je speciálním případem balancované kolekce (zřejmě vždy minimální), která, vzhledem k disjunktnosti koalic v kolekci, má všechny váhy rovné 1 a to nám dává první podmínku. Druhou podmínku dostaneme přímo z důsledku 1.2.42 (navíc vynásobíme obě strany 2). □

1.2.4. Vztahy mezi konvexností a existencí a tvarem jádra

Tato podkapitola je věnována popisu vlastností jádra konvexní hry. Důkazy všech uvedených vět lze nalézt v původním článku Lloyda Shapleyho [7]. Na úvod budeme potřebovat nadefinovat vlastnosti jádra a popsat jejich geometrické důsledky.

Definice 1.2.44. Pro koaliční hru (N, v) definujeme nadroviny H_S, $\forall S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, v R^N jako množinu všech $x \in R^N$, takových, že $x(S) = v(S)$.

Jádro je podmnožinou nadroviny H_N, jejíž normálový vektor je vždy vektorem jedniček a vzhledem k platnosti nerovnosti $x_i \geq v(\{i\}),\ \forall x \in C(N,v)$ je jádro ohraničené. Z toho plyne, že jádro obecně je kompaktní konvexní mnohostěn, případně prázdný, dimenze menší nebo rovné $|N|-1$. Stěna jádra se definuje jako $C_S = C(N,v) \cap H_S$. Zřejmě platí $C_N = C(N,v)$. Navíc se definuje $C_\emptyset = C(N,v)$. Množinu stěn jádra $\{C_S\}_{S\subseteq N}$ nazveme konfigurací jádra.

Definice 1.2.45. Řekneme že konfigurace $\{C_S\}_{S\subseteq N}$ je *úplná*, jestliže $C_S \neq \emptyset,\ \forall S \subseteq N$.

Definice 1.2.46. Konfiguraci $\{C_S\}_{S\subseteq N}$ nazveme *striktně úplnou*, jestliže každé C_S má největší možnou dimenzi.

Poznámka. V případě striktní úplnosti je jádro plně dimenzionální (má dimenzi $|N|-1$) a má $2^{|N|}-2$ polyhedrických stěn dimenze $|N|-2$.

Úplnost implikuje „velké“ jádro, neboli takové, které se dotýká všech $|N|-2$ dimenzionálních stěn simplexu A, který je definován prostřednictvím nadrovin H_S, kde $|S|=1$.

Ačkoli nadroviny H_S mají vždy stejné sklony pro každou hru (N,v), jejich pozice v $\mathbb{R}^N$ není předem určena, dokonce v případě striktně úplného jádra pro $|N|>3$ existuje spousta způsobů, jak hrany C_S mohou do sebe zapadnout.

Vyznačuje se jedné možné uspořádání, které spočívá v tom, že všechny stěny $C_S,\ S \notin \{\emptyset, N\}$, jsou stejně vzdálené od společného centra, neboli že každá stěna je tečnou k vepsané $(|N|-2)$-sféře. Dá se ukázat, že pro takové uspořádaní platí, že dvě stěny se dotýkají právě tehdy, když koalice, kterým odpovídají, jsou srovnatelné, tj.

$$C_S \cap C_T \neq \emptyset \text{ právě tehdy, když } S \subseteq T \text{ nebo } T \subseteq S.$$

Předcházející vlastnost nazveme *striktní regularitou.* Striktní regularita implikuje úplnost: stačí uvažovat případ $S = T$.

Avšak pro další potřeby stačí uvažovat slabší formu předcházející vlastnosti.

Definice 1.2.47. Konfiguraci jádra $\{C_S\}$ nazveme *regulární*, jestliže $C_N \neq \emptyset$ a

$$C_S \cap C_T \subseteq C_{S\cup T} \cap C_{S\cap T},\ \forall S,T \subseteq N.$$

Teď zmíníme některé geometrické důsledky regularity.

Věta 1.2.48. *Pro regulární konfiguraci jádra $\{C_S\}$ platí*

$$C_{S_1} \cap C_{S_2} \cap ... \cap C_{S_m} \neq \emptyset$$

pro libovolnou rostoucí posloupnost $S_1 \subset S_2 \subset ... \subset S_m$. Případ $m=1$ ukazuje na to, že regulární konfigurace jádra je úplná.

Nechť ω je jedná z $|N|!$ permutací, která zobrazuje N na N. Definujeme

$$S_{\omega,k} = \{i \in N : \omega(i) \leq k\},\ k = 0,1,...,|N|.$$

Zřejmě $S_{\omega,0} = \emptyset,\ S_{\omega,|N|} = N$. Dále budeme uvažovat systém rovnic $x(S_{\omega,k}) = v(S_{\omega,k}),\ k = 1,2,...,|N|$. Řešení předcházejícího systému pak dává souřadnice průniků nadrovin $H_{S_{\omega,k}}$

$$x_i^\omega = v(S_{\omega,\omega(i)}) - v(S_{\omega,\omega(i)-1}),\ \forall i \in N.$$

Každá permutace ω pak určuje výplatní vektor x^ω. Samozřejmě není zaručené, že všechny body x^ω budou navzájem různé.

Věta 1.2.49. *Vrcholy jádra, které má regulární konfiguraci, jsou body $x^\omega,\ \omega \in \Omega$, kde Ω představuje množinu všech permutaci N.*

Poznámka. Jádro, jehož konfigurace je regulární, ale není striktně regulární, vždy má méně než $|N|!$ vrcholů, ačkoli konfigurace může být striktně úplnou.

Teď můžeme rozlišit několik tříd her, podle druhu jejich jádra:

neprázdné jádro	plně dimenzionální jádro
úplné jádro	striktně úplné jádro
regulární jádro	striktně regulární jádro

Tabulka 1.1: Druhy jader

Každá třída v tabulce obsahuje třídy, které jsou pod ní a vpravo od ní.

Na závěr uvedeme věty o vlastnostech jádra konvexní hry.

Věta 1.2.50. *Jádro konvexní hry je neprázdné.*

Věta 1.2.51. *Hra je konvexní právě tehdy, když konfigurace jejího jádra je regulární.*

Věta 1.2.52. *Shapleyho hodnota, která je definována jako*

$$\phi_i = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}(v(S) - v(S \setminus \{i\}), \ \forall i \in N,$$

vždy patří do jádra konvexní hry.

Poznámka. $\phi = \frac{1}{|N|!} \sum_{\omega \in \Omega} x^\omega$ a platí, že Shapleyho hodnota je těžištěm vrcholů.

Pro uvedení poslední věty budeme potřebovat definici stabilní množiny výplatních vektorů.

Definice 1.2.53. Řekneme, že množina přípustných výplatních vektorů V je stabilní, pokud každý přípustný výplatní vektor patří do V nebo je dominován nějakým vektorem z V, ale ne současně.

Poznámka. Každá stabilní množina obsahuje jádro. Jestliže jádro je stabilní, pak žádná další stabilní množina neexistuje.

Věta 1.2.54. *Jádro konvexní hry je stabilní.*

V další kapitole přistoupíme ke konstruování modelu pro Cournotův oligopol a k definování koaliční hry, s níž budeme dále pracovat.

2. Model a jeho vlastnosti

2.1. Motivace

Jak už bylo zmíněno, jedna z hlavních otázek oligopolní teorie se týká problému existence kartelových dohod. Firmy mají motivaci k dosažení dohody, kdykoli kartelová dohoda dokáže přinést členským firmám alespoň tolik, kolik každá firma může získat nezávisle. Klasický Cournotův oligopol je právě takovou situací, při které si firmy dokážou polepšit prostřednictvím spolupráce.

Když se podniky dohodnou na dodržování určitého výstupu, hlavním problémem, jemuž čelí členové kartelové dohody, je stabilita kartelové dohody. Podle předpokladu individuální racionality schéma nekooperativní hry obecně předpovídá, že firmy mají podnět k podvádění a odchylení od dohodnuté úrovně výstupu. V tomto případě jednotlivé firmy sledují strategie optimální ve smyslu Nashovy rovnováhy a konečný výsledek není Paretovsky optimální. Navzdory těmto obtížím se stabilizací kartelu pozorujeme již zmíněné úspěšně fungující kartely. To znamená, že firmy jsou schopny koordinovat a stabilizovat své strategie za účelem zvětšení svých zisků [8].

Vzniká otázka, jaké jsou podmínky, za kterých stabilní kartelové dohody existují? K odpovědi na tuto otázku a analýze motivaci k vytvoření stabilních kartelů použijeme kooperativní teorii her. Na rozdíl od nekooperativní teorie her ta dovoluje vzájemnou komunikaci mezi firmami, ze které pak vyplývá uzavření závazných i nezávazných dohod o koordinaci strategií s cílem zvýšit zisky.

Za účelem zkoumání kooperativních oligopolních her potřebujeme převést oligopolní hru v normálním tvaru na hru ve tvaru charakteristické funkce, k čemuž použijeme koncept γ-charakteristické funkce nejvíce odpovídající chovaní firem na trhu [9]. K získání odpovědi ohledně stability kartelů a motivace firem ke spolupráci, budeme zkoumat konvexnost her.

Stanovení konvexnosti hry je zajímavé díky tomu, že v konvexní oligopolní hře firmy můžou získat nadměrné přebytky v důsledku rozšíření koalice. To znamená existenci velké motivace k vzájemné spolupráci, zejména se da očekávat, že firmy budou chtít vytvořit monopol.

Kromě toho za předpokladu konvexnosti jádro je neprázdné a je obecně velmi velké. Vzhledem k rozlehlosti jádra se dají získat informace o stabilitě kartelových dohod: vzhledem k malým odchylkám v tržní struktuře jádro zůstává neprázdné a motivace ke spolupráci pořad existuje. Navíc, dosažení dohody o rozdělení výsledku vzájemné spolupráce, v případě heterogenních výrobních podmínek lze vyřešit použitím hodnoty Shapleyho nebo kernelu.

To znamená, že rozdělení hodnoty velké koalice v souladu s těmito řešeními by mohlo podpořit vznik kartelu místo zabránění koluzivního chování v případech asymetrických nákladových funkcí a kapacitních omezení, protože oba koncepty řešení patří do jádra a žádná koalice nemůže zablokovat dohody distribuující zisky kartelu podle těchto pravidel.

Navíc zisky nejúčinnější firmy podle těchto pravidel rozdělení můžou být nadprůměrně velké a její podnět k uzavření dohody a vytvoření kartelu společně s jejími konkurenty může být obrovský.

Hlavním rozdílem přístupu uvedeného v této práci od článků zabývajících se stejnou problematikou je právě použití γ-charakteristické funkce, avšak výsledky prací řešících analogický problém pomocí jiných druhů funkcí převádějících hru v normálním tvaru na hru v kooperativním tvaru budou taky použité.

2.2. Model

Model a předpoklady jsou založené na článku Lardona o γ-charakteristické funkci [10].

Oligopolní situaci budeme značit jako $(N, (\omega_i)_{i\in N}, (C_i)_{i\in N}, p)$, kde $N = \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$, je množina firem a $\omega_i \in \mathbb{R}_0^+$ označuje výrobní kapacitu firmy i. $C_i : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ je nákladová funkce firmy i a $p : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ je inverzní funkce poptávky.

Navíc nadále budeme předpokládat že:

a) inverzní funkce poptávky p je diferencovatelná, ryze klesající a konkávní;

b) každá nákladová funkce C_i je spojitá, ryze rostoucí a konvexní.

Oligopolní hra v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ odpovídající oligopolní situaci $(N, (\omega_i)_{i\in N}, (C_i)_{i\in N}, p)$ je definovaná následovně

1. $N = \{1, 2, ..., n\}$ je množina hráčů (firem);
2. Pro každé $i \in N$, $X_i = [0, \omega_i] \subset \mathbb{R}_0^+$ je množina strategií firmy i, kde $x_i \in X_i$ je strategie firmy i, která reprezentuje množství produkce vyrobené firmou i;
3. $X_N = \Pi_{i\in N} X_i$ je sdružená množina strategií, $x = (x_i)_{i\in N}$ je prvkem X_N;
4. Pro každé $i \in N$ individuální výplatní funkce $\pi_i : X_N \to \mathbb{R}$ je definovaná jako

$$\pi_i(x) = p(X)x_i - C_i(x_i), \tag{2.2.1}$$

   kde $X = \sum_{i\in N} x_i$ je agregovaný výstup firem.

Poznámka. Ačkoli předpokládáme, že zisková funkce může nabývat záporné hodnoty, vzhledem k maximalizačnímu charakteru dále uvažované úlohy takový případ nenastane. Analogicky u inverzní funkce poptávky, neboli ceny předpokládáme možnou zápornost, ačkoli teoreticky může nabýt záporné hodnoty, pouze pokud budeme uvažovat případ koaliční hry ve tvaru α- nebo β-charakteristické funkce, který bude zmíněn na konci této kapitoly.

Teď přistoupíme k definovaní γ-charakteristické funkce. Množina strategií koalice bude definována jako $X_S = \Pi_{i\in S} X_i$ s prvky $x_S = (x_i)_{i\in S}$. Pro $\forall S \in 2^N$ definujeme ziskovou funkci koalice S, kterou označíme jako π_S, a nadefinujeme ji jako

$$\pi_S(x) = \sum_{i\in S} \pi_i(x). \tag{2.2.2}$$

Definice 2.2.55. Strategii (x_S^*, x_{-S}^*) nazveme ***rovnováhou částečné dohody pod S***, pokud současně splňuje následující nerovnosti

$$\pi_S(x_S^*, x_{-S}^*) \geq \pi_S(x_S, x_{-S}^*),\ \forall x_S \in X_S, \tag{2.2.3}$$

a

$$\forall i \notin S,\ \pi_i(x_S^*, x_{-S,i}^*, (x_{-S,j}^*)_{j\notin S\cup\{i\}}) \geq \pi_i(x_S^*, x_i, (x_{-S,j}^*)_{j\notin S\cup\{i\}}),\ \forall x_i \in X_i, \tag{2.2.4}$$

kde $x^*_S = (x^*_{S,i})_{i\in S}$ a $x^*_{-S} = (x^*_{-S,i})_{i\notin S}$.

Poznámka. Rovnováha částečné dohody pod S je určitým zobecněním Nashovy rovnováhy $(x^*_i)_{i\in N}$, tj. rovnováhy splňující $\forall i \in N,\ \pi_i(x^*_i, (x^*_j)_{j\neq i}) \geq \pi_i(x_i, (x^*_j)_{j\neq i}),\ \forall x_i \in X_i$. Při rovnováze částečné dohody se na koalici pohlíží v podstatě jako na jednoho hráče.

Definice 2.2.56. Pro oligopolní hru v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ je γ--charakteristická funkce definována jako

$$v_\gamma(S) = \pi_S(x^*_S, x^*_{-S}),\ \forall S \in 2^N. \tag{2.2.5}$$

Poznámka. Dodržujeme konvenci, podle které je suma přes prázdnou množinu nulová, takže $v_\gamma(\emptyset) = 0$.

Tvrzení 2.2.57. *Nechť* $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ je oligopolní hra v normálním tvaru. Pak pro všechny $S \in 2^N$

- existuje rovnováha částečné dohody pod S;
- pro libovolné dvě rovnováhy částečné dohody pod S $(x^*_S, x^*_{-S}) \in X_N$ a $(y^*_S, y^*_{-S}) \in X_N$ platí
$$\sum_{i\in S} x^*_{S,i} = \sum_{i\in S} y^*_{S,i},$$
$$\sum_{i\in S} C_i(x^*_{S,i}) = \sum_{i\in S} C_i(y^*_{S,i}).$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [10]. □

Z platnosti předchozího tvrzení můžeme udělat závěr, že v_γ je dobře definovaná pro každou kooperativní hru (N, v_γ) asociovanou s oligopolní hrou v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$. To znamená, že nezávisle na oligopolní situaci pro každou koalici S dokážeme spočítat $v(S)$ a navíc tato hodnota bude jednoznačná. Důležité je upozornit na to, že tvrzení platí za splnění předchozích předpokladů a) a b) uvedených na začátku této podkapitoly.

Poznámka. Bez újmy na obecnosti, můžeme předpokládat, že $C_i(0) = 0$. Pokud budeme předpokládat $C_i(0) = F_i,\ F_i \in \mathbb{R}^+_0,\ i \in N$, kde F_i reprezentuje fixní náklady, pak $\pi_S((0)_{i\in S}, (x_i)_{i\notin S}) = -\sum_{i\in S} F_i,\ \forall S \subseteq N$. Potom, pro volbu $\alpha = 1$ a $\beta(S) = -\sum_{i\in S} F_i$, hry s $C_i(0) = 0,\ \forall i \in N$, a stejné hry s předpokladem $C_i(0) = F_i, \forall i \in N$, jsou strategicky ekvivalentní.

2.3. Monotonie

K důkazu věty o monotonii kooperativní hry (N, v_γ) asociované s $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ budeme potřebovat následující tvrzení.

Tvrzení 2.3.58. *Nechť* $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ je oligopolní hra v normálním tvaru. Pak pro každé $S, T \subseteq N$ takové, že $S \subseteq T$ platí

1. $\sum_{i\in T} x^*_{T,i} \geq \sum_{i\in S} x^*_{S,i}$;
2. $X^{P,S} \geq X^{P,T}$,

kde $X^{P,S} = \sum_{i \in S} x^*_{S,i} + \sum_{i \notin S} x^*_{-S,i}$ označuje celkový výstup odvětví při rovnováze částečné dohody pod S.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [10]. $\square$

Věta 2.3.59. *Nechť* $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ je oligopolní hra v normálním tvaru. Pak asociovaná kooperativní hra (N, v_γ) je monotónní.

Důkaz. Nechť $S \subseteq T \subseteq N$, kde T je libovolné. Můžeme zapsat hodnotu $v_\gamma(S)$ jako

$$v_\gamma(S) = \sum_{i \in S} p(X^{P,S}) x^*_{S,i} - \sum_{i \in S} C_i(x^*_{S,i}).$$

Ekvivalentně můžeme reprezentovat $v_\gamma(S)$ jako optimalizační úlohu

$$v_\gamma(S) = \max_{x_S \in X_S} \left(\sum_{i \in S} p \left(\sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \notin S} x^*_{-S,i} \right) x_i - \sum_{i \in S} C_i(x_i) \right).$$

Analogicky

$$v_\gamma(T) = \sum_{i \in T} p(X^{P,T}) x^*_{T,i} - \sum_{i \in T} C_i(x^*_{T,i}),$$

nebo

$$v_\gamma(T) = \max_{x_T \in X_T} \left(\sum_{i \in T} p \left(\sum_{i \in T} x_i + \sum_{i \notin T} x^*_{-T,i} \right) x_i - \sum_{i \in T} C_i(x_i) \right).$$

Zřejmě můžeme reprezentovat každou strategii z X_S jako strategii z X_T s nulami na pozicích, které mají indexy z množiny $T \setminus S$. V obyčejné situaci dospějeme k závěru, že maximalizace přes vetší množinu přípustných řešení dává výsledek, který je vetší nebo alespoň stejný. Ale předem nevíme, jaký dopad má změna velikosti koalice na $\sum_{i \notin T} x^*_{-T,i}$, což potenciálně může vést ke snížení $\sum_{i \in T} x^*_{T,i}$ oproti $\sum_{i \in S} x^*_{S,i}$ nebo může snížit cenu $p(X^{P,T})$ oproti $p(X^{P,S})$ natolik, že ani s větší množinou přípustných řešení nedosáhneme hodnoty $v_\gamma(S)$, avšak platí předchozí tvrzení.

Nerovnosti z předchozího tvrzení 2.3.58 spolu se skutečností, že p je ryze klesající, nám říkají, že $v_\gamma(S)$ je vždy dosažitelné pro koalici T. Takže skutečně platí nerovnost $v_\gamma(S) \leq v_\gamma(T)$, $\forall S \subseteq T \subseteq N$ a $\forall T$ vzhledem k tomu, že T je libovolné. $\square$

2.4. Neprázdnost jádra

V této podkapitole budou uvedené dvě klasické věty, které mluví o neprázdnosti jádra koaliční hry (N, v_γ) asociované s oligopolní hrou v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$.

Věta 2.4.60. *Nechť* $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ je oligopolní hra v normálním tvaru a $\forall i \in N$, π_i je konkavní na X_N. Pak asociovaná kooperativní hra (N, v_γ) ma neprázdné jádro.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [10]. $\square$

Věta 2.4.61. *Jestliže oligopolní situace* $(N, (\omega_i)_{i \in N}, (C_i)_{i \in N}, p)$ splňuje

$$C_i(x_i) = c x_i, \ c \in \mathbb{R}_+, \ \forall i \in N,$$

pak kooperativní hra (N, v_γ) asociovaná s oligopolní hrou v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ má neprázdné jádro.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [10]. $\square$

2.5. Konvexnost

Hlavním výsledkem této podkapitoly jsou věty 2.5.71 a 2.5.81. Během důkazů dále uvedených vět budeme potřebovat ještě jednu definici konvexnosti.

Definice 2.5.62. Koaliční hra (N, v) je konvexní právě tehdy, když je splněna následující podmínka:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(S \cup \{i, j\}) - v(S \cup \{j\}), \; \forall i, j \in N, \forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}. \tag{2.5.6}$$

Takovou definici konvexnosti lze nalézt v [8].

Případ $|N| = 2$ je speciální, proto ho vyřešíme samostatně.

Věta 2.5.63. *Kooperativní hra (N, v_γ) asociovaná s oligopolní hrou v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$, kde $|N| = 2$, je vždy konvexní.*

Důkaz. Pro případ $|N| = 2$ podmínka (2.5.6) zdegeneruje na pouze jednu nerovnost $v(\{1\}) - v(\emptyset) \leq v(N) - v(\{2\})$, tj. stačí dokázat $v(\{1\}) + v(\{2\}) \leq v(N)$. Předchozí nerovnost můžeme rozepsat následujícím způsobem

$$p(X^{P,\{1\}})x^*_{\{1\}} - C_1(x^*_{\{1\}}) + p(X^{P,\{2\}})x^*_{\{2\}} - C_2(x^*_{\{2\}})$$

$$\leq \max_{x_N \in X_N} \sum_{i \in N} p\left(\sum_{i \in N} x_i\right) x_i - \sum_{i \in N} C_i(x_i).$$

Z definice rovnováhy částečné dohody pod S plyne, že $p(X^{P,\{i\}}) = p(X^{P,\{j\}})$, $\forall i, j \in N$ a $x^*_{\{i\}} = x^*_{-\{j\},i}$, $\forall i, j \in N$, proto pro $|N| = 2$ platí $p(X^{P,\{1\}}) = p(X^{P,\{2\}}) = p(x^*_{\{1\}} + x^*_{\{2\}})$.

Po tom, co přepíšeme nerovnost následujícím způsobem

$$p\left(x^*_{\{1\}} + x^*_{\{2\}}\right)\left(x^*_{\{1\}} + x^*_{\{2\}}\right) - C_1\left(x^*_{\{1\}}\right) - C_2\left(x^*_{\{2\}}\right)$$

$$\leq \max_{x_N \in X_N} \sum_{i \in N} p\left(\sum_{i \in N} x_i\right) x_i - \sum_{i \in N} C_i(x_i),$$

není těžké si všimnout, že levá strana nerovnosti je pouze speciálním případem výrazu na pravé straně, který nabývá své maximální hodnoty. Díky tomu můžeme udělat závěr, že nerovnost skutečně platí. □

Nadále se budeme zabývat pouze případy, ve kterých $|N| \geq 3$.

2.5.1. Lineární oligopolní situace

V teto části práce bude pozornost věnována nutné a postačující podmínce konvexnosti pro lineární případ se stejnými mezními náklady, kde úroveň výstupu odpovídající Cournotově rovnováze je dosažitelná pro každou firmu.

Nejdříve dokážeme následující lemma:

Lemma 2.5.64. *Jestliže oligopolní situace $(N, (\omega_i)_{i \in N}, (C_i)_{i \in N}, p)$ splňuje následující předpoklady*

$$p(X) = A - bX,$$

$$C_i(x_i) = cx_i, \forall i \in N,$$

$$A > c,$$
$$A, b, c \in \mathbb{R}_+,$$
$$\sum_{i\in S} x^*_{S,i} \neq \sum_{i\in S} \omega_i, \; \forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\},$$
$$x^*_{-S,i} \neq \omega_i, \; \forall S \in 2^N \setminus \{N\}, \; \forall i \notin S,$$

pak platí následující rovnosti

$$\sum_{i\in S} x^*_{S,j} = \frac{A-c}{b(|N \setminus S| + 2)}, \; \forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\},$$

$$x^*_{-S,i} = \frac{A-c}{b(|N \setminus S| + 2)}, \; \forall S \in 2^N \setminus \{N\}, \; \forall i \notin S.$$

Důkaz. Pro jednoduchost označíme $|S| = s$ a $|N| = n$. Podle předpokladu Cournotova modelu k nalezení optimálních výstupů hráčů je třeba vyřešit systém lineárních rovnic, který vyplývá z problému hledání maxima za použití prvních derivaci výplatních funkcí outsiderů a koalice vzhledem pouze k jejich vlastním výstupům. Takže budou pouze dva typy rovnic v systému: první reprezentující optimální výstup koalice a druhý reprezentující optimální výstup každého outsidera.

K sestavení systému rovnic použijeme ziskovou funkci koalice S $\pi_S(x) = (A - bX)x^S - cx^S$, kde $x^S = \sum_{i\in S} x_i$

Poznámka. Pohlížet na ziskovou funkci koalice takovým způsobem můžeme pouze za předpokladu rovnosti mezních nákladů.

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_S}{\partial x^S} = 0, \\ \frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = 0, \; i \notin S. \end{cases}$$

Takže máme

$$\begin{cases} A - b(2x^S + \sum_{i\notin S} x_i) - c = 0, \\ A - b(2x_i + \sum_{j\neq i} x_j) - c = 0, \; i \notin S, \end{cases}$$

nebo ekvivalentně

$$\begin{cases} \frac{A-c}{b} = x^S + \sum_{j\in N} x_j, \\ \frac{A-c}{b} = x_i + \sum_{j\in N} x_j, \; i \notin S. \end{cases}$$

Teď přidáme sumu všech rovnic do systému

$$\begin{cases} \frac{A-c}{b}\frac{n-s+1}{n-s+2} = \sum_{j\in N} x_j, \\ \frac{A-c}{b} = x^S + \sum_{j\in N} x_j, \\ \frac{A-c}{b} = x_i + \sum_{j\in N} x_j, \; i \notin S, \end{cases}$$

a tak dostaneme

$$\begin{cases} \frac{A-c}{b}\frac{n-s+1}{n-s+2} = \sum_{j\in N} x_j, \\ x_S = \frac{A-c}{b(n-s+2)}, \\ x_j = \frac{A-c}{b(n-s+2)}, \; j \notin S. \end{cases}$$

Poznámka. Není potřeba provádět žádné další zkoumaní. Předpoklady o vlastnostech a tvarech inverzní poptávkové funkce a nákladových funkcí spolu se skutečností, že množina strategií každé koalice je kompaktní a konvexní, zaručí, že nalezené řešení je skutečně unikátní a optimální [11]. Předpoklady $\sum_{i\in S} x^*_{S,i} \neq \sum_{i\in S}\omega_i$, $\forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$, a $x^*_{-S,i} \neq \omega_i$, $\forall S \in 2^N \setminus \{N\}$, $\forall i \notin S$, zaručí dosažitelnost optimálních hodnot výstupů jak pro koalici, tak i pro outsidery.

Jak můžeme vidět v tomto konkrétním případě, výstup každé firmy při rovnováze částečné dohody pod S závisí pouze na velikosti koalice S a může být popsán za použití jedné ze dvou rovností ze znění lemmatu. □

Důsledek 2.5.65. *Vzhledem k tomu, že výstup firmy je funkcí velikosti koalice, stejný závěr můžeme udělat pro charakteristickou funkci a můžeme popsat $v_\gamma(S)$, $\forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$, pomocí funkce $f_\gamma(s)$ takové, že*

$$v_\gamma(S) = f_\gamma(s) = \sum_{j\in S} x^*_{S,j}(A - b(\sum_{j\in S} x^*_{S,j} + (n-s)x^*_{-S,i}) - c) = \frac{(A-c)^2}{b(n-s+2)^2},$$

kde $s = |S|$, $n = |N|$ a

$$v_\gamma(\emptyset) = f_\gamma(0) = 0.$$

Teď se pokusíme zjednodušit předpoklady předchozího lemmatu. Ke zjednodušeni budeme potřebovat následující tvrzení:

Tvrzení 2.5.66. *Nechť $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ je oligopolní hra v normálním tvaru. Pak pro každé $S, T \subseteq N$ takové, že $S \subseteq T$ platí*

$$\forall i \in T,\ x^*_{-S,i} \leq x^*_{-T,i}.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [10]. □

Teď můžeme přistoupit k tvrzení, které zjednoduší požadavky na výstupy koalic:

Tvrzení 2.5.67. *Jestliže oligopolní situace $(N, (\omega_i)_{i\in N}, (C_i)_{i\in N}, p)$ splňuje následující předpoklady*

$$p(X) = A - bX,$$

$$C_i(x_i) = cx_i, \forall i \in N,$$

$$A > c,$$

$$A, b, c \in \mathbb{R}_+,$$

$$\omega_i \geq \frac{A-c}{b(n+1)},\ \forall i \in N,$$

pak platí

$$\sum_{i\in S} x^*_{S,i} \leq \sum_{i\in S} \omega_i\ \forall S \subseteq N.$$

Důkaz. Pro optimální výstup koalice musí platit

$$A - b(2\sum_{i\in S} x^*_i + \sum_{i\notin S} x^*_{-S,i}) - c = 0,$$

neboli

$$\sum_{i\in S} x^*_{S,i} = \frac{A-c-b\sum_{i\notin S} x^*_{-S,i}}{2b},\ \forall S \subseteq N.$$

Z tvrzení 2.5.66 a lemmatu 2.5.64 pak plyne

$$\sum_{i\in S} x^*_{S,i} \leq \frac{A-c-b(n-s)\frac{A-c}{b(n+1)}}{2b},\ \forall S \subseteq N. \tag{2.5.7}$$

Podle předpokladů dokazovaného tvrzení

$$\omega_i \geq \frac{A-c}{b(n+1)},\ \forall i \in N,$$

platí

$$\sum_{i\in S} \omega_i \geq s\frac{A-c}{b(n+1)},\ \forall S \subseteq N. \tag{2.5.8}$$

Podle vztahů (2.5.7) a (2.5.8) stačí dokázat

$$s\frac{A-c}{b(n+1)} \geq \frac{A-c-b(n-s)\frac{A-c}{b(n+1)}}{2b}. \tag{2.5.9}$$

Po vyřešení nerovnice vzhledem k s obdržíme

$$s \geq 1.$$

Z předchozího vztahu můžeme udělat závěr, že (2.5.9) platí pro libovolnou neprázdnou koalici S. □

Poznámka. Rovnost $\sum_{i\in S} x^*_{S,i} = \sum_{i\in S} \omega_i$ může nastat pouze v případě $|S| = 1$.

Pro naše potřeby lemma můžeme interpretovat následujícím způsobem: pokud všichni hráči jsou schopní vyrobit množství produkcí odpovídající Cournotově rovnováze, pak výstupy žádné koalice nebudou ovlivněny výrobními kapacity jejich členů.

Teď můžeme přistoupit k definování nutné podmínky konvexnosti.

Věta 2.5.68.

Jestliže oligopolní situace $(N, (\omega_i)_{i\in N}, (C_i)_{i\in N}, p)$ splňuje následující předpoklady

$$p(X) = A - bX,$$
$$C_i(x_i) = cx_i, \forall i \in N,$$
$$A > c,$$
$$A, b, c \in \mathbb{R}_+,$$
$$\omega_i \geq \frac{A-c}{b(n+1)},\ \forall i \in N,$$

pak podmínka

$$\sum_{i\notin S} x^*_{-S,i} \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)},\ \forall S \in 2^N,\ |S| = 2,$$

je nutnou podmínkou konvexnosti kooperativní hry (N, v_γ) asociované s oligopolní hrou v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$.

Důkaz. Ukážeme, že jestliže nutná podmínka není splněna, pak hra nemůže byt konvexní. Pro konvexnost musí nutně platit

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{j\}),\ \forall i,j \in N, \forall S \subseteq N \setminus \{i,j\},$$

neboli

$$v(S \cup \{i,j\}) + v(S) \geq v(S \cup \{i\}) + v(S \cup \{j\}),\ \forall i,j \in N, \forall S \subseteq N \setminus \{i,j\}.$$

Pro $S = \emptyset$ předchozí nerovnost se dá napsat jako

$$v(\{i,j\}) \geq v(\{i\}) + v(\{j\}),\ \forall i,j \in N.$$

Vzhledem k tomu, že podle předpokladů dokazované věty Cournotova rovnováha je vždy dosažitelná, tj. $x^*_{S,i} = \frac{A-c}{b(n+1)}, \forall S \subseteq N, |S| = 1$, pak z definice $f_\gamma(s)$ a předchozího vztahu plyne, že musí byt nutně splněno

$$v_\gamma(S) \geq 2f_\gamma(1) = \frac{2(A-c)^2}{b(n+1)^2}, \forall S \subseteq N, |S| = 2,$$

aby hra mohla být konvexní. Jak už bylo uvedeno dříve optimální výstup koalice se rovná

$$\sum_{i \in S} x^*_{S,i} = \frac{A - c - b\sum_{i \notin S} x^*_{-S,i}}{2b}.$$

Vzhledem k tvrzení 2.5.67 pro libovolnou koalici S bude platit

$$v_\gamma(S) = \frac{(A - c - b\sum_{i \notin S} x^*_{-S,i})^2}{4b}.$$

Takže aby hra mohla být konvexní, musí být nutně splněna nerovnost

$$\frac{(A - c - b\sum_{i \notin S} x^*_{-S,i})^2}{4b} \geq \frac{2(A-c)^2}{b(n+1)^2},\ \forall S \in 2^N,\ |S| = 2.$$

Po vyřešení kvadratické nerovnice vzhledem k $\sum_{i \notin S} x^*_{-S,i}$ dospějeme k závěru, že nabude platnosti, pouze pokud

$$\sum_{i \notin S} x^*_{-S,i} \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)},\ \forall S \in 2^N,\ |S| = 2.$$

□

Předchozí podmínka předpokládá výpočet výstupu koalice a outsiderů, což není příliš vhodné. Avšak dále bude ukázáno, že předchozí podmínka je ekvivalentní s podmínkou

$$\sum_{i \notin S} \omega_i \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)},\ \forall S \in 2^N,\ |S| = 2. \tag{2.5.10}$$

Věta 2.5.69. Jestliže oligopolní situace $(N, (\omega_i)_{i \in N}, (C_i)_{i \in N}, p)$ splňuje následující předpoklady

$$p(X) = A - bX,$$

$$C_i(x_i) = cx_i, \forall i \in N,$$
$$A > c,$$
$$A, b, c \in \mathbb{R}_+,$$
$$\omega_i \geq \frac{A-c}{b(n+1)},\ \forall i \in N,$$

pak podmínka

$$\sum_{i \notin S} \omega_i \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)},\ \forall S \in 2^N,\ |S| = 2,$$

je nutnou podmínkou konvexnosti kooperativní hry (N, v_γ) asociované s oligopolní hrou v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$.

Důkaz. Chceme dokázat, že

$$\sum_{i \notin S} \omega_i \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)} \Leftrightarrow \sum_{i \notin S} x^*_{-S,i} \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)}, \tag{2.5.11}$$

$$\forall S \in 2^N,\ |S| = 2.$$

Směr zleva doprava je zřejmý, protože $\omega_i \geq x^*_{-S,i},\ \forall i \in N$.

Přistoupíme k opačnému směru. Jak už bylo zmíněno, optimální výstup koalice je roven

$$\sum_{i \in S} x^*_{S,i} = \frac{A - c - b\sum_{i \notin S} x^*_{-S,i}}{2b}.$$

Analogicky jako v případě koalice můžeme stanovit, že optimální výstup outsiderů je roven

$$x^*_{-S,i} = \frac{A - c - b(\sum_{i \notin S} x^*_{-S,i} + \sum_{i \in S} x^*_{S,i})}{b}.$$

Po dosazení za $\sum_{i \in S} x^*_{S,i}$ obdržíme

$$x^*_{-S,i} = \frac{A - c - b\sum_{i \notin S} x^*_{-S,i}}{2b}.$$

Dále pro obecnost budeme předpokládat, že určitý počet outsiderů již potkal své kapacitní omezení, neboli $\forall i \in \Omega \subseteq N \setminus S,\ x^*_{-S,i} = \omega_i$, protože pokud firma nedokáže své optimum vyrobit, bude se snažit k té hodnotě maximálně přiblížit (funkce zisku je kvadratickou funkcí s unikátní optimální hodnotou). Takže dostaneme

$$x^*_{-S,i} = \frac{A - c - b(\sum_{i \notin (S \cup \Omega)} x^*_{-S,i} + \sum_{i \in \Omega} \omega_i)}{2b}.$$

Po sečtení výstupu outsiderů, které nejsou ovlivněny svými omezeními, obdržíme

$$\sum_{i \notin (S \cup \Omega)} x^*_{-S,i} = (n - s - |\Omega|)\frac{A - c - b(\sum_{i \notin (S \cup \Omega)} x^*_{-S,i} + \sum_{i \in \Omega} \omega_i)}{2b}$$

nebo po úpravách

$$2\frac{\sum_{i\notin(S\cup\Omega)} x^*_{-S,i}}{2} + (n-s-|\Omega|)\frac{\sum_{i\notin(S\cup\Omega)} x^*_{-S,i}}{2} = (n-s-|\Omega|)\frac{A-c-b(\sum_{i\in\Omega}\omega_i)}{2b},$$

$$\sum_{i\notin(S\cup\Omega)} x^*_{-S,i} = \frac{(n-s-|\Omega|)(A-c-b\sum_{i\in\Omega}\omega_i)}{b(n-s+2-|\Omega|)}.$$

Pravá strana dokazované ekvivalence (2.5.11) pak nabývá tvar

$$\frac{(n-2-|\Omega|)(A-c-b\sum_{i\in\Omega}\omega_i)}{b(n-|\Omega|)} + \sum_{i\in\Omega}\omega_i \le \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)}, \tag{2.5.12}$$

$$\forall S \in 2^N,\ |S| = 2.$$

Jednoduše se ukáže, že levá strana nerovnosti roste se zvýšením $\sum_{i\in\Omega}\omega_i$.
Z předpokladu věty

$$\omega_i \ge \frac{A-c}{b(n+1)},\ \forall i \in N,$$

plyne

$$\sum_{i\in\Omega}\omega_i \ge |\Omega|\frac{A-c}{b(n+1)},$$

pro libovolnou množinu Ω.

Tedy pro libovolnou množinu Ω musí platit

$$\frac{(n-2-|\Omega|)(A-c-b|\Omega|\frac{A-c}{b(n+1)})}{b(n-|\Omega|)} + |\Omega|\frac{A-c}{b(n+1)}$$
$$\le \frac{(n-2-|\Omega|)(A-c-b\sum_{i\in\Omega}\omega_i)}{b(n-|\Omega|)} + \sum_{i\in\Omega}\omega_i.$$

Ze vztahu (2.5.12) pak plyne

$$\frac{(n-2-|\Omega|)(A-c-b|\Omega|\frac{A-c}{b(n+1)})}{b(n-|\Omega|)} + |\Omega|\frac{A-c}{b(n+1)} \le \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)}. \tag{2.5.13}$$

Teď se podíváme na platnost nerovnosti (2.5.13) při různých parametrech $|\Omega|$. Po úpravách a krácení dostaneme

$$(n-2-|\Omega|)(n+1-|\Omega|) + |\Omega|(n-|\Omega|) \le (n+1-2\sqrt{2})(n-|\Omega|).$$

Po roznásobení dostáváme

$$2\sqrt{2}|\Omega| - 2|\Omega| \ge 2\sqrt{2}n - 2n - 2,$$

neboli

$$|\Omega| \ge n - \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Vzhledem k tomu, že $|\Omega|$ je celé číslo, pak nerovnost (2.5.13) nabude své platnosti pouze pro

$$|\Omega| \geq n - 2.$$

Vzhledem k tomu, že $\Omega \subseteq N \setminus S$, pro $|S| = 2$ platí nerovnost $|\Omega| \leq |N \setminus S| = n - 2$. Tedy můžeme udělat závěr, že (2.5.13) nabude platnosti, pouze pokud $|\Omega| = n - 2$. Pokud dosadíme tuto hodnotu do (2.5.12), dostaneme nerovnost

$$\sum_{i \notin S} \omega_i \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)},$$

z čehož plyne, že pravá strana (2.5.11) je skutečně nutnou podmínkou konvexnosti. □

Teď ukážeme, že předchozí podmínka není jen nutná ale také postačující.

Věta 2.5.70. *Jestliže oligopolní situace* $(N, (\omega_i)_{i\in N}, (C_i)_{i\in N}, p)$ *splňuje následující předpoklady*

$$p(X) = A - bX,$$
$$C_i(x_i) = cx_i, \forall i \in N,$$
$$A > c,$$
$$A, b, c \in \mathbb{R}_+,$$
$$\omega_i \geq \frac{A-c}{b(n+1)}, \ \forall i \in N,$$

pak podmínka

$$\sum_{i \notin S} \omega_i \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)}, \ \forall S \in 2^N, \ |S| = 2,$$

je postačující podmínkou konvexnosti kooperativní hry (N, v_γ) *asociované s oligopolní hrou v normálním tvaru* $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$.

Důkaz. Chceme dokázat, že za splnění uvedené podmínky platí

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{j\}), \ \forall i,j \in N, \forall S \subseteq N \setminus \{i,j\}.$$

Důkaz rozdělíme na tři případy: $|S| = 0, \ |S| = 1, \ |S| \geq 2$.

Případ $|S| = 0$ je zřejmý, neboť jsme vycházeli z toho, že nutná podmínka z věty 2.5.68, která podle věty 2.5.69 je ekvivalentní s dokazovanou postačující podmínkou, zaručí splnění podmínky konvexnosti pro případ

$$2f_\gamma(1) = v(\{i\}) + v(\{j\}) - v(\emptyset) \leq v(\{i,j\}), \ \forall i,j \in N.$$

Teď se soustředíme na případě $|S| = 1$. Podle definice konvexnosti musí platit

$$v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{i\}) \geq v(S \cup \{j\}) - f_\gamma(1), \ \forall i,j \in N, \ \forall S \subseteq N \setminus \{i,j\}, \ |S| = 1,$$

nebo

$$v(S \cup \{i,j\}) + f_\gamma(1) - v(S \cup \{j\}) - v(S \cup \{i\}) \geq 0, \ \forall i,j \in N, \ \forall S \subseteq N \setminus \{i,j\}, \ |S| = 1.$$

Jak už bylo zmíněno v důkaze věty 2.5.68

$$v_\gamma(S) = \frac{(A - c - b\sum_{i\notin S} x^*_{-S,i})^2}{4b}.$$

Tedy platí

$$v_\gamma(S \cup \{i,j\}) = \frac{(A - c - b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}} x^*_{-S\cup\{i,j\},l})^2}{4b} \geq \frac{(A - c - b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}} \omega_l)^2}{4b},$$

$$v_\gamma(S \cup \{i\}) = \frac{(A - c - b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}} x^*_{-S\cup\{i\},l} - bx^*_{-S\cup\{i\},j})^2}{4b}.$$

Potom za předpokladů

$$\omega_i \geq \frac{A-c}{b(n+1)},\ \forall i \in N,$$

$$\sum_{i\notin S} \omega_i \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)},\ \forall S \in 2^N,\ |S| = 2,$$

platí

$$v_\gamma(S \cup \{i,j\}) \geq \frac{\left(A - c - b\left(\frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)} - \frac{A-c}{b(n+1)}\right)\right)^2}{4b}.$$

Také z výsledků lemmatu 2.5.64 a tvrzení 2.5.66 plyne

$$v_\gamma(S \cup \{i\}) \leq \frac{(A - c - b\frac{(A-c)(n-2)}{b(n+1)})^2}{4b}.$$

Analogický vztah platí pro $v_\gamma(S \cup \{j\})$.

Tj. stačí dokázat

$$\frac{\left(A - c - b\left(\frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)} - \frac{A-c}{b(n+1)}\right)\right)^2}{4b} + \frac{(A-c)^2}{b(n+1)^2} - 2\frac{(A - c - b\frac{(A-c)(n-2)}{b(n+1)})^2}{4b} \geq 0.$$

Po úpravách obdržíme

$$\frac{(A-c)^2(13+4\sqrt{2})}{4b(n+1)^2} - \frac{18(A-c)^2}{4b(n+1)^2} \geq 0$$

a potom po krácení máme

$$13 + 4\sqrt{2} - 18 \geq 0,$$

což je vždy splněno. Takže pro $|S| = 1$ konvexnost je splněna.

Přistoupíme k případu $|S| \geq 2$. Analogicky jako v předchozím případě pro konvexnost $\forall i, j \in N,\ \forall S \subseteq N \setminus \{i,j\},\ |S| \geq 2$, musí byt splněna nerovnost

$$\frac{(A - c - b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}} x^*_{-S\cup\{i,j\},l})^2}{4b} + \frac{(A - c - b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}} x^*_{-S,l} - bx^*_{-S,i} - bx^*_{-S,j})^2}{4b}$$
$$-\frac{(A - c - b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}} x^*_{-S\cup\{i\},l} - bx^*_{-S\cup\{i\},j})^2}{4b}$$

$$-\frac{(A-c-b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}} x^*_{-S\cup\{j\},l} - bx^*_{-S\cup\{j\},i})^2}{4b} \geq 0.$$

Poznamenejme, že ten případ může nastat pouze pro $|N| > 3$. V další části potřebujeme dokázat jednu důležitou skutečnost: podmínka dokazované věty omezující velikosti výrobních kapacit zaručí, že každá firma potka své kapacitní omezení při vzniku libovolné koalici mohutnosti 2.

Analogicky jako v důkaze předchozí věty předpokládáme, že pro $\forall i \notin (S \cup \Omega),\ S \subseteq N,\ |S| = 2$, platí

$$x^*_{-S,i} = \frac{A-c-b(\sum_{i\notin(S\cup\Omega)} x^*_{-S,i} + \sum_{i\in\Omega}\omega_i)}{2b}.$$

Podmínka, která je ekvivalentní s podmínkou dokazované věty, pak dává nerovnost

$$x^*_{-S,i} \geq \frac{A-c-b\frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)}}{2b} = \frac{\sqrt{2}(A-c)}{b(n+1)},$$

a musí platit

$$\sum_{i\notin(S\cup\Omega)} x^*_{-S,i} \geq \frac{(n-2-|\Omega|)\sqrt{2}(A-c)}{b(n+1)}.$$

Podle podmínky věty musí platit

$$\frac{(n-2-|\Omega|)\sqrt{2}(A-c)}{b(n+1)} + |\Omega|\frac{(A-c)}{b(n+1)} \leq \sum_{i\notin(S\cup\Omega)} x^*_{-S,i} + \sum_{i\in\Omega}\omega_i \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)}.$$

Tedy nutně musí byt splněno

$$(n-2-|\Omega|)\sqrt{2} + |\Omega| \leq n+1-2\sqrt{2},$$

ale úpravami obdržíme, že nerovnost je splněna pouze pro

$$|\Omega| \geq n-2.$$

To znamená, že jediným způsobem, jak zaručit platnost podmínky, je, aby každá firma potkala své kapacitní omezení. Díky této skutečnosti můžeme přepsat nerovnost, jejíž platnost chceme dokázat, následujícím způsobem

$$\frac{(A-c-b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}}\omega_l)^2}{4b} + \frac{(A-c-b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}}\omega_l - b\omega_i - b\omega_j)^2}{4b}$$

$$-\frac{(A-c-b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}}\omega_l - b\omega_j)^2}{4b} - \frac{(A-c-b\sum_{l\notin S\cup\{i,j\}}\omega_l - b\omega_i)^2}{4b} \geq 0.$$

Což po úpravách ve výsledku dává nerovnost

$$(\omega_j+\omega_i)^2 - \omega_j^2 - \omega_i^2 \geq 0,$$

která je vždy splněna. □

Věta 2.5.71. Jestliže oligopolní situace $(N, (\omega_i)_{i\in N}, (C_i)_{i\in N}, p)$ splňuje následující předpoklady

$$p(X) = A - bX,$$

$$C_i(x_i) = cx_i, \forall i \in N,$$

$$A > c,$$

$$A, b, c \in \mathbb{R}_+,$$

$$\omega_i \geq \frac{A-c}{b(n+1)}, \ \forall i \in N,$$

pak kooperativní hra (N, v_γ) asociovaná s oligopolní hrou v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ je konvexní právě tehdy, když platí

$$\sum_{i\notin S} \omega_i \leq \frac{(A-c)(n+1-2\sqrt{2})}{b(n+1)}, \ \forall S \in 2^N, \ |S| = 2.$$

Funkčnost odvozené podmínky demonstrujeme na dvou příkladech.

Příklad 2.5.72. Uvažujme kooperativní oligopolní hru (N, v_γ), která je asociovaná s oligopolní situací $(N, (\omega_i)_{i\in N}, (C_i)_{i\in N}, p)$, kde $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $\omega_i = 5, \forall i \in N$, $C_i = 2x_i, \forall i \in N$, a inverzní funkce poptávky je definována následovně $p(X) = 10 - X$.

$\lvert S\rvert$	1	2	3	4
$v_\gamma(S)$	2,56	4	7,11	16

Tabulka 2.1: γ-charakteristická funkce pro příklad 2.5.72

Tato hra nesplňuje nutnou a postačující podmínku konvexnosti, protože $10 > \frac{8(5-2\sqrt{2})}{5}$. Zřejmě hra není konvexní, neboť není superaditivní. Na obrázku 2.1 můžeme vidět, že jádro hry je tvořené pouze jedním bodem (podle věty 2.4.61 nemůže byt prázdné).

Teď vyřešíme analogicky případ s jinými kapacitními omezeními.

Příklad 2.5.73. Uvažujme kooperativní oligopolní hru (N, v_γ), která je asociovaná s oligopolní situací $(N, (\omega_i)_{i\in N}, (C_i)_{i\in N}, p)$, kde $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $\omega_i = 1,7, \forall i \in N$, $C_i = 2x_i, \forall i \in N$, a inverzní funkce poptávky je definována následovně $p(X) = 10 - X$.

$\lvert S\rvert$	1	2	3	4
$v_\gamma(S)$	2,56	5,29	9,9225	16

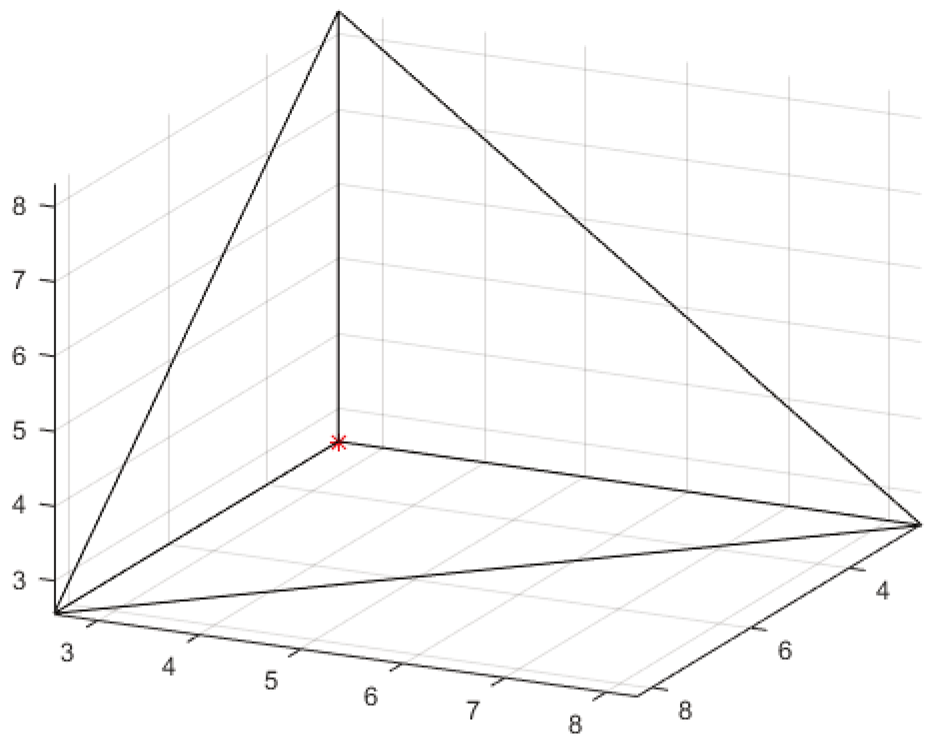
Tabulka 2.2: γ-charakteristická funkce pro příklad 2.5.73

Tato hra splňuje nutnou a postačující podmínku konvexnosti a je konvexní. Na obrázku 2.2 je vidět, že jádro má regulární konfiguraci a je skutečně „velké".

Poznámka. Výpočet hodnot charakteristické funkce byl proveden pomocí programu řešícího lineární oligopolní případy, který je součástí této práce a je uveden v kapitole 4. K vykreslování byla použita knihovna MATLABu TUGlab [12].

2.5.2. Konvexnost v obecném případě

Kromě γ-charakteristické funkce taky existují další koncepty převádění hry v normálním tvaru na koaliční hru, kterými jsou α- a β-charakteristické funkce [13]. Pro náš případ



Obrázek 2.1: Jádro pro příklad 2.5.72

oligopolní hry v normálním tvaru asociované s α-charakteristickou a β-charakteristickou funkcí jsou (N, v_α) a (N, v_β) respektive, kde $\forall S \in 2^N$

$$v_\alpha(S) = \max_{x_S \in X_S} \min_{x_{-S} \in X_{-S}} \sum_{i \in S} \pi_i(x_S, x_{-S}),$$

$$v_\beta(S) = \min_{x_{-S} \in X_{-S}} \max_{x_S \in X_S} \sum_{i \in S} \pi_i(x_S, x_{-S}),$$

kde $X_{-S} = \Pi_{i \notin S} X_i$ s prvky $x_{-S} = (x_i)_{i \notin S}$. Za předpokladu, že inverzní poptávková funkce je ryze klesající, platí

$$\forall x_S \in X_S,\ \omega_{-S} = (\omega_i)_{i \notin S} \in \arg \min_{x_{-S} \in X_{-S}} \sum_{i \in S} \pi_i(x_S, x_{-S}) \tag{2.5.14}$$

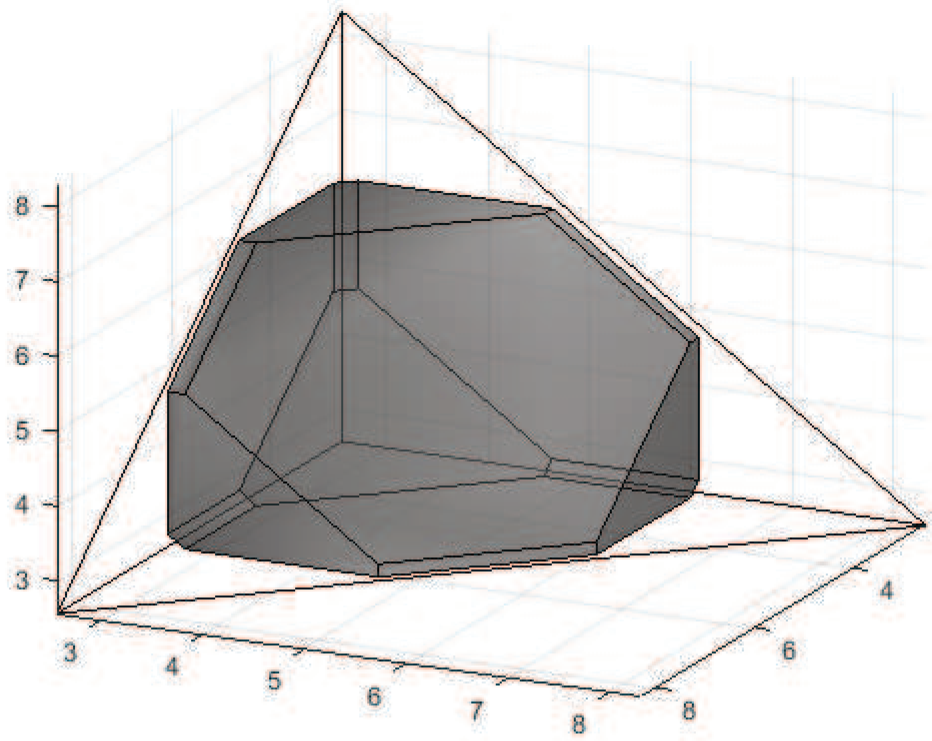
a pro asociované kooperativní hry (N, v_α) a (N, v_β) platí následující věta.

Věta 2.5.74. *Pro dvě kooperativní hry (N, v_α) a (N, v_β) asociované s oligopolní hrou v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ platí*

$$v_\alpha(S) = v_\beta(S) = \sum_{i \in S} \pi_i(x_S^*(\omega_{-S}), \omega_{-S}),\ \forall S \subseteq N,$$

kde $x_S^*(\omega_{-S}) \in \arg\max_{x_S \in X_S} \pi_S(x_S, \omega_{-S})$.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [14]. □



Obrázek 2.2: Jádro pro příklad 2.5.73

Věty pro konvexnost v_γ odvodíme pomocí analogických vět pro v_β za použití extrémního případu následující věty.

Věta 2.5.75. *Pro dvě kooperativní hry (N, v_γ) a (N, v_β) asociované s oligopolní hrou v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ platí*

$$v_\gamma(S) \geq v_\beta(S), \ \forall S \subseteq N.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [10]. □

Věta 2.5.76. *Jestliže oligopolní hra v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ splňuje*

$$x^*_{-S,i} = \omega_i, \ \forall S \in 2^N, \ |S| = 1, \ \forall i \notin S,$$

pak pro dvě asociované kooperativní hry (N, v_γ) a (N, v_β) platí $v_\beta = v_\gamma$.

Důkaz. Jak už bylo zmíněno dříve,

$$v_\beta(S) = \sum_{i \in S} \pi_i(x^*_S(\omega_{-S}), \omega_{-S}), \ \forall S \subseteq N.$$

Jestliže $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ oligopolní hra v normálním tvaru, pak pro každé $S \subseteq T \in 2^N$ platí

$$x^*_{-S,i} \leq x^*_{-T,i}, \ \forall i \notin T.$$

Takže z předchozí nerovnosti a předpokladů věty dostaneme $x^*_{-S,i} = \omega_i, \ \forall S \in 2^N, \ \forall i \notin S$. Podle definice rovnováhy částečné dohody pod S pro případ $x^*_{-S,i} = \omega_i, \ \forall S \in 2^N, \ \forall i \notin S$, platí $x^*_S = x^*_S(\omega_{-S})$. Na závěr dostáváme vztah

$$v_\gamma(S) = \sum_{i \in S} \pi_i(x^*_S, x^*_{-S}) = \sum_{i \in S} \pi_i(x^*_S(\omega_{-S}), \omega_{-S}) = v_\beta(S).$$

□

Teď se soustředíme na dvě věty o konvexnosti oligopolních her s β-charakteristickou funkcí pro obecné případy.

Věta 2.5.77. Jestliže oligopolní situace $(N, (\omega_i)_{i \in N}, (C_i)_{i \in N}, p)$ splňuje následující předpoklady

$$p(X) = A - bX,$$
$$C_i(x_i) = c_i x_i, \forall i \in N,$$
$$A, b, c_i \in \mathbb{R}_+, \ i \in N,$$

pak kooperativní hra (N, v_β) asociovaná s oligopolní hrou v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ je vždy konvexní.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [8]. □

Před uvedením znění věty pro maximálně obecný případ je potřeba zavést další pojmy jako typ firmy, elasticita poptávky a tržní podíl.

Definice 2.5.78. Řekneme, že v koalici S

- firma i je typu 1, pokud existuje taková firma $j \in S \setminus \{i\}$ splňující $0 < x^*_{S,j} < \omega_i$.
- firma i je typu 2, jestliže $x^*_{S,j} = 0$ pro všechny $j \in S \setminus \{i\}$.
- firma i je typu 3, jestliže firma i není ani prvního ani druhého typu.

Definice 2.5.79. Tržní elasticita poptávky $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a tržní podíl $\mu_i^S(X)$ firmy $i \in S$ vzhledem ke koalici $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ jsou definované jako

$$\eta(X) = -\frac{p(X)}{X} \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial X}(X)} \text{ and } \mu_i^S(X) = \frac{x^*_{S,i}}{X},$$

kde $p(X)$ je inverzní funkce poptávky.

Věta 2.5.80. Oligopolní hra (N, v_β) je konvexní, jestliže $C_i(x_i)$ je diferencovatelná pro každé $i \in N$ a pro každé $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, a pro každé $i \in S$ následující podmínky jsou splněny:

(i) Jestliže firma i je typu 3 v S, pak nákladový rozdíl alternativního reprezentanta $j \in S \setminus \{i\}$ koalice S je větší než nákladový rozdíl firmy i, t.j.

$$C_j(x^*_{S,j}) - C_j(x^*_{S,j} + x^*_{S,i} - \omega_i) \geq C_i(\omega_i) - C_i(x^*_{S,i}).$$

(ii) Jestliže firma i je typu 1 v S, pak pro alternativního reprezentanta $j \in S \setminus \{i\}$ platí

1) průměrné náklady firmy j vypočtené v optimální hodnotě $x^*_{S,j}$ jsou větší než průměrné náklady firmy i vypočtené v její výrobní kapacitě ω_i, tj.

$$\frac{C_j(x^*_{S,j})}{x^*_{S,j}} \geq \frac{C_i(\omega_i)}{\omega_i} \geq 0,$$

2) funkce průměrných nákladů firmy j je izotonní v optimální hodnotě $x^*_{S,j}$, to znamená, že mezní náklady firmy j jsou větší než její průměrné náklady v $x^*_{S,j}$, tj.

$$\frac{\partial C_j}{\partial x_j}(x^*_{S,j}) \geq \frac{C_j(x^*_{S,j})}{x^*_{S,j}} \geq 0,$$

3) průměrné náklady koalice S jsou větší než mezní zisk firmy j vypočteny pro agregovaný výstup odvětví $X^{P,S}$, t.j.

$$p(X^{P,S})\left(1 - \frac{\mu_j^S(X^{P,S})}{\eta(X^{P,S})}\right) \leq \frac{\sum_{i\in S} C_i(x^*_{S,i})}{\sum_{i\in S} x^*_{S,i}}.$$

(iii) Jestliže firma i je typu 2 v S, pak $\frac{C_j(x^*_{S,j})}{x^*_{S,j}} \geq \frac{C_i(\omega_i)}{\omega_i} \geq 0$ platí taky pro $j = i$.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [8]. □

Věta 2.5.81. Můžeme použít věty 2.5.77 a 2.5.80 pro v_γ, jestliže $x^*_{-S,i} = \omega_i,\ \forall S \in 2^N,\ |S| = 1,\ \forall i \notin S$, je splněno.

Demonstrujeme platnost první věty, která dává postačující podmínku pro lineární oligopolní situaci s různými mezními náklady. Analogicky jako předtím budeme uvažovat dva případy, které se budou lišit pouze ve výrobních kapacitách firem.

Příklad 2.5.82. Uvažujme kooperativní oligopolní hru (N, v_γ), která je asociovaná s oligopolní situací $(N, (\omega_i)_{i\in N}, (C_i)_{i\in N}, p)$, kde $N = \{1, 2, 3\},\ \omega_1 = 5,\ \omega_2 = 5,\ \omega_3 = 6,\ C_1 = 5x_1,\ C_2 = 4x_2,\ C_3 = 3x_3$ a inverzní funkce poptávky je definována následovně: $p(X) = 20 - X$. Po provedení vypočtu a zaokrouhlování dostaneme tabulku 2.3.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_\gamma(S)$	9	16	25	25	36	39	70

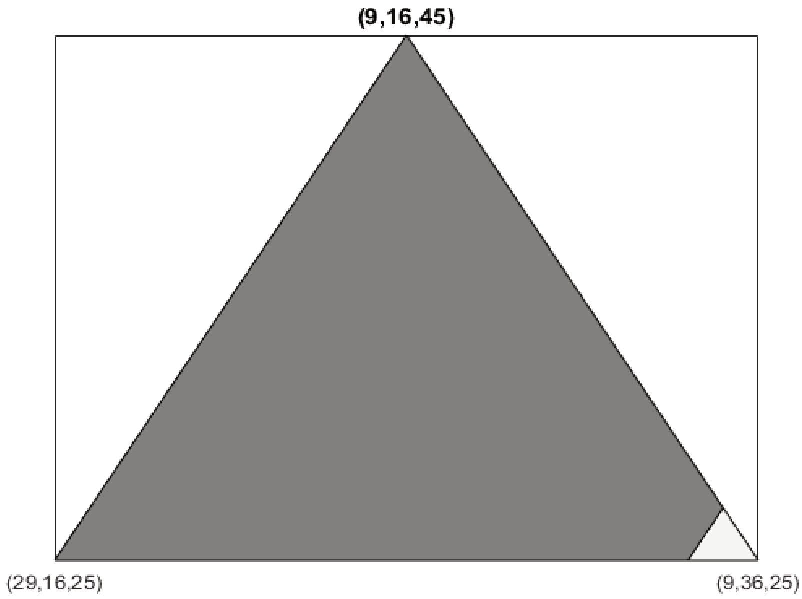
Tabulka 2.3: γ-charakteristická funkce pro příklad 2.5.82

Tato hra nesplňuje předpoklad věty, protože výstupy hráčů při Cournotově rovnováze jsou $3,\ 4$ a 5, což pro každou firmu je menši než její kapacitní omezení. Hra není konvexní, protože není ani superaditivní. Avšak na obrázku 2.3 je vidět, že jádro vyplní skoro celou množinu imputací.

Příklad 2.5.83. Uvažujme kooperativní oligopolní hru (N, v_γ), která je asociovaná s oligopolní situací $(N, (\omega_i)_{i\in N}, (C_i)_{i\in N}, p)$, kde $N = \{1, 2, 3\},\ \omega_1 = 3,\ \omega_2 = 3,\ \omega_3 = 3,\ C_1 = 5x_1,\ C_2 = 4x_2,\ C_3 = 3x_3$ a inverzní funkce poptávky je definována následovně: $p(X) = 20 - X$. Po provedení vypočtu a zaokrouhlování dostaneme tabulku 2.4.

Po změně kapacitních omezení takovým způsobem, že jsou menši, než výstup firem při Cournotove rovnováze v předchozím příkladě, hra už bude splňovat předpoklady věty, a tím pádem bude konvexní. Konvexnost hry se da ověřit přímou kontrolou platnosti všech nerovností z definice konvexnosti. Na obrázku 2.4 je vidět, že v tomto případě jádro vyplní celou množinu imputací.

Poznámka. Výpočet byl také proveden pomoci programu z 4. kapitoly.



Obrázek 2.3: Jádro pro příklad 2.5.82

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_\gamma(S)$	18	21	24	39	42	45	65,25

Tabulka 2.4: γ-charakteristická funkce pro příklad 2.5.83

Obrázek 2.4: Jádro pro příklad 2.5.83

2.6. Interpretace teoretických výsledků

Teď přistoupíme k ekonomické a praktické interpretaci odvozených vztahů z dokázaných vět. První dokázanou vlastností kooperativních oligopolních her ve tvaru γ-charakteristické funkce byla jejich monotonie. Splnění této vlastnosti zaručuje smysluplnost další analýzy, protože kdyby firmy nemohly získávat víc prostřednictvím spolupráce, pak modelování Cournotova oligopolu prostřednictvím kooperativní teorie her by nemělo žádný smysl. Také je třeba zdůraznit, že to platí pro libovolnou hru. Takže můžeme říct, že v případě trhu splňujícího předpoklady Cournotova oligopolu, vždy existuje nějaký slabší podnět firem ke spolupráci.

Monotonie ukazuje na tendenci k vytvoření kartelu, ale má slabou vypovídací schopnost ohledně síly té tendence a toho, nakolik je pravděpodobné, že ten kartel skutečně vznikne. Zřejmě hra může být monotónní ale nesuperaditivni, což pak zřejmě má negativní dopad na možnou spolupráci. Kvůli tomu další uvažovanou vlastností je konvexnost, nebo jak ji popisoval Shapley „snow-ball“ efekt. Tento popis docela dobře odráží smysl konvexnosti: sněhová koule, která se klouže z nějaké hory, se stává nadprůměrně větší, protože se na ni nalepí další sníh, tak výplaty hráčů v konvexní hře nadproporcionálně rostou při zvětšení velikosti koalice.

Nejdříve se zaměříme na klasický ekonomický případ, kdy firmy mají stejné mezní náklady a poptávka je lineární funkcí. Podle věty 2.5.71 konvexnost, a tedy silný podnět k stabilní spolupráci mnoha firem, má místo pouze za předpokladu značné ohraničenosti výrobních kapacit firem. Hra je konvexní jenom v případě existence určitého malého pásma mezi výstupem odpovídajícím Cournotově rovnováze a výrobní kapacitou. Protože v situaci velkých výrobních možností firem může nastat případ, ve kterém outsideři dokážou podstatně potlačit sílu koalici a její zisky. Takže obecně v případě stejných nákladových podmínek při velkých objemech výroby je menší pravděpodobnost vzniku stabilního kartelu. Kartel, do kterého by se zapojily všechny firmy, by vůbec neměl vzniknout. Dobře to vidíme na ukázkovém případě, ve kterém při nesplnění předpokladů věty jádro je tvořeno pouze jedním bodem. Podle Driessena a Meinhardta [8] to znamená, že sebemenší perturbace ve výrobních podmínkách přivede k zániku kartelu, vzhledem k tomu, že existuje pouze jedno jediné řešení, při kterém všechny firmy jsou spokojené se svými výplatami. Zatímco v případě konvexnosti je jádro velká symetrická množina, což vede k opačnému závěru, že firmy mají velký podnět k dlouhodobé stabilní spolupráci.

Pro lineární případ s heterogenní strukturou nákladů firem je podmínka stabilní spolupráce (jenom postačující) ještě restriktivnější, protože v tom případě výše zmíněné pásmo mezi rovnovážným výstupem a výrobní kapacitou vůbec nesmí existovat.

Pro obecnější případy musí být splněno ještě víc požadavků, které se kladou nejen na velikosti výrobních kapacit, ale také na tvary poptávky a nákladových funkcí. Avšak podle ukázkového příkladu můžeme vidět, že nekonvexní hra může taky mít velké jádro signalizující možnost stabilní kooperace. Ale v takovém příkladě nejspíš nevznikne velký kartel, ale menší, do kterého se zapojí jen část firem na trhu.

Balancovanost zkoumaných her se popisuje problematicky zejména v případě lineární situace s odlišnými náklady. Ale ani jednou se mi nepodařilo vytvořit příklad, ve kterém by bylo prázdné jádro. Avšak pouhá neprázdnost jádra má malou vypovídací schopnost o průběhu hry.

3. Výpočet hodnot $v_\gamma(S)$

3.1. Obecný popis

V této kapitole ukážeme okomentovaný algoritmus výpočtu hodnot charakteristické funkce a zdůvodníme jeho funkčnost. Na začátku obecně popíšeme průběh programu, jeho vstupy a výstupy.

První čtyři proměnné vstupující do programu odpovídají svému nazvu: A a b jsou parametry funkce poptávky $p(X) = A - bX$, c a omega jsou vektory obsahující náklady c_i a výrobní kapacity ω_i, proměnná iteration odpovídá maximálnímu počtu iterací, po kterém se ukončí průběh výpočtu hodnoty charakteristické funkce pro konkrétní koalici, pokud nedosáhne požadované přesnosti eps vektoru výstupů. Do dvou výstupních proměnných se ukládají výstupy firem a odpovídající hodnoty charakteristických funkcí.

Teď si vysvětlíme hlavní myšlenku výpočtu. Postupně každý hráč nebo koalice optimalizuje svoji ziskovou funkci volbou konkrétního výstupů za podmínky fixních výstupů ostatních hráčů. Po tom, co proběhne optimalizace pro koalici a outsidery, vektor výstupů hráčů porovnáme s hodnotu téhož vektoru v předchozí iteraci. Pokud změna bude dostatečně malá, tak budeme předpokládat, že hráči dosáhli rovnovážného stavu, vypočítáme hodnotu koalice pro dané výstupy hráčů, uložíme ji, a cely algoritmus zopakujeme pro zbývající koalice.

3.2. Konvergence

Výše uvedený algoritmus je znám pod obecným názvem best-reply dynamics. Hlavní otázka, která vzniká při jeho použití, je, za jakých předpokladů je konvergentní a v konečném počtu kroků přivede k řešení odpovídajícímu Nashově rovnováze. K odpovědi na tuto otázku potřebujeme zavést pojem agregační hry.

Podle Babichenko [15] jsou agregační hry takové hry v normálním tvaru, pro které platí, že strategie jednotlivých hráčů jsou čísla z $\mathbb{R}$ a výplata každého hráče závisí na jeho strategii a sumě strategií zvolených všemi hráči. Ekvivalentně se dá říct, že výplata každého hráče závisí na jeho strategii a průměru strategií zvolených všemi hráči. Taky se předpokládá, že množiny strategií jednotlivých hráčů jsou uzavřené intervaly v $\mathbb{R}$.

Pak se výplatní funkce $\pi_i(x)$ předefinuje na tvar $v_i(x_i, \frac{X}{n})$. Na základě této funkce se pak definuje podmnožina agregačních her, které se říká λ-Lipschitzovská agregační hra.

Definice 3.2.84. Agregační hru nazveme λ-Lipschitzovskou, pokud $\forall i \in N$, funkce $v_i(x_i, \cdot)$ je λ-Lipschitzovska v proměnné odpovídající průměru strategií, tj. existuje λ splňující

$$|v_i(x_i, \frac{X'}{n}) - v_i(x_i, \frac{X''}{n})| \leq \lambda |\frac{X'}{n} - \frac{X''}{n}|, \forall x_i \in X_i,\ \forall X', X''.$$

Tvrzení 3.2.85. *Oligopolní hra v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ s lineárními funkcemi nákladů a lineární inverzní poptávkovou funkcí je λ-Lipschitzovská agregační hra.*

Důkaz. Stačí uvažovat volbu $v_i(x_i, \frac{X}{n}) = (A - bn\frac{X}{n})x_i - c_i x_i$ a $\lambda = bn \max_{i \in N} \omega_i$. □

V další části své práce Babichenko dokázal několik rozsáhlých vět, z nichž ale potřebujeme jenom jednu důležitou skutečnost: pro λ-Lipschitzovské agregační hry best-reply dynamics konverguje k Nashově rovnováze.

Tento pohled je výhodný tím, že se dá jednoduše zobecnit. Hledání hodnoty koalice S je v podstatě hledáním Nashovy rovnováhy pro případ, že místo všech členů koalice S máme jako hráče celou koalici. Ale to neovlivní obecný tvar výplatní funkce a její λ-Lipschitzovskost (zřejmě λ je konstanta obecně jiná pro každou koalici S). Takže pro obecný případ je best-reply dynamics také konvergentní.

Dále si stručně a bez důkazu uveďme ještě jeden pohled na agregační hru uvedený v [16].

Zase předpokládejme, že výplatní funkce $\pi_i(x)$ závisí pouze na strategii zvolené hráčem a sumě strategií všech hráčů. Pak existuje funkce $\phi_i : X_i \times X_X$ taková, že $\forall x \in X_N$, $\pi_i(x) = \phi_i(x_i, X)$, kde $X = \sum_{i \in N} x_i$ a $X_X = \{\sum_{i \in N} x_i : \ x_i \in X_i\}$ je množina přípustných sum. Dále se definuje funkce

$$D_i(x_i, X) = \frac{\partial \pi_i(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi_i(x_i, X)}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_i(x_i, X)}{\partial X}.$$

Definice 3.2.86. Hra v normálním tvaru je agregační, pokud pro všechny hráči $i \in N$ platí následující předpoklady:

1. množina strategií X_i je kompaktní a konvexní podmnožinou $\mathbb{R}$;

2. výplatní funkce $\pi_i(x)$ je dvakrát diferencovatelná a je striktně kvazi-konkávní vzhledem k $x_i \in X_i$, tj. platí $\pi_i(x_i', (x_j)_{j \neq i}) \geq \pi_i(x_i'', (x_j)_{j \neq i}),\ x_i' \neq x_i''$, implikuje $\pi_i(\lambda x_i' + (1-\lambda)x_i'', (x_j)_{j \neq i}) > \pi_i(x_i'', (x_j)_{j \neq i})$;

3. Nerovnost
$$\frac{\partial D_i(x_i, X)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi_i(x_i, X)}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \phi_i(x_i, X)}{\partial x_i \partial X} < 0$$
je splněna $\forall x_i \in X_i$ a $\forall X \in X_X$.

Oligopolní hra v normálním tvaru $\Gamma = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ s lineárními funkcemi nakladů a lineární inverzní poptávkovou funkcí je agregační hrou ve smyslu předchozí definice. Podmínka 1. je zřejmá, podmínka 3. se da ověřit přímým výpočtem, podmínka 2. je splněna na celém uvažovaném prostoru strategií: symetrická kvadratická forma, která je součástí výplatní funkce, nenabývá kladných hodnot.

Součástí citované práce je důkaz, že best-reply dynamics je globálně konvergentní pro agregační hry.

Jak už bylo zmíněno, v našem algoritmu hledáme Nashovu rovnováhu pro obecnější případ, kde část hráčů má společnou výplatní funkci. Podmínky z definice se dají zobecnit: pro obecný případ podmínka 1. vyžaduje množinu strategií reprezentovanou uzavřeným kvádrem, podmínka 2. vyžaduje kvazi-konkávnost ve vice proměnných a podmínka 3. vyžaduje negativní definitnost odpovídající matici na množině strategií. Tyto podmínky jsou splněny pro obecný případ. A tedy best-reply dynamics je globálně konvergentní.

3.3. Program

```
function [vystupy, v] = Linearnicournot(A,b,c,omega,iteration,eps)
%v pripade potizi s optimalizaci pomaha zmenseni tolerance omezeni,
%predem nastavena hodnota je 1e-8, napriklad
options = optimoptions(@quadprog,'TolCon',0.00001);
%doporucuje se dodrzovat vztah eps>TolCon
%stanoveni poctu hracu
n=length(c);
%stanoveni mezi
lb=zeros(n,1);
ub=omega';
%pocatecni vektor vystupu
x=lb;
%pocitame obycejnou Cournotovu rovnovahu
for k=1:iteration
    x0=x; %vektor vystupu z predchozi iterace
    for i=1:n
        %zadavani matice a vektoru ulohy, znamenka menime na opacna
        %protoze quadprog slouzi k minimalizaci
        H=zeros(n);
        H(i,:)=b*ones(1,n);
        H(:,i)=b*ones(n,1);
        H(i,i)=2*b;
        f=zeros(n,1);
        f(i)=-A+c(i);
        %vystup hracce i je libovolny, zatimco vystupy zbytku jsou fixni
        eq1=eye(n);
        eq1(i,i)=0;
        eq2=x;
        eq2(i)=0;
        %optimalizace
        [x,hodnota(i)]=quadprog(H,f,[],[],eq1,eq2',lb,ub,[],options);
    end
    %podminka ukonceni vypoctu
    if norm(x-x0)<eps
        %ukladani hodnot
        vystupy{1}(1,:)=x';
        v{1}(1,:)=abs(hodnota);
        %ukonceni vypoctu
        break
    end
end
%musime vyzkouset vsechny mozne number-prvkove kombinace z n hracu
for number=2:n
    %funkce pro vyber number-prvkovych mnozin
    comb=nchoosek(1:1:n,number);
    %pocet number-prvkovych koalic
    [size1,~]=size(comb);
    %dale se postupuje analogicky
    for j=1:size1
        x=lb;
        for k=1:iteration
            %counter slouzi ke sledovani skutecnosti, ze uz mame spocitanou
            %hodnotu koalice
```

```
counter=0;
x0=x;
for q=1:n
    %alokoujeme pamet pro matici a vektor
    H=zeros(n);
    f=zeros(n,1);
    if ismember(q,comb(j,:)) && counter==0
        %vytvorime matici pro koalici
        for i=1:number
            H(comb(j,i),:)=b*ones(1,n);
            H(:,comb(j,i))=b*ones(n,1);
            f(comb(j,i))=-A+c(comb(j,i));
        end
        for i=1:number
            for m=1:number
                H(comb(j,i),comb(j,m))=2*b;
            end
        end
        %konec zadavani matice a vektoru pro koalici
        %zafixujeme vystupy outsideru
        eq1=eye(n);
        %vystupy clenu koalice jsou libovolne
        for m=1:n
            if ismember(m,comb(j,:))
                eq1(m,m)=0;
            end
        end
        eq2=x;
        for m=1:n
            if ismember(m,comb(j,:))
                eq2(m)=0;
            end
        end
        %vypocet
        [x,fval]=quadprog(H,f,[],[],eq1,eq2',lb,ub,[],options);
        %pridame jednicku ke counteru
        counter=counter+1;
    %pokud vypocet pro koalici uz byl v teto iteraci
    %proveden, tak se nedeje nic
    elseif ismember(q,comb(j,:)) && counter>0
    %optimalizace pro outsidery
    else
        H(q,:)=b*ones(1,n);
        H(:,q)=b*ones(n,1);
        H(q,q)=2*b;
        f=zeros(n,1);
        f(q)=-A+c(q);
        eq1=eye(n);
        eq1(q,q)=0;
        eq2=x;
        eq2(q)=0;
        x=quadprog(H,f,[],[],eq1,eq2',lb,ub,[],options);
    end
end
if norm(x-x0)<eps
    vystupy{number}(j,:)=x';
```

```
                v{number}(j,1)=abs(fval);
            break
            end
        end
    end
end
end
```

4. Aplikace

V aplikační části se budeme zabývat možnostmi modelování jednodenního chování trhu ropy. Hlavním cílem je vybudovaný teoretický model co nejvíce přiblížit realitě. Všechna uvažovaná data budou pouze přibližná, ale budou se opírat o skutečné údaje z roku 2015 [17].

4.1. Sestavení modelu

Na začátku budeme uvažovat trh ropy, na kterém je 15 hráčů: USA, Rusko, Saúdská Arábie, Irák, Írán, Čína, Kanada, Spojené Arabské Emiráty, Kuvajt, Brazílie, Venezuela, Mexiko, Nigérie, Angola a Norsko. Takže máme $N = \{1, ..., 15\}$, kde hráč 1 reprezentuje USA atd. dle výše uvedeného pořadí zemí.

K definování množin strategií jednotlivých hráčů použijeme následující tabulku:

i	Země	Produkce	ω_i
1	USA	9,415	10,357
2	Rusko	10,25	11,275
3	Saúdská Arábie	10,05	11,055
4	Irák	4,054	4,459
5	Írán	3,3	3,63
6	Čína	4,278	4,706
7	Kanada	3,677	4,045
8	SAE	2,82	3,102
9	Kuvajt	2,562	2,818
10	Brazílie	2,437	2,681
11	Venezuela	2,5	2,75
12	Mexiko	2,302	2,532
13	Nigérie	2,317	2,549
14	Angola	1,842	2,026
15	Norsko	1,61	1,771
$\sum$	Suma	63,414	69,755

Tabulka 4.1: Počáteční data pro model

Druhý sloupec reprezentuje průměrnou produkci ropy v jednotlivých zemích za rok 2015 v milionech barelů. Kapacitní omezení v třetím sloupci odhadneme jako o 10 procent navýšenou produkci. Množinu strategií jednotlivých zemí pak popíšeme jako uzavřeny interval $X_i = [0, \omega_i]$.

Dále je zapotřebí určit náklady na výrobu jednoho barelu ropy jednotlivých zemi v amerických dolarech: $C_i = c_i x_i$, kde

$$c = (36,2;\ 17,2;\ 9,9;\ 10,7;\ 12,6;\ 29,9;\ 41;\ 12,3;\ 8,5;\ 48,8;\ 23,5;\ 29,1;\ 31,6;\ 35,4;\ 36,1).$$

Odhadnutá inverzní funkce poptávky vypadá následovně: $p(X) = 308,55 - 4,1425X$, kde X je celkové množství ropy v milionech barelů, které bylo vyprodukováno za 1 den uvažovanými 15 zeměmi. Takže inverzní poptávková funkce už zohledňuje to, že neuvazujeme celý trh ropy, ale pouze jeho část. Na zbývající část se pohlíží jako na konstantu.

Ziskové funkce jednotlivých zemí pak vypadají následujícím způsobem:

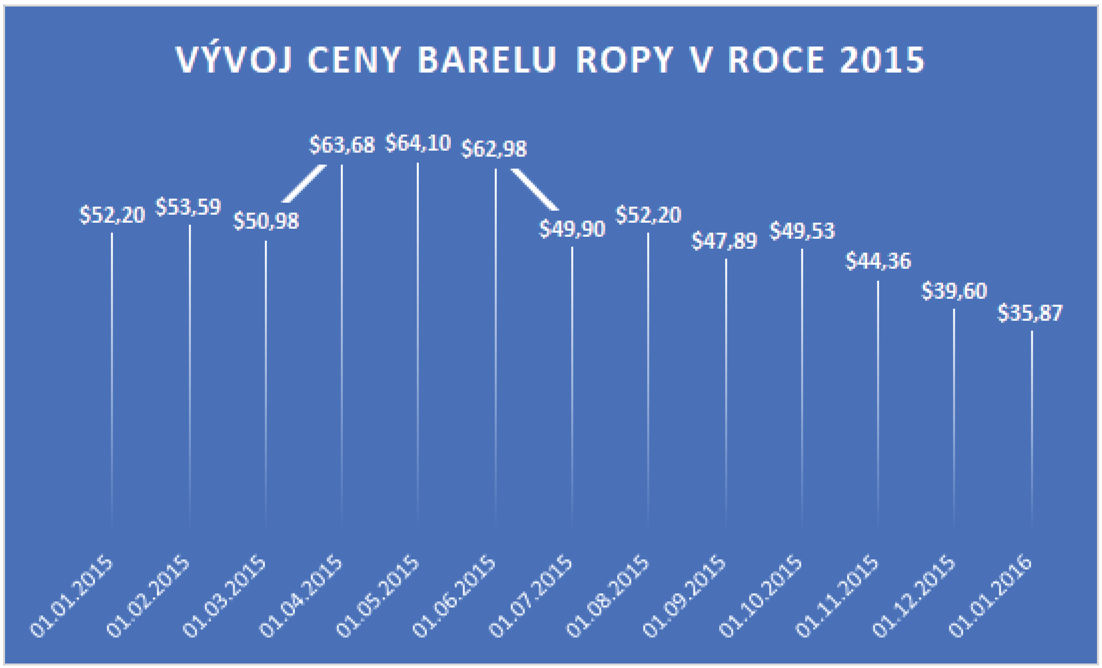
$$\pi_i(x) = (308,55 - 4,1425X)x_i - c_i x_i.$$

V tuto chvíli už jsou k dispozici všechny potřebné informace k sestavení hry ve tvaru γ-charakteristické funkce. Zřejmě existuje velké množství koalicí, které můžou vzniknout z 15 hráčů, ale funkčnost modelu budeme posuzovat podle toho, jak moc výsledná celková produkce ropy pro případ vzniku koalice odpovídající OPEC se shoduje s realitou. Pokud dostaneme uspokojivé výsledky, budeme považovat model za funkční a použijeme jej k popisu situaci na reálnem trhu ropy a zjednodušenému znázornění trhu ropy pro 4 hráče, které umožní grafickou reprezentaci výsledků.

4.2. Ladění modelu

4.2.1. Krok 1: Změna dolních mezí

Po provedení vypočtu získáme následující data: $X = 54,6335$. Hned je vidět docela značnou neshodu v celkovém množství produkce mezi modelem a realitou. Navíc na následujícím obrázku můžeme vidět, že v roce 2015 cena ropy kolísala přibližně mezi 35$ a 65$, ale náš model vrací cenu 82,2309$.



Obrázek 4.1: Vývoj ceny barelu v roce 2015

Takže ani z tohoto hlediska jej nemůžeme považovat za uspokojivý.

Avšak uvažovali jsme, že země můžou vůbec neprodukovat ropu, což v modelu právě nastává a není realistické. Proto budeme předpokládat, že každá země má stanovenou dolní mez pro produkci ropy, která se odvíjí od spotřeby ropy v této zemi, dovozu ropy do země a vývozu ropy ze země. Ke stanovení minimální úrovně produkce použijeme následující tabulku.

Všechny údaje jsou opět uvedené v milionech barelů za den.

i	Země	Produkce	Spotřeba	Import	Export	ω_i	ν_i
1	USA	9,415	19,53	8,567	1,162	10,357	8,474
2	Rusko	10,25	3,693	0,297	4,888	11,275	8,285
3	Saúdská Arábie	10,05	3,141	0	7,416	11,055	9,045
4	Irák	4,054	0,807	0	2,462	4,459	3,269
5	Írán	3,3	1,952	0,087	1,042	3,63	2,907
6	Čína	4,278	11,12	6,167	0,012	4,706	3,85
7	Kanada	3,677	2,406	0,581	3,21	4,045	3,309
8	SAE	2,82	0,744	0	2,637	3,102	2,538
9	Kuvajt	2,562	0,453	0	1,711	2,818	2,164
10	Brazílie	2,437	3,144	0,394	0,397	2,681	2,193
11	Venezuela	2,5	0,776	0	1,548	2,75	2,324
12	Mexiko	2,302	2,007	0,011	1,199	2,532	2,072
13	Nigérie	2,317	0,277	0	2,231	2,549	2,085
14	Angola	1,842	0,132	0	1,745	2,026	1,658
15	Norsko	1,61	0,218	0	1,255	1,771	1,473
$\sum$	Suma	63,414	50,40	16,105	32,915	69,755	55,645

Tabulka 4.2: Data pro ladění modelu

Poslední sloupec reprezentuje právě minimální množství produkce pro jednotlivé země, které bylo získáno následujícím způsobem:

$$\nu_i = \begin{cases} 0,9 * \text{Produkce}_i, \text{ jestliže } \text{Spotreba}_i - \text{Import}_i + \text{Export}_i > \text{Produkce}_i, \\ \text{Spotreba}_i - \text{Import}_i + \text{Export}_i, \text{ jinak }. \end{cases}$$

Teď zdůvodníme, proč byl použit právě takový postup pro stanovení minimálního množství produkce. Aby země uspokojila svoji potřebu ropy, musí minimálně pokrýt rozdíl mezi svojí vlastní spotřebou a importem ropy do země, ale ještě může exportovat ropu, takže je potřeba k předchozí hodnotě přičíst hodnotu exportu, na kterou budeme pohlížet jako na státem stanovenou normu vývozu ke splnění určitých ekonomických cílů. Avšak v modelu neuvažujeme, že země může čerpat ropu z dříve vytvořených rezerv, proto, pokud minimální produkce stanovena předchozím způsobem je větší než průměrná roční produkce, pak budeme předpokládat, že země čerpá ropu z rezerv, a proto odhadneme dolní mez analogicky tomu, jak jsme to již udělali pro výrobní kapacitu: budeme ji uvažovat jako 90 procent z průměrné produkce.

Takže pak máme model s $X_i = [\nu_i, \omega_i]$. Po provedení výpočtu obdržíme: $X = 60,1842$, což je číslo mnohem bližší ke skutečné produkci v roce 2015 než v předchozím případě. Dokonce výsledná cena modelu $59,2371\$$ spadá do přibližného pásma pohybování cen ropy v roce 2015. Tento výsledek už můžeme považovat za uspokojivý, ale nabízí se ještě jedna modifikace, která, i když můžeme pochybovat o její přirozenosti, přinese značné zlepšení.

4.2.2. Krok 2: Zohlednění cílů koalice

Další možnosti, jak zlepšit sestavený model a přiblížit jej k realitě, je zahrnout do modelu nejen maximalizaci zisku koalice ale také to, že koalice může mít další cíl spočívající v udržovaní pevně zvolené ceny za účelem stabilizace celkové situace na trhu. Takže budeme předpokládat, že koalice může, ale nemusí mít další zájem, který bude reprezentován jako konkrétně daná úroveň celkové výroby, kterou chce udržet, což se pak promítne do dalších omezení na výrobu členů koalice. Pak jde o maximalizaci zisku koalice prostřednictvím restrukturalizace výroby pro danou úroveň výstupu. Zřejmě může nastat takový případ, že koalice nedokáže svého cíle dosáhnout, pak ale budeme uvažovat, že se bude snažit k němu maximálně přiblížit. Předpokládejme, že pro náš konkrétní případ má OPEC za cíl udržet úroveň výstupů na hodnotě 62, pak takové omezení vypadá následovně:

$$\text{pro } S = \{3, 4, 5, 8, 9, 11, 13, 14\} : \sum_{i \in N} x_i = 62.$$

Po vypočtu dostaneme $X = 62$, což svědčí o tom, že koalice je natolik „silná“, že může dosáhnout svého cíle a uměle udržet cenu na úrovni $p(X) = 51,715$, která přibližně odpovídá průměrné ceně ropy v roce 2015.

Proto použijeme pravě poslední verzi našeho modelu a pomocí něj se pokusíme o interpretaci situace na trhu ropy v roce 2015 z pohledu kooperativní teorie her.

4.3. Interpretace aplikace výsledného modelu

Nejprve uvedeme výsledky modelu pro koalici odpovídající $|S| = 1$, $S = OPEC = \{3, 4, 5, 8, 9, 11, 13, 14\}$ a $S = N$. $v(OPEC) = 1148,219$, $v(N) = 3032$ a zbývající data jsou uvedena v následující tabulce.

i	Země	x_i, $\|S\| = 1$	$v(\{i\})$	x_i, $S = OPEC$	x_i, $S = N$
1	USA	8,474	119,212	8,474	8,474
2	Rusko	8,285	273,958	8,332	8,284
3	Saúdská Arábie	9,745	393,394	11,055	9,045
4	Irák	4,459	176,453	4,459	3,269
5	Írán	3,630	136,738	3,181	2,907
6	Čína	4,706	95,851	4,706	3,850
7	Kanada	3,309	30,673	3,309	3,309
8	SAE	3,102	117,779	3,102	2,538
9	Kuvajt	2,818	117,713	2,818	2,164
10	Brazílie	2,193	3,221	2,193	2,193
11	Venezuela	2,750	73,614	2,324	2,324
12	Mexiko	2,532	53,604	2,532	2,072
13	Nigérie	2,549	47,581	2,085	2,085
14	Angola	2,026	30,127	1,658	1,658
15	Norsko	1,771	25,093	1,771	1,473
$\sum$	Suma	62,349		62	55,645

Tabulka 4.3: Výsledky aplikace modelu

V tomto modelu hra určitě není konvexní, protože je porušena superaditivita. To se dá zjistit například dodatečnými výpočty pro $v(\{1\}) + v(\{4\}) > v(\{1,4\})$. Tahle skutečnost indikuje problém se vznikem a stabilitou velkého kartelu odpovídajícího monopolu. Což naprosto odpovídá realitě, protože v reálném světě neexistuje žádná mezinárodní organizace, která by měla monopolní postavení na trhu ropy.

Ale konkretně pro zjištěné hodnoty platí $v(OPEC) > \sum_{i \in OPEC} v(\{i\})$. To říká, že nemůžeme zamítat vznik koalice odpovídající OPEC. Tohle můžeme posuzovat jako další shodu modelu a reálného světa.

Další věc, která by mohla přispět k interpretaci výsledků, je velikost jádra. Ke zjištění tvaru jádra je lepší použít následující zjednodušený ukázkový příklad, který umožní grafickou reprezentaci jádra.

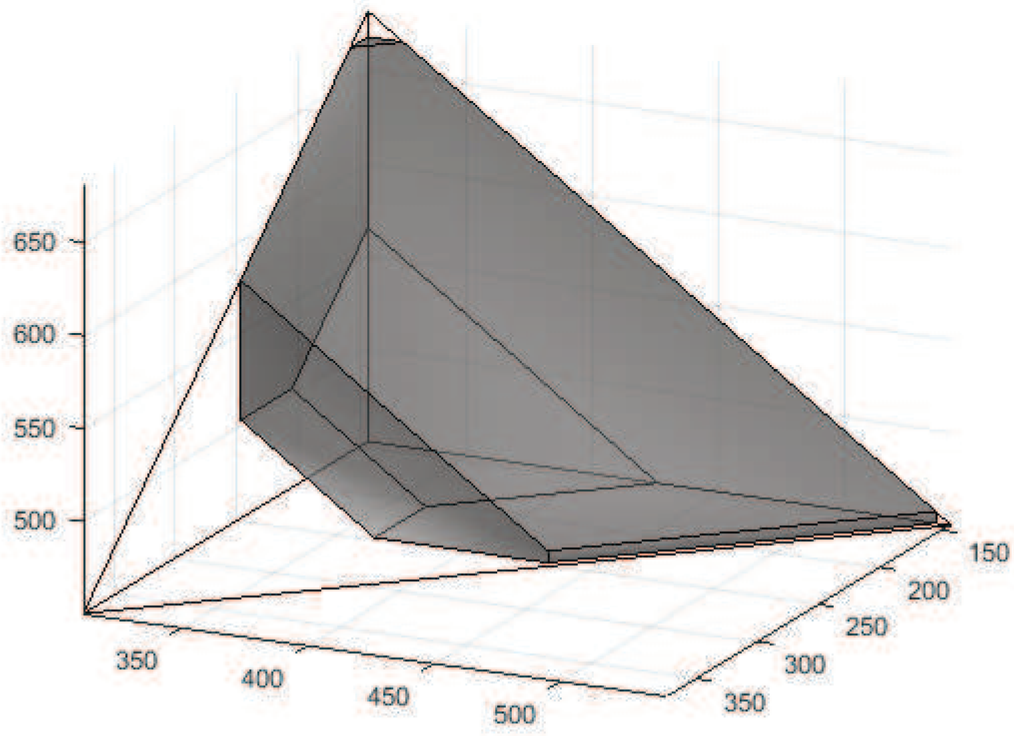
4.4. Ukázkový příklad

Příklad 4.4.87. Uvažujme kooperativní oligopolní hru $v_\gamma \in G_o^N$, která je asociovaná s oligopolní situací $(N, (\omega_i)_{i \in N}, (C_i)_{i \in N}, p)$, kde $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $\nu_i = (8,4735;\ 8,2845;\ 9,045;\ 3,269)$, $\omega = (10,3565;\ 11,275;\ 11,055;\ 4,4594)$, $C_i(x_i) = c_i x_i$, $c = (36,2;\ 17,2;\ 9,9;\ 10,7)$ a inverzní funkce poptávky je definována následovně $p(X) = 185,75 - 4,1425X$. Navíc pro koalici $S = \{3,4\}$ je stanoven výrobní cil $\sum_{i \in N} x_i = 32,3$. Po provedeni vypočtu a zaokrouhlování dostaneme

S	x_1	x_2	x_3	x_4	$v(S)$
{1}	8,4735	8,6643	10,4265	4,4594	143,1328
{2}	8,4735	8,6643	10,4265	4,4594	310,9771
{3}	8,4735	8,6643	10,4265	4,4594	450,34
{4}	8,4735	8,6643	10,4265	4,4594	189,0421
{1,2}	8,4735	8,2845	10,6164	4,4594	453,6611
{1,3}	8,4735	9,355	9,045	4,4594	583,9312
{1,4}	8,4735	9,0611	10,8233	3,269	301,0133
{2,3}	8,4735	8,2845	9,045	4,4594	814,4551
{2,4}	8,4735	8,2845	11,055	3,269	480,9948
{3,4}	8,4735	8,388	11,055	4,3835	645,6401
{1,2,3}	8,4735	8,2845	9,045	4,4594	1019,4
{1,2,4}	8,4735	8,2845	11,055	3,269	657,2
{1,3,4}	8,4735	9,9502	9,045	3,269	783,1
{2,3,4}	8,4735	8,2845	9,045	3,269	1078,5
{1,2,3,4}	8,4735	8,2845	9,045	3,269	1325,2

Tabulka 4.4: Výstupy koalic a γ-charakteristické funkce pro příklad 4.4.87

Pro tuto hru platí analogické vztahy jako v předchozím případě. Pokud se podíváme na jádro na následující stránce, tak zjistíme, že je relativně velké v poměru s množinou imputací. Navíc vidíme, že zisky Ruska a USA nemají podstatný vliv na určení konkretního bodu jádra. Hlavní záležitostí je, aby se mezi sebou domluvily Saúdská Arábie a Irák. To není problematické vzhledem k prospěšnosti jejich koalice pro členy. Takže i takový malý příklad se docela shoduje s realitou, protože indukuje podnět ke vzniku OPEC.



Obrázek 4.2: Jádro pro příklad 4.4.87

Závěr

V teto diplomové práci jsme se zabývali kooperativní teorií her a její aplikací pro Cournotův model oligopolu. Podrobně byla nastudována matematická a ekonomická teorie, která pak byla použita k vytvoření základního modelu sloužícího k popisováni průběhu rozhodovacího procesu firem na trhu. Důkladně byly prozkoumány a popsány vlastnosti kooperativních her odpovídajících zmíněnému modelu. Dále ten model byl aplikován na oligopolní situaci přiblíženou k reálnému trhu ropy. Nedílnou součástí práce je také algoritmus výpočtu hodnot charakteristické funkce.

Za hlavní přínos práce lze považovat věty 2.5.71 a 2.5.81, které jsou nejpodstatnějším výsledkem podkapitoly o konvexnosti.

Obě části první kapitoly byly věnovány základním pojmům a poznatkům. V první části byly vysvětleny poznatky z ekonomické teorie o oligopolech, které jsou potřebné z aplikačního a interpretačního hlediska. Druhá část povídala o hlavních definicích a větách kooperativní teorie her. Dohromady tyto části by měly tvořit ucelený text, který by měl sloužit jako základ pro zpracovaní naší problematiky.

Ve druhé kapitole byl popsán model, který byl použit pro definovaní kooperativních her ve tvaru γ-charakteristické funkce. Značná část druhé kapitoly je věnována vlastnostem těchto kooperativních her, které nejsou tak dobře známé jako vlastnosti her ve tvaru α- a β-charakteristických funkcí. Oproti zmíněným přístupům hry ve tvaru γ-charakteristické funkce zachovávají racionalitu outsideru v modelu. Odvodili jsme originální věty o monotonii a konvexnosti výsledných her. Tyto věty pak byly použity jako podklad pro interpretaci průběhu hry, která by měla poskytnout přehled o chovaní firem na Cournotovem trhu.

Třetí kapitola se hlavně skládá z programu, který byl použít k vypočtu hodnot charakteristické funkce. Ukázalo se, že algoritmus, na kterém je založen program, je vždy konvergentní pro uvažovány typ her. Bez tohoto programu by nebyla možná aplikace našeho přístupu na reálná data.

Čtvrtá a závěrečná kapitola se zabývala aplikací modelu na data z trhu ropy. Přímá aplikace ukázala potřebnost ladění modelu za účelem přiblížení výrobních podmínek realitě. Upravený model byl pak použít k popisu trhu ropy a generoval výsledky, které odpovídají realitě.

Tahle skutečnost svědčí o možném využití zvoleného postupu pro indikaci kartelů na různých trzích. Jako možné zlepšení modelu se nabízí větší přiblížení výrobních podmínek, například možnost vytvářet rezervy a čerpat z nich.

Z teoretického hlediska předmětem dalšího zkoumání může být hledaní obecnějších a jednodušších podmínek konvexnosti v maximálně obecném případě.

Literatura

[1] GILLES, Robert P. *The cooperative game theory of networks and hierarchies.* Heidelberg: Springer, c2010. Theory and decision library, v. 44. ISBN 978-3-642-05281-1.

[2] COURNOT, A. A. *Researches into the mathematical principles of the theory of wealth, 1838: With an essay, Cournot and mathematical economics and a Bibliography of mathematical economics.* New York: A. M. Kelley, 1971. ISBN 06-780-0066-2.

[3] BESANKO, David, Ronald R. BRAEUTIGAM a Michael GIBBS. *Microeconomics.* 4th ed. Hoboken, NJ: John Wiley, c2011. ISBN 978-0-470-56358-8.

[4] MANKIW, N. Gregory. *Principles of microeconomics.* 5th ed. Mason, OH: South--Western Cengage Learning, c2009. ISBN 978-0-324-58998-6.

[5] PELEG, Bezalel a Peter SUDHÖLTER. *Introduction to the theory of cooperative games.* 2nd ed. New York: Springer, c2007. ISBN 978-3-540-72944-0.

[6] SUDHÖLTER, Peter. The Modified Nucleolus: Properties and Axiomatizations. *International Journal of Game Theory.* 1997, **26**(2), 147-182. DOI: 10.1007/s001820050023. ISSN 0020-7276. Dostupné také z: http://www.springerlink.com/Index/10.1007/s001820050023

[7] SHAPLEY, Lloyd S. Cores of convex games. *International Journal of Game Theory.* 1971, **1**(1), 11-26. DOI: 10.1007/BF01753431. ISSN 0020-7276. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/BF01753431

[8] DRIESSEN, Theo S.H. a Holger I. MEINHARDT. Convexity of oligopoly games without transferable technologies. *Mathematical Social Sciences.* 2005, **50**(1), 102-126. DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2005.01.003. ISSN 01654896. Dostupné také z: https://-linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S016548960500020X

[9] CHANDER, Parkash a Henry TULKENS. The Core of an Economy with Multilateral Environmental Externalities. *Public goods, environmental externalities and fiscal competition.* Boston, MA: Springer US, 2006, 1990, 153-175. DOI: 10.1007/978-0-387-25534-7_10. ISBN 978-0-387-25533-0. Dostupné také z: http://-link.springer.com/10.1007/978-0-387-25534-7_10

[10] LARDON, Aymeric. The γ-core in Cournot oligopoly TU-games with capacity constraints. *Theory and Decision.* 2012, **72**(3), 387-411. DOI: 10.1007/s11238-011-9256-5. ISSN 0040-5833. Dostupné také z: http://link.springer.com/10.1007/s11238-011-9256-5

[11] OKUGUCHI, Kōji a Ferenc SZIDAROVSZKY. *The theory of oligopoly with multi--product firms.* 2nd rev. and enl. ed. New York: Springer, c1999. ISBN 35-406-5779-7.

[12] MIRÁS CALVO, Miguel Ángel a Estela Sanchez RODRÍGUEZ. *TUGlab - TUGlabExtended: Transferable utility game theory Matlab toolboxes* [online]. 2009 [cit. 2019-05-07]. Dostupné z: http://mmiras.webs.uvigo.es/TUGlab/TUGlab.html

[13] OWEN, Guillermo. *Game theory*. Fourth edition. Bingley: Emerald, 2013. ISBN 978-1781905074.

[14] ZHAO, Jingang. A β-Core Existence Result and Its Application to Oligopoly Markets. *Games and Economic Behavior*. 1999, **27**(1), 153-168. DOI: 10.1006/game.1998.0654. ISSN 08998256. Dostupné také z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0899825698906546

[15] BABICHENKO, Yakov. Fast Convergence of Best-Reply Dynamics in Aggregative Games. *Mathematics of Operations Research*. 2018, **43**(1), 333-346. DOI: 10.1287/moor.2017.0868. ISSN 0364-765X. Dostupné také z: http://pubsonline.informs.org/doi/10.1287/moor.2017.0868

[16] DINDOŠ, Martin a Claudio MEZZETTI. Better-reply dynamics and global convergence to Nash equilibrium in aggregative games. *Games and Economic Behavior*. 2006, **54**(2), 261-292. DOI: 10.1016/j.geb.2004.12.001. ISSN 08998256. Dostupné také z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0899825605000035

[17] The World Factbook. *Cia.gov* [online]. [cit. 2019-05-07]. Dostupné z: https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/index.html