UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Implicitní funkce

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2009

Vypracovala:
Ivana Borůvková
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení Mgr. Pavly Kouřilová, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 30. listopadu 2009

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala především vedoucí své bakalářské práce paní Mgr. Pavle Kouřilové, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Dále si zaslouží poděkování všichni, kteří byli ochotni mi pomoci a zodpovědět všetečné dotazy, stejně jako rodina a přátelé za dodávání potřebné motivace a síly.

Obsah

1 Úvod

Rozhlédneme-li se kolem sebe, můžeme vidět rostliny, jejichž růst a plodivost závisí například na množství světla, tepla, zálivky a přidaného hnojiva, jdeme-li na nákup, všímáme si cenovek zboží, kde se cena odvíjí od výše sazby DPH, obchodní marže, ceny benzínu a dalších faktorů. A tak bychom mohli pokračovat dále. Všechny tyto i další jevy lze popsat pomocí funkce určitého tvaru s různým počtem proměnných. V praxi takto činí hlavně technici, ekonomové a fyzici, kteří potřebují zkoumané vztahy nějak popsat (zapsat je jako funkci), aby s nimi mohli dále pracovat a počítat. K tomu se právě hodí matematický aparát, díky němuž lze kupříkladu pomocí derivace zjistit jakou okamžitou rychlostí jelo auto, známe-li ujetou dráhu a čas, za který automobil tuto dráhu překonal.

Bohužel ne se všemi funkcemi se pracuje stejně. My se zaměříme na funkce v implicitním tvaru a to především funkce dvou proměnných, které jsou nejsnáze představitelné a je možno je doplnit přehlednými grafy. Popíšeme si tvar a vlastnosti takto zadaných funkcí, dokážeme důležitou větu o existenci implicitní funkce a vše budeme ilustrovat na příkladech. Samozřejmě nesmí chybět ani aplikace získaných poznatků v praxi. Toť k základním cílům a nyní trochu podrobněji k jednotlivým kapitolám.

V této práci se postupně seznámíme se základní problematikou funkcí a ukážeme si, jakými způsoby lze funkci zadat. Také si objasníme některé důležité pojmy, které budeme k pochopení látky bezprostředně potřebovat. Toto bude obsahem první kapitoly.

Navazující druhá kapitola půjde již hlouběji. V ní si povíme, proč je třeba se implicitními funkcemi zabývat důkladněji. Ke snadnějšímu vysvětlení nám pomohou hlavně názorné příklady.

Třetí část je nazvaná Věta o implicitní funkci a je tedy zřejmé, že stěžejním bodem bude vyslovení a dokázání zmíněné věty.

Poslední čtvrtá kapitola bude plná příkladů, na nichž budeme demonstrovat znalosti z předchozích kapitol a seznamovat se s dalšími vlastnostmi implicitních funkcí. Na závěr si také ukážeme, že s teorií implicitních funkcí se můžeme setkat i v jiných oblastech než je matematická analýza.

2 Co je dobré pro začátek vědět

2.1 Několik slov o funkcích všeobecně

Již v úvodu jsme si řekli, že s funkcemi se setkáváme všude tam, kde zkoumáme závislost mezi dvěma nebo více veličinami, přičemž tyto veličiny se obecně mění a jsou vázány jistým vztahem. Tento vztah jednoznačně určuje hodnotu jedné veličiny v zavislosti na jiné veličině. Ale samozřejmě vzájemně závislých veličin může být více. Pro úplnost si připomeňme definici funkce.

Definice 2.1. Zobrazení f množiny $M \subset \mathbb{R}^n$, kde n je přirozené číslo, do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ (zapisujeme $f\colon M \to \mathbb{R}$) se nazývá *reálná funkce n reálných proměnných* (zkráceně budeme říkat jen *funkce*). Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f a bývá označována symbolem $D(f)$. Množina všech funkčních hodnot bodů z M se nazývá *obor hodnot funkce f* a značí se $H(f)$.

Definice 2.2. *Grafem funkce* $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, rozumíme množinu všech bodů prostoru R^{n+1}, jejichž souřadnice $x_1, \dots, x_n, y$ v dané kartézské soustavě souřadnic vyhovují rovnici $y = f(x_1, \dots, x_n)$, kde $(x_1, \dots, x_n) \in M$. Tj. $f = \{(x_1, \dots, x_n, y)\}$ z množiny $\mathbb{R}^{n+1}$, kde $(x_1, \dots, x_n) \in M$ a $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Jako jednoduchý příklad závislosti mezi veličinami nám dobře poslouží pro všechny jistě známý ekonomický model nabídky a poptávky. Cena nabízených produktů primárně závisí na vynaložených nákladech, ale dalšími faktory může být například konkurence, klimatické podmínky (např. kroupy zničí většinu úrody zemědělcům, tudíž cena prodávaných plodin se prudce zvýší) nebo politické prostředí (např. zvýšení sazby daní). Obdobé vlivy bychom našli i v případě určování ceny, za kterou jsou ochotni kupující produkty pořizovat. Jelikož závislých veličin je zde více, dostali bychom funkci o více proměnných, jejíž graf již není možné sestrojit. Když už jsme zmínili graf funkce, měli bychom zde také uvést i ostatní způsoby zadání funkce, mezi nimiž můžeme nalézt i pro nás důležité implicitní zadání.

1. Grafem

   Grafem lze zadat funkci nejvíce dvou reálných proměnných.

Tento způsob je obvyklý zejména v technických oborech. Zadání funkce grafem není vhodné pro další zpracování, protože sice máme názornou představu o průběhu funkce, ale hodnoty z grafu lze odečítat pouze přibližně.

2. Tabulkou

   To je $(n+1)$-ticemi čísel $\{x_{1_k}, x_{2_k}, \ldots, x_{n_k}, y_k\}$, kde $y_k = f(x_{1_k}, x_{2_k}, \ldots, x_{n_k})$ a $n \in \mathbb{N}$, pro $\forall k = 1, 2, \ldots, k \in \mathbb{N}$, sestavenými do tabulky, která tak bude mít $(n+1)$ sloupců a k řádků. Zadání funkce tabulkou se užívá zpravidla v experimentálních úlohách při zjišťování závislosti veličin měřením. Funkci lze pomocí tabulky zadat úplně jen tehdy, je-li její definiční obor konečná množina.

3. Analyticky

   Tento způsob je nejčastější a pro matematické účely též nejvhodnější. Můžeme pod něj zařadit několik možností zapsání funkčního vztahu.

   - Explicitně, kdy je funkce zadána rovnicí $y = f(x_1, \ldots x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ a množinou $D(f)$, přičemž $f(x_1, \ldots, x_n)$ je matematický výraz závislý na proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a $D(f)$ je definiční obor funkce f.
   - Implicitně, tj. zadání rovnicí $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, kde F je funkce $(n+1)$ reálných proměnných, a podmínkami pro $x_1, \ldots, x_n$ a y. Více se tímto způsobem zadání funkce budeme zabývat v dalších kapitolách, avšak zaměříme se zejména na funkce dvou reálných proměnných.
   - Parametricky, tedy soustavou $n+1$ rovnic

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi_1(t) \\ &\vdots \\ x_n &= \Phi_n(t) \\ y &= \Psi(t), \end{aligned}$$

     kde $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ a Ψ jsou funkce nezávisle proměnné t (zvané parametr), splňující určité podmínky a mající společný definiční obor.

- Pomocí reálných čísel u, $v_1, \ldots$, v_{n-1}, které se nazývají sférické souřadnice bodu $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, je-li

$$x_1 = u \cos v_1 \cos v_2 \cos v_3 \ldots \cos v_{n-1}$$

$$x_2 = u \sin v_1 \cos v_2 \cos v_3 \ldots \cos v_{n-1}$$

$$x_3 = u \sin v_2 \cos v_3 \cos v_3 \ldots \cos v_{n-1}$$

$$x_4 = u \cos v_3 \cos v_4 \cos v_3 \ldots \cos v_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = u \sin v_{n-2} \cos v_{n-1}$$

$$x_n = u \sin v_{n-1}.$$

  Zvolíme-li $n = 2$, dostaneme čísla u, v, která se nazývají polární souřadnice bodu $P = (x_1, x_2)$.

Poznámka 2.1. V implicitním a parametrickém případě musíme přidat vždy podmínky na funkce F, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ a Ψ tak, aby tyto předpisy skutečně určovaly funkci.

2.2 Základní pojmy

Nastává příležitost vyslovit několik vět, které nám pomohou v objasnění dalšího textu. Zde uvedeme pouze ty, které budeme bezprostředně potřebovat v této práci a které nám pomohou pochopit některá fakta. Základní pojmy a ostatní důležité definice, věty a poučky lze nalézt v jakékoli knize pojednávající o diferenciálním počtu, například v [2] nebo [6].

Věta 2.1 (Lagrangeova o přírůstku funkce)**.** *Jestliže*

(1) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$,

(2) f je diferencovatelná na (a, b),

pak existuje $\theta \in (0,1)$ takové, že

$$f'(a+\theta h) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

kde h označuje vzdálenost $(b-a)$.

Vztah z této věty se nám bude později hodit ve tvaru

$$f(b)-f(a) = f'(a+\theta h)\cdot(b-a).$$

Věta 2.2. *Nechť $y = f(x)$ je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a diferencovatelná na otevřeném intervalu (a,b).*

(1) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, potom je f rostoucí na $\langle a,b\rangle$.

(2) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, potom je f klesající na $\langle a,b\rangle$.

(3) Je-li $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, potom je f konstantní na $\langle a,b\rangle$.

Věta 2.3. *Budiž funkce $y = f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $f(a) \neq f(b)$. Potom funkce f nabývá na intervalu (a,b) všech hodnot ležících mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$.*

Jinak řečeno, vezmeme-li libovolné číslo d ležící mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$, existuje alespoň jedno číslo c z intervalu (a,b), kde $f(c) = d$.

3 Představení implicitních funkcí

Teorie implicitních funkcí, stejně jako jí blízká problematika inverzních funkcí, je jedna z nejstarších a nejdůležitějších teorií moderní matematiky. Zárodky této idey můžeme spatřit již v dílech významných matematiků Angličana Isaaca Newtona (1642–1727) a Němce Gottfrieda Leibnize (1646–1716). Byl to však až francouzský průkopník matematické analýzy Augustin-Louise Cauchy (1789–1857), kdo sjednotil a zobecnil doposud známé poznatky o implicitních funkcích a rozvinul tuto teorii dále. Nejdříve byla vyslovena věta o implicitních funkcích pro dvě proměnné. Pro více proměnných ji poprvé prezentoval ve svém díle jako součást celé teorie funkcí více proměnných až italský matematik a politik Ulisse Dini (1845–1918). Věta o implicitní funkci je proto v Itálii známá jako Diniho věta (the Dini's theorem).

Toto byl jen velmi strohý nástin „vzniku“ a představení hlavních myslitelů, kteří měli s počátky teorie implicitních funkcí co do činění. Komplexnější informace historického rázu poskytne kniha [8].

3.1 Jak vypadá funkce zadaná implicitně

V předchozí kapitole jsme pouze naznačili, jaký tvar mají implicitně zadané funkce, proto nastal nevjyšší čas, abychom se implicitními funkcemi zabývali hlouběji. Celá podkapitola je věnována jejich problematice a snazší orientaci v rozdílech s explicitně zadanými funkcemi. Abychom si jednotlivé funkce mohli lépe představit i nakreslit a pochopení se tak stalo jednodušším, budeme se pohybovat pouze v $\mathbb{R}^2$.

Jak popsat funkci zadanou implicitně? Jelikož se v celé této kapitole budeme pohybovat v oblasti funkcí dvou proměnných, připomeňme si, že implicitní funkce je funkce zadaná rovnicí $F(x, y) = 0$, kde F značí funkci dvou proměnných x a y. To ale není vše. Jistě si každý pamatuje, jak nám na základní i střední škole vtloukali do hlavy, že funkce je zobrazení, které přiřazuje každé nezávisle proměnné x, kde x vybíráme z definičního oboru dané funkce, právě jednu závisle proměnnou y. Tato „poučka“ však v našem implicitním případě neplatí vždy, což je kámen úrazu. Může se totiž stát, že jednomu x bude připadat i více než jedno y. Než se však k tomuto případu dostaneme, označíme znakem M množinu všech bodů (x, y), které vyhovují rovnici $F(x, y) = 0$ a ukážeme si, jakých podob může množina M nabývat:

1. Nechť $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$. V tomto případě je množina M prázdná, jelikož pro žádný bod není $x^2 + y^2 = -1$.

2. Rovnici $x^2 e^y + y^2 e^x = 0$ vyhovuje jediný bod $(0, 0)$ a tento jediný bod také tvoří množinu M.

3. I v případě rovnice $x^2 + y^2 = 0$ je množina $M = \{(0, 0)\}$.

4. Rovnici $x + y - 5 = 0$ vyhovuje právě množina všech bodů ležících na přímce $y = 5 - x$.

5. Je známo, že rovnicí $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 4 = 0$ je zadána kružnice se středem v bodě $(3, -1)$ a poloměrem 2.

6. Křivka zadaná rovnicí $\frac{(x+8)^2}{8} + \frac{(y-14)^2}{12} - 1 = 0$ se nazývá elipsa, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou y, střed v bodě $(-8, 14)$. Hlavní poloosa má délku $a = \sqrt{8}$ a vedlejší poloosa $b = \sqrt{12}$.

7. Rovnice $\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{10} - 1 = 0$ patří hyperbole s hlavní osou rovnoběžnou s osou y a středem v bodě $(5, -3)$.

8. Křivka $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ popisuje tzv. Descartův list.

9. Rovnice $(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = 0$ odpovídá lemniskátě.

Nyní budeme odpovídat na otázku, zda je možné popsat množinu M rovnicí ve tvaru $y = f(x)$ tak, aby všechny body množiny M byly právě ony body (x, y), jež vyhovují rovnici $y = f(x)$. To je možné například v případě přímky $x + y - 5 = 0$, kde můžeme velmi snadno osamostatnit y (proměnnou y stačí převést na druhou stranu rovnice) a přejít tak od implicitního zadání funkce k explicitními. Jinými slovy, množinu M lze popsat jedinou rovnicí tvaru $y = f(x)$, konkrétně $y = 5 - x$ (viz případ 4.). Na druhou stranu, podíváme-li se na posledních pět uvedených křivek (případ 5. až 9.), můžeme si všimnout, že není možné osamostatnit y a popsat tak celou množinu M jedinou rovnicí tvaru $y = f(x)$.

Zatímco přechod od explicitního k implicitnímu zadání dané funkce je jednoduchý, neboť stačí anulovat pravou stranu funkčního předpisu, jak je vidět výše, opačný přechod někdy nelze provést. Proto když nebudeme schopnit nalézt funkci f, jež popisuje množinu M, budeme se snažit tento problém zúžit v tom smyslu, že se omezíme jen na okolí zvoleného bodu z M a situaci tak nebudeme zkoumat na celé množině M, ale pouze v okolí určitého bodu z této množiny. Zvolíme si libovolný bod (x_0, y_0) patřící do množiny M a budeme se ptát, zda je možné sestrojit kolem tohoto bodu libovolné okolí tak, aby alespoň ta část množiny M ležící v okolí bodu (x_0, y_0) se dala vyjádřit jedinou rovnicí ve tvaru $y = f(x)$.

Na tomto místě by bylo vhodné uvést definici implicitní funkce, která nám nejlépe pomůže k pochopení vysvětlovaného problému.

Definice 3.1. Nechť F je funkce dvou proměnných a množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$. Dále uvažujme bod $(x_0, y_0) \in M$. Předpokládejme, že existuje obdélníkové okolí $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$, $\delta > 0$, $\epsilon > 0$, s následující vlastností:

> K libovolnému $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje v intervalu $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ právě jedno y takové, že $F(x, y) = 0$. Označme tuto hodnotu $y = f(x)$.

Pak o takto definované funkci f, kde $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, říkáme, že je *zadaná implicitně* rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí bodu (x_0, y_0).

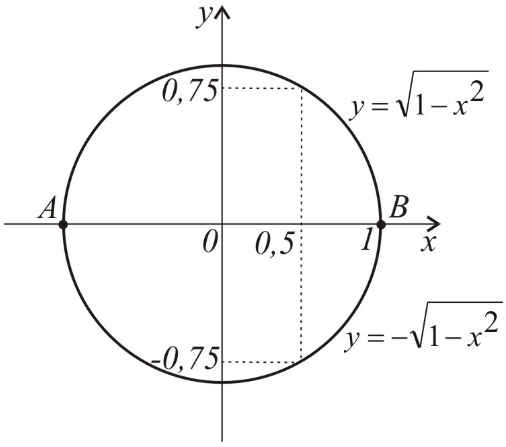
Dalo by se také říci, že funkce $y = f(x)$ je v okolí bodu (x_0, y_0) zadána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in (x_0, -\delta, x_0 + \delta)$. Pokud se z rovnice $F(x, y) = 0$ podaří v okolí bodu (x_0, y_0) vyjádřit proměnnou y, dostáváme funkci f v explicitním tvaru $y = f(x)$.

Pro zajímavost bychom mohli dodat, že „implicitní“ doslovně přeloženo do češtiny znamená „nerozvinutý, v něčem obsažený“.

3.2 Motivační příklady

Již jsme si pověděli, jak vypadají implicitně zadané funkce a jaká úskalí nám mohou přinášet. Nyní nastal čas si některé z výše uvedených příkladů detailněji rozebrat a ukázat si na nich to, co bylo zatím řečeno jen teoreticky. Budeme se tedy zabývat tím, jak vypadá množina M a kdy lze nalézt funkci f.

Příklad 3.1. Pro začátek si zvolíme nejsnadnější a nejlépe představitelnou funkci, kterou k tomuto účelu vybírá snad většina autorů odborných publikací, a tou je $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Množina M, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ F(x, y) = 0\}$, je tvořená kružnicí, která má střed v počátku a poloměr roven jedné.



Obrázek 3.1: Kružnice implicitně zadaná rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Z Obrázku 3.1 je patrné, že v okolí kteréhokoliv bodu na kružnici, tedy kromě bodů $A = (-1, 0)$ a $B = (1, 0)$, jsou rovnicí $F(x, y) = 0$ zadány explicitní funkce $f_1 = \sqrt{1 - x^2}$, $f_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. Funkce $f_1 = \sqrt{1 - x^2}$ odpovídá horní půlkružnici a funkce $f_2 = -\sqrt{1 - x^2}$ dolní. (Protože např. pro $x = 0{,}5$ získáme dosazením do funkce f_1 hodnotu $y_1 = 0{,}75$ a je tedy zřejmé, že bod $(0{,}5; 0{,}75)$ bude ležet v horní polovině kružnice, kdežto po dosazení $x = 0{,}5$ do funkce f_2 vypočteme $y_2 = -0{,}75$ a tedy bod $(0{,}5; -0{,}75)$ leží v dolní polovině kružnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$.)

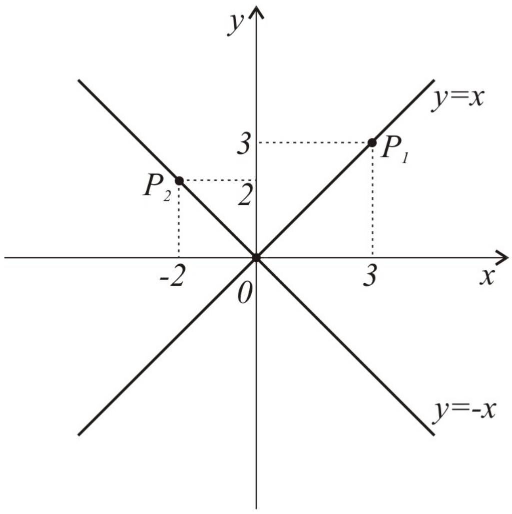
Můžeme také vidět (viz Obrázek 3.1), že v žádném okolí bodů $A = (-1, 0)$ a $B = (1, 0)$ není rovnicí zadána žádná funkce proměnné x. $\square$

Příklad 3.2. Nechť $F(x, y) = x^2 - y^2$. Jelikož

$$F(x, y) = x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y) = 0,$$

snadno zjistíme, že množina M se skládá ze všech bodů přímek $y = x$ a $y = -x$.

Zvolme například bod $P_1 = (3, 3)$ z množiny M, který leží v prvním kvadrantu. Ptáme se, zda můžeme sestrojit nějaké okolí $U_3 = (3 - \Delta, 3 + \Delta) \times (3 - \Delta, 3 + \Delta)$, $\Delta > 0$, bodu $(3, 3)$ tak, aby se alespoň část množiny M, která leží v okolí U, dala popsat rovnicí $y = f(x)$.



Obrázek 3.2: Graf funkce f implicitně zadaný rovnicí $x^2 - y^2 = 0$.

Z Obrázku 3.2 vidíme, že tak učinit lze a část množiny M, jež leží v okolí U bodu $(3, 3)$, můžeme vyjádřit rovnicí $y = x$. Prozkoumejme analogicky situaci na okolí $U = (-2 - \Delta, -2 + \Delta) \times (2 - \Delta, 2 + \Delta)$, $\Delta > 0$, bodu $P_2 = (-2, 2)$. V tomto případě je zřejmé, že část množiny M lze popsat rovnicí $y = -x$.

K obdobným závěrům bychom došli v případě všech bodů P z množiny M vyjma bodu $(0, 0)$. V počátku soustavy souřadnic totiž nelze najít takové okolí $U_0 = (0 - \Delta, 0 + \Delta) \times (0 - \Delta, 0 + \Delta)$, na kterém bychom mohli popsat část množiny M rovnicí $y = f(x)$.

Všimněme si též, že v bodě $(0, 0)$ je parciální derivace funkce F podle proměnné y rovna nule. $\square$

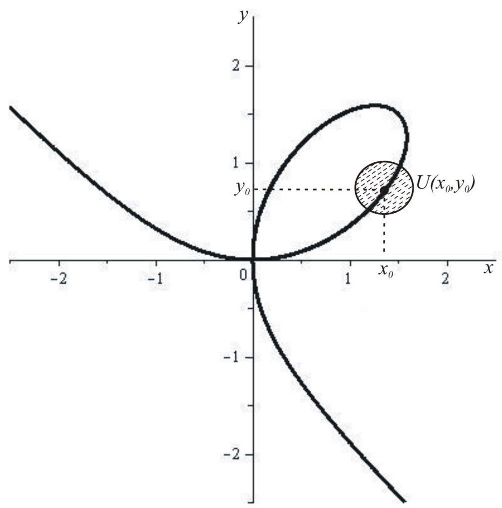
Příklad 3.3. Obdobně bychom uvažovali nad funkcí $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Množina M, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$, znázorňuje již zmíněný Descartův list. Zvolíme-li na křivce bod (x_0, y_0), hledáme takové okolí $U(x_0)$ bodu x_0, $U(y_0)$ bodu y_0 a funkci $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

1. $x^3 + f^3(x) - 3xf(x) = 0$ pro každé $x \in U(x_0)$,

2. $f(x_0) = y_0$,

3. $f(x) \in U(y_0)$ pro každé $x \in U(x_0)$.

Pokud zjistíme, že taková funkce existuje, je dále důležitá otázka, zda funkce mající výše uvedené vlastnosti, je jediná. Pokud ano, můžeme říci, že část Descartova listu, ležící v dostatečně malém okolí bodu (x_0, y_0), je grafem funkce jedné reálné proměnné f. Je zřejmé, že tato situace nastává pro každý bod (x_0, y_0) Descartova listu (viz Obrázek 3.3), kromě bodů $(0, 0)$ a $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.



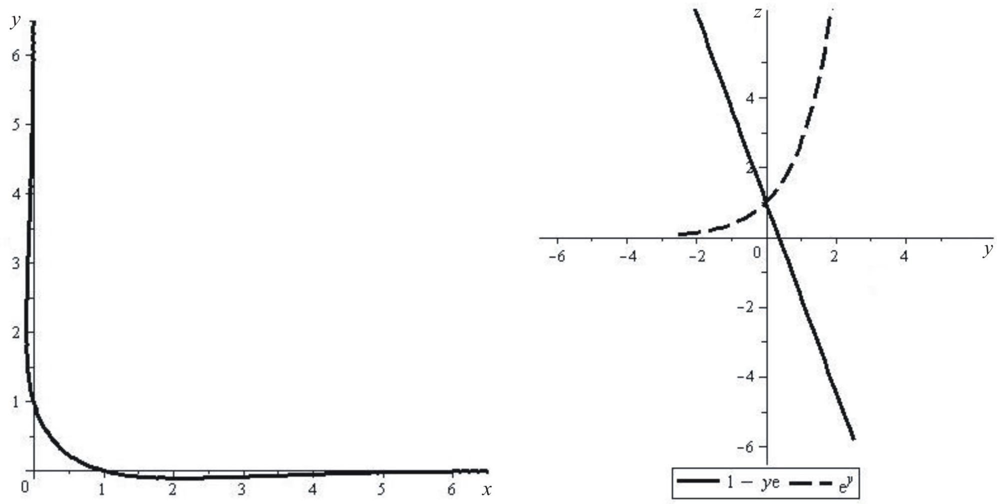
Obrázek 3.3: Descartův list implicitně zadaný rovnicí $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Část Descartova listu ležící v libovolně malém okolí kolem počátku je sjednocením grafů tří spojitých funkcí; odpověď na otázku jednoznačnosti funkce f s uvedenými vlastnostmi je v tomto případě tedy záporná. $\square$

Příklad 3.4. Pro srovnání uvažujme rovnici $xe^y + ye^x - 1 = 0$. Do množiny M, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, xe^y + ye^x - 1) = 0\}$, patří například body $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Jelikož však nelze osamostatnit y, nemůžeme zjistit, zda existují i další body patřící do množiny M.

Můžeme si pomoci tak, že danou rovnici přepíšeme do tvaru $xe^y = 1 - ye^x$ a budeme graficky řešit, kdy se protnou funkce $z_1 = xe^y$ a $z_2 = 1-ye^x$. Jejich průsečík (pokud bude existovat) je totiž také bodem patřícím do množiny M. Začneme tím, že si zvolíme pevné x a k němu budeme dopočítávat hodnotu y. Například pro

$x = 1$ dostaneme dvě funkce, $z_1 = e^y$ a $z_2 = 1 - ye$. Tvar obou grafů je jistě každému známý (a pokud ne, pomůže Obrázek 3.4 vpravo).



Obrázek 3.4: Graf funkce f implicitně zadaný rovnici $xe^y + ye^x - 1 = 0$ (vlevo); křivky $z = e^y$ a $z = 1 - ey$ (vpravo).

Načrtneme-li si grafy těchto dvou funkcí z_1 a z_2, jednoduše určíme, že souřadnici $x = 1$ odpovídá $y = 0$. Tak bychom mohli pokračovat dále – volit si libovolná pevná x a dopočítávat k nim příslušná y. Nemáme-li však po ruce vhodný software, není již tak jednoduché říci, kde se funkce protnou třeba hned pro $x = 2$. Oproti předcházejícím příkladům tak v případě funkce $F(x, y) = xe^y + ye^x - 1$ nelze jednoduše (například bez použití zmíněného softwaru) určit, zda pro nějaké další x nebo dokonce všechna x z určitého intervalu existuje právě jedno y vyhovující dané rovnici. Proto nemůžeme rozhodnout o existenci implicitní funkce a musíme si tedy opatřit „nástroj“, který nám s tímto problémem pomůže, a to větu o implicitní funkci, které bude věnována celá následující kapitola. □

4 Věta o implicitní funkci

Nyní se dostáváme ke stěžejnímu bodu této práci, tedy k vyslovení a dokázání věty o existenci implicitní funkce.

Nejprve si uvedeme znění a důkaz věty pro případ funkce dvou proměnných $F(x, y)$, protože je nejsnáze představitelné.

Věta 4.1 (o existenci implicitní funkce)**.** *Uvažujme rovnici $F(x, y) = 0$. Množinu řešení této rovnice označme M, tj. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ F(x, y) = 0\}$. Nechť*

(1) bod $(x_0, y_0) \in M$,

(2) existuje čtvercové okolí $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $\delta > 0$, bodu (x_0, y_0), na němž je funkce F hladká,

(3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom existuje funkce f definovaná na intervalu $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$, kde $\Delta > 0$ a $\Delta \leq \delta$, tak, že

(I) rovnice $F(x, y) = 0$ popisuje v $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \times (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ okolí bodu (x_0, y_0) implicitní funkci $y = f(x)$, přičemž

(II) f je spojitá na $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$ a

(III) f má na $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$ spojitou derivaci a platí

$$f'(x) = \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \qquad \text{kde } y = f(x) \text{ pro každé } x \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta).$$

Důkaz. Nejprve si dokážeme tvrzení (I), tedy existenci implicitní funkce.
Předpokládejme, že $F'_y(x_0, y_0) > 0$ (případ $F'_y(x_0, y_0) < 0$ by se dokazoval analogicky, pouze bychom místo funkce F vyšetřovali funkci $-F$).

Položme $F'_y(x_0, y_0) = a$, kde $a > 0$. Z předpokladu (2) hladkosti funkce F, a tím pádem spojitosti funkce F'_y plyne, že musí existovat nějaké kladné číslo c, $c \leq \delta$, tak, že pro každý bod (x, y) z intervalu $K = (x_0 - c, x_0 + c) \times (y_0 - c, y_0 + c)$, je

$$\left|F'_y(x, y) - F'_y(x_0, y_0)\right| < \frac{1}{2}a$$

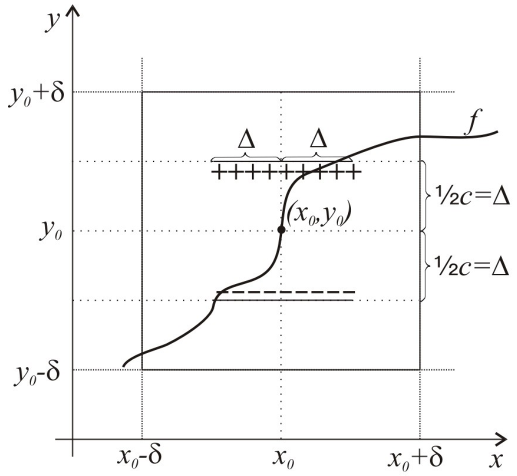
$$\left|F'_y(x,y)-a)\right| < \frac{1}{2}a.$$

Upravíme-li tuto nerovnici, dostaneme, že $F'_y(x,y)$ nabývá pro $\forall(x,y) \in K$ hodnot z intervalu $(\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}a)$, tedy

$$\frac{1}{2}a < F'_y(x,y) < \frac{3}{2}a.$$

Jelikož a je kladné číslo, je zřejmé, že ve všech bodech $(x,y) \in K$ platí

$$F'_y(x,y) > \frac{1}{2}a > 0. \tag{4.1}$$



Obrázek 4.1: Obrázek znázorňující situaci v okolí bodu (x_0, y_0).

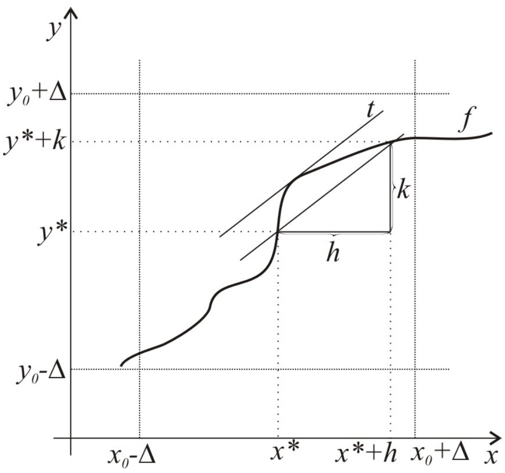
Nyní uvažujme zúžení funkce F na proměnnou y, tedy položme $x = x_0$ a získejme tak funkci $F(x_0, y)$ s jednou proměnnou y. Funkce $F(x_0, y)$ má na intervalu $(y_0 - c, y_0 + c)$ podle výše dokázaného vztahu kladnou derivaci a je na tomto intervalu tedy dle věty o monotonii funkce rostoucí. Navíc pro $y = y_0$ platí $F(x_0, y_0) = 0$. Z toho vyplývá, že v bodě $y = y_0 + \frac{1}{2}c$ má funkce $F(x_0, y)$ kladnou hodnotu, kdežto pokud volíme bod $y = y_0 - \frac{1}{2}c$, nabývá funkce $F(x_0, y)$ hodnotu zápornou.
Obdobnou úvahu můžeme vést pro funkce $F(x, y_0 + \frac{1}{2}c)$ a $F(x, y_0 - \frac{1}{2}c)$ jediné proměnné x. Funkce $F(x, y_0 + \frac{1}{2}c)$ je v bodě $x = x_0$ spojitá a kladná. Funkce $F(x, y_0 - \frac{1}{2}c)$ je v bodě $x = x_0$ spojitá a záporná. Z toho vyplývá, že existuje kladné číslo Δ tak, že platí

$$F(x, y_0 - \frac{1}{2}c) < 0 \quad \text{a} \quad F(x, y_0 + \frac{1}{2}c) > 0, \qquad \text{pro } \forall x \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta), \tag{4.2}$$

kde Δ volíme tak, aby $\Delta < c$.

Neomezujme se pouze na x_0 a y_0 a podívejme se nyní, jak bude vypadat situace v případě jiného bodu z množiny M. Nechť je x^* libovolné číslo z intervalu $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$. Potom je funkce $F(x^*, y)$, jediné proměnné y, podle vztahu (4.1) spojitá a rostoucí na celém intervalu $(y_0 - c, y_0 + c)$. Jelikož je interval $(y_0 - \frac{1}{2}c, y_0 + \frac{1}{2}c)$ částí intervalu $(y_0 - c, y_0 + c)$, bude funkce $F(x^*, y)$ spojitá a rostoucí i na něm. Z dokázaného vztahu (4.2) víme, že pro $y = y_0 - \frac{1}{2}c$ je hodnota této funkce záporná, kdežto pro $y = y_0 + \frac{1}{2}c$ kladná. Potom v souladu s Větou 2.3 existuje na intervalu $(y_0 - \frac{1}{2}c, y_0 + \frac{1}{2}c)$ číslo y^* takové, že $F(x^*, y^*) = 0$, a protože je funkce $F(x^*, y)$ rostoucí na tomto intervalu, je toto číslo $y^* \in (y_0 - \frac{1}{2}c, y_0 + \frac{1}{2}c)$ jen jedno.
Výše uvedené úvahy můžeme rozšířit na celý interval $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \times (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$, pokud položíme $\frac{1}{2}c = \Delta$. Potom bude platit, že ke každému x z intervalu $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$ existuje v intervalu $(y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ jen jedno číslo y tak, že platí $F(x, y) = 0$; toto číslo y označme znakem $f(x)$. Tímto je dokázán první bod (I).

Bod (II) v této chvíli přeskočíme a nejprve si dokážeme tvrzení (III) Věty 4.1 pomocí Věty o přírůstku funkce 2.1. V souladu s Větou 2.1 si zvolíme dva body (x^*, y^*), $(x^* + h, y^* + k)$ z intervalu $U = (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \times (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$.



Obrázek 4.2: Obrázek znázorňující vzdálenost bodů (x^*, y^*) a $(x^* + h, y^* + k)$.

Funkce $F(x, y^*)$ jediné proměnné x má v intervalu $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$ derivaci $F'_x(x, y^*)$, funkce $F(x^* + h, y)$ proměnné y má v intervalu $(y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ derivaci $F'_y(x^* + h, y)$.

Abychom mohli aplikovat větu o přírůstku funkce, použijeme rovnost

$$F(x^*+h,y^*+k)-F(x^*,y^*)=$$
$$=(F(x^*+h,y^*+k)-F(x^*+h,y^*))+(F(x^*+h,y^*)-F(x^*,y^*)).$$

Nyní již můžeme užít větu o přírůstku funkce zvlášť při posunu souřadnice na ose x a y a dostaneme tak rovnost

$$F(x^*+h,y^*+k)-F(x^*,y^*)=k\cdot F'_y(x^*+h,y^*+\theta_2 k)+h\cdot F'_x(x^*+\theta_1 h,y^*),\quad (4.3)$$

kde θ_1, $\theta_2 \in (0,1)$.

Vyjdeme-li z rovnosti (4.3), je nám jasné, že platí i pro $k=0$ (vypadne první člen na pravé straně), stejně jako pro $h=0$ (odpadne druhý člen vpravo).

Připomeňme si, že x^* je z intervalu $(x_0-\Delta,x_0+\Delta)$ a $|h|$, $h\neq 0$, je tak malé, že i bod x^*+h leží v tomto intervalu. Definujme funkci $k(h)$ pomocí vztahu

$$k(h)=f(x^*+h)-f(x^*).$$

Z této rovnice si vyjádříme funkční hodnotu v bodě $x=x^*+h$, o které navíc víme, že padne do intervalu $(y_0-\Delta,y_0+\Delta)$

$$f(x^*+h)=f(x^*)+k(h).$$

V důkazu bodu (I) jsme si ověřili, že

$$F(x^*,y^*)=0,$$

tedy i

$$F(x^*,f(x^*))=0$$
$$F(x^*+h,f(x^*)+k(h))=F(x^*+h,f(x^*+h))=0$$

Dosadíme-li takto získané vztahy do rovnosti (4.3), dostaneme

$$k(h)\cdot F'_y(x^*+h,f(x^*)+\theta_2 k(h))+h\cdot F'_x(x^*+\theta_1 h,f(x^*))=0.$$

A jelikož jsme si již dříve dokázali (viz vztah (4.1)) že

$$F'_y\neq 0 \qquad \text{na } K=(x_0-c,x_0+c)\times(y_0-c,y_0+c),$$

můžeme z poslední rovnice vyjádřit $k(h)$ následovně

$$k(h) = -\frac{F'_x(x^* + \theta_1 h, f(x^*)) \cdot h}{F'_y(x^* + h, f(x^*) + \theta_2 k(h))}. \tag{4.4}$$

Podle vztahu (4.1) je

$$F'_y(x^* + h, f(x^*) + \theta_2 k(h)) > \frac{1}{2}a,$$

proto

$$|k(h)| \leq \frac{2}{a} \left| h \cdot F'_x(x^* + \theta_1 h, f(x^*)) \right|.$$

Derivace funkce se definuje pomocí limity, proto nás bude zajímat limita

$$\lim_{h \to 0} (f(x^* + h) - f(x^*)). \tag{4.5}$$

Nejdříve však vypočteme limitu funkce $k(h)$ pro $h \to 0$. Z předpokladu (2) víme, že je funkce F'_x spojitá na U, z čehož plyne (stále sledujme Obrázek 4.2)

$$\lim_{h \to 0} (F'_x(x^* + \theta_1 h, f(x^*))) = F'_x(x^*, f(x^*)). \tag{4.6}$$

Stejně tak je z pravidla o limitě součinu zřejmé, že

$$\lim_{h \to 0} (F'_x(x^* + \theta_1 h, f(x^*)) \cdot h) = 0; \tag{4.7}$$

a odtud je vidět, že

$$\lim_{h \to 0} k(h) = 0. \tag{4.8}$$

Tedy čitatel zlomku z (4.4) je v limitě pro $h \to 0$ roven nule. Nyní nám ještě zbývá spočítat limitu jmenovatele zlomku na pravé straně.

V souladu s Obrázkem 4.2 a výpočtem (4.8), se bod $(x^* + h, f(x^*) + \theta_2 k(h))$ pro $h \to 0$ blíží bodu $(x^*, f(x^*))$, tj. pak

$$\lim_{h \to 0} F'_y(x^* + h, f(x^*) + \theta_2 k(h)) = F'_y(x^*, f(x^*)). \tag{4.9}$$

Vraťme se zpět k výpočtu limity funkce $F'_x(x^* + \theta_1 h, f(x^*)) \cdot h)$ pro $h \to 0$. Již víme, že tato limita je pro $h \to 0$ rovna nule a to díky tomu, že právě h jde v limitě k nule. Pokud však nechceme, aby se i $k(h)$ rovnalo nule, musíme obě strany rovnice (4.3) vydělit hodnotou h. Dostaneme tedy rovnost

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} = - \lim_{h \to 0} \frac{F'_x(x^* + \theta_1 h, f(x^*)) \cdot h}{F'_y(x^* + h, f(x^*) + \theta_2 k(h)) \cdot h}. \tag{4.10}$$

Dosadíme-li do této rovnice vztahy získané z (4.6) a (4.9), získáme dokazovaný vztah pro derivaci implicitní funkce

$$f'(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} = -\frac{F'_x(x^*, f(x^*))}{F'_y(x^*, f(x^*))}.$$

(Připomeňme si, že x^* je libovolný bod z intervalu $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$.)

Bod (III) je tedy dokázán.

Ze vztahu pro výpočet derivace implicitní funkce

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad \text{pro } \forall x \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \tag{4.11}$$

vyplývá, že funkce $f'(x)$ je spojitá na intervalu $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$ proto, že do spojitých funkcí F'_x a F'_y dosazujeme za y spojitou funkci $f(x)$ (funkce $f(x)$ je spojitá, protože jsme podle (4.11) dokázali, že má derivaci).

Tímto je zároveň i dokázáno tvrzení (II). □

Poznámka 4.1. Zde uvedený důkaz věty o implicitní funkci není samozřejmě jediný možný, může se lišit jak v detailech, tak přístupech. Například autoři knihy [4] Zuzana Došlá a Ondřej Došlý, stejně jako Bohuslav Hrůza v [2], k důkazu bodu (I) Věty 4.1 využili větu o pevném bodě.

Poznámka 4.2. Výše uvedená věta 4.1 nám dává i návod pro výpočet derivace implicitní funkce (viz bod (III)). V praxi se však častěji obě strany rovnice derivují podle proměnné x, kdy y považujeme za funkci proměnné x a derivujeme ji dle věty o derivaci složené funkce, tedy vypočteme derivaci vnější funkce a násobíme ji derivací funkce vnitřní. Na následujícím příkladu si ukážeme obě možnosti výpočtu derivace implicitní funkce.

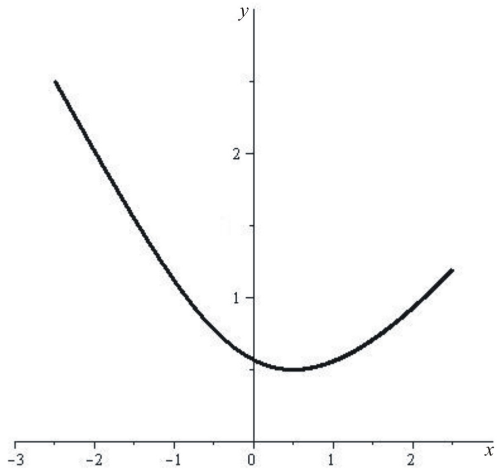
Příklad 4.1. Určete derivaci funkce f zadané implicitně rovnicí

$$F(x,y) = x + y - e^{x-y} = 0$$

oběmi možnými metodami:

a) pomocí vzorce,

b) pomocí derivace složené funkce.



Obrázek 4.3: Funkce implicitně zadaná rovnicí $F(x,y) = x + y - e^{x-y}$=0.

Řešení.

a) Při výpočtu derivace pomocí vzorce $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ (viz bod (III) Věty 4.1) vypočteme nejprve jednotlivé parciální derivace

$$F'_x(x,y) = 1 - e^{x-y}$$

$$F'_y(x,y) = 1 + e^{x-y}.$$

Vidíme, že obě parciální derivace jsou spojité na celé množině $\mathbb{R}^2$ a můžeme je tedy dosadit do výše uvedeného vzorce

$$f'(x) = -\frac{1 - e^{x-y}}{1 + e^{x-y}} = \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1}.$$

b) Derivováním funkce F jako složené funkce dostaneme rovnici

$$1 + y' - e^{x-y} \cdot (1 - y') = 0,$$

ze které vyjádříme y', tedy

$$1 + y' - e^{x-y} + y'e^{x-y}$$

$$y' = \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1}.$$

Vidíme, že výsledky vyšly shodně, je tedy na nás, kterou možnost výpočtu si vybereme. □

Poznámka 4.3. Postup z Poznámky 4.2 je vhodný i při výpočtu vyšších derivací implicitně zadané funkce. Stačí derivovat rovnici

$$F_x(x, y) + y'F'_y(x, y) = 0$$

ještě jednou podle proměnné x a dostaneme tak rovnici

$$F'_x x(x, y) + F'_x y(x, y)y' + y''F_y(x, y) + y'(F'_y x(x, y) + F'_y y(x, y)y') = 0,$$

ze které následně vypočteme y''.
Takto můžeme postupovat dále – z rovnice (4.3) odvodíme vztah pro derivaci y''' atd.

Větu o implicitní funkci lze samozřejmě analogicky vyslovit pro případ implicitní funkce, která každému vzoru y přiřadí obraz x (tedy pro případ zcela opačný). A stejně tak není příliš obtížné ji zobecnit pro funkci n proměnných.

Věta 4.2 (o implicitní funkci více proměnných)**.** *Uvažujme rovnici*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)) = 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Množinu řešení této rovnice označme M. Nechť

(1) bod $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0) \in M$,

(2) funkce Fje hladká v okolí bodu $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0)$,

(3) $F'_y(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0) \neq 0.$

Potom

(I) *rovnice* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ *popisuje v určitém okolí bodu* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ *implicitní funkci* n *proměnných* f*, přičemž*

(II) f *je spojitá v okolí bodu* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *a*

(III) *v tomto okolí má spojité parciální derivace* f'_{x_k} *podle proměnné* x_k *pro všechna* $k = 1, 2, \ldots, n$ *a platí*

$$f'_{x_k}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{F'_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)}{F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)}, \qquad \textit{pro } \forall k = 1, 2 \ldots, n,$$

kde $y = f(x_1, \ldots, x_n)$*.*

Důkaz. je obdobný jako důkaz Věty 4.1. □

Poznámka 4.4. Již v úvodu jsme předeslali, že pro nás budou prioritní funkce dvou proměnných, i proto se zde důkazem Věty 4.2 nebudeme zabývat detailněji. Důkaz věty o implicitní funkce více proměnných lze provést i zobecněním důkazu Věty 4.1 s použitím věty o pevném bodě.

Důkaz Věty o implicitní funkci více proměnných je případem systému rovnic pro $m = 1$. Více viz popis níže nebo v literatuře [7] nebo [2].

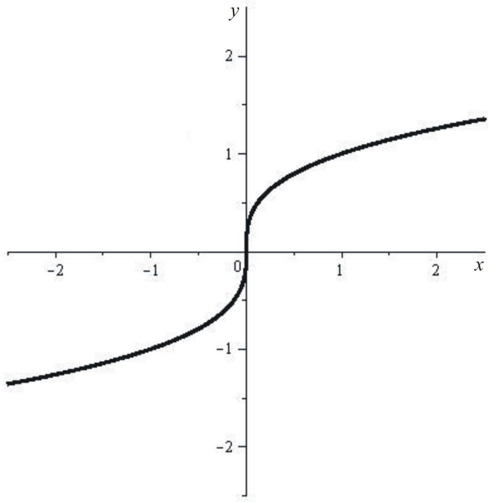
V zobecňování věty o implicitní funkci však můžeme jít ještě dále. Mnoho autorů přeskakuje důkaz věty o implicitní funkci více proměnných, ale za to se podrobněji zabývá zněním a důkazem Věty 4.1 pro m funkcí F_i, $i = 1, \ldots, m$, $n+m$ proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_m$, kde se na funkce $F_1, \ldots, F_m$ můžeme dívat jako na zobrazení z $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$. Uvažujeme tak systém rovnic

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

$$\vdots$$

$$F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Podrobnější výklad včetně důkazu lze nalézt kupříkladu v [7] nebo [2].



Obrázek 4.4: Funkce f implicitně zadaná rovnicí $F(x,y) = x - y^3 = 0$.

Příklad 4.2. V závěru této kapitoly si na funkci $F(x,y) = x - y^3$ si ukážeme, že i když není splněna podmínka $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ Věty 4.1, neznamená to, že na nějakém Δ-okolí bodu $(0,0)$, $\Delta > 0$, nelze množinu M, tj. řešení rovnice $F(x,y) = 0$, popsat jedinou rovnicí $y = f(x)$. Podívejme se na Obrázek 4.4. Podmínka (III) věty o implicitní funkce splněna není, $F'_y(0,0) = 0$, ale přesto lze v libovolném okolí bodu $(0,0)$ popsat funkci $F(x,y) = x - y^3$ rovnicí $y = \sqrt[3]{x}$.

5 Příklady a aplikace

V této kapitole nás bude čekat jak praktická ukázka využití získaných poznatků, tak i představení několika případů, kde se aplikuje teorie implicitně zadaných funkcí. Již byla vyslovena věta o implicitní funkci, uveden vztah pro derivování takto zadaných funkcí a teď by bylo vhodné, abychom si ukázali, jak tyto nástroje poslouží v praxi. Dále si na příkladech budeme demonstrovat některé vlastnosti implicitních funkcí, na které ještě nepřišla řeč, a zjistíme, že se zase tolik neliší od vlastností funkcí zadaných explicitně.

5.1 Vlastnosti implicitních funkcí v příkladech

Začneme dvěma příklady, na kterých si ukážeme, jak šikovně se dá Věta 4.1 o existenci implicitní funkce použít. Další příklady nás seznámí s některými vlastnostmi implicitních funkcí a pro úplnost zahrneme i jeden příklad na funkci tří proměnných, abychom se přesvědčili, že uvedená tvrzení neplatí pouze v $\mathbb{R}^2$.

Příklad 5.1. Vraťme se k Příkladu 3.3 (u kterého je též uveden Obrázek Descartova listu 3.3) a rozhodněme, zda rovnice $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ definuje v okolí bodu $(0, 0)$ implicitní funkci f proměnné x.

Řešení. Na první pohled je zřejmé, že z dané rovnice nejde osamostatnit proměnnou y, a tak funkci vyjádřit v explicitním tvaru. Musíme proto použít větu o implicitní funkci. Nejprve pro funkci $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ověříme předpoklady této věty.

(1) Protože platí

$$F(0, 0) = 0 + 0 - 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

bod $(0, 0)$ vyhovuje této rovnici a tudíž je první předpoklad splněn.

(2) Ověříme, zda je funkce F hladká v okolí bodu $(0, 0)$. Proto vypočítáme obě její parciální derivace:

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 3y \qquad F'_y(x, y) = 3y^2 - 3x$$

Obě tyto parciální derivace jsou elementární funkce, a tudíž jsou spojité na celé množině $\mathbb{R}^2$ (tedy i v okolí bodu $(0, 0)$).

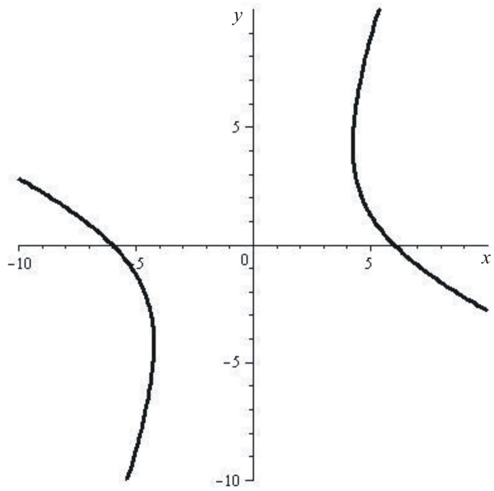
(3) Vypočítáme parciální derivace podle y v bodě $(0,0)$ a zjistíme tak, zda je různá od nuly či nikoli.

$$F'_y(x,y) = 3y^2 - 3x \qquad F'_y(0,0) = 3\cdot 0 - 3\cdot 0 = 0$$

Vidíme, že $F'_y(0,0) = 0$, poslední předpoklad věty o implicitní funkci tedy není splněn.

Jelikož funkce $F(x,y) = x^3+y^3-3xy$ má nulovou derivaci F'_y v bodě $(0,0)$ (tj. není splněn jeden z předpokladů věty o implicitní funkci), nemůžeme zaručit, že rovnice $x^3+y^3-3xy=0$ definuje v okolí bodu $(0,0)$ implicitně funkci f proměnné x. □

Příklad 5.2. Najděte body křivky $x^2+2xy-y^2-32=0$, v nichž nejsou splněny předpoklady Věty 4.1. o existenci implicitní funkce $y=f(x)$.



Obrázek 5.1: Graf funkce implicitně zadané rovnicí $x^2+2xy-y^2-32=0$.

Řešení. Začneme tím, že dle Věty 4.1 označíme $F(x,y) = x^2+2xy-y^2-32$. Vidíme, že definičním oborem této funkce je celá množina $\mathbb{R}^2$ a navíc je funkce spojitá ve všech bodech svého definičního oboru. Nyní si vypočítáme parciální derivace funkce F, tj.

$$F'_x(x,y) = 2x+2y$$

$$F'_y(x,y) = 2x-2y,$$

ze kterých je též patrné, že obě tyto parciální derivace jsou spojité ve všech bodech z $\mathbb{R}^2$. Tímto bychom měli splněnu podmínku (2) hladkosti funkce F.
Co se týká prvního předpokladu, musí hledané body patřit do množiny M, která je řešením rovnice $F(x, y) = 0$, jinými slovy, musí splňovat podmínku $F(x_0, y_0) = 0$. Stejně tak dle posledního předpokladu musí být parciální derivace F'_y v bodě (x_0, y_0) nulová. Tím dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x a y ve tvaru

$$x^2 + 2xy - y^2 - 32 = 0$$

$$2x - 2y = 0.$$

Jednoduchým vyjádřením jedné proměnné z druhé rovnice a jejím dosazením do rovnice první získáme dva body, které nám výše zmíněné předpoklady nesplňují. Těmi body jsou $(4, 4)$ a $(-4, -4)$. Závěrem tedy můžeme říci, že v bodech $(4, 4)$ a $(-4, -4)$ rovnice $x^2+2xy-y^2-32 = 0$ nejsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci. $\square$

V úvodu této práce jsme si řekli, že se budeme zabývat především funkcemi dvou proměnných. Abychom však ukázali, že všechny vztahy platí analogicky i pro funkce více proměnných, v následujícím příkladu se budeme zabývat funkcí tří proměnných, kterou lze ještě znázornit graficky.

Příklad 5.3. Určete rovnici tečné roviny v bodě $A = (1, 1, 1)$ k ploše určené rovnicí $F(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xz + x + y - z = 0$.

Řešení. Nejdříve ze všeho že určíme definiční obor funkce F. Vyjádřeme tedy z funkce F proměnnou z a dostaňme vztah

$$z = f(x, y) = \frac{x^3 + y^3 + x + y}{3x + 1}.$$

Funkce $f(x, y)$ je tedy definována na celém $\mathbb{R}^2$ kromě bodu $(-\frac{1}{3}, y)$.

Také musíme ověřit, zda jsou splněny předpoklady Věty 4.1:

(1) bod $(1, 1, 1)$ náleží do množiny řešení rovnice $F = 0$,

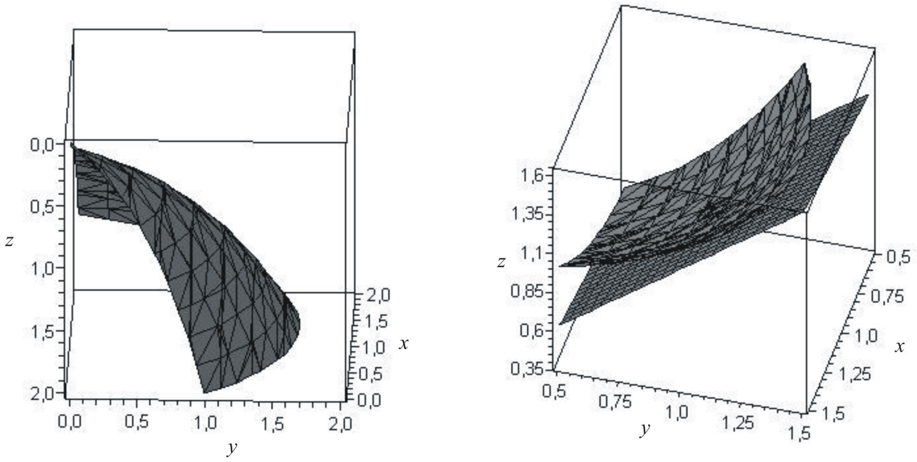
(2) protože všechny parciální derivace funkce F jsou elementárními funkcemi

$$F'_x(x,y,z) = 3x^2 - 3z + 1 \quad F'_y(x,y,z) = 3y^2 + 1 \quad F'_z(x,y,z) = -3x - 1, \tag{5.1}$$

je zřejmé, že funkce $F(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3xz + x + y - z$ je hladká.

(3) $F'_y = 3y^2 + 1 \quad F'_z(1,1,1) = 4 \neq 0.$

Všechny předpoklady věty o implicitní funkci jsou tedy splněny.



Obrázek 5.2: Graf funkce f zadané rovnicí $F(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3xz + x + y - z = 0$ (vlevo) a tečná rovina funkce f v bodě A (vpravo).

Tečná rovina k funkci $f(x,y)$ v bodě $A = (x_0, y_0, z_0)$ má obecně tvar

$$z - z_0 = f'_x(A) \cdot (x - x_0) + f'_y(A) \cdot (y - y_0).$$

Protože funkce f je zadaná implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$, její parciální derivace jsou

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{5.2}$$

Parciální derivace funkce $F(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3xz + x + y - z$ jsou již vypočítali (viz. (5.1)), stačí dosadit do vztahu (5.2). Získáme tak parciální derivace funkce f

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 - 3z + 1}{-3x - 1} \qquad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{3y^2 + 1}{-3x - 1}.$$

Hodnoty parciálních derivací v bodě $A = (1,1,1)$ jsou

$$f'_x(A) = -\frac{3 - 3 + 1}{-3 - 1} = \frac{1}{4} \qquad f'_y(A) = -\frac{3 + 1}{-3 - 1} = 1.$$

Nyní již máme vše připraveno pro dosazení do obecného tvaru rovnice tečny

$$z - z_0 = f'_x(A) \cdot (x - x_0) + f'_y(A) \cdot (y - y_0)$$

$$z - 1 = \frac{1}{4} \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 1),$$

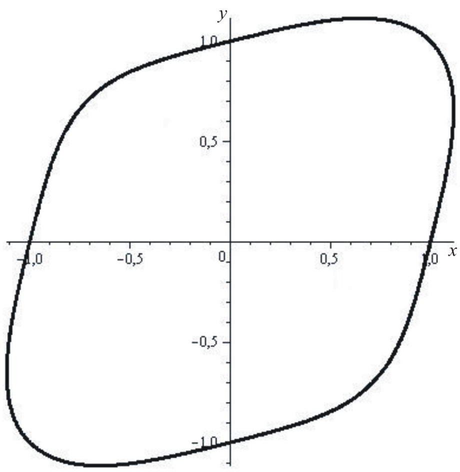
tečná rovina k implicitní funkci $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xz + x + y - z$ v bodě $A = (1, 1, 1)$ má tedy tvar

$$z = \frac{(x-1)}{4} + (y - 1) + 1, \quad \text{resp.} \quad x + 4y - 4z - 1 = 0. \qquad \square$$

Příklad 5.4. Rozhodněte, zda funkce f zadaná implicitně rovnicí

$$F(x, y) = x^4 - xy + y^4 - 1 = 0$$

je v bodě $x = 0$ a $y = 1$ rostoucí nebo klesající a konvexní nebo konkávní.



Obrázek 5.3: Funkce f implicitně zadaná rovnicí $F(x, y) = x^4 - xy + y^4 - 1 = 0$.

Řešení. Opět začneme ověřením předpokladů Věty 4.1.

(1) Do množiny M, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ F(x, y) = 0\}$, náleží všechny body z $\mathbb{R}^2$ kromě bodů, kdy $x = -y^3$. Bod $(0, 1) \in M$.

(2) Funkce $F(x, y) = x^4 - xy + y^4 - 1$ je hladká, neboť obě parciální derivace $F'_x(x, y) = 4x^3 - y$ a $F'_y(x, y) = -x + 4y^3$ jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité.

(3) $F'_y(x,y) = -x + 4y^3$, $F'_y(0,1) = 4 \neq 0$.

Tímto jsou předpoklady Věty 4.1 splněny a můžeme přistoupit k samotnému řešení příkladu.

Abychom určili, zda je funkce f v bodě $x = 0$ rostoucí nebo klesající, vypočteme si derivaci funkce v daném bodě, tj.

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

$$f'(x) = -\frac{4x^3 - y}{-x + 4y^3}$$

$$f'(0) = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4} > 0.$$

Derivace funkce f v bodě $x = 0$ vyšla kladně, funkce tak bude v okolí tohoto bodu rostoucí. Konvexnost nebo konkávnost funkce určíme z její druhé derivace

$$F'_x(x,y)) = 12x^2$$

$$F'_y(x,y) = 12y^2$$

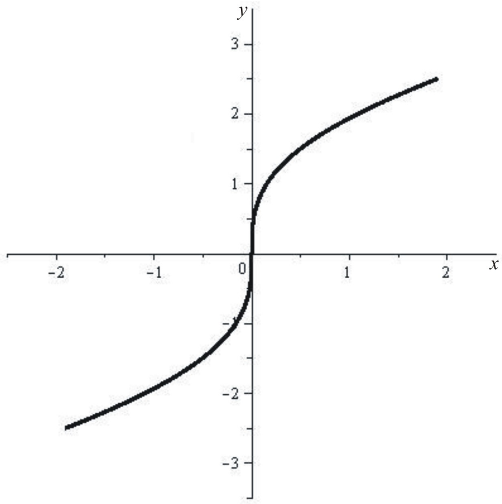
$$f'(x) = -\frac{12x^2}{12y^2}$$

$$f'(0) = -1 < 0.$$

Záporný výsledek druhé derivace funkce f v bodě $x = 0$ značí, že se bude jednat o konkávní průběh funkce v okolí bodu $x = 0$.

Výpočty jsme zjistili, že funkce zadaná implicitně rovnicí $x^4 - xy + y^4 - 1 = 0$ je v okolí bodu $x = 0$ rostoucí a konkávní. $\square$

Příklad 5.5. Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2})$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \epsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0{,}98)$.



Obrázek 5.4: Graf funkce f implicitně zadané rovnicí $y - x - \sin y = 0$.

Řešení. Pro ověření existence implicitní funkce budeme postupně ověřovat předpoklady Věty 4.1:

(I) Protože

$$\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{2} - 1 = 0,$$

bod $(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2})$ patří do množiny M, která je řešením rovnice $F = 0$.

(II)

$$F'_x(x, y) = -1$$

$$F'_y(x, y) = 1 - \cos y$$

Funkce F je spojitá tedy spojitá na celé množině $\mathbb{R}^2$.

(III) Parciální derivace funkce F se podle y nerovná nule

$$F'_y(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}) = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1.$$

Ověřili jsme, že rovnice $F(x, y) = 0$ tedy na okolí bodu $(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2})$ skutečně určuje implicitně funkci $y = f(x)$.

Taylorův polynom druhého stupně má obecně tvar

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \tag{5.3}$$

Ze zadání víme, že

$$f(\frac{\pi}{2}-1)=\frac{\pi}{2},$$

zbývá tedy dopočítat obyčejné parciální derivaci prvního a druhého stupně

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{-1}{1-\cos y}=\frac{1}{1-\cos y}$$

$$f'(\frac{\pi}{2}-1)=1$$

$$f''(x)=-\frac{0\cdot(1-\cos y)+\sin y\cdot y'}{(1-\cos y)^2}=-\frac{\sin y\cdot y'}{(1-\cos y)^2}$$

$$f''(\frac{\pi}{2}-1)=-\frac{1}{1}=-1.$$

Nyní stačí dosadit do vztahu (5.3), odkud získáme Taylorův polynom druhého stupně funkce f v bodě $x_0=\frac{\pi}{2}-1$

$$T_2(\frac{\pi}{2}-1)=\frac{\pi}{2}+(x-\frac{\pi}{2}+1)-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{2}+1)^2.$$

a ten upravíme do podoby

$$T_2(\frac{\pi}{2}-1)=x+1-\frac{(x-\frac{\pi}{2}+1)^2}{2} \tag{5.4}$$

Dosadíme-li do vztahu (5.1) za x hodnotu $\frac{\pi}{2}-0{,}98$, získáme přibližnou hodnutu funkce f v bodě $x=\frac{\pi}{2}-0{,}98$

$$f(\frac{\pi}{2}-0{,}98)\doteq T_2(\frac{\pi}{2}-0{,}98)=\frac{\pi}{2}-0,98+1-\frac{(\frac{\pi}{2}-0,98-\frac{\pi}{2}+1)^2}{2}\doteq 1{,}5906.$$

□

5.2 Využití teorie implicitních funkcí

V závěru této práce si řekneme něco o aplikacích implicitních funkcí. Teorie implicitních funkcí, zejména postup derivování implicitně zadaných funkcí, má využití nejen v samotné matematické analýze, kdy například potřebujeme znát průběh funkce, ze které nemůžeme proměnnou y osamostatnit, ale i v jiných vědních oborech. Zaměříme se zejména na oblast týkající se ekonomie a ekonomiky.

V první kapitole jsme zkoumali, jakými faktory je ovlivňována nabídka a poptávka produktů. Obdobným příkladem je produkční funkce popisující vztah mezi velikostí vstupů (výrobních faktorů) a velikostí výstupu, který firma produkuje [1]. Předpokládáme racionálně jednající firmu, proto produkční funkce vyjadřuje maximální objem výstupů, který lze s danými vstupy vytvořit. Uvědomme si, že produkční funkce v sobě nezahrnuje cenu za služby výrobních faktorů, pouze vyjadřuje, s jakými vstupy je firma schopna vytvořit dané výstupy. Vstupem může být například práce, kapitál, materiály, know-how apod., výstupem je zpravidla určitý produkt. Produkční funkci lze obecně zapsat ve tvaru

$$Q = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou jednotlivé vstupy.

Produkční funkce musí splňovat následující podmínky:

(1) $f(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq 0$, kde $X_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ a n je konečné přirozené číslo,

(2) f je neklesající funkce,

(3) f má parciální derivace alespoň druhého řádu, přičemž pro všechny n-tice $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, a všechna $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$f'_{X_i}(X_1, X_2, \dots, X_n) > 0,$$

$$f''_{X_i}(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0.$$

Budeme uvažovat situaci, kdy výnos (výstup) sice závisí na všech faktorech (vstupech) $X_1, X_2, \dots, X_n$, ale mění se pouze faktor X_1 a faktory $X_2, \dots, X_n$ zůstávají neměnné. Matematický zápis této situace vypadá takto

$$Q = f(X_1 / X_2, \dots, X_n).$$

Produkční funkce s jednou proměnnou je nejjednodušším případem. V praxi je však častější případ změny více faktorů. Můžeme například zkoumat, jak změna

[1] V této práce se budeme zabývat pouze mikroekonomickým pojetím produkční funkce. v makroekonomii produkční funkce vyjadřuje vztah jednotlivých odvětví a ekonomiky jako celku.

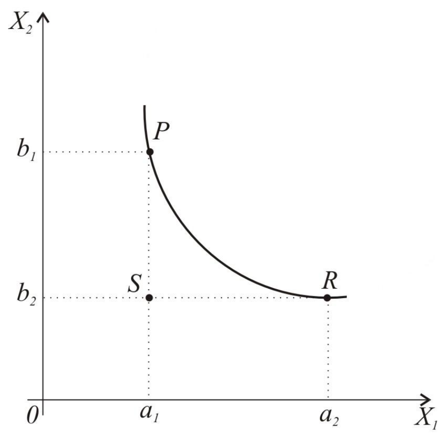
práce a kapitálu ovlivní množství výstupu. Obecně tuto dvoufaktorovou produkční funkci (mění se množství dvou vstupů) lze zapsat jako

$$Q = f(X_1, X_2/X_3, \ldots, X_n), \qquad \text{tedy} \qquad Q = f(X_1, X_2).$$

U produkční funkce s více proměnnými může docházet k vzájemnému vztahu mezi jednotlivými faktory. Kombinace výrobních faktorů jejichž pomocí je možno vyrobit stejný objem produkce je charakterizována izokvantou. Graficky si izokvantu můžeme představit jako vrstevnici produkční funkce v kartézské soustavě souřadnic s osami X_1 a X_2. Tvar izokvantové funkce je následující

$$X_2 = g(X_1//Q = konst.).$$

Poměr, v jakém jsou faktory kombinovány, je vyjádřen mezní mírou záměny faktorů, kterou budeme označovat $MMZF$. $MMZF$ představuje množství faktoru X_2, které bylo nahrazeno zvýšením druhého faktoru o jednotku, aniž by nastala změna v produkci. Důležité je, že i když nahradíme množství faktoru X_2 jednotkou faktoru X_1, množství výstupu se nezmění.



Obrázek 5.5: Obrázek ilustrující situaci v případě propočtu MZ.

Propočet mezní míry záměny se nazývá míra záměny MZ[2] a představuje poměr, v jakém je jeden faktor nahrazován druhým. V případě Obrázku 5.5 to na daném

[2]Ve výkladu je čerpáno z [14].

úseku izokvanty bude

$$MZ = \frac{PS}{RS} = \frac{\Delta X_2}{\Delta X_1}, \tag{5.5}$$

kde P a R jsou dva body různé vzájemné kombinace faktorů X_1 a X_2 na produkční křivce. Dále Δ označuje změnu v tom smyslu, že ΔX_1 vyjadřuje změnu ve směru osy X_1 (tj. $\Delta X_1 = a_2 - a_1$) a analogicky ΔX_2 označuje vzdálenost $b_1 - b_2$ (tedy posun ve směru osy X_2). Uvedený vztah (5.5) tak popisuje změnu kombinace faktorů ve směru od bodu P do bodu R, z toho vyplývá, že je vyráběno stále stejné množství produkce, avšak s použitím menšího množství faktoru X_2 a většího množství faktoru X_1. Budeme-li postupovat v opačném směru (od bodu R k bodu P), bude poměr (5.5) obrácený.

Přesný výpočet míry záměny se provádí pomocí derivace, kdy je vzdálenost bodů P a R na izokvantě nekonečně malá, takže je uvažován pouze bod P. Míra záměny je tak vyjádřena sklonem izokvanty v bodě P a vypočte se následovně

$$MZ = \frac{\frac{\Delta Y}{\Delta X_1}}{\frac{\Delta Y}{\Delta X_2}} = \frac{\Delta X_2}{\Delta X_1} \quad \xrightarrow{\Delta \to 0} \quad MMZF = \frac{dX_2}{dX_1},$$

kde ΔY představuje změnu produkce a zápisem $\Delta \to 0$ zjednodušujeme fakt, že $\Delta X_1 \to 0$ a $\Delta X_2 \to 0$.

Odvození mezní míry záměny lze však řešit, i když neznáme izokvantovou funkci. A to derivováním produkční funkce, která implicitně vyjadřuje izokvantovou funkci. Podle Důsledku (III) Věty 4.1 (derivaci implicitní funkce dle bodu (III) věty o implicitní funkci můžeme aplikovat, jelikož produkční funkce splňuje předpoklady této věty) je mezní míra záměny rovna

$$MMZF = -\frac{f'_{X_1}}{f'_{X_2}}.$$

Tímto výpočtem se usnadňujeme vyčíslení $MMZF$, jelikož propočet parciálních derivací bývá zpravidla snazší než stanovení izokvantové funkce a její derivace.

Využití derivace implicitní funkce tímto způsobem není jediné. Jako další příklad můžeme zmínit hledání optima v národním hospodářství. Teorii implicitních funkcí lze dále aplikovat třeba v případě vícekriteriálního rozhodování (konkrétně se jedná o kompenzační analýzu), stejně jako třeba v menších dílech a studiích, pro zajímavost můžeme uvést numerickou analýzu ekologické daňové reformy, kterou popisuje Jan Brůha ve své práci [15].

6 Závěr

Téma této bakalářské práce bylo pro mě velikou výzvou. Jakožto studentka aplikované matematiky-ekonomie pracující v bance mám blíže k příkladům a využívání teoretického podkladu pro praktické účely a výpočty. Na druhou stranu bez čistě matematické základny bych neměla tyto aplikace na čem stavět. Důvod výběru tématu implicitních funkcí, v němž hraje prim důkaz věty o implicitní funkci, je tedy zřejmý - prohloubit si znalosti a dovednosti matematické analýzy, bez kterých bych se ani v tom ekonomickém světě neobešla.

Doufám, že se mi tento úmysl alespoň z části vydařil stejně jako to, že jsem se naučila pracovat s více zdroji zároveň a snažila se získané informace roztřídit na více a méně důležité. Nelehkým úkolem bylo pro mě též udržení stylu typického pro matematický text se současnou snahou o přehlednost a srozumitelnost. Za kontrolu matematického rázu děkuji především paní doktorce Kouřilové.

Nezanedbatelným přínosem jsou pro mě také získané zkušenosti, které mohu využít i v běžném životě. Jako například, že nemám věřit všemu, co je psáno, nebo že si mám po sobě každou větu raději třikrát zkonrolovat.

Tato práce se snaží co nejpřehledněji představit implicitní funkce, zpřehlednit zakládní poznatky o funkcích všeobecně a ukázat, že ne každý matematický text musí být plný vět a definic a přesto pro některé může být přínosný.

Při sbírání informací týkajících se implicitní funkcí jsem si všimla, že mnoho studentů nemá ponětí, co to implicitní funkce jsou. A když, tak pouze základní představu. Pro ně, jakožto i pro všechny ostatní, kteří by se o implicitních funkcích chtěli dozvědět něco více, doporučuji tuto bakalářskou práci k přečtení.

Literatura

[1] Barbec, J., Martan, F., Rozenský, Z., Matematická analýza I, 1. vydání. SNTL/Alfa, Praha, 1985

[2] Brabec, J., Hrůza, B., Matematická analýza II, 1. vydání. SNTL/Alfa, Praha, 1986

[3] Mádrová, V., Matematická analýza I, 2. vydání. Olomouc, 2004

[4] Došlá Z., Došlý, O., Diferenciální počet funkcí více proměnných, 3. vydání. Brno, 2006

[5] Kopáček, J., Matematická analýza pro fyziky II, Matfyzpress, Praha, 2003

[6] Jarník, V., Diferenciální počet (I), 7. vydání. Academia, Praha, 1984

[7] Jarník, V., Diferenciální počet (II), 3. vydání – doplněné. Academia, Praha, 1976

[8] Krantz, S. G., Parks, H. R., The Implicit Function Theorem: History, Theory, And Application [online], část dostupná z http://books.google.cz/books?id=ya5yy5EPFD0C&dq=implicit+function+application&printsec=frontcover&source=bl&ots=7lPxDlvtPu&sig=IlXm2FXuK3AE09cfIl9avTqHlPU&hl=cs&ei=-FDDSvmdKsn4_Abt7bzNAg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=3&ved=0CBIQ6AEwAjgK#v=onepage&q=implicit%20function%20application&f=false [citováno 15.10.2009]

[9] Sikorski, R., Diferenciální a integrální počet, Funkce více proměnných, druhé, změněné a doplněné vydání. Academia, Praha, 1973

[10] Kaňka, M., Henzler, J., Matematika pro ekonomy (2), Ekopress, 1997

[11] Sbírka příkladů Matematika II pro strukturované studium, Ústav matematiky VŠCHT Praha [online], dostupné z http://www.vscht.cz/mat/sbirka/KapitolaII8.pdf [citováno 25.9.2009]

[12] Kouřilová, P., III. Funkce jedné proměnné [online], dostupné z http://kma.me.sweb.cz/funkce.pdf [citováno 15.10.2009]

[13] Funkce zadaná implicitně, ÚM FSI VUT v Brně, 2007 [online], dostupné z http://mathonline.fme.vutbr.cz/UploadedFiles/820.pdf [citováno 30.9.2009]

[14] Úvod do ekonomiky odvětví zemědělské výroby, Učební text [online], dostupné z http://home.zf.jcu.cz/public/users/urbanek/publikace/html/scripta/ekon.odv/index.htm [citováno 25.9.2009]

[15] Brůha, J., Numerická analýza transitivní dynamiky ekologické daňové reformy v modelech endogenního ekonomického růstu [online], dostupné z www.czp.cuni.cz/ekoreforma/KONFERENCE/FSV1-11-2002/Bruhaczedited-rev.doc [citováno 30.9.2009]