Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Vlastnosti kružnice

Vypracoval: Veronika Šulová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Vlastnosti kružnice jsem vypracoval(a) samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ……………………………

Anotace

Bakalářská práce se zabývá několika vybranými vlastnostmi kružnice. V první části jsou shrnuty vlastnosti kružnice probírané na základních školách. Druhá část obsahuje některé vlastnosti kružnice, které jsou obsaženy ve středoškolském učivu. Třetí část bakalářské práce je věnována pár vybraným vlastnostem kružnice, které jsou zde popsány a ke každé vlastnosti jsou uvedeny jednoduché řešené příklady.

Annotation

The bachelor thesis deals with a number of selected properties of a circle. The first section summarizes the properties of the circle discussed in elementary schools. The second part contains some properties of circles that are contained in the secondary curriculum. The third part of the thesis is devoted to a few selected properties of the circle, which are described and each are given a simple solution examples.

Tyto řádky bych chtěla věnovat upřímnému poděkování vedoucímu své bakalářské práce panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za jeho odborné vedení, cenné rady, nápady a trpělivost.

Obsah

1. Úvod

Toto téma bakalářské práce jsem si vybrala proto, že kružnice je jeden z nejzajímavějších geometrických útvarů. Vlastností kružnic je mnoho, ale v této práci jsou uvedeny jen ty nejznámější a nejvyužívanější z nich.

Práce začíná shrnutím vlastností kružnice, které se vyučují na druhém stupni základních škol. Všechny jsou zde popsány a doplněny názornými obrázky. Převážně jsou zde jednoduše definovány prvky týkající se kružnic. Jako je například vysvětlení poloměru a průměru kružnice, vztahy kružnice a přímky a vzájemný vztah dvou kružnic. Toto téma jsem zpracovávala pouze z učebnic, podle kterých se v současné době vyučuje na základních školách.

Následuje výčet několika témat týkajících se kružnice, které jsou probírány na středních školách. Témata jsou zde opět jednoduše popsány a doplněny obrázky. Zde jsou odborněji definovány prvky kružnice a vztahy kružnice k ostatním geometrickým prvkům. Také je zde uvedeno několik vlastností kružnice na středoškolské úrovni. Na toto téma jsem čerpala z učebnic pro gymnázia.

Poslední část zahrnuje několik známých vlastností kružnic, které jsou zde podrobněji vysvětleny. Každá vlastnost je doplněna o pár jednoduchých, ale zajímavých řešených příkladů.

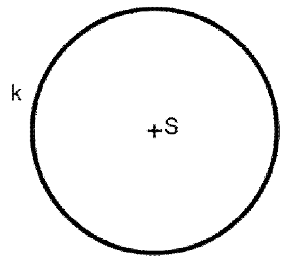
2. Vlastnosti kružnice ve výuce na základní škole

2.1 Kružnice a kruh

Kružnice

Kružnici značíme k a zapisujeme $k(S; r)$, kde S je střed kružnice a r je poloměr kružnice, při tom $r > 0$.

Kružnici $k(S; r)$ tvoří všechny takové body A, pro které platí $|AS| = r$. (1)

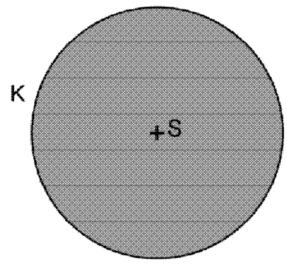


Obrázek 1

Kruh

Kruh značíme K a zapisujeme $K(S; r)$, kde S je střed kruhu a r je poloměr kruhu, při tom $r > 0$.

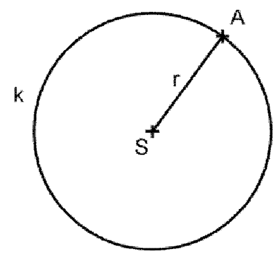
Kruh $K(S; r)$ tvoří všechny takové body A, pro které platí $|AS| \leq r$. (1)



Obrázek 2

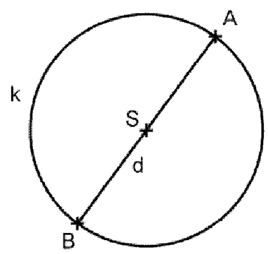
Průměr a poloměr kružnice

Poloměr kružnice značíme r. Je to úsečka AS, kde A je libovolný bod kružnice a S je střed kružnice.



Obrázek 3

Průměr kružnice značíme d. Je to úsečka AB, kde A,B jsou dva různé body kružnice a zároveň $S \in AB$.

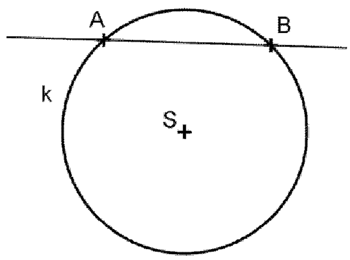


Obrázek 4

2.2 Kružnice a přímka

Sečna kružnice

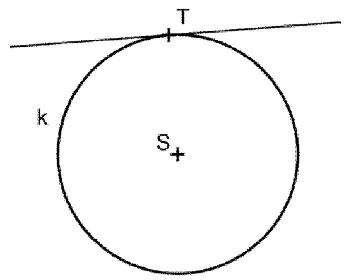
Kružnice a přímka mají dva společné body.



Obrázek 5

Tečna kružnice

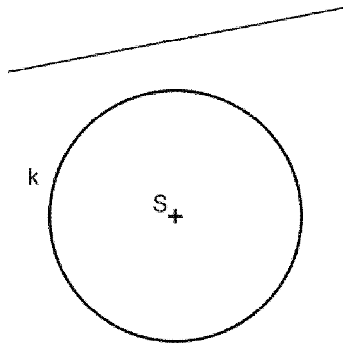
Kružnice a přímka mají jeden společný body a to je tzv. bod dotyku, který značíme T.



Obrázek 6

Vnější přímka kružnice

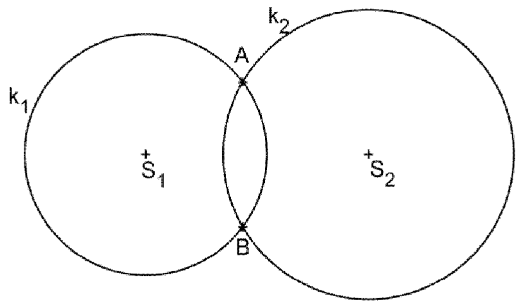
Kružnice a přímka nemají žádný společný bod.



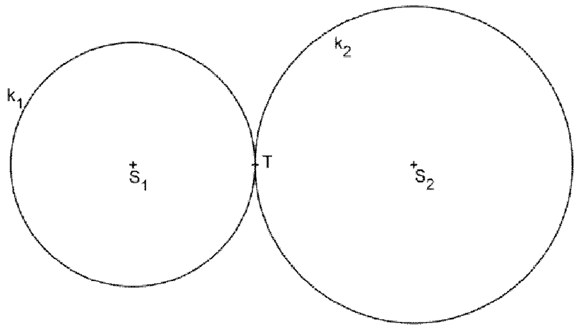
Obrázek 7

2.3 Dvě kružnice

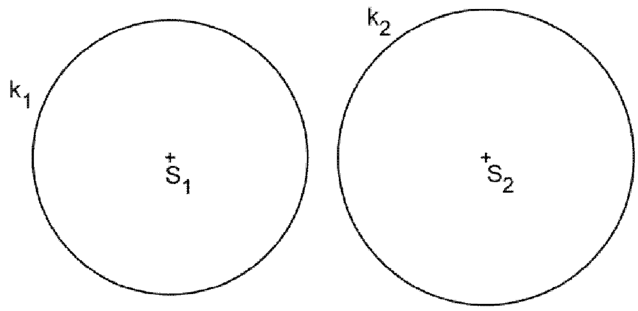
Dvě kružnice, které nemají společný střed, mohou mít společné právě dva body, právě jeden bod, nebo nemají žádný společný bod.



Obrázek 8

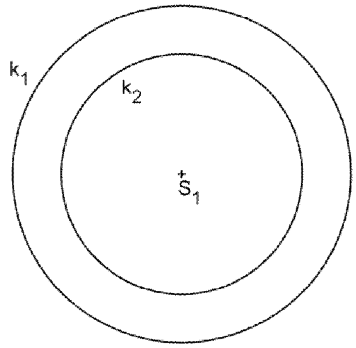


Obrázek 9

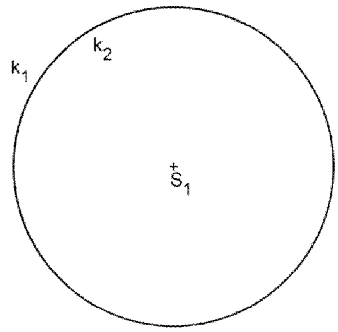


Obrázek 10

Dvě kružnice, které mají společný střed, se nazývají soustředné. Soustředné kružnice nemají buď žádný společný bod, nebo mají nekonečně mnoho společných bodů, v takovém případě říkáme, že kružnice jsou totožné.

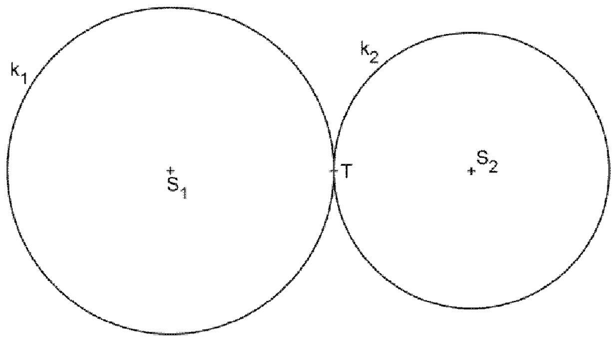


Obrázek 11

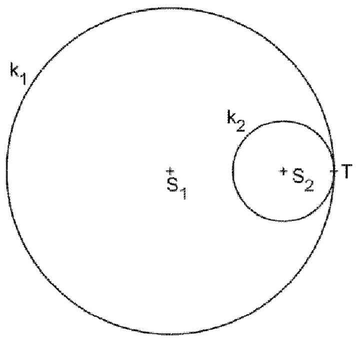


Obrázek 12

Pokud kružnice mají jeden společný bod, nazýváme takový bod bodem dotyku a značíme T. Jestliže $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, kde S_1,S_2 jsou středy kružnic a r_1,r_2 jsou poloměry kružnic, pak mluvíme o vnějším bodu dotyku a jestliže $|S_1S_2| = r_1 - r_2$, kde S_1,S_2 jsou středy kružnic a r_1,r_2 jsou poloměry kružnic, pak mluvíme o vnitřním bodu dotyku.



Obrázek 13

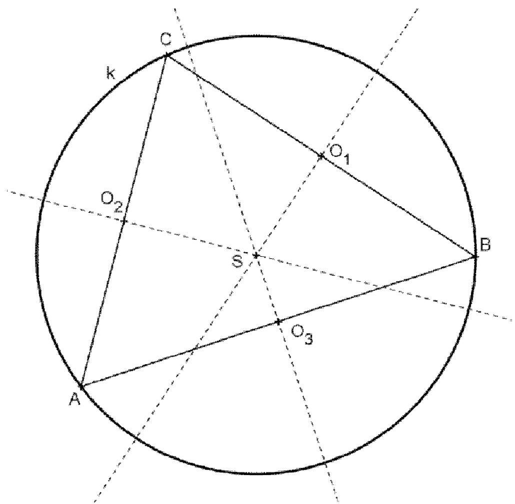


Obrázek 14

2.4 Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

Kružnice opsaná trojúhelníku

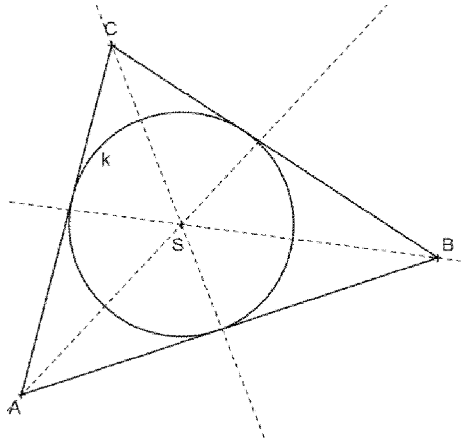
Osy všech stran trojúhelníku se protnou v jednom bodě. Je to střed kružnice opsané trojúhelníku. (2)



Obrázek 15

Kružnice vepsaná trojúhelníku

Osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě. Je to střed kružnice vepsané trojúhelníku. (2)



Obrázek 16

2.5 Koule

Koule je množina všech bodů v *prostoru*, které mají od jejího středu S vzdálenost menší nebo rovnou poloměru r. (3)

Povrch koule

$S = 4\pi r^2$, kde r je poloměr koule

Objem koule

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, kde r je poloměr koule

3. Vlastnosti kružnice ve výuce na střední škole

3.1 Kružnice a kruh

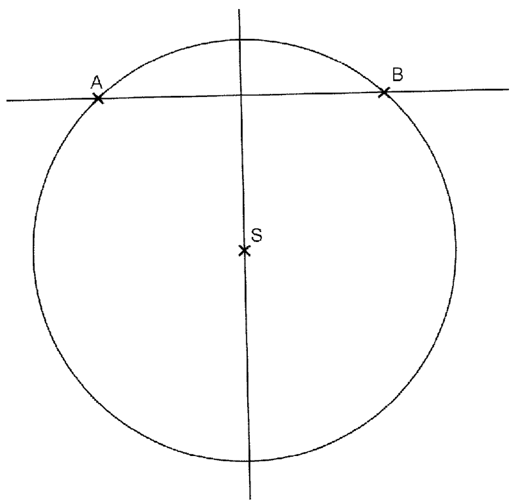
Kružnice je definována charakteristickou vlastností svých bodů:

Je dán bod S a kladné číslo r. Kružnice $k(S;r)$ je množina všech bodů (roviny), které mají od bodu S vzdálenost r. (4)

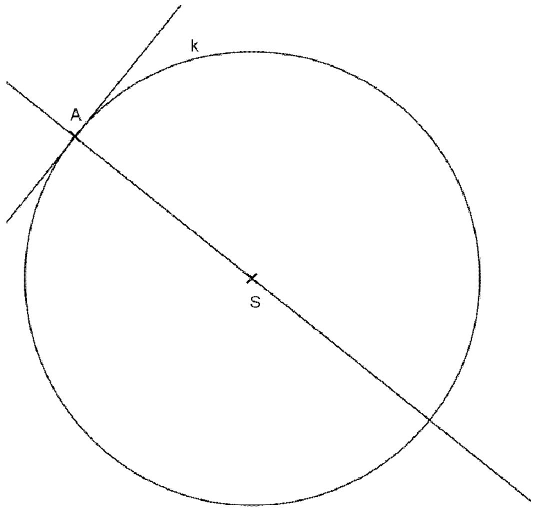
Množina všech bodů (roviny), které mají od bodu S vzdálenost menší nebo rovnou r, se nazývá kruh $K(S;r)$. (4)

Body, jejichž vzdálenost od S je menší než r se nazývají vnitřní oblast (vnitřek) kruhu. Body, jejichž vzdálenost od S je větší než r se nazývají vnější oblast (vnějšek) kruhu.

Pata kolmice vedené ze středu kružnice na sečnu AB je středem tětivy AB. Tečna kružnice je kolmá k poloměru, který spojuje bod dotyku se středem kružnice. (4)



Obrázek 17



Obrázek 18

Dvě kružnice

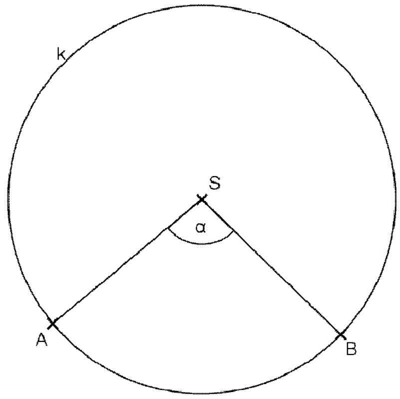
Soustředné kružnice jsou kružnice, které mají společný střed. Soustředné kružnice nemají buď žádný společný bod, nebo mají nekonečně mnoho společných bodů (pak se nazývají totožné).

Nesoustředné kružnice jsou kružnice, které mají různé středy. Nesoustředné kružnice mají nejvýše dva společné body.

3.2 Úhly příslušné ke kružnici

Středový úhel

Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k a ramena procházející krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá **středový úhel příslušný k** tomu **oblouku** AB, který v tomto úhlu leží. (4)

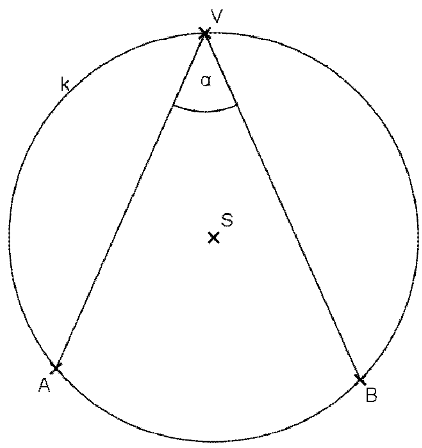


Obrázek 19

Středový úhel kružnice k, který je příslušný k menšímu oblouku AB se nazývá **konvexní úhel**. Středový úhel kružnice k, který je příslušný k většímu oblouku AB se nazývá **nekonvexní úhel**. Středový úhel kružnice k, který je příslušný k půlkružnici se nazývá **přímý úhel**.

Obvodový úhel

Každý úhel AVB, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k $(V \neq A, V \neq B)$, se nazývá **obvodový úhel příslušný k** tomu **oblouku** AB, který v tomto úhlu leží. (4)

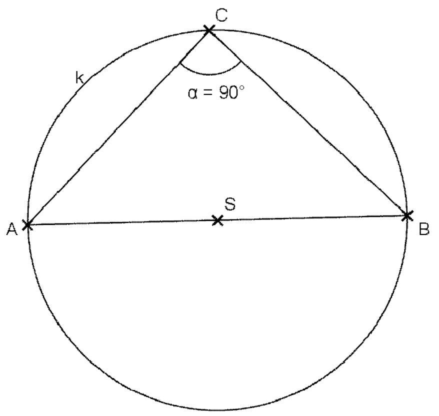


Obrázek 20

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku. (4)

Thaletova věta

Všechny úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.



Obrázek 21

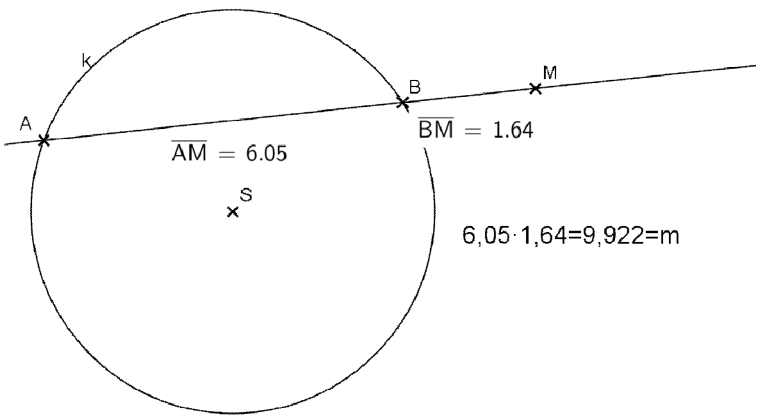
Úsekový úhel příslušný k danému oblouku je shodný s obvodovými úhly příslušnými k témuž oblouku.

3.3 Mocnost bodu ke kružnici

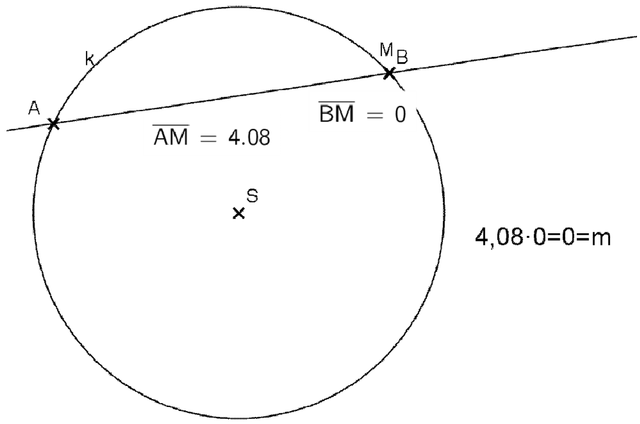
Libovolnému bodu M roviny lze přiřadit reálné číslo m, pro něž platí:

1. $|m| = |MA| \cdot |MB|$, kde A, B jsou průsečíky dané kružnice k s libovolnou sečnou procházející bodem M.
2. $m > 0$ pro body M uvnitř kružnice; $m = 0$ pro body $M \in k$; $m < 0$ pro body M uvnitř kružnice.

Číslo m se nazývá mocnost bodu M ke kružnici k. (4)

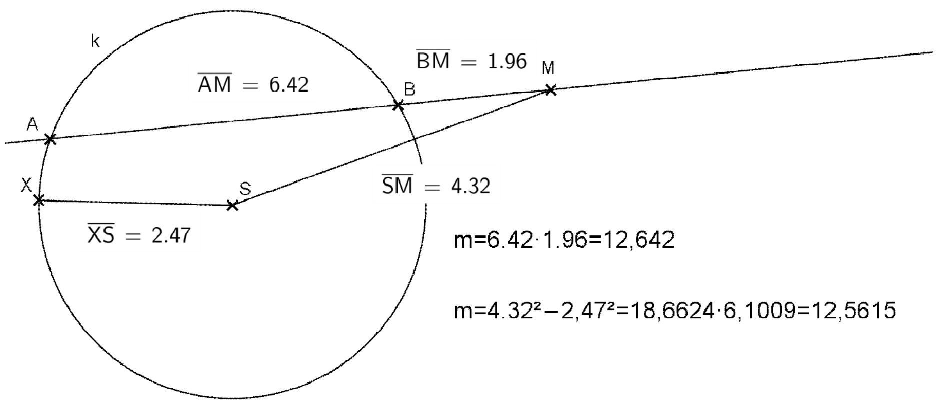


Obrázek 22



Obrázek 23

Je-li $v(v \geq 0)$ vzdálenost bodu M od středu S kružnice k, pak pro mocnost m platí $m = v^2 - r^2$. (4)



Obrázek 24

3.4 Stejnolehlost kružnic

Obrazem kružnice $k(O; r)$ ve stejnolehlosti $H(S, \varkappa)$ je kružnice $k'(O'; |\varkappa| \cdot r)$; přitom bod O' je obrazem bodu O. (4)

Jsou-li dány dvě kružnice s různými poloměry, pak existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí jednu kružnici na druhou. (4)

Společná tečna dvou kružnic (pokud existuje) je buď rovnoběžná se spojnicí středů kružnic, nebo prochází středem některé stejnolehlosti, zobrazující jednu kružnici na druhou. (4)

4. Vybraná témata

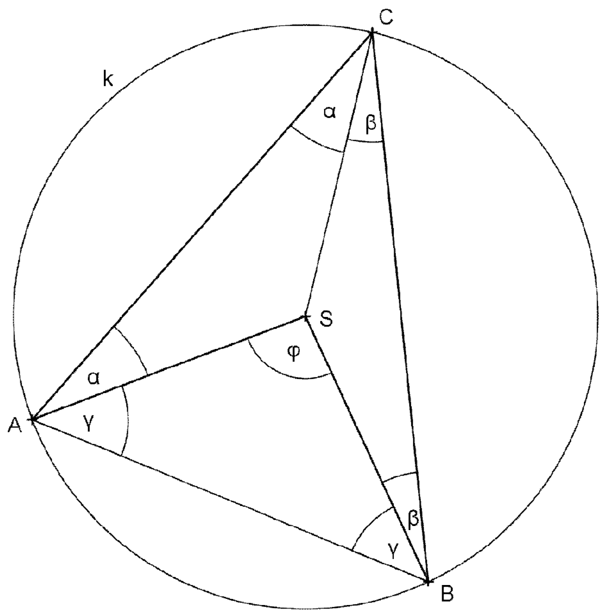
V této kapitole jsou uvedeny některé známé vlastnosti kružnice, které jsou zde vysvětleny a doplněny několika řešenými příklady.

4.1 Úhly příslušné ke kružnici

Věta o obvodovém a středovém úhlu

Nechť body A, B, C leží na kružnici k se středem v bodě S. Pak platí, že velikost úhlu $\sphericalangle ASB$ je dvojnásobkem velikosti úhlu $\sphericalangle ACB$.

Důkaz



Obrázek 25

Jelikož součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°, platí:

$$\boldsymbol{2\gamma + \varphi = 180°}$$

$$\boldsymbol{2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°.}$$

Z těchto dvou rovnic plyna, že:

$$\boldsymbol{2\gamma + \varphi = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma}$$

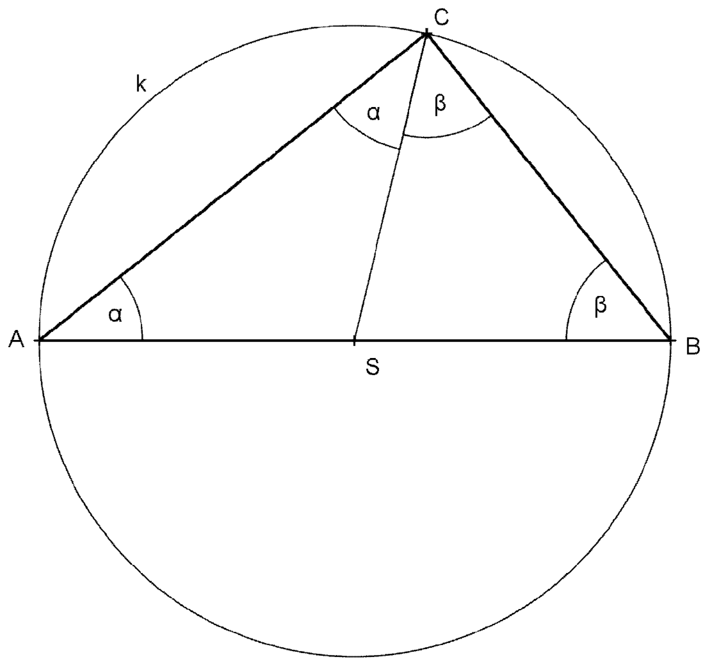
$$\boldsymbol{\varphi = 2\alpha + 2\beta}$$

$$\boldsymbol{\varphi = 2(\alpha + \beta).}$$

Thaletova věta

(Speciální případ věty o obvodové a středovém úhlu) Všechny obvodové úhly kružnice sestrojené nad jejím průměrem jsou pravé.

Důkaz:



Obrázek 26

Jelikož součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°, platí:

$\boldsymbol{2\alpha + 2\beta = 180°}$

$\boldsymbol{2(\alpha + \beta) = 180°}$

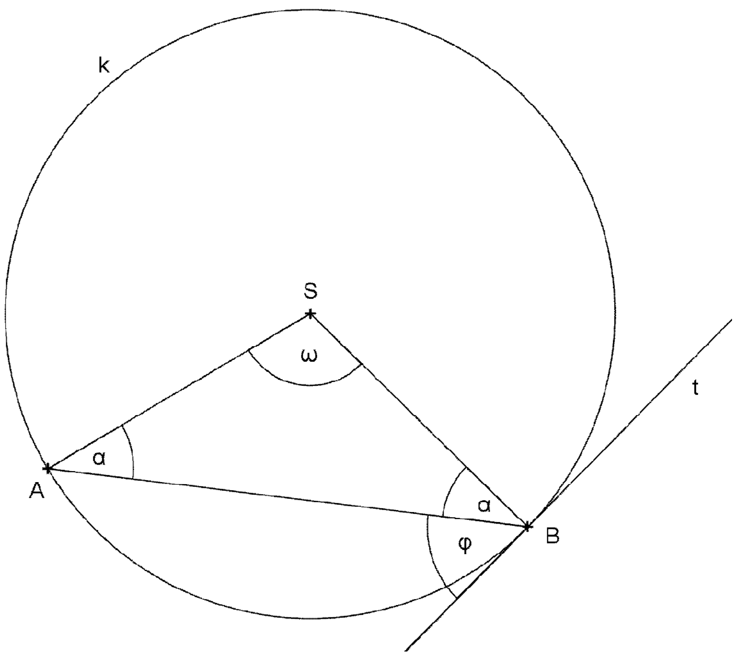
$\boldsymbol{\alpha + \beta = 90°.}$

Úsekový úhel kružnice

Úsekový úhel kružnice je úhel, který svírá libovolná sečna AB kružnice k s tečnou t kružnice k, jejímž bodem dotyku je jeden z průsečíků sečny AB s kružnicí k.

Velikost úsekového úhlu kružnice k příslušnému k sečně AB, kde A, B jsou průsečíky kružnice k a sečny AB, je rovna polovině velikosti středového úhlu kružnice k příslušnému k oblouku AB.

Důkaz:



Obrázek 27

Jelikož součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°, platí:

$$\boldsymbol{2\alpha + \omega = 180°.}$$

Zároveň je zřejmé, že:

$$\boldsymbol{\alpha + \varphi = 90°.}$$

Z těchto dvou rovnic plyne, že:

$$\boldsymbol{2(\alpha + \varphi) = 2\alpha + \omega}$$

$$\boldsymbol{2\alpha + 2\varphi = 2\alpha + \omega}$$

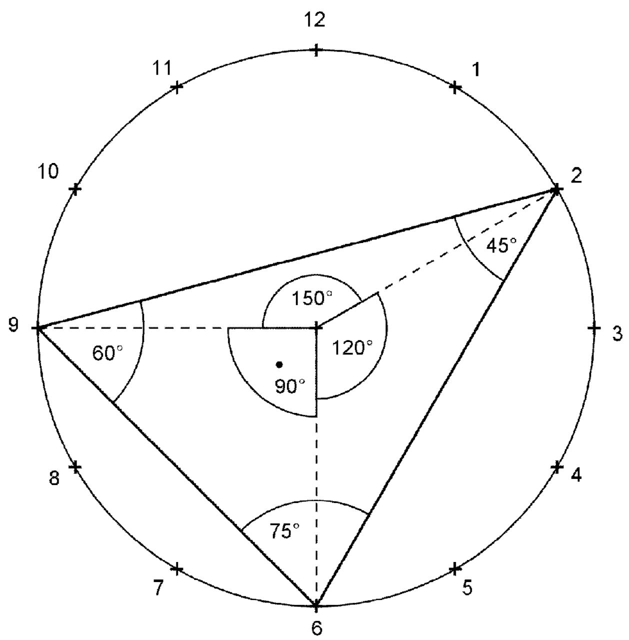
$$\boldsymbol{2\varphi = \omega.}$$

Příklad

Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, jehož vrcholy jsou na ciferníku hodino v bodech 2, 6, 9.

Řešení:

Je zřejmé, že velikost úhlu mezi sousedními hodinami je 30°. Z toho snadno vypočítáme velikosti úhlů mezi body 2 a 6, 6 a 9, a 9 a 2. Tyto úhly jsou středovými úhly kružnice a vnitřní úhly trojúhelníku jsou k těmto středovým úhlům úhly obvodové. Mají tedy poloviční velikost.



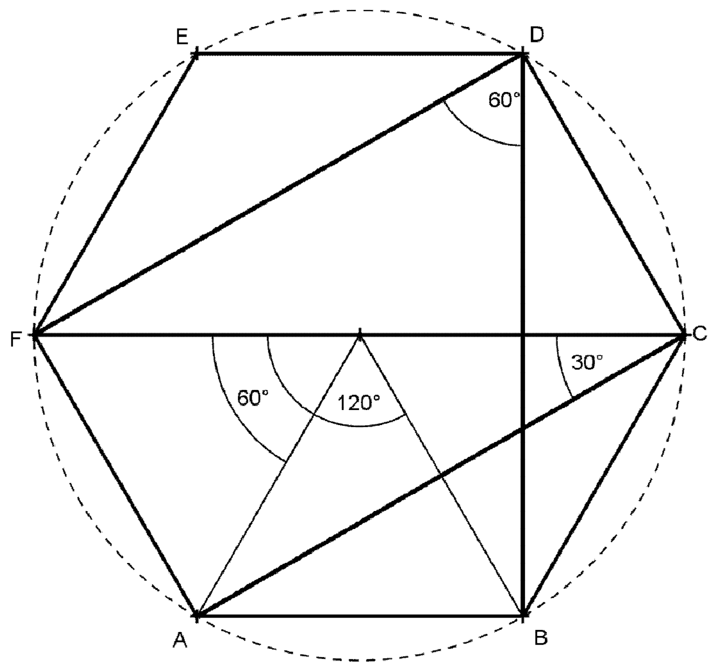
Obrázek 28

Příklad 2

V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ vypočítejte velikosti vnitřních úhlů BDF, ACF.

Řešení:

Vidíme, že vnitřní úhel mezi sousedními vrcholy je vždy 60°. Díky tomu vypočteme velikosti středových úhlu kružnice opsané šestiúhelníku a z nich vypočteme velikost obvodových úhlů, což jsou vnitřní úhly šestiúhelníku.



Obrázek 29

4.2 Stejnolehlost

Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí $(X'XS) = \kappa$, kde $\kappa \neq 0{,}1$ je pevně zvolené reálně číslo, se nazývá **stejnolehlost (homotetie)**. Bod S se nazývá **střed stejnolehlosti**, číslo κ **koeficient stejnolehlosti**. Značíme $\mathrm{H}(S,\kappa)$ (popř. $\mathrm{H}_{S,\kappa}$). (5)

Stejnolehlost dvou kružnic

Věta:

Obrazem kružnice $k(S,r)$ ve stejnolehlosti $\mathrm{H}(O,\kappa)$ je kružnice $K'(S',|\kappa|r)$.

Důkaz:

Kružnici $k(S,r)$ můžeme popsat jako množinu $k = \{X \in \mathbb{E}_2; |SX| = r\}$. Množina k se ve stejnolehlosti $\mathrm{H}(O,\kappa)$ zobrazí na množinu k', pro kterou platí $k' = \{X' \in \mathbb{E}_2; |S'X'| = |\kappa| \cdot |SX| = |\kappa|r = r'\}$. Vidíme, že k' je množina všech bodů X' v rovině, pro které platí, že mají od bodu S' stejnou vzdálenost. Z toho plyne, že se jedná o kružnici.

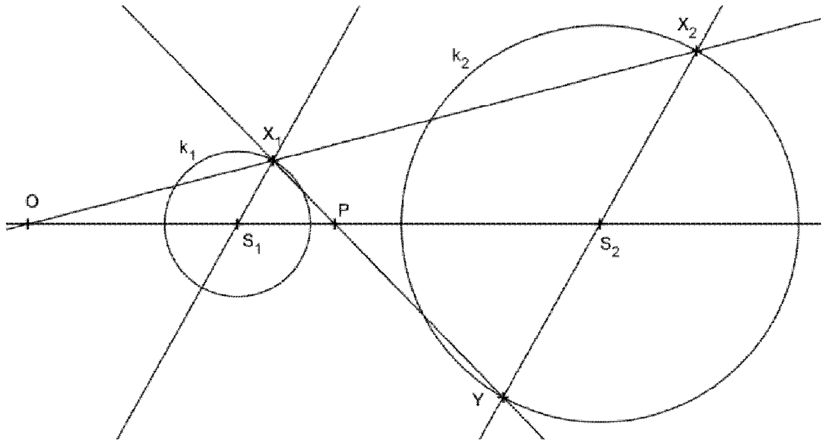
Věta:

Každé dvě kružnice jsou stejnolehlé.

Uvažme kružnice $k_1(S_1,r_1)$ a $k_2(S_2,r_2)$. O je střed stejnolehlosti a κ koeficient stejnolehlosti. Z předchozí věty plyne, že $r_2 = |\kappa| \cdot r_1$, tedy $\kappa = \frac{r_2}{r_1}$ a $\kappa = -\frac{r_2}{r_1}$. Střed stejnolehlosti O leží na $\leftrightarrow S_1S_2$ a z definice stejnolehlosti plyne, že pro $\kappa > 0$ neleží bod O mezi body S_1S_2 a pro $\kappa < 0$ leží bod O mezi body S_1S_2.

1.

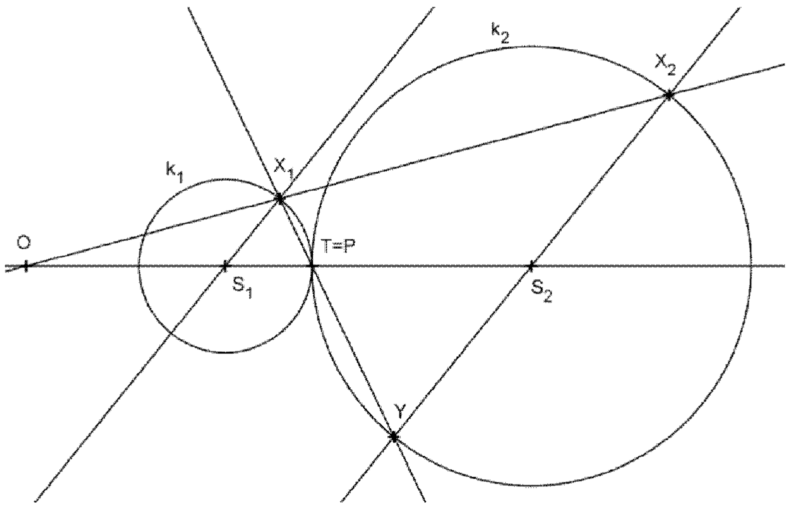
$S_1 \neq S_2$ a $r_1 \neq r_2$; kružnice ležící vně sebe



Obrázek 30

Pro dvě kružnice o různých poloměrech ležících vně sebe existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazují jednu na druhou $\mathrm{H}_1(O,\kappa)$ a $\mathrm{H}_2(P,\kappa)$.

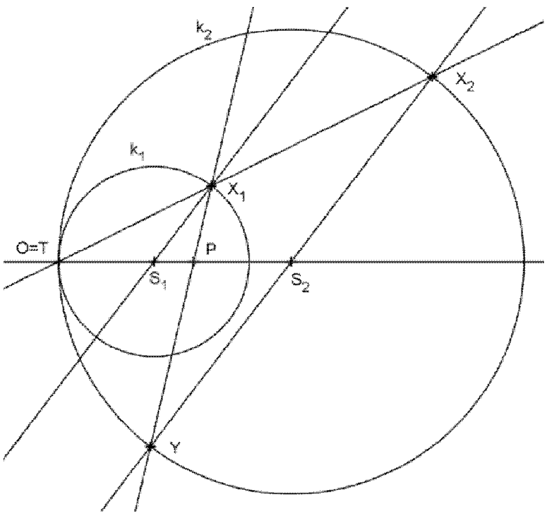
$S_1 \neq S_2$ a $r_1 \neq r_2$; kružnice se navzájem dotýkají; vnější dotyk



Obrázek 31

Pro dvě kružnice s různými poloměry, které mají společný vnější bod dotyku, existují dvě stejnolehlosti, které zobrazují jednu kružnici na druhou $\mathrm{H}_1(O,\kappa)$ a $\mathrm{H}_2(P,\kappa)$. Přičemž platí, že P splývá s bodem dotyku T kružnic.

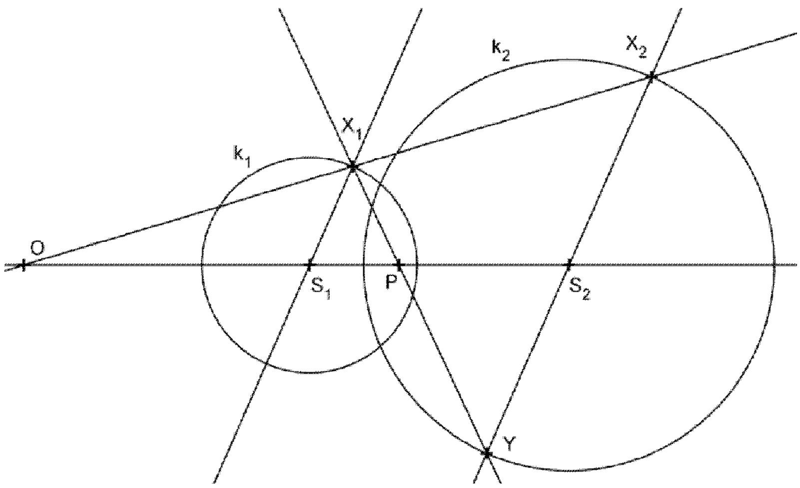
$S_1 \neq S_2$ a $r_1 \neq r_2$; kružnice se navzájem dotýkají; vnitřní dotyk



Obrázek 32

Pro dvě kružnice s různými poloměry, které mají společný vnitřní bod dotyku, existují dvě stejnolehlosti, které zobrazují jednu kružnici na druhou $\mathrm{H}_1(O, \kappa)$ a $\mathrm{H}_2(P, \kappa)$. Přičemž platí, že O splývá s bodem dotyku T.

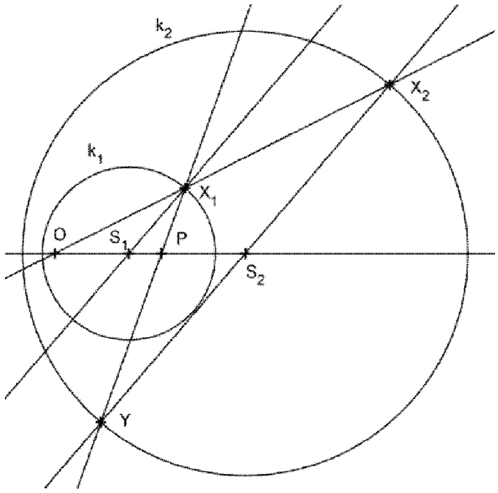
$S_1 \neq S_2$ a $r_1 \neq r_2$; kružnice se protínají



Obrázek 33

Pro dvě kružnice o různých poloměrech, které se navzájem protínají, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazují jednu na druhou $\mathrm{H}_1(O, \kappa)$ a $\mathrm{H}_2(P, \kappa)$.

$S_1 \neq S_2$ a $r_1 \neq r_2$; jedna kružnice leží uvnitř druhé

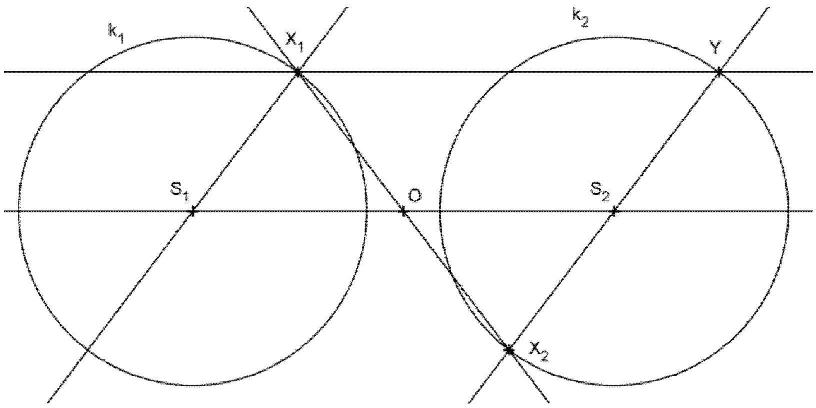


Obrázek 34

Pro dvě kružnice o různých poloměrech ležících vně existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazují jednu na druhou $\mathrm{H}_1(O, \kappa)$ a $\mathrm{H}_2(P, \kappa)$.

2.

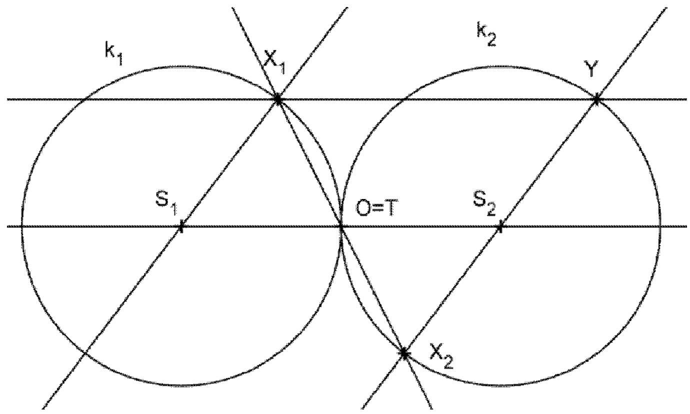
$S_1 \neq S_2$ a $r_1 = r_2$; kružnice ležící vně sebe



Obrázek 35

Pro dvě kružnice se stejnými poloměry, které leží vně sebe, existuje právě jedna stejnolehlost $\mathrm{H}(O, \kappa)$, která zobrazuje jednu kružnici na druhou.

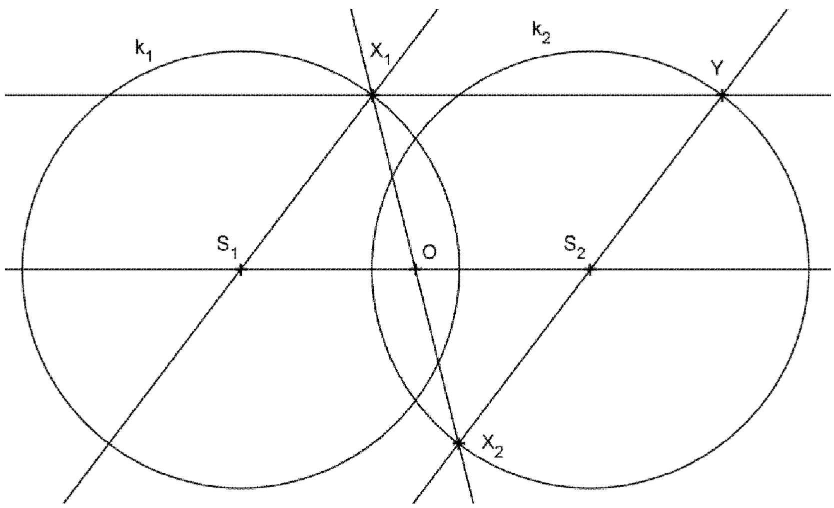
$S_1 \neq S_2$ a $r_1 = r_2$; kružnice mají společný bod dotyku



Obrázek 36

Pro dvě kružnice se stejnými poloměry, které se navzájem dotýkají, existuje právě jedna stejnolehlost $\mathrm{H}(O, \kappa)$, která zobrazuje jednu kružnici na druhou. Přičemž platí, že střed stejnolehlosti O splývá s bodem dotyku T.

$S_1 \neq S_2$ a $r_1 = r_2$; kružnice se protínají

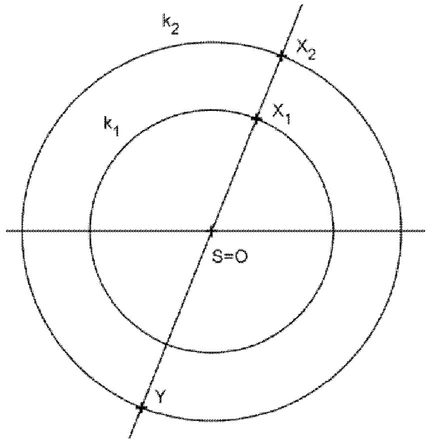


Obrázek 37

Pro dvě kružnice se stejnými poloměry, které se protínají, existuje právě jedna stejnolehlost $\mathrm{H}(O, \kappa)$, která zobrazuje jednu kružnici na druhou.

3.

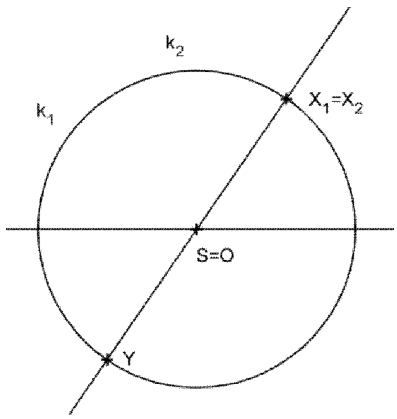
$S_1 = S_2$ a $r_1 \neq r_2$; kružnice soustředné



Obrázek 38

Pro dvě soustředné kružnice s různými poloměry existuje právě jedna stejnolehlost $\mathrm{H}(O, \kappa)$, která zobrazuje jednu kružnici na druhou. Přičemž platí, že střed stejnolehlosti O splývá se středem kružnic S.

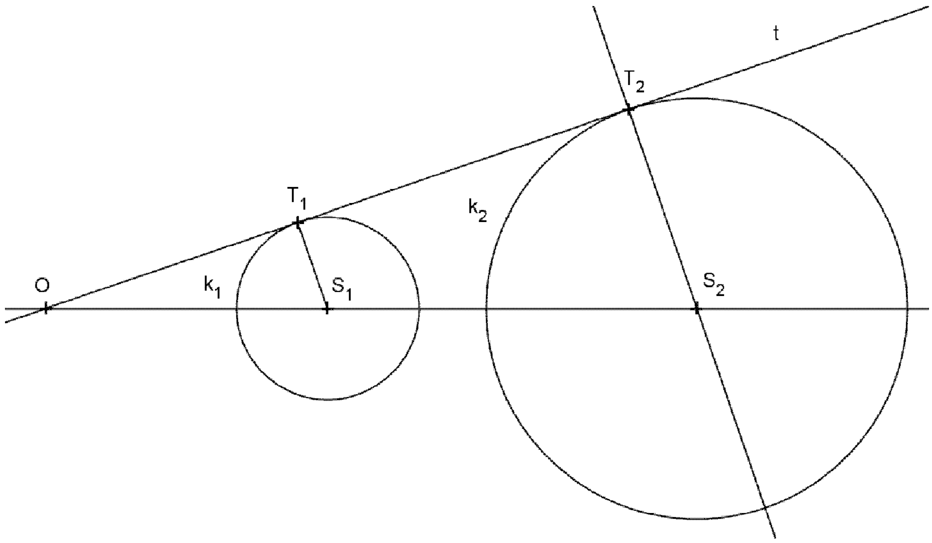
$S_1 = S_2$ a $r_1 = r_2$; kružnice totožné



Obrázek 39

Pro dvě totožné kružnice existuje jedna stejnolehlost, která zobrazuje jednu kružnici na druhou. Přičemž platí, že střed stejnolehlosti O splývá se středem kružnic S.

Stejnolehlost se dobře uplatňuje při konstrukci tečen dvou kružnic. Jsou-li dány dvě nesoustředné kružnice, pro které platí, že jedna je obrazem druhé v určité stejnolehlosti, pak tečna jedné z kružnic procházející středem stejnolehlosti je zároveň i tečna druhé kružnice.



Obrázek 40

Je zřejmé, že trojúhelník OS_1T_1 je pravoúhlý. Z definice stejnolehlosti plyne, že musí být pravoúhlý i trojúhelník OS_2T_2. Z toho vyplývá, že T_2 je bodem dotyku kružnice k_2 a přímky OT_2.

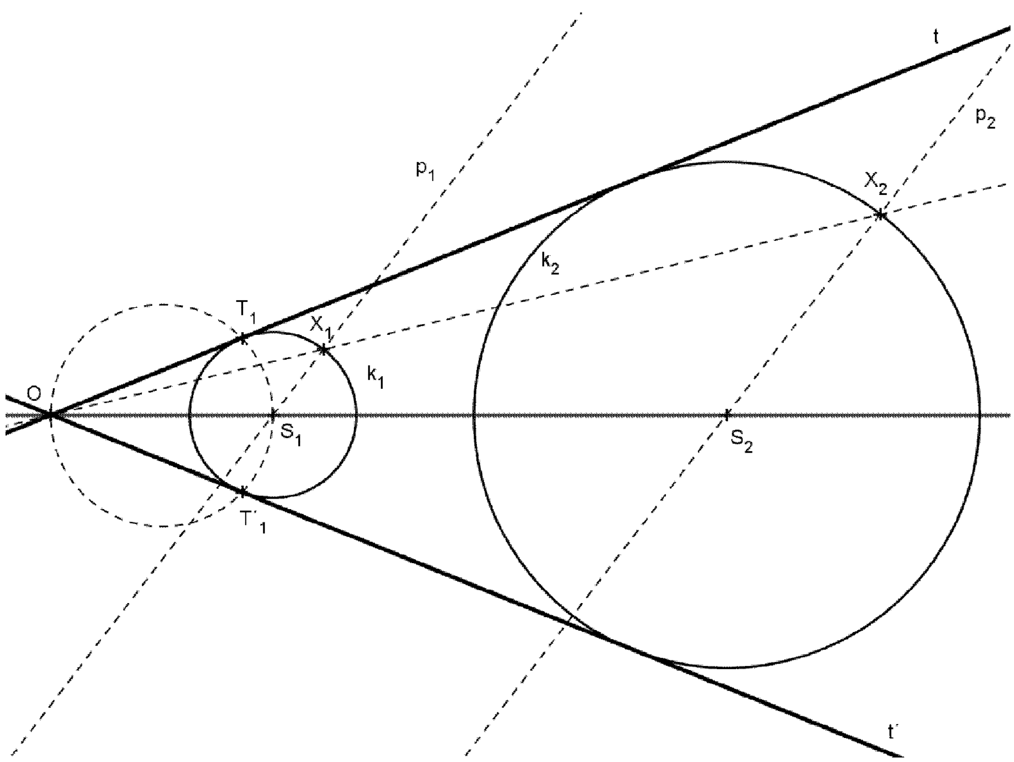
Příklad 1

Sestrojte společné tečny dvou nesoustředných kružnic $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ s různými poloměry $r_1 \neq r_2$.

Řešení:

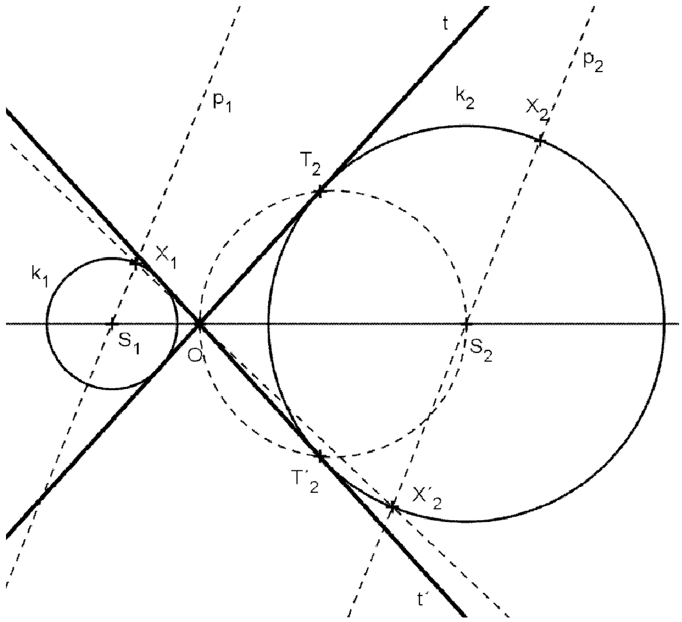
Tečny těchto kružnic musíme vést středem stejnolehlosti, která zobrazuje jednu kružnici na druhou. Sestrojíme přímku, která prochází středy kružnic k_1, k_2. Na této přímce někde leží střed stejnolehlosti. Dále libovolně zvolíme bod X_1 na kružnici k_1 a vedeme tímto bodem a bodem S_1 přímku p_1. Bodem S_2 vedeme rovnoběžku p_2 s přímkou p_1. Tam kde přímka p_2 protne kružnici k_2 se nazází bod X_2. Průsečík přímek S_1S_2 a X_1X_2 je střed stejnolehlosti, nazveme jej O. Dále příklad řešíme jako konstrukci tečny ke kružnice z daného bodu. Nad úsečkou OS_1 ses trojíme Thaletovu kružnici t. V místě, kde kružnice Thaletova kružnice protne kružnici k_1, se nachází bod dotyku T_1. Přímka OT_1 je tečna t_1 kružnic k_1 a k_2.

Varianta 1 (Střed stejnolehlosti neleží na úsečce S_1S_2.)



Obrázek 41

Varianta 2 (Střed stejnolehlosti leží na úsečce S_1S_2.)



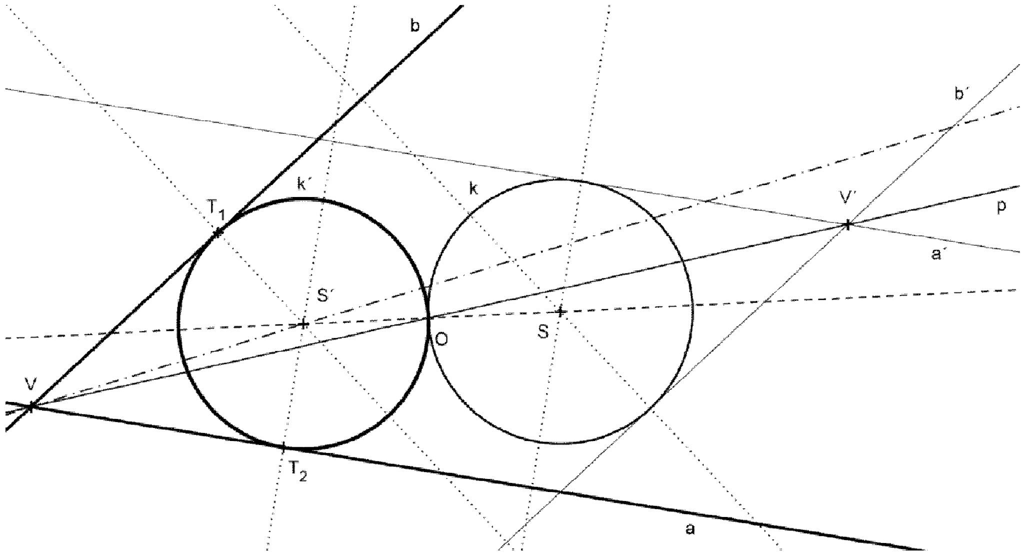
Obrázek 42

Příklad 2

Je dána kružnice $k(S, r)$ a různoběžky a a b, kterých se kružnice nedotýká. Sestrojte kružnici k', která se dotýká kružnice k a různoběžek a a b.

Řešení:

Ke kružnici k sestrojíme tečnu a', která je rovnoběžná s přímkou a a tečnu b', která je rovnoběžná s přímkou b. Průsečíky přímek a, b a a', b' vedeme přímku p. Tam, kde přímka p protne kružnici k leží střed stejnolehlosti, nazveme jej O. Střed kružnice k' je průsečík přímky SO a osy úhlu, který svírají přímky a, b. Tento bod nazveme S' a vedeme jím kolmice na přímky a, b. Tím dostaneme body dotyku a sestrojíme kružnici k'.



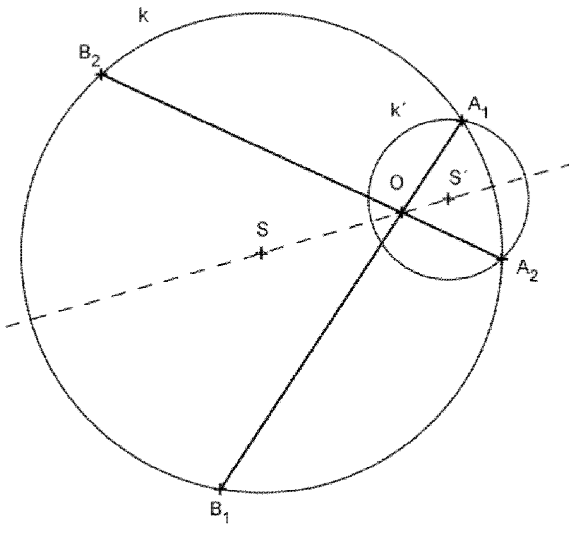
Obrázek 43

Příklad 3

Je dána kružnice $k(S,r)$ a bod O uvnitř kružnice k.Veďte bodem O tětivu AB, jejíž délka je bodem O rozdělena v poměru 3:1.

Řešení:

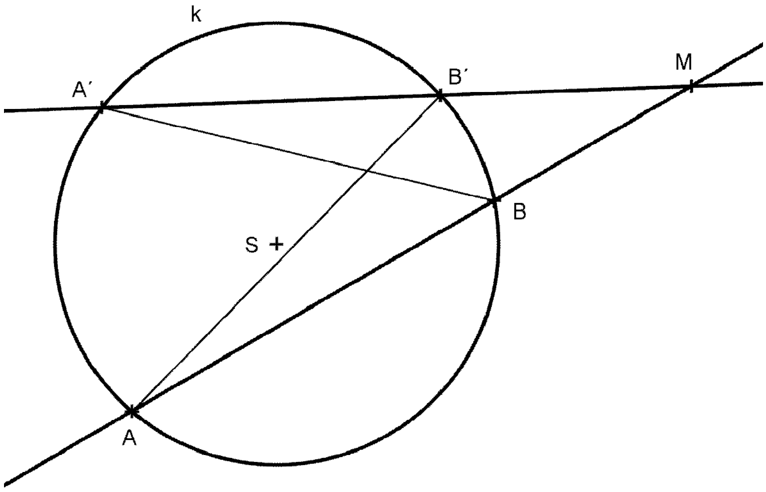
Sestrojíme kružnici $k´$, která je obrazem kružnice k ve stejnolehlosti se středem v bodě O a koeficientem $\lambda = -\frac{1}{3}$. Průsečíky kružnic k a $k´$ jsou krajiní body hledaných tětiv, tedy A_1 a A_2. Bod B_1 (resp. B_2) je průsečík přímky A_1O (resp. A_2O) a kružnice k.



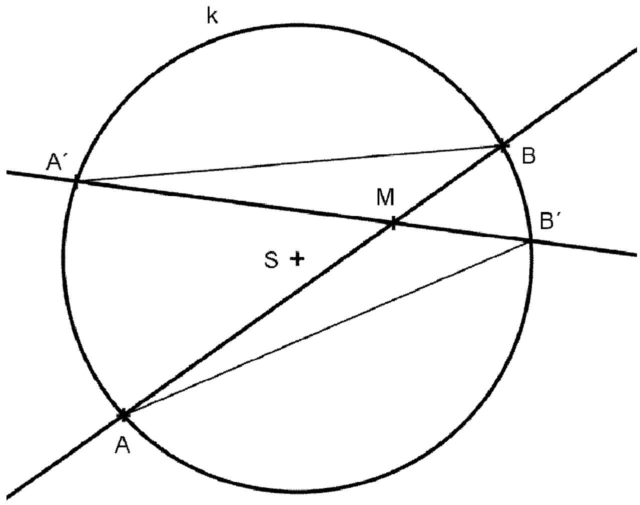
Obrázek 44

4.3 Mocnost bodu ke kružnici

Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a bod M, který na kružnici k neleží. Nechť p a p' jsou dvě tečny kružnice k, které procházejí bodem M. Body A, B a A', B' jsou průsečíky těchto sečen s kružnicí k. Pak platí $|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'| = k$, kde k je konstantní číslo větší než 0.



Obrázek 45



Obrázek 46

Jestliže bod M leží vně kružnice k, pak trojúhelníky AMB' a $A'MB$ jsou podle věty uu podobné ($|\sphericalangle MAB'| = |\sphericalangle MA'B|$, jelikož se jedná o obvodové úhly příslušné ke stejnému oblouku kružnice), proto platí

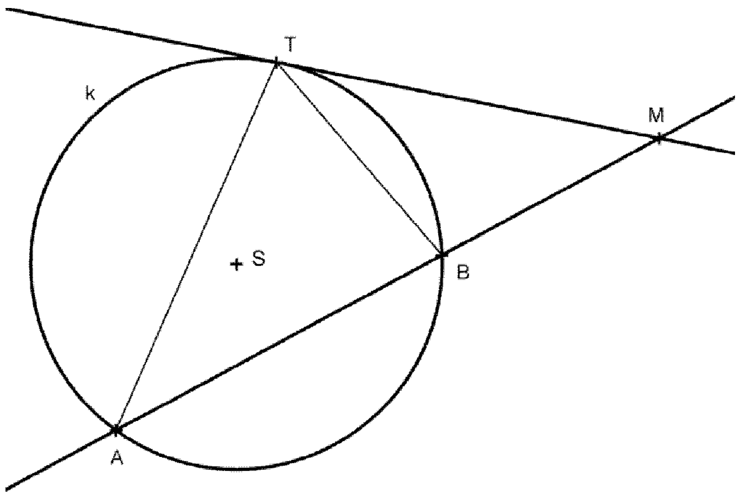
$$\frac{|MA|}{|MA'|} = \frac{|MB'|}{|MB|}.$$

Jestliže bod M leží uvnitř kružnice k, trojúhelníky AMB' a $A'MB$ jsou rovněž podobné podle věty uu, a proto také platí

$$\frac{|MA|}{|MA'|} = \frac{|MB'|}{|MB|}.$$

Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a bod M, který leží vně kružnice k. Nechť s je libovolná sečna kružnice k, která zároveň prochází bodem M a body A a B jsou její průsečíky s kružnicí k, a přímka t je tečna kružnice k s bodem dotyku T. Potom platí

$$|MA| \cdot |MB| = |MT|^2 = k.$$



Obrázek 47

Trojúhelníky AMT a BMT jsou podobné podle věty uu ($|\sphericalangle MAT| = |\sphericalangle MTB|$, neboť jde o obvodový a úsekový úhyl příslušné ke stejnému oblouku kružnice). Proto platí:

$$\frac{|MA|}{|MT|} = \frac{|MT|}{|MB|}.$$

Označme d vzdálenost bodu M od středu kružnice k. Je-li M vnější bod kružnice k, pak platí

$$|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'| = |MT|^2 = d^2 - r^2.$$

Je-li M vnitřím bodem kružnice k, pak platé

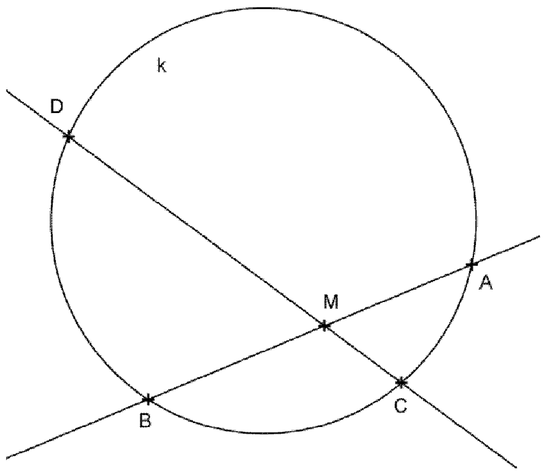
$$|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'| = r^2 - d^2.$$

Číslo $k = d^2 - r^2$ se nazývá mocnot bodu ke kružnici a platí, že pro M ležíci vně kružnice je $k > 0$, pro M ležící uvnitř kružnice je $k < 0$ a pro M ležící na kružnici je $k = 0$.

Příklad 1

Je dána úsečka AB, $|AB| = 11cm$. Na této úsečce leží bod M tak, že $|MA| = 5cm$ a $|MB| = 6cm$. Dále je dán bod C ležící mimo úsečku AB a platí, že $|MC| = 3cm$. Kružnice k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Bod D je druhý průsečík přímky MC s kružnicí k. Určete vzdálenost bodu D od bodu M.

Řešení:



Obrázek 48

Pro vzdálenosti bodů platí rovnost $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$. Tedy $|MD| = \frac{|MA| \cdot |MB|}{|MC|}$. Po dosazení $|MD| = \frac{5 \cdot 6}{3} = 10cm$.

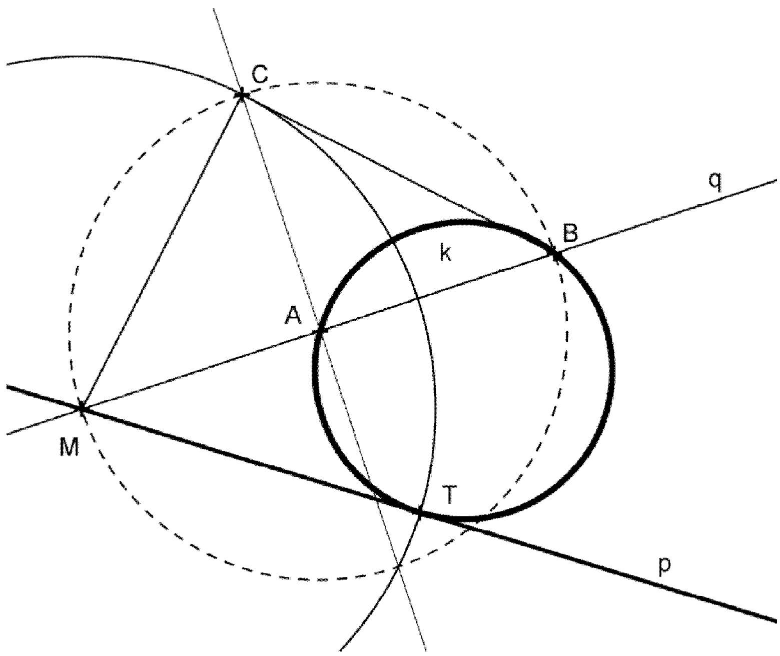
<u>Příklad 2</u>

Je dána přímka p a dva různé body A a B, které na přímce p neleží. Sestrojte kružnici k, které prochází body A, B a dotýká se přímky p. (Apolloniova úloha)

Řešení:

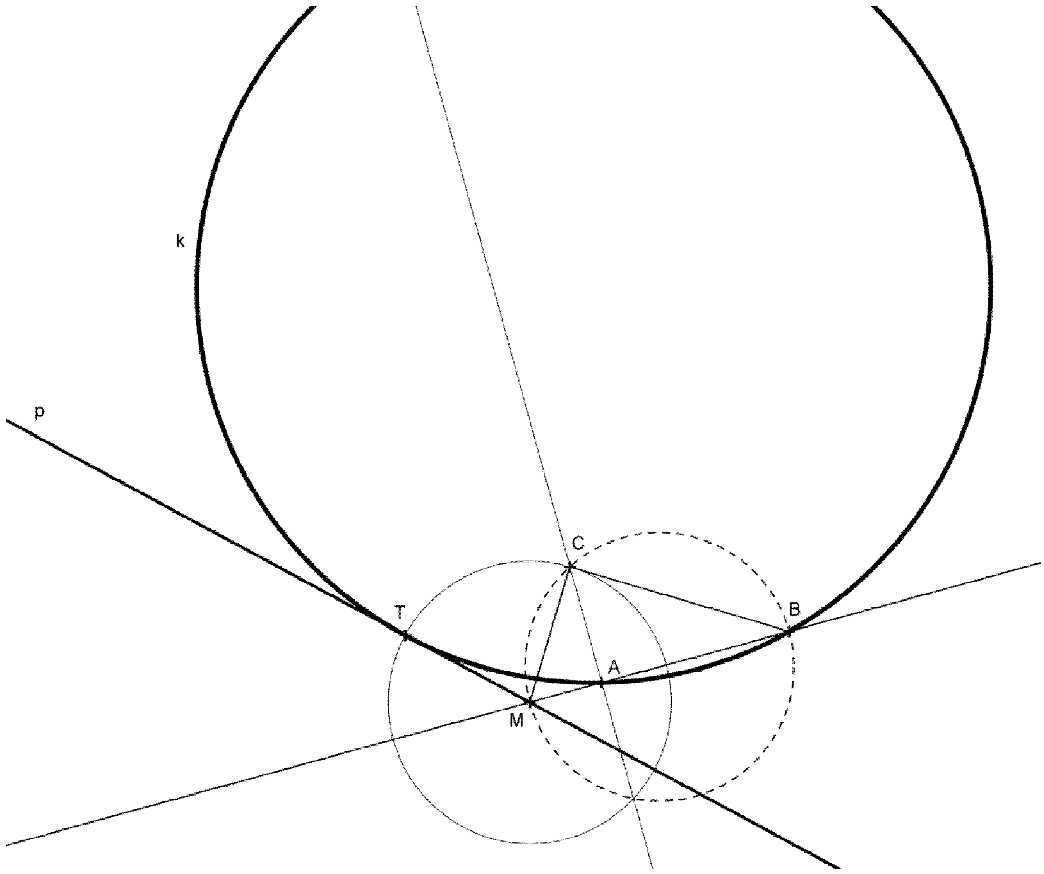
Body A, B vedeme přímku q. Průsečík přímky p a q označíme M. Pomocí Thaletovy kružnice sestrojíme pravoúhlý trojúhelník MBC, tak že CA je jeho výška na stranu c. Z mocnosti bodu ke kružnici víme, že $|MA| \cdot |MB| = |MT|^2$ a z věty o výšce platí $b^2 = c \cdot c_b$. V našem případě platí, že $c = |MB|$, $c_b = |MA|$ a tedy $b^2 = |MT|^2$. Díky tomu sestrojíme bod T, což je bod dotyku kružnice k a přímkou p. Kružnice k prochází body A, B, T.

Varianta 1.



Obrázek 49

Varianta 2.



Obrázek 50

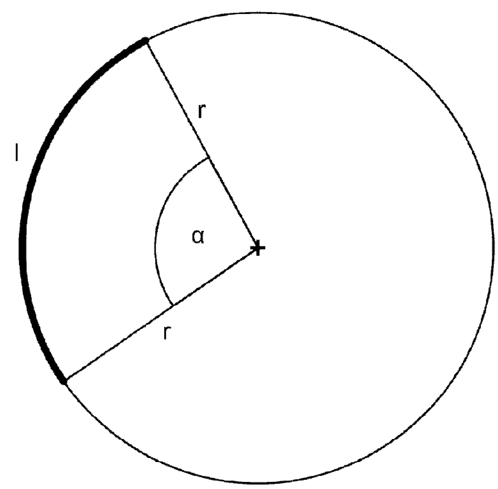
4.4 Části kruhu

Délka kružnice

Délka kružnice je dána vzorcem $o = 2\pi r$, kde o je délka kružnice (také obvod kruhu) a r je poloměr kružnice (kruhu).

Délka kruhového oblouku

Délka kruhového oblouku je dána vzorcem $l = r \cdot \alpha$, kde l je délka kruhového oblouku, r je poloměr kružnice (kruhu) a α je velikost příslušného středového úhlu v radiánech. Též platí vzorec $l = \frac{\pi r}{180}\alpha'$, kde α' je velikost příslušného středového úhlu ve stupních.



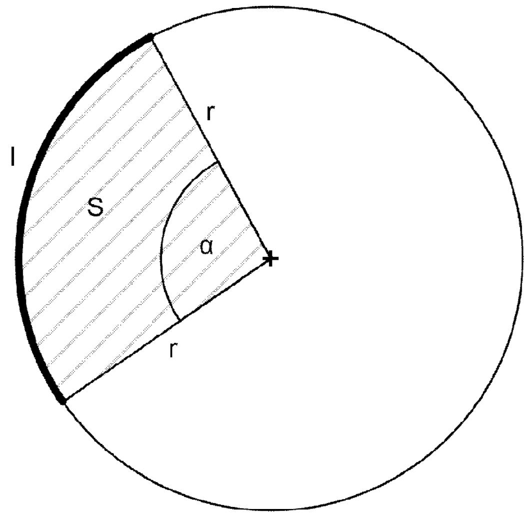
Obrázek 51

Obsah kruhu

Obsah kruhu je dán vzorcem $S = \pi \cdot r^2$, kde S ej obsah kruhu a r je poloměr kruhu.

Obsah kruhové výseče

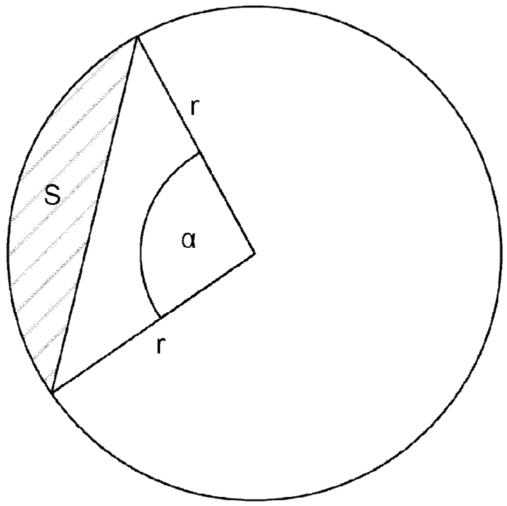
Obsah kruhové výseče je dán vztahem $S = \frac{1}{2}r^2 \cdot \alpha$, kde α je velikost příslušného středového úhlu v radiánech. Platí též vzorec $S = \frac{\pi r^2}{360}\alpha'$, kde α' je velikost příslušného středového úhlu ve stupních. Dále platí vztah, podle kterého lze vypočítat obsah kruhové výseče, pokud známe délku příslušného kruhového oblouku a poloměr kruhu $S = \frac{1}{2}r \cdot l$, kde l je délka příslušného kruhového oblouku.



Obrázek 52

Obsah kruhové úseče

Obsah kruhové úseče je dán vztahem $S = \frac{1}{2}r^2 \cdot (\alpha - \sin\alpha)$, kde α je velikost příslušného středového úhlu v radiánech. Zároveň platí vzorec $S = \frac{1}{2}r^2 \cdot (\frac{\pi\alpha'}{180} - \sin\alpha')$, kde α'je velikost příslušného středového úhlu ve stupních.



Obrázek 53

Mezikruží

Mezikruží je geometrický útvar v rovině, který je rozlišený dvěma soustřednými kružnicemi. Je to množina všech bodů x, které mají od bodu S vzdálenost $r \leq x \leq R$, kde S je střed kružnic, r je poloměr menší z nich a R je poloměr větší z nich.

Obvod obsahu mezikruží je dán vztahem $l = 2\pi \cdot (r + R)$. Tento vztah je odvozen ze součtu obvodů kružnic ohraničujících mezikruží.

$$l = O_2 + O_1$$

$$l = 2\pi r + 2\pi R$$

$$l = 2\pi \cdot (r + R).$$

Obsah mezikruží je dán vztahem $S = \pi \cdot (r^2 + R^2)$. Tento vztah je odvozen z rozdílu obsahů kružnic, které ohraničují mezikruží.

$$S = S_2 - S_1$$

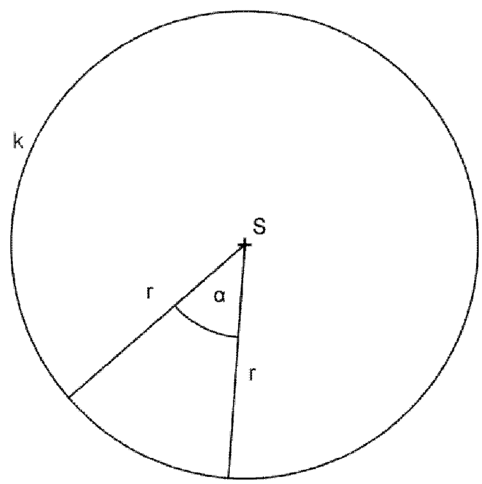
$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$S = \pi \cdot (R^2 - r^2).$$

Příklad 1

Je dána kružnice $k(S, r)$. Vypočítejte délku kruhového oblouku, obsah kruhové výseče a obsah kruhové úseče. Jestliže příslušný středový úhel má velikost $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Řešení:



Obrázek

Délka kruhového oblouku je $l = r \cdot \alpha$, tedy $l = r \cdot \frac{\pi}{4}$.

Obsah kruhové výseče je $S_V = \frac{1}{2}r^2 \cdot \alpha$, tedy $S_V = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}r^2$.

Obsah kruhové úseče je $S_U = \frac{1}{2}r^2 \cdot (\alpha - \sin\alpha)$, tedy $S_U = \frac{1}{2}r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = r^2 \cdot \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{8}$.

Příklad 2

Vypočítejte obsah mezikruží, které ohraničují kružnice $k_2(S,R)$ a $k_1(S,r)$, pro které platí $r < R$. Obvod kružnice k_1 je $O = 10cm$ a kružnice k_2 má dvakrát větší poloměr než kružnice k_1.

Řešení:

$$O_1 = 10cm$$

$$R = 2r$$

$$S = \pi \cdot (R^2 - r^2) = ?$$

$$10 = 2\pi r;\, r = \frac{5}{\pi} cm$$

$$R = 2\frac{5}{\pi} = \frac{10}{\pi} cm$$

$$S = \pi \cdot (R^2 - r^2);\, S = \pi \cdot \left(\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{5}{\pi}\right)^2\right) = \pi \cdot \left(\frac{75}{\pi^2}\right) = \frac{75}{\pi} cm^2.$$

5. Závěr

Při psaní této práce jsem zjistila, že vlastností kružnice je velmi mnoho a zmínit všechny v bakalářské práci je pravděpodobně nemožné. Proto jsem uvedla jen ty nejznámější, které se vyučují na základní, středních a vysokých školách.

Velmi mě překvapilo, že téměř nikdo, komu jsem o tomto tématu pověděla, si nedokázal vybavit jedinou vlastnost, která přísluší kružnici. Zároveň jsem neobjevila žádnou literaturu, která by byla věnovánu pouze kružnici, jejím prvkům a vlastnostem. Na sestavení této práce jsem tedy čerpala pouze z literatury, která pojednává o geometrii v rovině, kde jsem vyhledávala kapitoly věnované kružnici a kruhu.

Myslím, že by tato bakalářská práce mohla dobře posloužit studentům matematiky na pedagogických školách pro připomenutí základních vlastností kružnice a kruhu a pro získání povědomí o tom, co ve své učitelské praxi budou na základních a středních školách o kružnici vyučovat.

6. Citovaná literatura

1. **Odvárko, Oldřich a Kadleček, Jiří.** *Matematika pro 8. ročník ZŠ, 3. díl.* Praha 4 : Nakladatelství Prometheus, 2000.

2. —. *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 3. díl.* Praha 4 : Nakladatelství Prometheus, 2011.

3. —. *Matematika pro 9. ročník ZŠ, 2. díl.* Praha 4 : Nakladatelství Prometheus, 2013.

4. **Pomykalová, Eva.** *Matematika pro gymnázia Planimetrie.* Praha 4 : Nakladatelství Prometheus, 2008.

5. **Lávička, Miroslav.** *Geomerie 1.- Základy geometrie v rovině.* Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2002.