UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta

Katedra algebry a geometrie

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Výukové materiály k seznámení s historií geometrie a s ní souvisejících disciplín

Vypracovala:
Monika Gregorová
M-CHmi

Vedoucí práce:
RNDr. Lenka Juklová, Ph. D.
Rok odevzdání: 2022

Bibliografická identifikace

Autor:	Monika Gregorová
Název práce:	Výukové materiály k seznámení s historií geometrie a s ní souvisejících disciplín
Typ práce:	bakalářská
Katedra:	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce:	RNDr. Lenka Juklová, Ph. D.
Rok obhajoby práce:	2022
Počet stran:	43
Jazyk:	čeština

Bibliographical identification

Author:	Monika Gregorová
Title:	Studying materials of the history of the development of geometry and related disciplines
Type of thesis:	bachelor
Department:	Department of Algebra and Geometry
Supervisor:	RNDr. Lenka Juklová, Ph. D.
The year of presentation:	2022
Number of page:	43
Language:	czech

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Lenky Juklové, Ph. D., a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny použité zdroje při vypracování této práce.

V Olomouci dne: Podpis autora:

Ráda bych poděkovala mé vedoucí bakalářské práce, RNDr. Lence Juklové, Ph. D., za cenné rady, trpělivost a čas, který mi věnovala.

Obsah

1. Počátky geometrie **7**

2. Geometrie ve starověku **8**

2.1 Geometrie v raně otrokářské společnosti 8

2.1.1 Starověký Egypt 8

2.1.2 Starověká Mezopotámie 9

2.2 Geometrie ve starověkém Řecku 10

2.2.1 Iónské období 11

2.2.2 Athénské období 16

2.3 Geometrie v helénistických zemích 19

2.3.1 Úpadek a konec starověké řecké geometrie 26

2.3.2 Geometrie v západní části Římské říše 27

3. Geometrie ve středověku **28**

4. Výukové materiály pro seznámení s historií geometrie **30**

4.1 Pracovní list 30

4.2 Pexeso 36

4.3 Kdo jsem 39

4.4 Tabu 39

5. Závěr **42**

Seznam použité literatury **43**

Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá historií geometrie a s ní souvisejících disciplín. Téma historie geometrie je velmi obsáhlé, proto jsem se ve své práci zaměřila především na historii geometrie ve starověku. Dalším úkolem mé práce bylo vytvořit výukové materiály do hodin matematiky pro žáky středních či základních škol k seznámení a zapamatování zmíněné historie geometrie.

Téma jsem si vybrala proto, že se na středních a základních školách o historii geometrie moc nemluví a chtěla bych o ní rozšířit povědomí. Zařazení her a aktivit k seznámení s historií geometrie do výuky by mělo vést k větší motivaci žáků vzdělávat se a zajímat se o geometrii.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. První se zabývá počátky historie geometrie. Ve druhé knize se seznámíme s historií geometrie ve starověku a ve třetí jen velmi stručně zmíníme historii ve středověku. Čtvrtá kapitola obsahuje výukové materiály k seznámení s historií geometrie.

Ilustrační obrázky jsem narýsovala v programu Geogebra.

Kapitola 1

Počátky geometrie

Geometrie je považována za jednu z nejstarších věd. Její počátky můžeme zaznamenat již při vzniku člověka. Mezi nejstarší mentální schopnost lidstva patří uvědomění si geometrického tvaru předmětu a jeho praktické používání. Díky této schopnosti, která se řadí ke geometrickým počátkům, se Homo sapiens sapiens oddělil od živočichů. Účelně vyhledával materiály či předměty a opracovával je do použitelných a osvědčených tvarů.

Pojmenování předmětů nebylo nevyhnutelnou podmínkou praktické použitelnosti předmětů, proto spadá až do pozdějších vývojových období, krátce před vznikem civilizace. Vytvoření předmětu a jeho použití se obešlo bez znalosti jeho názvu (čtverec, trojúhelník, čára atd.). Pro stavbu obydlí, které sloužilo jako ochrana před nepříznivým počasím a útoky dravých zvířat, byly velice důležité geometrické a stereometrické poznatky. Ty mají počátek v mladším paleolitu.

Se vznikem hospodářství a rozvojem výměny produktů vznikly jednotky měr, které byly odvozené od rozměrů různých částí těla dospělého člověka. Mezi ně patří dosud ještě používané názvy prst, palec, píď, loket, sáh (vzdálenost mezi konci prstů roztažených rukou), stopa apod. Tyto míry se udržely téměř v celé historii. Celosvětový proces jednotnosti měr a vah odstartoval po Velké francouzské revoluci. Zavedení Mezinárodní soustavy jednotek (SI) bylo posledním krokem ke sjednocení jednotek.

Období obrábění půdy přineslo spoustu otázek – kolik je spotřeba osiva, kolik je potřeba lidské pracovní síly nebo tažných zvířat, jaký je výnos určitých plodin atd. To vedlo k měření rozlohy pozemku – obsahu. Například jutro byla rozloha, kterou zvoralo jedno spřažení za jeden den, lán bylo možné obdělat jedním koňským spřažením za celý čas orby, iugerum byl pozemek, který mohlo za jeden den zorat volské spřažení apod.

Se vznikem hrnčířství se objevují první názvy objemových jednotek, které se pojmenovaly podle denně používaných nádob. Například hrnec, vědro, holba apod. Tyto objemové míry nahrazovaly váhové míry, neboť sloužily i k měření sypkých materiálů.

Ve výzdobě keramiky našly široké uplatnění geometrické ornamenty, čáry, předměty, postavy zvířat a lidí, mozaiky z kruhů, trojúhelníků či spirál. Objevuje se na keramice i shodnost, podobnost a symetrie. Inspiraci lidé hledali v přírodě a v napodobování rytmických pohybů (kopání, setí).

Kapitola 2

Geometrie ve starověku

Geometrie se ve starověku dočkala velkého rozmachu. V období raně otrokářské společnosti měla geometrie spíše praktický charakter. Řešila hospodářské problémy na zlepšení kvality života. Ve Starověkém Řecku a Helénistickém období dostala geometrie vědecký ráz. Začala se hledat obecná řešení a geometrické pojmy se zařazovaly do logických systémů.

2.1. Geometrie v raně otrokářské společnosti

První starověké civilizace vznikají přibližně okolo roku 5 tisíc před n.l., kdy dochází k migraci z horských oblastí z důvodu přelidnění původních civilizací, klesající úrodností půdy a z důvodu nepříznivých výkyvů klimatu. Obyvatelstvo se přesouvalo k povodí velkých řek afrického a asijského kontinentu. Konkrétně k Nilu v Egyptě, Eufratu a Tigrisu v Mezopotámii, Gangy v Indii a Jang-c´-t´iangu v Číně. Tyto řeky vyžadovaly protipovodňové úpravy, aby neničily úrodu. V období sucha řeky sloužily k zavlažování. Stavěly se přehrady, hráze, odvodňovací a zavodňovací kanály a dělaly se úpravy břehů. V těchto civilizacích vznikla dělba práce, řemesla a obchod a začaly se tvořit zárodky státu. Zakládaly se písařské školy, které sloužily ke vzdělávání pracovníků státního a občanského správního aparátu.

Geometrie v tomto období vznikla jako praktická nauka pro hospodářské potřeby státu. Řešila úlohy v oblasti výroby – vyměření pozemku, spotřeba osiva, výnosnost pole, stavba odvodňovacích a zavlažovacích systémů, tvary a ornamentální výzdoba výrobků, geometrický tvar stavby; a v oblasti meteorologie – kalendář a astronomické pozorování. Empirický ráz geometrie se projevuje v řešení praktických úloh a problémů. Učení se typových příkladů nazpaměť bez vysvětlení úlohy mělo vysvětlení v dogmatickém charakteru geometrie.

Bohužel historické prameny o tomto období nejsou vždy úplné, a proto některé informace o tomto období jsou spíše dohady. Mezi raně otrokářské společnosti patří Starověký Egypt a Mezopotámie.

2.1.1 Starověký Egypt

Starověký Egypt se pyšní velkým množstvím pyramid, tzv. kolosální hrobky panovníků. Jsou důkazem toho, že znalosti Egypťanů musely být na vysoké úrovni.

Staroegyptská geometrie se přirozeně zabývala geometrickými útvary a velikostmi jejich stran, úhlů, obsahů, objemů a povrchů. Tato geometrie byla velmi praktická a nedocházelo zde ke studiu geometrického pojmu v logicky strukturovaném systému. S dnešními používanými vzorci souhlasí postupy počítání obsahů trojúhelníku, pravoúhelníku a lichoběžníku v geometrických úlohách zaznamenaných na papyrusu. Třída objektů, na který se vzorec ze staroegyptské geometrie vztahuje, ale není definovaná ve smyslu dnešních požadavků logiky, a proto vzorec nemá obecný charakter a jeho platnost není všeobecná.

Například obsah kruhu s průměrem *d* se počítá tímto způsobem

$$S = d^2\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2,$$

který odpovídá dnešnímu vzorci

$$S = \pi r^2.$$

Po přepisu průměru *d* za poloměr *r* dostaneme:

$$S = \frac{256}{81} r^2$$

Vyjádřené číslo π v tomto vzorci se od čísla π odchyluje o 0,6 %.

Od dnešních postupů se neodlišují staroegyptské výpočty objemů krychle, kvádru a rotačního válce. Tato tělesa se používala na uskladnění sypkých materiálů, proto hlavním problémem těchto příkladů je stanovení a převod objemových jednotek.

Dva příklady se vymykají úrovni staroegyptské geometrie svojí abstraktní povahou. První je výpočet objemu rovnoběžně seříznutého pravidelného čtyřbokého jehlanu. Staroegyptský vzorec je v souladu s dnešním vzorcem, kde a je délka strany čtvercové základny, b je délka strany druhé čtvercové základny a v je výška.

$$V = \frac{v}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Je spousta dohadů, jak staroegyptští matematici dospěli k tomuto výsledku. Ale je jasné, že jim nebylo cizí abstraktní myšlení a znali způsob výpočtu objemu jehlanu. Druhý příklad počítá povrch koše, který má tvar rotačního tělesa.

Vytyčování pravého úhlu patří ke praktickým geometrickým poznatkům egyptské geometrie. Pravý úhel sestrojovali pomocí provazu s 12 uzly ($12 = 3 + 4 + 5$), neboť znali pythagorovský trojúhelník s délkami stran 3,4 a 5.

2.1.2. Starověká Mezopotámie

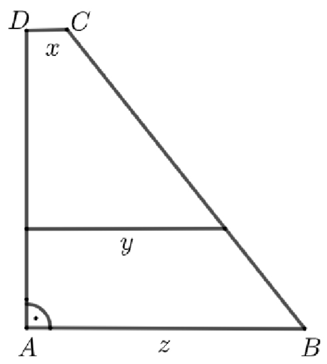
Na území Mezopotámie, mezi řekami Eufrat a Tigris, vznikly ve 4. tisíciletí před n. l. dva otrokářské státy – na jihu sumerská říše a na severu akkadská. Sumerové zdokonalili technologii polnohospodářství, vynalezli kolo, písmo a jako první vytvořili stát v moderním slova smyslu. Babyloňané jsou pozdější podmanitelé Mezopotámie.

Jako v jiných starověkých kulturách bylo hlavním obsahem geometrie výpočet obsahu rovinných útvarů a výpočet objemu prostorových těles, což sloužilo pro praktické účely. Používali správně vzorce pro výpočet trojúhelníku, čtverce a lichoběžníku. Za číslo π brali hodnotu 3, což se od čísla π odchyluje o 4,5 %, tedy mnohem více než u staroegyptské matematiky. Správné vzorce můžeme pozorovat i u výpočtu objemu krychle, kvádru, rotačního válce a kolmého hranolu. Výpočet objemu jehlanu a rotačního kuželu není nikde zaznamenán, ale na základě faktu, že existují přibližné vzorce pro výpočet objemu rovnoběžně seříznutého jehlanu a kuželu, je pravděpodobné, že dokázali přibližně objem spočítat i pro jehlan a rotační kužel.

Mezopotámská geometrie znala Pythagorovu větu, kterou nejspíše odvodili na základě úvah o podobnosti, jež používali mezi geometrickými útvary. Úlohy zaznamenávali na klínopisné tabulky. Na jedné z nich je tabulka s 15 pythagorovskými trojicemi $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, které vyhovují rovnosti $x^2 + y^2 = z^2$. Čísla $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ jsou utvořená z přirozených čísel p, q podle pravidel $x = p^2 - q^2, y = 2pg, z = p^2 + q^2$.

Tzv. babylonské trojce jsou dalším velkým objevem mezopotámské geometrie. Pravoúhlý lichoběžník se základnami délky x a z je rozdělený příčkou délky y, rovnoběžnou se základnami, na dvě části, které mají stejný obsah. Babylonské trojce jsou čísla $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$, která splňují tyto podmínky. Jsou tvořené přirozenými čísly podle vztahů:

$$x = 2n^2 - 1;$$
$$y = n^2 + (n+1)^2;$$
$$z = 2(n+1)^2 - 1$$
$$pro\ n = 1,2, \dots$$



Obrázek 1: Úloha o rozdělení lichoběžníku

2.2. Geometrie ve starověkém Řecku

V 8. – 6. století před. n. l. vznikaly starořecké městské státy – polis dlouhodobým rozpadem prvobytně pospolného zřízení. Miletos, Athény, Kroton, Syrakusy byly jedny z nejdůležitějších měst té doby. Urputný boj mezi lidem (obchodníci a řemeslníci) a rodovou aristokracií (statkáři) a oligarchií (bohatí obchodníci) vedl ke vzniku otrokářské demokracie z dřívější otrokářské tyranie. Otrokářská demokracie byla nejprogresivnější starověkou formou vlády. Svobodný lid měl možnost volit do zákonodárných státních orgánů, stát se členem soudní poroty či se jinak podílet na politickém životě.

Začal se formovat také nový typ myšlení, podstatně odlišný od myšlení ve starověkých říších orientálního typu. Otrokáři pohrdali prací, kterou za ně otroci vykonali a došlo k odtržení fyzické práce od duševní činnosti. Měli tedy čas přemýšlet o abstraktních otázkách. Namísto anonymního jednotlivce, pokorného před náboženskou teologií, vyvstal typ člověka, který byl hrdý na rovnoprávnou společnost občanů a aktivně ovlivňoval vlastní život i chod veřejných záležitostí. Rozum i myšlení člověka se rozšiřovalo, avšak ne kvůli praktickým účelům. Jedinec se začal zabývat vědou a vytvářel filozofický obraz světa. Díky tomuto novému typu myšlení se starověcí Řekové vzdálili od starověkých Egypťanů a obyvatelů starověké Mezopotámie a jejich ustrnulému světovému názoru.

Starořecká společnost se dostala díky obchodním stykům do kontaktu s okolními civilizacemi jako byl Egypt a Mezopotámie, kde měla geometrie především konkrétní a praktický ráz. Někteří historikové a filozofové se domnívají, že starořecká geometrie převzala od Egypťanů a Babyloňanů pouze praktické znalosti. Jiní naopak úplně popírají vliv Egyptské a Babylonské geometrie na starořeckou geometrii.

Starořecká geometrie začala novou éru uvědoměním si principu důkazu jako klíčovou kategorií matematické teorie. Matematický poznatek se nestává věrohodným prokázáním užitečnosti, praktickým provedením či váhou autority autora, ale silou logické argumentace, a tak osvobozuje matematiku od subjektivních postojů a náhodností. Dochází k oddělení teoretické geometrie od praktické, která obsahuje spolu s návodem na řešení úloh i zdůvodnění její správnosti. Díky tomu se začali v geometrii zobecňovat dílčí výsledky a získávat nové závěry. Od poloviny 6. století před n. l. se začala v Řecku matematika stávat samostatným vědeckým oborem.

Podle obsahu, metod a rozsahu matematických poznatků můžeme rozlišit následující etapy ve vývoji matematiky/geometrie.

1. **Iónské období** (7.-6. století před n. l. až polovina 5. století před n. l.)
2. **Athénské období** (polovina 5. století před n. l až 300 před n. l.)
3. **Helenistické období** (300 před n. l. až polovina 2. století n. l.)
4. **Období úpadku** (polovina 2 století až 6 století)

2.2.1 Iónské období

Geometrie jako věda, jejíž principy se považují za platné dodnes, se zrodila v Iónském období historického vývoje geometrie ve starověkém Řecku a helenistickém světě. Hlavními centry geometrické tvorby byly milétská škola a pythagorejská škola.

Milétská škola

Zakladatelem Milétské školy byl **Thales z Milétu**, jedna z nejvýznamnějších osobností starověké řecké matematiky.

Thales z Milétu byl kupcem a velmi všestrannou osobností. Zabýval se politikou, podnikáním, filozofií, matematikou, astronomií, přírodovědou, geodézií nebo námořnickou navigací. Patří mezi sedm mudrců – slavní starověcí Řekové. Thales zbohatnul na výrobě olivového oleje, a tak se už nemusel věnovat existenčním starostem, ale věnoval se svým zálibám – cestování, poznávání cizích krajin, bádání a filozofií.

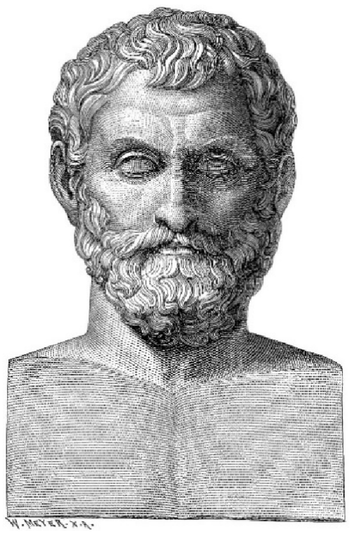
Filozofie Milétské školy uznávala jednotu světa na základě jediného materiálního principu. Thales považoval za základ veškeré existence vodu, jeho žák a pokračovatel Anaximandros jako jediný materiální princip viděl apeiron – neohraničená věčná pralátka a Anaximandrův žák Anaximenes za základ považoval vzduch.

V oblasti praktické geometrie se Thalesovi připisují dva velké úspěchy. Dokázal změřit výšku egyptských pyramid pomocí vržených stínů pyramidy a své vlastní postavy a změřit vzdálenost lodě na moři od pobřeží. Úlohy se řešily pomocí podobnosti trojúhelníků a úměrnosti stran ležících proti stejným úhlům.

Nejen vyslovit, ale i dokázat. Takový požadavek kladl Thales na matematická tvrzení. Připisují se mu důkazy těchto tvrzení:

1. *Průměr kruhu rozděluje kruh na dvě shodné části.*
2. *Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou navzájem shodné.*
3. *Vrcholové úhly (tj. dva úhly, pro která ramena jednoho z nich jsou polopřímkami opačné k ramenům druhého z nich) jsou navzájem shodné.*
4. *Dva trojúhelníky, ve kterých strana jednoho je shodná se stranou druhého a úhly přilehlé k této straně v jednom trojúhelníku jsou shodné s úhly přilehlými ke shodné straně v druhém trojúhelníku, jsou shodné. (dnes tzv. věta u,s,u)*
5. *Úhel s vrcholem na kružnici, jehož ramena procházejí krajními body průměru, je pravý. (Thaletova věta)* [1]

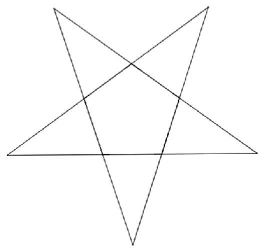
První tři věty dokazoval Thales nejspíše prostým přehýbáním obrázku. Otočení obrázku okolo středu kružnice o 180°přidal u páté věty.



Obrázek 2: Thales z Milétu

Pythagorejská škola

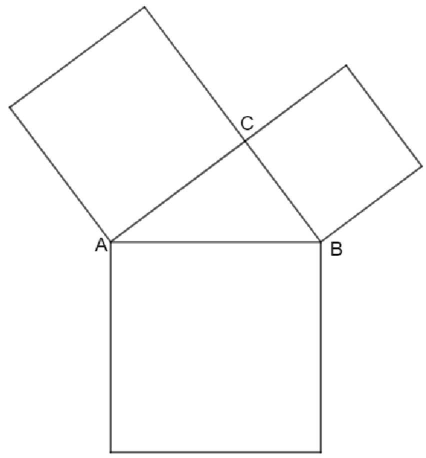
Okolo poloviny 6. století před n. l. vzniká pythagorejská škola, která z hlediska rozsahu matematiky a objemu výsledků nejvíce přispěla k rozvoji matematiky v iónském období starořecké matematiky. Pythagorejská škola byla idealistická, jejím cílem nebyl pouze rozvoj matematiky a filozofie, ale byla také politickou a náboženskou stranou a bojovala proti materialismu milétské školy. Příslušníci pythagorejské školy tvořili tajné bratrstvo s přísnými pravidly životosprávy, oblékání, stravování a veřejného vystupování. Tajným poznávacím znamením bratrstva byl pravidelný hvězdicovitý pětiúhelník (pentagon).



Obrázek 3: Pentagon (hvězdicovitý pětiúhelník)

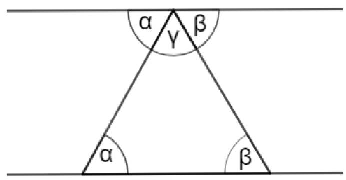
Zakladatelem a vrcholnou autoritou pythagorejské školy je **Pythagoras**, který se už za svého života stal legendou a dočkal se úcty od lidí. Narodil se okolo let 600–560 před n. l. na ostrově Samos a zemřel mezi roky 510-480 před n. l. v jihoitalském Krotonu, kam se musel i se svou školou přestěhovat kvůli nepřiměřené politické angažovanosti. Hodně cestoval, navštívil i Egypt a Mezopotámii, kde se seznámil s mezopotámskou aritmetikou, teorií čísel, geometrií či astronomií.

Nejznámější výsledek pythagorovské geometrie je bezpochyby věta o pravoúhlém trojúhelníku, která nese jméno po svém autorovi – Pythagorova věta. Jedna z jejích možných formulací zní*: V každém pravoúhlém trojúhelníku obsah čtverce, jehož strana je přepona, se rovná součtu obsahů čtverců, jejichž strany jsou odvěsny.* [1] Všimněme si, že v této formulaci není řeč o obsazích ale čtvercích. Už před Pythagorem, v mezopotámské geometrii, byla Pythagorova věta i její použití známé. Úspěch se ale připisuje pythagorejské škole, hlavně samotnému Pythagorovi, neboť všeobecně zformuloval Pythagorovu větu pro libovolný trojúhelník a zformuloval logický důkaz této věty. Bohužel o důkazu této věty chybí informace, ale lze předpokládat, že byl důkaz podobný jako uvádí Euklides ve svých Základech.

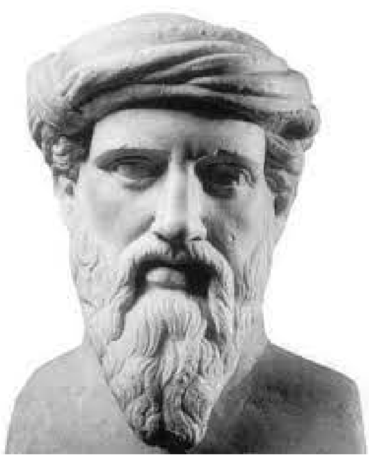


Obrázek 4: Pythagorova věta

Pythagorejská geometrie se zabývala větou o součtu vnitřních úhlů trojúhelníka, která byla založená na použití rovnoběžnosti a zabývala se i jejím důkazem. Tedy zapříčinili počátek učení o rovnoběžkách. Zajímali se o přímkové útvary jako je trojúhelník, čtyřúhelník a o pravidelné mnohoúhelníky. Znali tři pravidelné mnohostěny – čtyřstěn, šestistěn a dvanáctistěn. Neznali výsledky o objemu a povrchu těles jako jsou – hranol, jehlan, válec, kužel a koule. Pythagorejci jako první dospěli k apagogickému důkazu. Existenci iracionálních čísel pythagorejci nejspíše objevili v geometrii, neboť $\sqrt{2}$ přísluší délce přepony rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s délkou odvěsny 1 anebo délce úhlopříčky čtverce s délkou strany 1.



Obrázek 5: Součet vnitřních úhlů trojúhelníka



Obrázek 6: Pythagoras

Dalšími významnými učenci iónského období byli Démokritos, Zenón, Hippias a Hippokrates, kteří přispěli k rozvoji matematiky tohoto období.

Už učence v iónském období, a později i v dalších, poutalo jejich pozornost řešení úloh, jejichž řešení se odhalilo postupnými kroky až v 18-19. století. Jsou to tyto tři klasické úlohy:

1. *Trisekce úhlu: Daný úhel je třeba rozdělit na tři vzájemně shodné nepřekrývající úhly.*
2. *Kvadratura kruhu: Je třeba sestrojit čtverec, jehož obsah se rovná obsahu daného kruhu.*
3. *Zdvojení krychle (delský problém): Je třeba najít délku hrany krychle, jejíž objem se rovná dvojnásobku objemu dané krychle.* [1]

Díky těmto úlohám Řekové začali považovat za řešení geometrického problému jen konstrukci, při které se používá pouze pravítko a kružítko. Tyto pokusy o řešení těchto úloh vedly k začátkům teorie o kuželosečkách a ke geometrickým metodám řešení kubických rovnic.

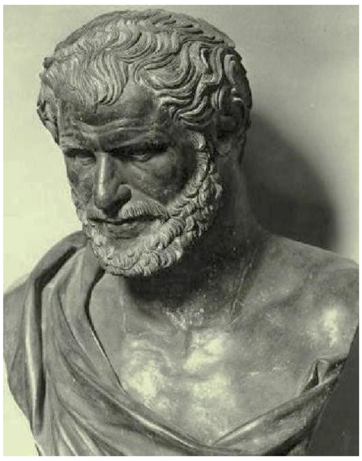
Zenón z Eley

Zénon z Eley působil v Eleatské škole a dokazoval neexistenci pohybu, z nichž jsou nejznámější čtyři aporie – Dichotomie, Achilleus, Šíp, Stadion. Už v té době sám Aristoteles považoval tyto aporie za nesmyslné.

Démokritos z Abdér

Démokritos byl nejvzdělanějším učencem té doby. Velmi cestoval, navštívil Egypt, Persii nebo Babylon. Byl materialisticky zaměřen a idealisti jako Platon ho nesnášeli, ignorovali a pálili jeho díla, proto se nám o něm zachovalo jen málo zmínek. Typické pro Démokrita je jeho atomistické učení. Jako základ hmoty považoval neměnné nedělitelné pevné atomy, které se liší tvarem, polohou a uspořádáním.

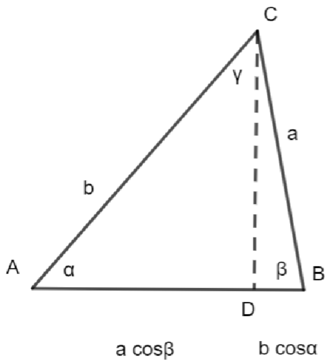
Rovina má podle Démokrita tloušťku jednoho atomu. Provedl řezy kužele rovinami rovnoběžnými s podstavou. Jeden řez měl taktéž tloušťku jednoho atomu. Těleso chápal jako sjednocení konečného počtu těchto řezů. Touto metodou se mu podařilo zjistit objem jehlanu a kužele v závislosti na výšce a obsahu podstavy.



Obrázek 7: Démokritos z Abdér

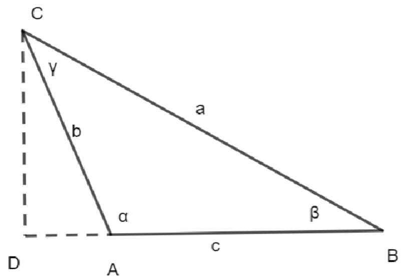
Hippokrates z Chiu

Hippokrates z Chiu byl největší geometr 5. století před n. l. Jeho dílo Základy se bohužel nezachovalo, ale obsahovalo ty fakta, která jsou obsažena v prvních čtyřek knihách Eukleidových Základů. Hippokratovy Základy obsahovaly tyto poznatky z geometrie: *Větu o obvodovém úhlu; vlastnosti pravidelného šestiúhelníku a jeho konstrukci; konstrukci kružnice opsané trojúhelníku; vlastnosti podobnosti – poměr obsahů podobných rovinných útvarů se rovná čtverci (druhé mocnině) koeficientu podobnosti; konstrukci čtverce, jehož obsah se rovná obsahu daného mnohoúhelníku; zevšeobecnění Pythagorové věty pro ostroúhlý a tupoúhlý trojúhelník.* [1]



Obrázek 8: Zevšeobecnění Pythagorové věty pro ostroúhlý trojúhelník

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$



Obrázek 9: Zevšeobecnění Pythagorové věty pro tupoúhlý trojúhelník

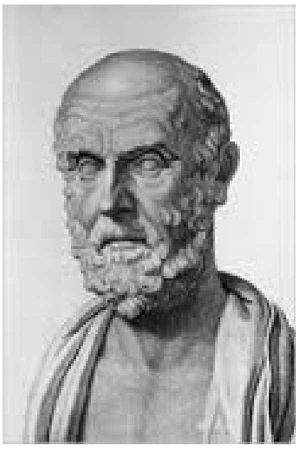
$$c = b\cos\alpha - a\cos(2\pi - \beta) = b\cos\alpha + a\cos\beta$$

Bohužel se pouze domníváme, že k těmto poznatkům Hippokrates přispěl svým bádáním. Zaručeně původní a vlastní jsou tyto tři Hippokratovy výsledky. Přišel na to, že obsah kruhů je úměrný čtvercům sestrojených nad jejich průměry.

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi d_1^2, S_2 = \frac{1}{4}\pi d_2^2, S_1 : S_2 = d_1^2 : d_2^2$$

Druhý výsledek se týkal delské úlohy, což byla úloha, kde se měla sestrojit hrana krychle, jejíž objem se rovnal dvojnásobnému objemu dané krychle s hranou a. Převedl tuto úlohu na konstrukci dvou neznámých geometrických průměrů *x,y* takových, že platí: $a : x = x : y = y : 2a$. Z toho vyplývají podmínky: $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$. Tyto tři rovnosti $y = \frac{1}{a}x^2$, $x = \frac{1}{2a}y^2$ a $xy = 2a^2$ dávají rovnice kuželoseček. K těm ale sám Hippokrates už nedospěl.

Třetí Hippokratův příspěvek ke geometrii byl objev měsíčků – křivočarých útvarů, jejichž hranici tvoří kružnicové oblouky a jejich obsah se rovná obsahu určitých mnohoúhelníků. Tento objev mohl vzbuzovat iluzi, že povede na řešení kvadratury kruhu, ale nevedl.



Obrázek 10: Hippokrates z Chiu

Hippias Elidský

Hippias Elidský se pokoušel řešit problém trisekce úhlu. Snažil se zkonstruoval křivku, která je grafem přímé úměrnosti mezi velikostí úhlu a délkou úsečky.

2.2.2 Athénské období

Jedno z nejvýznamnějších center starověkého Řecka byly Athény. Athény prošly těžkým obdobím, neboť se zapletly do válečných sporů. Nejprve zvítězily v Perské válce, poté se účastnily válek Peloponéských. Zachovaly si ale demokratický politický systém a brzy se dostaly do čela městských států v egejské oblasti. Rozkvět geometrie v tomto období není omezen pouze na město Athény, ale probíhal i v okolních oblastech.

Archytas z Tarentu

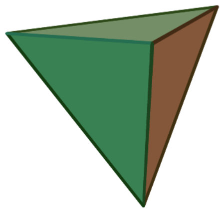
Archytas byl všestranný učenec a pythagorejský filozof z Tarentu, kam se pythagorejská škola přesunula. Byl přítelem Platóna a učitelem Eudoxa.

Jeho největší přínos v geometrii bylo zabývání se delským problémem o zdvojení krychle. Navázal na Hippokratovu modifikaci této úlohy na dva geometrické průměry vložené mezi dvě daná přirozená čísla. Daná čísla zobrazíme jako úsečky. Kratší úsečka je tětiva kružnice, jejíž průměr je delší úsečka, a navíc tětiva a úsečka mají společný jeden krajní bod. K této kružnici sestrojíme tři rotační plochy – rotační válcovou plochu, anuloid (kružnice, kolmá na původní kružnici, kterou budeme otáčet) a rotační kuželovou plochu. Válcová plocha se protne s anuloidem v prostorové křivce (Archytatova křivka), jejíž průsečík s rotační kuželovou plochou je druhý bod úsečky. Její velikost odpovídá většímu hledanému průměru.

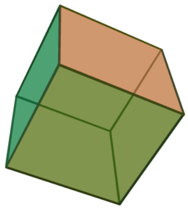
Platón

Platón byl Athénský rodák a strávil v Athénách celý svůj život, kde také založil školu Akademie, idealistickou filozofickou školu. Byl spíše filozofem, matematiku vnímal jako cestu do říše čistých idejí, k poznání boha, ale také jako nevyhnutelné pro filozofickou práci. Nápis, „Nevstupuj, kdo neovládáš geometrii.“, byl umístěn nad vchodem při vstupu do Akademie. Matematické řešení úlohy podle Platoniků formuluje to, co už existuje a nezáleží na tom, zda jsme to již poznali či ne.

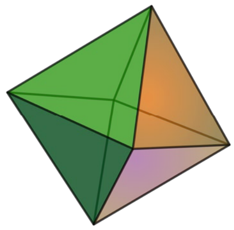
Podle Platóna bylo pojmenováno pět mnohostěnů – Platónská tělesa. Nebyla tak nazvána proto, že by je vymyslel sám Platón, ale protože Platón připisuje čtyřem základním živlům tvar prvních čtyř pravidelných mnohostěnů. Oheň má tvar čtyřstěnu, voda dvacetistěnu, vzduch osmistěnu a země tvar krychle. Vesmírnému celku dal tvar pátého pravidelného tělesa – dvanáctistěnu.



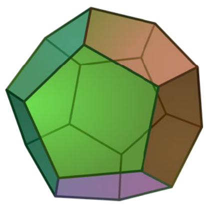
Obrázek 11: Čtyřstěn



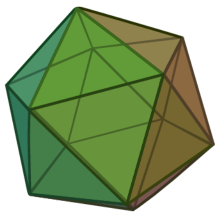
Obrázek 12: Krychle



Obrázek 13: Osmistěn



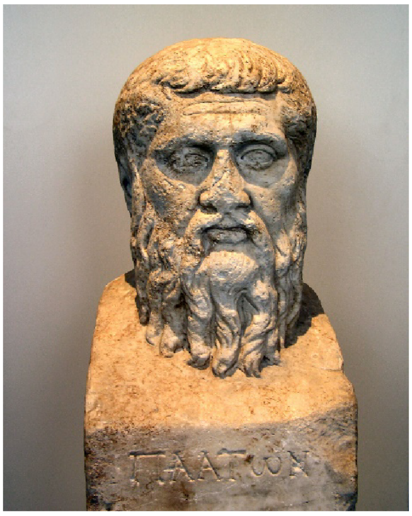
Obrázek 14: Dvanáctistěn



Obrázek 15: Dvacetistěn

Pravidlo, jak získat vzájemně nedělitelné trojice pythagorejských čísel ve tvaru: $x = 4p^2 - 1, y = 4p, z = 4p^2 + 1$, kde x a z jsou sousední lichá čísla, se Platónovi také připisuje.

Řešil také problém o zdvojení krychle, ale je zpochybňováno, že na toto řešení přišel on, neboť používá prostředky v rozporu s Platonskou filozofií.



Obrázek 16: Platón

Eudoxos z Knidu

Eudoxos z Knidu byl nejvýznamnější matematik Athénského období. Byl žákem Archyta z Tarentu a založil vlastní školu. Ta sice vycházela z učení Platóna a Pythagora, ale odmítala spekulativní chápání přírody. Podporovala experimentování, pozorování a přirozeně racionální vysvětlení jevů. Byl i významným astronomem, při pobytu v Egyptě si osvojil spoustu astronomických znalostí.

Eudoxův vrcholný přínos v matematice byla teorie proporcí. Pojem poměr (proporce) je rozšířen na geometrické tvary, netýká se jen čísel, jak zavedl Pythagoras. Proporci mohly vytvářet pouze homogenní útvary prostřednictvím své míry. Například délka s délkou, objem s objemem, obsah s obsahem.

Druhým velkým přínosem bylo vypracování exhaustní metody. Jednalo se o vyplnění rovinného (prostorového) geometrického útvaru posloupností vepsaných mnohoúhelníků (mnohostěnů), jejichž obsahy (objemy) tvoří monotónně rostoucí shora ohraničenou posloupnost. Ze základních vět matematické analýzy má tato posloupnost limitu, která se rovná obsahu (objemu) útvaru.

Geometrická algebra

Ve druhé polovině 4. století před n. l. se zformovala geometrická algebra, i když její zárodky můžeme vidět už ve starověké Mezopotámii. Řešila aritmeticko-algebraické úlohy geometrickými prostředky.

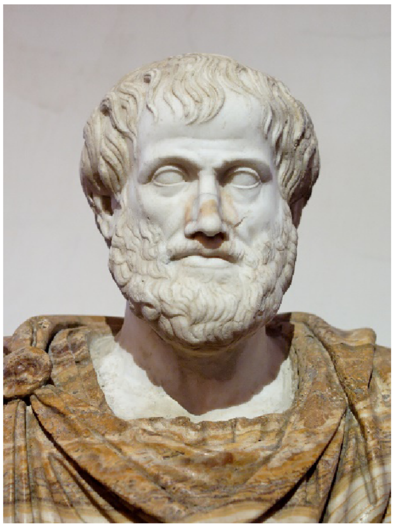
Znázornění čísel pomocí geometrických objektů je podstatou geometrické algebry. Například jednoduché číslo zobrazíme jako úsečku, jejíž délka se rovná číslu; součin čísel se zobrazuje pravoúhelníkem se stranami a, b, jehož obsah se rovná součinu ab; čtverec se stranou a představuje druhou mocninu a^2 atd.

Aristoteles

Aristoteles ze Staigery byl největším myslitelem starověku. Vzdělání nabyl v Platónově Akademii, kde také působil jako učitel. Po Platonově smrti z jeho školy odešel a založil si vlastní školu. I když se Aristoteles speciálně nezabýval matematickou tématikou, v jeho pracích je spousta výroků, které mají pro dějiny matematiky veliký význam.

Aristoteles dává základy deduktivního systému ve vědě a objasňuje podstatu, postavení a funkci postulátů, definic, hypotéz a důkazů. Axiomy jsou podle Aristotela „všeobecné soudy“, které jsou přijímány bez důkazu. Postuláty mají užší význam. Jsou to výroky přijímané bez důkazu ve speciálním vědeckém odvětví. Definice chápal jako logické vymezení obsahu a rozsahu pojmu, které ale nezabezpečují existenci pojmu, tu je potřeba potvrdit existenčním důkazem, například konstrukcí.

Aristotelova teorie měla velký význam a byla základem pro Euklidovo dílo Základy. Dospěl také k základním pojmům jako jsou bod, čára, rovina, těleso apod.



Obrázek 17: Aristoteles

2.3 Geometrie v Helénistických zemích

Po tažení Alexandra Makedonského se na začátku 4. století před n. l. vytvořila veliká říše zahrnující Řecko, Egypt, Mezopotámii, Persii, Přední Asii a oblast Černého moře až do krajin Blízkého a Středního východu. Rozpad říše po smrti Alexandra na stát Ptolemaiovců v Africe, Seleukovců v Asii a na další menší státy bylo nevyhnutelnou událostí. Toto období, kdy se do zemí, které nebyly řecké, rozšířila řečtina a řecké zvyky, se nazývá helénistické. Otrokářský stát zůstal základem helénistických zemích. Alexandrie, Antiochie, Pergamon a ostrov Rhodos byly nejvýznamnější střediska tohoto období. V prvním století před n. l. došlo k římskému podrobení helenistických zemí a tím bylo helénistické období ukončeno.

V helénistickém období vznikla alexandrijská instituce Museion, která vzala slávu Athénám a stala se hlavním městem vědy. Museion bylo tvořeno velkým komplexem budov, kde se nacházela velká knihovna s několika set tisíci rukopisů. Sdružovali se zde vědci a vzdělávali se zde učenci. Alexandrijská škola je označení této epochy, kdy matematická tvorba vzkvétala. V tomto období dospěla matematika na nejvyšší stupeň rozvoje, jaký byl ve starověku. Významnými vědci tohoto období byli Euklides, Apollonios z Pergy a Archimedes.

Euklides

Euklides byl jeden z největších geometrů v celých dějinách geometrie, o čemž svědčí jeho vysoká úroveň teoreticko – abstrakčního a analytického myšlení. Je pravděpodobné, že své geometrické znalosti si osvojil v Athénách. Jeho velmi známý výrok na Ptolemaiovu (tehdejší panovník) otázku, zda existuje jednodušší způsob, jak porozumět geometrii byl: „V geometrii není královské cesty."

Jeho největším dílem jsou Základy, které mu přinesly všeobecné uznání a zařazení mezi významné představitele matematiky. Základy ale nebyly jeho jediné dílo. „Data" a „O dělení útvarů" jsou jediné spisy, které se zachovaly. Ostatní díla nebyla dochována a jsou zmíněna pouze v dílech jiných autorů, například dílo Kuželosečky nebo dílo Místa na plochách. Dílo Data doplňuje prvních šest knih Euklidových Základů. Spis O dělení útvarů se dochoval pouze v arabském překladu. Zabývá se dělením útvarů na útvary jiného nebo stejného tvaru.

Základy

Euklidovy Základy obsahují ve třinácti knihách poznatky o geometrických útvarech, nauku o celých kladných číslech a zlomcích, nebo se zde zkoumají i nesouměřitelné geometrické veličiny. Od samého začátku existence základních a středních škol sloužily Euklidovy Základy jako hlavní zdroj výuky geometrie, v určité míře plní tuto funkci dodnes. Je to nejrozšířenější a nejvyhledávanější dílo v celé historii matematiky.

První čtyři knihy Základů se věnují planimetrii. V první knize jsou znalosti od bodu až po Pythagorovu větu, ve druhé knize se popisuje geometrická algebra, třetí se zabývá kružnicí a kruhem a čtvrtá pravidelnými mnohoúhelníky vepsanými do kružnice a opsané kružnici. Pátá a šestá kniha obsahuje znalosti z oblasti aritmetiky a geometrie, od teorie proporcí až po poměry, úměry a jejich použití v geometrii. V sedmé, osmé a deváté knize se Euklides zmiňuje o teorii čísel a teoretické aritmetice, zabývá se prvočísly, dělitelností čísel a geometrickými řadami. Desátá kniha píše o teorii iracionalit. Poslední tři knihy obsahují poznatky z oblasti stereometrie. Ve třinácté knize se dočteme o pravidelných mnohostěnech.

Konstrukce se zde provádějí pouze za pomocí pravítka a kružítka. Pravítko je bez značek a slouží jen ke spojení dvou bodů nebo k prodloužení úsečky. Kružítkem lze jen opsat kružnici z daného bodu s daným poloměrem. Nebylo zde povoleno použití jiných čar, než je přímka a kružnice, proto zde nebyly zahrnuty kuželosečky, o kterých ale Euklides napsal jiné dílo.

Základy jsou prvním dílem, jehož obsah je zpracován podle Aristotelových základů deduktivního systému ve vědě. Základy začínají uvedením definic, postulátů, axiomů a všeobecných pojmů. Potom následují věty, důkazy, formulace problémů a pomocné věty – lema.

Vyskytující se definice jsou popisné (např. *„Bod jest, co nemá dílu."* [2]), nominální (např. *„Útvary přímkové jsou, které jsou přímkami omezovány…"* [2]), genetické (např. *„Koule jest útvar omezený tím, že se kolem pevného průměru polokruhu polokruh otočí, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčeti."* [2]) a axiomatické (např. *„Stejné jsou kruhy, jejichž průměry jsou stejné neboli jejichž poloměry jsou stejné."* [2]).

V první knize Základů se nachází těchto pět postulátů – požadavků, které klademe na konstrukci jednoduchých útvarů:

1. *Od kteréhokoliv bodu ke kterémukoliv bodu lze vést přímku.*
2. *A přímku omezenou lze prodloužit.*
3. *A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem lze narýsovat kruh.*
4. *A každé dva pravé úhly jsou navzájem shodné.*

5. *A když přímka, protínající dvě přímky, tvoří na téže straně vnitřní úhly menší dvou pravých, pak ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna, se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.* [2]

Čtvrtý postulát už se ale za postulát nepokládá, je ho potřeba dokázat.

Po postulátech následují axiomy, což jsou tvrzení nevyžadující důkaz. V první knize Euklidových Základů se nachází devět axiomů. Skoro všechny lze napsat i pomocí aritmeticko-algebraické symboliky. Euklidovy axiomy zní:

1. *Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.* $(A = C \wedge B = C \rightarrow A = B)$
2. *Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky jsou rovny.* $(A = B \wedge C = D \rightarrow A + C = B + D)$
3. *A odejmou-li se od rovných rovné, zbývající části rovny jsou.*
4. $(A = B \wedge C = D \rightarrow A - C = B - D)$
5. *A když se přidají k nerovným rovné, celky jsou nerovny.* $(A \neq B \wedge C = D \rightarrow A + C \neq B + D)$
6. *A dvojnásobky téhož vespolek rovny jsou.* $(A = B \rightarrow 2A = 2B)$
7. *A polovičky téhož vespolek rovny jsou.* $(A = B \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \cdot A = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot B)$
8. *A co se navzájem kryje, navzájem rovno jest.*
9. *A celek je větší než díl.*
10. *A dvě přímky místa neomezují.* [1]

Euklidovy Základy mají z pohledu logiky 20. století vážné nedostatky. Například definice nesplňují normy moderní logiky a ani nevyhovují Aristotelovým pravidlům definic. Další nedostatek se týká axiomů a postulátů, ve kterých dnešní logika nevidí rozdíl, na rozdíl od Aristotela a Euklida. Podle nich se postuláty vztahují na konkrétní teorii, axiomy jsou naopak více obecné.

I přes některé výhrady byly Euklidovy Základy geniálním dílem a zdrojem inspirace pro mnohé generace. Tomuto dílu se žádné jiné matematické ani přírodovědné dílo nemůže rovnat.

Obrázek 18: Euklides

Archimedes

Archimedes je jeden z mála helenistických učenců, o kterém se dodnes dochovalo pár věrohodných údajů. Okolo roku 287 před n. l. se narodil ve městě Syrakusy na Sicílii. Jeho otec byl dobrý astronom a matematik a u něho Archimedes nabyl své vzdělání. Navštívil Alexandrii, kam jel rozvíjet své znalosti a získal tam kontakty s Euklidovými žáky.

Šířka Archimedových zájmů byla obdivuhodná. Zajímal se o astronomii, hydrostatiku, mechaniku, matematiku a o aplikaci těchto věd. Z hlediska šířky vědeckého záběru, originality a závažnosti řešených problémů, bychom Archimeda označili za největšího matematika helenistického období. Avšak v oblasti systematizace matematiky, proniknutí do hloubky a vyjádření v adekvátním jazyku Archimedes zaostává za Euklidem. Nelze tedy jednoznačně určit, který matematik je největší své doby. Avšak Archimeda, Euklida a Apollonia můžeme označit za nejjasnější trojhvězdí antické vědecké oblohy.

Značnou část úloh řešil Archimédes geometricky, některé ale i pomocí mechanicko-fyzikálních úvah nebo myšlenkových experimentů. Dochovalo se deset Archimedových prací, pravděpodobně napsaných v tomto pořadí:

1. *O rovnováze ploch, kniha 1*
2. *Kvadratura paraboly*
3. *O rovnováze ploch, kniha 2*
4. *Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě na řešení geometrických úloh*
5. *O kouli a válci, kniha 1 a 2*
6. *O spirálách*
7. *O konoidech a sféroidech*
8. *O plovoucích tělesech, kniha 1 a 2*
9. *Měření kruhu*
10. *O počítání písku* [2]

V dílech O rovnováze ploch (knihy 1 a 2) se Aristoteles zabývá hledáním těžiště rovinných útvarů, jako je rovnoběžník, trojúhelník nebo lichoběžník. Ve druhé knize se zabývá určením těžiště parabolické úseče i části odříznuté z ní přímkou, rovnoběžnou základně.

Název díla Kvadratura paraboly pochází z pozdější doby, neboť názvy elipsa, parabola a hyperbola pro regulární kuželosečky zavedl až Apollonios. Archimédes chápal kuželosečky jako řezy rotační kuželové plochy nevrcholovou rovinou kolmou na tvořící přímku kuželové plochy. V případě elipsy byl vrcholový úhel kuželové plochy ostrý, v případě paraboly pravý a v případě hyperboly tupý. Parabola byla tedy řez pravoúhlého kužele, elipsa řez ostroúhlého kužele a hyperbola byla řez tupoúhlého kužele.

Ve čtvrtém díle Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě na řešení geometrických úloh se nanovo odvozuje výpočet obsahu parabolického odseku a dokazuje se objem přímého válce opsaného koulí.

Výsledky první knihy O kouli a válci jsou tyto:

1. *Plocha povrchu koule se rovná čtyřnásobku plochy jejího největšího kruhu.*
2. *Plocha kulového vrchlíku se rovná ploše kruhu, jehož poloměr se rovná vzdálenosti vrcholu vrchlíku od jeho kruhového okraje.*
3. *Objem válce opsaného kolem koule a majícího výšku rovnou jejímu průměru se rovná třem polovinám objemu koule.*
4. *Povrch tohoto válce i včetně obou podstav se rovněž rovná třem polovinám povrchu koule, jíž je opsán.* [2]

Poslední dva z těchto výsledků Archimédes považoval za tak skvělé, že byly zaznamenány na jeho náhrobku. Ve druhé knize jsou tři věty a šest vyřešených úloh – sestrojit kouli stejně velkou jako daný kužel či válec; rozdělit kouli rovinou tak, aby objemy/obsahy obou byly v daném poměru; k daným dvou vrchlíkům dvou koulí najít třetí podobný jednomu z nich a shodný plochou i objemem s druhým; od dané koule oddělit vrchlík, jehož objem je v daném poměru ke kuželi s tutéž základnou a výškou.

Archimédes v pojednání O spirálách popisuje spirálu pojmenovanou jeho jménem, kterou definoval takto: Je to rovinná křivka, kterou opisuje bod rovnoměrně se pohybující po přímce, přitom přímka se rovnoměrně otáčí okolo svého pevného bodu.

Dílo O konoidech a sféroidech začíná jako každé Archimédovo dílo dopisem. Pravoúhlý konoid znamená rotační paraboloid, tupoúhlý konoid rotační dvojdílný hyperboloid a sféroid je prodloužený nebo zploštěný rotační elipsoid.

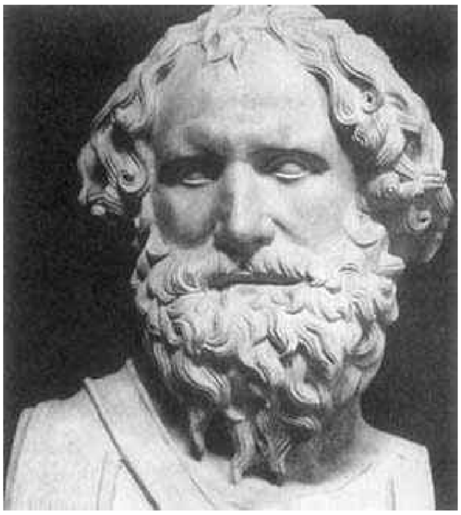
Obě části spisu O plavajících tělesech obsahují základy hydrostatiky.

Nejznámější Archimedovo dílo je Měření kruhu. Bohužel se zachovala jen část. Jsou zde dokazovány tyto věty:

1. *Plocha kruhu se rovná ploše trojúhelníka s výškou rovnou poloměru a se základnou rovnou obvodu.*
2. *Poměr plochy kruhu a čtverce jeho průměru je přibližně dán poměrem* $11:14$.
3. *Obvod kruhu je třikrát větší než jeho průměr a rozdíl obvodu kruhu a trojnásobku průměru je menší než* $1/7$ *a větší než* $10/71$ *průměru.* [2]

Poslední Archimedovo dílo Počítání v písku zachované v řečtině se zabývá zápisem libovolně velkého čísla.

Archimedes je také objevitelem polopravidelných mnohostěnů, což jsou mnohostěny, jejichž stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky alespoň dvou různých druhů a všechny úhly stěn jsou navzájem shodné. Archimédes těles našel třináct, ohraničených osmi, čtrnácti, dvaceti šesti, třiceti dvěma, třiceti osmi, šedesáti dvěma nebo devadesáti stěnami ve tvaru trojúhelníků, čtverců, pětiúhelníků, šestiúhelníků, osmiúhelníků, devítiúhelníků nebo dvanáctiúhelníků.



Obrázek 19: Archimedes

Apollonios

Apollonios je po Archimedovi a Euklidovi třetím nejmladším a nejslavnějším matematikem helénistického období a celého evropského starověku. V městě Perga okolo roku 262 před n. l. se Apollonios narodil. Většinu života strávil v Alexandrii, kde studoval u Euklidových nástupců. Na severozápadě Malé Asii je významné středisko řecké kultury helénistického období – Pergamon, které Apollonois navštívil.

Jeho nejvýznamnější dílo jsou Kuželosečky, ze kterých čtvrtou až osmou knihu věnoval králi Pegamonu. V řecké verzi se dochovaly první čtyři knihy, další tři v arabském překladu a poslední kniha se ztratila. Před Apolloniem se kuželosečkám věnovala spousta matematiků, ale pro žádného to nebylo hlavním tématem jejich vědeckého bádání. Jako první Apollonios získával kuželosečky z libovolného kruhového kužele, nezáleželo na tom, zda je kužel přímý nebo kosý. Apolloniovi předchůdci nazývali kuželosečky jako sečny ostroúhlého, tupoúhlého a pravoúhlého kužele. Apollonios zavedl pojmy elipsa, hyperbola a parabola, dále také pojmy průměr, sdružený průměr, asymptoty, vrcholy atd.

V první knize Apolloniova díla Kuželosečky je definice kuželoseček a zavedení pojmů jako elipsa, hyperbola, parabola, vrchol, průměr, sdružený průměr, osa. Kuželosečky získává řezem, v obecném případě, šikmého kruhového kužele rovinou, která protíná jen jednu polovinu kužele, nebo je rovnoběžná s jednou jeho povrchovou přímkou, anebo protíná obě poloroviny. Za osy soustavy souřadné Apollonios volí libovolný průměr a směr s ním sdružené tětivy, ve které mají tři regulární kuželosečky tuto jednu rovnici $y^2 = 2px \pm \frac{p}{d}x^2$, kde znaménko „+“ platí pro hyperbolu, znaménko „-“ pro elipsu a pro parabolu se druhý člen pravé strany rovná nule.

Druhá kniha obsahuje poznatky o asymptotách hyperboly, sdružených hyperbolách, o tečnách ke kuželosečkám a o konstrukcích tečen za různých podmínek.

Ve třetí knize se nachází věty o rovnosti obsahů mnohoúhelníků ohraničených tečnami a sečnami kuželosečky a věty o vlastnostech pólu a poláry. Dále zde najdeme věty o ohniskách elipsy a hyperboly a věty o vlastnostech z nich vyplývajících. Ohnisko ani řídící přímka pro parabolu zde nejsou zavedeny.

Od čtvrté knihy své dílo Apollonios věnoval králi Attalovi z Pergamonu. Zkoumají se zde průsečíky kuželoseček s kružnicí, průsečíky dvou kuželoseček a dotyk dvou kuželoseček, což je důležité při grafickém řešení úloh, jako zdvojení krychle.

Pátá kniha má nejvyšší úroveň, znatelně předstihla svou dobu. Píše se zde o normálách jako úsečky maximální nebo minimální délky; o konstrukci normál z libovolného bodu ke kuželosečce; o subnormálách a o středech křivosti.

Šestá kniha se zabývá shodnými a podobnými kuželosečky a umístěním kuželosečky na rotační kuželovou plochu.

Sedmá kniha byla příprava na ztracenou osmou knihu. Obsahuje věty o vlastnostech sdružených průměrů a sdružených tětiv a věty o obsahu rovnoběžníků, jejichž strany jsou ze sdružených průměrů.

Mezi jeho další díla patří: O odtínání v poměru, O odtínání plochy, O vymezeném odtínání, O dotycích, Rovinná místa, Vkládání, Porovnání dvanáctistěnu s dvacetistěnem, negeometrická práce Okytokion, Neuspořádané iracionality a O zápalných zrcadlech.

Apollonios byl také významným astronomem a zabýval se také početním systémem. Do geometrie přinesl spoustu významných a dodnes ceněných poznatků.

Obrázek 20: Apollonios z Pergy

Eratosthenes

Eratosthenes z Kyrény se narodil v roce 276 nebo 275 před n. l. Studoval v Athénách a Alexandrii a byl to významný pedagog, matematik, geograf, geodet a astronom. I když sám nevytvořil žádná významná díla, Archimedes si ho velice cenil.

Jeden z jeho objevů se týká řešení delského problému – k libovolné krychli zkonstruovat hranu krychle o dvojnásobném objemu. Eratosthenes problém řešil mechanicky, stejně jako Platón pomocí přístroje mezolabon.

Nikomédes

Nikomédes řešil úlohu o trisekci úhlu a o zdvojnásobení krychle (delský problém) pomocí rovinné křivky konchoidy, kterou sám objevil a narýsoval přístrojem, který sám vymyslel. Byl na svůj objev velmi hrdý a Erastothenův mezolabon považoval za nevhodný a nepoužitelný pro praxi.

Diokles

Diokles žil okolo roku 200 před n. l. Jako Nikomédes se zabýval hledáním dvou geometrických úměrných, vložených mezi daná dvě čísla. Diokles objevil křivku kisoida.

Zénorodos

Kolem 200-180 před n. l. žil Zénorodos, který je autorem díla O izoperimetrických útvarech, z něhož se dochovaly některé výňatky: Z pravidelných mnohoúhelníků se stejným obvodem má největší plochu mnohoúhelník s největším počtem úhlů. Obsah kruhu je větší než obsah libovolného pravidelného mnohoúhelníku, který má obvod stejný jako kruh. Ze všech mnohoúhelníků se stejným počtem stran a stejným obvodem má největší obsah pravidelný mnohoúhelník. Koule má větší objem než těleso, které vzniklo rotací pravidelného mnohoúhelníku stejného obvodu jako hlavní kružnice koule kolem osy procházející středem a jedním z vrcholů mnohoúhelníku. Objem koule je větší než objem pravidelného mnohostěnu, jehož povrch se rovná povrchu koule.

Alexandrijské období řecko-helenistické matematiky je vrcholem rozvoje geometrie ve starověku. Bohužel praktické uplatnění geometrie bylo v tomto období velice chudé. Bylo to proto, že přírodní vědy byly málo rozvinuté, a tedy neexistovala potřeba ani možnost geometrii prakticky využít. Vedlo to k tomu, že geometrie v helénistických zemích kolem roku 200 před n. l. ustrnula na své nejvyšší úrovni a dále se nerozvíjela. V Euklidových a Archimédových pracích dovršila geometrie tak vysoké úrovně, že se dále nevyvíjely nové poznatky, pouze se ty staré prohlubovaly, neboť geometrie nedostávala z vnějšku nové popudy. Teorie kuželoseček našla uplatnění v samotné matematice, až později v 17. století od Keplerových objevů se tato teorie využila.

Geometrie v období helénismu je tedy vrcholem a završením předchozích etap vývoje geometrie v řeckém prostředí a hlavním směrem pro budoucí vývoj geometrie ve středověku.

2.3.1. Úpadek a konec starověké řecké geometrie

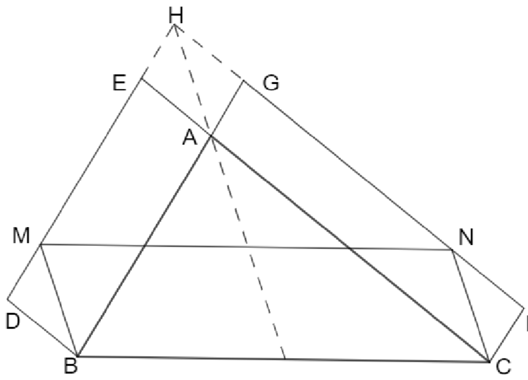
Posledním obdobím geometrie ve starověkém Řecku je období úpadku. V geometrii se od poloviny 2. století n. l. neobjevily žádné nové ideje a poznatky, které by významně ovlivnily vývoj evropské a světové geometrie. Mohlo to být způsobeno například nedostatečným využitím geometrie v praktických činnostech nebo rozpadem Římské říše, jejímž vědeckým střediskem se stala Alexandrie, a nebo zánikem její západní části. Řečtina byla mezinárodním vědeckým jazykem, latina se stala vědeckou mluvou až později. Jedním z hlavních představitelů tohoto období je Pappos.

Pappos

Pappos z Alexandrie žil koncem 3. století n. l. Jeho hlavní náplní bylo připomínání už skoro zapomenutých matematických znalostí. Jeho hlavní dílo se jmenuje Mathématikai synagogi (Matematická sbírka). Pappovo dílo ukazuje, že ani období úpadku starořecké geometrie není etapa jen monotónního poklesu, ale že má i svoje vzestupy. Je zde uvedeno 30 autorů, proto se dílo stalo důležitým pramenem historie matematiky. Také zde Pappos uvádí alternativní a doplňkové důkazy důležitých výsledků Euklida, Archiméda nebo Apollonia.

Dílo se skládá z osmi knih. První kniha a půlka druhé se ztratily. Matematický obsah má druhá až pátá kniha a sedmá kniha. Šestá kniha se zabývá astronomií a osmá kniha mechanikou. Pappos se v díle věnuje například použitelným a efektivním konstrukcím, třem klasickým antickým úlohám, geometrickým paradoxům (např. že lze sestrojit trojúhelníky, jejichž strany jsou větší než strany daného trojúhelníka, ale obsah je menší) nebo konstrukcí kuželosečky z daných pěti bodů.

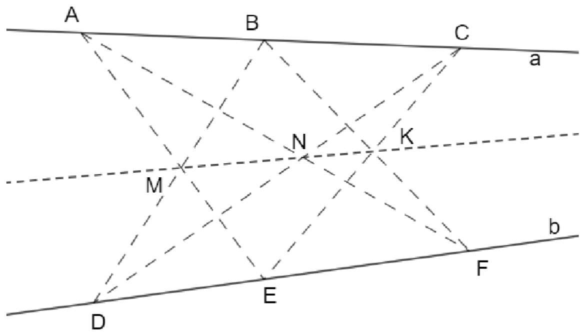
Jeden ze zajímavých výsledků Pappova díla je zobecnění Pythagorovy věty. Nechť máme libovolný trojúhelník ABC, $ABDE$ a $ACFG$ jsou libovolné rovnoběžníky se stranami AB nebo AC. Průsečíkem přímek DE a FG dostaneme bod H. Vedeme-li rovnoběžky s přímkou HA body B a C, dostaneme s přímkou DE průsečík M a s přímkou FG průsečík N. Obsah rovnoběžníku $BCMN$ se rovná součtu obsahů rovnoběžníků $ABDE$ a $ACFG$.



Obrázek 21: Zobecnění Pythagorovi věty

Pozornost ve svém díle věnuje Pappos také izoperimetrickým úlohám. Filozofové tvrdili, že koule má nejdokonalejší tvar, ale své tvrzení nedokázali. Pappos dokazuje, že objem koule je větší než objem libovolného pravidelného mnohostěnu, kužele nebo válce, které mají stejný povrch jako koule.

Mezi další Pappovy výsledky patří věta ze základů projektivní geometrie, pojmenovaná po něm samém – Pappova věta. Nechť a, b jsou dvě různé přímky, A, B, C po dvojicích různé body přímky a, D, E, F po dvojicích různé body přímky b, pak průsečíky dvojic přímek AE, BD; AF, CD; BF, CE leží na jedné přímce.



Obrázek 22: Pappova věta

Jednotlivé Pappovy výsledky mají v historii geometrie velký význam, jen jim chybí úplnost a systematičnost.

2.3.2 Geometrie v západní části Římské říše

Římská říše zahrnovala celé středomoří, část území jižní, střední a západní Evropy a přilehlé oblasti – severní Afriku, malou Asii, Blízký východ. Důvodem římské expanze byla systematicky budovaná vojenská síla, která do 3. století n. l. neměla v této oblasti rovnocenného protivníka.

Od 2. století před n. l. styky Říma a Řecka nabraly na intenzitě. Bylo to jen jednostranné, Římané pouze přijímali poznatky a schopnosti od Řeků. Převzali techniku stavebnictví, poznatky z geodézie, geografie, kartografie, matematiky, výtvarného umění, anebo vynálezy z hydrotechniky.

Matematické a geometrické výsledky do Říma pronikaly od 1. století před n. l. Učenci Alexandrijských škol, kteří se do Říma dostali, tu ale bohužel neměli rovnocenné partnery.

Kapitola 3

Geometrie ve středověku

V této kapitole se budeme geometrií ve středověku zabývat jen velmi okrajově a uvedeme pouze některé z významných osobností této doby. Středověk začíná koncem antického období a končí nástupem novověku. Datuje se přibližně od 6. století n. l. do 16. století.

Ještě, než se rozpadlo římské impérium, začala se matematika rozvíjet na dalekém východě, v Číně a Indii. Vývoj matematiky pak pokračoval v arabských zemích – v Íránu a ve střední Asii a pak také v Evropě.

Ve středověku se řešily hlavně problémy praktické aritmetiky a problémy astronomie. Rozvíjela se goniometrie a sférická trigonometrie. Matematika se formuje do deduktivního systému a široce se vytváří důkazy. Objevují se iracionality, dovršuje se budování základů geometrie, dávají se základy teorie čísel, zkoumají se kuželosečky a začínají teorie o integrálních a diferenciálních metodách.

Geometrie zaujímá ve středověké matematice také významné postavení. Řešily se zde úlohy, které vznikaly při stavbě paláců a chrámů a při budování hrází, kanálů a cest. Bylo potřeba spočítat objemy, obsahy, množství materiálu a dělníků, jejich stravování a finanční ohodnocení. Dílo „Matematika v devíti knihách“ obsahuje řešení a návody k úlohám, jejichž zaměření můžeme vyčíst z názvů jednotlivých knih – „Měření polí“, „Vztahy mezi různými druhy obilnin“. V Islámských zemích vybudovali hodnotné poznatky o rovnoběžkách.

V Evropě se stavěly náboženské stavby v gotickém stylu. Tam se geometrie uplatňovala nejvíce. Bylo nutné správně nakreslit a vypočítat, jak má stavba vypadat. Mezi známé architekty té doby, kteří působili u nás, patří Matyáš z Arrasu, Petr Parléř, Matěj Rejsek z Prostějova nebo Benedikt Rejt.

Matyáš z Arrasu

Architekt a stavitel Matyáš z Arrasu pochází z Francie. Na České území byl pozván králem Karlem IV., aby postavil chrám sv. Víta v Praze. Mezi jeho další významná díla patří Kostel matky Boží před Týnem.

Obrázek 23: Matyáš z Arrasu

Petr Parléř

Petr Parléř byl architekt, stavitel, sochař a kameník. Pochází z Německa. Po smrti Matyáše z Arrasu pokračuje ve stavbě katedrály sv. Víta v Praze. Jeho dalšími povedenými díly je most přes Vltavu, později pojmenovaný Karlův most, staroměstská mostecká věž, kaple všech svatých na Pražském hradě, kostel sv. Bartoloměje v Kolíně a kostel sv. Barbory v Kutné Hoře.

Obrázek 24: Petr Parléř

Kapitola 4

Výukové materiály pro seznámení s historií geometrie

Tato kapitola se bude týkat výukových materiálů pro žáky na základních či středních školách pro seznámení s výše uvedenou historií geometrie. Tyto materiály a hry mají sloužit k získání znalostí o historii geometrie a k procvičení získaných vědomostí. Aktivity může učitel zařadit při projektových dnech nebo v hodinách matematiky. Pracovní list by měl být pomůckou při hraní her, neboť si žáci všechny informace z historie geometrie nezapamatují. Potom je zde hra pexeso, Kdo jsem a Tabu.

4.1 Pracovní list – Historie geometrie

Pracovní list má sloužit k zjištění důležitých informací o historii geometrie, především ve starověku. Žáci ho mohou vyplňovat samostatně nebo ve skupinách, s internetem nebo při výkladu učitele.

Pracovní List – Historie Geometrie

Počátky geometrie

1. **Doplň slova**

…………………… je považována za jednu z nejstarších věd. Uvědomění si geometrického tvaru předmětů je nejstarší …………………. schopnost ………………. Se vznikem …………………. se začaly používat jednotky měr, což byly rozměry různých částí ………………. – loket, palec, prst, píď. Pro …………………… půdy, zasedí osiva bylo potřeba vypočítat …………………. ………………… Keramika se zdobila geometrickými ………………., postavami lidí a ……………
Nabídka slov: zvířata, ornamenty, geometrie, mentální, hospodářství, lidstvo, pozemek, obrábění, obsah, tělo

Geometrie ve starověku

V raně otrokářské společnosti (starověký Egypt a Mezopotámie) měla geometrie praktický charakter. Vědecký ráz geometrie dostala až ve Starověkém Řecku.

Starověký Egypt a starověká Mezopotámie

1. **Přiřaď ke každému období jednu definici z dvojce, podle toho, zda to tam patří:**

Starověký Egypt –

Starověká Mezopotámie –

Nabídka slov:
číslo π stanovili s přesností 0,6 %/ za číslo π brali číslo 3 (velmi nepřesné)
znali Pythagorovu větu/ neznali Pythagorovu větu

geometrické znalosti využívali ke stavbě pyramid/ rozdělili pravoúhlý lichoběžník na dvě části stejného obsahu

Geometrie ve starověkém Řecku

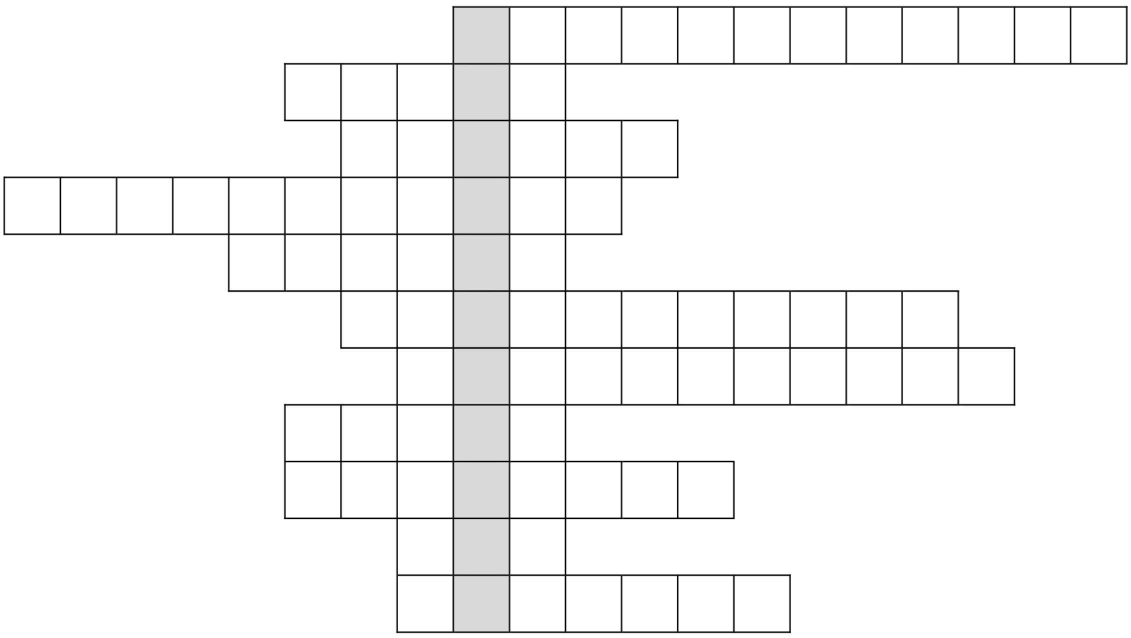
Geometrii v tomto období můžeme rozlišit na následující etapy:

a) Iónské období (7.-6. století před n. l. až polovina 5. století před n. l.)
b) Athénské období (polovina 5. století před n. l až 300 před n. l.)
c) Helenistické období (300 před n. l. až polovina 2. století n. l.)
d) Období úpadku (polovina 2 století až 6 století)

Iónské a Athénské období

2. **Vylušti křížovku:**

Tajenka: Které z Platonových těles má tvar vody?



I. Základy, jakého systému dává Aristoteles?
II. Jaký je úhel s vrcholem na Thaletově kružnici, jehož ramena prochází krajními body průměru?
III. Kdo působil v Athénském období?
IV. Demokritos z Abdér je známý pro jaké učení?
V. Kdo je zakladatelem Milétské školy?
VI. Jak se jmenuje věta o pravoúhlém trojúhelníku?
VII. Kdo pochází z Chiu a zobecnil Pythagorovu větu na ostroúhlý a tupoúhlý trojúhelník?
VIII. V jakém období působil Demokritos nebo Thales?
IX. Co má ve znaku bratrstvo Pythagorejské školy?
X. Kolik mnohostěnů se nazývá Platónská tělesa?
XI. Trisekce úhlu, kvadratura kruhu, zdvojení krychle patří mezi tři nejslavnější ……………… úlohy.

3. Vysvětli pojmy

Trisekce úhlu =

Zdvojení krychle (delský problém) =

Kvadratura kruhu =

Helénistické období a období úpadku

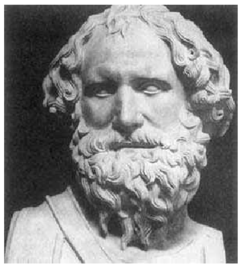
4. Spoj osobu s jeho charakteristikou

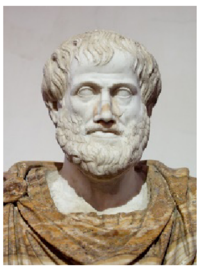
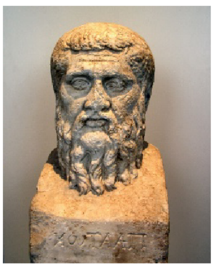
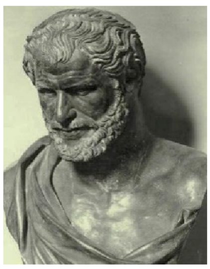
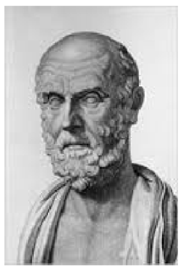
Euklides	Syrakusy, polopravidelné mnohostěny
Archimedes	Základy, konstrukce kružítkem a pravítkem, základy geometrie
Apollonios	přístroj mezolabon na řešení delského problému
Pappos	rovinná křivka konchoida
Nikomédes	matematická sbírka, připomínal skoro zapomenuté geometrické znalosti
Erastothenes	
	Kuželosečky, jeden ze tří nejslavnějších geometr

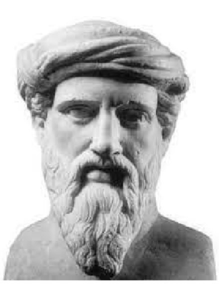
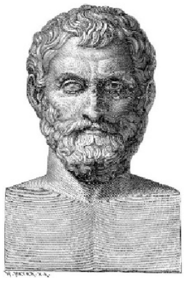
5. Přiřaď k obrázkům jména

Euklides, Pappos, Archimedes, Aristoteles, Apollonios, Pythagoras, Thales, Platon, Hippokrates, Démokritos, Matyáš z Arrasu, Petr Parléř



ŘEŠENÍ

Pracovní List – Historie Geometrie

Počátky geometrie

1. **Doplň slova**

Geometrie je považována za jednu z nejstarších věd. Uvědomění si geometrického tvaru předmětů je nejstarší mentální schopnost lidstva. Se vznikem hospodářství se začaly používat jednotky měr, což byly rozměry různých částí těla – loket, palec, prst, píď. Pro obrábění půdy, zasedí osiva bylo potřeba vypočítat obsah pozemku. Keramika se zdobila geometrickými ornamenty, postavami lidí a zvířat.
Nabídka slov: zvířata, ornamenty, geometrie, mentální, hospodářství, lidstvo, pozemek, obrábění, obsah, tělo

Geometrie ve starověku

V raně otrokářské společnosti (starověký Egypt a Mezopotámie) měla geometrie praktický charakter. Vědecký ráz geometrie dostala až ve Starověkém Řecku.

Starověký Egypt a starověká Mezopotámie

2. **Přiřaď ke každému období jednu definici z dvojce, podle toho, zda to tam patří:**

Starověký Egypt – číslo π stanovili s přesností 0,6 %
neznali Pythagorovu větu
geometrické znalosti využívali ke stavbě pyramid

Starověká Mezopotámie – za číslo π brali číslo 3 (velmi nepřesné)
znali Pythagorovu větu
rozdělili pravoúhlý lichoběžník na dvě části stejného obsahu

Nabídka slov:
číslo π stanovili s přesností 0,6 %/ za číslo π brali číslo 3 (velmi nepřesné)
znali Pythagorovu větu/ neznali Pythagorovu větu
geometrické znalosti využívali ke stavbě pyramid/ rozdělili pravoúhlý lichoběžník na dvě části stejného obsahu

Geometrie ve starověkém Řecku

Geometrii v tomto období můžeme rozlišit na následující etapy:

e) Iónské období (7.-6. století před n. l. až polovina 5. století před n. l.)
f) Athénské období (polovina 5. století před n. l až 300 před n. l.)
g) Helenistické období (300 před n. l. až polovina 2. století n. l.)
h) Období úpadku (polovina 2 století až 6 století)

Iónské a Athénské období

3. Vylušti křížovku:

Tajenka: Které z Platonových těles má tvar vody?

								D	E	D	U	K	T	I	V	N	Í	H	O
					P	R	A	V	Ý										
						P	L	A	T	Ó	N								
A	T	O	M	I	S	T	I	C	K	É									
				T	H	A	L	E	S										
						P	Y	T	H	A	G	O	R	O	V	A			
							H	I	P	P	O	K	R	A	T	E	S		
					I	Ó	N	S	K	É									
					P	E	N	T	A	G	O	N							
							P	Ě	T										
							A	N	T	I	C	K	É						

XII. Základy, jakého systému dává Aristoteles?
XIII. Jaký je úhel s vrcholem na Thaletově kružnici, jehož ramena prochází krajními body průměru?
XIV. Kdo působil v Athénském období?
XV. Demokritos z Abdér je známý pro jaké učení?
XVI. Kdo je zakladatelem Milétské školy?
XVII. Jak se jmenuje věta o pravoúhlém trojúhelníku?
XVIII. Kdo pochází z Chiu a zobecnil Pythagorovu větu na ostroúhlý a tupoúhlý trojúhelník?
XIX. V jakém období působil Demokritos nebo Thales?
XX. Co má ve znaku bratrstvo Pythagorejské školy?
XXI. Kolik mnohostěnů se nazývá Platónská tělesa?
XXII. Trisekce úhlu, kvadratura kruhu, zdvojení krychle patří mezi tři nejslavnější ……………… úlohy.

4. Vysvětli pojmy

Trisekce úhlu = Rozdělit daný úhel na tři vzájemně shodné nepřekrývající úhly.

Zdvojení krychle (delský problém) = Najít délku hrany krychle, jejíž objem se rovná dvojnásobku objemu dané krychle.

Kvadratura kruhu = Sestrojit čtverec, jehož obsah se rovná obsahu daného kruhu.

Helénistické období a období úpadku

5. Spoj osobu s jeho charakteristikou

Euklides	Syrakusy, polopravidelné mnohostěny
Archimedes	Základy, konstrukce kružítkem a pravítkem, základy geometrie
Apollonios	přístroj mezolabon na řešení delského problému
Pappos	rovinná křivka konchoida
Nikomédes	matematická sbírka, připomínal skoro zapomenuté geometrické znalosti
Erastothenes	Kuželosečky, jeden ze tří nejslavnějších geometrů

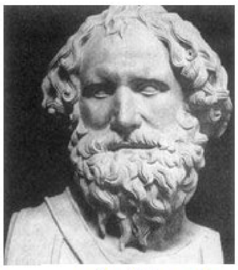
6. Přiřaď k obrázkům jména

Euklides, Pappos, Archimedes, Aristoteles, Apollonios, Pythagoras, Thales, Platon, Hippokrates, Démokritos, Matyáš z Arrasu, Petr Parléř

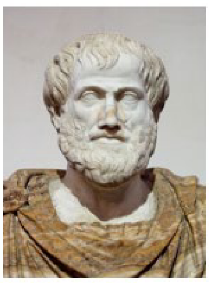

Matyáš z Arrasu

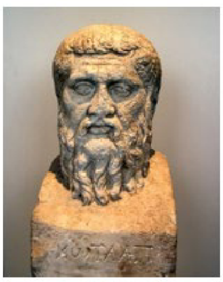

Petr Parléř

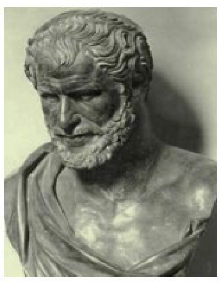

Apollonios Z Pergy

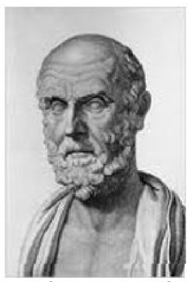

Archimedes

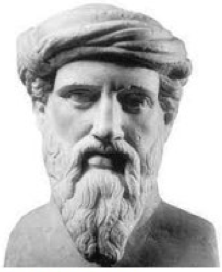

Euklides


Aristoteles

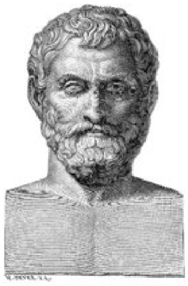

Platón


Démokritos z Abdér


Hippokrates z Chiu



Pythagoras



Thales z Milétu

4.2 Pexeso

Hra pexeso pomůže žákům si zapamatovat, jak jednotlivé osobnosti historie geometrie vypadaly a jaké hlavní poznatky přinesly do vývoje geometrie.

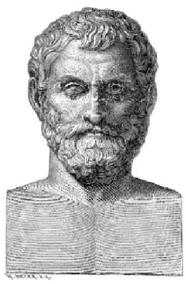
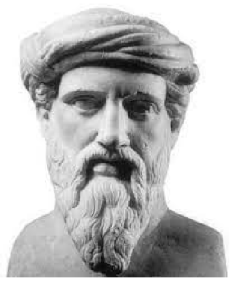
Pomůcky: připravené kartičky

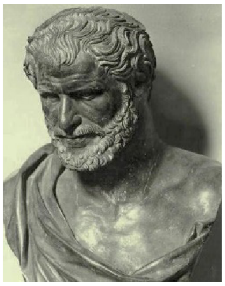
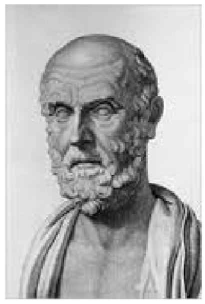
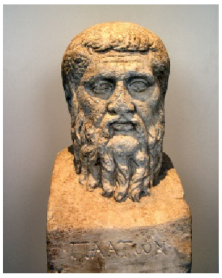
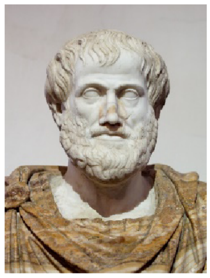
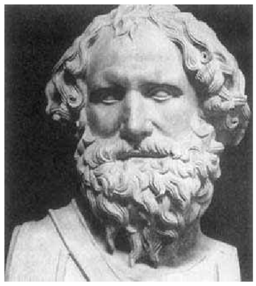
Délka hry: 20 minut

Pravidla hry:

Hra pexeso má stejná pravidla jako klasická hra, jen zde místo obrázků zvířátek budou důležité osobnosti a poznatky z historie geometrie. Žáky rozdělíme do skupin po 2 až 4 žácích. Kartičky položíme bílou stranou nahoru, tak aby nebylo vidět, co na nich je. Hráč, který začíná, otáčí vždy dvě kartičky. Pokud patří k sobě, získává dvojici a hraje ještě jednou. Pokud k sobě kartičky nepatří, hraje další hráč a opět otáčí dvě kartičky. Hraje se, dokud nejsou všechny karty rozebrány. Vyhrává ten s nejvíce dvojicemi.

Karty (vystřihnout a ideálně i zalaminovat):

Byl to zakladatel Milétské školy. Dokázal změřit výšku egyptských pyramid a změřit vzdálenost lodě na moři od pobřeží. Vyslovil a dokázal **Thaletovu větu.**	 Thales z Milétu	Zakladatel pythagorejské školy, která měla ve znaku pentagon. Zobecnil a vytvořil důkaz věty po něm pojmenované – **Pythagorovi věty.**	 Pythagoras

Byl známý pro své **atomistické učení**. Zjišťoval objem jehlanu, kužele. Provedl řezy, které měly tloušťku jednoho atomu, rovinami rovnoběžnými s podstavou.	 Démokritos z Abdér	Byl to největší geometr 5. století před n. l. Napsal dílo Základy, které se nedochovalo. Zobecnil Pythagorovu větu, řešil delskou úlohu a objevil měsíčky (křivočaré útvary).	 Hippokrates z Chiu
Athénský rodák, který založil školu Akademie. Podle něj je pojmenováno pět mnohostěnů – **Platónská tělesa**.	 Platón	Největší myslitel starověku, který dává základy deduktivního systému ve vědě a objasňuje podstatu **axiomů, postulátů, definic**, hypotéz věd a důkazů.	 Aristoteles
Jeden ze tří velkých geometrů, z nejjasnějšího trojhvězdí antické vědecké oblohy. Napsal dílo Základy. Konstrukce se podle něj provádí jen za použití pravítka a kružítka.	 Euklides	Jeden ze tří velkých geometrů, z nejjasnějšího trojhvězdí antické vědecké oblohy. Objevil **polopravidelné mnohostěny**.	 Archimedes
Jeden ze tří velkých geometrů, z nejjasnějšího trojhvězdí antické vědecké oblohy. Zabýval se kuželosečkami, což je i jeho nejvýznamnější dílo.	 Apollonios z Pergy	Pochází z Alexandrie. Napsal dílo Matematická sbírka, kde připomíná už skoro zapomenuté matematické znalosti.	Pappos z Alexandrie

Už znali Pythagorovu větu. Za číslo π brali číslo 3, což je velmi nepřesné. Uměli vypočítat obsahy a objemy těles a útvarů.	 Starověká Mezopotámie	V geometrii se zabývali výpočtem obsahů útvarů a stavbou pyramid. Číslo π stanovili velmi přesně, mnohem lépe než v Mezopotámii.	 Starověký Egypt
Francouzský středověký architekt, kterého pozval do Prahy Karel IV., aby postavil chrám sv. Víta v Praze.	 Matyáš z Arrasu	Německý středověký architekt, který po Matyášovi z Arrasu pokračoval ve stavbě chrámu sv. Víta v Praze.	 Petr Parléř
Jedna ze tří antických úloh, jejichž řešení se odhalilo až v 18-19. století. Najít délku hrany krychle, jejíž objem se rovná dvojnásobku objemu dané krychle.	Zdvojení krychle (Delský problém)	Jedna ze tří antických úloh, jejichž řešení se odhalilo až v 18-19. století. Sestrojit čtverec, jehož obsah se rovná obsahu daného kruhu.	Kvadratura kruhu
Jedna ze tří antických úloh, jejichž řešení se odhalilo až v 18-19. století. Rozdělit daný úhel na tři vzájemně shodné nepřekrývající úhly.	Trisekce úhlu	Kvůli potřebě stavby obydlí se začaly počítat obsahy ploch. Vytváří se jednotky měr – loket, palec, prst. Na keramice se objevují geometrické tvary.	Počátky geometrie

4.3 Kdo jsem

Hra, Kdo jsem, by měla žáky procvičit ve znalosti důležitých osobností z historie geometrie a naučit je jednotlivé osobnosti od sebe rozeznat a zapamatovat si jejich nejdůležitější přínosy v geometrii.

Pomůcky: papír, tužka, izolepa

Délka hry: 20 minut

Pravidla hry:

Hru hrajeme ve skupinách maximálně po 10 hráčích. Každý hráč napíše na lísteček jedno jméno osobnosti z historie geometrie. Tento lísteček se jménem pak přilepí na čelo hráči sedícímu vedle něj po levé straně. Jména na lístečcích se mohou opakovat. Úkolem všech hráčů je poznat, kdo jsou (co mají napsáno na čele). Určíme hráče, který začíná. Ten se ptá na otázky, na které se dá odpovědět pouze ano nebo ne. Ostatní hráči mu na otázky odpovídají. Hráč se ptá tak dlouho, dokud se na jeho otázku neodpoví ne, potom následuje hráč vedle něj. Vyhrává ten, kdo dříve uhodne, kdo je.

Příklad otázek: Jsem architekt? Založil jsem školu? Jsem jeden ze tří největších geometrů helenistického období?

4.4. Tabu

Hra Tabu pomáhá žákům si zapamatovat osoby z historie geometrie hlavně ve starověku a vysvětlit pojmy, které se v historii geometrie vyskytují. Hra je inspirována hrou Tabu, která je v prodeji na českém trhu. Hra se může hrát buď v malých skupinách nebo s celou třídou.

Pomůcky: připravené kartičky

Délka hry: 30 minut

Pravidla hry:

Žáky rozdělíme do dvou skupin. Každá skupina vybere jednoho žáka, který jde dopředu. Vybereme, která skupina bude začínat a stanovíme časový limit (jedna minuta). Vybraný žák ze skupiny dostane kartičky, na kterých jsou slova, která musí ostatním žákům ze své skupiny vysvětlit. Skupina vysvětlujícího žáka se snaží uhodnout, co má na kartičce. Nesmí ale přitom používat slova, která jsou „tabu“. Jsou vždy tři a jsou uvedeny na kartičce. Nepoužívají se ani slova příbuzná ke slovům zakázaným. Když hráč vysvětlí jedno slovo (a jeho tým ho uhodne), vezme si další kartičku a vysvětluje slova další, než uběhne časový limit. Potom následuje ve vysvětlování druhý tým. Skupina, která nehádá, vidí, co vysvětlující hráč má na kartičce a kontroluje, zda nepoužil některé z „tabu“ slov. Může se hrát na předem stanovený počet kol, nebo dokud se nespotřebují všechny kartičky.

Varianty hry:

Můžeme hru ztížit. Po každém kole (po vysvětlování pojmů jedním žákem) musí jeden hádající hráč ze skupiny vysvětlit pojmy, které uhodli. Pokud pojem nedokáže vysvětlit, nedostane skupina bod za kartičku a musí jí vrátit. Ve vysvětlování se hráči musí střídat. Tímto si žáci ještě více procvičí a zapamatují slova, která se objevují ve hře.

Karty, které budeme při hře používat. (vystřihnout a zalaminovat):

Thales Milét kružnice pravý	**Pythagoras** trojúhelník pravý úhel	**Platón** tělesa mnohostěny krychle	**Aristoteles** definice axiom postulát
Euklides pravítko kružítko Základy	**Archimédes** náhrobek polo pravidelný Syrakusy	**Apollonios** kuželosečky elipsa hyperbola	**Matyáš z Arrasu** chrám Vít Praha
Petr Parléř chrám Vít Praha	**Pythagorova věta** pravoúhlý trojúhelník odvěsna $c^2 = a^2 + b^2$	**Thaletova kružnice** pravý úhel přímka	**čtyřúhelník** čtyři strany úsečky
objem těleso kubík litr	**shodnost trojúhelníků** shodný věta o shodnosti trojúhelník	**parabola** graf kuželosečka kvadratická funkce	**elipsa** kuželosečka ovál vrchol
povrch tělesa kolem těleso plášť	**opsaná kružnice** trojúhelník střed protínat	**kvádr** obdélník těleso objem	**koule** těleso kulatý kružnice

úhel rameno vrchol polopřímka	**kvadratura kruhu** problém čtverec kruh	**zdvojení krychle** problém objem krychle	**trisekce úhlu** vrchol problém úhel
pentagon útvar škola pět	**loket** tělo ruka délka	**poloměr** obvod průměr kružnice	**číslo π** 3,14 kružnice obsah
lichoběžník rovnoběžné čtyři strany	**obsah** plocha útvar strana	**obvod** strana čtverec útvar	**geometrie** věda matematika rýsovat

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo shrnout historii geometrie a vytvořit výukové materiály do hodin matematiky, aby se žáci o vývoji geometrie něco dozvěděli a aby si něco zapamatovali si. Vycházela jsem z několika zdrojů, které jsou uvedeny na seznamu použité literatury. Historie geometrie je velmi obsáhlé téma a já jsem si z ní vybrala jen něco málo, konkrétně geometrii ve starověku. Teoretická část práce obsahuje informace o vývoji geometrie, hlavně ve starověku, které jsou pak využity v praktické části bakalářské práce.

Stěžejní část mé bakalářské práce je tedy čtvrtá kapitola, kde jsou konkrétní aktivity a hry na téma historie geometrie.

V průběhu psaní této práce jsem se zdokonalila v práci s programem Geogebra.

Literatura

[1] Ján Čižmár, Dejiny Matematiky – od najstarších čias po súčasnosť, Bratislava 2020
[2] Arnošt Kolman, Dějiny matematiky ve starověku, Praha 1968
[3] Adolf P. Juškevič, Dějiny matematiky ve středověku, Praha 1977
[4] Heiko Etzold, Ines Petzschner, Nápadník aktivit a her do hodin matematiky pro 2. stupeň ZŠ, SŠ, a gymnázií, Brno 2013

Zdroje obrázků

[5] https://cs.wikipedia.org/wiki/Thal%C3%A9s_z_Mil%C3%A9tu
[6] https://matematika-jinak.webnode.cz/pythagoras/
[7] https://cs.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9mokritos
[8] https://cs.wikipedia.org/wiki/Hippokrates_z_Chiu
[9] https://cs.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3n
[10] https://cs.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3nsk%C3%A9_t%C4%9Bleso
[11] https://cs.wikipedia.org/wiki/Aristotel%C3%A9s
[12] https://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleid%C3%A9s
[13] https://cs.wikipedia.org/wiki/Maty%C3%A1%C5%A1_z_Arrasu
[14] https://cs.wikipedia.org/wiki/Petr_Parl%C3%A9%C5%99
[15] https://cs.wikipedia.org/wiki/Mezopot%C3%A1mie
[16] https://cs.wikipedia.org/wiki/Starov%C4%9Bk%C3%BD_Egypt