



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## NAPJATOSTNĚ DEFORMAČNÍ ANALÝZA PŘÍHRADOVÉ JEŘÁBOVÉ KONSTRUKCE S UVAŽOVÁNÍM PROMĚNLIVÉ POLOHY ZATĚŽUJÍCÍ SÍLY

STRESS-STRAIN ANALYSIS OF CRANE TRUSS LOADED BY A FORCE WITH VARYING POSITION

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

#### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

GABRIEL CABAJ

#### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. JIŘÍ VAVERKA

BRNO 2021



# Zadaní bakalářské práce

|                   |  |
|-------------------|--|
| Ústav:            | Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky |
| Student:          | <b>Gabriel Cabaj</b>                               |
| Studijní program: | Strojírenství                                      |
| Studijní obor:    | Základy strojního inženýrství                      |
| Vedoucí práce:    | <b>Ing. Jiří Vaverka</b>                           |
| Akademický rok:   | 2020/21  |

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Napjatostně deformační analýza příhradové jeřábové konstrukce s uvažováním proměnlivé polohy zatěžující síly**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Většina prutových konstrukcí je v provozu zatížena silami, jejichž poloha se v čase mění. Analýzu namáhání, návrh nebo hodnocení bezpečnosti těchto konstrukcí je potom nutné provádět s uvažováním celého přípustného rozsahu poloh zatěžujících sil, což výpočet značně komplikuje. Příkladem jsou portálové jeřáby s příhradovými mosty, u kterých namáhání jednotlivých prutů mostu a jeho deformace závisí na konkrétní poloze jeřábové kočky se zavěšeným břemenem. Praktickým nástrojem pro analýzu konstrukcí tohoto typu jsou tzv. příčinkové čáry, které jsou grafickým znázorněním závislosti pozorované veličiny (např. napětí nebo průhybu v daném místě konstrukce) na poloze zatěžující síly.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Seznámit se s koncepcí příčinkových čar.
2. S využitím teorie prosté pružnosti a příčinkových čar provést napjatostně deformační analýzu zjednodušené 2D soustavy reprezentující příhradový most portálového jeřábu.
3. Na základě dostupných údajů z literatury vytvořit 3D model příhradového mostu portálového jeřábu s realistickými parametry.
4. Provést napjatostně deformační analýzu vytvořeného 3D modelu pomocí MKP v softwaru Ansys s uvažováním proměnlivé polohy zatěžující síly.

### **Seznam doporučené literatury:**

JANÍČEK, Přemysl. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3. vyd. Brno: CERM, 2004. 287 s. ISBN 80-21-2592-X.

McCORMAC, Jack C. Structural Analysis: Using Classical and Matrix Methods. 4th ed. New Jersey: Wiley, 2012. 624 s. ISBN: 978-0-470-03608-2.

GERE, James M. a GOODNO, Barry J. Mechanics of materials. 7th ed. Stamford: Cengage Learning, 2009. 1002 s. ISBN 978-0-495-43807-6.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Táto bakalárska práca sa zaoberá napätostne-deformačnou analýzou priehradovej konštrukcie mostu portálového žeriavu. V teoretickej časti sú objasnené základné pojmy staticky, pružnosti a pevnosti. Rovnako je predstavená koncepcia vplyvových čiar a jej použitie na riešenie napätovo-deformačných analýz konštrukcií s premenlivou polohou zaťažujúcej sily. V praktickej časti je riešený modelový 2D príklad, konkrétne návrh priečneho prierezu pre zjednodušený model portálového žeriavu, ktorý je reprezentovaný prúťovou sústavou. Porovnávané sú výsledky pre prúťové sústavy s rôznym stupňom statickej neurčitosti. Následne sú analytické výsledky verifikované numerickým riešením v softvéri ANSYS. V poslednej analýze je z dostupných zdrojov vytvorený 3D model portálového žeriavu s realistickými parametrami. Nakoniec je prevedená jeho deformačne-napätová analýza s uvažovaním premenlivej polohy zaťažujúcej sily.

## **Summary**

The bachelor thesis deals with the stress-strain analysis of the truss of a gantry crane. The theoretical part clarifies the basic concepts of statics, elasticity and strength. The concept of influence lines and its use for solving stress-strain analyses of structures with variable position of the loading force is further presented. The practical part deals with a model 2D example, specifically, the design of a cross section for a simplified model of a gantry crane, which is represented by the truss structure. The results for trusses with different degrees of static indeterminacy are compared. Subsequently, the analytical results are verified by the numerical solution in ANSYS software. In the last analysis, a 3D model of a gantry crane with realistic parameters from available sources is created. Finally, the stress-strain analysis of the gantry crane is performed considering the variable position of the loading force.

## **Klíčová slova**

prúť, portálový žeriav, deformačne-napätová analýza, vplyvové čiary, metóda konečných prvkov, priehradová konštrukcia, prúťová sústava, premenlivá poloha zaťaženia

## **Keywords**

bar, gantry crane, stress-strain analysis, influence lines, finite element method, truss, varying position of force

CABAJ, G. *Napjatostně deformační analýza příhradové jeřábové konstrukce s uvažováním proměnlivé polohy zatěžující síly*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2021. 79 s. Vedoucí Ing. Jiří Vaverka.

Prehlasujem, že túto prácu som vypracoval samostatne, na základe dostupných literárnych zdrojov uvedených na konci práce, pod odborným vedením vedúceho práce pána Ing. Jiřího Vaverky.

Gabriel Cabaj

Chcel by som sa úprimne poďakovať pánovi Ing. Jiřímu Vaverkovi za jeho profesionálny prístup a čas, ktorý mi venoval pri písaní tejto práce a takisto za vyčerpávajúce zodpovedanie akýchkoľvek dotazov. V neposlednom rade by som sa chcel poďakovať rodičom, ktorí ma neprestajne podporovali počas štúdia. Nemôžem zabudnúť ani na svojich priateľov, či už zo školy alebo z futbalového prostredia, tým patrí takisto ďakujem. Osobitne by som chcel poďakovať aj Lucke Holej, za jej neprestajnú oporu keď som, väčšinou vraj zbytočne, horel stresmi.

Gabriel Cabaj



# Obsah

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Úvod</b>  | <b>11</b> |
| <b>2</b> | <b>Portálové žeriavy</b>                             | <b>12</b> |
| <b>3</b> | <b>Teoretický základ</b>                             | <b>14</b> |
| 3.1      | Vymedzenie pojmu pružnosť a pevnosť . . . . .        | 14        |
| 3.1.1    | Úlohy v pružnosti a pevnosti . . . . .               | 14        |
| 3.2      | Prút v pružnosti a pevnosti . . . . .                | 14        |
| 3.3      | Prútové sústavy . . . . .                            | 15        |
| 3.3.1    | Predpoklady prútových sústav . . . . .               | 15        |
| 3.3.2    | Uvoľnenie prútovej sústavy . . . . .                 | 16        |
| 3.3.3    | Statický rozbor . . . . .                            | 16        |
| 3.3.4    | Metódy riešenia prútových sústav . . . . .           | 18        |
| 3.4      | Namáhanie prútu ťahom alebo tlakom . . . . .         | 18        |
| 3.4.1    | Základné vzťahy . . . . .                            | 18        |
| 3.4.2    | Energia napätosti . . . . .                          | 19        |
| 3.5      | Castiglianova veta . . . . .                         | 20        |
| 3.5.1    | Definícia . . . . .                                  | 20        |
| 3.5.2    | Znamienková konvencia . . . . .                      | 20        |
| 3.6      | Medzné stavy . . . . .                               | 20        |
| 3.6.1    | Spoľahlivosť . . . . .                               | 21        |
| 3.6.2    | Medzný stav deformácie . . . . .                     | 21        |
| 3.6.3    | Medzný stav pružnosti . . . . .                      | 21        |
| 3.6.4    | Medzný stav vzpernej stability . . . . .             | 22        |
| 3.7      | Vplyvové čiary . . . . .                             | 24        |
| 3.7.1    | Staticky určité uloženie prútu . . . . .             | 25        |
| 3.7.2    | Staticky neurčité uloženie prútu . . . . .           | 26        |
| 3.7.3    | Vplyvové čiary pre prútové sústavy . . . . .         | 27        |
| <b>4</b> | <b>Návrh rozmeru pre priečny prierez</b>             | <b>30</b> |
| 4.1      | Formulácia problému . . . . .                        | 30        |
| 4.2      | Staticky určitý variant . . . . .                    | 30        |
| 4.2.1    | Geometria a vstupné parametre . . . . .              | 30        |
| 4.2.2    | Uvažované zaťaženie . . . . .                        | 31        |
| 4.2.3    | Úplne uvoľnenie a statický rozbor . . . . .          | 31        |
| 4.2.4    | Rovnice rovnováhy . . . . .                          | 32        |
| 4.2.5    | Analýza zaťaženia . . . . .                          | 33        |
| 4.2.6    | Návrh priečneho prierezu . . . . .                   | 35        |
| 4.2.7    | Analýza deformácií . . . . .                         | 38        |
| 4.3      | Staticky neurčitý variant A . . . . .                | 39        |
| 4.3.1    | Geometria . . . . .                                  | 39        |
| 4.3.2    | Úplne uvoľnenie a statický rozbor . . . . .          | 40        |
| 4.3.3    | Čiastočné uvoľnenie a deformačná podmienka . . . . . | 41        |
| 4.3.4    | Analýza zaťaženia . . . . .                          | 41        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.3.5    | Návrh priečného prierezu . . . . .   | 42        |
| 4.3.6    | Analýza deformácií . . . . .   | 43        |
| 4.4      | Statically neurčitý variant B . . . . .  | 44        |
| 4.4.1    | Geometria . . . . .  | 44        |
| 4.4.2    | Úplné uvoľnenie a statický rozbor . . . . .  | 44        |
| 4.4.3    | Čiastočné uvoľnenie a deformačná podmienka . . . . .                                 | 45        |
| 4.4.4    | Analýza zaťaženia . . . . .  | 45        |
| 4.4.5    | Návrh priečného prierezu . . . . .   | 46        |
| 4.4.6    | Analýza deformácií . . . . .   | 47        |
| 4.5      | Statically neurčitý variant C . . . . .  | 47        |
| 4.5.1    | Geometria . . . . .  | 47        |
| 4.5.2    | Úplné uvoľnenie a statický rozbor . . . . .  | 48        |
| 4.5.3    | Čiastočné uvoľnenie a deformačná podmienka . . . . .                                 | 48        |
| 4.5.4    | Analýza zaťaženia . . . . .  | 49        |
| 4.5.5    | Návrh priečného prierezu . . . . .   | 50        |
| 4.5.6    | Analýza deformácií . . . . .   | 51        |
| 4.6      | Porovnanie . . . . .   | 51        |
| 4.7      | Diskusia k analytickému riešeniu . . . . .   | 54        |
| 4.7.1    | Zaťaženie vlastnou váhou . . . . .   | 54        |
| 4.7.2    | Uvažovanie rámovej konštrukcie . . . . .   | 56        |
| <b>5</b> | <b>Verifikácia výsledkov pomocou MKP v softvéri ANSYS</b>                            | <b>57</b> |
| 5.1      | Numerická analýza staticky určitého variantu použitím konečného prvku Link . . . . . | 57        |
| 5.2      | Porovnanie analytického a numerického riešenia staticky určitého variantu            | 58        |
| 5.3      | Numerická analýza použitím konečného prvku Beam . . . . .                            | 60        |
| <b>6</b> | <b>Deformačne - napätová analýza 3D modelu pomocou MKP</b>                           | <b>63</b> |
| 6.1      | Vstupné údaje . . . . .  | 63        |
| 6.2      | Okrajové podmienky a modelovanie zaťaženia . . . . .                                 | 65        |
| 6.3      | Vlastná analýza pomocou MKP . . . . .  | 66        |
| <b>7</b> | <b>Záver</b>   | <b>70</b> |
|          | <b>Literatúra</b>  | <b>71</b> |
|          | <b>Zoznam obrázkov</b>   | <b>73</b> |
|          | <b>Zoznam tabuliek</b>   | <b>75</b> |
|          | <b>Zoznam skratiek a použitých symbolov</b>  | <b>77</b> |
|          | <b>Zoznam príloh</b>   | <b>79</b> |

# 1. Úvod

Portálové žeriavy predstavujú ukázkový príklad typu priehradovej konštrukcie, pri ktorých je podstatné pri analýze uvažovať meniacu sa polohu zatažujúcich síl od žeriavovej mačky. Priehradové konštrukcie patrili v minulosti k najpopulárnejším riešeniam mostových konštrukcií a to z dôvodu ich relatívne nízkej výpočtovej náročnosti v kontexte doby, v ktorej boli najviac používané. Tieto konštrukcie sa v mechanike telies modelujú pomocou prútových sústav, ktorých výpočet je analyticky veľmi dobre zvládnuteľný, avšak na dnešné pomery rozvinutia numerických metód, primárne metódy konečných prvkov, je časovo značne náročnejší a obmedzený iba na niektoré typy konštrukcií.

Cieľom tejto práce bude práve zrealizovať napätostne - deformačnú analýzu priehradovej konštrukcie a to s uvažovaním premenlivej polohy zatažujúcej sily. Na tento problém je v praxi využívaná tzv. koncepcia vplyvových čiar, ktorá nie je v rámci základného štúdia v kurzoch pružnosti a pevnosti preberaná a táto práca má priblížiť jej praktické používanie a využitie či už prístupom analytickým alebo riešením numerickým pomocou softvéru ANSYS.

## 2. Portálové žeriavy

Portálový žeriav je veľmi podobný mostovému žeriavu, rozdiel je v tom, že sa nepohybuje po závesných dráhach. Miesto toho, sa s celou mostovou konštrukciou pohybujú aj podporné nohy. Tieto nohy sa pohybujú po koľajniciach, ktoré sú ukotvené v železobetónovom základe. Rozdiel medzi mostovým a portálovým žeriavom je znázornený na obrázku 2.1. Portálové žeriavy sú ideálne pre rýchly presun nákladu. Frekventovane využívané sú v železničných nákladných staniciach, prístavoch ale aj napríklad pri stavbe mostových konštrukcií [1].



(a) Mostový žeriav.

(b) Portálový žeriav.

Obr. 2.1: Prevedenie mostového a portálového žeriavu [1].

Keďže využitie portálových žeriavov je pomerne široká záležitosť, od pomocných žeriavov malých firiem, až po obrovské žeriavy v prístavoch, existuje pomerne široké spektrum výberu. Na zdvíhanie ťažkých bremien existujú dva populárne typy žeriavov, znázornené na obrázku 2.2. A to portálový žeriav s jedným nosníkom a s dvomi nosníkmi. Hlavný rozdiel medzi týmito dvomi typmi je dizajn, pri žeriave s jedným nosníkom sa žeriavová mačka pohybuje len na jednom nosníku, tento typ je ľahší a preto je vhodný pre malé a stredné projekty. Portálový žeriav s dvomi nosníkmi má zvyčajne dva nákladné previsy na oboch stranách a zväčšenú žeriavovú mačku, ktorá sa pohybuje medzi nosníkmi. Prevedenie s dvomi nosníkmi má zvyčajne väčšiu únosnosť a umožňuje dosiahnuť väčšie rozpätie. Typické využitie je v prístaviskách [2].

## 2. PORTÁLOVÉ ŽERIAVY



(a) Prevedenie s jedným nosníkom.



(b) Prevedenie s dvomi nosníkmi.

Obr. 2.2: Rozdiel medzi portálovým žeriavom s jedným a s dvomi nosníkmi [2].

Nosná časť konštrukcie môže mať rôzne prevedenia. Okrem "plného" prevedenia, sa využívajú aj priehradové konštrukcie znázornené na obrázku 2.3.



(a) Prevedenie s jedným nosníkom [3].



(b) Prevedenie s dvomi nosníkmi [4].

Obr. 2.3: Prevedenie portálových žeriavov ako priehradové konštrukcie.

## 3. Teoretický základ

Táto časť bakalárskej práce ma v stručnosti predstaviť základné pojmy a princípy potrebné k riešeniu výpočtového problému v tejto práci. Nemá v celom rozsahu suplovať odbornú literatúru alebo skriptá. Mali by byť objasnené iba tie najdôležitejšie veci. Na rozvinutie týchto pojmov sú uvedené pramene, ktoré danú problematiku rozvíjajú v plnej miere.

### 3.1. Vymedzenie pojmu pružnosť a pevnosť

Pružnosť a pevnosť je jedným zo základných predmetov mechaniky telies a zaoberá sa určovaním deformácie, napätosti a porušovaním celistvosti telesa v závislosti na vonkajšom zatažení. Súčasťou pružnosti a pevnosti je formulácia medzných stavov a stanovenie bezpečnosti a spoľahlivosti [5].

#### 3.1.1. Úlohy v pružnosti a pevnosti

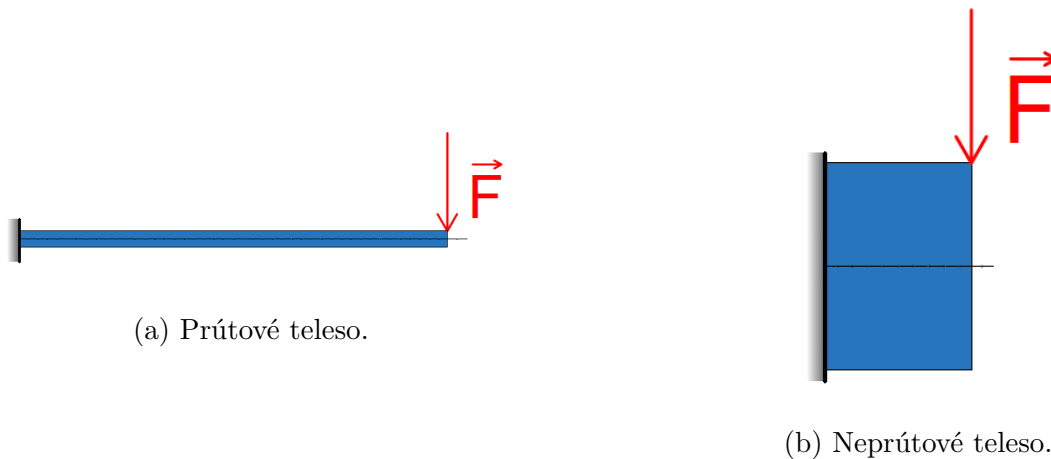
- Pomocné - určujú sa zväčša veličiny ktoré nemajú charakter pružno-pevnostných veličín, sú však potrebné pre výpočet napätosti a deformácie. Patrí sem napríklad určenie výsledných vnútorných účinkov (VVÚ) v prútoch.
- O kontrole - úloha je zadaná úplne a je potrebné väčšinou stanoviť bezpečnosť voči danému medznému stavu.
- O určení parametru - úloha nie je zadaná úplne, je potrebné určiť neznáme parametre tak, aby nenastal určitý medzný stav.
- O optimalizácií - obdoba úlohy o určení parametru avšak je potrebné splniť aj ďalšie, optimalizačné podmienky. Napríklad požiadavka najmensej hmotnosti.
- O odvodzovaní a dokazovaní - úlohy teoretického charakteru [6].

### 3.2. Prút v pružnosti a pevnosti

Prút je najjednoduchším výpočtovým modelom reálneho telesa z hľadiska vyšetovania deformácie a napätosti. Prút je dlhé štíhle teleso <sup>1</sup> určené strednicou a priečnym prierezom. Musí spĺňať určité geometrické, deformačné a napätostné predpoklady, ktoré sa nazývajú prútovými predpokladmi. Detailne popísané jednotlivé prútové predpoklady a klasifikácie prútov sú v dostupné v [5]. Ilustráciu prútového a neprútového telesa predstavuje obrázok 3.1.

---

<sup>1</sup>Dĺžka je aspoň 10x väčšia ako najväčší charakteristický rozmer priečného prierezu [5].



Obr. 3.1: Rozdiel medzi prútovým a neprútovým telesom.

### 3.3. Prútové sústavy

Prútové sústavy sú najjednoduchšou modelovou sústavou priehradových a prútových konštrukcií. Táto modelová sústava musí spĺňať určité predpoklady. Ak nie je uvedené inak, podkapitola 3.3 je čerpaná z literatúry [7].

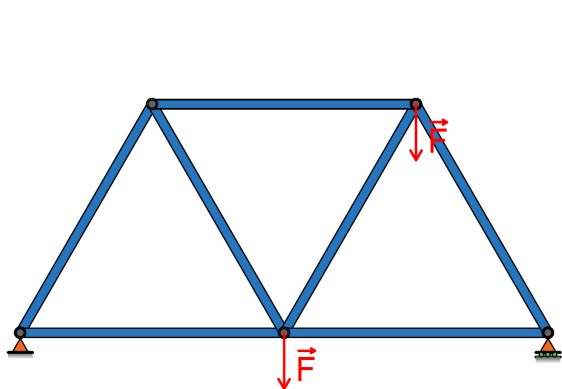
#### 3.3.1. Predpoklady prútových sústav

- Väzby medzi telesami sú pri priestorových úlohách sférické kinematické dvojice a pri rovinných úlohách sú to rotačné kinematické dvojice.
- Jednotlivé telesá sú prúty alebo styčnickové telesá. V prútových sústavách sa obmedzujeme na priame prúty. Styčnickové teleso spája dva a viacej prútov, spojenie je realizované sférickou väzbou v priestore alebo rotačnou väzbou v rovine. Stred tohto spojenia sa nazýva styčník.
- Okolie prútovej sústavy pôsobí silami iba na styčnickové telesá.
- Každý prút prútovej sústavy je viazaný prostredníctvom styčnickových telies minimálne k dvom ďalším prútom tak, že prúty sú vzájomne nepohyblivé.

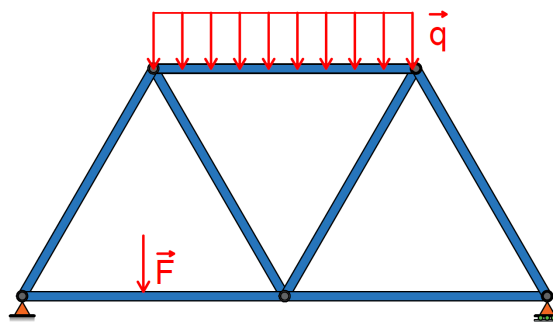
Obrázok 3.2 ilustruje príklad sústav telies, ktoré spĺňajú a naopak ktoré nespĺňajú predpoklady prútových sústav.



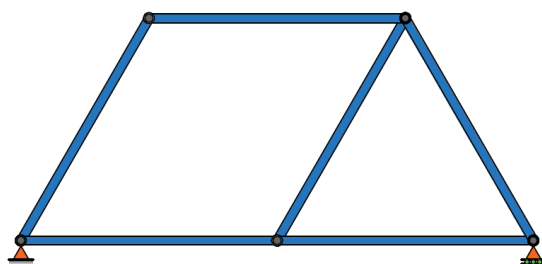
### 3.3. PRÚTOVÉ SÚSTAVY



(a) Model spĺňa predpoklady prútovej sústavy.



(b) Model nespĺňa predpoklady prútovej sústavy.



(c) Sústava prútov staticky preurčená a teda vnútorné pohyblivá ( $s < 0$ ). Model nespĺňa predpoklady prútových sústav.

Obr. 3.2: Rôzne sústavy telies (prútov), ktoré spĺňajú alebo nespĺňajú predpoklady prútových sústav.

#### 3.3.2. Uvoľnenie prútovej sústavy

Pri uvoľnení prútov sa rešpektuje axióm o vzájomnom pôsobení, rovnako ako u iných sústav telies. Ak je uvoľnená kinematická dvojica na jednom telese silou, na druhom telese bude veľkosť sily rovnaká, ale opačne orientovaná na základe princípu akcie a reakcie. Je možné na základe momentovej podmienky rovnováhy dokázať, že prút v prútovej sústave prenáša silu iba v ose prútu. Z toho vyplýva, že prút je namáhaný buď ťahom alebo tlakom.

#### 3.3.3. Statický rozbor

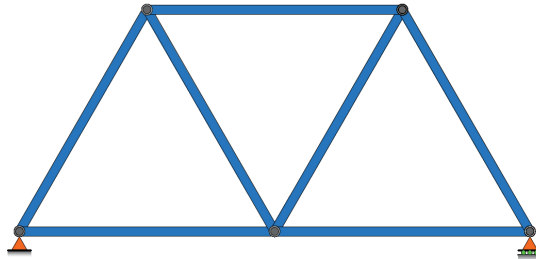
Pri prútových sústavách sa rozlišujú dva typy statickej určitosti, a to vonkajšia a vnútorná statická určitosť. Je teda nutné statický rozbor rozdeliť na dve časti. Po správne prevedenom statickom rozbere môžu nastať tri prípady:

- Prútová sústava je staticky určitá, to znamená že úloha má toľko neznámych parametrov, koľko je použiteľných podmienok statickej rovnováhy a je teda úlohou statiky (obrázok 3.3a).
- Prútová sústava je staticky neurčitá, čo znamená že počet neznámych parametrov je vyšší ako počet použiteľných podmienok statickej rovnováhy. Je potrebné zostaviť

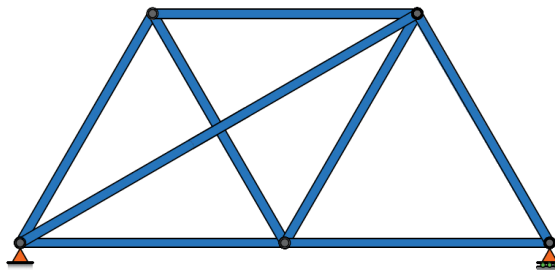


ďalšie rovnice, ktoré vyplynú z deformačných podmienok, v tomto prípade sa jedná o úlohu pružnosti a pevnosti (obrázok 3.3b).

- Posledným prípadom je sústava staticky preurčená a teda počet použiteľných podmienok statickej rovnováhy je viac ako neznámych parametrov. Z toho vyplýva že sústava je vnútorne alebo vonkajšie pohyblivá a teda je úlohou dynamiky (obrázok 3.2c). Je nutné dodať, že takáto sústava prútov nespĺňa predpoklady prútových sústav.



(a) Prútová sústava staticky určitá ( $s = 0$ ).



(b) Prútová sústava vnútorne staticky neurčitá ( $s > 0$ ).

Obr. 3.3: Príklady prútových sústav s rôznym stupňom statickej neurčitosti.

Vonkajšia statická určitosť sa vzťahuje k určeniu vonkajších neznámych stykových síl uvoľneného prútového telesa. Keďže pri staticky určitej úlohe platí, že máme práve toľko neznámych parametrov, koľko máme použiteľných podmienok rovnováhy, potom sa pri určení stupňa statickej neurčitosti vychádza zo vzťahu

$$s_{ex} = \mu - \nu, \quad (3.1)$$

kde  $\mu$  je počet neznámych parametrov vonkajších stykových síl a  $\nu$  je počet použiteľných podmienok rovnováhy vonkajšej silovej sústavy pôsobiacej na uvoľnenú prútovú sústavu. Vnútorne statická určitosť sa vzťahuje k určeniu síl v prútoch. Platí, že počet použiteľných podmienok statickej rovnováhy sa musí rovnať počtu neznámych parametrov. Všeobecne možno odvodiť, že pre prípad v rovine platí

$$s_{in} = p - (2 \cdot k - 3), \quad (3.2)$$

a pre prípad v priestore

$$s_{in} = p - (3 \cdot k - 6), \quad (3.3)$$

### 3.4. NAMÁHANIE PRÚTU ŤAHOM ALEBO TLAKOM

kde  $p$  je počet prútov a  $k$  je počet styčnícok v prútovej sústave. Potom platí, že celkový stupeň statickej neurčitosti je

$$s = s_{in} + s_{ex}. \quad (3.4)$$

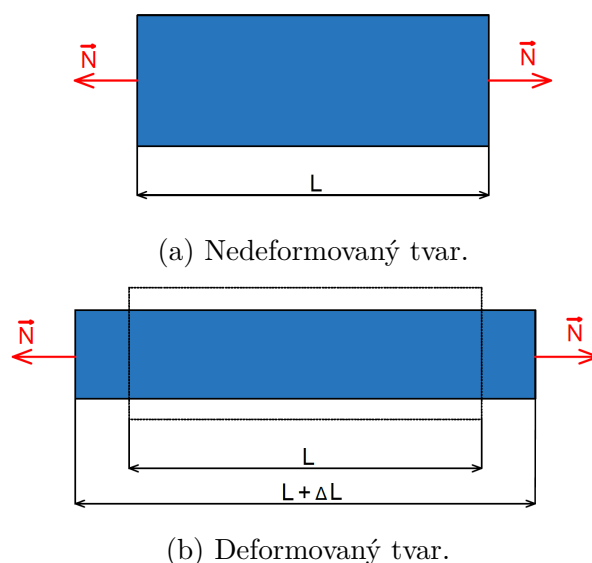
#### 3.3.4. Metódy riešenia prútových sústav

V tejto práci bude na riešenie použitá obecná styčnícoková metóda. Princípom tejto metódy je, že každý styčnícok je úplne uvoľnený a následne sú pre každý styčnícok zostavené rovnice rovnováhy, z čoho vznikne sústava rovníc z ktorej sú jednotlivé sily v styčnícokoch a následne v prútoch vyčíslené. Pri styčnícoku sa z pohľadu statiky jedná o centrálnu silovú sústavu a použiteľné podmienky statickej rovnováhy sú len silové. V prípade priestorovej úlohy sú to tri podmienky statickej rovnováhy, v prípade rovinnej úlohy sú to dve. Pri postupnej styčnícokovej metóde sa postupuje tak, že sa postupne uvoľňujú styčnícoky, pričom vždy musí byť staticky určitý aby bolo možné dopočítať ostatné sily. Postupná styčnícoková metóda má aj grafické prevedenie. Existuje rad iných metód riešenia prútových sústav ako napríklad Priesečná metóda, metóda náhradných prútov, metóda zjednodušovania sústav a ďalšie rôzne metódy riešenia prútových sústav sú popísané v [8].

## 3.4. Namáhanie prútu ťahom alebo tlakom

O namáhaní tlakom alebo ťahom má zmysel hovoriť vtedy, ak je jedinou nenulovou zložkou výsledných vnútorných účinkov normálová sila  $N$ . Prične prierezy sa vzájomne vzdalujú alebo približujú a deformujú tak, že sa mení plocha pričného prierezu, pričom zostávajú rovinnými a kolmými ku strednici. Strednica prútu je priamková. Ak nie je uvedené inak, podkapitola 3.4 je spracovaná podľa [6, 5].

#### 3.4.1. Základné vzťahy



Obr. 3.4: Deformácia prútu prostým ťahom.

Zavedená konvencia udáva, že sila v prúte je kladná ak táto smeruje von z prútu. Z obrázku 3.4 plynie, že pre pomerné pretvorenie v ose x platí

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}. \quad (3.5)$$

Ekvivalentný vzťah v diferenciálnej podobe je odvodený na elementárnom prvku v [6] v tvare

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad (3.6)$$

kde  $u$  je posuv bodu strednice v smere osi x. Pre pomerné pretvorenia v priečnych smeroch platí

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \cdot \varepsilon_x, \quad (3.7)$$

kde  $\mu$  predstavuje Poissonov pomer, ktorý je pomerom priečného a dĺžkového pretvorenia. Znamienko mínus je v rovnici preto, pretože priečne a dĺžkové pretvorenia majú opačné smery. Pre oceli sú bežné hodnoty približne  $\mu = 0,3$  [9]. Na základe statickej ekvivalencie, za predpokladu, že priebeh napätí  $\sigma$  je v celom priečnom priereze o ploche  $S$  konštantný a zaťažujúca sila  $F$  pôsobí iba v ose prútu, platí

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{N}{S}. \quad (3.8)$$

Hookov zákon pre prostý ťah alebo tlak má tvar

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x, \quad (3.9)$$

kde  $E$  je modul pružnosti, ktorý udáva závislosť pretvorenia na pôsobiacom napätí v lineárnej oblasti ťahovej skúšky. Po dosadení vzťahu (3.5) a (3.8) do vzťahu (3.9) pre celkové predĺženie prútu platí

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot S}. \quad (3.10)$$

### 3.4.2. Energia napätosti

Odvodenie energie napätosti pre elementárny prvok:

Pre zaťažovanie telesa, ktoré je v pružnom stave platí, že prírastok energie napätosti  $dW$  sa rovná prírastku práce od všetkých vonkajších síl  $dA$ , a teda platí

$$dW = dA = -\frac{1}{2} \cdot N \cdot u + \frac{1}{2} \cdot N \cdot (u + du) = \frac{1}{2} \cdot N \cdot du. \quad (3.11)$$

Po dosadení vzťahu (3.6) do vzťahu (3.11) platí

$$dW = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \varepsilon_x \cdot dx, \quad (3.12)$$

následne po dosadení Hookovho zákona (3.9)

$$dW = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \frac{\sigma_x}{E} \cdot dx, \quad (3.13)$$

### 3.5. CASTIGLIANOVA VETA

po dosadení vzťahu (3.8), je energia napätosti pre elementárny prvok

$$dW = \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot S}. \quad (3.14)$$

Po integrácii vzťahu (3.14), je vzťah pre energiu napätosti celého prútu

$$W = \int_0^L dW = \int_0^L \frac{N^2(x) \cdot dx}{2 \cdot E \cdot S(x)} = \frac{N^2 \cdot L}{2 \cdot E \cdot S}. \quad (3.15)$$

## 3.5. Castiglianova veta

### 3.5.1. Definícia

Patrí medzi všeobecné vety lineárnej pružnosti. Má veľký praktický význam pre analytické riešenie pružno-pevnostných úloh. Je efektívnym nástrojom hlavne pri riešení staticky neurčitých úloh [5].

- Ak pôsobí na lineárne pružné teleso silová sústava, potom platí, že posuv  $u_i$  pôsobiska osamelej sily  $F_i$  po nositeľke sily  $F_i$  je:

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (3.16)$$

- Ak pôsobí na lineárne pružné teleso silová dvojica, potom platí, že natočenie  $\varphi_i$  v mieste pôsobiska osamelej silovej dvojice  $M_i$  v rovine pôsobenia  $M_i$  je:

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \quad (3.17)$$

### 3.5.2. Znamienková konvencia

V prípade ak  $u_i > 0$ , tak posuv pôsobiska sily je v smere pôsobenia sily  $F_i$ . Analogicky princíp platí aj pre natočenie v mieste pôsobenia silovej dvojice. Existuje rad prípadov, kedy bude potrebné vyšetriť posuvy a natočenia v miestach, kde nepôsobí žiadne vonkajšie zaťaženie. V takýchto prípadoch je nutné zaviesť tzv. doplnkovú silu respektíve moment, pričom veľkosť bude nulová. Tento krok umožňuje použiť Castiglianovu vetu v tom zmysle, že bude možné derivovať podľa sily ktorá "pôsobí" v danom mieste, kde je vyšetřovaný posuv, prípadne natočenie v prípade silovej dvojice [5].

## 3.6. Medzné stavy

Pre funkciu či už strojnej súčasti, stroja alebo konštrukcie je podstatné, aby deformácia a porušovanie nepresiahli určitú hranicu. Preto rozlišujeme stavy **bežné** a stavy **medzné**. O stave medznom možno hovoriť vtedy, keď deformácia alebo porušenie sa zmenia z funkčne prípustných na funkčne neprípustné. Tieto medzné stavy označujeme ako **deformačne pevnostné medzné stavy**. Súhrnný popis rôznych medzných stavov je prehľadné popísaný v [5]. Tu popísané, sú medzné stavy, ktoré budú riešené v rámci analýz v kapitole 4.

### 3.6.1. Spôľahlivosť

V pevnostných výpočtoch je potrebné vyjadriť spoľahlivosť číselným údajom, v pružnosti a pevnosti je obvykle použitá jednoduchá deterministická veličina, ktorá je označovaná ako súčiniteľ bezpečnosti  $K_m$ , definovaná [5]

$$K_m = \frac{\psi_M}{\psi}. \quad (3.18)$$

Kde  $\psi_M$  je medzná hodnota veličiny  $\psi$ , popisujúca vznik medzného stavu.  $\psi$  je potom veličina, ktorá bola výpočtom určená pre daný zatažujúci stav. Slovné je možné ju popísať:

- $K_m < 1$  - bezpečnosť sústavy nevyhovuje
- $K_m > 1$  - bezpečnosť sústavy pravdepodobne vyhovuje

V praxi sa pri návrhu a dimenzovaní novej strojnej súčasti používa návrhový súčiniteľ  $K_n$ , ktorý veľmi blízko súvisí so súčiniteľom bezpečnosti. Pri navrhovaní strojnej súčasti sa potom postupuje použitím vzťahu

$$\psi = \frac{\psi_M}{K_n}. \quad (3.19)$$

Pri porovnaní vzťahov (3.18) a (3.19) vyplýva, že návrhový súčiniteľ a súčiniteľ bezpečnosti by sa mali rovnať. V ideálnom prípade by to mohlo nastať, avšak v praxi sa tieto dva súčinitele mierne líšia a súčiniteľ bezpečnosti je bežne vyšší ako návrhový súčiniteľ. Je to spôsobené zaokrúhľovacími chybami pri výpočtoch a taktiež napríklad použitím normalizovaných súčastí. Podrobný popis návrhového procesu je uvedený v [10].

### 3.6.2. Medzný stav deformácie

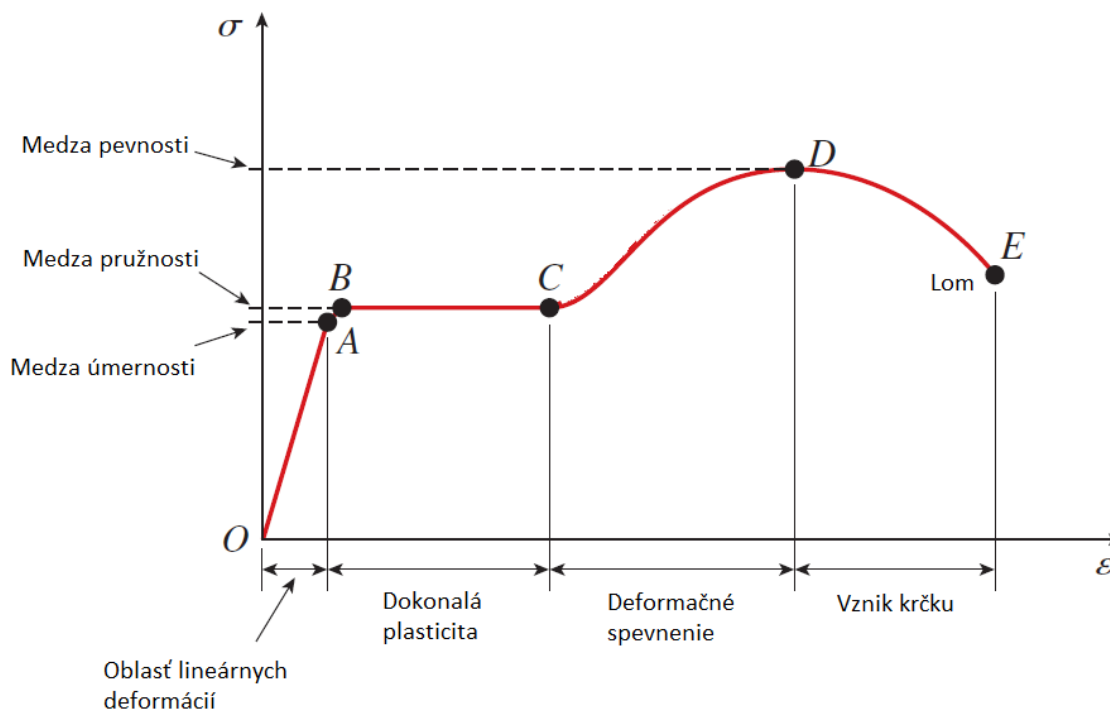
Medzný stav deformácie nastane práve vtedy, keď deformácia nadobudne hodnoty deformácie funkčne neprípustnej. Deformácia funkčne neprípustná je taká, pri ktorej sa charakter sústavy podstatne zmení. To môže znamenať napríklad zmenu pohyblivosti. Typickým príkladom môže byť lopatka turbíny. Vplyvom odstredivých síl sa táto lopatka predlžuje pričom v okamihu keď sa dotkne statora, ktorý je v určitej vzdialenosti, strojná súčasť stratí svoju funkciu a teda nastane medzný stav deformácie. Pričom sa vôbec nemusí blížiti inému medznému stavu, napríklad pružnosti [5].

### 3.6.3. Medzný stav pružnosti

Medzný stav pružnosti (MSP), je taký medzný stav, keď po uskutočnení záťažného cyklu vzniknú v telese prvé makroplastické deformácie. Inými slovami tento stav možno popísať na ťahovej skúške, ktorej diagram je znázornený na obrázku 3.5. Deformácie počas záťažného cyklu možno podľa ich charakteru rozdeliť na deformácie pružné a plastické. Na rozhraní týchto dvoch deformácií dochádza k podstatným zmenám vlastností telesa a teda nastáva medzný stav pružnosti. Porovnávacia veličina je v tomto prípade medza pružnosti  $R_e$  [5]. Deterministický vzťah pre koeficient bezpečnosti k medznému stavu pružnosti  $K_k$  je pri ťahu a tlaku

$$K_k = \frac{\sigma_K}{\sigma}. \quad (3.20)$$

### 3.6. MEDZNÉ STAVY



Obr. 3.5: Diagram ťahovej skúšky, prevzaté z [9], upravené.

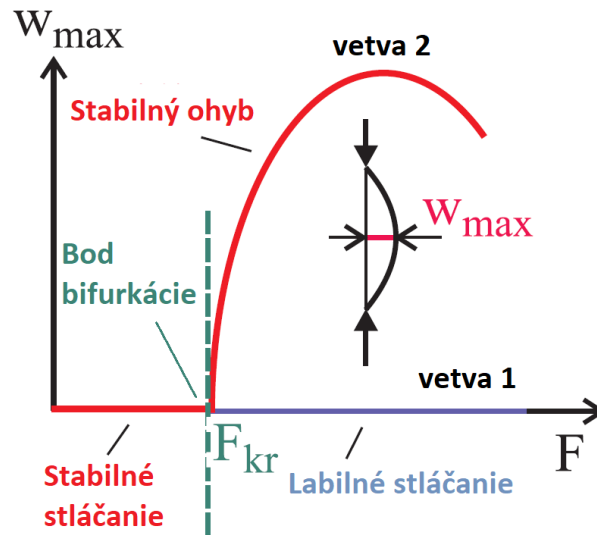
Kde  $\sigma_K$  je medza pružnosti materiálu a  $\sigma$  je normálové napätie v prúte. Medza pružnosti je v ťahovom diagrame na obrázku 3.5 znázornená bodom **B**. V diagrame taktiež vystupuje medza úmernosti reprezentovaná bodom **A**, v praxi sa používa jediná medzná hodnota ktorá je zároveň medzou úmernosti a medzou pružnosti. Preto ak sa predpokladá pri deformačne napätostných analýzach lineárne elastický materiál, je nutné verifikovať platnosť výsledkov tak, že prebehne kontrola, či napätie neprekročilo medzu pružnosti. Ak by napätie bolo za medzou klzu, výsledky deformácií by boli neplatné.

#### 3.6.4. Medzný stav vzpernej stability

V prípade tlakového namáhania prútu nie je medzný stav pružnosti jediný, ktorý je treba vyšetriť. Z praktického života je možné uviesť príklad stláčania pravítka. Ak je na pravítko tlačené dostatočne veľkou silou, tak v určitom okamihu náhle vybočí. Tento jav je veľmi nebezpečný práve preto, že nastáva náhle. Medzný stav, ktorý nastane práve v momente vybočenia je medzný stav vzpernej stability (MSVS), pri ktorom sa mení charakter podstatnej deformácie - z tlaku na ohyb [5].

Pri odvodzovaní vzťahov pre Eulerovský vzper už nie je postačujúce, aby bol uvoľňovaný prút v nedeformovanom tvare tak ako pri prostom ťahu. Podrobný popis teórie vzpernej stability a odvodenie základných vzťahov je dostupné v [9], prípadne v [11]. V tejto časti je uvedený postup riešenia kontroly prútu na medzný stav vzpernej stability.

Pri tlakovom namáhaní ideálneho prútu pri dosiahnutí kritickej sily  $F_{kr}$  dôjde k náhlemu rozdzvojeniu rovnováhy. Bod v ktorom toto nastane sa nazýva bod bifurkácie. Závislosť priehybu  $W_{max}$  na zaťažujúcej sile  $F$  znázorňuje obrázok 3.6.



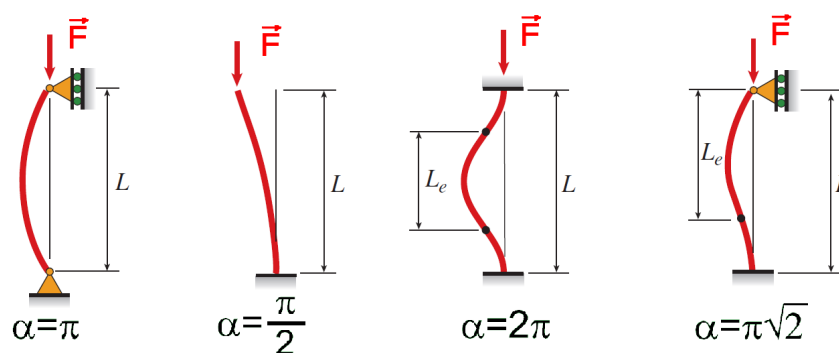
Obr. 3.6: Závislosť priehybu na zaťažujúcej sile, prevzaté z [11], upravené.

Pre veľkosť kritickej sily platí

$$F_{kr} = \alpha^2 \cdot \frac{E \cdot J_{min}}{L^2}. \quad (3.21)$$

Kde  $\alpha$  zohľadňuje uloženie prútu, hodnoty ktoré nadobúda sú znázornené na obrázku 3.7. Pre uloženie prútov v prútovej sústave je  $\alpha = \pi$ .  $E$  je modul pružnosti v ťahu,  $J_{min}$  je menší z hlavných centrálnych kvadratických momentov a  $L$  je dĺžka prútu. Vzťah pre bezpečnosť vzhľadom k medznému stavu vzpernej stability je potom

$$K_v = \frac{F_{kr}}{F}. \quad (3.22)$$



Obr. 3.7: Hodnota parametru  $\alpha$  v závislosti na uložení, prevzaté z [9], upravené.

V prípade prútu z reálneho materiálu je potrebné vyšetriť, či nastane skôr medzný stav vzpernej stability alebo medzný stav pružnosti. Aby medzný stav vzpernej stability predchádzal medznému stavu pružnosti, je potrebné aby prút bol dostatočne štíhly.

### 3.7. VPLYVOVÉ ČIARY

Štíhlosť prútu je definovaná vzťahom

$$\lambda = \frac{L}{\sqrt{\frac{J_{min}}{S}}}, \quad (3.23)$$

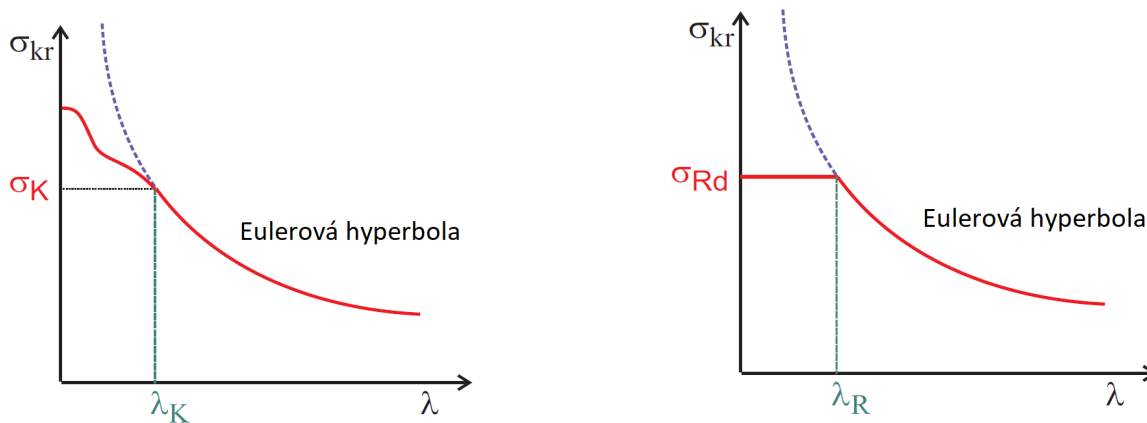
aby bol prút natolko štíhly, že nastane skôr MSVS ako MSP, musí byť štíhlosť  $\lambda$  väčšia ako kritická štíhlosť, ktorá je pre materiál v húževnatom stave  $\lambda_k$  definovaná ako

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\alpha^2 \cdot E}{\sigma_K}}, \quad (3.24)$$

kritická štíhlosť pre prút z krehkého materiálu  $\lambda_R$ , kde  $\sigma_{Rd}$  je medza krehkej pevnosti v tlaku, je potom

$$\lambda_R = \sqrt{\frac{\alpha^2 \cdot E}{\sigma_{Rd}}}. \quad (3.25)$$

Na obrázku 3.8 je znázornená závislosť kritického napätia pre vznik MSVS na štíhlosti prútu. Táto krivka závislosti sa nazýva Eulerova hyperbola. Pokiaľ je materiál prútu v krehkom stave a prút nie je dostatočne štíhly, nastane po prekročení medzného napätia medzný stav lomu. Pokiaľ je materiál v húževnatom stave a prút nie je dostatočne štíhly, tak aj po dosiahnutí medzného stavu pružnosti môže dôjsť k medznému stavu vzpernej stability. Takéto správanie je už pružne plastické a vyššie uvedené vzťahy sú už neplatné [11]. Popis pružne plastického vzperu je dostupný v [9].



(a) Materiál v húževnatom stave.

(b) Materiál v krehkom stave.

Obr. 3.8: Závislosť kritického napätia na štíhlosti, prevzaté z [11], upravené.

### 3.7. Vplyvové čiary

Pri určovaní medzných stavov je potrebné rátať so zaťažujúcou silou v tom najviac kritickom mieste. Toto nebezpečné miesto je možné niekedy určiť presne hneď "od pohľadu", no vo väčšine inžinierskych problémov to nie je možné a je potrebné previesť podrobnejšiu analýzu. Na presné určenie kritického miesta v konštrukciách s premenlivou polohou

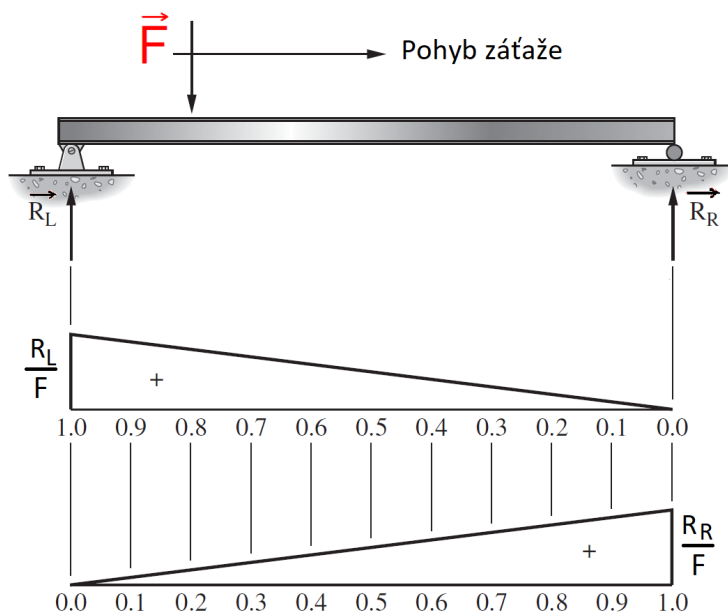


zťažujúcej sily sú využívané vplyvové čiary. Vplyvová čiara je grafickým znázornením určitej deformačne - napätbovej veličiny v určitom mieste konštrukcie v závislosti na polohe zťažujúcej sily [12].

Možno tvrdiť, že vplyvové čiary tvoria paralelu s výslednými vnútornými účinkami. Kým výsledné vnútorné účinky popisujú veličiny pozdĺž celej strednice prútu pre určitú - konštatnú konfiguráciu záťaže, tak vplyvové čiary sú presným opakom. Vplyvové čiary popisujú veličinu v jednom mieste prútu v závislosti od meniacej sa polohy záťaže [12].

### 3.7.1. Staticky určité uloženie prútu

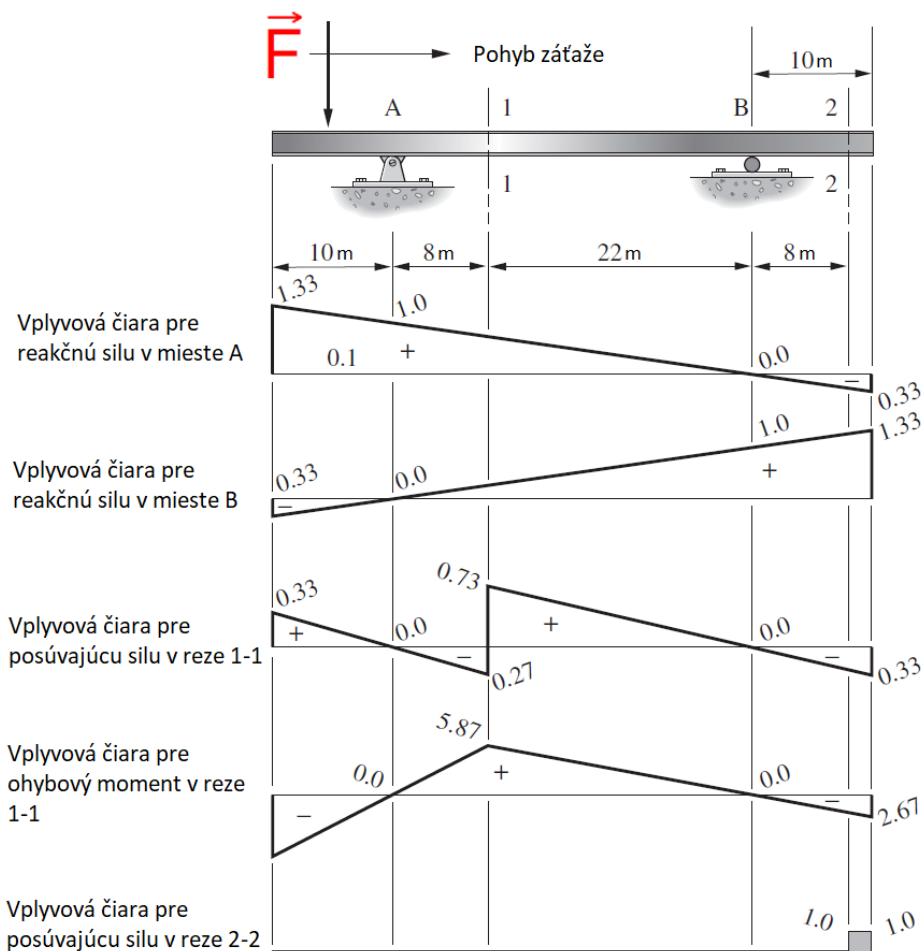
Na obrázku 3.9 sú znázornené vplyvové čiary pre reakcie vo väzbách. Pod grafickým znázornením výsledných reakčných síl je mierka, ktorá udáva násobok zťažujúcej sily v závislosti na jej polohe. Napríklad, pokiaľ je zťažujúca sila práve nad ľavou väzbou, reakčná sila  $R_L$  má rovnakú veľkosť ako zťažujúca sila a reakčná sila  $R_R$  na opačnom konci je nulová. Vplyvová čiara pre reakčné sily pri staticky určito uloženom prúte je lineárnou funkciou. Túto linearity je možné si overiť zostavením rovnice pre momentovú podmienku rovnováhy.



Obr. 3.9: Vplyvové čiary pre reakčné sily vo väzbách, prevzaté z [12], upravené.

Na obrázku 3.10 sú znázornené kombinácie vplyvových čiar pre rôzne veličiny, znova s jednotkovou mierkou. Narozdiel od predchádzajúceho obrázku 3.9 bol pridaný ohybový moment a posúvajúca sila v reze 1-1 a taktiež posúvajúca sila v reze 2-2. Pri týchto jednoduchých prútoch je možné najnebezpečnejšie miesto bez väčších problémov odhadnúť, no pre ilustráciu významu vplyvových čiar sú prínosné.

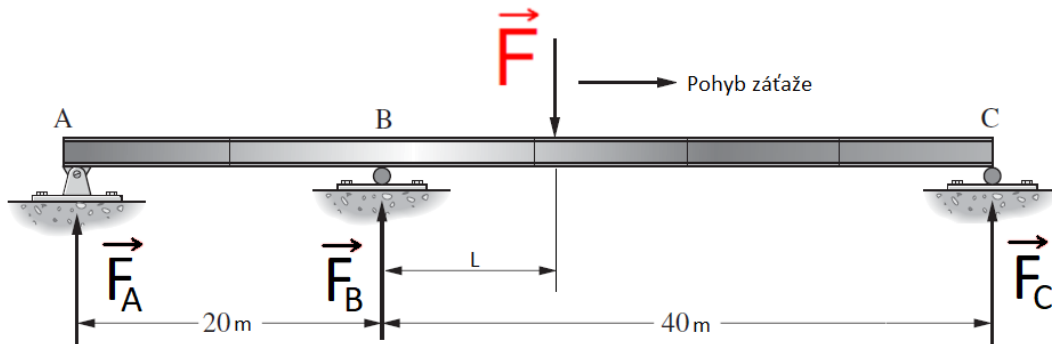
### 3.7. VPLYVOVÉ ČIARY



Obr. 3.10: Vplyvové čiary pre rôzne veličiny, prevzaté z [12], upravené. Uvedené hodnoty sú opäť pomerné (bezrozmerné) ku zatažujúcej sile.

#### 3.7.2. Staticky neurčité uloženie prútu

Vplyvové čiary pre staticky neurčito uložený prút už nie je možné tak jednoducho skonštruovať. Principiálne zostáva všetko rovnaké tak ako pri staticky určitom uložení, avšak vplyvové čiary už nie sú priamky ale pri staticky neurčitých prútoch sú to krivky. Dôvodom to je to, že pri staticky určitých úlohách je možné spočítať reakčné sily na základe momentovej rovnice rovnováhy kde sú výsledné sily a ostatné veličiny lineárne závislé na polohe zatažujúcej sily. V prípade staticky neurčitých úloh je potrebné zostaviť deformačnú podmienku, pričom tu už lineárna závislosť nie je [12]. Pre názornosť je uvedený príklad postupu zostrojenia vplyvových čiar pre staticky neurčito uložený prút, zobrazený na obrázku 3.11.



Obr. 3.11: Staticky neurčito uložený prút, prevzaté z [12], upravené.

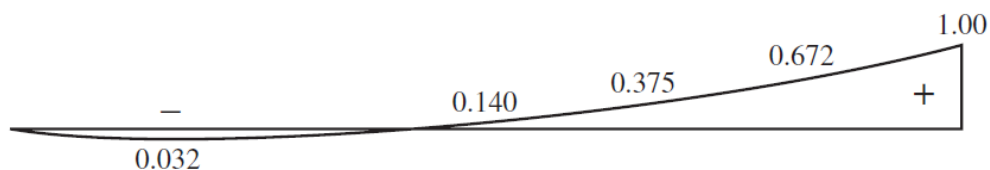
Deformačná podmienka pre posuv (priehyb)  $V_c$  v mieste C má tvar

$$V_c = \frac{\partial W}{\partial F_c} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{M(x)_i}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F_c} \cdot dx_i = 0, \quad (3.26)$$

pre reakčnú silu  $F_c$  v mieste C potom platí

$$F_c = \frac{-F \cdot L^3}{192000} + \frac{F \cdot L^2}{1600} + \frac{F \cdot L}{120}, \quad (3.27)$$

tento vzťah popisuje len prípad, ak sila  $F_c$  pôsobí medzi bodmi **B** a **C**. Po čiastočnom uvoľnení a vyčíslení sily  $F_c$  z deformačnej podmienky je možné konštatovať, že sila  $F_c$  nie je lineárne závislá na polohe zatažujúcej sily  $F$ . Zo vzťahu (3.27) vyplýva, že závislosť reakčnej sily  $F_c$  na parametri  $L$  je kubická. Parameter  $L$  popisuje polohu zatažujúcej sily v rámci intervalu **B** a **C** znázorneného na obrázku 3.11. Vplyvová čiara pre reakčnú silu  $F_c$  je na obrázku 3.12.

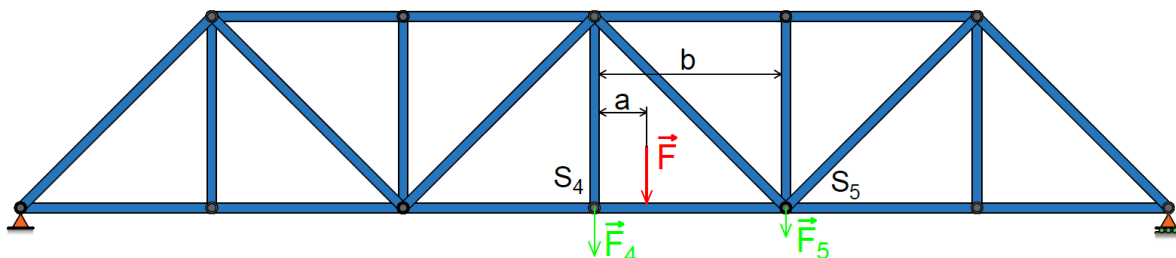
Obr. 3.12: Vplyvová čiara pre reakčnú silu  $F_c$ , pre prút na obrázku 3.11 [12]. Hodnoty odpovedajú pomeru  $\frac{F_c}{F}$ .

### 3.7.3. Vplyvové čiary pre prútové sústavy

Vplyvové čiary pri prútových sústavách, rovnako ako pri prútoch, sú grafickým znázornením napätostných, prípadne deformačných veličín v závislosti na polohe zatažujúcej sily. Komplikáciou pri prútových sústavách je to, že aby boli splnené predpoklady prútových sústav, zataženie musí pôsobiť v styčníku. V prípade, ak zatažujúca sila pôsobí tak, ako na obrázku 3.13, je potrebné zataženie modifikovať tak, aby zatažujúce sily pôsobili iba v styčníkoch. Upravené zataženie musí byť staticky ekvivalentné s pôvodným zatažením. Pri reálnych konštrukciách, keď prúty sú spolu zvarené, sa sila rozloží určitým pomerom

### 3.7. VPLYVOVÉ ČIARY

do všetkých styčnícok vzhľadom na ich vzdialenosť od tejto sily. Takýto model zafáženia odpovedá prípadu, kedy má reálna konštrukcia okrem nosnej priehradovej konštrukcie aj iné prvky. Okrem žeriavových konštrukcií je možné uviesť ako príklad niektoré železničné mosty, kde nosnú časť tvoria dve paralelne umiestnené priehradové konštrukcie, ktoré sú spojené priečnikmi, na ktorých je vlastná železničná trať. Túto situáciu je možné však zjednodušiť tak, že jednoducho je sila rozdelená medzi dva susedné styčnícok pomocou momentovej rovnice rovnováhy [12].



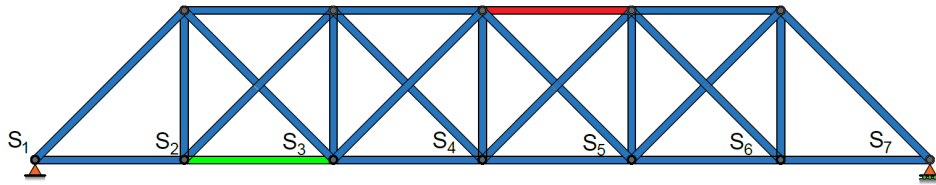
Obr. 3.13: Prevedenie zafáženia tak, aby boli splnené predpoklady prúťových sústav.

Silu  $F$  je možné teda zjednodušene previesť na staticky ekvivalentné zafáženie tak, aby sily pôsobili do styčnícok:

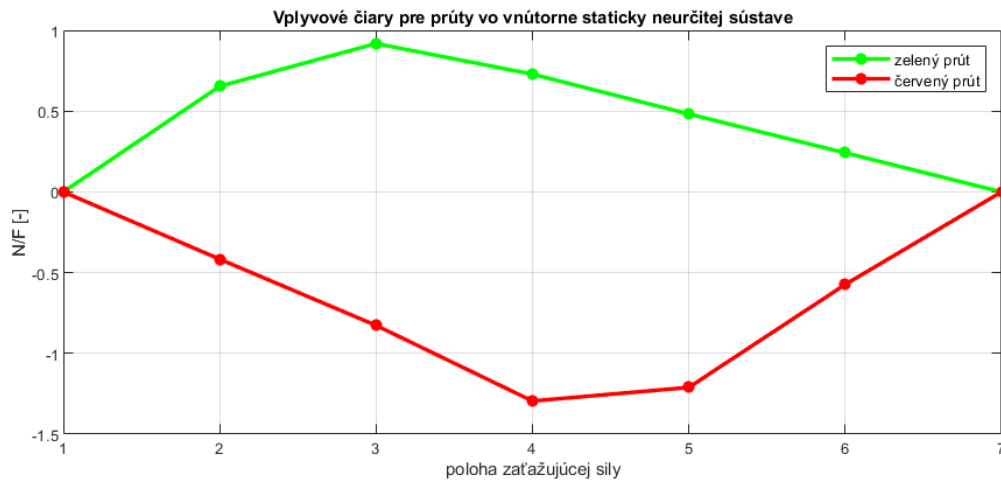
$$F_4 = \frac{F \cdot (b - a)}{b} \quad (3.28)$$

$$F_5 = \frac{F \cdot a}{b} \quad (3.29)$$

Inými slovami možno popísať tvorbu vplyvových čiar pre prúťové sústavy tak, že sú spočítané najskôr podľa teórie prúťových sústav hodnoty veličín pre diskkrétne body (styčnícok). A na základe zjednodušeného prepočtu podľa vzťahov (3.28) a (3.29) možno vplyvovú čiaru medzi dvomi styčnícokmi uvažovať ako priamku. Hodnoty normálových síl a posuvov pri prúťových sústavách závisia na zafážujúcich silách vždy lineárne, bez ohľadu na to, či je sústava staticky určitá alebo neurčitá. Pri sústave na obrázku 3.13 sú všetky normálové sily lineárne závislé na  $F_4$  a  $F_5$ . Nakoľko podľa vzťahov (3.28) a (3.29) sú tieto sily lineárne závislé na parametri  $a$ , potom aj normálové sily budú lineárne závislé na tomto parametri. Objasniť by to mal najlepšie obrázok 3.14.



(a) Vnútorne staticky neurčitá prútová sústava.



(b) Vplyvové čiary pre normálové sily v prútoch pre zelený a červený prút z obrázku 3.14a.

Obr. 3.14: Vplyvové čiary pre normálové sily pre vnútorne staticky neurčitú prútovú sústavu.

Na zvislej osi je znázornená normálová sila v prúte ako násobok zaťažujúcej sily. Spočítané sú hodnoty zvlášť v jednotlivých siedmich bodoch a závislosť v oblasti medzi nimi je na základe vyššie uvedených predpokladov lineárna.

# 4. Návrh rozmeru pre priečny prierez

## 4.1. Formulácia problému

Cieľom tejto časti je navrhnuť rozmer pre kruhový priečny prierez prútu pre priehradovú konštrukciu portálového žeriavu, ktorý je reprezentovaný zjednodušeným 2D modelom prútovej sústavy. Pre zadanú staticky určitú prútovú sústavu je v prvej časti popísaný postup silovej analýzy prútovej sústavy a na základe výsledného zaťaženia prútov je spočítaný minimálny priemer priečného prierezu, na ktorého základe je potom zvolený konečný rozmer. Pre tento rozmer je následne prevedená analýza deformácií. Následne je sústava riešená vo variantoch s rôznym stupňom statickej neurčitosti a výsledky sú potom navzájom porovnané. Aby boli výsledky porovnania deformačnej analýzy lepšie vypovedajúce, je táto časť prevedená s rovnakým rozmerom priečného prierezu pre každý variant.

## 4.2. Staticky určitý variant

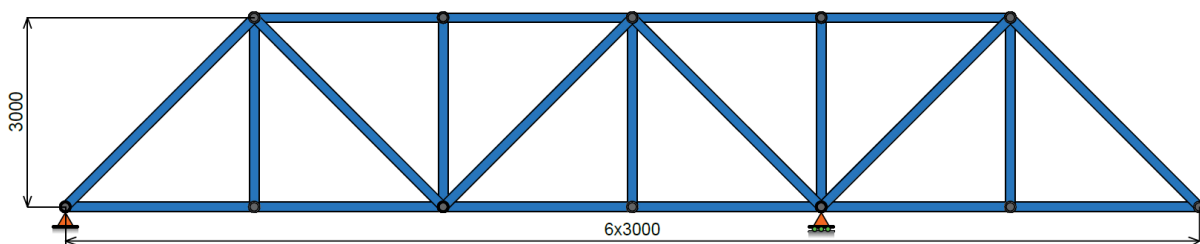
### 4.2.1. Geometria a vstupné parametre

Inšpiráciou pre návrh parametrov riešeného modelu bol reálny portálový žeriav od výrobcu, dostupné z [13]. Ako materiál bola zvolená konštrukčná oceľ pre mostné a iné zvárané konštrukcie, namáhané staticky a dynamicky [14]:

- Označenie podľa ČSN: 11 523
- Medza pevnosti  $R_m$ : 510 MPa
- Medza pružnosti  $R_e$ : 345 MPa
- Hustota  $\rho$ : 7 850 kg/m<sup>3</sup>
- Poissonov pomer  $\mu$ : 0,3

Uvažované parametre konštrukcie:

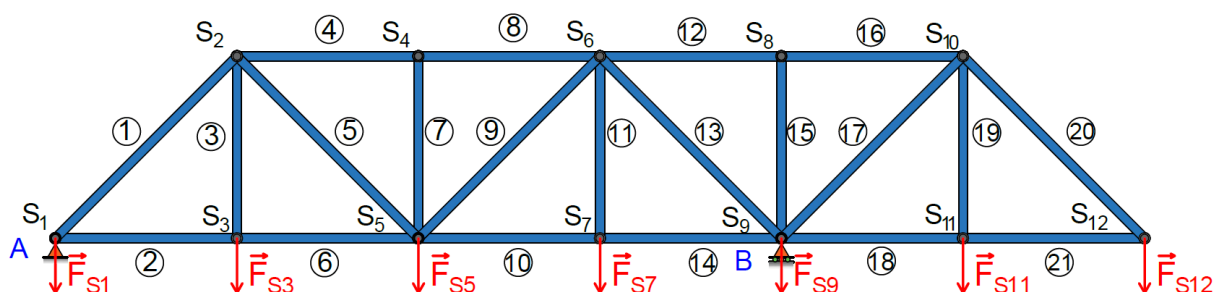
- Minimálna hodnota koeficientu bezpečnosti vzhľadom k MSP  $K_k$ : 3
- Minimálna hodnota koeficientu bezpečnosti vzhľadom k MSVS  $K_v$ : 4
- Maximálne uvažované zaťaženie od žeriavovej mačky  $F_g$ : 200 kN
- Rozpätie  $L$  : 18 m



Obr. 4.1: Geometria uvažovanej konštrukcie, staticky určitý variant.

### 4.2.2. Uvažované zaťaženie

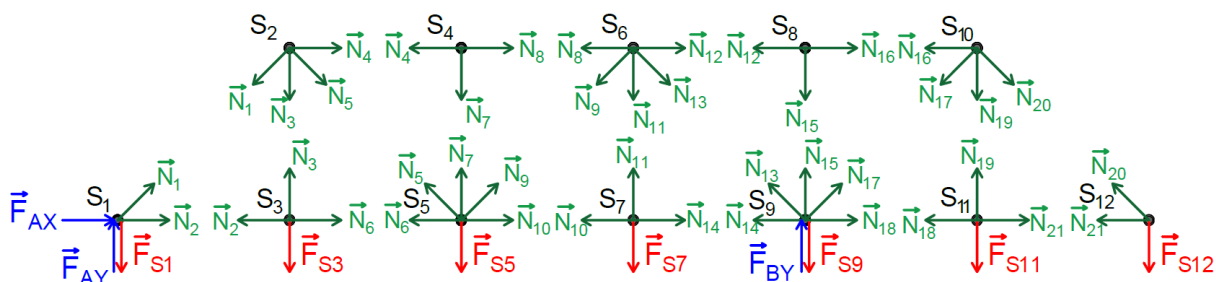
Na obrázku 4.1 je znázornená zadaná prútová sústava a jej rozmery. Rozsah zaťaženia od žeriavovej mačky, označenie jednotlivých prútov a väzieb je znázornené na obrázku 4.2.



Obr. 4.2: Uvažované zaťaženie modelu.

### 4.2.3. Úplné uvoľnenie a statický rozbor

Úplne uvoľnenie sústavy znázorňuje obrázok 4.3. Aby nebolo nutné prevádzkať samostatné riešenie pre každý vyšetřovaný záťažný stav (tj. pre každú polohu zaťažujúcej sily), je uvažovaný iba jeden všeobecný záťažný stav so všetkými silami  $F_{S1}$  až  $F_{S12}$ , čo zefektívni výpočet. Podrobnejší popis postupu výpočtu je uvedený v časti 4.2.5.



Obr. 4.3: Úplné uvoľnenie.

Vonkajší statický rozbor:

$$NP = \{F_{AX}, F_{AY}, F_{BY}\} \quad (4.1)$$

## 4.2. STATICKY URČITÝ VARIANT

$$\mu = 3 \quad (4.2)$$

$$\nu = 3 \quad (4.3)$$

$$s_{ex} = \mu - \nu = 3 - 3 = 0 \quad (4.4)$$

Vnútrotný statický rozbor:

$$s_{in} = p - (2 \cdot k - 3) = 21 - (2 \cdot 12 - 3) = 0 \quad (4.5)$$

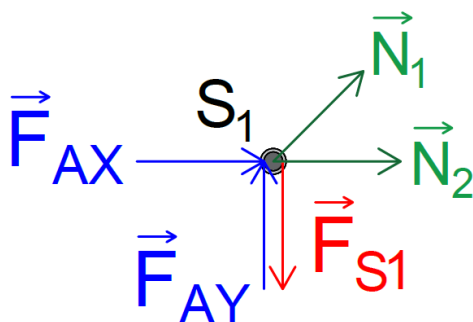
Celkový statický rozbor:

$$s = s_{in} + s_{ex} = 0 + 0 = 0 \quad (4.6)$$

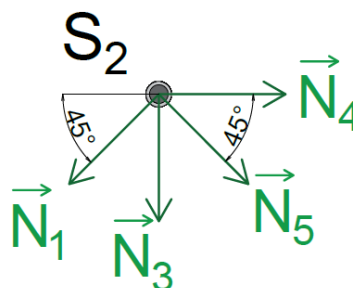
Prúťová sústava je **statický určitá**.

### 4.2.4. Rovnice rovnováhy

Pre každý uvoľnený styčnák je potrebné zostaviť dve rovnice rovnice rovnováhy (použitý 2D model), jedna rovnica vo vodorovnom smere  $X$  a druhá rovnica v zvislom smere  $Y$ . Uvedené sú rovnice pre prvé dva styčnáky znázornené na obrázku 4.4. Ďalšie rovnice sú zostavené analogicky.



(a) Uvoľnený styčnák  $S_1$ .



(b) Uvoľnený styčnák  $S_2$ .

Obr. 4.4: Príklad uvoľnenia styčnákov pre zostavenie rovníc statickej rovnováhy.

Rovnice rovnováhy pre styčnák  $S_1$ :

$$\sum F_x = 0 : F_{AX} + N_2 + N_1 \cdot \cos(45) = 0 \quad (4.7)$$

$$\sum F_y = 0 : F_{AY} - F_{S1} + N_1 \cdot \sin(45) = 0 \quad (4.8)$$

Rovnice rovnováhy pre styčnák  $S_2$ :

$$\sum F_x = 0 : N_4 + N_5 \cdot \cos(45) - N_1 \cdot \cos(45) = 0 \quad (4.9)$$



$$\sum F_y = 0 : -N_1 \cdot \sin(45) - N_3 - N_5 \cdot \sin(45) = 0 \quad (4.10)$$

Následne po zostavení všetkých rovníc rovnováhy, je celá sústava prevedená do maticového tvaru:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4.11)$$

Kde  $\mathbf{A}$  je matica sústavy,  $\mathbf{b}$  je vektor pravej strany a  $\mathbf{x}$  je vektor neznámych.

#### 4.2.5. Analýza zaťaženia

Na analytické riešenie je použitý softvér MATLAB, kde je realizovaný výpočet pomocou symbolických premených. Najskôr sú sily vo väzbách a normálové sily pomocou príkazu *linsolve* vyjadrené ako funkcie všetkých zaťažujúcich síl. V ďalšom kroku je výpočet realizovaný tak, aby bola uvažovaná iba jedna zaťažujúca sila, vždy podľa aktuálne vyšetrovanej polohy. V prípade tejto úlohy to je 7 rôznych polôh. Pre názornosť je časť zdrojového kódu a jeho popis znázornený na obrázku 4.5.

```

44 - x = linsolve(A,b);           % vyriešenie sústavy rovníc, výsledné sily sú
45 -                             % určené ako funkcie zaťažujúcich síl FS
46 -                             % a uložené do matice "x"
47 - N = subs(x(4:24));         % vytvorenie matice normálových síl, ako f(FS)
48 - F = subs(x(1:3));         % vytvorenie matice síl vo väzbách, ako f(FS)
49 - I = eye(7);               % vytvorenie pomocnej jednotkovej matice
50 - Ncalc = sym(zeros(21,7)); % vytvorenie novej matice pre ukladanie výsledkov
51 -                             % normálových síl
52 - Fcalc = sym(zeros(3,7)); % vytvorenie novej matice pre ukladanie výsledkov
53 -                             % síl vo väzbách
54 - I = load.*I;              % vytvorenie diagonálnej matice záťažujúcej sily
55 - for i=1:7                  % 7 možností pre polohu zaťažujúcej sily
56 -     Ncalc(:,i) = subs(N, [FS1,FS3,FS5,FS7,FS9,FS11,FS12], I(i,:));
57 -     % Matica "N" obsahuje normálové sily ako funkcie zaťažujúcich síl
58 -     % FS1...FS12. Vektor síl "FS" je nahradený vždy "i" riadkom matice "I",
59 -     % čo znamená, že vždy je jedna sila z vektoru "FS" položená rovno
60 -     % veľkosti uvažovanej zaťažujúcej sily a ostatné sú vynulované.
61 -     % Výsledky normálových síl sú uložené do matice "Ncalc" pre
62 -     % každý prípad zvlášť.
63 -     Fcalc(:,i) = subs(F, [FS1,FS3,FS5,FS7,FS9,FS11,FS12], I(i,:));
64 -     % Analogický postup pre výpočet síl vo väzbách.
65 - end

```

Obr. 4.5: Časť zdrojového kódu MATLAB pre riešenie rôznych polôh zaťažujúcej sily. Celý súbor je dostupný v prílohe pod názvom *SU\_normalove\_sily.m*.

Výsledne hodnoty síl vo väzbách v závislosti na zaťaženom styčníku sú uvedené v tabuľke 4.1.

## 4.2. STATICKY URČITÝ VARIANT

Tabuľka 4.1: Výsledne hodnoty síl vo väzbách v závislosti na zataženom styčníku.

| Sila vo väzbe [kN] | Zatažený styčník |        |        |        |        |        |         |
|--------------------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
|                    | 1                | 3      | 5      | 7      | 9      | 11     | 12      |
| $F_{AX}$           | 0,00             | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00    |
| $F_{AY}$           | 200,00           | 150,00 | 100,00 | 50,00  | 0,00   | -50,00 | -100,00 |
| $F_{BY}$           | 0,00             | 50,00  | 100,00 | 150,00 | 200,00 | 250,00 | 300,00  |

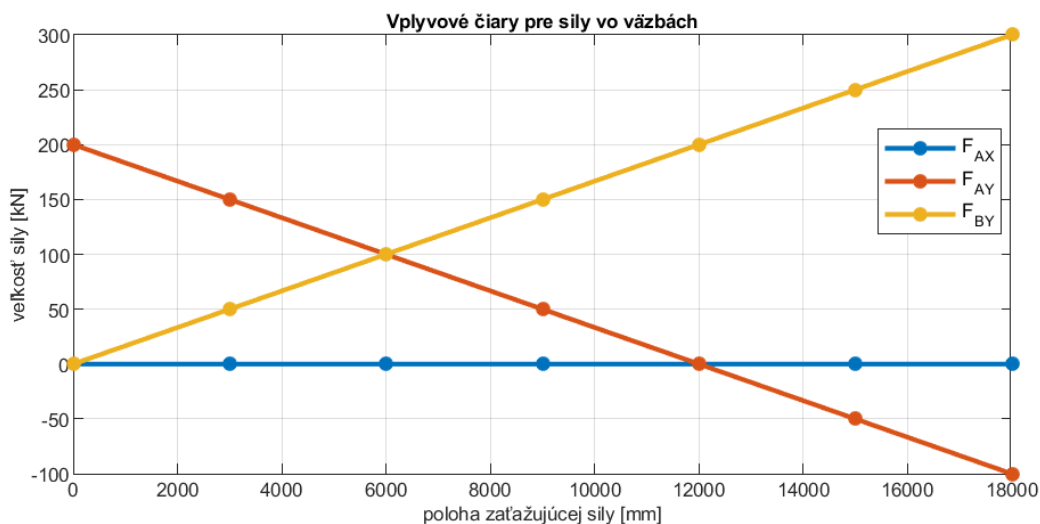
Výsledné hodnoty normálových síl v závislosti na zataženom styčníku sú potom zapísané v tabuľke 4.2. V prípade kladnej hodnoty je sila v prúte ťahová, v prípade zápornej hodnoty je sila tlaková. Hodnoty pre zataženie v styčníku 1 a 9 nie sú v tabuľke 4.2 uvedené, pretože sily v prútoch sú nulové a celé zataženie prenášajú vonkajšie väzby.

Tabuľka 4.2: Výsledné sily v prútoch v závislosti na zataženom styčníku, statický určitý variant.

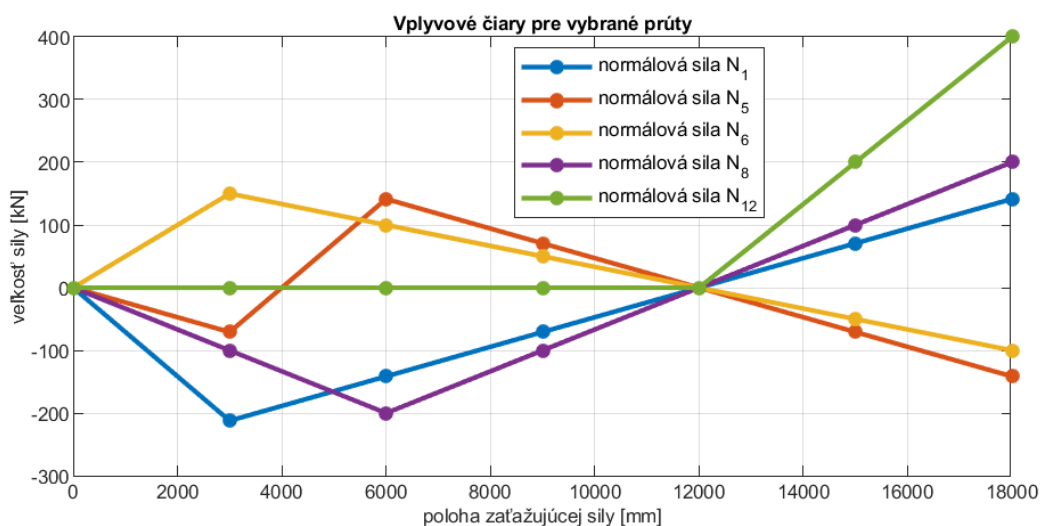
| Normálová sila [kN] | Zatažený styčník |         |         |         |         |
|---------------------|------------------|---------|---------|---------|---------|
|                     | 3                | 5       | 7       | 11      | 12      |
| $N_1$               | -212,13          | -141,42 | -70,71  | 70,71   | 141,42  |
| $N_2$               | 150,00           | 100,00  | 50,00   | -50,00  | -100,00 |
| $N_3$               | 200,00           | 0,00    | 0,00    | 0,00    | 0,00    |
| $N_4$               | -100,00          | -200,00 | -100,00 | 100,00  | 200,00  |
| $N_5$               | -70,71           | 141,42  | 70,71   | -70,71  | -141,42 |
| $N_6$               | 150,00           | 100,00  | 50,00   | -50,00  | -100,00 |
| $N_7$               | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 0,00    | 0,00    |
| $N_8$               | -100,00          | -200,00 | -100,00 | 100,00  | 200,00  |
| $N_9$               | 70,71            | 141,42  | -70,71  | 70,71   | 141,42  |
| $N_{10}$            | 50,00            | 100,00  | 150,00  | -150,00 | -300,00 |
| $N_{11}$            | 0,00             | 0,00    | 200,00  | 0,00    | 0,00    |
| $N_{12}$            | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 200,00  | 400,00  |
| $N_{13}$            | -70,71           | -141,42 | -212,13 | -70,71  | -141,42 |
| $N_{14}$            | 50,00            | 100,00  | 150,00  | -150,00 | -300,00 |
| $N_{15}$            | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 0,00    | 0,00    |
| $N_{16}$            | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 200,00  | 400,00  |
| $N_{17}$            | 0,00             | 0,00    | 0,00    | -282,84 | -282,84 |
| $N_{18}$            | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 0,00    | -200,00 |
| $N_{19}$            | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 200,00  | 0,00    |
| $N_{20}$            | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 0,00    | 282,84  |
| $N_{21}$            | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 0,00    | -200,00 |

Na obrázku 4.6 sú vplyvové čiary pre sily vo väzbách a na obrázku 4.7 pre sily vo vybraných prútoch. Vzdialenosť je uvažovaná od väzby A.

#### 4. NÁVRH ROZMERU PRE PRIEČNY PRIEREZ



Obr. 4.6: Vplyvové čiary pre sily vo väzbách.



Obr. 4.7: Vplyvové čiary pre vybrané prúty.

#### 4.2.6. Návrh priečneho prierezu

V tabuľke 4.3 sú uvedené maximálne hodnoty síl, potrebné pre návrh minimálneho rozmeru pre priečny prierez. V prútovej sústave sú použité dva rôzne dlhé prúty. V nasledujúcich výpočtoch sú diagonálne prúty (na obrázku 4.3 označené 1, 5, 9, 13, 17, 20) nazývané ako dlhé. Ostatné prúty sú nazývané ako krátke. Rozlíšenie krátkych a dlhých prútov hrá významnú úlohu pri navrhovaní rozmeru z hľadiska bezpečnosti k MSVS.

Tabuľka 4.3: Extrémne hodnoty síl v prútoch.

| Popis                                     | hodnota sily [kN] | prút  |
|---|-------------------|-------|
| Maximálna sila obecné                     | 400,00            | 12,16 |
| Maximálna tlaková sila v krátkych prútoch | -300,00           | 10,14 |
| Maximálna tlaková sila v dlhých prútoch   | -282,84           | 17,20 |

## 4.2. STATICKY URČITÝ VARIANT

### Minimálny priemer priečného prierezu k MSP:

Použité vzťahy:

$$K_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{max}} \quad (4.12)$$

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{S} \quad (4.13)$$

$$S = \frac{\pi \cdot d_{kk}^2}{4} \quad (4.14)$$

Uvažované veličiny:

$$F_{max} = 400,00 \text{ kN}$$

$$K_k = 3$$

$$\sigma_k = 345 \text{ MPa}$$

Kde  $F_{max}$  je maximálna sila pôsobiaca v prúte (tabuľka 4.3). Po dosadení vzťahu (4.14) do (4.13) a následne do (4.12) platí pre minimálny priemer priečného prierezu vzhľadom k MSP:

$$d_{kk} = \sqrt{\frac{4 \cdot F_{max} \cdot K_k}{\pi \cdot R_e}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 400,00 \text{ kN} \cdot 3}{\pi \cdot 345 \text{ MPa}}} = 66,55 \text{ mm} \quad (4.15)$$

### Minimálny priemer priečného prierezu vzhľadom k MSVS:

Použité vzťahy:

$$K_v = \frac{F_{kr}}{F_{max}} \quad (4.16)$$

$$F_{kr} = \alpha^2 \cdot \frac{E \cdot J_{min}}{L^2} \quad (4.17)$$

$$J_{min} = \frac{\pi \cdot d_v^4}{64} \quad (4.18)$$

$$\lambda = \frac{L}{\sqrt{\frac{J_{min}}{S}}} \quad (4.19)$$

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\alpha^2 \cdot E}{\sigma_K}} \quad (4.20)$$

V konštrukciách sú dva typy prútov čo sa týka dĺžky. Je nutné realizovať návrh pre oba typy prútu, pretože dopredu nie je možné predikovať, ktorý z nich bude viac nebezpečný vzhľadom k MSVS, pretože maximálna tlaková sila ani dĺžka prútu nie je rovnaká. V prípade ak by bola maximálna tlaková sila rovnaká v oboch typoch prútov, nebezpečnejší vzhľadom k MSVS by bol dlhší prút.

#### 4. NÁVRH ROZMERU PRE PRIEČNY PRIEREZ

Uvažované veličiny pre krátky prút:

$$F_{max} = 300,00 \text{ kN}$$

$$L = 3000 \text{ mm}$$

$$\alpha = \pi$$

$$K_v = 4$$

$$\sigma_k = 345 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

Maximálna tlaková sila  $F_{max}$  je podľa konvencie záporná pretože je tlaková, vo výpočtoch je ale uvažovaná ako kladná hodnota. Po dosadení vzťahu (4.18) do (4.17) a následne do (4.16) platí pre minimálny priemer priečného prierezu vzhľadom k MSVS (krátkeho prútu):

$$d_{v1} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot L^2 \cdot F_{max} \cdot K_v}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot (3000 \text{ mm})^2 \cdot 300,00 \text{ kN} \cdot 4}{\pi^2 \cdot 210 \text{ GPa} \cdot \pi}} = 101,50 \text{ mm} \quad (4.21)$$

Uvažované veličiny pre dlhý prút sú rovnaké ako pre kratší. Líšia sa iba maximálna sila  $F_{max}$  a dĺžka prútu  $L$ :

$$F_{max} = 282,84 \text{ kN}$$

$$L = 4242,64 \text{ mm}$$

Pre dlhý prút rovnako platí vzťah (4.21), a teda:

$$\begin{aligned} d_{v2} &= \sqrt[4]{\frac{64 \cdot L^2 \cdot F_{max} \cdot K_v}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi}} = \\ &= \sqrt[4]{\frac{64 \cdot (4242,64 \text{ mm})^2 \cdot 282,84 \text{ kN} \cdot 4}{\pi^2 \cdot 210 \text{ GPa} \cdot \pi}} = 118,94 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Kritická hodnota štíhlosti:

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_K}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 210 \text{ GPa}}{345 \text{ MPa}}} = 77,51 \quad (4.23)$$

Výpočet štíhlosti pre krátky prút:

$$J_{minv1} = \frac{\pi \cdot d_{v1}^4}{64} = \frac{\pi \cdot (101,50 \text{ mm})^4}{64} = 5209965,15 \text{ mm}^4 \quad (4.24)$$

## 4.2. STATICKY URČITÝ VARIANT

$$S_{v1} = \frac{\pi \cdot d_{v1}^2}{4} = \frac{\pi \cdot (101,50 \text{ mm})^2}{4} = 8091,37 \text{ mm}^2 \quad (4.25)$$

$$\lambda_{v1} = \frac{L}{\sqrt{\frac{J_{minv1}}{S_{v1}}}} = \frac{3000 \text{ mm}}{\sqrt{\frac{5209965,15 \text{ mm}^4}{8091,37 \text{ mm}^2}}} = 118,23 \quad (4.26)$$

Platí  $\lambda_{v1} > \lambda_k$ , aktuálnym medzným stavom je potom MSVS. Analogicky platia vzťahy (4.24), (4.25) a (4.26) aj pre dlhý prút:

$$J_{minv2} = 9823848,03 \text{ mm}^4$$

$$S_{v2} = 11110,81 \text{ mm}^2$$

$$\lambda_{v2} = 142,68$$

Platí  $\lambda_{v2} > \lambda_k$ , aktuálnym medzným stavom je opäť MSVS.

Aby priemer priečného prierezu bezpečnostne vyhovoval vzhľadom k oboj uvedným medzným stavom, tak musí byť väčší alebo rovný maximálnej vypočítanej hodnote  $d$  a teda

$$d = \max\{d_{kk}; d_{v1}; d_{v2}\} = \max\{66,55 \text{ mm}; 101,50 \text{ mm}; 118,94 \text{ mm}\} = 118,94 \text{ mm},$$

keďže zo zadania nevyplývajú žiadne obmedzenia, zvolený bol priemer priečného prierezu pre každý prút

$$\mathbf{d = 120 \text{ mm.}}$$

### 4.2.7. Analýza deformácií

Je nutné skontrolovať, deformáciu sústavy s uvažovaným priemerom priečného prierezu 120 mm. Keďže sa jedná o žeriavovú konštrukciu, podstatné sú deformácie na spodnej časti konštrukcie, tam kde sa pohybuje žeriavova mačka. Kontrolované sú posuvy v zvislom smere. Keďže sústava rovníc je zostavená so všetkými možnými zatažujúcimi silami, nie je nutné zavádzať doplnkové sily. Posuvy jednotlivých styčníc budú nasledovné:

$$u_j = \sum_{i=1}^{21} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{sj}} \cdot dx_i \quad (4.27)$$

Parameter  $j$  nadobúda hodnôt  $j = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12$ , teda čísla styčníc, v ktorých je vyšetovaná deformácia.

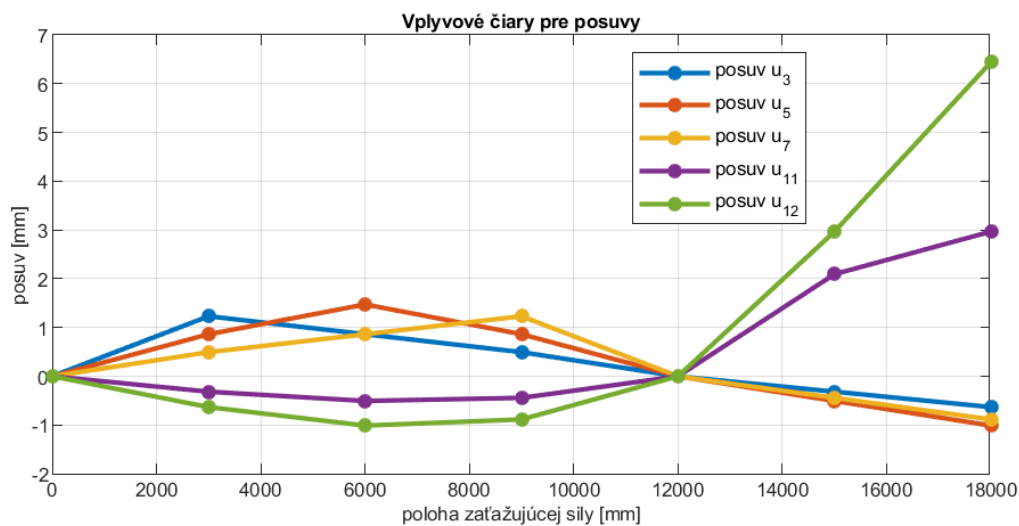
V tabulke 4.4 sú zapísané jednotlivé posuvy styčníc v spodnej časti konštrukcie v závislosti na zataženom styčníc. V prípade ak by bol zatažený styčníc 1 alebo 9, posuvy by boli nulové. Rovnako tak posuvy  $u_1$  a  $u_9$  sú nulové pretože v týchto miestach sú väzby sústavy s okolím. Zdrojový kód s výpočtom je uvedený v prílohe pod názvom *SU\_deformacie.m*.

#### 4. NÁVRH ROZMERU PRE PRIEČNY PRIEREZ

Tabuľka 4.4: Posuvy styčníc v závislosti na zaťažujúcom styčníku, staticky určitý variant.

| Posuv styčníku [mm] | Zaťažujúci styčník |        |        |        |        |
|---------------------|--------------------|--------|--------|--------|--------|
|                     | 3                  | 5      | 7      | 11     | 12     |
| $u_1$               | 0,000              | 0,000  | 0,000  | 0,000  | 0,000  |
| $u_3$               | 1,231              | 0,863  | 0,494  | -0,316 | -0,632 |
| $u_5$               | 0,863              | 1,473  | 0,863  | -0,505 | -1,011 |
| $u_7$               | 0,494              | 0,863  | 1,231  | -0,442 | -0,884 |
| $u_9$               | 0,000              | 0,000  | 0,000  | 0,000  | 0,000  |
| $u_{11}$            | -0,316             | -0,505 | -0,442 | 2,093  | 2,967  |
| $u_{12}$            | -0,632             | -1,011 | -0,884 | 2,967  | 6,439  |

Na obrázku 4.8 sú znázornené vplyvové čiary pre posuvy. V prípade ak je posuv kladný, nastáva v smere zaťažujúcej sily (smerom dole), v prípade ak je záporný, nastáva proti smeru zaťažujúcej sily (smerom hore).



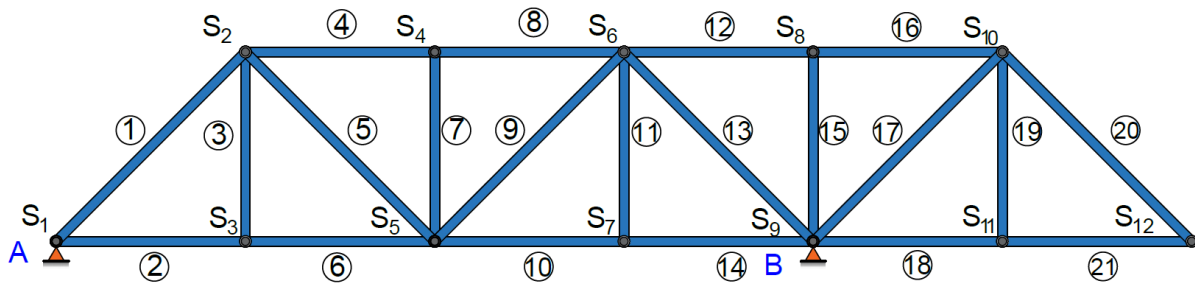
Obr. 4.8: Vplyvové čiary pre posuvy, staticky určitý variant.

### 4.3. Staticky neurčitý variant A

#### 4.3.1. Geometria

Rozmery prútovej sústavy, zaťažujúca sila a materiálové charakteristiky sú zachované z predchádzajúceho prípadu v časti 4.2. Zmena nastala pri vonkajších väzbách, kde väzba **B** už nie je podpora, ale rotačná väzba rovnako ako väzba **A**. Konfigurácia je znázornená na obrázku 4.9.

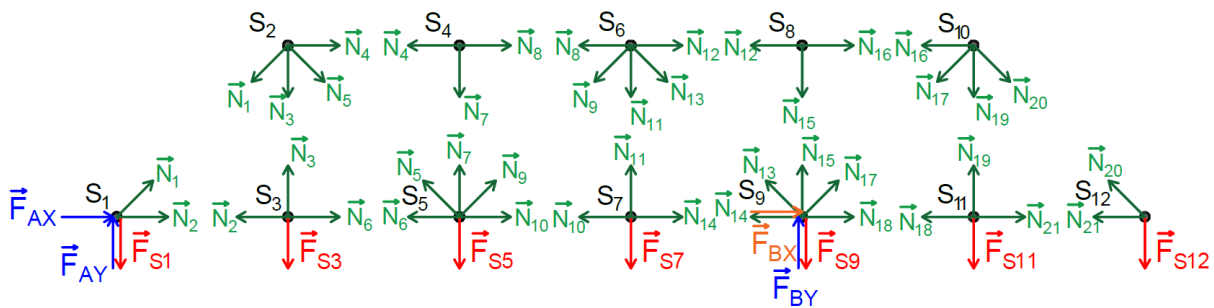
### 4.3. STATICKY NEURČITÝ VARIANT A



Obr. 4.9: Prútová sústava, staticky neurčitý variant A.

#### 4.3.2. Úplné uvoľnenie a statický rozbor

Úplne uvoľnenie je znázornené na obrázku 4.10.



Obr. 4.10: Úplné uvoľnenie, staticky neurčitý variant A.

Vonkajší statický rozbor:

$$NP = \{F_{AX}, F_{AY}, F_{BX}, F_{BY}\} \quad (4.28)$$

$$\mu = 4 \quad (4.29)$$

$$\nu = 3 \quad (4.30)$$

$$s_{ex} = \mu - \nu = 4 - 3 = 1 \quad (4.31)$$

Vnútorň statický rozbor:

$$s_{in} = p - (2 \cdot k - 3) = 21 - (2 \cdot 12 - 3) = 0 \quad (4.32)$$

Celkový statický rozbor:

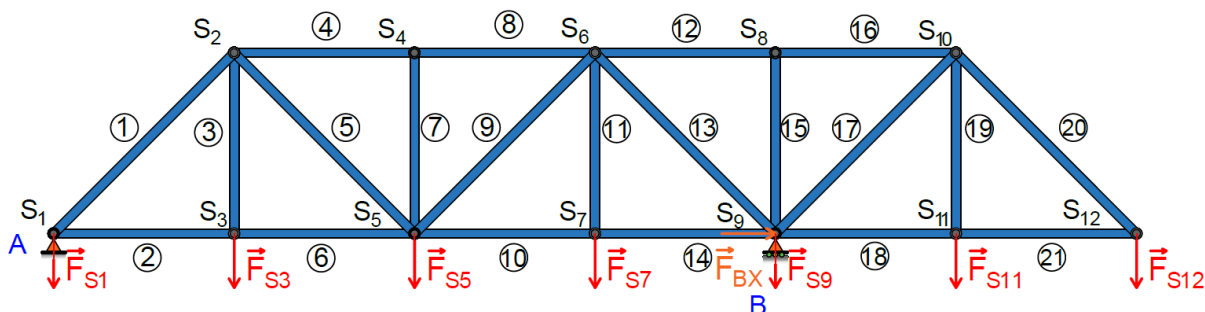
$$s = s_{in} + s_{ex} = 0 + 1 = 1 \quad (4.33)$$

Prútová sústava je **1x vonkajšie staticky neurčitá**.



### 4.3.3. Čiastočné uvoľnenie a deformačná podmienka

Keďže sústava je 1x staticky neurčitá, okrem rovníc rovnováhy je potrebné zostaviť ešte jednu ďalšiu rovnicu. Je teda potrebné sústavu čiastočne uvoľniť a zostaviť jednu deformačnú podmienku. Čiastočné uvoľnenie je znázornené na obrázku 4.11.



Obr. 4.11: Čiastočné uvoľnenie, staticky neurčitý variant A.

Rotačná väzba **B** bola nahradená podporou a silou  $F_{BX}$ . Pre silu  $F_{BX}$  platí, že posuv po jej nositeľke je nulový. Deformačná podmienka má potom tvar:

$$u_{F_{BX}} = \sum_{i=1}^{21} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{BX}} \cdot dx_i = 0 \quad (4.34)$$

Z deformačnej podmienky je vyčíslená sila  $F_{BX}$ , potom sú vyčíslené zo sústavy rovníc ostatné sily. Zdrojový kód so sústavou rovníc a riešením je v prílohe pod názvom *SN\_A\_normalove\_sily.m*.

### 4.3.4. Analýza zaťaženia

Výsledné hodnoty síl vo väzbách sú zapísané v tabuľke 4.5. V tabuľke 4.6 sú potom výsledné hodnoty normálových síl v prútoch.

Tabuľka 4.5: Výsledné hodnoty síl vo väzbách v závislosti na zaťažennom styčníku, staticky neurčitý variant A.

| Sila vo väzbe [kN] | styčník |         |         |         |        |         |         |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|
|                    | 1       | 3       | 5       | 7       | 9      | 11      | 12      |
| $F_{AX}$           | 0,00    | 100,00  | 100,00  | 100,00  | 0,00   | -100,00 | -200,00 |
| $F_{AY}$           | 200,00  | 150,00  | 100,00  | 50,00   | 0,00   | -50,00  | -100,00 |
| $F_{BX}$           | 0,00    | -100,00 | -100,00 | -100,00 | 0,00   | 100,00  | 200,00  |
| $F_{BY}$           | 0,00    | 50,00   | 100,00  | 150,00  | 200,00 | 250,00  | 300,00  |

### 4.3. STATICKY NEURČITÝ VARIANT A

Tabuľka 4.6: Výsledné hodnoty normálových síl v prútoch v závislosti na zataženom styčnÍku, staticky neurčItý variant A.

| Normálová sila N [kN] | Zatažený styčnÍk |         |         |         |         |
|-----------------------|------------------|---------|---------|---------|---------|
|                       | 3                | 5       | 7       | 11      | 12      |
| $N_1$                 | -212,13          | -141,42 | -70,71  | 70,71   | 141,42  |
| $N_2$                 | 50,00            | 0,00    | -50,00  | 50,00   | 100,00  |
| $N_3$                 | 200,00           | 0,00    | 0,00    | 0,00    | 0,00    |
| $N_4$                 | -100,00          | -200,00 | -100,00 | 100,00  | 200,00  |
| $N_5$                 | -70,71           | 141,42  | 70,71   | -70,71  | -141,42 |
| $N_6$                 | 50,00            | 0,00    | -50,00  | 50,00   | 100,00  |
| $N_7$                 | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 0,00    | 0,00    |
| $N_8$                 | -100,00          | -200,00 | -100,00 | 100,00  | 200,00  |
| $N_9$                 | 70,71            | 141,42  | -70,71  | 70,71   | 141,42  |
| $N_{10}$              | -50,00           | 0,00    | 50,00   | -50,00  | -100,00 |
| $N_{11}$              | 0,00             | 0,00    | 200,00  | 0,00    | 0,00    |
| $N_{12}$              | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 200,00  | 400,00  |
| $N_{13}$              | -70,71           | -141,42 | -212,13 | -70,71  | -141,42 |
| $N_{14}$              | -50,00           | 0,00    | 50,00   | -50,00  | -100,00 |
| $N_{15}$              | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 0,00    | 0,00    |
| $N_{16}$              | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 200,00  | 400,00  |
| $N_{17}$              | 0,00             | 0,00    | 0,00    | -282,84 | -282,84 |
| $N_{18}$              | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 0,00    | -200,00 |
| $N_{19}$              | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 200,00  | 0,00    |
| $N_{20}$              | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 0,00    | 282,84  |
| $N_{21}$              | 0,00             | 0,00    | 0,00    | 0,00    | -200,00 |

#### 4.3.5. Návrh priečneho prierezu

Postup návrhu priemeru priečneho prierezu je analogický ako v časti 4.2.6. Preto sú uvedené už len výsledné hodnoty. V tabuľke 4.7 sú uvedené extrémne hodnoty síl potrebné pre výpočet.

Tabuľka 4.7: Extrémne hodnoty síl v prútoch, staticky neurčItý variant A.

| Popis   | hodnota sily [kN] | prút   |
|---|-------------------|--------|
| Maximálna sila obecne                         | 400,00            | 12,16  |
| Maximálna tlaková sila v krátkych prútoch     | -200,00           | 4,8,21 |
| Maximálna tlaková sila v diagonálnych prútoch | -282,84           | 17     |

**Minimálny priemer priečneho prierezu vzhľadom k MSP:**

$$d_{kk} = 66,55 \text{ mm}$$

**Minimálny priemer priečneho prierezu vzhľadom k MSVS:**

$$d_{v1} = 91,72 \text{ mm}$$

$$d_{v2} = 118,94 \text{ mm}$$

Minimálny priemer priečného prierezu:

$$d = \max\{d_{kk}; d_{v1}; d_{v2}\} = \max\{66,55 \text{ mm}; 91,72 \text{ mm}; 118,94 \text{ mm}\} = 118,94 \text{ mm}$$

#### 4.3.6. Analýza deformácií

Posuvy jednotlivých styčníc vo vertikálnom smere, v závislosti na zaťaženom styčníku sú zapísané v tabuľke 4.8. Znamienková konvencia posuvov je rovnaká ako v predchádzajúcej časti. Zdrojový kód výpočtu je v prílohe pod názvom *SN\_A\_deformacie.m*.

Tabuľka 4.8: Posuvy styčníc v závislosti na zaťažennom styčníku, staticky neurčitý variant A.

| Posuv styčníku [mm] | Zaťažovaný styčník |          |          |           |           |
|---------------------|--------------------|----------|----------|-----------|-----------|
|                     | <b>3</b>           | <b>5</b> | <b>7</b> | <b>11</b> | <b>12</b> |
| $u_1$               | 0,000              | 0,000    | 0,000    | 0,000     | 0,000     |
| $u_3$               | 0,978              | 0,610    | 0,242    | -0,063    | -0,126    |
| $u_5$               | 0,610              | 1,220    | 0,610    | -0,253    | -0,505    |
| $u_7$               | 0,242              | 0,610    | 0,978    | -0,189    | -0,379    |
| $u_9$               | 0,000              | 0,000    | 0,000    | 0,000     | 0,000     |
| $u_{11}$            | -0,063             | -0,253   | -0,189   | 1,841     | 2,461     |
| $u_{12}$            | -0,126             | -0,505   | -0,379   | 2,461     | 5,428     |

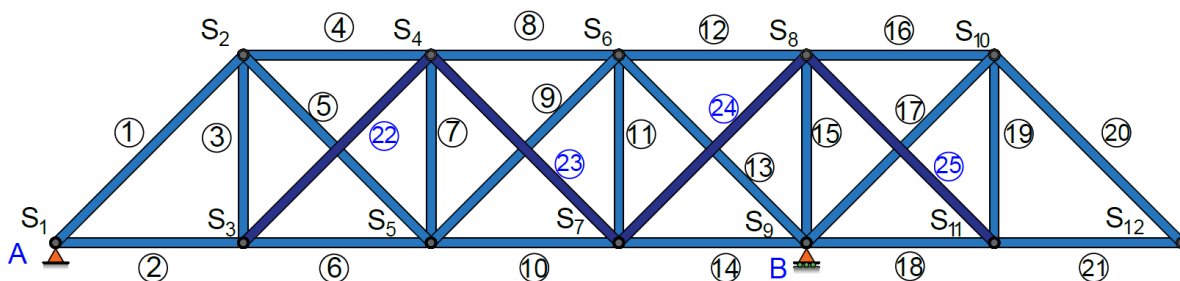
Platné pre  $d = 120 \text{ mm}$ .

#### 4.4. STATICKY NEURČITÝ VARIANT B

### 4.4. Staticky neurčitý variant B

#### 4.4.1. Geometria

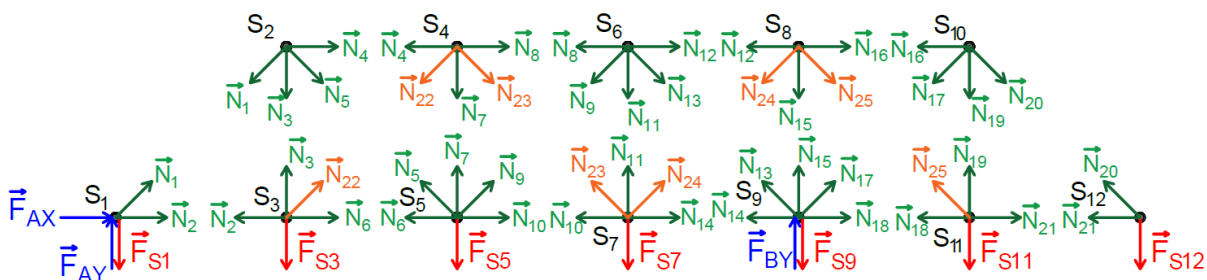
Do prútovej sústavy boli pridané diagonálne prúty, na obrázku 4.12 sú označené prúty.



Obr. 4.12: Prútová sústava, staticky neurčitý variant B.

#### 4.4.2. Úplné uvoľnenie a statický rozbor

Úplne uvoľnenie je znázornené na obrázku 4.13.



Obr. 4.13: Úplné uvoľnenie, staticky neurčitý variant B.

Vonkajší statický rozbor:

$$NP = \{F_{AX}, F_{AY}, F_{BY}\} \quad (4.35)$$

$$\mu = 3 \quad (4.36)$$

$$\nu = 3 \quad (4.37)$$

$$s_{ex} = \mu - \nu = 3 - 3 = 0 \quad (4.38)$$

Vnútorň statický rozbor:

$$s_{in} = p - (2 \cdot k - 3) = 25 - (2 \cdot 12 - 3) = 4 \quad (4.39)$$

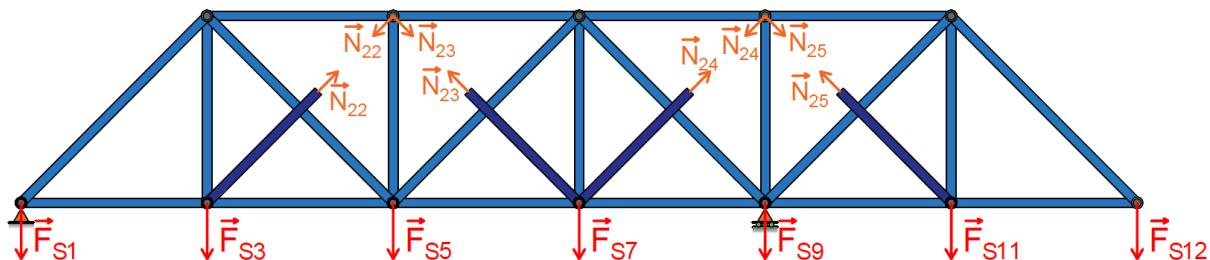
Celkový statický rozbor:

$$s = s_{in} + s_{ex} = 4 + 0 = 4 \quad (4.40)$$

Prútová sústava je **4x vnútorne staticky neurčitá**.

### 4.4.3. Čiastočné uvoľnenie a deformačná podmienka

Sústava je vnútorne 4x staticky neurčitá, je potrebné sústavu znovu čiastočne uvoľniť a zostaviť tentokrát celkom štyri deformačné podmienky. Čiastočné uvoľnenie je znázornené na obrázku 4.14.



Obr. 4.14: Čiastočné uvoľnenie, staticky neurčitý variant B.

Keďže prúty sú spojené v styčníkoch, tak je možné pri zostavení deformačných podmienok vychádzať z toho, že relatívne posuvy normálových síl  $N_{22}$  až  $N_{25}$  sú nulové. Deformačné podmienky je potom možné formulovať nasledovne:

$$u_{N_{22}} = \sum_{i=1}^{25} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_{22}} \cdot dx_i = 0 \quad (4.41)$$

$$u_{N_{23}} = \sum_{i=1}^{25} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_{23}} \cdot dx_i = 0 \quad (4.42)$$

$$u_{N_{24}} = \sum_{i=1}^{25} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_{24}} \cdot dx_i = 0 \quad (4.43)$$

$$u_{N_{25}} = \sum_{i=1}^{25} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_{25}} \cdot dx_i = 0 \quad (4.44)$$

Z deformačných podmienok sú vyčíslené normálove sily  $N_{22}$  až  $N_{25}$ . Následne sú potom zo sústavy rovníc rovnováhy vyčíslené ostatné sily. Zdrojový kód so sústavou rovníc a výpočtom je v prílohe pod názvom *SN\_B\_normalove\_sily.m*.

### 4.4.4. Analýza zaťaženia

V tabuľke 4.9 sú zapísané výsledné sily vo väzbách a v tabuľke 4.10 výsledné hodnoty normálových síl.

Tabuľka 4.9: Výsledné hodnoty síl vo väzbách v závislosti na zaťažennom styčníku, staticky neurčitý variant B.

| Sila vo väzbe [kN] | Zaťažovaný styčník |        |        |        |        |        |         |
|--------------------|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
|                    | 1                  | 3      | 5      | 7      | 9      | 11     | 12      |
| $F_{AX}$           | 0,00               | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00    |
| $F_{AY}$           | 200,00             | 150,00 | 100,00 | 50,00  | 0,00   | -50,00 | -100,00 |
| $F_{BY}$           | 0,00               | 50,00  | 100,00 | 150,00 | 200,00 | 250,00 | 300,00  |

#### 4.4. STATICKY NEURČITÝ VARIANT B

Tabuľka 4.10: Výsledné sily v prútoch v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant B.

| Normálová sila N [kN] | Zaťažný styčník |         |         |         |         |
|-----------------------|-----------------|---------|---------|---------|---------|
|                       | 3               | 5       | 7       | 11      | 12      |
| $N_1$                 | -212,13         | -141,42 | -70,71  | 70,71   | 141,42  |
| $N_2$                 | 150,00          | 100,00  | 50,00   | -50,00  | -100,00 |
| $N_3$                 | 156,71          | 35,44   | 23,44   | -22,24  | -44,62  |
| $N_4$                 | -143,29         | -164,56 | -76,56  | 77,76   | 155,38  |
| $N_5$                 | -9,48           | 91,30   | 37,56   | -39,26  | -78,31  |
| $N_6$                 | 106,71          | 135,44  | 73,44   | -72,24  | -144,62 |
| $N_7$                 | -16,63          | 76,01   | -11,51  | 1,13    | 3,45    |
| $N_8$                 | -73,33          | -159,44 | -134,95 | 123,37  | 248,08  |
| $N_9$                 | 32,99           | 84,06   | -21,29  | 37,66   | 73,43   |
| $N_{10}$              | 76,67           | 140,56  | 115,05  | -126,63 | -251,92 |
| $N_{11}$              | 3,84            | -3,76   | 87,66   | 11,35   | 11,27   |
| $N_{12}$              | -22,83          | -44,32  | -77,39  | 187,98  | 363,19  |
| $N_{13}$              | -38,43          | -78,74  | -102,69 | -53,72  | -89,37  |
| $N_{14}$              | 27,17           | 55,68   | 72,61   | -162,02 | -336,81 |
| $N_{15}$              | -20,46          | -39,73  | -69,37  | -110,77 | -112,29 |
| $N_{16}$              | 2,36            | 4,59    | 8,01    | 101,24  | 324,52  |
| $N_{17}$              | -3,34           | -6,49   | -11,33  | -143,18 | -176,10 |
| $N_{18}$              | 2,36            | 4,59    | 8,01    | -98,76  | -275,48 |
| $N_{19}$              | 2,36            | 4,59    | 8,01    | 101,24  | -75,48  |
| $N_{20}$              | 0,00            | 0,00    | 0,00    | 0,00    | 282,84  |
| $N_{21}$              | 0,00            | 0,00    | 0,00    | 0,00    | -200,00 |
| $N_{22}$              | 61,23           | -50,13  | -33,15  | 31,46   | 63,11   |
| $N_{23}$              | -37,72          | -57,37  | 49,42   | -33,05  | -67,99  |
| $N_{24}$              | 32,28           | 62,68   | 109,44  | 16,99   | 52,05   |
| $N_{25}$              | -3,34           | -6,49   | -11,33  | 139,66  | 106,74  |

#### 4.4.5. Návrh priečného prierezu

V tabuľke 4.11 sú uvedené extrémne hodnoty síl potrebné pre výpočet.

Tabuľka 4.11: Extrémne hodnoty síl v prútoch, staticky neurčitý variant B.

| Popis   | sila [kN] | prút |
|---|-----------|------|
| Maximálna sila obecne                         | 363,19    | 12   |
| Maximálna tlaková sila v krátkych prútoch     | -336,81   | 14   |
| Maximálna tlaková sila v diagonálnych prútoch | -212,13   | 1    |

**Minimálny priemer priečného prierezu vzhľadom k MSP:**

$$d_{kk} = 63,41 \text{ mm}$$

**Minimálny priemer priečného prierezu vzhľadom k MSVS:**

#### 4. NÁVRH ROZMERU PRE PRIEČNY PRIEREZ

$$d_{v1} = 104,48 \text{ mm}$$

$$d_{v2} = 110,68 \text{ mm}$$

Minimálny priemer priečného prierezu:

$$d = \max\{d_{kk}; d_{v1}; d_{v2}\} = \max\{63,41 \text{ mm}; 104,48 \text{ mm}; 110,68 \text{ mm}\} = 110,68 \text{ mm}$$

#### 4.4.6. Analýza deformácií

Posuvy styčníc v závislosti na zataženom styčníku vo vertikálnom smere sú uvedené v tabuľke 4.12. Zdrojový kód pre výpočet posuvov je uvedený v prílohe pod názvom *SN\_B\_deformacie.m*.

Tabuľka 4.12: Posuvy styčníc v závislosti na zataženom styčníku, staticky neurčitý variant B.

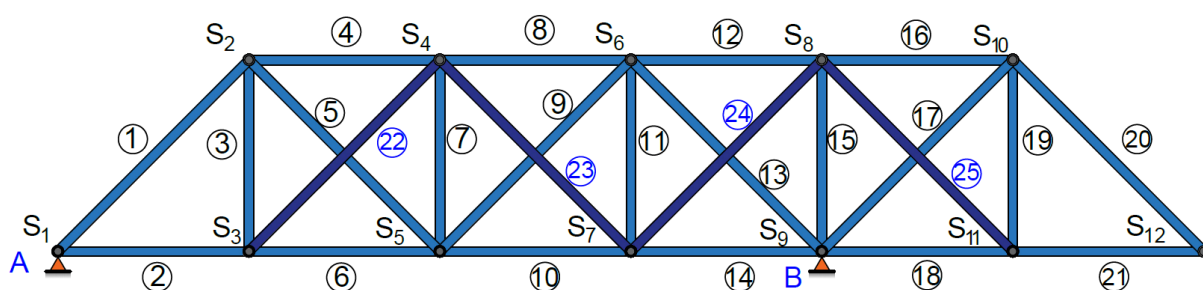
| Posuv styčníku [mm] | Zatažený styčník |        |        |        |        |
|---------------------|------------------|--------|--------|--------|--------|
|                     | 3                | 5      | 7      | 11     | 12     |
| $u_1$               | 0,000            | 0,000  | 0,000  | 0,000  | 0,000  |
| $u_3$               | 1,064            | 0,848  | 0,501  | -0,414 | -0,845 |
| $u_5$               | 0,848            | 1,181  | 0,703  | -0,537 | -1,108 |
| $u_7$               | 0,501            | 0,703  | 0,737  | -0,416 | -0,891 |
| $u_9$               | 0,000            | 0,000  | 0,000  | 0,000  | 0,000  |
| $u_{11}$            | -0,414           | -0,537 | -0,416 | 1,421  | 2,350  |
| $u_{12}$            | -0,845           | -1,108 | -0,891 | 2,350  | 5,760  |

Platné pre  $d = 120 \text{ mm}$ .

### 4.5. Staticky neurčitý variant C

#### 4.5.1. Geometria

Geometria staticky neurčitého variantu C je kombináciou variantu A a B.

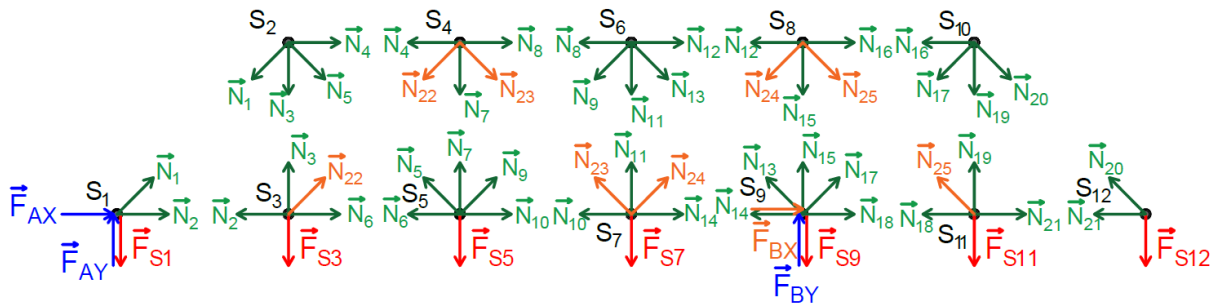


Obr. 4.15: Prútová sústava, staticky neurčitý variant C.

#### 4.5. STATICKY NEURČITÝ VARIANT C

##### 4.5.2. Úplné uvoľnenie a statický rozbor

Úplne uvoľnenie je znázornené na obrázku 4.16.



Obr. 4.16: Úplné uvoľnenie, staticky neurčitý variant C.

Vonkajší statický rozbor:

$$NP = \{F_{AX}, F_{AY}, F_{BX}, F_{BY}\} \quad (4.45)$$

$$\mu = 4 \quad (4.46)$$

$$\nu = 3 \quad (4.47)$$

$$s_{ex} = \mu - \nu = 4 - 3 = 1 \quad (4.48)$$

Vnútorň statický rozbor:

$$s_{in} = p - (2 \cdot k - 3) = 25 - (2 \cdot 12 - 3) = 4 \quad (4.49)$$

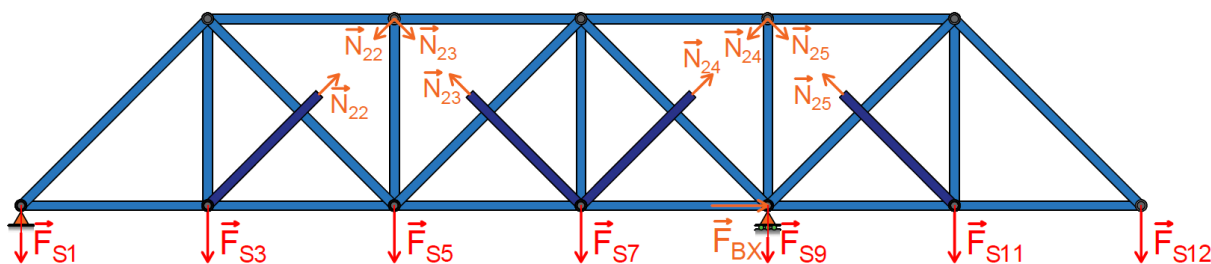
Celkový statický rozbor:

$$s = s_{in} + s_{ex} = 4 + 1 = 5 \quad (4.50)$$

Prúťová sústava je 4x vnútorne a 1x vonkajšie staticky neurčitá, celkovo je sústava 5x staticky neurčitá.

##### 4.5.3. Čiastočné uvoľnenie a deformačná podmienka

Znovu je nutné sústavu čiastočne uvoľniť a zostaviť päť deformačných podmienok. Čiastočné uvoľnenie je na obrázku 4.17.



Obr. 4.17: Čiastočné uvoľnenie, staticky neurčitý variant C.



#### 4. NÁVRH ROZMERU PRE PRIEČNY PRIEREZ

Pre normálové sily  $N_{22}$  až  $N_{25}$  platí, že ich relatívne posuvy sú opäť nulové. Pre silu  $F_{BX}$  platí, že jej posuv je takisto nulový. Deformačné podmienky majú potom tvar:

$$u_{F_{BX}} = \sum_{i=1}^{25} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{BX}} \cdot dx_i = 0 \quad (4.51)$$

$$u_{N_{22}} = \sum_{i=1}^{25} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_{22}} \cdot dx_i = 0 \quad (4.52)$$

$$u_{N_{23}} = \sum_{i=1}^{25} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_{23}} \cdot dx_i = 0 \quad (4.53)$$

$$u_{N_{24}} = \sum_{i=1}^{25} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_{24}} \cdot dx_i = 0 \quad (4.54)$$

$$u_{N_{25}} = \sum_{i=1}^{25} \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_{25}} \cdot dx_i = 0 \quad (4.55)$$

Z deformačných podmienok sú opäť vyčíslené normálové sily  $N_{22}$  až  $N_{25}$  a sila  $F_{BX}$ . Následne zo sústavy rovníc sú dopočítané ostatné hodnoty síl. Zdrojový kód s výpočtom a so sústavou rovníc sú v prílohe pod názvom *SN\_C\_normalove\_sily.m*.

#### 4.5.4. Analýza zaťaženia

V tabulke 4.13 sú zapísané výsledné sily vo väzbách a v tabulke 4.14 výsledné hodnoty normálových síl.

Tabulka 4.13: Výsledné hodnoty síl vo väzbách v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant C.

| Sila vo väzbe [kN] | zaťažený styčník |        |         |        |        |         |         |
|--------------------|------------------|--------|---------|--------|--------|---------|---------|
|                    | 1                | 3      | 5       | 7      | 9      | 11      | 12      |
| $F_{AX}$           | 0,00             | 96,78  | 115,88  | 83,51  | 0,00   | -110,29 | -223,69 |
| $F_{AY}$           | 200,00           | 150,00 | 100,00  | 50,00  | 0,00   | -50,00  | -100,00 |
| $F_{BX}$           | 0,00             | -96,78 | -115,88 | -83,51 | 0,00   | 110,29  | 223,69  |
| $F_{BY}$           | 0,00             | 50,00  | 100,00  | 150,00 | 200,00 | 250,00  | 300,00  |

#### 4.5. STATICKY NEURČITÝ VARIANT C

Tabuľka 4.14: Výsledné sily v prútoch v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant C.

| Normálová sila N [kN] | zaťažovaný styčník |         |         |         |         |
|-----------------------|--------------------|---------|---------|---------|---------|
|                       | 3                  | 5       | 7       | 11      | 12      |
| $N_1$                 | -212,13            | -141,42 | -70,71  | 70,71   | 141,42  |
| $N_2$                 | 53,22              | -15,88  | -33,51  | 60,29   | 123,69  |
| $N_3$                 | 165,89             | 46,44   | 31,36   | -32,71  | -65,85  |
| $N_4$                 | -134,11            | -153,56 | -68,64  | 67,29   | 134,15  |
| $N_5$                 | -22,47             | 75,75   | 26,36   | -24,46  | -48,30  |
| $N_6$                 | 19,11              | 30,56   | -2,14   | 27,59   | 57,85   |
| $N_7$                 | 0,67               | 96,71   | 3,42    | -18,58  | -36,51  |
| $N_8$                 | -65,22             | -149,73 | -127,95 | 114,13  | 229,33  |
| $N_9$                 | 21,52              | 70,32   | -31,19  | 50,73   | 99,94   |
| $N_{10}$              | -12,00             | 34,40   | 38,54   | -25,58  | -46,97  |
| $N_{11}$              | 21,23              | 17,07   | 102,67  | -8,47   | -28,93  |
| $N_{12}$              | -13,55             | -33,21  | -69,38  | 177,41  | 341,74  |
| $N_{13}$              | -51,55             | -94,46  | -114,01 | -38,76  | -59,03  |
| $N_{14}$              | -60,33             | -49,08  | -2,89   | -62,30  | -134,57 |
| $N_{15}$              | -12,14             | -29,77  | -62,20  | -120,25 | -131,52 |
| $N_{16}$              | 1,40               | 3,44    | 7,18    | 102,34  | 326,74  |
| $N_{17}$              | -1,98              | -4,86   | -10,16  | -144,73 | -179,24 |
| $N_{18}$              | 1,40               | 3,44    | 7,18    | -97,66  | -273,26 |
| $N_{19}$              | 1,40               | 3,44    | 7,18    | 102,34  | -73,26  |
| $N_{20}$              | 0,00               | 0,00    | 0,00    | 0,00    | 282,84  |
| $N_{21}$              | 0,00               | 0,00    | 0,00    | 0,00    | -200,00 |
| $N_{22}$              | 48,24              | -65,67  | -44,36  | 46,25   | 93,12   |
| $N_{23}$              | -49,19             | -71,10  | 39,53   | -19,98  | -41,48  |
| $N_{24}$              | 19,16              | 46,96   | 98,12   | 31,95   | 82,39   |
| $N_{25}$              | -1,98              | -4,86   | -10,16  | 138,11  | 103,60  |

#### 4.5.5. Návrh priečného prierezu

Extrémne hodnoty síl potrebné pre výpočet sú uvedené v tabuľke 4.15.

Tabuľka 4.15: Extrémne hodnoty síl v prútoch, staticky neurčitý variant C.

| Popis   | sila [kN] | prút |
|---|-----------|------|
| Maximálna sila obecne                         | 341,74    | 12   |
| Maximálna tlaková sila v krátkych prútoch     | -273,26   | 18   |
| Maximálna tlaková sila v diagonálnych prútoch | -212,13   | 1    |

**Minimálny priemer priečného prierezu vzhľadom k MSP:**

$$d_{kk} = 61,51 \text{ mm}$$

**Minimálny priemer priečného prierezu vzhľadom k MSVS:**

#### 4. NÁVRH ROZMERU PRE PRIEČNY PRIEREZ

$$d_{v1} = 99,16 \text{ mm}$$

$$d_{v2} = 110,68 \text{ mm}$$

Minimálny priemer priečného prierezu:

$$d = \max\{d_{kk}; d_{v1}; d_{v2}\} = \max\{61,51 \text{ mm}; 99,16 \text{ mm}; 110,68 \text{ mm}\} = 110,68 \text{ mm}$$

#### 4.5.6. Analýza deformácií

Posuvy styčníc v závislosti na zaťaženom styčníc vo vertikálnom smere sú uvedené v tabuľke 4.16. Zdrojový kód pre výpočet posuvov je uvedený v prílohe pod názvom *SN\_C\_deformacie.m*.

Tabuľka 4.16: Posuvy styčníc v závislosti na zaťaženom styčníc, staticky neurčitý variant C.

| Posuv styčníc [mm] | Zaťažný styčníc |        |        |        |        |
|--------------------|-----------------|--------|--------|--------|--------|
|                    | 3               | 5      | 7      | 11     | 12     |
| $u_1$              | 0,000           | 0,000  | 0,000  | 0,000  | 0,000  |
| $u_3$              | 0,843           | 0,584  | 0,311  | -0,162 | -0,335 |
| $u_5$              | 0,584           | 0,866  | 0,476  | -0,236 | -0,498 |
| $u_7$              | 0,311           | 0,476  | 0,573  | -0,199 | -0,452 |
| $u_9$              | 0,000           | 0,000  | 0,000  | 0,000  | 0,000  |
| $u_{11}$           | -0,162          | -0,236 | -0,199 | 1,135  | 1,769  |
| $u_{12}$           | -0,335          | -0,498 | -0,452 | 1,769  | 4,583  |

Platné pre  $d = 120 \text{ mm}$ .

#### 4.6. Porovnanie

Následujúce tabuľky a obrázky porovnávajú dosiahnuté výsledky analýz staticky určitej varianty modelu prútovej sústavy portálového žeriavu (SU) a ďalších, staticky neurčitých variantov (SN). Uvažované zaťaženie od bremena a žeriavovej mačky je 200 kN. V nasledujúcich dvoch tabuľkách sa index 1 týka krátkeho a index 2 dlhého prútu.

Tabuľka 4.17: Porovnanie minimálnych rozmerov priečného prierezu pre rôzne varianty a medzné stavy, vrátane kritických prútov.

| Variant | $d_{kk}$ [mm] |        | $d_{v1}$ [mm] |          | $d_{v2}$ [mm] |        |
|---------|---------------|--------|---------------|----------|---------------|--------|
|         | prúty         | prúty  | prúty         | prúty    | prúty         | prúty  |
| SU      | 66,55         | 12, 16 | 101,50        | 10,14    | 118,94        | 17, 20 |
| SN A    | 66,55         | 12, 16 | 91,72         | 4, 8, 21 | 118,94        | 17     |
| SN B    | 63,41         | 12     | 104,48        | 14       | 110,68        | 1      |
| SN C    | 61,51         | 12     | 99,16         | 18       | 110,68        | 1      |

Z tabuľky 4.17 je možné vyvodiť záver, že minimálny priemer priečného prútu sa líši pre staticky určitý variant a staticky neurčitý variant celkom o 8 %. Najviac nebezpečný prút

#### 4.6. POROVNANIE

vzhľadom k MSP je, bez ohľadu na variant, prút číslo 12. Nebezpečné prúty vzhľadom k MSVS sú rôzne podľa variantu. V nasledujúcich riadkoch sú porovnané vybrané veličiny, vybrané prúty a ich zaťaženie v závislosti na variante prútovej sústavy. V tabuľke 4.18 sú porovnané extrémne hodnoty rôznych veličín v závislosti na variante a takisto aj celková bezpečnosť  $k_{min}$ , určená ako minimálna hodnota z bezpečností k MSP a MSVS.

Tabuľka 4.18: Porovnanie veličín v závislosti od variantu, platné pre priečny prierez priemeru  $d = 120 \text{ mm}$ .

| Variant | $F_{max}$<br>[kN] | $F_{min1}$<br>[kN] | $F_{min2}$<br>[kN] | $\sigma_{max}$<br>[Mpa] | $k_k$<br>[-] | $k_{v1}$<br>[-] | $k_{v2}$<br>[-] | $k_{min}$<br>[-] |
|---------|-------------------|--------------------|--------------------|-------------------------|--------------|-----------------|-----------------|------------------|
| SU      | 400,00            | -300,00            | -282,84            | 35,37                   | 9,75         | 7,81            | 4,14            | 4,14             |
| SN A    | 400,00            | -200,00            | -282,84            | 35,37                   | 9,75         | 11,72           | 4,14            | 4,14             |
| SN B    | 363,19            | -336,81            | -212,13            | 32,11                   | 10,74        | 6,96            | 5,52            | 5,52             |
| SN C    | 341,74            | -273,26            | -212,13            | 30,22                   | 11,42        | 8,58            | 5,52            | 5,52             |

V tabuľke 4.19 je uvedené porovnanie hodnôt normálových síl v prúte 1 v závislosti na variante.

Tabuľka 4.19: Veľkosť normálovej sily  $N_1$  [kN] v prúte 1.

| Variant | Zaťažovaný styčník |          |          |           |           |
|---------|--------------------|----------|----------|-----------|-----------|
|         | <b>3</b>           | <b>5</b> | <b>7</b> | <b>11</b> | <b>12</b> |
| SN      | -212,13            | -141,42  | -70,71   | 70,71     | 141,42    |
| SN A    | -212,13            | -141,42  | -70,71   | 70,71     | 141,42    |
| SN B    | -212,13            | -141,42  | -70,71   | 70,71     | 141,42    |
| SN C    | -212,13            | -141,42  | -70,71   | 70,71     | 141,42    |

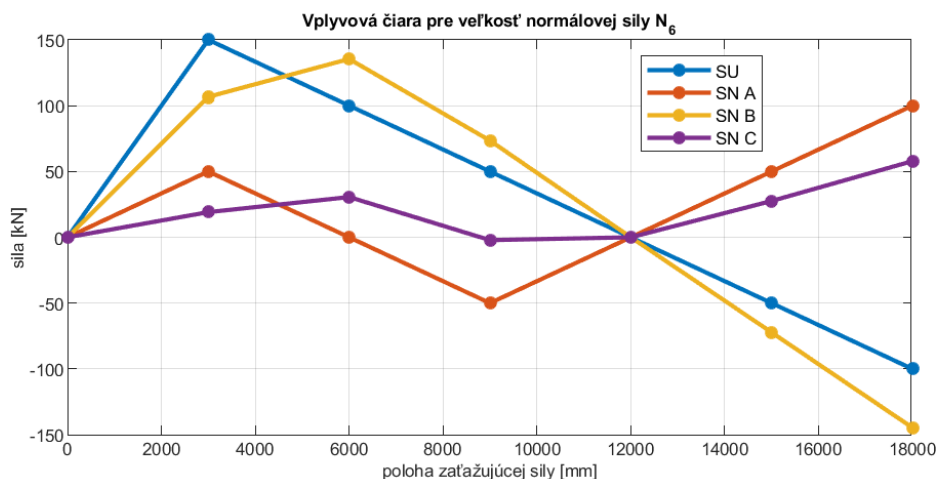
Je zaujímavé, že zaťaženie prútu 1 nie je závislé na konfigurácii prútov v prútovej sústave. Podobné porovnanie je uvedené v tabuľke 4.20 pre prút 6.

Tabuľka 4.20: Veľkosť normálovej sily  $N_6$  [kN] v prúte 6.

| Variant | Zaťažovaný styčník |          |          |           |           |
|---------|--------------------|----------|----------|-----------|-----------|
|         | <b>3</b>           | <b>5</b> | <b>7</b> | <b>11</b> | <b>12</b> |
| SN      | 150,00             | 100,00   | 50,00    | -50,00    | -100,00   |
| SN A    | 50,00              | 0,00     | -50,00   | 50,00     | 100,00    |
| SN B    | 106,71             | 135,44   | 73,44    | -72,24    | -144,62   |
| SN C    | 19,11              | 30,56    | -2,14    | 27,59     | 57,85     |

Pri prúte 6 je už možné vidieť, že vplyvové čiary a teda aj hodnoty normálových síl sú závislé na konfigurácii prútov. Porovnanie vplyvových čiar pre hodnoty normálovej sily 6 v závislosti na variante ilustruje obrázok 4.18.

#### 4. NÁVRH ROZMERU PRE PRIEČNY PRIEREZ



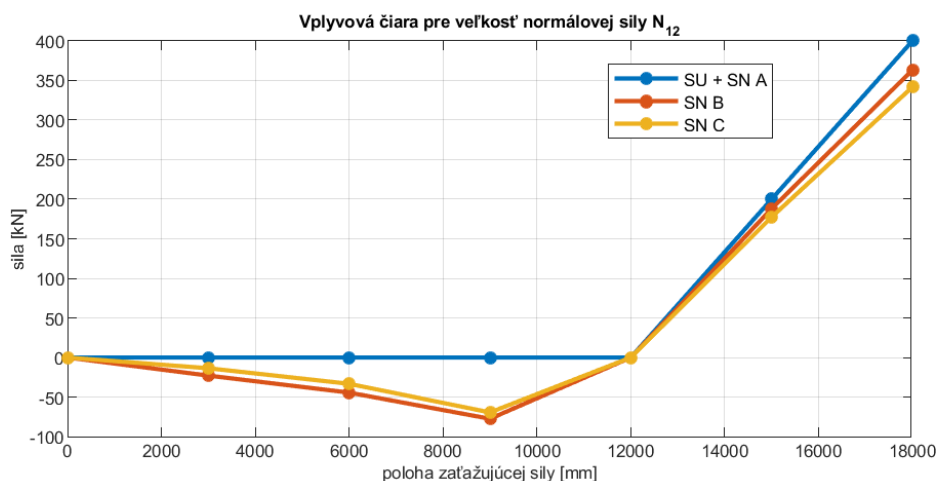
Obr. 4.18: Vplyvové čiary pre normálovú silu  $N_6$

Porovnanie hodnôt normálových síl v prúte 12 je uvedené v tabuľke 4.21.

Tabuľka 4.21: Veľkosť normálovej sily  $N_{12}$  [kN] v prúte 12.

| Variant | Zatažený styčník |        |        |        |        |
|---------|------------------|--------|--------|--------|--------|
|         | 3                | 5      | 7      | 11     | 12     |
| SN      | 0,00             | 0,00   | 0,00   | 200,00 | 400,00 |
| SN A    | 0,00             | 0,00   | 0,00   | 200,00 | 400,00 |
| SN B    | -22,83           | -44,32 | -77,39 | 187,98 | 363,19 |
| SN C    | -13,55           | -33,21 | -69,38 | 177,41 | 341,74 |

Tiež možno vyvodit' záver, že pokiaľ je prúťová sústava vnútorne staticky určitá, prút 12 je namáhaný až keď zatažúca sila pôsobí za väzbou B. Pokiaľ je sústava vnútorne staticky neurčitá namáhanie prútu je nulové len pokiaľ zatažujúca sila pôsobí iba v mieste väzieb s okolím. Toto je možné vidieť aj z obrázku 4.19.



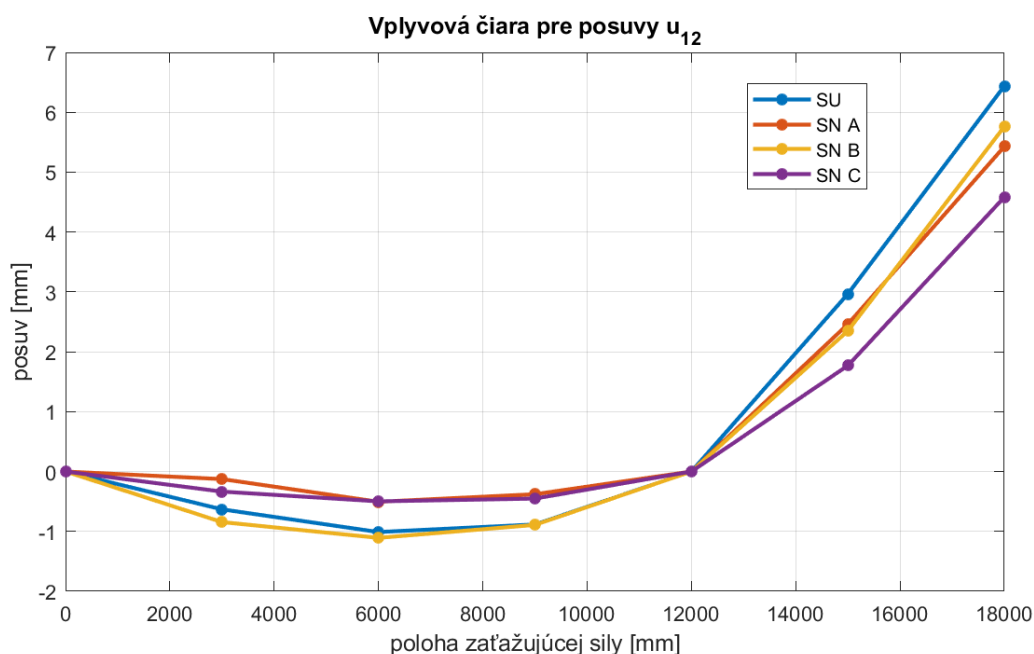
Obr. 4.19: Vplyvové čiary pre normálovú silu  $N_{12}$

## 4.7. DISKUSIA K ANALYTICKÉMU RIEŠENIU

Porovnanie hodnôt vertikálneho posuvu  $u_{12}$  v závislosti na variante a zataženom styčníku je uvedené v tabuľke 4.22. Porovnanie vplyvových čiar pre tento posuv je na obrázku 4.20.

Tabuľka 4.22: Posuvy styčníku  $u_{12}$  [mm] v závislosti na polohe zatažujúcej sily a variante modelu.

| Variant | Zatažený styčník |        |        |       |       |
|---------|------------------|--------|--------|-------|-------|
|         | 3                | 5      | 7      | 11    | 12    |
| SU      | -0,632           | -1,011 | -0,884 | 2,967 | 6,439 |
| SN A    | -0,126           | -0,505 | -0,379 | 2,461 | 5,428 |
| SN B    | -0,845           | -1,108 | -0,891 | 2,350 | 5,760 |
| SN C    | -0,335           | -0,498 | -0,452 | 1,769 | 4,583 |



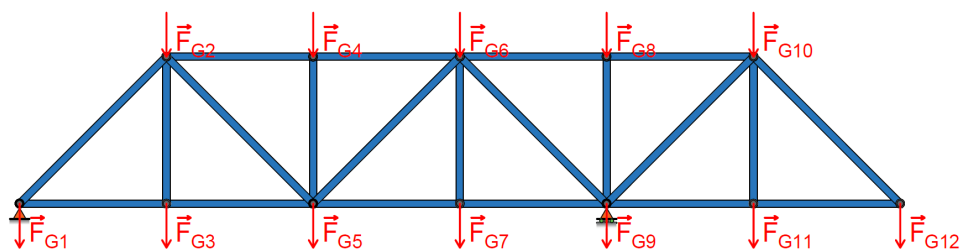
Obr. 4.20: Vplyvová čiara pre posuv styčníku  $u_{12}$  v závislosti na variante modelu.

## 4.7. Diskusia k analytickému riešeniu

### 4.7.1. Zataženie vlastnou váhou

V predchádzajúcich analýzach, výpočet nezahrňal vplyv gravitácie a teda zataženie konštrukcie od vlastnej tiaže. Je však možné dospieť k tomu, že vlastná tiaž je voči zataženiu od žeriavovej mačky nepodstatná a má veľmi malý vplyv na konečné výsledky. Tiaž od prútov je potrebné rozložiť iba do styčníkov aby boli splnené predpoklady prútových sústav, tak ako znázorňuje obrázok 4.21. Každý styčník prenáša polovicu síl od vlastnej tiaže každého prútu ktorý spája.

#### 4. NÁVRH ROZMERU PRE PRIEČNY PRIEREZ

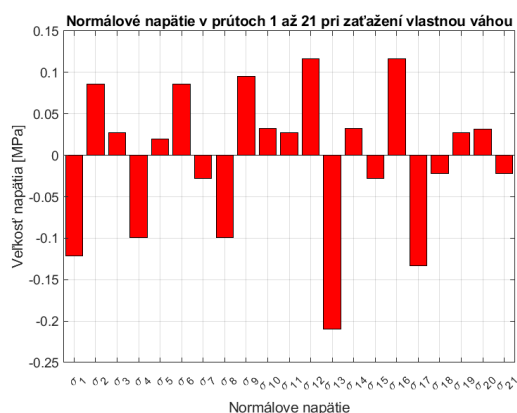


Obr. 4.21: Sily reprezentujúce zaťaženie od vlastnej váhy.

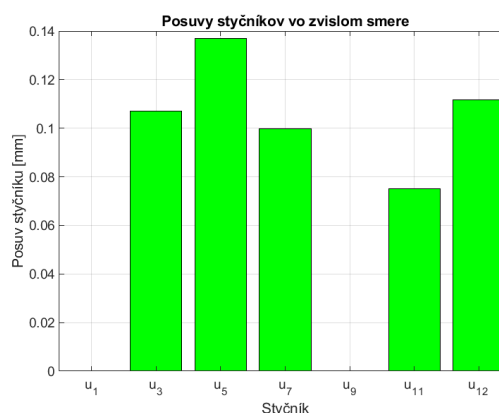
Príklad výpočtu sily v styčníku reprezentujúcu vlastnú tiaž:

$$F_{G2} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \left(2 \cdot L + 2 \cdot \frac{L}{\cos(45)}\right), \quad (4.56)$$

kde  $\rho$  je hustota materiálu,  $g$  gravitačné zrýchlenie,  $d$  priemer priečného prierezu a  $L$  dĺžka prútu. Ak je uvažované zaťaženie čisto len od vlastnej váhy, tak pri použití priečnom priereze  $d = 120$  mm, pri staticky určitom variante, je maximálne normálové napätie (tlakové) v prúte  $\sigma_{13} = 0,21$  MPa a maximálny zvislý posuv  $u_5 = 0,14$  mm, čo je v porovnaní s vypočítanými maximálnymi hodnotami napätí a posuvov pri zaťažení od bremena nepodstatné, aj napriek tomu že hmotnosť jednotlivých prútov je relatívne vysoká. Pri krátkom prúte to je 266 kg a pri dlhom 377 kg. Normálové napätia a posuvy v ostatných prútoch ilustruje obrázok 4.22a. Na obrázku 4.22b sú znázornené posuvy ostatných styčníkov.



(a) Napätia v prútoch.



(b) Zvislé posuvy styčníkov.

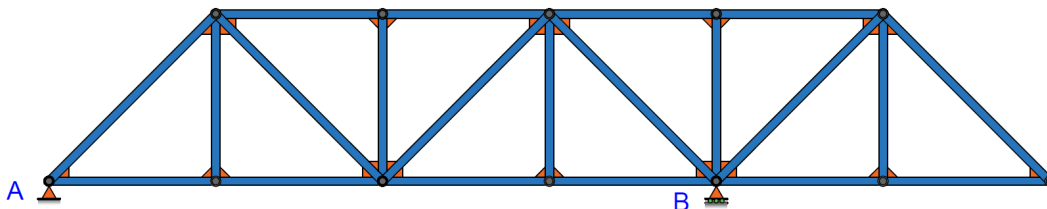
Obr. 4.22: Veličiny pre zaťaženie konštrukcie vlastnou váhou.

Bolo by dobré ešte uviesť, že vplyv vlastnej hmotnosti pri reálnej konštrukcii by bol ešte menší. Dôvodom je skutočnosť, že nie každý prút by musel mať rovnakú plochu priečného prierezu. Tie by mohli byť navrhnuté v závislosti na výslednej normálovej sile v prúte. Takisto sa v reálnych konštrukciách predpokladá, že niektoré prúty by boli dominantne namáhané na ohyb, a teda by bolo vhodné zvoliť tvar priečného prierezu s väčšou ohybovou tuhosťou a menšou plochou priečného prierezu, a teda vo výsledku aj s menšou hmotnosťou prútov a celej sústavy. Príkladom je "I" alebo "T" profil. Zdrojový kód na riešenie zaťaženia od vlastnej váhy je dostupný v prílohe pod názvom *SU\_vlastna\_tiaz.m*.

## 4.7. DISKUSIA K ANALYTICKÉMU RIEŠENIU

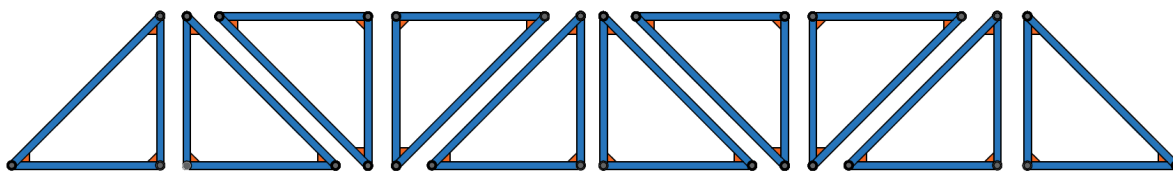
### 4.7.2. Uvažovanie rámovej konštrukcie

Prútové sústavy sa používajú ako model pre ich relatívnu jednoduchosť čo sa týka výpočtu. Reálne konštrukcie však väčšinou nie sú spojené rotačnými väzbami, ale sú zvarené, prípadne nýtované a podobne. Toto značne komplikuje výpočet. Pre ilustráciu je uvedený príklad, ako sa zmení vnútorná statická určitosť sústavy na obrázku 4.23 ak by spoje boli zvary a danú sústavu by sme riešili ako rámovú.

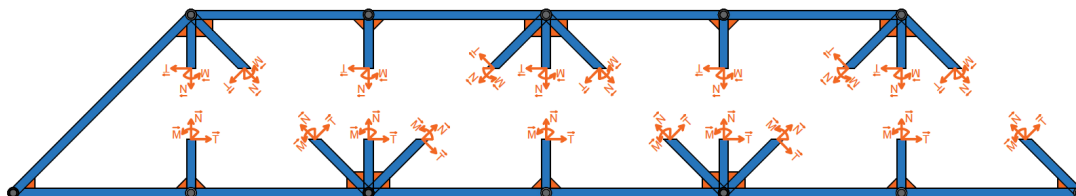


Obr. 4.23: Modifikovaná prútová sústava na rámovú.

Rozličné metódy určenia stupňa statickej neurčitosti sú uvedené v [12]. Jednou z možností je rozdelenie rámovej konštrukcie na jednotlivé uzavreté rámy ako je znázornené na obrázku 4.24a.



(a) Rozdelenie rámovej konštrukcie na jednotlivé rámy.



(b) "Rozrezanie" rámovej konštrukcie na "otvorený" prút.

Obr. 4.24: Spôsoby určenia stupňa statickej neurčitosti rámových konštrukcií.

Keďže uzavretý rám je obecné 3x staticky neurčitý, celková statická neurčitosť je potom

$$s = 3 \cdot f = 3 \cdot 10 = 30, \quad (4.57)$$

kde  $f$  je počet jednotlivých rámov. Úloha je teda 30x staticky neurčitá a bolo by potrebné zostaviť 30 deformačných podmienok. Ďalšou možnosťou je rozrezať rámovú konštrukciu toľkými rezmi, aby vznikol otvorený prút. Podľa obrázka 4.24b boli rezy vedené cez 10 prútov. V prípade 2D úlohy sú v každom reze 3 neznáme zložky od VVÚ, pre ktoré je potrebné sformulovať deformačnú podmienku. Tých bude teda znovu  $10 \cdot 3 = 30$ . Rámove konštrukcie sú typické pre vysoké budovy a je to viac záležitosť stavebného inžinierstva ako strojárkeho. Nič menej, nie je zlé mať prehľad o tom ako sa tieto riešia. Ich analytické riešenie je veľmi pracné a v praxi sa nepoužíva. Populárne sú numerické metódy ako napríklad metóda konečných prvkov (MKP) [12].

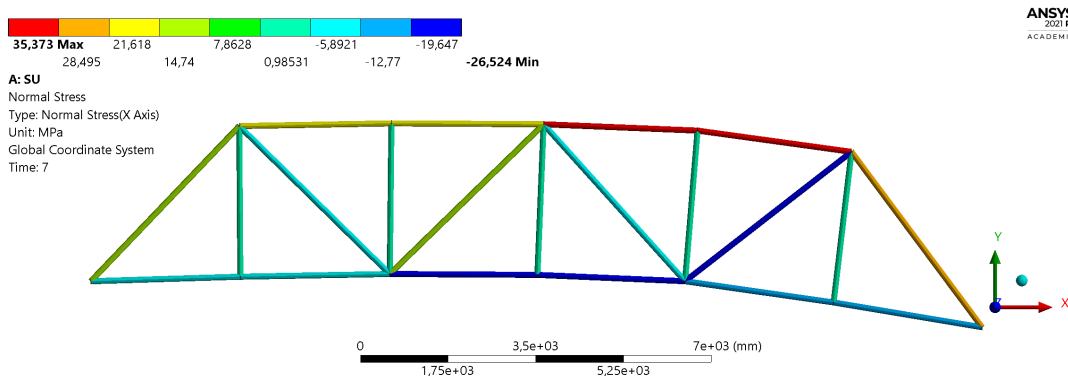


## 5. Verifikácia výsledkov pomocou MKP v softvéri ANSYS

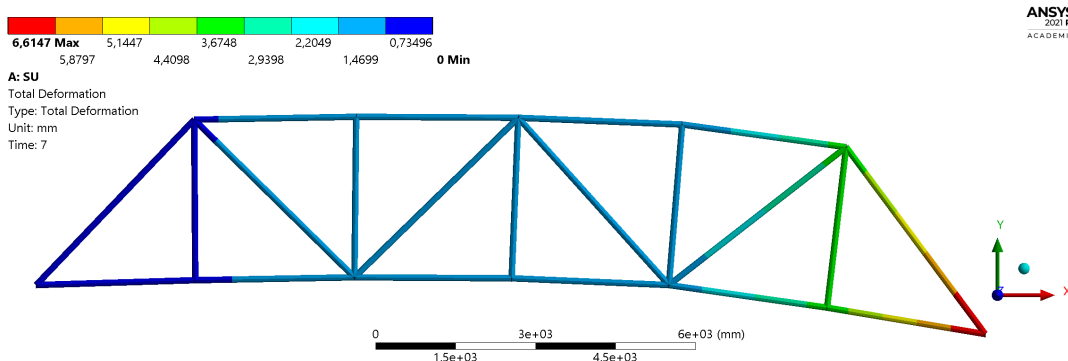
V tejto časti práce je výpočet predošlých prúťových sústav prevedený v softvéri ANSYS ktorý využíva numerickú metódu konečných prvkov. Numerická metóda konečných prvkov je približná metóda, ktorej princípom je diskretizácia kontinua do konečného počtu prvkov. Neznáme parametre sú pritom posuvy, prípadne natočenia v uzlových bodoch. MKP je komplexná záležitosť, ktorej základy sú spracované v [15]. Parametre úlohy zostali nezmenené, uvažovaný priemer priečného prierezu je  $d = 120$  mm a maximálna zaťažujúca sila je  $F = 200$  kN.

### 5.1. Numerická analýza staticky určitého variantu použitím konečného prvku Link

Prvok typu Link, je konečný prvok, ktorý má neznáme parametre iba posuvy a teda uvažuje len normálové sily v prútoch [15]. Numerickou analýzou použitím tohto prvku budú porovnané výsledky napätí a posuvov s analytickým riešením. Tak ako v analytickej časti, výpočet bol rozdelený do siedmich krokov (záťažných stavov). Obrázok 5.1 stručne znázorňuje výsledky výpočtu, ktoré rozvíjajú tabuľky porovnaní v časti 5.2. Znárodný je posledný záťažný stav.



(a) Normálové napätia v prútoch (prvok Link).



(b) Celková deformácia sústavy (prvok Link).

Obr. 5.1: Analýza staticky určitého variantu pomocou MKP (prvok Link).

## 5.2. Porovnanie analytického a numerického riešenia staticky určitého variantu

Porovnanie výsledných hodnôt normálových napätí z analytického a numerického výpočtu pomocou konečného prvku Link je uvedené v tabuľkách 5.1 a 5.3. Porovnanie výsledných posuvov vo vertikálnom smere je potom uvedené v tabuľkách 5.2 a 5.4.

Tabuľka 5.1: Porovnanie analytického (AV) a numerického (Link) riešenia výsledných normálových napätí, časť 1.

| Normálové napätie [MPa] | Zatažený styčník |               |        |               |        |               |
|-------------------------|------------------|---------------|--------|---------------|--------|---------------|
|                         | 3                |               | 5      |               | 7      |               |
|                         | AV               | Link          | AV     | Link          | AV     | Link          |
| $\sigma_1$              | -18,76           | <b>-18,75</b> | -12,50 | <b>-12,50</b> | -6,25  | <b>-6,25</b>  |
| $\sigma_2$              | 13,26            | <b>13,27</b>  | 8,84   | <b>8,84</b>   | 4,42   | <b>4,42</b>   |
| $\sigma_3$              | 17,68            | <b>17,68</b>  | 0,00   | <b>0,00</b>   | 0,00   | <b>0,00</b>   |
| $\sigma_4$              | -8,84            | <b>-8,84</b>  | -17,68 | <b>-17,68</b> | -8,84  | <b>-8,84</b>  |
| $\sigma_5$              | -6,25            | <b>-6,25</b>  | 12,50  | <b>12,51</b>  | 6,25   | <b>6,25</b>   |
| $\sigma_6$              | 13,26            | <b>13,26</b>  | 8,84   | <b>8,84</b>   | 4,42   | <b>4,42</b>   |
| $\sigma_7$              | 0,00             | <b>0,00</b>   | 0,00   | <b>-0,01</b>  | 0,00   | <b>0,00</b>   |
| $\sigma_8$              | -8,84            | <b>-8,84</b>  | -17,68 | <b>-17,68</b> | -8,84  | <b>-8,84</b>  |
| $\sigma_9$              | 6,25             | <b>6,25</b>   | 12,50  | <b>12,51</b>  | -6,25  | <b>-6,25</b>  |
| $\sigma_{10}$           | 4,42             | <b>4,42</b>   | 8,84   | <b>8,84</b>   | 13,26  | <b>13,26</b>  |
| $\sigma_{11}$           | 0,00             | <b>0,00</b>   | 0,00   | <b>0,00</b>   | 17,68  | <b>17,68</b>  |
| $\sigma_{12}$           | 0,00             | <b>0,00</b>   | 0,00   | <b>0,00</b>   | 0,00   | <b>0,00</b>   |
| $\sigma_{13}$           | -6,25            | <b>-6,25</b>  | -12,50 | <b>-12,50</b> | -18,76 | <b>-18,75</b> |
| $\sigma_{14}$           | 4,42             | <b>4,42</b>   | 8,84   | <b>8,84</b>   | 13,26  | <b>13,27</b>  |

Napätia sú uvedené iba po prút číslo 14, keďže pokiaľ nie je zataženie aspoň na styčníku 11, prúty od čísla 15, vrátane, nie sú namáhané (platí pri staticky určitej variante a neuvažovaní vlastnej tiaže).

Tabuľka 5.2: Porovnanie vertikálnych posuvov z analytického (AV) a z numerického (Link) riešenia, časť 1.

| Posuv styčníku [mm] | Zatažený styčník |               |        |               |        |               |
|---------------------|------------------|---------------|--------|---------------|--------|---------------|
|                     | 3                |               | 5      |               | 7      |               |
|                     | AV               | Link          | AV     | Link          | AV     | Link          |
| $u_1$               | 0,000            | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  |
| $u_3$               | 1,231            | <b>1,230</b>  | 0,863  | <b>0,862</b>  | 0,494  | <b>0,494</b>  |
| $u_5$               | 0,863            | <b>0,863</b>  | 1,473  | <b>1,473</b>  | 0,863  | <b>0,863</b>  |
| $u_7$               | 0,494            | <b>0,494</b>  | 0,863  | <b>0,863</b>  | 1,231  | <b>1,230</b>  |
| $u_9$               | 0,000            | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  |
| $u_{11}$            | -0,316           | <b>-0,316</b> | -0,505 | <b>-0,505</b> | -0,442 | <b>-0,442</b> |
| $u_{12}$            | -0,632           | <b>-0,632</b> | -1,011 | <b>-1,010</b> | -0,884 | <b>-0,884</b> |

## 5. VERIFIKÁCIA VÝSLEDKOV POMOCOU MKP V SOFTVÉRI ANSYS

Tabuľka 5.3: Porovnanie analytického (AV) a numerického (Link) riešenia výsledných normálových napätí, časť 2.

| Normálové napätie [MPa] | Zatažený styčník |               |        |               |
|-------------------------|------------------|---------------|--------|---------------|
|                         | 11               |               | 12     |               |
|                         | AV               | <b>Link</b>   | AV     | <b>Link</b>   |
| $\sigma_1$              | 6,25             | <b>6,25</b>   | 12,50  | <b>12,51</b>  |
| $\sigma_2$              | -4,42            | <b>-4,42</b>  | -8,84  | <b>-8,84</b>  |
| $\sigma_3$              | 0,00             | <b>0,00</b>   | 0,00   | <b>0,00</b>   |
| $\sigma_4$              | 8,84             | <b>8,84</b>   | 17,68  | <b>17,69</b>  |
| $\sigma_5$              | -6,25            | <b>-6,25</b>  | -12,50 | <b>-12,50</b> |
| $\sigma_6$              | -4,42            | <b>-4,42</b>  | -8,84  | <b>-8,84</b>  |
| $\sigma_7$              | 0,00             | <b>0,00</b>   | 0,00   | <b>0,00</b>   |
| $\sigma_8$              | 8,84             | <b>8,84</b>   | 17,68  | <b>17,69</b>  |
| $\sigma_9$              | 6,25             | <b>6,25</b>   | 12,50  | <b>12,51</b>  |
| $\sigma_{10}$           | -13,26           | <b>-13,26</b> | -26,53 | <b>-26,52</b> |
| $\sigma_{11}$           | 0,00             | <b>0,00</b>   | 0,00   | <b>-0,01</b>  |
| $\sigma_{12}$           | 17,68            | <b>17,69</b>  | 35,37  | <b>35,37</b>  |
| $\sigma_{13}$           | -6,25            | <b>-6,25</b>  | -12,50 | <b>-12,50</b> |
| $\sigma_{14}$           | -13,26           | <b>-13,26</b> | -26,53 | <b>-26,52</b> |
| $\sigma_{15}$           | 0,00             | <b>-0,01</b>  | 0,00   | <b>-0,02</b>  |
| $\sigma_{16}$           | 17,68            | <b>17,69</b>  | 35,37  | <b>35,37</b>  |
| $\sigma_{17}$           | -25,01           | <b>-25,00</b> | -25,01 | <b>-25,00</b> |
| $\sigma_{18}$           | 0,00             | <b>0,01</b>   | -17,68 | <b>-17,67</b> |
| $\sigma_{19}$           | 17,68            | <b>17,69</b>  | 0,00   | <b>0,00</b>   |
| $\sigma_{20}$           | 0,00             | <b>0,00</b>   | 25,01  | <b>25,02</b>  |
| $\sigma_{21}$           | 0,00             | <b>0,00</b>   | -17,68 | <b>-17,67</b> |

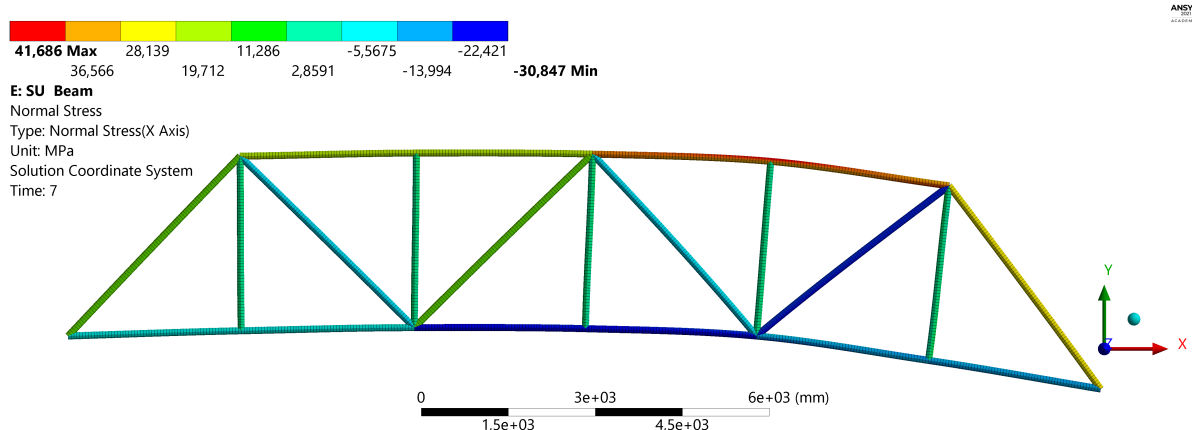
Tabuľka 5.4: Porovnanie vertikálnych posuvov z analytického (AV) a z numerického (Link) riešenia, časť 2.

| Posuv styčníku [mm] | Zatažený styčník |               |        |               |
|---------------------|------------------|---------------|--------|---------------|
|                     | 11               |               | 12     |               |
|                     | AV               | <b>Link</b>   | AV     | <b>Link</b>   |
| $u_1$               | 0,000            | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  |
| $u_3$               | -0,316           | <b>-0,316</b> | -0,632 | <b>-0,632</b> |
| $u_5$               | -0,505           | <b>-0,505</b> | -1,011 | <b>-1,011</b> |
| $u_7$               | -0,442           | <b>-0,442</b> | -0,884 | <b>-0,884</b> |
| $u_9$               | 0,000            | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  |
| $u_{11}$            | 2,093            | <b>2,093</b>  | 2,967  | <b>2,967</b>  |
| $u_{12}$            | 2,967            | <b>2,966</b>  | 6,439  | <b>6,438</b>  |

Z výsledkov možno vyvodiť záver, že výsledky analytického a numerického riešenia (použitím prvku Link) sú kompatibilné. Minimálne rozdiely môžu byť spôsobené rôznou úrovňou zaokružovania, prípadne vplyvom nastavenia numerického riešiča.

## 5.3. Numerická analýza použitím konečného prvku Beam

Prvok typu Beam je rámovým konečným prvkom, ktorý má neznáme parametre posuvy a natočenia v uzloch. Narozdiel od prvku Link, prvok Beam prenáša okrem axiálnych síl aj ohybové momenty [15]. V tomto prípade sa numerická analýza staticky určitého variantu z predchádzajúcej časti 5.1 zmení na numerickú analýzu rámovej konštrukcie ktorá je v časti 4.7.2. Na obrázku 5.2 je znázornené normálové napätie v prútoch pri použití konečného prvku Beam.



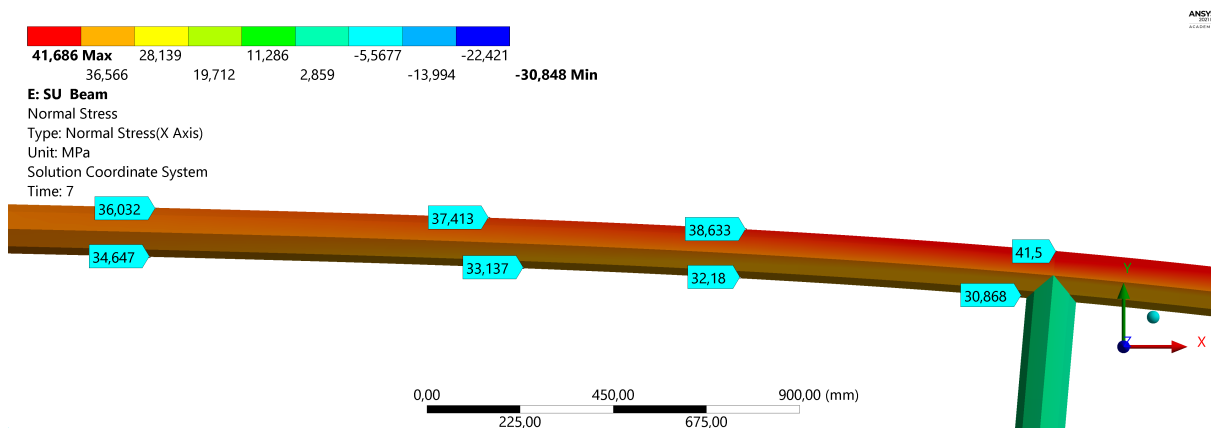
Obr. 5.2: Normálové napätie v prútoch pri použití prvku Beam a sieť konečných prvkov, pričom je zobrazený posledný záťažný stav.

Tabuľka 5.5: Porovnanie maximálneho normálového napätia z analytického (AV) a numerického (Link, Beam) riešenia.

| $\sigma_{max}$ [MPa] | Zaťažný styčník |       |       |       |       |
|----------------------|-----------------|-------|-------|-------|-------|
|                      | 3               | 5     | 7     | 11    | 12    |
| AV                   | 17,68           | 12,50 | 17,68 | 17,68 | 35,37 |
| Link                 | 17,68           | 12,51 | 17,68 | 17,69 | 35,37 |
| Beam                 | 18,07           | 13,87 | 19,11 | 22,76 | 41,69 |

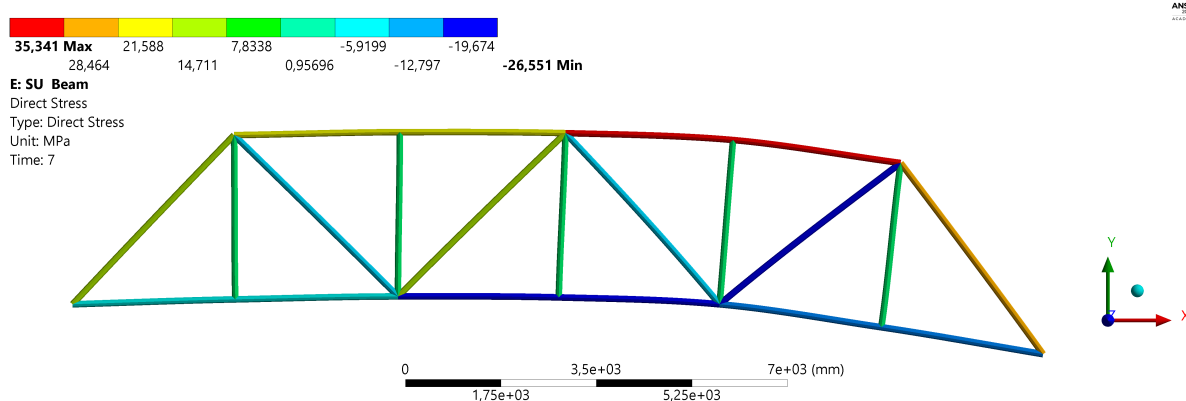
Z tabuľky 5.5 a obrázku 5.2 je vidieť, že výsledky numerickej analýzy napätí sa použitím prvku Beam podľa očakávania podstatne líšia od analytického výpočtu. V tomto prípade je maximálny rozdiel vtedy, keď je zaťažný styčník 11. Rozdiel predstavuje celkom 29 %. Je to však pochopiteľné keďže, ako už bolo spomenuté vyššie, sa v podstate jedná o 30x staticky neurčitú konštrukciu uvedenú v časti 4.7.2. Porovnanie výsledných napätí v jednotlivých prútoch s analytickým riešením by nebolo vypovedajúce, keďže v prípade použitia prvku Beam, normálové napätie nie je naprieč priečnym prierezom konštantné, čo ilustruje aj obrázok 5.3. Je nutné dodať že pre realistickejšie modelovanie priehradových konštrukcií je prvok Beam vhodnejší, keďže prúty sú spojené "tuhými" väzbami ako sú nýty alebo zvary.

## 5. VERIFIKÁCIA VÝSLEDKOV POMOCOU MKP V SOFTVÉRI ANSYS

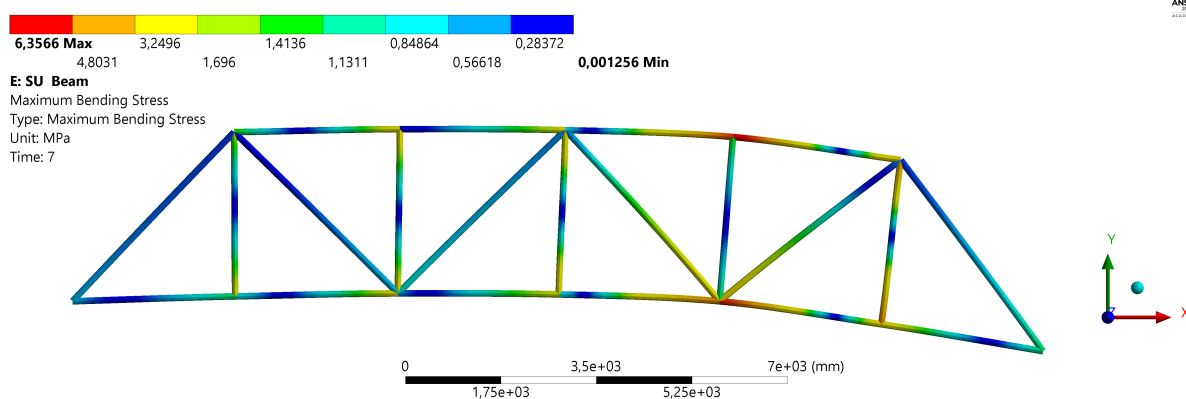


Obr. 5.3: Priebeh normálového napätia v prúte 12.

Na obrázku 5.4 sú znázornené zložky normálového napätia v prútoch pri použití prvku Beam. Normálové napätie čisto len od axiálnych síl korešponduje s výsledkami pomocou prvku Link. Výsledne normálové napätie je súčtom napätia od axiálnych síl a ohybového momentu. Podľa očakávania sa napätie od ohybového momentu koncentruje pri spojoch prútov (obrázok 5.4b).



(a) Normálové napätie od axiálnej sily.



(b) Normálové napätie od ohybového momentu.

Obr. 5.4: Zložky normálového napätia v prútoch prútoch, pri použití prvku Beam.

### 5.3. NUMERICKÁ ANALÝZA POUŽITÍM KONEČNÉHO PRVKU BEAM

Tabuľka 5.6: Porovnanie vertikálnych posuvov z analytického (AV) a z numerického (Beam) riešenia, časť 1.

| Posuv styčníku [mm] | Zatažený styčník |               |        |               |        |               |
|---------------------|------------------|---------------|--------|---------------|--------|---------------|
|                     | 3                |               | 5      |               | 7      |               |
|                     | AV               | Beam          | AV     | Beam          | AV     | Beam          |
| $u_1$               | 0,000            | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  |
| $u_3$               | 1,231            | <b>1,221</b>  | 0,863  | <b>0,856</b>  | 0,494  | <b>0,487</b>  |
| $u_5$               | 0,863            | <b>0,856</b>  | 1,473  | <b>1,468</b>  | 0,863  | <b>0,855</b>  |
| $u_7$               | 0,494            | <b>0,486</b>  | 0,863  | <b>0,847</b>  | 1,231  | <b>1,217</b>  |
| $u_9$               | 0,000            | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  |
| $u_{11}$            | -0,316           | <b>-0,323</b> | -0,505 | <b>-0,516</b> | -0,442 | <b>-0,452</b> |
| $u_{12}$            | -0,632           | <b>-0,637</b> | -1,011 | <b>-1,019</b> | -0,884 | <b>-0,893</b> |

Tabuľka 5.7: Porovnanie vertikálnych posuvov z analytického (AV) a z numerického (Beam) riešenia, časť 2.

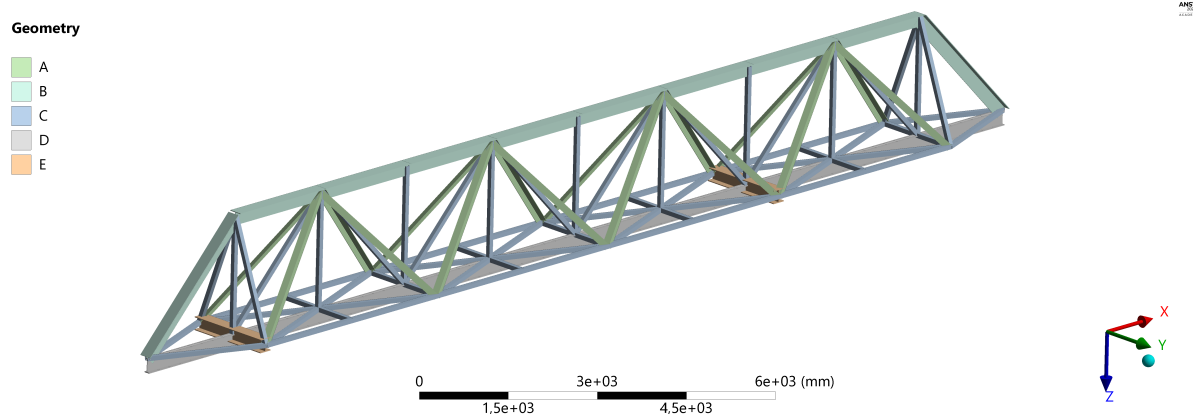
| Posuv styčníku [mm] | Zatažený styčník |               |        |               |
|---------------------|------------------|---------------|--------|---------------|
|                     | 11               |               | 12     |               |
|                     | AV               | Beam          | AV     | Beam          |
| $u_1$               | 0,000            | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  |
| $u_3$               | -0,316           | <b>-0,321</b> | -0,632 | <b>-0,641</b> |
| $u_5$               | -0,505           | <b>-0,508</b> | -1,011 | <b>-1,015</b> |
| $u_7$               | -0,442           | <b>-0,448</b> | -0,884 | <b>-0,897</b> |
| $u_9$               | 0,000            | <b>0,000</b>  | 0,000  | <b>0,000</b>  |
| $u_{11}$            | 2,093            | <b>2,057</b>  | 2,967  | <b>2,899</b>  |
| $u_{12}$            | 2,967            | <b>2,951</b>  | 6,439  | <b>6,380</b>  |

Z predchádzajúcich tabuliek 5.6 a 5.7 je možné usúdiť, že posuvy taktiež nekorešponujú s analytickým riešením staticky určitej varianty, odchýlka je rádovo 1 % až 3 %. Súbory s výpočtovými modelmi z častí 5.1 a 5.3 sú v prílohe pod názvom *kontrola\_vysledkov.wbpz*.

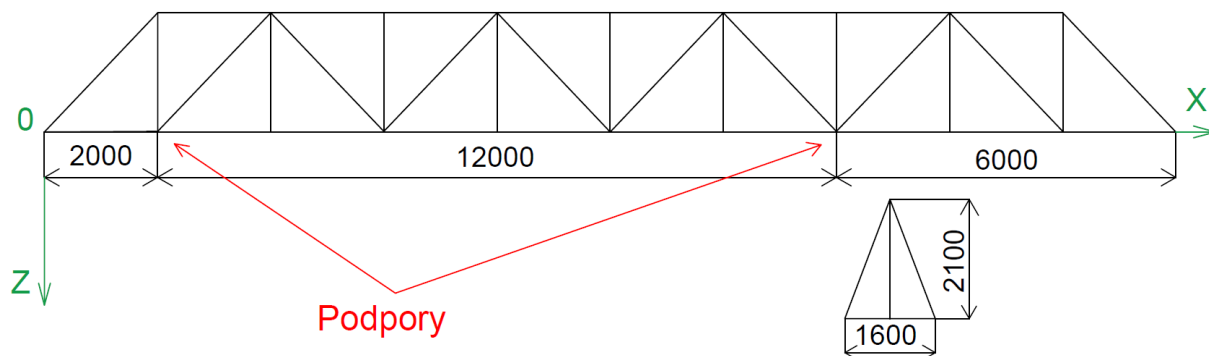
## 6. Deformačne - napäťová analýza 3D modelu pomocou MKP

### 6.1. Vstupné údaje

Cieľom tejto časti je určiť bezpečnosť mostovej konštrukcie portálového žeriavu vzhľadom k MSP a určiť kritickú polohu zatažujúcej sily od žeriavovej mačky a miesta kde pôsobí najväčšie redukované napätie. Vďaka dostupnému katalógu od výrobcu portálových žeriavov [16] bolo možné vytvoriť 3D model mostu portálového žeriavu s realistickými parametrami. Keďže katalóg neobsahoval podrobné údaje, hlavne o priečných prierezoch, tak boli navrhnuté dodatočne. Hlavné rozmery mostu žeriavu boli zachované na základe údajov výrobcu, takisto aj nosnosť a teda maximálne zataženie, ktoré bolo uvažované ako 160 kN. Materiál odpovedá materiálu použitému v analytickej časti ( $R_e = 345$  MPa). Výraznejšie boli upravené okrajové podmienky a teda väzby s okolím. Pôvodný variant v katalógu mal väzby s okolím symetrické. Tie boli posunuté do takej konfigurácie, aby odpovedali výpočtovému modelu v časti 4. Vytvorený model konštrukcie, s rozlíšením priečných prierezov ilustruje obrázok 6.1, hlavné rozmery sú na obrázku 6.2.



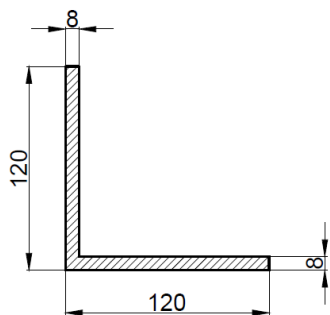
Obr. 6.1: Model mostu portálového žeriavu.



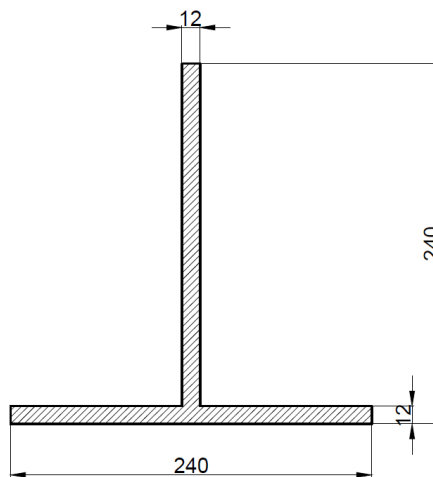
Obr. 6.2: Hlavné rozmery konštrukcie a použitý súradnicový systém.

Navrhnutý tvar a rozmery priečných prierezov ilustruje obrázok 6.3. Vlastnú pojazďovú dráhu pre žeriavovú mačku tvorí nosník s priečnym prierezom "D" (obrázok 6.3d).

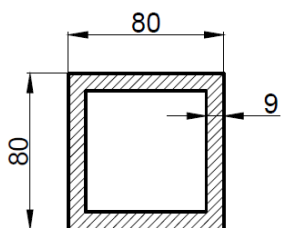
### 6.1. VSTUPNÉ ÚDAJE



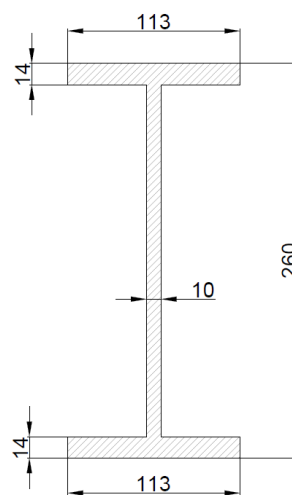
(a) Priechny prierez "A".



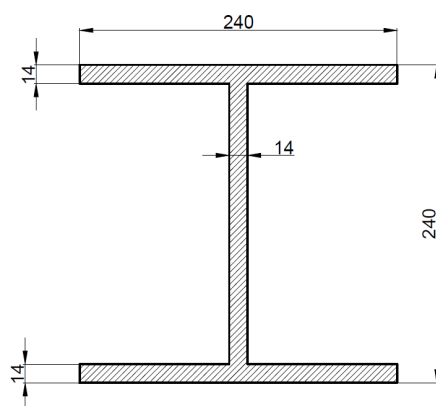
(b) Priechny prierez "B".



(c) Priechny prierez "C".



(d) Priechny prierez "D".



(e) Priechny prierez "E".

Obr. 6.3: Použité priechne prierezy v modeli.

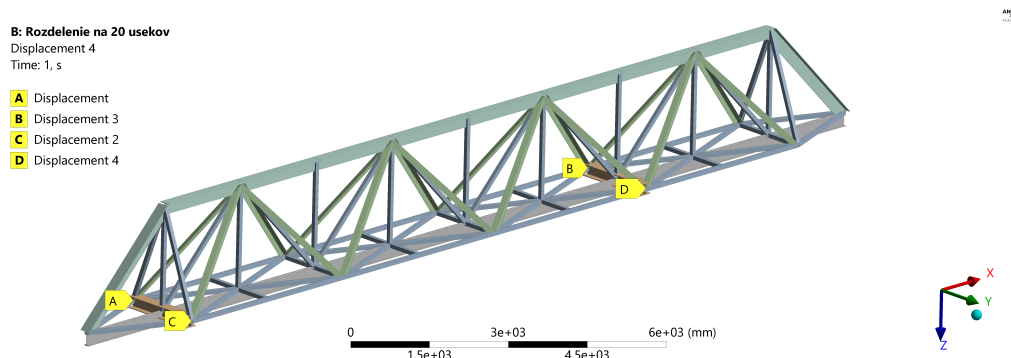


## 6.2. Okrajové podmienky a modelovanie zaťaženia

Aplikované okrajové podmienky boli zadané do štyroch bodov A,B,C a D, tak ako znázorňuje obrázok 6.4. V programe ANSYS bol použitý príkaz *Displacement*, ktorým boli týmto bodom zamedzené posuvy v smeroch (x; y; z) podľa globálneho súradnicového systému. Definované okrajové podmienky potom sú:

- Displacement A (0; 0; 0),
- Displacement B (Free; Free; 0),
- Displacement C (0; Free; 0),
- Displacement D (Free; Free; 0).

Hodnota "Free" znamená, že v danom smere posuv nebol zamedzený. Podľa odobratých stupňov volnosti je zrejmé, že konštrukcia je uložená staticky neurčito.



Obr. 6.4: Väzby konštrukcie mostu s okolím - okrajové podmienky.

Zaťaženie od žeriavovej mačky na pojazdovú dráhu je modelované ako spojite rozložené zaťaženie pôsobiace na úseku 500 mm, tak ako je znázornené na obrázku 6.5. Podľa statickej ekvivalencie pre toto líniové zaťaženie platí  $q_i = 320 \text{ N/mm}$ . Presná poloha  $i$ -tého zaťaženia je potom definovaná  $i$ -tou súradnicou  $x_i$  stredu tohto spojitého zaťaženia.



Obr. 6.5: Zavedená konvencia označenia súradníc jednotlivých polôh zaťaženia podľa záťažného stavu.

Najviac kritickými miestami sa na prvý pohľad javia jednotlivé previsy z oboch strán. Prvý záťažný stav, je teda definovaný, keď zaťaženie pôsobí na ľavom konci konštrukcie. Podľa zavedeného súradnicového systému z obrázku 6.2 a zavedenej konvencie z obrázku 6.5 platí, že súradnica prvého záťažného stavu je  $x_1 = 250 \text{ mm}$ . Pre súradnicu zaťaženia pôsobiaceho na pravom okraji konštrukcie potom platí,  $x_n = 19\,750 \text{ mm}$ , kde  $n$  je celkový počet záťažných stavov. Tieto záťažné stavy a ich poloha nie sú závislé na celkovom počte záťažných stavov. Zvolenie záťažného kroku má vplyv na výsledné riešenie, je možné

### 6.3. VLASTNÁ ANALÝZA POMOCOOU MKP

predpokladať, že kritické miesta sa nachádzajú okrem spomenutých previsov, ešte aj v miestach pod zvislými prútmi a takisto aj v stredných úsekoch pojazbovej dráhy, vždy medzi dvomi susednými spojmi s nosnou konštrukciou. Súradnicu zaťaženia  $x_i$ , pre takéto rozdelenie možno matematicky popísať nasledujúcim spôsobom:

$$x_i = \begin{cases} 250 \text{ mm}, & \text{pre } i = 1, \\ (i - 1) \cdot 1000 \text{ mm}, & \text{pre } i = 2, \dots, 20 \\ 19750 \text{ mm}, & \text{pre } i = 21 \end{cases}$$

Pre analýzu v tomto prípade je však použité jemnejšie delenie intervalu záťažných krokov, a to konkrétne:

$$x_i = i \cdot 250 \text{ mm}, \quad \text{pre } i = 1, \dots, 79$$

Týmto delením bolo minimalizované riziko, že by nebolo zaťažené kritické miesto. Pretože v danom intervale sú zahrnuté všetky vyššie predpokladané kritické miesta a ešte navyše aj miesta medzi nimi.

### 6.3. Vlastná analýza pomocou MKP

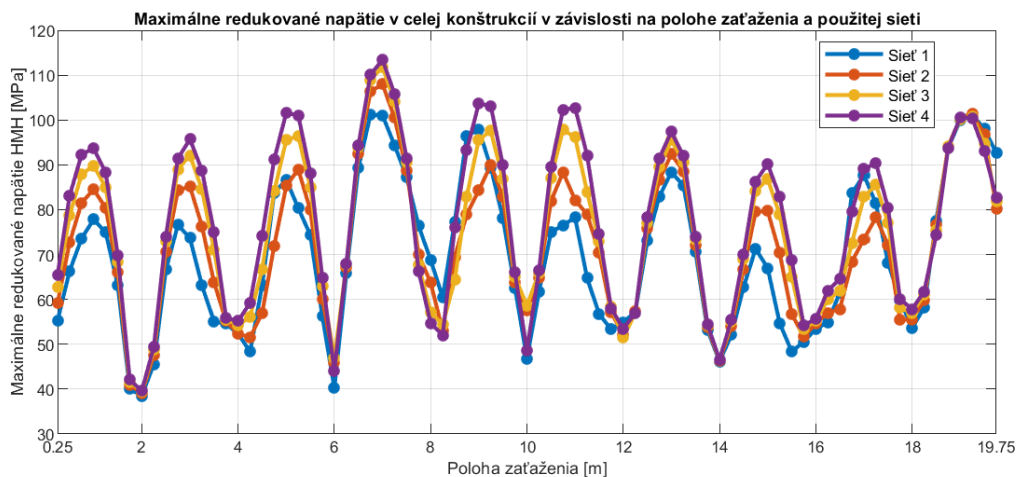
V analýze je použitý prvok typu Beam. Je potrebné použiť dostatočne jemnú sieť konečných prvkov, aby dosiahnuté výsledky boli validné. Veľkosť konečných prvkov nebude v celom modeli rovnaká, pretože to nie je potrebné a ušetrí to výpočtovú náročnosť. Veľkosti prvkov sú teda rôzne v závislosti na priečnom priereze. V nasledujúcej tabuľke 6.1 sú zapísané veľkosti použitých prvkov, a teda popis jednotlivých sietí.

Tabuľka 6.1: Veľkosti jednotlivých prvkov, rozdelených podľa priečných prierezov v použitých sietach.

| Veľkosť použitého prvku [mm] | Označenie siete |        |        |        |
|------------------------------|-----------------|--------|--------|--------|
|                              | Sieť 1          | Sieť 2 | Sieť 3 | Sieť 4 |
| Prvok A                      | 400             | 200    | 100    | 50     |
| Prvok B                      | 400             | 200    | 100    | 50     |
| Prvok C                      | 200             | 100    | 50     | 25     |
| Prvok D                      | 100             | 50     | 25     | 10     |
| Prvok E                      | 100             | 50     | 25     | 10     |

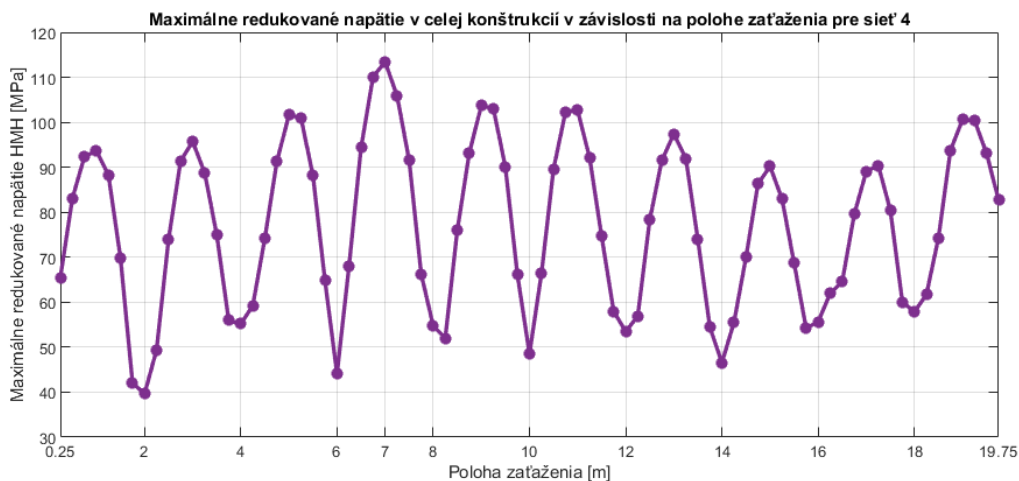
Na obrázku 6.6 možno vidieť, ako sa menil priebeh maximálneho redukovaného napätia v konštrukcii v závislosti na polohe zaťaženia, pri použití rôznej jemnosti siete. Veľkosť prvkov bola zvolená za predpokladu, že najviac bude zaťažovaná pojazbová dráha a k nej prilahlé prúty. Preto sú veľkosti prvkov na prútoch s priečnymi prierezmi A a B väčšie. Keďže sa výsledky podstatne nelíšili v týchto miestach s väčšou veľkosťou prvku, nebolo ich potrebné viac zmenšovať.

## 6. DEFORMAČNE - NAPŤOVÁ ANALÝZA 3D MODELU POMOCOU MKP



Obr. 6.6: Závislosť výsledných napätí pri použití rôznej jemnosti siete.

Keďže výsledky medzi použitím siete 3 a 4 už boli rozdielne veľmi málo, nebolo potrebné sieť ďalej zjemňovať, pre prehľadnosť je na obrázku 6.7 zobrazená výsledná závislosť maximálneho redukovaného napätia v konštrukcii v závislosti na polohe zaťaženia.



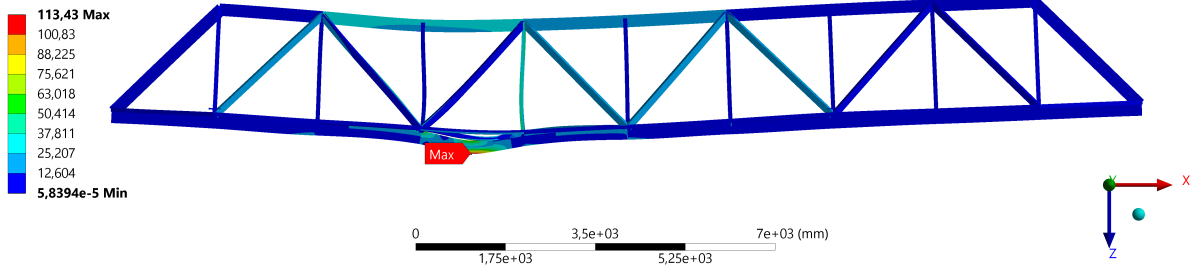
Obr. 6.7: Závislosť maximálneho redukovaného napätia v konštrukcii na polohe zaťaženia.

Kritická poloha zaťaženia prislúcha súradnici  $x_{28} = 7000$  mm, čo odpovedá situácií, kedy je zaťaženie lokalizované presne medzi dvoma susednými spojmi pojazbovej dráhy s nosnou konštrukciou. Kritické miesto sa takisto nachádza v tomto mieste, s hodnotou maximálneho redukovaného napätia 113,43 MPa. Nebezpečné miesto je znázornené na obrázku 6.8. Pre koeficient bezpečnosti vzhľadom k MSP potom platí

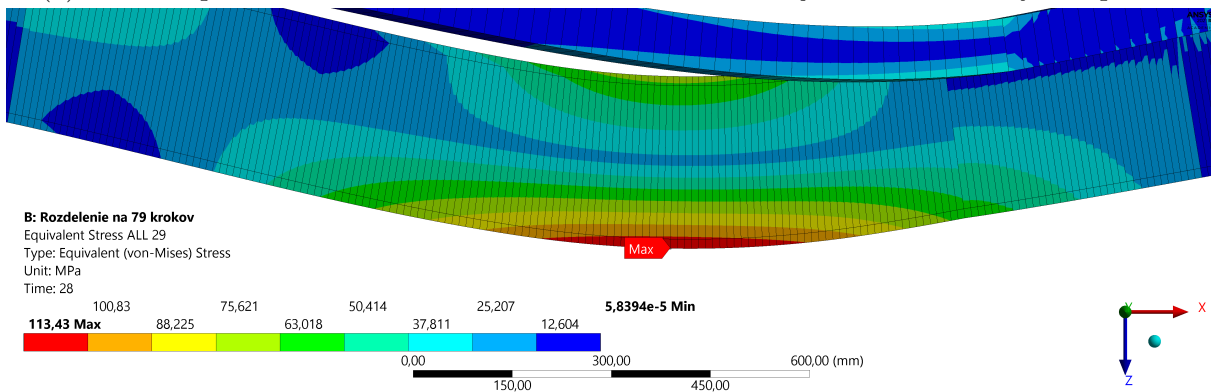
$$K_k = \frac{345 \text{ MPa}}{113,43 \text{ MPa}} = 3,04. \quad (6.1)$$

### 6.3. VLASTNÁ ANALÝZA POMOCOOU MKP

**B: Rozdelenie na 79 krokov**  
 Equivalent Stress ALL 29  
 Type: Equivalent (von-Mises) Stress  
 Unit: MPa  
 Time: 28



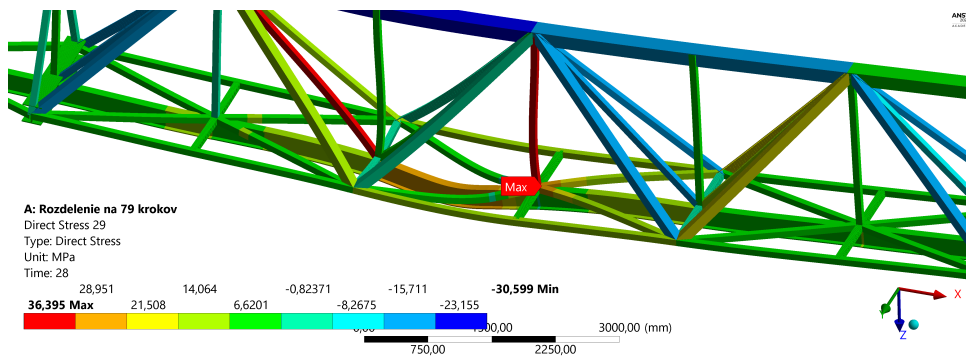
(a) Kritická poloha zaťaženia a zároveň kritické miesto s najvyšším redukovaným napätím.



(b) Detail kritického miesta.

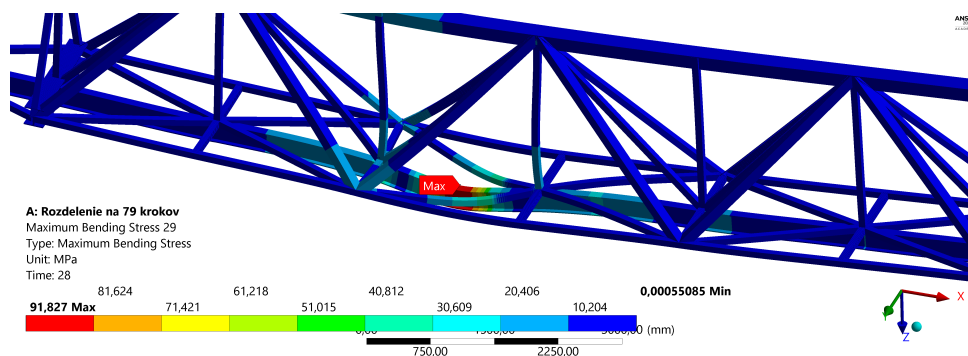
Obr. 6.8: Kritická poloha a miesto v konštrukcii.

Normálové napätie od namáhania ťahom alebo tlakom, pri pôsobení zaťaženia v kritickej polohe, je znázornené na obrázku 6.9. Napätie od ohybového momentu, ktoré tvorí dominantnú zložku redukovaného napätia, je potom znázornené na obrázku 6.10.



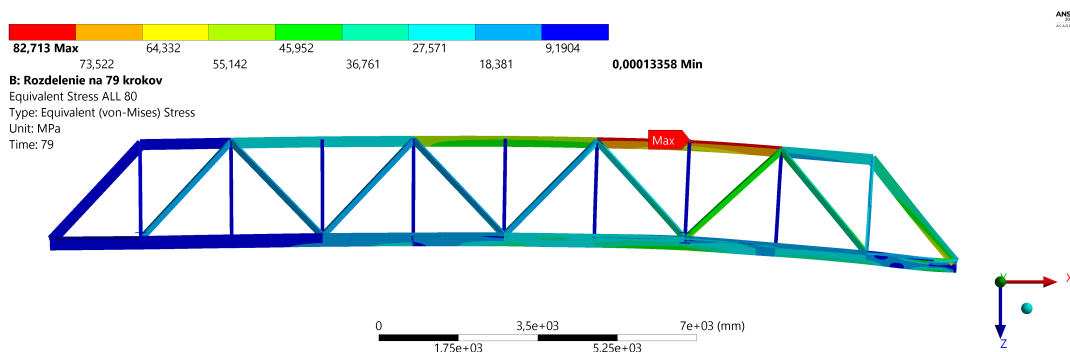
Obr. 6.9: Normálové napätie od ťahu/tlaku pri pôsobení zaťaženia v kritickej polohe.

## 6. DEFORMAČNE - NAPŤOVÁ ANALÝZA 3D MODELU POMOCOU MKP



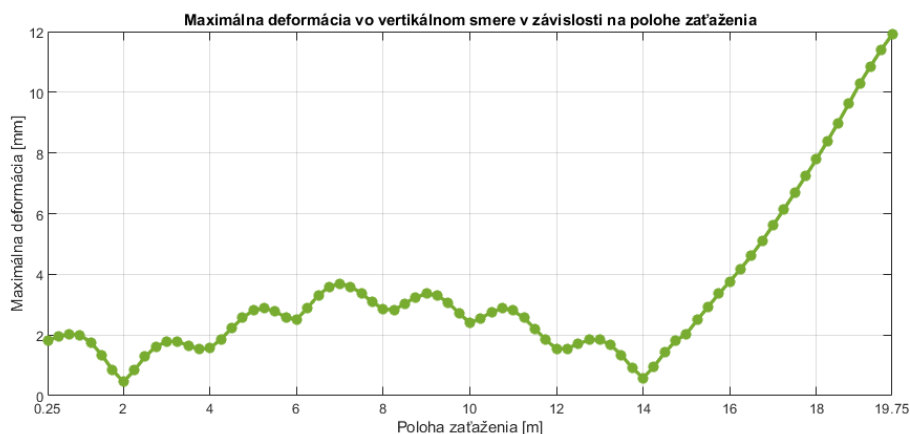
Obr. 6.10: Normálové napätie od ohybového momentu pri pôsobení zataženia v kritickej polohe.

Priebeh maximálnych napätí na obrázku 6.7 môže budiť dojem, že po celý čas je kritickým miestom nejaké miesto na pojazdovej dráhe, čo však nie je pravda. Na obrázku 6.11 je znázornený posledný zatažný stav ( $x_{79} = 19750$  mm), kritickým miestom je v tomto prípade horný prút nosnej konštrukcie, kde je redukované napätie 82,71 MPa.



Obr. 6.11: Miesto s maximálnym redukovaným napätím pri pôsobení zataženia na konci pravého previsu.

Táto poloha zataženia ( $x_{79} = 19750$  mm) je kritická z pohľadu maximálnej deformácie vo vertikálnom smere, čo znázorňuje obrázok 6.12. Maximálna deformácia konštrukcie vo vertikálnom smere je celkom 11,91 mm.



Obr. 6.12: Závislosť maximálnej deformácie konštrukcie na polohe zataženia.

Výpočtový model je dostupný v prílohe pod názvom *analýza\_3D.wbpz*.

## 7. Záver

V úvode práce sú predstavené základné pojmy zo statiky, pružnosti a pevnosti získané v základnom štúdiu. Teoretická časť je rozšírená o stručné predstavenie princípu vplyvových čiar, ako efektívneho nástroja pre určenie kritickej pozície zatažujúcej sily v konštrukciách s premenlivou polohou zatažujúcej sily. Na základných príkladoch bol základný princíp objasnený, čím bol splnený prvý cieľ tejto bakalárskej práce.

Druhým cieľom bolo previesť deformačne napätovú analýzu zjednodušenej 2D sústavy reprezentujúcu priehradový most portálového žeriavu. Táto časť by sa dala rozdeliť na dve časti, ktoré boli paralelne riešené. V prvom rade to bol výpočet a návrh minimálneho priemeru kruhového priečného prierezu pre zadané vstupné parametre. Tieto minimálne rozmery priečného prierezu boli porovnané. V prípade staticky určitého variantu a staticky neurčitého variantu "A" je minimálny priemer priečného prierezu 118,94 mm. Pre staticky neurčitý variant "B" a "C" je minimálny priemer 110,68 mm. Zmena vonkajšej statickej určítosti nemala vplyv na výsledný minimálny priečny prierez. Naopak zvýšenie stupňa vnútornej statickej neurčitosti malo vplyv na veľkosť priečného prierezu a teda stačil by menší. V druhom rade to bola analýza deformácií vo zvislom smere, ktorá bola prevedená pre každý variant sústavy s rovnakým priemerom priečného prierezu  $d = 120$  mm. Maximálny vertikálny posuv bol pri staticky určitej variante, pri zatažení styčníka 12 a to 6,439 mm. Najmenší vertikálny posuv bol naopak pri sústave ktorá bola vnútorne aj vonkajšie staticky neurčitá - "C". Tam bol maximálny posuv pri zatažení 12 styčníka 4,583 mm. Celkový rozdiel v maximálnych posuvoch teda predstavoval približne 30 %.

Nakoniec analytickej časti bola diskusia nad tým, či je nutné uvažovať zataženie od vlastnej tiaže a ako by sa zmenila statická neurčitost ak by sústava bola považovaná za zvarnú a teda rámovú. Vplyv vlastnej tiaže bol pre riešenie nepodstatný. Ak by bola pôvodná sústava uvažovaná ako rámová, bola by vnútorne 30x staticky neurčitá.

V ďalšej časti práce bol analytický výpočet verifikovaný numerickým výpočtom v softvéri ANSYS WORKBENCH. Pri použití konečného prvku Link výsledky korešpondovali s analytickým riešením. Použitie prvku Beam by korešpondovalo s riešením ak by bola prúťová sústava uvažovaná ako rámová a boli by do riešenia zahrnuté vplyvy od ohybových momentov. Výsledky napätí sa teda použitím prvku Beam značne líšili, maximálny rozdiel bol približne 29 %. Deformácie sa líšili maximálne o 3 %.

V poslednej časti práce bol na základe dostupných údajov z literatúry vytvorený a upravený 3D model priehradového mostu portálového žeriavu. Bola prevedená jeho deformačne napätová analýza. Cieľom bolo určiť kritickú polohu zataženia a tejto polohe odpovedajúce kritické miesto v konštrukcii. Sila od žeriavovej mačky bola uvažovaná ako líniové zataženie, ekvivalentné sile 160 kN, čím sa viac model priblížil realite. Následne bolo vytvorených 79 záťažných krokov aby boli vyšetrené všetky nebezpečné miesta, ktoré pripadali do úvahy. Bolo nutné overiť, či použitá sieť konečných prvkov je dostatočne jemná a teda či výsledky sú validné. Pre dané okrajové podmienky a uvažované zataženie, je z pohľadu bezpečnosti k MSP kritická poloha zataženia so súradnicou  $x_{28}=7000$  mm. V tomto prípade je kritickým miestom spodná časť pojazdovej dráhy s koeficientom bezpečnosti vzhľadom k MSP 3,04. Kritickou polohou záťaže z pohľadu maximálnej deformácie je poloha so súradnicou  $x_{79}=19750$  mm. Maximálna deformácia vo vertikálnom smere dosahuje hodnoty 11,91 mm. Zataženie konštrukcie od vlastnej tiaže nebolo uvažované, pretože na výsledné napätia a kritickú polohu to nemalo podstatný vplyv.

# Literatúra

- [1] What Are the Different Types of Overhead Cranes? In: *Mazzella Companies* [online]. April 01, 2021 [cit. 2021-04-16]. Dostupné z: <https://www.mazzellacompanies.com/learning-center/what-are-the-different-types-of-overhead-cranes/>
- [2] Single vs Double Girder Gantry Cranes. In: *Medium* [online]. March 03, 2021 [cit. 2021-04-16]. Dostupné z: <https://aicranegruea.medium.com/single-vs-double-girder-gantry-cranes-3118b62da594/>
- [3] Truss Type Single Beam Gantry Crane. In: *Henan Mine Crane* [online]. [cit. 2021-04-16]. Dostupné z: <http://www.hnminecrane.com/products/gantry-crane/truss-type-single-beam-gantry-crane.html>
- [4] Outdoor Gantry Crane - Reputable Gantry Crane Manufacturer. In: *Crane Machinery* [online]. February 07, 2021 [cit. 2021-04-16]. Dostupné z: <https://www.ellsencranes.com/outdoor-gantry-crane/>
- [5] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. 3. vyd. Brno: CERM, 2004. 287 s. ISBN 80-21-2592-X.
- [6] VRBKA, Jan. *Pružnost a pevnost I: Učební texty* [online]. Brno: Fakulta strojního inženýrství VUT, 2012 [cit. 2021-03-29].
- [7] FLORIAN, Zdeněk, Emanuel ONDRÁČEK a Karel PŘIKRYL. *Mechanika těles: statika*. Vyd. 7., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 9788021434400.
- [8] JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA. *Mechanika. I. díl, Statika a kinematika*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1986. Česká matice technická, č. spisu 423, roč. 91 (1986).
- [9] GERE, J. M. a Barry J. GOODNO. *Mechanics of materials*. 7th ed. Stamford: Cengage Learning, 2009. ISBN 978-0-495-43807-6.
- [10] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R. MISCHKE a Richard Gordon BUDYNAS. *Konstruování strojních součástí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2010. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-2629-0
- [11] HORNÍKOVÁ, Jana a Pavel ŠANDERA. *Pružnost a pevnost: interaktivní učební text* [online]. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2002 [cit. 2021-04-01]. Dostupné z: <http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>
- [12] McCORMAC, Jack C. *Structural Analysis: Using Classical and Matrix Methods*. 4th ed. New Jersey: Wiley, 2012. 624 s. ISBN: 978-0-470-03608-2.
- [13] Weihua Single Girder Mobile Portal Gantry Crane 1 Ton. In: *Henan Weihua Heavy Machinery Co., Ltd.* [online]. [cit. 2021-04-16]. Dostupné z: [whcrane.en.made-in-china.com/product/bvZxwNAPCgYQ/China-Weihua-Truss-Type-Single-Girder-Structure-Gantry-Crane.html](http://whcrane.en.made-in-china.com/product/bvZxwNAPCgYQ/China-Weihua-Truss-Type-Single-Girder-Structure-Gantry-Crane.html)

## LITERATÚRA

- [14] JANÍČEK, Přemysl a Zdeněk FLORIAN. *Mechanika těles: úlohy z pružnosti a pevnosti I*. 5. vyd., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2010. ISBN 9788021441224
- [15] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně [cit. 2021-04-17]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP>
- [16] Dafang Crane: *Truss Gantry Cranes Manufacturer in China* [online]. In: 2018 [cit. 2021-04-18]. Dostupné z: <https://www.hndfcrane.com/truss-gantry-cranes/>



# Zoznam obrázkov

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Prevedenie mostového a portálového žeriavu [1]. . . . .   | 12 |
| 2.2  | Rozdiel medzi portálovým žeriavom s jedným a s dvomi nosníkmi [2]. . . . .  | 13 |
| 2.3  | Prevedenie portálových žeriavov ako priehradové konštrukcie. . . . .  | 13 |
| 3.1  | Rozdiel medzi prútoým a neprútoým telesom. . . . .  | 15 |
| 3.2  | Rôzne sústavy telies (prútoov), ktoré splňajú alebo nespľňajú predpoklady prútoových sústav. . . . .  | 16 |
| 3.3  | Príklady prútoových sústav s rôznym stupňom statickej neurčitosti. . . . .  | 17 |
| 3.4  | Deformácia prútou prostým ťahom. . . . .  | 18 |
| 3.5  | Diagram ťahovej skúšky, prevzaté z [9], upravené. . . . .   | 22 |
| 3.6  | Závislosť priehybu na zaťažujúcej sile, prevzaté z [11], upravené. . . . .  | 23 |
| 3.7  | Hodnota parametru $\alpha$ v závislosti na uložení, prevzaté z [9], upravené. . . . .   | 23 |
| 3.8  | Závislosť kritického napätia na šťihlosti, prevzaté z [11], upravené. . . . .   | 24 |
| 3.9  | Vplyvové čiary pre reakčné sily vo väzbách, prevzaté z [12], upravené. . . . .  | 25 |
| 3.10 | Vplyvové čiary pre rôzne veličiny, prevzaté z [12], upravené. Uvedené hodnoty sú opäť pomerné (bezrozmerné) ku zaťažujúcej sile. . . . .                  | 26 |
| 3.11 | Staticky neurčito uložený prút, prevzaté z [12], upravené. . . . .  | 27 |
| 3.12 | Vplyvová čiara pre reakčnú silu $F_c$ , pre prút na obrázku 3.11 [12]. Hodnoty odpovedajú pomeru $\frac{F_c}{F}$ . . . . .                                | 27 |
| 3.13 | Prevedenie zaťaženia tak, aby boli splnené predpoklady prútoových sústav. . . . .   | 28 |
| 3.14 | Vplyvové čiary pre normálové sily pre vnútorne staticky neurčitoú prútoú sústavu. . . . .   | 29 |
| 4.1  | Geometria uvažovanej konštrukcie, staticky určitý variant. . . . .  | 31 |
| 4.2  | Uvažované zaťaženie modelu. . . . .   | 31 |
| 4.3  | Úplné uvoľnenie. . . . .  | 31 |
| 4.4  | Príklad uvoľnenia styčníc pre zostavenie rovníc statickej rovnováhy. . . . .  | 32 |
| 4.5  | Časť zdrojového kódu MATLAB pre riešenie rôznych polôh zaťažujúcej sily. Celý súbor je dostupný v prílohe pod názvom <i>SU_normalove_sily.m</i> . . . . . | 33 |
| 4.6  | Vplyvové čiary pre sily vo väzbách. . . . .   | 35 |
| 4.7  | Vplyvové čiary pre vybrané prútoy. . . . .  | 35 |
| 4.8  | Vplyvové čiary pre posuvy, staticky určitý variant. . . . .   | 39 |
| 4.9  | Prútoú sústava, staticky neurčitoú variant A. . . . .   | 40 |
| 4.10 | Úplné uvoľnenie, staticky neurčitoú variant A. . . . .  | 40 |
| 4.11 | Čiasočné uvoľnenie, staticky neurčitoú variant A. . . . .   | 41 |
| 4.12 | Prútoú sústava, staticky neurčitoú variant B. . . . .   | 44 |
| 4.13 | Úplné uvoľnenie, staticky neurčitoú variant B. . . . .  | 44 |
| 4.14 | Čiasočné uvoľnenie, staticky neurčitoú variant B. . . . .   | 45 |
| 4.15 | Prútoú sústava, staticky neurčitoú variant C. . . . .   | 47 |
| 4.16 | Úplné uvoľnenie, staticky neurčitoú variant C. . . . .  | 48 |
| 4.17 | Čiasočné uvoľnenie, staticky neurčitoú variant C. . . . .   | 48 |
| 4.18 | Vplyvové čiary pre normálovú silu $N_6$ . . . . .   | 53 |
| 4.19 | Vplyvové čiary pre normálovú silu $N_{12}$ . . . . .  | 53 |
| 4.20 | Vplyvová čiara pre posuv styčníc $u_{12}$ v závislosti na variante modelu. . . . .  | 54 |
| 4.21 | Sily reprezentujúce zaťaženie od vlastnej váhy. . . . .   | 55 |
| 4.22 | Veličiny pre zaťaženie konštrukcie vlastnou váhou. . . . .  | 55 |
| 4.23 | Modifikovaná prútoú sústava na rámovú. . . . .  | 56 |

## ZOZNAM OBRÁZKOV

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.24 | Spôsoby určenia stupňa statickej neurčitosti rámových konštrukcií. . . . .   | 56 |
| 5.1  | Analýza staticky určitého variantu pomocou MKP (prvok Link). . . . .   | 57 |
| 5.2  | Normálové napätie v prútoch pri použití prvku Beam a sieť konečných prvkov, pričom je zobrazený posledný záťažný stav. . . . . | 60 |
| 5.3  | Priebeh normálového napätia v prúte 12. . . . .  | 61 |
| 5.4  | Zložky normálového napätia v prútoch prútoch, pri použití prvku Beam. . . . .  | 61 |
| 6.1  | Model mostu portálového žeriavu. . . . .   | 63 |
| 6.2  | Hlavné rozmery konštrukcie a použitý súradnicový systém. . . . .   | 63 |
| 6.3  | Použité pričné prierezy v modeli. . . . .  | 64 |
| 6.4  | Väzby konštrukcie mostu s okolím - okrajové podmienky. . . . .   | 65 |
| 6.5  | Zavedená konvencia označenia súradníc jednotlivých polôh zaťaženia podľa záťažného stavu. . . . .                              | 65 |
| 6.6  | Závislosť výsledných napätí pri použití rôznej jemnosti siete. . . . .   | 67 |
| 6.7  | Závislosť maximálneho redukovaného napätia v konštrukcií na polohe zaťaženia. . . . .  | 67 |
| 6.8  | Kritická poloha a miesto v konštrukcií. . . . .  | 68 |
| 6.9  | Normálové napätie od ťahu/tlaku pri pôsobení zaťaženia v kritickej polohe. . . . .   | 68 |
| 6.10 | Normálové napätie od ohybového momentu pri pôsobení zaťaženia v kritickej polohe. . . . .                                      | 69 |
| 6.11 | Miesto s maximálnym redukovaným napätím pri pôsobení zaťaženia na konci pravého previsu. . . . .                               | 69 |
| 6.12 | Závislosť maximálnej deformácie konštrukcie na polohe zaťaženia. . . . .   | 69 |

# Zoznam tabuliek

|      |   |    |
|------|---|----|
| 4.1  | Výsledne hodnoty síl vo väzbách v závislosti na zaťaženom styčníku. . . . .   | 34 |
| 4.2  | Výsledné sily v prútoch v závislosti na zaťaženom styčníku, statický určitý variant. . . . .                              | 34 |
| 4.3  | Extrémne hodnoty síl v prútoch. . . . .   | 35 |
| 4.4  | Posuvy styčníkov v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky určitý variant. . . . .                                     | 39 |
| 4.5  | Výsledné hodnoty síl vo väzbách v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant A. . . . .                  | 41 |
| 4.6  | Výsledné hodnoty normálových síl v prútoch v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant A. . . . .       | 42 |
| 4.7  | Extrémne hodnoty síl v prútoch, staticky neurčitý variant A. . . . .  | 42 |
| 4.8  | Posuvy styčníkov v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant A. . . . .                                 | 43 |
| 4.9  | Výsledné hodnoty síl vo väzbách v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant B. . . . .                  | 45 |
| 4.10 | Výsledné sily v prútoch v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant B. . . . .                          | 46 |
| 4.11 | Extrémne hodnoty síl v prútoch, staticky neurčitý variant B. . . . .  | 46 |
| 4.12 | Posuvy styčníkov v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant B. . . . .                                 | 47 |
| 4.13 | Výsledné hodnoty síl vo väzbách v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant C. . . . .                  | 49 |
| 4.14 | Výsledné sily v prútoch v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant C. . . . .                          | 50 |
| 4.15 | Extrémne hodnoty síl v prútoch, staticky neurčitý variant C. . . . .  | 50 |
| 4.16 | Posuvy styčníkov v závislosti na zaťaženom styčníku, staticky neurčitý variant C. . . . .                                 | 51 |
| 4.17 | Porovnanie minimálnych rozmerov priečného prierezu pre rôzne varianty a medzné stavy, vrátane kritických prútoch. . . . . | 51 |
| 4.18 | Porovnanie veličín v závislosti od variantu, platné pre priečny prierez priemeru $d = 120 \text{ mm}$ . . . . .           | 52 |
| 4.19 | Veľkosť normálovej sily $N_1$ [kN] v prúte 1. . . . .   | 52 |
| 4.20 | Veľkosť normálovej sily $N_6$ [kN] v prúte 6. . . . .   | 52 |
| 4.21 | Veľkosť normálovej sily $N_{12}$ [kN] v prúte 12. . . . .   | 53 |
| 4.22 | Posuvy styčníku $u_{12}$ [mm] v závislosti na polohe zaťažujúcej sily a variante modelu. . . . .                          | 54 |
| 5.1  | Porovnanie analytického (AV) a numerického (Link) riešenia výsledných normálových napätí, časť 1. . . . .                 | 58 |
| 5.2  | Porovnanie vertikálnych posuvov z analytického (AV) a z numerického (Link) riešenia, časť 1. . . . .                      | 58 |
| 5.3  | Porovnanie analytického (AV) a numerického (Link) riešenia výsledných normálových napätí, časť 2. . . . .                 | 59 |
| 5.4  | Porovnanie vertikálnych posuvov z analytického (AV) a z numerického (Link) riešenia, časť 2. . . . .                      | 59 |
| 5.5  | Porovnanie maximálneho normáloveho napätia z analytického (AV) a numerického (Link, Beam) riešenia. . . . .               | 60 |

## ZOZNAM TABULIEK

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 5.6 | Porovnanie vertikálnych posuvov z analytického (AV) a z numerického (Beam) riešenia, časť 1. . . . . | 62 |
| 5.7 | Porovnanie vertikálnych posuvov z analytického (AV) a z numerického (Beam) riešenia, časť 2. . . . . | 62 |
| 6.1 | Velkosti jednotlivých prvkov, rozdelených podľa priečných prierezov v použitých sieťach. . . . .     | 66 |

# Zoznam skratiek a použitých symbolov

| Symbol                 | Veličina   | Jednotka          |
|------------------------|--|-------------------|
| VVÚ                    | Výsledné vnútorné účinky                                 | -                 |
| F                      | Sila   | N                 |
| N                      | Normálová sila   | N                 |
| s                      | Stupeň statickej neurčitosti                             | -                 |
| L                      | Dĺžka  | mm                |
| $\nu$                  | Počet použiteľných podmienok rovnováhy                   | -                 |
| $\mu$                  | Počet neznámych parametrov/ Poissonov pomer <sup>1</sup> | -                 |
| $\varepsilon$          | Pomerné pretvorenie                                      | -                 |
| $u, v$                 | Posuv  | mm                |
| E                      | Youngov modul pružnosti v ťahu                           | MPa               |
| S                      | Plocha priečného prierezu                                | mm <sup>2</sup>   |
| W                      | Energia napätosti  | J                 |
| A                      | Práca vonkajších síl                                     | j                 |
| $\sigma$               | Normálové napätie  | MPa               |
| $\varphi$              | Natočenie  | rad               |
| $K_m$                  | Súčiniteľ bezpečnosti                                    | -                 |
| $K_n$                  | Návrhový súčiniteľ                                       | -                 |
| $\psi$                 | Veličina určená pre daný záťažný stav                    | MPa               |
| MS                     | Medzný stav  | -                 |
| $\psi_M$               | Medzná hodnota veličiny popisujúca vznik MS              | MPa               |
| MSP                    | Medzný stav pružnosti                                    | -                 |
| $K_k$                  | Koeficient bezpečnosti vzhľadom k MSP                    | -                 |
| $\sigma_k, R_e$        | Medza pružnosti (Medza klzu)                             | MPa               |
| MSVS                   | Medzný stav vzpernej stability                           | -                 |
| $w_{max}$              | Maximálny priehyb pri vzpere                             | mm                |
| $F_{kr}$               | Kritická sila pri strate vzpernej stability              | N                 |
| $\alpha$               | Parameter uloženia prútu pri určovaní MSVS               | -                 |
| J                      | Kvadratický moment priečného prierezu                    | mm <sup>4</sup>   |
| $\lambda$              | Štíhlosť prútu   | -                 |
| $\lambda_k, \lambda_R$ | Kritická štíhlosť prútu                                  | -                 |
| $\sigma_{Rd}$          | Medza krehkej pevnosti v tlaku                           | MPa               |
| $R_L, R_R$             | Reakčné sily vo väzbách                                  | N                 |
| M                      | Moment   | N · m             |
| a, b                   | Dĺžka úseku  | mm                |
| $\rho$                 | Hustota  | kg/m <sup>3</sup> |
| g                      | Gravitčné zrýchlenie                                     | m/s <sup>2</sup>  |
| $R_m$                  | Medza pevnosti   | MPa               |
| NP                     | Neznáme parametre  | -                 |
| d                      | Priemer priečného prierezu                               | mm                |
| AV                     | Výsledok analytického riešenia                           | -                 |

## ZOZNAM TABULIEK

|       |                           |      |
|-------|---------------------------|------|
| SU    | Staticky určitý variant   | -    |
| SN    | Staticky neurčitý variant | -    |
| MKP   | Metóda konečných prvkov   | -    |
| $q$   | Líniové zaťaženie         | N/mm |
| $x_i$ | Súradnica polohy          | mm   |

---

<sup>1</sup>Rovnaká skratka je použitá pre dve rôzne veličiny, v texte je z kontextu však vždy zrejmé, ktorú veličinu skratka reprezentuje.

# Zoznam príloh

## Popis súboru

Analytické riešenie síl SU varianty  
 Analytické riešenie deformácií SU varianty  
 Analytické riešenie síl SN varianty A  
 Analytické riešenie deformácií SN varianty A  
 Analytické riešenie síl SN varianty B  
 Analytické riešenie deformácií SN varianty B  
 Analytické riešenie síl SN varianty C  
 Analytické riešenie deformácií SN varianty C  
 Analytické riešenie síl od vlastnej váhy  
 Súhrnný súbor s výsledkami  
 Numerické riešenie zjednodušenej prútovej sústavy  
 Numerická analýza 3D modelu

## Názov súboru

SU\_normalove\_sily.m  
 SU\_deformacie.m  
 SN\_A\_normalove\_sily.m  
 SN\_A\_deformacie.m  
 SN\_B\_normalove\_sily.m  
 SN\_B\_deformacie.m  
 SN\_C\_normalove\_sily.m  
 SN\_C\_deformacie.m  
 SU\_vlastna\_tiaz.m  
 data\_BP\_GC.xlsx  
 kontrola\_vysledkov.wbpz  
 analyza\_3D.wbpz