Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2022 Štočková Tereza

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Soustavy lineárních rovnic

Bakalářská práce

Autor: Tereza Štočková

Studijní program: B1101

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělání
Společenské vědy se zaměřením na vzdělání

Vedoucí práce: RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Hradec Králové květen 2022

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Soustavy lineárních rovnic vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové 6.5.2022 Tereza Štočková

Anotace

ŠTOČKOVÁ, T. Soustavy lineárních rovnic. Hradec Králové, 2022. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Kühnová Jitka, RNDr. Ph.D.

Bakalářská práce se zabývá soustavami lineárních rovnic a jejich řešitelností v současnosti a v historii. Popisuje různé metody řešení soustav jako je Gaussova eliminační metoda, Gauss-Jordanova eliminační metoda, využití Cramerova pravidla či inverzní matice. První část je věnována objasnění pojmu soustavy lineárních rovnic a práce s nimi tak, jak je řešíme v dnešní době. Druhá část je zaměřena na historické poznatky k soustavám lineárních rovnic, jež se dochovali. Jsou zde řešeny příklady ze starověku a středověku. Úlohy se zabývají problematikou z běžného života, které lidé v této době řešili, převážně hospodářstvím.

Klíčová slova

Lineární rovnice, historie, úlohy, řešení rovnic, soustavy

Annotation

The bachelor thesis deals with systems of linear equations and their solvability in the present and in history. It describes various methods of solving systems such as Gaussian elimination method, Gauss-Jordan elimination method, use of Cramer's rule or inverse matrix. The first part is devoted to clarifying the concept of a system of linear equations and working with them as we solve them today. The second part is focused on historical knowledge of systems of linear equations that have been preserved. Examples from antiquity and the Middle Ages are solved here. The tasks deal with issues from everyday life - mainly the economy - that people dealt with at that time.

Keywords

Linear equation, history, tasks, solving equations, systems

Obsah

Úvod **13**

1 Lineární rovnice **14**

1.1 Maticový zápis soustavy 15

1.2 Řešení soustav lineárních rovnic 16

1.3 Metody řešení soustav lineárních rovnic 20

1.3.1 Gaussova eliminační metoda 20

1.3.2 Gaussova-Jordanova metoda 28

1.3.3 Cramerovo pravidlo 30

1.3.4 Metoda řešení soustav s regulární maticí soustavy pomocí inverzní matice 31

1.4 Metody řešení lineárních rovnic na 2. stupni ZŠ resp. SŠ 32

1.4.1 Metoda dosazovací 32

1.4.2 Metoda sčítací 33

1.4.3 Metoda srovnávací (komparační) 34

1.4.4 Metoda grafická 34

2 Lineární rovnice a jejich soustavy ve starověku **36**

2.1 Egypt (1850 př. n. l. – 600 př. n. l.) 36

2.1.1 Rovnice řešené chybným předpokladem 37

2.1.2 Rovnice řešené metodou dělení 38

2.1.3 Rovnice počítající množství obilí 38

2.2 Mezopotámie (1800 př. n. l. – 300 př. n. l.) 39

2.2.1 Tabulka YBC 4669 40

2.2.2 Starobabylonská tabulka YBC 4652 41

2.2.3 Soustava lineárních rovnic 42

2.3 Čína (přibližně 1300 př. n.l.) 44

2.3.1 8. kniha z traktátu Matematika v devíti kapitolách 47

3 Lineární rovnice a jejich soustavy ve středověku **53**

3.1 Indie (600 n. l. – 1400 n. l.) 53

Úloha o poslech 53

3.2 Islámské země (700 n. l. – 1600 n. l.) 54

3.3 Arménie a Gruzie 55

3.4 Evropa 56
Závěr 58
Seznam použité literatury 59
Použité symboly 60
Seznam obrázků 61

Úvod

Lineárními rovnicemi se zabývali již naši předci, první dochované sbírky úloh pochází nejspíše z 16. století před naším letopočtem. V této době řešili úlohy pomocí lineárních rovnic, aniž by postup takto pojmenovali. Začátky matematiky stály na pokusu a omylu, a tím vznikaly zcela nové metody.

Pro učitelskou praxi je nezbytně nutné znát již základy, tedy historii. Proto, abychom mohli učit a vysvětlovat novou látku žákům, je důležité učivu porozumět. Jak jinak můžeme pochopit základy matematiky a všeho kolem nás než znát historii toho, jak to všechno začalo? V dávné historii se matematika vyvíjela díky lidským potřebám, její vznik souvisel s praktickým využitím. Lidstvo se rozvíjelo a důležitou součástí tohoto rozvoje bylo zdokonalit matematickou gramotnost, především počty a geometrii pro praktické využití.

Bakalářská práce na téma soustavy lineárních rovnic se zabývá algebraickou rovnicí a přibližuje pojmy lineární rovnice, soustavy lineárních rovnic, problémy řešitelnosti a způsoby řešení daných rovnic a jejich soustav. Předpokládají se základní znalosti z teorie algebraických rovnic. První kapitola popisuje řešení soustav lineárních rovnic pomocí základních metod, jako jsou: Gaussova eliminační metoda, Gauss-Jordanova eliminační metoda, Cramerovo pravidlo a řešení soustav lineární rovnic pomocí inverzní matice. V této kapitole jsem převážně čerpala od Karla Rektoryse a ze skript Tatiany Gavalcové a Pavla Pražáka.

Druhá a třetí kapitola jsou již zaměřeny na historii lineárních rovnic. Práce se zabývají úlohami, jejichž řešení se dá získat pomocí soustav lineárních rovnic. Lineární rovnice se objevovaly už ve starém Egyptě a Mezopotámii. Jeden z největších pokroků řešení lineárních rovnic nastal ve staré Číně.

Jak již bylo zmíněno, cílem práce je vytvořit přehled různých metod řešení soustav lineárních rovnic a ukázat, jaké úlohy vedoucí na soustavy lineárních rovnic se řešily ve starověku a středověku a jakým způsobem se tehdy řešily a jakým se řeší nyní.

1 Lineární rovnice

Všechny rovnice i soustavy lineárních rovnic jsou uvažovány nad R.

DEFINICE 1

Lineární rovnicí o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme rovnici ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1.1}$$

kde $a_1, a_{2,} \ldots, a_n, b, x_1, \ldots, x_n$ jsou reálná čísla.

Poznámka:

Reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ se nazývají koeficienty rovnice (1.1), reálné číslo b se nazývá pravá strana rovnice, resp. volný, někdy též absolutní, člen rovnice (1.1).

DEFINICE 2

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazýváme soustavu

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_2 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \tag{1.2}$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$ jsou reálná čísla.

DEFINICE 3

Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ typu } (m, n) \text{ se nazývá matice soustavy (1.2).} \tag{1.3}$$

Matice

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad \textit{typu } (m, n+1) \textit{ se nazývá rozšířená} \qquad (1.4)$$

matice soustavy (1.2).

Vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *se nazývá vektor pravých stran.*

Poznámka:

Soustavu lineárních rovnic (1.2) můžeme také zapisovat ve tvaru

1. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$
2. Matici *(1.3)* lze psát ve tvaru $A = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,2,\dots,m}$ nebo pouze $A = (a_{ij})$.

1.1 Maticový zápis soustavy

Soustavu (1.2) lze přepsat do maticového tvaru s využitím maticového součinu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

nebo ji lze zapsat jako maticovou rovnici

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

kde tedy A je matice soustavy, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ je vektor pravých stran a $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je vektor neznámých soustavy (1.2).

Vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{b}$ můžeme chápat i jako matice. Pak zápis bude vypadat následovně

$$A \cdot X = B,$$

kde $X = \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Na soustavu (1.2) lze hledět jako na rovnost lineární kombinace sloupcových vektorů matice A a vektoru $\boldsymbol{b}$:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

což můžeme zapsat stručně ve tvaru

$$x_1 \cdot \boldsymbol{a_1} + x_2 \cdot \boldsymbol{a_2} + \ldots + x_n \cdot \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{b}.$$

Rozlišujeme dva typy soustav lineárních rovnic (1.2), a to podle vektoru **b**. Soustavy homogenní a nehomogenní.

Je-li $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} = (0, 0, \ldots, 0)^T$ hovoříme o **homogenní soustavě**, symbolicky ji zapisujeme:

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \qquad \text{nebo} \qquad A \cdot X = O, \text{ kde } O = \boldsymbol{o}$$

Je-li $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ pak hovoříme o **soustavě nehomogenní**, kterou lze zapsat symbolicky jako:

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o} \qquad \text{nebo} \qquad A \cdot X = B;\ B \neq O$$

1.2 Řešení soustav lineárních rovnic

DEFINICE 4

Řešením soustavy lineárních rovnic (1.2) rozumíme každou uspořádanou n-tici $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in R^n$*, pro kterou platí:*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}c_1 & + & a_{12}c_2 & + & \cdots & + & a_{1n}c_n & = & b_1, \\ a_{21}c_1 & + & a_{22}c_2 & + & \cdots & + & a_{2n}c_n & = & b_2, \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{m1}c_1 & + & a_{m2}c_2 & + & \cdots & + & a_{mn}c_n & = & b_m, \end{array}$$

tedy právě když pro libovolné $i = 1, 2, \ldots, m$ platí:

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i.$$

DEFINICE 5

Soustava lineárních rovnic se nazývá ***řešitelná*** *soustava, jestliže existuje alespoň jedno její řešení. Soustava lineárních rovnic se nazývá* ***neřešitelná*** *soustava, jestliže neexistuje žádné její řešení.*

Ekvivalentními úpravami soustav lineárních rovnic nazýváme následující úpravy:

- vzájemná výměna libovolných dvou rovnic soustavy
- vynásobením jedné rovnice soustavy nenulovým reálným číslem
- vynecháním rovnice, která je lineární kombinací ostatních rovnic
- přičtení k-násobku ($k \in R, k \neq 0$) jedné rovnice soustavy k jiné rovnici soustavy.

Jedná se o takové úpravy soustav rovnic, které nemění množinu řešení.

DEFINICE 6

Dvě soustavy lineárních rovnic n neznámých se nazývají ***ekvivalentní soustavy****, právě když mají stejné množiny řešení.*

DEFINICE 7

Nechť je dána matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n). ***Elementárními úpravami matice*** *A rozumíme kteroukoli z následujících úprav:*

- vzájemná výměna dvou řádků, resp. sloupců, matice A
- vynásobené některého řádku, resp. sloupce, matice A nenulovým prvkem z R
- přičtení k-násobku některého řádku, resp. sloupce, k jinému řádku, resp. sloupci, matice $A, k \in R, k \neq 0$.

DEFINICE 8

Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu (m, n), pak říkáme, že matice A je ve ***schodovitém tvaru****, jestliže pro její prvky platí:*

- je-li $n > 1$, pak $a_{21} = 0$
- je-li pro nějaké $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ je $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{ik} = 0$, potom též $a_{i+1,1} = a_{i+1,2} = \dots = a_{i+1,k+1} = 0$.

(Příklad 1)

Matice

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 2 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$$ je ve schodovitém tvaru.

(Příklad 2)

Matice

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 2 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$$ není ve schodovitém tvaru.

VĚTA 1

Každou matici lze pomocí elementárních řádkových úprav převést na schodovitý tvar.

DEFINICE 9

Řekneme, že matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) má hodnost r, existuje-li v matici A r lineárně nezávislých řádků a každý další řádek matice A je jejich lineární kombinací. Píšeme $h(A) = r$

Poznámka

(1) Nulový řádek matice je vždy závislý.
(2) Pokud jsou v matici dva stejné řádky, jeden je závislý na druhém.
(3) Hodnost matice je rovna počtu nezávislých řádků, proto hodnost matice A typu (m, n) je $\mathrm{h(A)} \leq \mathrm{m}$.
(4) Řádky jednotkové matice jsou nezávislé, proto její hodnost je rovna počtu jejich řádků.
(5) Hodnost schodovité matice je rovna početu jejich nenulových řádků.
(6) Dá se dokázat, že $\mathrm{h(A)} = \mathrm{h(A)^T}$

VĚTA 1 (Frobeniova věta)

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj. právě když

$$h(A) = h(B)$$

VĚTA 2

Nechť soustava lineárních rovnic (1.2) má řešení, $h(A)$ je hodnost matice soustavy A, $h(B)$ je hodnost rozšířené matice soustavy a n je počet neznámých. Potom platí:

1. Jestliže $h(A) = h(B) = n$, pak má soustava právě jedno řešení.
2. Jestliže $h(A) = h(B) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

Poznámka:

(1) Je zřejmé, že pokud $h(A) \neq h(B)$, pak soustava nemá řešení.
(2) Homogenní soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná. Matice soustavy a rozšířená matice soustavy se liší pouze sloupcem složeným jen z nul, tedy mají stejné hodnosti.
Homogenní soustava o n neznámých má:
a) právě jedno, tzv. triviální řešení $(0, 0, \dots, 0)$, právě tehdy když $h(A) = n$
b) nekonečně mnoho řešení, právě tehdy když $h(A) < n$.

(Příklad 3)

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Pak $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ jsou matice a rozšířená matice této soustavy.

Tedy $h(A) = h(B) = 3, n = 3$ a podle Frobeniovy věty má soustava právě jedno řešení.

(Příklad 4)

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tedy $n = 3$ a $h(A) = h(B) = 2 < 3$ a soustava má nekonečně mnoho řešení.

(Příklad 5)

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ & & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zvolená soustava nemá žádné řešení, protože $h(A) \neq h(B)$.

(Martin Král, 2011)

1.3 Metody řešení soustav lineárních rovnic

1.3.1 Gaussova eliminační metoda

Princip Gaussovy eliminační metody spočívá v převedení zadané soustavy lineárních rovnic na ekvivalentní soustavu, jejíž matice je ve schodovitém tvaru.

Nechť je dána soustava lineárních rovnic (1.2):

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_2 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

1. Předpokládejme, že číslo a_{11} je různý od nuly. Kdyby bylo číslo a_{11} rovno nule, tak můžeme zaměnit pořadí rovnic a na místo první rovnice vložíme rovnici, kde a_{i1} bude různé od nuly.
   První rovnici vynásobíme číslem $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ a přičteme ji k i-té rovnici pro $i = 2, 6, \dots, m$. V soustavě (1.2) tak eliminujeme neznámou $x_1$ze všech rovnic, kromě první. Získáme tím novou soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & a'_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m \end{array} \tag{1.6}$$

   Při úpravách soustavy rovnic (1.2) můžeme získat rovnici $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, ve které jsou všechny koeficienty u neznámých rovny nule.
   a) Jestliže také $b = 0$, pak je řešením této rovnice libovolná n-tice reálných čísel. Vynecháme-li tedy tuto rovnici ze soustavy (1.2), dostaneme soustavu, která má stejnou množinu řešení jako soustava (1.2), je tedy se soustavou (1.2) ekvivalentní.

b) Jestliže $b \neq 0$, pak tato rovnice nemá žádné řešení, a tedy soustava (1.2) není řešitelná.

2. Dále budeme eliminovat neznámou x_2 ze všech rovnic kromě první a druhé
3. Takto postupujeme analogicky až získáme soustavu ve tvaru

$$\begin{array}{ccccccccccccc} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \cdots & + & c_{1k}x_k & + & \cdots & + & c_{1n}x_n & = & d_1 \\ & & c_{22}x_2 & + & \cdots & + & c_{2k}x_k & + & \cdots & + & c'_{2n}x_n & = & d_2 \\ & & & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & & & c_{kk}x_k & + & \cdots & + & c_{kn}x_n & = & d_k \end{array}, \tag{1.7}$$

kde koeficienty $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{kk} \neq 0, 1 \leq k \leq m, k \leq n$.

Tedy počet rovnic k je nejvýše roven počtu neznámých n.

1. Je-li $n = k$, potom z poslední rovnice
$$c_{nn}x_n = d_n.$$
máme $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$.
Využijeme tzv. zpětnou substituci. Získanou hodnotu x_n dosadíme zpět do předposlední rovnice a zjistíme x_{n-1}, atd. Nakonec určíme hodnotu x_1. Soustava (1.7), tedy i soustava (1.2), má jediné řešení a tím je právě jedna n-tice reálných čísel.
2. Je-li $k < n$, tak za tzv. volné neznámé (parametry) $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ (v počtu $n - k$) lze dosadit libovolná reálná čísla a následovně, stejně jako v předchozím případě, přesně určíme neznámé $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1$ v soustavě (1.7). Neznámé $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1$ určujeme v závislosti na volných neznámých $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$. Protože za volné neznámé můžeme dosadit libovolná reálná čísla, má soustava (1.7), a tedy i soustava (1.2), nekonečně mnoho řešení.

Vztah, který vyjadřuje všechna řešení soustavy pomocí volných neznámých (parametrů) se nazývá **obecné řešení soustavy**. Dosadíme-li za parametry konkrétní reálná čísla, dostaneme jedno řešení, které nazýváme **partikulární řešení soustavy**.

Poznámka:

Při řešení soustav Gaussovou eliminační metodou můžeme využívat také rozšířenou matici soustavy. Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic odpovídají elementárním řádkovým operacím této matice.

To znamená, že rozšířenou matici soustavy upravíme elementárními řádkovými operacemi na matici ve schodovitém tvaru a z ní již postupně vyjádříme řešení.

(Příklad 6)

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 3 \end{array}$$

Rozšířenou matici soustavy upravíme na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 3 & 6 & 12 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & -11 & -19 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & -11 & -19 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{array}\right)$$

Vidíme, že $h(A) = h(B) = n = 3$, tedy soustava má právě jedno řešení.

Poslední řádek matice představuje rovnici

$$21x_3 = 63, \text{ tedy } x_3 = 3.$$

Z druhého řádku po dosazení za neznámou x_3 dostáváme

$$2x_2 = -19 + 11 \cdot 3 = 14, \text{ tedy } x_2 = 7.$$

Nakonec z prvního řádku matice po dosazení za neznámé x_3, x_2 máme

$$x_1 = 12 - 6 \cdot 3 - 3 \cdot 7 = -27.$$

Soustava má jediné řešení $(-27, 7, 3)$.

(Příklad 7)

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 10x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 8x_1 & - & 6x_2 & + & 14x_3 & = & 0 \end{array}$$

Rozšířenou matici soustavy upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 10 & -6 & 4 & 5 \\ 8 & -6 & 14 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & 5 \\ 0 & -2 & 18 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

Je zřejmé, že $h(A) = 2, h(B) = 3$, tj. $h(A) \neq h(B)$ a podle Frobeniovy věty soustava nemá řešení.

(Příklad 8)

Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 10x_2 & - & 29x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 9x_2 & - & 24x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(RNDr. Světla Jílková, CSc. A kol., 1987, str. 63; 3.7)

Rozšířenou matici soustavy upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -10 & -29 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -9 & -24 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -15 & -39 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -26 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tedy $n = 4$ a $h(A) = 2$. Soustava má nekonečně mnoho řešení s dvěma reálnými neznámými.

Upravenou matici na schodovitý tvar převedeme zpět na soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 5x_2 & + & 13x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Položíme

$$x_3 = t, x_4 = u; t, u \in R$$

Z poslední rovnice vyjádříme neznámou x_2:

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_2 & = & -13t & - & u \\ x_2 & = & -\dfrac{13}{5}t & - & \dfrac{1}{5}u \end{array}$$

Z první rovnice vyjádříme neznámou x_1:

$$x_1 = -x_2 - 2t - u = -\left(-\frac{13}{5}t - \frac{1}{5}u\right) - 2t - u = \frac{3}{5}t - \frac{4}{5}u$$

Řešením je množina M všech uspořádaných čtveřic reálných čísel

$M = \left\{\left(-\frac{13}{5}t - \frac{1}{5}u, \frac{3}{5}t - \frac{4}{5}u, t, u\right); t, u \in R\right\}$.

(Příklad 9)

Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

(RNDr. Světla Jílková, CSc. A kol., 1987, str. 63; 3.7)

Rozšířenou matici soustavy upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Matici upravenou na schodovitý tvar převedeme zpět na soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Z poslední rovnice vyjádříme neznámou x_2:

$$x_2 = -7x_3 = 7 \cdot 0 = 0$$

Z poslední rovnice vyjádříme neznámou x_1:

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 = -2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$$

Protože $h(A) = n = 3$, má podle poznámky za Větou 2 soustava jediné triviální řešení $(0, 0, 0)$.

(Příklad 10)

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 11x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 2 \end{array}$$

Rozšířenou matici soustavy upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 11 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{crr|r} 1 & 6 & 11 & 2 \\ 0 & -21 & -42 & -7 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{crr|r} 1 & 6 & 11 & 2 \\ 0 & -21 & -42 & -7 \\ 0 & -12 & -24 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{crr|r} 1 & 6 & 11 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{crr|r} 1 & 6 & 11 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tedy $n = 3$ a $h(A) = h(B) = 2 < n$. Soustava má nekonečně mnoho řešení s jednou volnou neznámou.

Řešení určíme ze soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 11x_3 &= 2 \\ 3x_2 + 6x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Položíme

$$x_3 = t, t \in R.$$

Tedy

$$3x_2 = 1 - 6t$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - 2t$$

a

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &= 2 - 11t \\ x_1 + 6 \cdot \left(\frac{1}{3} - 2t\right) &= 2 - 11t \\ x_1 &= -t \end{aligned}$$

Řešením soustavy je množina M všech uspořádaných trojic reálných čísel

$M = \left\{\left(-t, \frac{1}{3} - 2t, t\right); t \in R\right\}$.

(Příklad 11)

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & -2 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & -3 \end{array}$$

(RNDr. Bohumila Černá, 1987, str. 104; 14)

Rozšířenou matici soustavy upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & 14 & 2 & -6 \\ 0 & -5 & -8 & 18 & 6 & -14 \\ 0 & -3 & -4 & 6 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&3&-4&-1&3\\0&-5&-3&4&4&2\\0&0&-7&10&-2&-8\\0&0&-5&14&2&-16\\0&0&11&-18&22&36\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&3&-4&-1&3\\0&-5&-3&4&4&2\\0&0&-7&10&-2&-8\\0&0&0&48&24&-72\\0&0&0&-16&132&164\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&3&-4&-1&3\\0&-5&-3&4&4&2\\0&0&-7&10&-2&-8\\0&0&0&2&1&-3\\0&0&0&-4&33&41\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&3&-4&-1&3\\0&-5&-3&4&4&2\\0&0&-7&10&-2&-8\\0&0&0&2&1&-3\\0&0&0&0&35&35\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&3&-4&-1&3\\0&-5&-3&4&4&2\\0&0&-7&10&-2&-8\\0&0&0&2&1&-3\\0&0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

Upravenou matici na schodovitý tvar převedeme zpět na soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccccc}x_1&+&2x_2&+&3x_3&-&4x_4&-&x_5&=&3\\&-&5x_2&-&3x_3&+&4x_4&+&4x_5&=&2\\&&&-&7x_3&+&10x_4&-&2x_5&=&-8\\&&&&&&2x_4&+&x_5&=&-3\\&&&&&&&&x_5&=&1\end{array}$$

Hodnotu neznámé x_5 dosadíme do čtvrté rovnice a vyjádříme x_4 :

$$\begin{array}{ccccc}2x_4&+&x_5&=&-3\\2x_4&+&1&=&-3\\&&x_4&=&-2\end{array}$$

Získané hodnoty neznámých x_5 a x_4 dosadíme do třetí rovnice:

$$\begin{array}{ccccccc}-7x_3&+&10x_4&-&2x_5&=&-8\\-7x_3&+&10\cdot(-2)&-&2\cdot 1&=&-8\\&&&&x_3&=&-2\end{array}$$

Analogicky postupujeme dále:

$$\begin{array}{ccccccccc}-5x_2&-&3x_3&+&4x_4&+&4x_5&=&2\\-5x_2&-&3\cdot(-2)&+&4\cdot(-2)&+&4\cdot 1&=&2\\&&&&&&x_2&=&0\end{array}$$

Z první rovnice získáme hodnotu neznámé x_1:

$$\begin{array}{ccccccccccc}x_1&+&2x_2&+&3x_3&-&4x_4&-&x_5&=&3\\x_1&+&2\cdot 0&+&3\cdot(-2)&-&4\cdot(-2)&-&1\cdot 1&=&3\\&&&&&&&&x_1&=&2\end{array}$$

Soustava má jediné řešení $(2, 0, -2, -2, 1)$.

(Příklad 12)

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \end{array}$$

(RNDr. Bohumila Černá, 1987, str. 104; 17)

Rozšířenou matici soustavy upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Vidíme, že $h(A) = 3$ a $h(B) = 4$, tedy podle Frobeniovy věty soustava nemá řešení.

(Příklad 13)

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & -1 \end{array}$$

(RNDr. Bohumila Černá, 1987, str. 104; 22)

Rozšířenou matici soustavy upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Je $h(A) = h(B) = 4 < n$, a tedy soustava má nekonečně mnoho řešení.

Upravenou matici na schodovitý tvar převedeme zpět na soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & & & = & 1 \\ & & -5x_2 & - & 4x_3 & - & 5x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ & & & & -3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & -2 \\ & & & & & & 2x_4 & + & x_5 & = & -2 \end{array}$$

Zvolíme volnou neznámou:

$$x_5 = t, t \in R$$

Ze čtvrté rovnice vyjádříme hodnotu x_4:

$$\begin{aligned} 2x_4 + t &= -2 \\ 2x_4 &= -2 - t \\ x_4 &= -1 - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice vyjádříme hodnotu x_3:

$$\begin{aligned} -3x_3 + 2(-1 - \frac{t}{2}) + t &= 1 \\ -3x_3 &= -2 + 2 + t - t \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme hodnotu x_2:

$$\begin{aligned} -5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 &= 2 \\ -5x_2 - 4 \cdot 0 + 3 \cdot (-1 - \frac{t}{2}) - x_5 &= 2 \\ -5x_2 &= 5 + \frac{5}{2}t \\ x_2 &= -1 - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme hodnotu x_1:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3 \cdot (-1 - \frac{1}{2}t) + 5 \cdot 0 - 4 \cdot (-1 - \frac{1}{2}t) &= 1 \\ x_1 &= -\frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Řešením je množina M

$$M = \left\{(-\frac{1}{2}t, -1 - \frac{1}{2}t, 0, -1 - \frac{1}{2}t, t); t \in R\right\}$$

1.3.2 Gaussova-Jordanova metoda

DEFINICE 7

Řekneme, že matice ve schodovitém tvaru je v normovaném schodovitém tvaru, právě když vedoucí prvek každého řádku (první nenulový prvek v řádku) je roven jedné a všechny prvky nad vedoucími prvky jsou nulové.

Gaussova-Jordanova metoda je postup řešení, který vychází z Gaussovy eliminační metody, s tím rozdílem, že se zde eliminují i prvky nad diagonálou. Rozšířenou matici soustavy tedy musíme převést na normovaný schodovitý tvar.

(Příklad 14)

Řešte soustavu rovnic Gauss-Jordanovou metodou:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 3 \end{array}$$

Řešení.

Stejně jako u Gaussovy eliminační metody nejprve rozšířenou matici soustavy, upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 12 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & -11 & -19 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & -11 & -19 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & -11 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Dále rozšířenou matici soustavy upravíme tak, abychom získali na místě původní matice soustavy matici jednotkovou.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & -11 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Nyní již jednoduše nalezneme řešení dané soustavy:

$$x_1 = -27$$
$$x_2 = 7$$
$$x_3 = 3$$

Soustava má jediné řešení $(27, 7, 3)$.

1.3.3 Cramerovo pravidlo

VĚTA 3

Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_2 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array} \tag{1.8}$$

jejíž matice soustavy A je regulární. Pak má soustava jediné řešení

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a platí:

$$x_i = \frac{det\ A_i}{det\ A}\ pro\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde matice A_i vznikne z matice A, nahradíme-li i-tý sloupec sloupcem pravých stran, tedy

$$det\ A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Příklad 15)

Soustavu lineárních rovnic řešme Cramerovým pravidlem:

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

Řešení.

Determinant matice soustavy A je roven $det\ A = 12 \neq 0$. Pak podle Cramerova pravidla dostáváme:

$$x_1 = \frac{1}{12} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{24}{12} = 2,$$

$$x_2 = \frac{1}{12} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{24}{12} = -2,$$

$$x_3 = \frac{1}{12} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = \frac{36}{12} = 3.$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice $(2, -2, 3)$

(Gavalcová, Pražák, 2004, str. 69)

1.3.4 Metoda řešení soustav s regulární maticí soustavy pomocí inverzní matice

Máme-li soustavu lineárních rovnic, víme, že ji lze zapsat v maticovém tvaru

$A \cdot X = B$ (viz. kapitola 1.1).

Je-li matice soustavy A regulární, vyjádříme pomocí inverzní matice k matici A z maticové rovnice neznámou matici X. Tedy obě strany rovnice vynásobíme zleva inverzní maticí A^{-1}. Násobení matic není komutativní, proto je důležité dodržet násobení zleva. Získáme

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ pak}$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Pokud-li budeme mít rovnici typu $X \cdot A = B$, pak podstata řešení bude stejná, pouze budeme násobit obě strany maticové rovnice maticí A^{-1} zprava. Dostaneme

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

což znamená, že

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Stejně tak, jako v předchozím případě využijeme pravou stranu v získání řešení rovnice.

(Příklad 16)

Řešte soustavu rovnic pomocí užití inverzní matice:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 3 \end{array}$$

Soustavu můžeme zapsat ve tvaru $A \cdot X = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Z rovnice si vyjádříme X:

$$A \cdot X = B \quad / \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Vypočítáme např. Jordanovou metodou matici inverzní A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 12 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 12 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 6 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 12 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{15}{7} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{22}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{11}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{array}\right)$$

Provedeme násobení matic $A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{17}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{15}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{11}{21} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = (-27, 7, 3)$$

Řešení**:**

$$X = \begin{pmatrix} -27 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (-27, 7, 3).$$

1.4 Metody řešení lineárních rovnic na 2. stupni ZŠ resp. SŠ

Budeme se zabývat pouze soustavami dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Sčítací i dosazovací metodu můžeme použít i u soustav tří lineárních rovnic se třemi neznámými. Vždy je hlavním cílem eliminovat množství neznámých a dostat se k jedné rovnici o jedné neznámé.

1.4.1 Metoda dosazovací

Metoda dosazovací je postavena na principu, že z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou vyjádření dosadíme ji do rovnice druhé. Získáme tak jednu lineární rovnici o jedné neznámé, ze které vyjádříme druhou neznámou.

(Příklad 17)

Řešte soustavu rovnic dosazovací metodou.

$$\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ 5x + y &= -3 \end{aligned}$$

Vyjádříme neznámou y z první rovnice:

$$y = 2x + 4$$

y dosadíme do druhé rovnice a získáme rovnici pro neznámou x a pak také hodnotu neznámé x.

$$\begin{aligned} 5x + 2x + 4 &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} &y = 2 \cdot (-1) + 4 \\ &y = 2 \end{aligned}$$

a řešením dané soustavy je dvojice $(-1{,}2)$.

1.4.2 Metoda sčítací

Při využívání sčítací metody využíváme ekvivalentních úprav soustav rovnice (viz. kapitola 1.2). Jednu, či obě rovnice vynásobíme vhodným násobkem tak, aby po sečtení obou rovnic zůstala pouze jedna neznámá. Následný krok opět vede na řešení jedné lineární rovnice o jedné neznámé.

(Příklad 18)

Řešte soustavu rovnic sčítací metodou.

$$\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ 5x + y &= -3 \end{aligned}$$

Řešení**.**

Sečteme první a druhou rovnici a získáme jednu rovnici o jedné neznámé x:

$$7x = -7$$

$$x = -1$$

Získanou hodnotu x dosadíme do jedné z rovnic ze zadání:

$$2 \cdot (-1) - y = -4$$

$$y = 2$$

Tedy řešením dané soustavy je dvojice $(-1{,}2)$.

1.4.3 Metoda srovnávací (komparační)

Ve srovnávací metodě, vyjádříme z obou rovnic stejnou neznámou a z pravých stran tohoto vyjádření sestavíme rovnici o jedné neznámé.

(Příklad 19)

Řešte soustavu rovnic srovnávací metodou.

$$2x - y = -4$$
$$5x + y = -3$$

Řešení.

Z obou rovnic vyjádříme neznámou y.

$$y = 4 + 2x$$
$$y = -3 - 5x$$

Obě vyjádření srovnáme:

$$4 + 2x = -3 - 5x$$
$$x = -1$$

Dopočítáme hodnoty neznámé y.

$$2 \cdot (-1) - y = -4$$
$$y = 2$$

Tedy řešením dané soustavy je dvojice $(-1{,}2)$.

1.4.4 Metoda grafická

Při využití grafické metody z obou rovnic vyjádříme neznámou y, získáme tak rovnice dvou přímek. Vytvoříme si soustavu souřadnic, do níž zaneseme grafy obou přímek. Mohou nastat tři situace:

- Přímky jsou různoběžné – soustava má jedno řešení
- Přímky jsou rovnoběžné totožné – soustava má nekonečně mnoho řešení
- Přímky jsou rovnoběžné různé – soustava nemá řešení

(Příklad 20)

Řešte soustavu rovnic grafickou metodou.

$$2x - y = -4$$
$$5x + y = -3$$

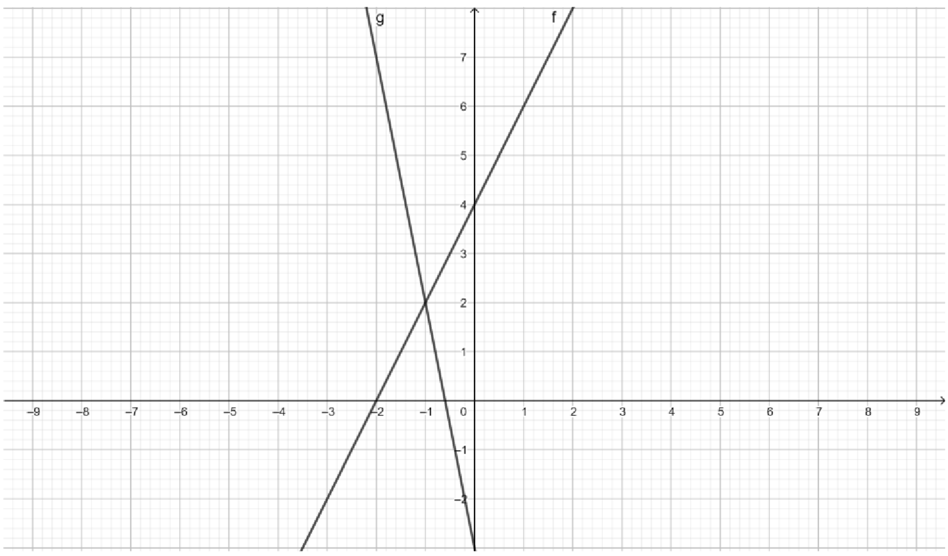
Řešení.

Vyjádříme neznámou y z obou rovnic.

$$y = 4 + 2x$$
$$y = -3 - 5x$$

Každá z rovnic je rovnicí právě jedné přímky.

Do soustavy souřadnic znázorníme grafy obou přímek.



Obrázek 1 Grafické řešení příkladu 17

Přímky jsou různoběžné, to znamená, že soustava má pouze jedno řešení. Řešením jsou souřadnice průsečíku obou přímek, tedy řešením dané soustavy je dvojice $(-1,2)$.

2 Lineární rovnice a jejich soustavy ve starověku

Dějiny matematiky, o kterých se v dnešní době hovoří a z nichž se vzděláváme začínají tam, kde vzniklo „písmo". Počátky písma v Egyptě zaznamenáváme na konci předdynastické doby, na konci čtvrtého tisíciletí př. n. l. První snahy o písmo byli na dřevo, kůži, tesání do kamene apod.

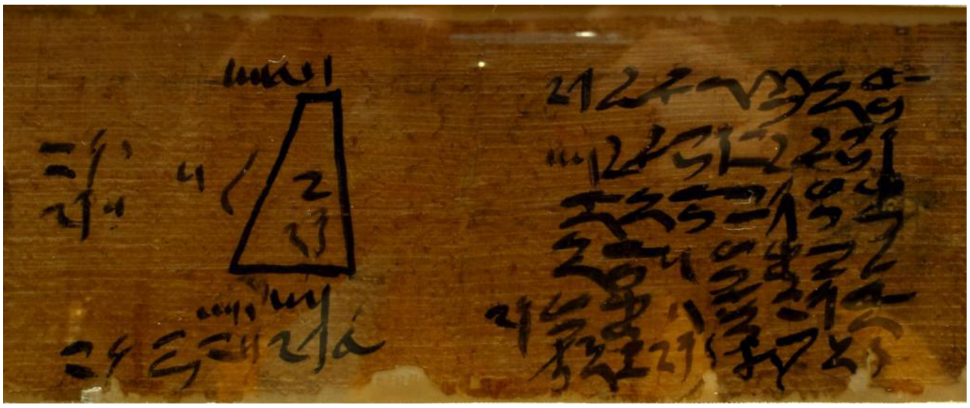
2.1 Egypt (1850 př. n. l. – 600 př. n. l.)

Nejstarší dochovanou sbírkou zabývající soustavami lineárních rovnic je Rhindův papyrus (Obrázek 2). Jedná se o nejrozsáhlejší matematický text tvořený 87 matematickými úlohami s návody a řešením. Rhindův papyrus byl sepsán v 16. stol. př. n. l. egyptským písařem Ahmosem. Nalezen byl v Thébách v polovině 19. století. (Bečvář a kol., 2003)

Moskevský papyrus (Obrázek 3) byl sepsán za 13. dynastie a jedná se o druhý největší staroegypstký spis s matematickou tématikou složený z 11 listů a 9 fragmentů. Spis pochází z pohřebiště v Dra Abú en-Naga, oblast dnešního města Luxor. (Vymazalová, 2006, str. 75)

Úlohy vedoucí na lineární rovnice se nacházejí zejména v Rhindově a Moskevském papyru. Řeší se metodou chybného předpokladu i přímým dělením. Především se jedná o příklady na výpočet neznámého množství, které je zadáno danou podmínkou. Rhindův papyrus je jediným zdrojem, ve kterém se nachází více způsobů řešení rovnic s jednou neznámou. Neznámá byla označována jako acha. (Bečvář a kol., 2003)

Obrázek 2 Část Rhidova papyru



Obrázek 3 Část Moskevského papyru

2.1.1 Rovnice řešené chybným předpokladem

Úloha R26 z Rhindova papyru:

Příklad týkající se neznámého množství, ke kterému je přidána jeho část vyjádřená kmenným zlomkem. Jedná se o úlohy typu

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot x = b. \tag{2.1}$$

Dnes bychom takovou úlohu zapsali např. následující rovnicí:

$$x+\frac{1}{4}\cdot x = 15$$

Příklad R26 je řešen metodou chybného předpokladu a ukazuje se na něm, jak takovéto úlohy řešit.

Řešení získáme tak, že přidáme $\frac{1}{k}$ z neznámého množství k němu samému tak, aby vyšlo b. Hodnota k se zvolí za x, takže levá strana rovnice je rovna $k+1$. Zatímco skutečná hodnota x je rovna k $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{k+1}}$.

$$x+\frac{1}{4}\cdot x = 15$$
$$4+\frac{1}{4}\cdot 4 = 4+1 = 5$$
$$\frac{15}{5} = 3$$
$$4\cdot 3 = 12 = x$$
$$12+\frac{1}{4}\cdot 12 = 12+3 = 15$$

Postup lze vyjádřit vztahem $x = 4\cdot\frac{15}{5}$.

(Vymazalová, 2006)

2.1.2 Rovnice řešené metodou dělení

Při takovémto postupu řešení dochází k dělení pravé strany rovnice násobkem neznámé. K rovnici (2.1) bude metoda dělení vypadat následovně:

$$b \div \left(1 + \frac{1}{k}\right) = x.$$

Příklad z Moskevského papyru.

M19:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot x + 4 = 10$$
$$10 - 4 = 6$$
$$1 \div \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$
$$6 \cdot \frac{2}{3} = 4 = x$$

Rovnici nejprve upravíme tak, aby na levé straně byl pouze násobek neznámé. V druhém kroku se pravá strana rovnice vydělí tímto násobkem. Dělení je přes vyjádření poměru násobku neznámé vůči jedné. (Vymazalová, 2006)

M25:

$$2x + x = 9$$
$$x + 2x = 3x$$
$$9 \div 3 = 3 = x$$

Zde se jedná o velice hezky zadanou rovnici, takže je možné snadno sečíst násobky neznámé a vydělit jimi pravou stranu rovnice. (Vymazalová, 2006)

2.1.3 Rovnice počítající množství obilí

Zde se jedná o úlohy, které také vedou na rovnice o jedné neznámé, jsou zadány jako slovní úlohy. Tyto příklady sloužili zároveň i k procvičení převodu jednotek.

Obilí se odměřovalo pomocí měřice. Zadání je formulováno rovnicí $k \cdot x + \frac{1}{b} \cdot x = 1$

Rovnice se řešili obdobně, jako příklady výše a to dělením $1 \div \left(k + \frac{1}{b}\right)$. Jediný rozdíl ve výpočtu je ve zkoušce, kdy se nejprve provede dosazení výsledku do zadaného příkladu a poté se výpočet zkoušky opakuje ještě v hodnotách systému měřice (v hodnotách *ro* a poté ve zlomcích Horova oka). (Vymazalová, 2006)

R35:

$$3x + \frac{1}{3} \cdot x = 1$$

$$1 \div \left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = x$$

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\right) = 1$$

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) \cdot 320 \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\right) = 96 \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\right) = 320 \text{ ro}$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + 1\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\right) = 1\, měřice$$

Jsou zde provedeny tři zkoušky. V prvním kroku se provede dosazení výsledku do zadání a dojde k ověření správnosti výsledku. Druhá část zkoušky pracuje s hodnotou *ro*, kdy $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ odpovídá hodnotě 96 *ro*. V poslední zkoušce je zakomponovaný výpočet pomocí jednotky měřice, hodnota x je v tomto příkladu rovna $\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ měřice +1 *ro*. (Vymazalová, 2006)

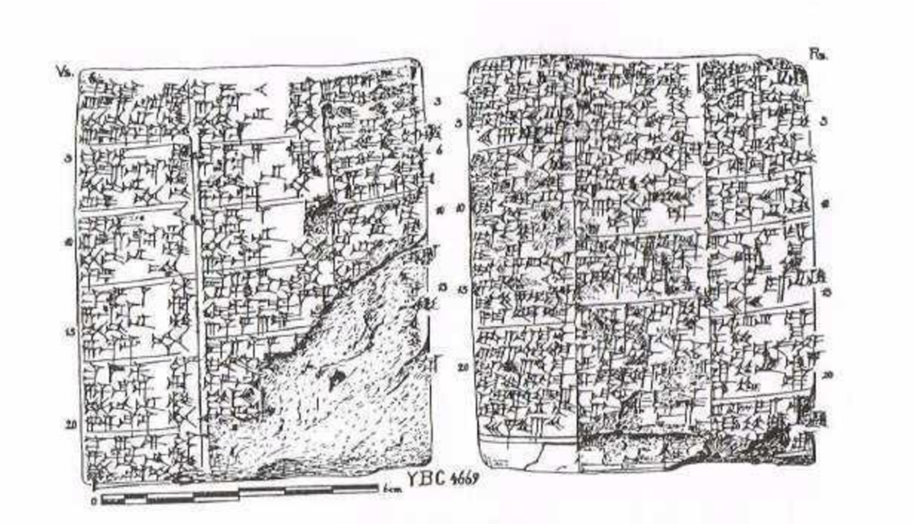
2.2 Mezopotámie (1800 př. n. l. – 300 př. n. l.)

„Na přelomu čtvrtého a třetího tisíciletí př. n. l. se v Mezopotámii zrodilo jedno z nejstarších písem světa.“ (Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003, str. 187) Vznik tohoto písma je považován za dar bohů a je spojen s národem Sumerů. Písmo bylo obrázkové, jednalo se o snadné útvary, rovné a oblé čáry, tzv. *piktogramy*, které byli tvořeny do měkké vlhké hlíny. (Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003)

Příklady vedoucí na lineární rovnice a soustavy lineárních rovnic se v Mezopotámii řešili už v období Chammurabiho (asi 1792 až 1750 př. n. l.). V této době se využívala geometrická terminologie, byli zde nedostatky v matematické symbolice. Neznámé veličiny se označovali: *délka, šířka, výška, hloubka*. Součin dvou neznámých se označoval jako *plocha, obsah, pole, šířka-délka, čtverec délky* nebo *čtverec šířky*, a součin tří neznámých *objem*. Není dodržován zákon homogenity, tzn. že v úlohách se sčítají délky (*uš*), šířky (*sag*), obsahy, objemy a bezrozměrné konstanty.

Poznámka k příkladům: čísla byla zapisována v šedesátkové soustavě.

2.2.1 Tabulka YBC 4669



Obrázek 4 Tabulka YBC 4669

„Na tabulce YBC 4669 (Obrázek 4) nalezneme úlohu: $\frac{2}{3}$ ze $\frac{2}{3}$ a (1) bàn přidal jsem, výsledek byl $\frac{1}{2}$ ječmene. Jaké bylo původní množství ječmene? (3) pi ječmene je původní množství?“ (Neugebauer 1945; In Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003, str. 257)

„Úlohu můžeme zapsat rovnicí

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x + 1 = \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{4}{9} \cdot x = 1$$

$$\frac{1}{18} \cdot x = 1$$

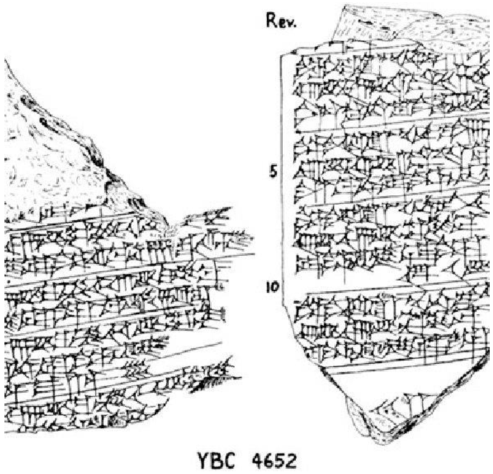
$$x = 18$$

Výsledek je 18 bàn, tj. 3 pi.

Poznámka: *1 pi = 6 bàn*“ (Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003, str. 257)

2.2.2 Starobabylonská tabulka YBC 4652

Starobabylonská tabulka YBC 4652 obsahuje sbírku příkladů vedoucí na lineární rovnice, je složena z 22 příkladů, ale pouze 11 se jich částečně dochovalo. (Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003)



Obrázek 5 Tabulka YBC 4652

Příklad 1: Sedmý příklad ze starobabylonské tabulky YBC 4652

„Nalezl jsem kámen, ale nemám jeho hmotnost. Poté, co jsem přidal $\frac{1}{7}$ a ještě $\frac{1}{11}$ toho všeho, je to 1 mina. Jaká byla původní hmotnost kamene? Původní hmotnost kamene byla $\frac{2}{3}$ mina, 8 gin a 22 a $\frac{1}{2}$ še.

Poznámka: 1 mina = 60 gin, 1 gin = 180 še." (Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003, str. 258)

Úlohu lze zapsat rovnicí

$$\left(x+\frac{x}{7}\right)+\frac{1}{11}\cdot\left(x+\frac{x}{7}\right)=60$$

Rovnici upravíme na tvar

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot x+\frac{e}{f}\right)=60,$$

kde a, b, c, d, e a f jsou přirozená čísla.

$$\frac{12}{11}\cdot\left(x+\frac{x}{7}\right)=60.$$

(Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003)

Čitatelé všech zlomků z příkladů ze Starobabylonské tabulky YBC 4652 jsou čísla, ke kterým existují v mezopotámské matematice přesné reciproké hodnoty. Příklady byly tvořeny tak, aby bylo možné získat přesné řešení. Na dané tabulce jsou pouze zadání a výsledky, nejsou zde poznamenány postupy. Předpokládá se, že se zřejmě řešily pomocí substituce a chybného předpokladu. (Bečváč, Bečvářová, Vymazalová, 2003)

Substituce

$$x + \frac{x}{7} = y,$$

dosazení substituce do rovnice

$$\frac{12}{11} \cdot y = 60,$$

$$y = 55.$$

Pak mohla být zvolena metoda chybného předpokladu:

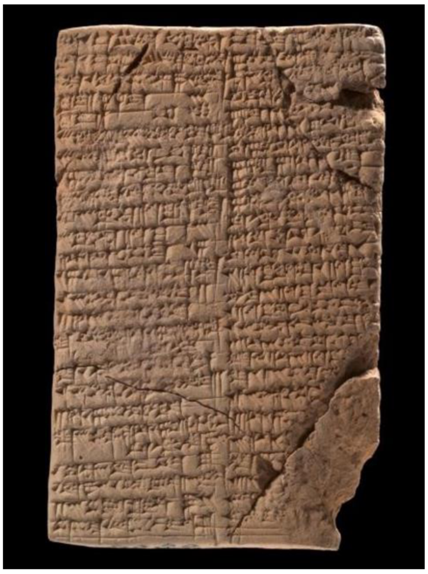
$$x + \frac{x}{7} = 55, \qquad x_0 = 7, \qquad x = \frac{55}{8} \cdot x_0$$

Mohl být použit i přímý výpočet:

$$x + \frac{x}{7} = 55, \qquad \frac{8}{7} \cdot x = 55, \qquad x = 55 \cdot 7 \cdot \frac{1}{8}$$

(Bečváč, Bečvářová, Vymazalová, 2003)

2.2.3 Soustava lineárních rovnic



Obrázek 6 Tabulka VAT 8389

Úloha ze starobabylonské tabulky VAT 8389 vedoucí na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých:

„Z (1) bur (4) gur obilí jsem sklidil. Z jednoho druhého bur (3) gur obilí jsem sklidil. Obilí nad obilí o (8, 20) převyšuje.

Moje pole přičtšno o (30,0) dává. Moje pole jsou co?

(30, 0) pro pole vezmi. (20, 0) pro obilí, které on sklidil, vezmi. (30, 0) pro druhé pole vezmi. (15, 0) pro obilí, které on sklidil, vezmi.

(8, 20), obilí nad obilí vychází, vezmi. A (30, 0) součet ploch polí vezmi a (30, 0) součet ploch polí do dvou rozděl rozděl a (15, 0) je to.

(15, 0) a (15, 0) dvakrát k zdvojnásobení vezmi a reciproké z (30, 0) toho pole utvoř a (0; 0, 2) je to.

(0; 0, 2) s (20, 0), obilí, které on sklidil, násobeno. (0; 40) je předešlé obilí.

S (15, 0), to dvakrát k jeho dvojnásobku bylo vzato, násobeno. (10, 0) pamatuje tvoje hlava.

Reciproké z (30, 0), toho druhého pole, utvoř a (0; 0, 2) je to.

(0; 0, 2) s (15, 0) obilí, které on sklidil, násobeno. (0; 30) je předešlé obilí.

S (15, 0), to dvakrát k jeho dvojnásobku bylo vzato, násobeno, je (7, 30).

(10, 0), tvoje hlava pamatuje nad (7, 30) o co vychází? (2, 30) vychází.

(2, 30), co vychází, z (8, 20), obilí nad obilí vychází, odečti a (5, 50) necháš zpátky.

(5, 50), které jsi nechal zpátky, pamatuje tvá hlava. (0; 40) jeden faktor a (0; 30) druhý faktor sečtené a (1; 10) jako jmenovatele.

Co s (1; 10) se má vzíti, to mně (5, 50), co tvá hlava pamatuje, dává? (5, 0) vezmi.

(5, 0) s (1; 10) násobeno (5, 50) dá tobě. (5, 50), to bylo vzato, z (15, 0), to dvakrát k jeho dvojnásobnému bylo vzato, od jednoho odečti, k druhému přičti a za prvé (20, 0), za druhé (10, 0) dává to. (20, 0) je plocha prvního pole, (10, 0) plocha druhého pole.

Poznámka: *4 gur jsou (20, 0) sìla, 3 gur jsou (15, 0) sìla, 1 bur je (30, 0) sar.*“ (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003, str. 260-261)

Ze zadání plyne, že máme dvě pole. Z plošné jednotky *bur* prvního pole sklidíme 4 *gur* obilí, z plošné jednotky *bur* druhého pole sklidíme 3 *gur* obilí. Sklizeň z prvního pole převyšuje sklizeň z druhého pole o (8, 20) = 500 *sìla*. Součet ploch polí je (30, 0) = 1800 *sar*. Jaké jsou výměry polí? (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003)

„Označíme-li x a y výměry uvažovaných polí v jednotkách *sar*, potom lze úlohu zapsat jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\frac{(20,0)}{(30,0)} \cdot x - \frac{(15,0)}{(30,0)} \cdot y = (8,20),$$

$$x + y = (30,0).$$

Soustava byla řešena metodou chybného předpokladu. Nejprve se vypočítá úroda na jednotlivých polí za předpokladu, že obě pole mají stejnou výměru, tj. (15, 0) *sar*:

$$\frac{(20,0)}{(30,0)} \cdot (15,0) = (0;\ 0{,}2) \times (20,0) \times (15,0) = (0;\ 40) \times (15,0) = (10,0),$$

$$\frac{(15,0)}{(30,0)} \cdot (15,0) = (0;\ 0{,}2) \times (15,0) \times (15,0) = (0;\ 30) \times (15,0) = (7,30).\text{“}$$

(Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003, str. 262)

Předpokládáme-li, že pole mají stejnou výměru, tak rozdíl úrody na těchto polí je roven rovnici:

$$(10,0)\ -\ (7,30) = (2,30).$$

(Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003)

Úrody se mají lišit o (8, 20), rozdíl úrod při stejné výměře polí je tedy o (5, 50) menší. Vychází se z úvahy: na každý *sar*, o který se zvětší první pole a zmenší druhé pole, se získá o (0; 40) více úrody na prvním poli a o (0; 30) méně úrody na poli druhém. Rozdíl úrod naroste o (0; 40) + (0; 30) = (1; 10). (Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003)

Dalším krokem je dělení, tj, nalezneme, čím je zapotřebí vynásobit (1; 10), abychom získali číslo (5, 50), což je chybějící rozdíl úrod. Výsledkem je (5, 0). Pole mají výměru (15, 0) + (5, 0) = (20, 0) a (15, 0) – (5, 0) = (10, 0). (Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003)

„Zobecníme-li tento postup, lze říci, že počtář použil klasickou mezopotámskou substituci. Je-li třeba řešit rovnici

$$x + y = 2h,$$

kde pro x a y je dána ještě nějaké další podmínka, potom se položí

$$x = h + w,\ \ y = h - w,$$

kde w je nová neznámá.“ (Bečváč, Bečváčová, Vymazalová, 2003, str. 262)

2.3 Čína (přibližně 1300 př. n.l.)

Ve staré Číně stojí za zmínku nejvýznamnější čínská učebnice matematiky Matematika v devíti kapitolách (Ťiou čang suan šu), jejíž tvorba se datuje v 10. - 2. století př. n. l., přičemž byla dokončena v 2. století n. l. (Bečvář, 2007)

První metodou řešení slovních úloh je, dle Bečváře (2007), zápis dvou lineárních rovnic ve tvaru

$$a_1x - b_1 = y,$$

$$a_2x + b_2 = y,$$

„kde $a_1 > a_2, b_1, b_2$ *jsou kladná racionální čísla*."

(Bečvář, 2007, str. 27)

První způsob řešení je, že můžeme zapsat zadaná čísla slovní úlohy do tabulky

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

a vypočítat součet součinů „křížem",
tj. $a_1b_2 + a_2b_1$ $(tzv.\, ši)$, $součet$ $b_1 + b_2$ $(tzv.\, fa)$, $rozdíl$ $a_1 - a_2$ a $podíly$

$$x = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}, \qquad y = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1 - a_2}.$$

Druhým způsobem řešení je výpočet $b_1 + b_2, a_1 - a_2$; potom je

$$x = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}$$

hodnotu neznámé *y* získáme dosazením vypočítané hodnoty *x* do první nebo druhé rovnice, tj.

$$y = a_1x - b_1 \qquad nebo \qquad y = a_2x + b_2.$$

(Bečvář, 2007)

Úloha 1:

„Několik lidí kupuje nějakou věc. Dá-li každý člověk po 8, je přebytek 3. Dá-li každý člověk po 7, je nedostatek 4. Ptáme se na počet lidí a cenu věci."

$$8x - 3 = y,$$

$$7x + 4 = y.$$

(Bečvář, 2007, str. 28)

Využijeme-li první způsob řešení (viz. výše), získáme

$$x = \frac{3+4}{8-7} = 7 \text{ a } y = \frac{8\cdot 4+7\cdot 3}{8-7} = 53.$$

(Bečvář, 2007)

Tento postup výpočtu se nazývá metodou *přebytku* a *nedostatku*. Hodnotu $b_1 = 3$ chápeme jako přebytek a hodnotu $b_2 = 4$ jako nedostatek. Jestliže dá každý člověk po 8, mají dohromady o 3 více, než je cena věci, dá-li každý člověk po 7, mají dohromady o 4 méně, než je cena věci. (Bečvář, 2007)

Další metoda, která je v učebnici popisována je zaměřena na řešení slovních úloh, které je možné vyjádřit jednou lineární rovnicí nebo soustavou dvou lineárních rovnic, z nichž jedna lineární rovnice je velmi jednoduchá. „Tyto úlohy jsou řešeny metodou *dvou chybných předpokladů*, které vedou na *přebytek* a *nedostatek*." (Bečvář, 2007, str. 30)

Uvažujme nejprve lineární rovnici

$$ax = b,$$

kde a, b jsou kladná racionální čísla. Za neznámou x se dosadí dvě vhodné hodnoty $x_1 > x_2$(chybné předpoklady), pro něž

$$ax_1 - z_1 = b,$$

$$ax_2 - z_2 = b,$$

kde kladná čísla z_1, z_2jsou chápána jako přebytky a nedostatky. Podle prezentované metody je třeba vytvořit tabulku

$$\begin{bmatrix} x & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix},$$

součet součinů „křížem" $x_1z_2 + x_2z_1$, součet přebytku a nedostatku $z_1 + z_2$ a podíl těchto dvou čísel, tj.

$$x = \frac{x_1z_2 + x_2z_1}{z_1 + z_2}.$$

Podle metody přebytku a nedostatku je

$$a = \frac{z_1 + z_2}{x_1 + x_2}, \qquad b = \frac{x_1z_2 + x_2z_1}{x_1 + x_2},$$

Takže $x = \frac{b}{a}$ má výše uvedený tvar.

Uvažujme soustavu dvou lineárních rovnic

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Zvolíme dva chybné předpoklady $x_1 > x_2$, z první rovnice vypočítáme odpovídající hodnoty y_1, y_2a po dosazení do druhé rovnice přebytek z_1a nedostatek z_2. Jedná se o řešení jedné lineární rovnice

$$a_2x + b_2\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2.$$

(Bečvář, 2007, str 29-30)

Úloha 9:

„V sudu o objemu 10 dou je neznámé množství obilí. Sud je potom doplněn neloupaným prosem. Po oloupání bylo v sudu jen 7 dou obilí. Kolik tam bylo původně obilí?

Poznámka: *Oloupáním se objem prosa zmenší na tři pětiny. Jeden dou je deset šenů.*

Výsledek*: 2 dou a 5 šenů*.“ (Bečvář, 2007, str. 31)

Úloha vede na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$x + y = 10,$$
$$x + \frac{3}{5}y = 7,$$

po vyjádření hodnoty x z první rovnice a dosazení výsledku do druhé rovnice získáme rovnici

$$x + \frac{3}{5}(10 - x) = 7, \quad \frac{2}{5}x = 1. \qquad (x = 2\tfrac{1}{2}, y = 7\tfrac{1}{2})$$

Vytvořením tabulky dle návodu výše získáme:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

(Bečvář, 2007)

2.3.1 8. kniha z traktátu Matematika v devíti kapitolách

V 8. knize se popisuje metoda fang čcheng. Jedná se o metodu, která popisuje přesný postup řešení systému n lineárních rovnic a o n neznámých.

Soustavu n lineárních rovnic o n neznámých bychom v dnešní době zapsali takto:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_2 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}. \tag{2.2}$$

(Juškevič, 1977)

V traktátu „Matematika v devíti knihách“ jsou použity koeficienty v úlohách pouze celá čísla. Podle využití metody fang čcheng zápis zjednodušíme přepsáním do tabulky, kde není potřeba vypisovat neznámé. Koeficienty jednotlivých rovnic se do tabulky zaznamenávají shora dolů a rovnice jsou do tabulky vkládány vždy zprava do leva. Jedná se o zápis pomocí tabulky fang čcheng, která je vyjádřena na počítací desce.

$$\begin{array}{ccc} a_{n1} & \cdots & a_{21}a_{11} \\ a_{n2} & \cdots & a_{22}a_{12} \\ \cdots & & \\ a_{nn} & \cdots & a_{2n}a_{1n} \\ b_n & \cdots & b_2\ b_1 \end{array} \tag{2.3}$$

(Juškevič, 1977)

Tabulku (2.3) dále upravíme. Prvky prvního sloupce zprava odečítáme od prvků druhého sloupce, který jsme předem vynásobili prvkem a_{11}. Tento postup aplikujeme tak dlouho, dokud na místě a_{21} nezbude nic, a takto pokračujeme i s dalšími sloupci, dokud první řádek nebude obsahovat pouze prvek a_{11}. Analogicky lze upravit orámovanou část tabulky

$$\begin{array}{ccc|c} & & & a_{11} \\ \hline a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{22}^{(1)} & a_{12} \\ \vdots & & & \\ a_{nn}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{1n} \\ b_n^{(1)} & \cdots & b_2^{(1)} & b_1 \end{array} . \tag{2.4}$$

(Juškevič, 1977)

Poznámka:

„Proces opakovaného odečítání prvků prvého sloupce nahradili Liou Chuej a Sun-c´ rychlejším odečítáním jejich součinů s příslušnými čísly.“ (Juškevič, 1977, str. 40)

Po dalších úpravách dojdeme k tabulce

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & a_{11} \\
 & & & a_{22}^{(1)} & a_{12} \\
 & & a_{33}^{(1)} & . & . \\
 & & . & . & . \\
a_{nn}^{(n-1)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{2n}^{(1)} & a_{1n} \\
b_{n}^{(n-1)} & \cdots & b_{3}^{(2)} & b_{2}^{(1)} & b_{1}\,.
\end{array}
\tag{2.5}
$$

Hlavním úkonem je vytvoření pomocného systému pomocí postupné eliminace neznámých z daného systému lineárních rovnic. (Juškevič, 1977)

Úpravami získáme pomocný systém:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
 & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)}, \\
 & & & & a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)}, \\
 & & & & & & \cdots & & \\
 & & & & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)}.
\end{array}
\tag{2.6}
$$

Neznámé $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ se získají postupně pomocí tabulky (2.5). (Juškevič, 1977)

Příklad 1: úloha ze 7. knihy, na které bylo pravidlo fang čcheng formulováno

„3 snopy z dobré úrody, 2 snopy s průměrné a 1 snop ze špatné úrody dávají 39 tou zrní; 2 snopy z dobré úrody, 3 z průměrné a 1 ze špatné dávají 34 tou; 1 snop z dobré, 2 snopy z průměrné a 3 ze špatné dávají 26 tou. Ptáme se, kolik zrní dává každý snop z dobré, průměrné a špatné úrody?“ (Juškevič, 1977, str. 41)

Zadání lze zapsat pomocí soustavy rovnic o třech neznámých:

$$
\begin{array}{ccccccc}
3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\
2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\
x & + & 2y & + & 3z & = & 26
\end{array}
$$

Koeficienty rovnic zapíšeme do tabulky shora dolů a rovnice postupně zapisujeme zprava do leva následovně:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 2 \\
3 & 1 & 1 \\
26 & 34 & 39
\end{array}
$$

Úprava druhého sloupce, jehož prvky se násobí 3:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array}$$

Úpravu třetího sloupce, jehož prvky se taktéž násobí 3:

$$\begin{array}{cc|c} & & 3 \\ \hline 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Úprava levého sloupce zatržené tabulky, jehož prvky se násobí 5:

$$\begin{array}{c|cc} & & 3 \\ & 5 & 2 \\ \hline 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array} \tag{2.7}$$

(Juškevič, 1977, str. 41, 42)

Když tabulku přepíšeme zpět podle daných pravidel, získáme soustavu třech lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39, \\ 5y + z &= 24, \\ 36z &= 99. \end{aligned}$$

Následovně již stačí pouze vypočítat neznámé z upravené tabulky (2.7), zároveň se obcházejí úkony se zlomky. Je dané, že horní číslo levého sloupce je jmenovatelem a spodní je čitatelem zlomku vyjadřující hodnotu z. Horní číslo získáme ze společného jmenovatele všech tří neznámých. Čitatele neznámé y dostaneme pomocí druhého sloupce tak, že vynásobíme spodní číslo ze středního sloupce se společným jmenovatelem a odečteme čitatele zlomku *z*, a nakonec výsledný rozdíl vydělíme horním číslem středního sloupce. Čitatele neznámé x dostaneme pomocí vynásobení spodního čísla z pravého sloupce se společným jmenovatelem, odečtením čitatele zlomku *z* a součinu druhého čísla z pravého sloupce s čitatelem zlomku y. Tento rozdíl nakonec vydělíme horním číslem pravého sloupce.

Získáme:

$$z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4},$$

$$y = \frac{24 \cdot 36 - 99}{5} \div 36 = \frac{153}{36} = 4\frac{1}{4},$$

$$x = \frac{39 \cdot 36 - 99 - 2 \cdot 153}{3} \div 36 = \frac{333}{36} = 9\frac{1}{4}.$$

(Juškevič, 1977)

Poprvé v dějinách matematiky se zde setkáváme s rozlišováním kladných a záporných čísel. Záporná čísla byla zapotřebí už při vytváření kanonické tabulky (2.3), kdy dochází k přenášení členů rovnice z jedná strany na druhou. (Juškevič, 1977)

Příklad:

$$\begin{aligned} 10x - 24 &= 6y, \\ 2x - 7 &= 12y, \end{aligned}$$

Vyjádření pomocí tabulky fang čcheng vypadá následovně

$$\begin{array}{rr} 2 & 10 \\ -12 & -6 \\ 7 & 24 \end{array}$$

Kladné čísla tabulky se nazývala čeng a záporné fu. V textu se odlišovali barvou, kladná čísla měli červenou barvu tyčinek a záporné černou. (Juškevič, 1977)

Již v starověké čínštině ale záporná čísla jsou brány jako samostatné objekty. Výraz -*a* je brán v čínské vědě mimo jiné jako výsledek odečítání většího množství od množství vyloženě menšího. (Juškevič, 1977)

„Jsou-li označení táž pak se odečítá; jsou-li označení různá pak se přičítá; je-li kladné samo, pak (se stane) záporným; jeli záporné samo pak (se stane) kladným.“ (Berezkinoj, 1957; In Juškevič, 1977, str. 45)

$$\begin{aligned} (\pm a) - (\pm b) &= \pm(a - b) \\ (\pm a) - (\mp b) &= \pm(a + b) \\ 0 - (\pm b) &= \mp b \end{aligned}$$

„Jsou-li označení různá pak se bude odečítat; jsou-li označení stejná pak se bude přičítat; je-li kladné samo pak (zůstane) kladné; je-li záporné samo pak (zůstane) záporné." (Berezkinoj, 1957; In Juškevič, 1977, str. 45)

$$\begin{array}{ccccc} (\pm a) & + & (\mp b) & = & \pm(a-b) \\ (\pm a) & + & (\pm b) & = & \pm(a+b) \\ 0 & + & (\pm b) & = & \pm b \end{array}$$

„Zavedení záporných čísel a pravidla pro jejich sčítání a odčítání patřilo k největším objevům čínských matematiků." (Juškevič, 1977, str. 46) Počátkem 7. století se se zápornými čísly setkáváme už i v Indii, v Evropě počátkem 13. století u Leonarda Pisánského. (Juškevič, 1977)

3 Lineární rovnice a jejich soustavy ve středověku

3.1 Indie (600 n. l. – 1400 n. l.)

Algebra se vyvíjela za účelem vyřešení každodenních situací, které v běžném životě nastávali, bavíme se převážně o účelu astronomickém, hospodářském, … . V Indii vědci popsali postup pro vytvoření sestavení rovnice ze slovní úlohy, přičemž při řešení rovnic nebrali v úvahu řešení v záporných hodnotách. (Juškevič, 1977)

Prithúdakasvámí definoval vytvoření rovnic tak, že neznámá se označí jako jávat-távat, poté následuje provedení úprav pomocí operací násobení, dělení a dalších. Nakonec se sestaví dvě stejné rovnice. (Juškevič, 1977)

Stejně tak návod na vytvoření rovnice uvedl i indický matematik z 12. století Bhāskara II., popsal blíže metody, které lze využít při sestavení rovnic, jako je například trojčlenka, sčítání řad, vlastnosti obrázků atd. Záporná čísla se označovala tečkou nad daným číslem a jestliže v rovnici nějaké členy chyběli, tak se to zaznamenávalo pomocí nulových koeficientů. Indové před řešením lineárních rovnic převedli rovnici na kanonický tvar s osamoceným absolutním členem, přičemž se zaměřili pouze na řešení rovnic prvního a druhého stupně. (Juškevič, 1977

Nejvýznamnější osobností starověké Indie je Árjabhata I. (asi 476 až 550 n.l.). Napsal knihu Árjabhatíja, která je psaná ve verších a věnuje se převážně astronomii. V tomto období nevznikala samostatná matematická díla, matematika byla součástí astronomických pojednání. Kniha obsahuje 118 slok z toho je pouze 33 slok věnováno matematice. Objevují se zde úlohy, které vedou na lineární rovnici s jednou neznámou ax + b = c. O dílo Árjabhatíja se posléze opírali další významní matematici.

Úloha o poslech

Jedná se o úlohu z knihy Árjabhatíja. Úloha byla převzata z astronomie a má určit okamžik setkání dvou nebeských těles, jsou-li dány jejich rychlosti a vzdálenost mezi nimi. Podle astronomického hlediska platí, že když se nebeská tělesa pohybují proti sobě, tak je třeba dělit jejich vzdálenost součtem rychlostí, a když se pohybují ve stejném směru, tak je potřeba dělit rozdílem rychlostí nebeských těles. Důležité je počítat s tím, že podíly znázorňují dobu setkání v minulosti nebo v budoucnosti. Vzdálenost označíme *a* a rychlosti nebeských těles v_1, v_2. Uvažujme pohyb v jednom směru, potom bude vzorec pro výpočet vypadat následovně:

$$t = \frac{a}{v_1 - v_2}$$

pro $v_1 < v_2$ se nebeská tělesa potkala v minulosti. Otázkou je, zda Árjabhata znal záporná čísla, Indové běžně záporné řešení v úvahu nebrali. (Juškevič, 1977)

Situaci, kdy druhé rychlejší nebeské těleso předehnalo těleso první, a nebeská tělesa se měli setkat v minulosti, Árjabhata vyjádřil přesto kladným číslem:

$$\frac{a}{(v_1 - v_2)}$$

(Juškevič, 1977)

Úloha o poslech.

„Šrídhara formuluje tuto úlohu tak, že řešení je nutně kladné: druhý, rychlejší chodec dohání prvního, který vyšel dříve.“ (Juškevič, 1977, str. 134)

Další významní indičtí matematici využili k vývoji vědy „Úlohu o poslech“, úlohu pozměnili na obtížnější. *„Šrídhara ukazoval, jak lze určit okamžik setkání dvou chodců, kteří vyjdou současně z jednoho místa rychlostmi $v_1 = 8$ jódžana a $v_2 = 2$ jódžana za den, přičemž se první vrátí ze vzdálenosti $a = 100$ jódžana, zpět naproti druhému.“* (Juškevič, 1977, str.134)

Odpověď: $t = a : (v_1 + v_2)/2$

Odpověď mohl získat buďto úvahou anebo z řešení sestavené rovnice. Pokud vezmeme v potaz logickou úvahu, tak to můžeme vysvětlit tak, že půjdou-li dva chodci na dvojnásobné dráze proti sobě, tak hledaná doba bude stejná. (Juškevič, 1977)

„Úlohou o poslech“ se zabýval i Bakhšálí, ten se snažil najít okamžik střetu dvou chodců, vyjdou-li současně ze společného počátečního místa, ale budou mít odlišnou rychlost v_1, v_2 na začátku a odlišné zrychlení w_1, w_2. V rukopisu se uvádí pouze konečný výsledek

$$t = \frac{2(v_2 - v_1)}{w_1 - w_2} + 1\,.$$

(Juškevič, 1977)

3.2 Islámské země (700 n. l. – 1600 n. l.)

Arabové přejímali kulturní a vědecké poznatky ostatních národů a dále s nimi pracovali, nejvíce se opírali o matematiku řeckou. Na konci 9. století se zasloužili o překlad klasických matematických děl starých Řeků a pochopili, že ke správnému výpočtu je nezbytný důkaz. Arabská matematika je založena na dedukování výsledků, používání logického odvozování a důkazu.

Zde stojí za zmínku algebraický traktát Muhammada ibn Músá al-Chwárizmího (790-840 n. l.) nesoucí název Hisáb al-džabr wa-l-muqábala, kdy hlavním jeho cílem bylo vytvořit jakýsi opěrný návod na řešení úloh, s kterými se lidé setkávali v každodenním praktickém životě. Al-Chwárizmího algebra je nauka o rovnicích pouze s celočíselnými koeficienty. V algebře se zkoumají čísla tří druhů: první je Dirham neboli číslo, Džindhr (kořen) neboli Šaj (věc) a Mál (jmění).

Podle Al-Chwárizmího je mál součin džidhru se sebou samým a džidhrr je veličina, kterou je obvykle nutno vynásobit samu sebou. (Juškevič, 1977)

Z arabského al-džabr pochází dnešní slovo algebra.

Al-Chwárizmího zavedl šest vzorů lineárních a kvadratických rovnic, které on uvažoval a každý příklad, který měl vést na rovnici, tak před zahájením řešení se pokusil rovnici upravit na jeden z jeho vzorových typů. V normálním tvaru rovnice musí být všechny členy přičítány, proto definoval právě těchto šest typů. Situace, kdy úloha nemá kladné řešení, tak se rovnice neuvažuje. Šest typů lineárních a kvadratických rovnic:

1) Čtverce se rovnají kořenům $ax^2 = bx$
2) Čtverce se rovnají číslu $ax^2 = c$
3) Kořeny se rovnají číslu $ax = c$
4) Čtverce a kořeny se rovnají číslu $ax^2 + bx = c$
5) Čtverce a kořeny se rovnají kořenům $ax^2 + c = bx$
6) Kořeny a čísla se rovnají čtvercům $bx + c = ax^2$

(Juškevič, 1977)

Pokud-li se v rovnici objeví odečítaný člen, tak se ho lze zbavit využitím matematické operace al-džabr. Matematická operace nesoucí název al-džabr znamená učinit krok, kdy se přičte odečítaný člen k oběma stranám rovnice. Na příkladu $2x - 5y + 12 = 8$ by to vypadalo následovně: $2x + 12 = 8 + 5y$. Druhá operace, která je v tomto matematickém traktátu klíčová nese název al-muqábala. Využijeme-li tuto operaci, znamená to, že všechny členy stejného řádu se sloučí v jeden člen. Příklad využití operace al-muqábala: Mějme danou rovnici $2x + 12 = 8 + 5y$, sloučíme-li členy stejného řádu získáme $2x + 4 = 5y$. (Juškevič, 1977)

Operace nesoucí název al-džabr je pro algebru klíčová. Podle tohoto názvu operace se postupem času začala nauka o rovnicích nazývat algebra. Nejprve se nauka nazývala al-džábr. Poté Západní Arabové, kteří práce al-Chwárizmího převzali a přenesli je do Evropy, vyslovovali al-džábr jako al-gabr. Do Evropy se název algebra jakožto nauka o rovnicích dostává ve 14. století. (Juškevič, 1977)

„… $ax^2 = bx$ považuje al-Chwárizmí jako lineární rovnici a nebere v úvahu nulové řešení, které pro konkrétní úlohy není zajímavé. Tento způsob řešení se udržel až do 17. století.“ (Juškevič, 1977, str 204)

3.3 Arménie a Gruzie

V 7. století Anania Širakaci vytvořil sbírku aritmetických úloh „Otázky a řešení“, kdy prakticky v každé z úloh je vidět arménský život. Úlohy jsou na téma událostí z arménských dějin, či byli používány arménské míry atd. Sbírka obsahuje 24 lineárních úloh s výsledky, ale bez odvození odpovědi. (Juškevič, 1977)

Příklad 1:

„Slyšel jsem od svého otce následující: v době proslulých válek Arménů s Peršany vykonal Zaurak Kamsarakan neobyčejné hrdinské činy; říká se, že třikrát během měsíce podniknul útok na perská vojska; poprvé zabil polovinu vojáků a při pronásledování došlo k druhé bitvě, kdy pobil čtvrtinu vojska. V třetím boji zahynula jedenáctina nepřátel. Na živu jich zůstalo jen dvě stě osmdesát a ti uprchli do Nachčavanu. Z tohoto zbytku máme poznat, kolik bylo perských vojáků před bojem.“ (Juškevič, 1977, str. 327)

Řešení:

Úlohu lze obecně zapsat rovnicí typu:

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\cdots+\frac{x}{m}+n=x.$$

Odpověď na danou úlohy bychom zapsali jako $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{22}$ tudíž $\frac{6}{11}$.

(Juškevič, 1977)

3.4 Evropa

Období středověku v Evropě je spojené s feudalismem a neomezenou mocí církve, která považovala vzdělanost za nežádoucí.

Ve středověké Evropě navázal na myšlenku starého Egypta italský matematik Leonardo Fibonacci Pisánský (okolo 1180-1250). Při problematice řešení lineárních rovnic využíval metodu chybného předpokladu, která se využívala již ve starém Egyptě ve 2. tisíciletí př. Kr. a on ji nazýval jako *regula versa*. (Bečvář a kol., 2001)

Kontinentální Evropa podléhala v období rozpadu Římské říše i následovně nájezdy nových kmenů. Mezitím Irsko bylo mimo všechny politické spory a v 5. století sem proniklo křesťanství. Tudíž i vývoj matematiky a řešené příklady byli úzce spjaté s náboženstvím. (Juškevič, 1977)

Církev se zajímala o kalendář a výpočet dat u pohyblivých svátků, jednalo se hlavně o Velikonoce. Nejprve je důležité zjistit první den Velikonoc, ten nalezneme podle pravidla, které se opírá o celočíselná řešení neurčitých lineárních rovnic. Musíme si uvědomit, že Velikonoce začínají první nedělí po prvním jarním úplňku. Pracujeme zde s termínem sluneční cyklus, kdy platí, že určitý den týdne připadá v různé roky na různá data, ale podle slunečního cyklu víme, že se opakují po dvaceti osmy leté periodě.

Dále řešíme měsíční cyklus, kdy první dny v týdnu připadají na určitou měsíční fázi, zde je zřejmé, že tento cyklus se opakuje vždy po devatenácti letech. 19 slunečních roků obsahuje téměř přesně 235 úplných lunárních měsíců, díky tomu velikonoční dny vycházejí v kalendáři v určité posloupnosti s přesně danou periodou $28 \times 9 = 532$ let. Velikonoční cyklus je 532 let. (Juškevič, 1977)

První univerzity

Během středověku nastal útlum nejen rozvoje matematiky, ale i ostatních věd. Důležitým bodem zvratu byli vznikající první univerzity, kdy nejstarší evropská univerzita vznikla v Salernu nejpozději v první polovině 11. století, jednalo se o lékařskou školu. Ve 14. století vznikla univerzita v Praze (1348), v témže století vznikly i ve Vídni, v Krakově atd., i tak matematika byla stále považována pouze za pomocnou disciplínu. (Juškevič, 1977)

Závěr

Bakalářská práce je zaměřena na metody řešení lineárních rovnic a jejich historii v období starověku a středověku.

První kapitola se zabývá lineárními rovnicemi. Největší důraz je kladen na metody řešení soustav lineárních rovnic a to hned několika způsoby, tj. Gaussovou eliminační metodou, Gaussovo-Jordanovou metodou, Cramerovým pravidlem či metodou řešení soustav s regulární maticí soustav za pomocí inverzní matice. Každou z metod jsme vždy demonstrovali na konkrétním příkladu.

Druhá a třetí kapitola je věnována historii ve starověku a středověku. Historie lineárních rovnic má své kořeny již ve starověkém Egyptě, kdy je na místě zmínit dva nejvýznamnější zachovalé papyry, Rhindův a Moskevský. Jedná se o sbírky úloh, ve kterých se využívají metody řešení pomocí chybného předpokladu a nebo přímým dělením. Období Mezopotámie v sobě ukrývá mezeru v podobě nedostatku matematické symboliky. Nejvýznamnější dílo starověku je spis Matematika v devíti kapitolách, o kterou se matematici opírali i ve středověku.

Počátek středověku se datuje k roku 476 n.l., kdy došlo k rozpadu Západořímské říše a tím došlo k útlumu věd nejen v matematice. Důležitou úlohu zde měla arabská matematika, kde docházelo k překladům významných děl starých Řeků. Arabové pochopili, že matematický problém není vyřešen až do té doby, dokud není dokázáno, že řešení je správné. Kladl se důraz na důkaz. Matematické úlohy byli stále věnovány tématům z běžného života, jako hospodářství, dějiny, náboženství apod. V Evropě došlo k zakládání prvních univerzit, první založenou univerzitou byla univerzita v Salernu, a to nejpozději v první polovině 11. století.

Seznam použité literatury

[1] BEČVÁŘ, Jindřich a kol. *Matematika ve středověké Evropě*. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-232-5.

[2] BEČVÁŘ, Jindřich. *Z historie lineární algebry*. Praha Matfyzpress, 2007. Dějiny matematiky. ISNB 978-80-7378-036-4.

[3] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4.

[4] BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. Praha: Matfyzpress, 2019. ISBN 978-80-7378-378-5.

[5] Gaussova eliminační metoda. *Gaussova eliminační metoda* [online]. Martin Král, 2011 [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: http://uzlabina2.aspone.cz/KralfrobeniovaVeta.aspx?fbclid=IwAR278n2TDg0sREiJL-Wbsc6HW3PI_lhwMf_m2ATvEyMBoE0uJajlykLwhS0

[6] GAVALCOVÁ, Tatiana a Pavel PRAŽÁK. *Základy matematiky 2: skriptum FIM UHK*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2004. ISBN isbn80-7041-402-2.

[7] JÍLKOVÁ, Světlana, Věra MAŇASOVÁ a Zdeňka TISCHEROVÁ. ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE. ELEKTROTECHNICKÁ FAKULTA. *Lineární algebra: úlohy*. Praha: České vysoké učení technické, 1987, 210 s.

[8] JUŠKEVIČ, Adolf Pavlovič. *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1978, [na tit. listu nespr.] 1977.

[9] MARVAN, Michal. *Frobeniova věta a hodnost matice* [online]. Opava: Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě, 2002 [cit. 2021-9-25]. Dostupné z: https://www.slu.cz/file/cul/bb0fd8e7-0c83-4757-9679-0ec8914d88fa.

[10] REKTORYS, Karel. ČESKÁ MATICE TECHNICKÁ. *Přehled užité matematiky I*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 720 s. ; 24 cm. ISBN 80-7196-179-5

[11] VYMAZALOVÁ, Hana: Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty. (Czech). Praha: Český egyptologický ústav FF UK, 2006. 80-7308-156-3.

Použité symboly

x	Vektor
A, B	Matice
h(A)	Hodnost matice A
A^T	Transponovaná matice k matici A
det A	Determinant A
A^{-1}	Inverzní matice
a_{nm}	Prvek matice umístěný v n-tém řádku a m-tém sloupci
R	Množina reálných čísel

Seznam obrázků

Obrázek 1: Grafické řešení příkladu 17

Obrázek 2: Část Rhodova papyru

Obrázek 3: Část Moskevského papyru

Obrázek 4: Tabulka YBC 4669

Obrázek 5: Tabulka YBC 4652

Obrázek 6: Tabulka VAT 8389