

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

KONJUNKCE A DISJUNKCE VE FUZZY LOGICE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

VOJTĚCH HAVLENA

BRNO 2015



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

KONJUNKCE A DISJUNKCE VE FUZZY LOGICE

CONJUNCTION AND DISJUNCTION IN FUZZY LOGIC

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

VOJTĚCH HAVLENA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Doc. RNDr. DANA HLINĚNÁ, Ph.D.

BRNO 2015

Abstrakt

Tato práce se věnuje triangulárním normám a jejich zobecněním – uninormám, zejména jejich transformacím pomocí jednotkové funkce, a také modelování fuzzy logické konjunkce a disjunkce na základě empirických dat. Byly stanoveny podmínky, při nichž transformací určitých uninorem vznikne opět uninorma. Taktéž byly určeny podmínky invariantnosti transformace pro třídu určitých uninorem. Transformace uninorem rozšiřuje třídu možných spojek a jejich studium nám ulehčilo hledání podmínek při modelování. Byl také nalezen a analyzován algoritmus pro modelování fuzzy logických spojek. Na základě programu implementujícího tento algoritmus byl vyhodnocen experiment, který měl za cíl modelovat fuzzy konjunkci užívanou lidmi.

Abstract

This thesis deals with triangular norms and their generalizations – uninorms, in particular with their transformation using a unit function and also with modeling of fuzzy conjunction and disjunction based on empirical data. The conditions under which transformations of certain uninorms give again uninorms are established. Conditions of invariance transformations for certain class of uninorms are found. Transformations of uninorms extend class of connectives. The study of these transformations facilitates the search of modeling conditions. An algorithm for modeling of fuzzy connectors is also proposed and analyzed. An experiment based on implementation of the algorithm is evaluated. This experiment aims at modeling of fuzzy conjunction for human use.

Klíčová slova

triangulární normy, uninormy, transformace, modelování fuzzy spojek

Keywords

triangular norms, uninorms, transformation, modeling fuzzy connectors

Citace

Vojtěch Havlena: Konjunkce a disjunkce ve fuzzy logice, bakalářská práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2015

Konjunkce a disjunkce ve fuzzy logice

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením paní doc. RNDr. Dany Hliněné, Ph.D. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

.....
Vojtěch Havlena
18. května 2015

Poděkování

Velké poděkování patří doc. RNDr. Daně Hliněné, Ph.D. za odborné vedení této práce, cenné rady a vstřícnost při konzultacích. Další poděkování patří doc. RNDr. Martinovi Kalinovi, Ph.D. za připomínky k práci a Ing. Bohuslavu Křenovi, Ph.D. za ochotu a rady při dokončování práce.

© Vojtěch Havlena, 2015.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.

Obsah

1 Úvod	3
2 Triangulární normy a uninormy	4
2.1 Definice a základní vlastnosti	4
2.2 Příklady konkrétních uninorem	7
3 Transformace uninorem	10
3.1 Transformace uninormy U_1	12
3.2 Transformace uninormy U_2	14
3.3 Transformace uninormy U_3	16
3.4 Transformace uninormy U_4	17
3.5 Zobecnění transformace uninorem	18
3.5.1 Ostře rostoucí, spojitá funkce φ	18
4 Invarianty transformace	22
4.1 Invarianty transformace na množině $[0, e) \times (e, 1]$	22
4.1.1 Čebyševovy polynomy	26
4.1.2 Iterace funkcí	29
4.2 Invariantní transformace t-norem	31
5 Modelování fuzzy logických spojek	35
5.1 Aproximace aditivních generátorů	35
5.2 Algoritmus pro aproximaci	37
5.2.1 Metoda váhování	37
5.2.2 Lawson-Hansonův algoritmus	37
5.2.3 Výsledný algoritmus pro aproximaci	38
5.3 Implementace programu	40
5.3.1 Popis tříd zajišťující aproximaci	41
5.3.2 Ukládání a načítání dat	41
5.3.3 Proces aproximace	42
5.4 Experiment modelování fuzzy konjunkce	42
5.4.1 Vyhodnocení experimentu	42
6 Závěr	44
A Obsah CD	47
B Diagram tříd	48

C Ukázka aplikace	49
D Použité výroky v dotazníku	51

Kapitola 1

Úvod

Fuzzy logika je oborem matematické logiky. Na rozdíl od klasické výrokové logiky, kde k popisu pravdivosti výroku využíváme pouze dvě pravdivostní hodnoty (pravda, nepravda), ve fuzzy logice se míra pravdivosti výroků určuje pomocí hodnot intervalu $[0, 1]$. Fuzzy logika se v dnešní době využívá např. v řídicích systémech. Podobně, jako se v klasické logice definují operace konjunkce a disjunkce pouze nad dvěmi hodnotami, ve fuzzy logice se pro vyjádření konjunkce resp. disjunkce využívají triangulární normy resp. triangulární konormy.

V této práci se zabýváme jistým zobecněním těchto funkcí, tzv. uninormami, a také modelováním fuzzy logických spojek z empirických dat. V případě uninorem se věnujeme φ -transformaci, což je jedním ze způsobů jejich konstrukce. Zajímá nás především φ -transformace, jejíž výsledkem je opět uninorma a také případy, kdy vznikne původní uninorma

Motivace pro vznik této práce byla dvojí. Jednak výsledky D. Smutné-Hliněné [14] v práci zabývající se φ -transformací triangulárních norem, kde byla mimo jiné úplně vyřešena transformace drastického součinu a minimové triangulární normy. Co se týče modelování logických spojek, jedná se o častý problém, pro který existuje stále málo známých prostředků.

Celá práce je členěna do čtyř hlavních kapitol. Kapitola 2 slouží jako stručný úvod do problematiky. V této kapitole jsou představeny hlavní definice, které jsou využívány v dalších částech práce, některá základní tvrzení a příklady uninorem.

Kapitola 3 je věnována samotným transformacím uninorem. Je provedena transformace uninorem představených v předchozí kapitole. Jsou stanoveny podmínky, za nichž vznikne opět uninorma, a některé výsledky jsou dále zobecněny.

Obsahem kapitoly 4 je hledání invariantů transformací uninorem a triangulárních norem. Je tedy hledána odpověď na otázku, kdy transformací vznikne původní uninorma, resp. triangulární norma.

Kapitola 5 popisuje modelování fuzzy logických spojek na základě empirických dat. Obsahem této kapitoly je uvedení algoritmu pro modelování, implementace programu a na jeho základě provedení experimentu zaměřeného na chápání fuzzy konjunkce lidmi.

V závěru jsou zhodnoceny dosažené výsledky a také jsou naznačeny možné směry dalšího pokračování práce.

Tvrzení, u nichž není uveden zdroj, jsou vlastní a část práce byla představena v závěrečném kole Studentské vědecké odborné činnosti (SVOČ) v matematice a informatice [7].

Kapitola 2

Triangulární normy a uninormy

Ústřední oblast zájmu této práce tvoří triangulární normy a uninormy. Triangulární normy se ve fuzzy logice používají pro modelování fuzzy konjunkce. Triangulární konormy zase k modelování disjunkce. Uninormy, což jsou funkce zobecňující triangulární normy a konormy, mají velký význam při modelování fuzzy implikátorů a jako agregační operátory také v oblasti doporučovacích systémů.

2.1 Definice a základní vlastnosti

V této části jsou popsány základní definice, které budou využívány v dalších částech práce.

Definice 2.1. [1] *Triangulární norma (zkráceně t-norma) je binární operace na jednotkovém intervalu $[0, 1]$, tedy funkce $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ taková, že pro každé $x, y, z \in [0, 1]$ jsou splněny následující axiomy:*

1. *Komutativnost*

$$T(x, y) = T(y, x),$$

2. *Asociativnost*

$$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z),$$

3. *Monotónnost*

$$T(x, y) \leq T(x, z) \quad \text{jestliže } y \leq z,$$

4. *Okrajová podmínka*

$$T(x, 1) = x.$$

Příklad 2.1. [1] Následující příklad ukazuje některé základní t-normy.

- Minimová t-norma: $T_M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ daná předpisem

$$T_M(x, y) = \min\{x, y\}.$$

- Drastický součin: $T_D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ daná předpisem

$$T_D(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\} & \max\{x, y\} = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Součinnová t-norma: $T_P : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ daná předpisem

$$T_P(x, y) = xy.$$

- Łukasiewiczova t-norma: $T_L : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ daná předpisem

$$T_L(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}.$$

Ke každé triangulární normě existuje její duální funkce $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, nazývaná t-konorma, která je dána předpisem:

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y),$$

kde T je triangulární norma [1].

Triangulární normy můžeme rozdělit podle jejich vlastností. Významnou třídu tvoří archimedovské t-normy, které lze vyjádřit aditivními generátory. Spojitou t-normu T nazýváme archimedovskou, pokud $\forall x \in (0, 1)$ platí $T(x, x) < x$.

Definice 2.2. [1] *Aditivní generátor spojité archimedovské t-normy T je klesající funkce $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ s podmínkou $g(1) = 0$. Přičemž t-norma T je dána předpisem:*

$$T(x, y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y)),$$

kde $g^{(-1)}$ je pseudoinverzní funkce k funkci g (viz. kapitola 3).

Dále ještě uvedeme definici triangulární subnormy, což je jisté zobecnění triangulární normy.

Definice 2.3. [10] *Triangulární subnorma je binární operace na jednotkovém intervalu $[0, 1]$, tedy funkce $M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ taková, že pro každé $x, y, z \in [0, 1]$ jsou splněny následující axiomy:*

1. Komutativnost

$$T(x, y) = T(y, x),$$

2. Asociativnost

$$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z),$$

3. Monotónnost

$$T(x, y) \leq T(x, z) \quad \text{jestliže } y \leq z,$$

4. $T(x, y) \leq \min\{x, y\}$ pro každé $(x, y) \in [0, 1]^2$.

Podobně, jako jsme uvedli definice t-norem, uvedeme i definice uninorem a několik tvrzení, které se právě těchto funkcí týkají.

Definice 2.4. [16] *Uninorma je binární operace na jednotkovém intervalu $[0, 1]$, tedy funkce $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ taková, že pro každé $x, y, z \in [0, 1]$ jsou splněny následující axiomy:*

1. Komutativnost

$$U(x, y) = U(y, x),$$

2. Asociativnost

$$U(x, U(y, z)) = U(U(x, y), z),$$

3. Monotónnost

$$U(x, y) \leq U(x, z) \quad \text{jestliže } y \leq z,$$

4. Existence neutrálního prvku $e \in [0, 1]$

$$U(x, e) = x.$$

V případě uninormy s neutrálním prvkem $e = 1$ se jedná o t-normu. V případě, že $e = 0$, jedná se o t-konormu.

Definice 2.5. [16] Uninormu U nazýváme konjunktivní, pokud

$$\forall x \in [0, 1] : U(x, 0) = 0.$$

Množinu, jejíž prvky jsou konjunktivní uninormy, označujeme \mathcal{U}_c .

Nejprve uvedeme několik tvrzení, která nám blíže upřesňují podmínky platící pro každou uninormu. Jedná se především o hraniční podmínky a chování uninorem na množině $(e, 1] \times [0, 1) \cup [0, 1) \times (e, 1]$.

Tvrzení 2.1. Nechť U je uninorma s neutrálním prvkem $e \in (0, 1)$. Pokud $\forall x \in (e, 1] : U(0, x) = c$ a c je konstanta, potom $c = 0$, tedy $U \in \mathcal{U}_c$.

Důkaz. Z monotónnosti uninorem vyplývá, že $c \in [0, e]$. Zřejmě pro každé $x \in [0, e] : U(0, x) = 0$. Nyní předpokládejme $x_1 \in (e, 1]$, z asociativnosti uninormy plyne:

$$c = U(x_1, 0) = U(x_1, U(0, 0)) = U(U(x_1, 0), 0) = U(c, 0) = 0.$$

Z rovnosti plyne, že $c = 0$. V tomto případě již asociativita není porušena. \square

Tvrzení 2.2. Nechť U je uninorma s neutrálním prvkem $e \in (0, 1)$. Potom pro funkci $U(\cdot, 0)$ platí podmínka:

$$\forall y \in H(U(\cdot, 0)) : \inf\{x \in (e, 1] : U(x, 0) = y\} = y \wedge U(y, 0) = y.$$

Důkaz. Z asociativnosti uninormy $\forall x \in (e, 1]$ plyne:

$$U(U(0, 0), x) = U(0, x) = U(0, U(0, x)).$$

Provedeme substituci $\psi(x) = U(0, x)$, tedy dostaneme:

$$\psi(x) = \psi \circ \psi(x) \leq x.$$

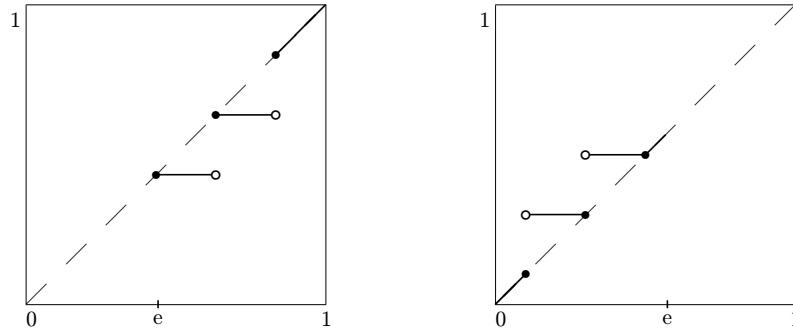
Pokud $m = \psi(x)$, potom $m = \psi(m)$. Uvedená rovnost platí pro $\psi(x) = x$ nebo $\psi(x) = c$. Podle tvrzení 2.1 $\psi(x) = 0$. Dále rovnost platí pro kombinaci těchto podmínek – funkce může tvořit „schody“, které začínají na diagonále (obr. 2.1). Tedy funkce ψ může obsahovat konstantní intervaly $\mathcal{I} = [a_i, b_i]$ ($\forall x_1, x_2 \in \mathcal{I} : \psi(x_1) = \psi(x_2), \forall x < a_i : \psi(x) \neq \psi(a_i)$) takové, že $a_i = \psi(a_i)$. Toto splňuje dokazovaná podmínka. \square

Chování uninorem v druhé okrajové souřadnici popisuje následující tvrzení.

Tvrzení 2.3. *Nechť U je uninorma s neutrálním prvkem $e \in (0, 1)$. Potom pro funkci $U(\cdot, 1)$ platí podmínka:*

$$\forall y \in H(U(\cdot, 1)) : \sup\{x \in [0, e) : U(x, 1) = y\} = y \wedge U(y, 1) = y.$$

Důkaz. Prakticky identický jako důkaz tvrzení 2.2. Příklad průběhu uninormy U v krajní souřadnici je na obrázku 2.1. \square



Obrázek 2.1: Příklady $U(x, 0)$ a $U(x, 1)$

Tvrzení 2.4. [6] *Nechť U je uninorma s neutrálním prvkem e . Potom $\forall (x, y) \in (e, 1] \times [0, e) : \min\{x, y\} \leq U(x, y) \leq \max\{x, y\}$.*

Důkaz. Z monotónnosti uninormy U vyplývá $U(x, y) \geq x$ pro $x \in [0, e)$ a $y \in (e, 1]$, tedy $U(x, y) \geq \min\{x, y\}$. Druhou část nerovnosti lze dokázat velmi podobně. Z podmínky monotónnosti plyne, že $U(x, y) \leq y$ pro $x \in [0, e)$ a $y \in (e, 1]$, tedy $U(x, y) \leq \max\{x, y\}$. \square

2.2 Příklady konkrétních uninorem

V této sekci nás budou zajímat již konkrétní příklady uninorem. Budeme uvažovat uninormy s neutrálním prvkem e , pro které platí následující podmínka: $\forall (x, y) \in [0, e)^2 : U(x, y) = 0$. Množinu uninorem, které splňují tuto podmínku, si označíme \mathcal{U}_0 . Postupně se budeme snažit určit i ostatní hodnoty. Uvedené příklady uninorem jsou původní a v další kapitole je budeme využívat při zkoumání φ -transformací.

Tvrzení 2.5. *Nechť U je uninorma s neutrálním prvkem e a navíc $U \in \mathcal{U}_0$. Pokud $U(x, 0) = 0$ pro $x \in (e, \beta]$, kde $\beta < 1$, potom $U(x, y) < e$ pro $y \in [0, e)$.*

Důkaz. Opět vyjdeme z asociativnosti uninormy a předpokládáme $y, z \in (0, e)$. Potom

$$U(x, U(y, z)) = U(x, 0) = 0 = U(U(x, y), z).$$

Rovnost $U(U(x, y), z) = 0$ platí v případě, že $z = 0$ a $U(x, y) \in (e, \beta]$ nebo $U(x, y) = 0$ nebo $U(x, y) < e$. Vzhledem k tomu, že $z \neq 0$ a $U(x, z) > 0$, platí $U(x, y) < e$. \square

Z předchozích tvrzení plyne:

Důsledek 2.1. *Nechť U je uninorma s neutrálním prvkem e splňující $U \in \mathcal{U}_c \cap \mathcal{U}_0$. Potom platí, že $U \in \mathcal{U}_{M, e}$, kde $\mathcal{U}_{M, e}$ je množina funkcí, které splňují následující podmínky (pro $f \in \mathcal{U}_{M, e}$):*

1. f je neklesající, komutativní a asociativní funkce,
2. $\min\{x, y\} \leq f(x, y) \leq \max\{x, y\}$,
3. $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x, y) = e$, pro $y \in [e, 1]$.

Nyní již můžeme uvést příklady jednotlivých uninorem. Pro jednoduchost uvažujeme uninormy, pro které platí $\forall x, y \in (e, 1] : U(x, y) = \max\{x, y\}$.

Příklad 2.2. Nejmenší uninorma U_1 s neutrálním prvkem $e = \frac{1}{2}$.

$$U_1(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & \min\{x, y\} \geq \frac{1}{2}, \\ \min\{x, y\} & (x, y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}) \cup [0, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{2}, 1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Komutativnost a monotónnost je zřejmá. Důkazy asociativnosti naznačíme pouze pro nejzajímavější případy:

Nejprve pro $x \in [0, \frac{1}{2})$, $y \in [0, \frac{1}{2})$, tedy

$$U_1(x, U_1(y, z)) = 0 = U_1(0, z) = U_1(U_1(x, y), z).$$

Pokud $x \in [0, \frac{1}{2})$, $y, z \in (\frac{1}{2}, 1]$ tedy

$$U_1(x, U_1(y, z)) = x = U_1(x, z) = U_1(U_1(x, y), z).$$

Příklad 2.3. Uninorma U_2 s neutrálním prvkem $e = \frac{1}{2}$ a předpisem:

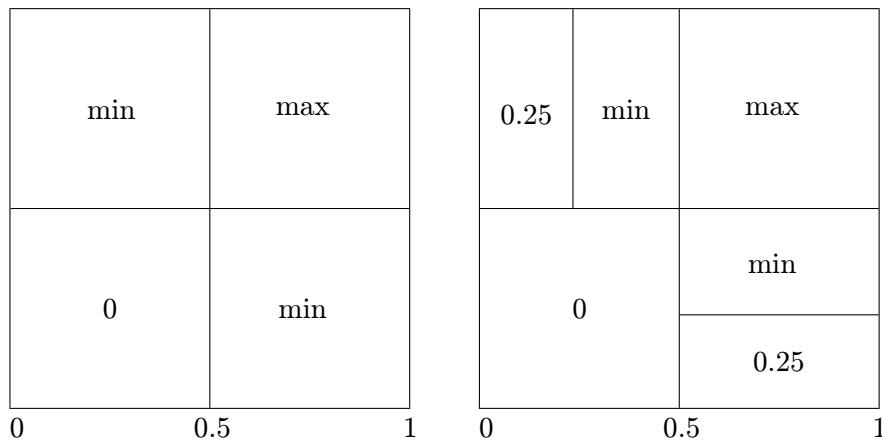
$$U_2(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & \min\{x, y\} \geq \frac{1}{2}, \\ \min\{x, y\} & (x, y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{2}, 1], \\ \frac{1}{4} & (x, y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times (0, \frac{1}{4}) \cup (0, \frac{1}{4}) \times [\frac{1}{2}, 1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Komutativnost a monotónnost je opět zřejmá. Co se týče asociativnosti, tak nejprve pokud $x \in [0, \frac{1}{2})$, $y \in [0, \frac{1}{2})$, tedy

$$U_2(x, U_2(y, z)) = 0 = U_2(0, z) = U_2(U_2(x, y), z).$$

Dále pokud $x \in (0, \frac{1}{4}]$, $y, z \in (\frac{1}{2}, 1]$:

$$U_2(x, U_2(y, z)) = \frac{1}{4} = U_2\left(\frac{1}{4}, z\right) = U_2(U_2(x, y), z).$$



Obrázek 2.2: Uninorma U_1 a U_2

Příklad 2.4. Uninorma U_3 s neutrálním prvkem $e = \frac{1}{2}$, která je dána předpisem

$$U_3(x, y) = \begin{cases} 0 & \max\{x, y\} < \frac{1}{2}, \\ \max\{x, y\} & \max\{x, y\} > \frac{1}{2}, \\ \min\{x, y\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Komutativnost a monotónnost je opět zřejmá, zbývá dokázat asociativnost. Pokud $x, y \in [0, \frac{1}{2})$, $z \in (\frac{1}{2}, 1]$, tedy

$$U_3(U_3(x, y), z) = U_3(0, z) = z = U_3(x, z) = U_3(x, U_3(y, z)).$$

Nyní $x \in [0, \frac{1}{2})$, $y \in (\frac{1}{2}, 1]$:

$$U_3(U_3(x, y), z) = U_3(y, z) = \max\{y, z\} = U_3(x, U_3(y, z)).$$

A nakonec $x, y \in (\frac{1}{2}, 1]$:

$$U_3(U_3(x, y), z) = \max\{x, y, z\} = U_3(x, U_3(y, z)).$$

Příklad 2.5. Uninorma U_4 s neutrálním prvkem $e = \frac{1}{2}$ a předpisem:

$$U_4(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & \min\{x, y\} \geq \frac{1}{2} \text{ nebo } \max\{x, y\} \geq \frac{3}{4}, \\ 0 & \max\{x, y\} < \frac{1}{2}, \\ \min\{x, y\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Komutativnost a monotónnost je opět zřejmá, zbývá dokázat asociativnost. Pokud $x \in [0, \frac{1}{2})$, $y \in [\frac{3}{4}, 1]$, tedy

$$U_4(U_4(x, y), z) = U_4(y, z) = \max\{y, z\} = U_4(x, U_4(y, z)).$$

Dále $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, $y \in [\frac{3}{4}, 1]$:

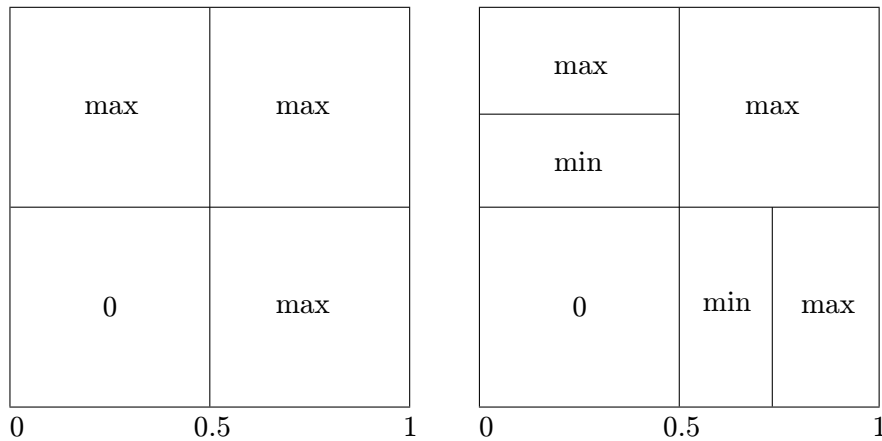
$$U_4(x, U_4(y, z)) = \max\{x, y, z\} = U_4(U_4(x, y), z),$$

$x, z \in [0, \frac{1}{2})$, $y \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$:

$$U_4(x, U_4(y, z)) = U_4(x, z) = 0 = U_4(U_4(x, y), z),$$

$x \in [0, \frac{1}{2})$, $y \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $z \in [\frac{3}{4}, 1]$:

$$U_4(x, U_4(y, z)) = U_4(x, z) = z = U_4(U_4(x, y), z).$$



Obrázek 2.3: Uninorma U_3 a U_4

Podobně jako jsme ve čtverci $(e, 1]^2$ uvažovali $\max\{x, y\}$, můžeme pro získání dalších příkladů uninorem uvažovat i jinou t-konormu (s jinými zbylými obdélníky).

Kapitola 3

Transformace uninorem

Triangulární normy mohou být konstruovány rozličnými způsoby. V této práci budeme pracovat hlavně s generováním pomocí existující t-normy [8]. My se budeme zabývat φ -transformací uninorem. Postupně budeme uvažovat uninormy z předchozí části a budeme hledat vlastnosti funkce φ , při jejíž transformaci vznikne opět uninorma. Obsahem této kapitoly je i zobecnění transformace pro obecné uninormy. Hlavní motivací byla transformace t-norem, jejichž zobecněním jsou právě uninormy.

Transformace uninorem je významná z hlediska konstrukce nových tříd možných spojek. Znalosti transformace t-norem a uninorem a studium jejich vlastností nám ulehčily hledání podmínek pro modelování fuzzy spojek.

Pro transformaci budeme potřebovat znalost pseudoinverzní funkce k dané funkci, což je monotónní zobecnění klasické inverzní funkce.

Definice 3.1. [8] *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je neklesající, resp. nerostoucí funkce. Pseudoinverzní funkce $\varphi^{(-1)}$ k funkci φ je dána předpisem:*

$$\varphi^{(-1)}(x) = \sup\{z \in [0, 1] : \varphi(z) < x\},$$

pro neklesající funkci φ , resp.

$$\varphi^{(-1)}(x) = \sup\{z \in [0, 1] : \varphi(z) > x\},$$

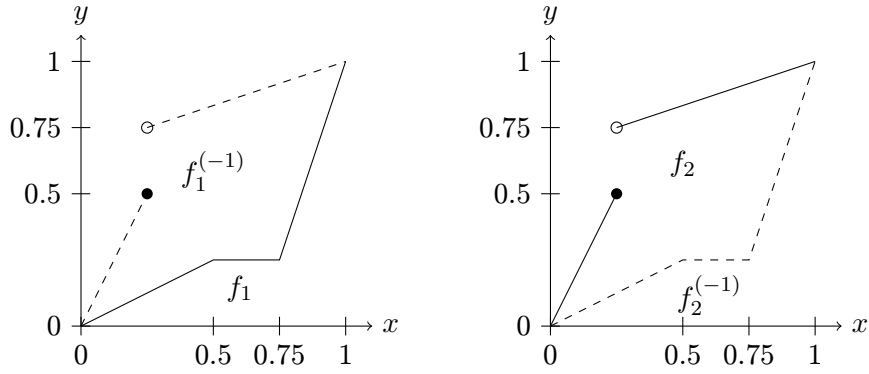
pro nerostoucí φ , s konvencí $\sup \emptyset = 0$.

Poznámka: V případě, že funkce $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je rostoucí, tak platí $\varphi^{(-1)} \circ \varphi(x) = x$. Pokud je funkce φ surjekce, potom platí rovnost $\varphi \circ \varphi^{(-1)}(x) = x$. Příklady funkcí a jejich pseudoinverzů jsou uvedeny na obrázku 3.1.

Výsledná (transformovaná) t-norma T_φ je dána předpisem [8]:

$$T_\varphi(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\} & \text{pokud } \max\{x, y\} = 1, \\ \varphi^{(-1)}[T(\varphi(x), \varphi(y))] & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde T je t-norma a $\varphi^{(-1)}$ je pseudoinverzní funkce k neklesající funkci $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, která je spojitá na intervalu $(0, 1)$. V případě, že v předpise transformované t-normy vynecháme část $\min\{x, y\}$ (se zachováním vlastností funkce φ), vzniklou funkcí bude triangulární subnorma.



Obrázek 3.1: Příklady funkcí f_1 , f_2 a jejich pseudoinverzních funkcí.

Poznámka: Funkce vzniklá transformací nemusí být vždy t-norma. Vlastnosti transformované funkce závisí na funkci φ .

Lemma 3.1. Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je ostře rostoucí, spojitá funkce, potom

$$\varphi \circ \varphi^{(-1)}(x) = \begin{cases} x & x \in (\varphi(0), \varphi(1)), \\ \varphi(0) & x \in [0, \varphi(0)], \\ \varphi(1) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Následující definice zobecňuje φ -transformaci t-norem. Na rozdíl od t-norem, zde není zaručen vznik uninormy.

Definice 3.2. [6] Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je neklesající funkce, U_e je uninorma s neutrálním prvkem e a $e' = \varphi^{(-1)}(e)$, potom funkce U_φ je dána předpisem:

$$U_\varphi(x, y) = \begin{cases} x & y = e', \\ y & x = e', \\ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(y))] & \text{jinak.} \end{cases}$$

Následující tvrzení ukazuje nejjednodušší případ transformace, při které je výsledná funkce opět uninormou. Jedná se o případ, kdy φ je rostoucí bijekce.

Tvrzení 3.1. Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je spojitá, bijektivní funkce a nechť $\exists e' : e' = \varphi^{(-1)}(e)$, kde e je neutrální prvek uninormy U_e . Potom funkce

$$U_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}[U_e(\varphi(x), \varphi(y))]$$

je uninormou s neutrálním prvkem e' .

Důkaz. Komutativnost $U_\varphi(x, y)$ je zřejmá. V důkazu asociativnosti vyjdeme z toho, že $\varphi \circ \varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1} \circ \varphi(x) = x$ (jedná se o bijekci):

$$U_\varphi(x, U_\varphi(y, z)) = U_\varphi(x, \varphi^{-1}[U_e(\varphi(y), \varphi(z))]) = \varphi^{-1}[U_e(\varphi(x), U_e(\varphi(y), \varphi(z)))].$$

Z asociativnosti U_e plyne:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}[U_e(\varphi(x), U_e(\varphi(y), \varphi(z)))] &= \varphi^{-1}[U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z))] = \\ \varphi^{-1}[U_e(\varphi(\varphi^{-1}(U_e(\varphi(x), \varphi(y)))), \varphi(z))] &= \varphi^{-1}[U_e(\varphi(U_\varphi(x, y)), \varphi(z))] = \\ U_\varphi(U_\varphi(x, y), z). \end{aligned}$$

Tedy funkce U_φ je asociativní. Existence neutrálního prvku:

$$\forall x \in [0, 1] : U_\varphi(x, e') = U_\varphi(e', x) = \varphi^{-1}[U_e(e, \varphi(x))] = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x.$$

Díky asociativnosti je neutrální prvek e' jednoznačně určen. Zbývá dokázat monotónnost. $\forall x_1, x_2, y \in [0, 1] : x_1 \leq x_2$, tedy

$$U_\varphi(x_1, y) \leq U_\varphi(x_2, y) \Rightarrow \varphi^{-1}[U_e(\varphi(x_1), \varphi(y))] \leq \varphi^{-1}[U_e(\varphi(x_2), \varphi(y))] \Rightarrow \\ U_e(\varphi(x_1), \varphi(y)) \leq U_e(\varphi(x_2), \varphi(y)),$$

což je díky monotónnosti uninormy U_e splněno. \square

Tvrzení 3.2. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je spojitá, ostře rostoucí funkce a U_e je uninorma s neutrálním prvkem e . Potom je neutrální prvek e' transformované uninormy jednoznačně určen a to $e' = \varphi^{(-1)}(e)$.*

Důkaz. Kdyby neutrální prvek transformované uninormy $e' > \varphi^{(-1)}(e)$ nebo $e' < \varphi^{(-1)}(e)$, tak už funkce U_φ není uninormou, protože by byla porušena monotónnost. \square

3.1 Transformace uninormy U_1

V této části budeme zkoumat transformace uninormy U_1 . Budou nás zajímat situace, kdy výsledná funkce bude uninormou a také kdy výsledná uninorma bude odpovídat uninormě U_1 . Při transformaci budeme nejprve uvažovat ostře rostoucí bijektivní φ .

Příklad 3.1. Nechť funkce $\varphi_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je dána předpisem

$$\varphi_1(x) = x^2,$$

potom funkce $(U_1)_{\varphi_1}$ bude vypadat následovně

$$(U_1)_{\varphi_1}(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & \min\{x, y\} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \min\{x, y\} & (x, y) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \times [0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup [0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \times [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jedná se tedy o uninormu, která je izomorfní s uninormou U_1 ovšem s neutrálním prvkem $e' = \varphi^{(-1)}(e) = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Příklad 3.2. Nyní budeme uvažovat funkci φ , která není surjektivní. Nechť $\varphi_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je funkce dána předpisem

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

Funkce $(U_1)_{\varphi_2}$ je uninormou s neutrálním prvkem $e = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ a navíc $(U_1)_{\varphi_2} = U_1$.

Příklad 3.3. Nakonec ještě uvedeme příklad nespojitě funkce φ . Nechť $\varphi_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je dána předpisem

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Funkce $(U_1)_{\varphi_3}$ je opět uninormou a $(U_1)_{\varphi_3} = U_1$.

Nyní již není těžké prokázat následující tvrzení.

Tvrzení 3.3. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je ostře rostoucí funkce a navíc platí $\varphi^{(-1)}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Potom funkce*

$$(U_1)_\varphi(x, y) = \begin{cases} x & y = \frac{1}{2}, \\ y & x = \frac{1}{2}, \\ \varphi^{(-1)}[U_1(\varphi(x), \varphi(y))] & \text{jinak,} \end{cases}$$

je uninormou s neutrálním prvkem $e = \frac{1}{2}$ a navíc $(U_1)_\varphi = U_1$.

Důkaz. Existence neutrálního prvku $e = \frac{1}{2}$ plyne přímo z definice. Vzhledem k tomu, že funkce φ je ostře rostoucí, platí $\varphi^{(-1)} \circ \varphi(x) = x$. Tedy

$$\begin{aligned} \forall x, y \in [0, \frac{1}{2}) : (U_1)_\varphi(x, y) &= \varphi^{(-1)}[U_1(\varphi(x), \varphi(y))] = \varphi^{(-1)}(0) = 0 = U_1(x, y), \\ \forall x, y \in (\frac{1}{2}, 1] : (U_1)_\varphi(x, y) &= \varphi^{(-1)}(\max\{\varphi(x), \varphi(y)\}) = \max\{x, y\} = U_1(x, y), \\ \forall x \in (\frac{1}{2}, 1], y \in [0, \frac{1}{2}) : (U_1)_\varphi(x, y) &= \varphi^{(-1)}(\min\{\varphi(x), \varphi(y)\}) = \min\{x, y\} = U_1(x, y). \end{aligned}$$

Což znamená, že $(U_1)_\varphi = U_1$. □

Důsledek 3.1. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je ostře rostoucí funkce a nechť $e = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2})$, potom transformovaná uninorma $(U_1)_\varphi$ je dána předpisem:*

$$(U_1)_\varphi = \begin{cases} \max\{x, y\} & \min\{x, y\} \geq e, \\ \min\{x, y\} & (x, y) \in [e, 1] \times [0, e) \cup [0, e) \times [e, 1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poznámky: Pokud $e = 1$, tak $(U_1)_\varphi = T_D$ (drastický součin) a pokud $e = 0$, tak $(U_1)_\varphi = S_M$ (maximová t-konorma).

Nyní se budeme blíže věnovat neklesajícím φ . Následující tvrzení popisuje chování skládání neklesajících funkce φ a její pseudoinverzní funkce $\varphi^{(-1)}$.

Lemma 3.2. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je neklesající funkce a $\mathcal{I} = [a_i, b_i]$ je interval takový, že $\forall x \in \mathcal{I} : \varphi(x) = c_i$ a $\forall x < a_i : \varphi(x) \neq c_i$. Potom*

$$\forall x \in \mathcal{I} : \varphi^{(-1)} \circ \varphi(x) = a_i.$$

Důkaz. Vydeme z definice pseudoinverzní funkce: $\varphi^{(-1)}(x) = \sup\{z \in [0, 1] : \varphi(z) < x\}$ tedy:

$$\varphi^{(-1)}(\varphi(x)) = \sup\{z \in [0, 1] : \varphi(z) < \varphi(x)\} = a_i.$$

□

Tvrzení 3.4. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je funkce a $(U_1)_\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je operace vzniklá φ -transformací uninormy U_1 . Pokud je $(U_1)_\varphi$ uninormou, potom je φ na intervalu $(e', 1]$ ostře rostoucí, kde e' je neutrální prvek transformované uninormy, pro který platí $e' = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2})$.*

Důkaz. Nyní předpokládejme, že φ obsahuje na intervalu $(e', 1]$ konstantní úsek $\mathcal{I} = (a_i, b_i)$ ($a_i > e'$). Na transformované uninormě se to projeví konstantní oblastí ve čtverci $(e', 1] \times (e', 1]$. Potom pro každé $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ podle lemmatu 3.2. platí:

$$(U_1)_\varphi(x_1, x_2) = \varphi^{(-1)}[\max\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}] = a_i.$$

Což je ale spor, protože pro každou uninormu platí, že $U(x_1, x_2) \geq \max\{x_1, x_2\}$, ale $(U_1)_\varphi(x_1, x_2) = a_i < \max\{x_1, x_2\}$. Tedy $(U_1)_\varphi$ není uninorma. □

Tvrzení 3.5. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je funkce a $(U_1)_\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je operace vzniklá φ -transformací uninormy U_1 . Potom pokud je $(U_1)_\varphi$ uninormou, potom je φ na intervalu $[0, e')$ ostře rostoucí, kde e' je neutrální prvek transformované uninormy, pro který platí $e' = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2})$.*

Důkaz. Předpokládejme, že φ obsahuje na intervalu $[0, e')$ konstantní úsek $\mathcal{I} = (a_i, b_i)$ ($b_i < e'$). Na transformované uninormě se to projeví konstantními oblastmi v obdélnících $[0, e') \times (e', 1] \cup (e', 1] \times [0, e')$. Potom pro každé $x_1 \in \mathcal{I}, x_2 \in (e', 1]$ podle lemmatu 3.2. platí:

$$(U_1)_\varphi(x_1, x_2) = \varphi^{(-1)}[\min\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}] = \varphi^{(-1)}(\varphi(x_1)) = a_i.$$

Což je ale spor, protože pro každou uninormu platí, že $U(x_1, x_2) \geq \min\{x_1, x_2\} = x_1$, ale $(U_1)_\varphi(x_1, x_2) = a_i < x_1$. Tedy $(U_1)_\varphi$ není uninorma. \square

Posledním případem umístění konstantního úseku \mathcal{I} je $\forall x \in \mathcal{I} : \varphi(x) = e = \frac{1}{2}$. Potom by se už ale nejednalo o uninormu, protože neutrální prvek je vždy jednoznačný.

Následující důsledek shrnuje poznatky o transformaci uninormy U_1 . Na konci každého příkladu transformace uninorem $U_1 - U_4$ je tvrzení nebo důsledek shrnující poznatky o transformaci dané uninormy. Tyto příklady slouží k detailnějšímu pochopení φ -transformace a možnému zobecnění.

Důsledek 3.2. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je spojitá surjektivní funkce. Potom transformovaná funkce $(U_1)_\varphi$ je uninormou právě tehdy, když φ je ostře rostoucí.*

3.2 Transformace uninormy U_2

Podobně jako v předchozí sekci budeme zkoumat transformace uninormy U_2 . Opět nejprve uvažujme ostře rostoucí, spojitě, surjektivní φ .

Příklad 3.4. Nechť funkce $\varphi_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je dána předpisem

$$\varphi_1(x) = x^2.$$

Potom pro funkci $(U_2)_{\varphi_1}$ platí:

$$(U_2)_{\varphi_1}(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & \min\{x, y\} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \min\{x, y\} & (x, y) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \times [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1], \\ \frac{1}{2} & (x, y) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}) \cup [0, \frac{1}{2}) \times [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Neutrální prvek této uninormy je $e' = \varphi^{(-1)}(e) = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Konstantní úsek má hodnotu $\varphi^{(-1)}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$.

Dále se budeme zabývat ostře rostoucími φ , které nejsou surjektivní.

Tvrzení 3.6. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je ostře rostoucí funkce ($\varphi(1) > \frac{1}{2}$), potom $(U_2)_\varphi$ je uninorma s neutrálním prvkem $e \in (0, 1)$, pouze když $\varphi(0) \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup \{0\}$ a $\varphi^{(-1)}(\frac{1}{4}) < \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2})$.*

Důkaz. Nejprve pokud $\varphi(0) \geq \frac{1}{4}$. Potom transformovaná uninorma je dána předpisem:

$$(U_2)_\varphi = \begin{cases} \max\{x, y\} & \min\{x, y\} \geq e, \\ \min\{x, y\} & (x, y) \in [e, 1] \times [0, e] \cup [0, e] \times [e, 1], \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $e = \sup\{z \in [0, 1] : \varphi(z) \leq \frac{1}{2}\}$ (pokud $e = \frac{1}{2}$, $(U_2)_\varphi = U_1$). Nyní budeme předpokládat, že $\varphi(0) \in (0, \frac{1}{4})$. Z asociativnosti $(U_2)_\varphi$ plyne:

$$\begin{aligned} (U_2)_\varphi((U_2)_\varphi(0, 0), 1) &= (U_2)_\varphi(0, 1) = \varphi^{(-1)}\left(\frac{1}{4}\right) \neq 0, \\ (U_2)_\varphi(0, (U_2)_\varphi(0, 1)) &= (U_2)_\varphi\left(0, \varphi^{(-1)}\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \varphi^{(-1)}\left[U_2\left(\varphi(0), \varphi \circ \varphi^{(-1)}\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right] = \\ &= \varphi^{(-1)}\left[U_2\left(\varphi(0), \frac{1}{4}\right)\right] = \varphi^{(-1)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Tedy $\varphi(0) \notin (\frac{1}{4}, 0)$. Zbývá dokázat, že φ může být i nespojité. Pro $\varphi(0) \geq \frac{1}{4}$ transformovaná uninorma $(U_2)_\varphi = (U_1)_\varphi$, a tedy jak bylo ukázáno v sekci 3.1, φ může být i nespojité. Označíme-li si $e' = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{4})$ a $e = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2})$, potom funkce $(U_2)_\varphi$ je dána předpisem:

$$(U_2)_\varphi = \begin{cases} \max\{x, y\} & \min\{x, y\} \geq e, \\ \min\{x, y\} & (x, y) \in [e', 1] \times [e', e] \cup [e', e] \times [e, 1], \\ \varphi^{(-1)}(\frac{1}{4}) = e' & (x, y) \in [e, 1] \times [0, e'] \cup [0, e'] \times [e, 1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nejprve uvažujeme $e' = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{4}) = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2}) = e$. Potom z asociativnosti plyne (pro $x < e'$):

$$(U_2)_\varphi((U_2)_\varphi(x, 1), 1) = (U_2)_\varphi(e', 1) = 1 \neq e' = (U_2)_\varphi(x, 1) = (U_2)_\varphi(x, (U_2)_\varphi(1, 1)).$$

Což je spor, tedy $e' < e$.

V tomto případě je funkce $(U_2)_\varphi$ uninormou (komutativnost a monotónnost je zřejmá). Důkaz asociativnosti provedeme pouze pro nejzajímavější případy.

Nejprve pokud $x \in [0, e']$, $y \in [0, e]$:

$$(U_2)_\varphi((U_2)_\varphi(x, y), z) = 0 = (U_2)_\varphi(x, (U_2)_\varphi(y, z)).$$

Dále pokud $x \in (0, e)$ a $y, z \in (e, 1]$:

$$(U_2)_\varphi((U_2)_\varphi(x, y), z) = (U_2)_\varphi(e', z) = e' = (U_2)_\varphi(x, (U_2)_\varphi(y, z)).$$

□

Důsledek 3.3. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je ostře rostoucí funkce a navíc platí $\varphi(0) = 0$, $\varphi^{(-1)}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ a $\varphi^{(-1)}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, potom $(U_2)_\varphi = U_2$.*

Nyní se budeme věnovat neklesajícím φ . Předpokládáme, že $e' = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{4})$ a $e = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2})$. Pokud konstantní úsek bude ležet v intervalu $[e', 1]$ bude situace stejná jako při transformaci uninormy U_1 u tvrzení 3.4, resp. 3.5. Tedy na intervalu $[e', 1]$ musí být φ ostře rostoucí. Na intervalu $(0, e')$ stačí, aby φ bylo neklesající a platilo:

$$\max_{x \in (0, e')} \varphi(x) \leq e' \text{ a } \min_{x \in (0, e')} \varphi(x) > 0.$$

Díky tomu můžeme uvést následující tvrzení:

Tvrzení 3.7. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je neklesající funkce, která je na intervalu $[\frac{1}{4}, 1]$ ostře rostoucí a na intervalu $(0, \frac{1}{4})$ neklesající. Potom transformovaná uninorma $(U_2)_\varphi = U_2$ právě když $\varphi(0) = 0$, $\varphi^{(-1)}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$, $\varphi^{(-1)}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,*

$$\min_{x \in (0, \frac{1}{4})} \varphi(x) > 0.$$

Důkaz. Existence neutrálního prvku $e = \frac{1}{2}$ plyne přímo z definice.

$$\begin{aligned} x, y \in [0, \frac{1}{2}) : U_\varphi(x, y) &= 0 = U_2(x, y), \\ x \in [0, \frac{1}{4}], y \in (\frac{1}{2}, 1] : U_\varphi(x, y) &= \varphi^{(-1)}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} = U_2(x, y), \\ x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), y \in (\frac{1}{2}, 1] : U_\varphi(x, y) &= \varphi^{(-1)}[\min\{\varphi(x), \varphi(y)\}] = x = U_2(x, y), \\ x \in (\frac{1}{2}, 1], y \in (\frac{1}{2}, 1] : U_\varphi(x, y) &= \varphi^{(-1)}[\max\{\varphi(x), \varphi(y)\}] = \max\{x, y\} = U_2(x, y). \end{aligned}$$

Opačná implikace plyne z předchozích tvrzení a z faktu, že pokud

$$\exists x \in (0, \frac{1}{4}] : \varphi(x) \notin (0, \frac{1}{4}] \Rightarrow (U_2)_\varphi(x, y) \neq \frac{1}{4}.$$

□

3.3 Transformace uninormy U_3

Poslední dvě transformace už můžeme provést stručněji, bez příkladů. Nejprve budeme opět uvažovat ostře rostoucí φ .

Tvrzení 3.8. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je ostře rostoucí funkce a navíc platí $\varphi^{(-1)}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Potom funkce $(U_3)_\varphi(x, y) = U_3(x, y)$.*

Důkaz. Důkaz je prakticky stejný, jako u tvrzení 3.3. □

Důsledek 3.4. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je ostře rostoucí funkce a $e = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2})$, potom transformovaná uninorma $(U_3)_\varphi$ je dána předpisem:*

$$(U_3)_\varphi = \begin{cases} \min\{x, y\} & \max\{x, y\} = e, \\ 0 & (x, y) \in [0, e]^2, \\ \max\{x, y\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nyní se budeme věnovat neklesajícím φ . Postupně budeme uvažovat konstantní úsek na intervalech $[0, e)$ a $(e, 1]$. Pokud konstantní úsek bude na intervalu $(e, 1]$ bude situace jako při transformaci uninormy U_1 (tvrzení 3.4). Tedy na intervalu $(e, 1]$ funkce φ musí být ostře rostoucí. Průběh φ na $(0, e)$ popisuje následující tvrzení:

Tvrzení 3.9. *Předpokládáme neklesající funkci $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, která je na intervalu $[e, 1]$ ostře rostoucí a na intervalu $(0, e)$ neklesající, kde $e = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2})$. Potom funkce $(U_3)_\varphi$ je uninormou.*

Důkaz. Dokážeme, že $(U_3)_\varphi$ je skutečně uninormou. Existence neutrálního prvku plyne přímo z definice. Transformovaná uninorma $(U_3)_\varphi$ bude vypadat:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in [0, e]^2 : (U_3)_\varphi(x, y) &= \varphi^{(-1)}(0) = 0, \\ \forall (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus [0, e]^2 : (U_3)_\varphi(x, y) &= \varphi^{(-1)}(\max\{\varphi(x), \varphi(y)\}) = \max\{x, y\}. \end{aligned}$$

Monotónnost a komutativnost je zřejmá a asociativnost lze taky snadno prokázat. Funkce $(U_3)_\varphi$ je tedy uninormou. □

Důsledek 3.5. Předpokládáme neklesající funkci $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, která je na intervalu $[e, 1]$ ostře rostoucí a na intervalu $(0, e)$ neklesající. Potom $(U_3)_\varphi = U_3$ právě když $\varphi^{(-1)}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

3.4 Transformace uninormy U_4

Opět nejprve budeme uvažovat ostře rostoucí φ . Předpokládejme, že $e = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2})$ a $e' = \varphi^{(-1)}(\frac{3}{4})$, potom můžeme transformaci uninormy U_4 rozdělit na 3 případy.

1. $\forall x \in (e, 1] : \varphi(x) \geq \frac{3}{4}$. Potom transformovaná uninorma $(U_4)_\varphi$ odpovídá uninormě U_3 s neutrálním prvkem e (pokud $e = \frac{1}{2}$, potom $(U_4)_\varphi = U_3$).
2. $\forall x \in (e, 1] : \varphi(x) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Potom transformovaná uninorma $(U_4)_\varphi$ odpovídá uninormě U_1 s neutrálním prvkem e .
3. $\exists x_1, x_2 \in (e, 1] : \varphi(x_1) \geq \frac{3}{4} \wedge \varphi(x_2) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Potom transformovaná uninorma $(U_4)_\varphi$ je dána předpisem:

$$(U_4)_\varphi(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & \min\{x, y\} \geq e \text{ nebo } \max\{x, y\} \geq e', \\ 0 & \max\{x, y\} < e, \\ \min\{x, y\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tvrzení 3.10. Necht' $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je ostře rostoucí funkce a navíc platí, že $e = \varphi^{(-1)}(\frac{1}{2})$ a $e' = \varphi^{(-1)}(\frac{3}{4})$. Potom transformovaná funkce $(U_4)_\varphi$ je uninormou.

Důkaz. Jak již bylo zmíněno dříve, mohou nastat 3 situace. První dvě jsou určitě uninormou (bylo ukázáno dříve). Zbývá tedy dokázat 3. případ. Neutrální prvek plyne přímo z definice, monotónnost a komutativnost je zřejmá. Zbývá tedy dokázat asociativnost (důkaz naznačíme jen pro vybrané x, y, z). Pokud $x \in [0, e)$, $y \in [e', 1]$, tedy

$$(U_4)_\varphi((U_4)_\varphi(x, y), z) = (U_4)_\varphi(y, z) = \max\{y, z\} = (U_4)_\varphi(x, (U_4)_\varphi(y, z)).$$

Dále $x \in (e, 1]$, $y \in [e', 1]$:

$$(U_4)_\varphi(x, (U_4)_\varphi(y, z)) = \max\{x, y, z\} = (U_4)_\varphi((U_4)_\varphi(x, y), z),$$

$x, z \in [0, e)$, $y \in (e, e')$:

$$(U_4)_\varphi(x, (U_4)_\varphi(y, z)) = (U_4)_\varphi(x, z) = 0 = (U_4)_\varphi((U_4)_\varphi(x, y), z),$$

$x \in [0, e)$, $y \in (e, e')$, $z \in [e', 1]$:

$$(U_4)_\varphi(x, (U_4)_\varphi(y, z)) = (U_4)_\varphi(x, z) = z = (U_4)_\varphi((U_4)_\varphi(x, y), z).$$

$(U_4)_\varphi$ je tedy uninormou. □

Dále se budeme věnovat funkcím φ , které jsou neklesající. Pokud nastane 1. případ, potom, jak jsme již ukázali v předchozí sekci, je možné, aby funkce φ byla na intervalu $[0, e)$ neklesající. Pokud nastane 2. případ, φ musí být ostře rostoucí.

Tvrzení 3.11. Aby funkce $(U_4)_\varphi$ byla uninormou, tak funkce φ může být na intervalu $[0, e)$ neklesající pouze tehdy, když $\forall x \in (e, 1] : \varphi(x) \geq \frac{3}{4}$.

Důkaz. To, že funkce $(U_4)_\varphi$ je uninormou, bylo ukázáno již dříve. Zbývá tedy dokázat, že pokud $\exists x_0 \in (e, 1] : \varphi(x_0) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, tak už je funkce φ ostře rostoucí. Nyní předpokládejme opak, tedy že takové x_0 existuje, ale φ je na intervalu $[0, e)$ neklesající s konstantním úsekem $\mathcal{I} = (a_i, b_i) \subseteq [0, e)$. Potom pro $y \in \mathcal{I}$ platí:

$$(U_4)_\varphi(x_0, y) = \varphi^{(-1)}(\min\{\varphi(x_0), \varphi(y)\}) = \varphi^{(-1)} \circ \varphi(y) = a_i < y,$$

což je spor. Platí tedy, že $\forall x \in (e, 1] : \varphi(x) \geq \frac{3}{4}$. \square

Důsledek 3.6. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je ostře rostoucí funkce. Potom $(U_4)_\varphi(x, y) = U_4(x, y)$ právě když $\varphi^{(-1)}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ a $\varphi^{(-1)}(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$.*

3.5 Zobecnění transformace uninorem

V této části se budeme snažit zobecnit konkrétní závěry o φ -transformacích učiněných v předchozích sekcích. Postupně budeme uvažovat vlastnosti funkce φ a budeme stanovovat podmínky na uninormu U_e , aby při transformaci touto funkcí φ vznikla opět uninorma.

3.5.1 Ostře rostoucí, spojitá funkce φ

V této sekci se budeme zabývat ostře rostoucí, spojitou funkcí φ (φ tedy nemusí být nutně surjekce). To znamená, že $\varphi(0) \geq 0$ nebo $\varphi(1) \leq 1$.

Poznámka: Budeme uvažovat, že $\varphi(0) < e < \varphi(1)$. V opačném případě by už funkce U_φ nebyla uninormou s neutrálním prvkem $e \in (0, 1)$ (transformovaná funkce by byla t-normou nebo t-konormou).

Definice 3.3. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je neklesající funkce a \mathcal{I}_φ je množina $\mathcal{I}_\varphi \subseteq [0, 1]^2$ taková, že $\forall (x, y) \in \mathcal{I}_\varphi : U_e(\varphi(x), \varphi(y)) < \varphi(0)$. Dále $\mathcal{J}_\varphi \subseteq [0, 1]^2$ je množina taková, že $\forall (x, y) \in \mathcal{J}_\varphi : U_e(\varphi(x), \varphi(y)) > \varphi(1)$.*

Lemma 3.3. *Ze skládání funkce a její pseudoinverze plyne:*

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathcal{I}_\varphi : \varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(y))] &= \varphi(0), \\ \forall (x, y) \in \mathcal{J}_\varphi : \varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(y))] &= \varphi(1). \end{aligned}$$

Lemma 3.4. *Z monotónnosti uninorem a toho, že funkce φ je neklesající, vyplývá:*

$$\begin{aligned} \text{pokud } (x, y_1) \in \mathcal{I}_\varphi, \text{ potom } (x, y_2) \in \mathcal{I}_\varphi, \text{ pro každé } y_2 \leq y_1, \\ \text{pokud } (x, y_1) \in \mathcal{J}_\varphi, \text{ potom } (x, y_2) \in \mathcal{J}_\varphi, \text{ pro každé } y_1 \leq y_2. \end{aligned}$$

Tvrzení 3.12. *Pokud $(x, y) \in \mathcal{I}_\varphi$, tak $(x, y) \in [0, e')^2$, kde $e' = \varphi^{(-1)}(e)$.*

Důkaz. Předpokládejme opak, tedy že existuje taková uspořádaná dvojice $(x_0, y_0) \in \mathcal{I}_\varphi$, že $(x_0, y_0) \notin [0, e')^2$. Pro každou uninormu ale platí $U_e(x, y) \geq \min\{x, y\}$, pro $(x, y) \notin [0, e)^2$. Vzhledem k tomu, že $(x_0, y_0) \notin [0, e')^2$ platí buď $\varphi(x_0) \geq e$ nebo $\varphi(y_0) \geq e$. Tedy pro dvojici (x_0, y_0) platí $U_e(\varphi(x_0), \varphi(y_0)) \geq \min\{\varphi(x_0), \varphi(y_0)\} \geq \varphi(0)$. Což je spor. \square

Tvrzení 3.13. *Pokud $(x, y) \in \mathcal{J}_\varphi$, tak $(x, y) \in (e', 1]^2$, kde $e' = \varphi^{(-1)}(e)$.*

Důkaz. Opět předpokládejme, že existuje taková uspořádaná dvojice $(x_0, y_0) \in \mathcal{J}_\varphi$, že $(x_0, y_0) \notin (e', 1]^2$. Pro každou uninormu ale platí $U_e(x, y) \leq \max\{x, y\}$, pro $(x, y) \notin (e, 1]^2$. Vzhledem k tomu, že $(x_0, y_0) \notin (e', 1]^2$ platí buď $\varphi(x_0) \leq e$ nebo $\varphi(y_0) \leq e$. Tedy pro dvojici (x_0, y_0) platí $U_e(\varphi(x_0), \varphi(y_0)) \leq \max\{\varphi(x_0), \varphi(y_0)\} \leq \varphi(1)$. Což je spor. \square

Tvrzení 3.14. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je spojitá ostře rostoucí funkce taková, že $\varphi(0) < e$ a $\varphi(1) = 1$. Potom pokud $U_e(U_e(\varphi(0), \varphi(0)), \varphi(z)) = U_e(\varphi(0), \varphi(z))$ nebo $U_e(\varphi(0), \varphi(z)) = \varphi(0)$, potom transformovaná funkce U_φ je uninorma (pro každé $z \in [0, 1]$).*

Důkaz. Nejprve dokážeme asociativnost. Podle definice platí $U_\varphi(U_\varphi(x, y), z) = U_\varphi(x, U_\varphi(y, z))$. I když existuje celkem 8 možností, jak vytvořit uspořádané dvojice z x, y, z , je možné si vytvořit 3 menší skupiny:

1. $(x, y) \in \mathcal{I}_\varphi \wedge (y, z) \in \mathcal{I}_\varphi$
2. $(x, y) \in \mathcal{I}_\varphi \wedge (y, z) \notin \mathcal{I}_\varphi$ nebo $(x, y) \notin \mathcal{I}_\varphi \wedge (y, z) \in \mathcal{I}_\varphi$
3. $(x, y) \notin \mathcal{I}_\varphi \wedge (y, z) \notin \mathcal{I}_\varphi$

Aby byl důkaz úplný, je nutné ukázat, že pro každé x, y, z z každé skupiny je splněna podmínka asociativnosti. Začneme 3. skupinou. Zde platí, že $\varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(y))] = U_e(\varphi(x), \varphi(y))$ a $\varphi^{(-1)} \circ \varphi[U_e(\varphi(y), \varphi(z))] = U_e(\varphi(y), \varphi(z))$. Důkaz bude tedy stejný, jako v důkazu tvrzení 3.1.

Nyní se budeme věnovat 1. skupině. Zde platí:

$$\begin{aligned} U_\varphi(x, U_\varphi(y, z)) &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(y), \varphi(z))])] = \\ &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(0))] = 0, \\ U_\varphi(U_\varphi(x, y), z) &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(y))], \varphi(z))] = \\ &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(0), \varphi(z))] = 0. \end{aligned}$$

Zde je tedy asociativnost splněna. Zbývá ještě prověřit druhou skupinu. Tedy pro $(x, y) \in \mathcal{I}_\varphi \wedge (y, z) \notin \mathcal{I}_\varphi$

$$\begin{aligned} U_\varphi(U_\varphi(x, y), z) &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(y))], \varphi(z))] = \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(0), \varphi(z))], \\ U_\varphi(x, U_\varphi(y, z)) &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(y), \varphi(z))])] = \\ &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), U_e(\varphi(y), \varphi(z)))] = \varphi^{(-1)}[U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z))]. \end{aligned}$$

Rovnost $\varphi^{(-1)}[U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z))] = \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(0), \varphi(z))]$ nastává v případě, že

1. $U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z)) \leq U_e(\varphi(0), \varphi(z)) \leq \varphi(0)$. První část nerovnosti plyne přímo z monotónnosti uninormy U_e . Druhou část nerovnosti si můžeme rozdělit na situaci, kdy $\varphi(z) \geq e$ a $\varphi(z) < e$.

$$\varphi(z) < e \Rightarrow U_e(\varphi(0), \varphi(z)) \leq \min\{\varphi(0), \varphi(z)\} = \varphi(0),$$

což je splněno vždy.

$$\varphi(z) \geq e \Rightarrow U_e(\varphi(0), \varphi(z)) \geq \min\{\varphi(0), \varphi(z)\} \Rightarrow U_e(\varphi(0), \varphi(z)) = \varphi(0).$$

2. $U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z)) = U_e(\varphi(0), \varphi(z))$. Díky monotónnosti uninorem dále platí

$$\begin{aligned} U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z)) &= U_e(\min\{U_e(\varphi(x), \varphi(y))\}, \varphi(z)) = \\ &= U_e(U_e(\varphi(0), \varphi(0)), \varphi(z)) = U_e(\varphi(0), \varphi(z)). \end{aligned}$$

Čímž je důkaz asociativnosti dokončen. Komutativnost je zřejmá, stejně jako existence neutrálního prvku. Monotónnost lze také jednoduše dokázat. \square

Tvrzení 3.15. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je spojitá ostře rostoucí funkce taková, že $\varphi(1) > e$, $\varphi(0) = 0$. Potom pokud $U_e(U_e(\varphi(1), \varphi(1)), \varphi(z)) = U_e(\varphi(1), \varphi(z))$ nebo $U_e(\varphi(1), \varphi(z)) = \varphi(1)$, potom transformovaná funkce U_φ je uninorma (pro každé $z \in [0, 1]$).*

Důkaz. Důkaz je téměř identický, jako důkaz tvrzení 3.14, ale pro úplnost ho zde uvedeme. Komutativnost, stejně jako monotónnost a existence neutrálního prvku je zřejmá, zbývá tedy dokázat asociativnost. Podle definice platí $U_\varphi(U_\varphi(x, y), z) = U_\varphi(x, U_\varphi(y, z))$. Jako v předchozím důkazu si vytvoříme 3 skupiny:

1. $(x, y) \in \mathcal{J}_\varphi \wedge (y, z) \in \mathcal{J}_\varphi$
2. $(x, y) \in \mathcal{J}_\varphi \wedge (y, z) \notin \mathcal{J}_\varphi$ nebo $(x, y) \notin \mathcal{J}_\varphi \wedge (y, z) \in \mathcal{J}_\varphi$
3. $(x, y) \notin \mathcal{J}_\varphi \wedge (y, z) \notin \mathcal{J}_\varphi$

Aby byl důkaz úplný, je nutné ukázat, že pro každé x, y, z z každé skupiny je splněna podmínka asociativnosti. Začneme opět 3. skupinou. Zde platí, že $\varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(y))] = U_e(\varphi(x), \varphi(y))$ a $\varphi^{(-1)} \circ \varphi[U_e(\varphi(y), \varphi(z))] = U_e(\varphi(y), \varphi(z))$. Důkaz bude tedy stejný, jako v tvrzení 3.1.

Nyní se budeme věnovat 1. skupině. Zde platí:

$$\begin{aligned} U_\varphi(x, U_\varphi(y, z)) &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(y), \varphi(z))])] = \\ &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(1))] = 1, \\ U_\varphi(U_\varphi(x, y), z) &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(y))], \varphi(z))] = \\ &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(1), \varphi(z))] = 1. \end{aligned}$$

Zde je tedy asociativnost splněna. Zbývá ještě prověřit druhou skupinu. Tedy pro $(x, y) \in \mathcal{J}_\varphi \wedge (y, z) \notin \mathcal{J}_\varphi$

$$\begin{aligned} U_\varphi(U_\varphi(x, y), z) &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi(y))], \varphi(z))] = \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(1), \varphi(z))], \\ U_\varphi(x, U_\varphi(y, z)) &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), \varphi \circ \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(y), \varphi(z))])] = \\ &= \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(x), U_e(\varphi(y), \varphi(z)))] = \varphi^{(-1)}[U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z))]. \end{aligned}$$

Rovnost $\varphi^{(-1)}[U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z))] = \varphi^{(-1)}[U_e(\varphi(1), \varphi(z))]$ nastává v případě, že

1. $\varphi(1) \leq U_e(\varphi(1), \varphi(z)) \leq U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z))$. Druhá část nerovnosti plyne přímo z monotónnosti uninormy U_e . První část nerovnosti můžeme rozdělit na situaci, kdy $\varphi(z) \geq e$ a $\varphi(z) < e$.

$$\varphi(z) \geq e \Rightarrow U_e(\varphi(1), \varphi(z)) \geq \max\{\varphi(1), \varphi(z)\} = \varphi(1),$$

což je splněno vždy.

$$\varphi(z) < e \Rightarrow U_e(\varphi(1), \varphi(z)) \leq \max\{\varphi(1), \varphi(z)\} \Rightarrow U_e(\varphi(1), \varphi(z)) = \varphi(1).$$

2. $U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z)) = U_e(\varphi(1), \varphi(z))$. Díky monotónnosti můžu napsat

$$\begin{aligned} U_e(U_e(\varphi(x), \varphi(y)), \varphi(z)) &= U_e(\max\{U_e(\varphi(x), \varphi(y))\}, \varphi(z)) = \\ &= U_e(U_e(\varphi(1), \varphi(1)), \varphi(z)) = U_e(\varphi(1), \varphi(z)). \end{aligned}$$

Čímž je důkaz asociativnosti dokončen a tedy U_φ je uninorma. □

Tvrzení 3.16. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je spojitá ostře rostoucí funkce. Potom pokud platí $U_e(U_e(\varphi(0), \varphi(0)), \varphi(z)) = U_e(\varphi(0), \varphi(z))$ nebo $U_e(\varphi(0), \varphi(z)) = \varphi(0)$ a zároveň $U_e(U_e(\varphi(1), \varphi(1)), \varphi(z)) = U_e(\varphi(1), \varphi(z))$ nebo $U_e(\varphi(1), \varphi(z)) = \varphi(1)$, potom U_φ je uninorma (pro každé $z \in [0, 1]$).*

Důkaz. Je snadné zjistit, že funkce U_φ je komutativní, monotónní funkce s neutrálním prvkem. Zbývá tedy ještě dokázat asociativnost. Podobně jako v předchozích dvou důkazech si rozdělíme dvojice (x, y) , (y, z) do skupin. Pokud budeme uvažovat rozdělení do skupin jako v důkazu tvrzení 3.14 a 3.15, jediné další rozdělení, které již není obsaženo, je $(x, y) \in \mathcal{I}_\varphi$, $(y, z) \in \mathcal{J}_\varphi$ (nebo naopak). Z lemmatu 3.4 tato situace ale nastat nemůže. Důkaz asociativnosti je tedy stejný jako v tvrzení 3.14 a 3.15. \square

Při řešení otázky, kdy při φ -transformaci uninorem vznikne ta samá uninorma, budeme nejprve uvažovat zobrazení $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jako spojitou bijekci, kde zřejmě musí platit $\varphi(e) = e$. Tomu se budeme věnovat v následující kapitole.

Kapitola 4

Invarianty transformace

V této kapitole se budeme zabývat hledáním invariantů transformace. Invarianty jsou důležité z teoretického hlediska v procesu třídění matematických objektů, v našem případě uninorem a v praxi nám umožňují lepší orientaci v problematice transformace uninorem.

Při vyšetřování invariantnosti φ -transformace uninorem budeme vycházet z definice transformace uninorem, tedy

$$\varphi(U(x, y)) = U_\varphi(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Uvedená rovnost platí však pouze pro neklesající surjektivní φ .

4.1 Invarianty transformace na množině $[0, e) \times (e, 1]$

V této sekci budeme uvažovat uninormy, které splňují následující podmínku.

Definice 4.1. *Uninormu $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ nazveme jednoduchou, jestliže pro každé $(x, y) \in [0, e) \times (e, 1]$ existuje levé nebo pravé okolí bodu y , na kterém uninorma U nabývá konstantní hodnoty. Tedy*

$$\forall (x, y) \in [0, e) \times (e, 1], \forall y_1, y_2 \in U_\varepsilon^+(y) : U(x, y_1) = U(x, y_2) \quad (U_\varepsilon^-(y)).$$

Tato podmínka formálně vylučuje uninormy, spojitě rostoucí v y -ové souřadnici na obdélníku $[0, e) \times (e, 1]$ (symetricky na obdélníku $(e, 1] \times [0, e)$). Příkladem jednoduché uninormy mohou být uninormy U_1 a U_2 uvedené v sekci 2.2.

V dalším textu budeme definiční obor relace R označovat jako $D(R)$ a obor hodnot jako $H(R)$. Dále budeme uvažovat konvenci pro bijektivní funkci $f : X \rightarrow X$:

$$f^0 = \text{id}_X, \quad f^{n+1} = f \circ f^n, \quad f^{-n-1} = f^{-1} \circ f^{-n}, \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Definice 4.2. *Nechť $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je uninorma s neutrálním prvkem e . Potom definujeme $S(U) = \{(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)\}$ jako systém množin takových, že*

$$\forall J \in S(U) \text{ a } \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in J : U(x_1, y_1) = U(x_2, y_2).$$

Navíc musí pro každé J existovat $\alpha_J \in H(J)$, takové, že

$$\forall p \in D(J) : U(p, \alpha_J) \neq U(x, \alpha_J), \text{ kde } x \in [0, e) \setminus D(J).$$

Definice 4.3. Necht $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je uninorma s neutrálním prvkem e . Potom definujeme množinu $M_x(U) = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ jako množinu bodů nespojitosti x -ové souřadnice uninormy U na obdélníku $[0, e) \times (e, 1]$. Tedy $\forall (a_i, b_i) \in M_x$ platí $\lim_{x \rightarrow a_i} U(x, b_i) \neq U(a_i, b_i)$. Podobně množinu bodů nespojitosti y -ové souřadnice definujeme jako M_y .

Následující tvrzení určuje vlastnosti transformátoru φ v bodech nespojitosti uninormy U .

Tvrzení 4.1. Necht $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je jednoduchá uninorma a $M_x(U)$ je konečná množina bodů nespojitosti x -ové souřadnice uninormy U . Funkce $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je neklesající bijekce. Potom pokud φ -transformací vznikne původní uninorma, potom $\forall (a_i, b_i) \in M_x : \varphi(a_i) = a_i$.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje alespoň jedno $(a_i, b_i) \in M_x(U)$, pro které $\varphi(a_i) \neq a_i$. Vzhledem k tomu, že $M_x(U)$ je konečná množina, zvolíme (x_0, y_0) jako nejmenší z nich podle první souřadnice. Nejprve uvažujme situaci, kdy $\varphi(x_0) > x_0$. Potom existuje $c = \varphi^{-1}(x_0)$, $d = \varphi^{-1}(y_0)$ a platí, že $c < x_0$. Dle předpokladu je φ -transformace invariantní, tedy platí $\varphi(U(c, d)) = U(\varphi(c), \varphi(d)) = U(x_0, y_0)$. Vzhledem k tomu, že $c < x_0$, platí $\varphi(c) = c$ nebo je uninorma U v bodě (c, d) spojitá. V prvním případě platí $\varphi(c) = x_0 = c$, což jsme chtěli dokázat. V druhém případě díky spojitosti φ platí, že

$$\lim_{x \rightarrow c} \varphi(U(x, d)) = \varphi(U(c, d)), \text{ ale } \lim_{x \rightarrow c} U(\varphi(x), \varphi(d)) \neq U(\varphi(c), \varphi(d)).$$

Což je spor.

Nyní předpokládejme, že $\varphi(x_0) < x_0$. Opět, pokud vznikne původní uninorma, potom platí $\varphi(U(x_0, y_0)) = U(\varphi(x_0), \varphi(y_0))$. Vzhledem k tomu, že $\varphi(x_0) < x_0$, platí buď $\varphi \circ \varphi(x_0) = \varphi(x_0)$, nebo je uninorma U v bodě $(\varphi(x_0), \varphi(y_0))$ spojitá. V prvním případě dostáváme spor s předpokladem, že $\varphi \circ \varphi(x_0) < \varphi(x_0)$. V druhém případě, platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} U(\varphi(x), \varphi(y_0)) = U(\varphi(x_0), \varphi(y_0)), \text{ ale } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(U(x, y_0)) \neq \varphi(U(x_0, y_0)).$$

Což je opět spor. Platí tedy, že $\varphi(x_0) = x_0$ a tento postup můžeme zopakovat pro zbylé body.

Poznámka: Velice podobným způsobem se dá dokázat, že toto tvrzení platí i pro množinu M_y . Tedy $\forall (x, y) \in M_y : \varphi(y) = y$. \square

Následující příklad ukazuje důležitost podmínky konečnosti množiny $M_x(U)$ z předchozího tvrzení.

Příklad 4.1. Uvažujme spojitou bijektivní funkci $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ danou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{4}} & x \leq \frac{1}{2}, \\ x & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dále uvažujme funkci $U_* : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ s neutrálním prvkem $e = \frac{1}{2}$ danou předpisem:

$$U^*(x, y) = \begin{cases} 1 & \min\{x, y\} > \frac{1}{2}, \\ \min\{x, y\} & \max\{x, y\} = \frac{1}{2}, \\ \max\{x, y\} & \min\{x, y\} = \frac{1}{2}, \\ f^{i+1}\left(\frac{1}{4}\right) & \max\{x, y\} > \frac{1}{2} \text{ a} \\ & \min\{x, y\} \in (f^i\left(\frac{1}{4}\right), f^{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)] \text{ pro } i \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nejprve dokážeme, že funkce U^* je uninormou. Podmínka existence neutrálního prvku, stejně jako monotónnost a komutativnost je zřejmá. Nyní dokážeme asociativnost, což zde ukážeme na nejzajímavějších případech. Uvažujme tedy $x \in (f^i(\frac{1}{4}), f^{i+1}(\frac{1}{4}))$, $y, z \in (\frac{1}{2}, 1]$:

$$U^*(U^*(x, y), z) = U^*\left(f^{i+1}\left(\frac{1}{4}\right), z\right) = f^{i+1}\left(\frac{1}{4}\right) = U^*(x, 1) = U^*(x, U^*(y, z)).$$

Podobně se dá asociativnost dokázat i pro ostatní případy. Funkce $U_\varphi^*(x, y)$ je tedy uninormou. Nyní budeme dokazovat invariantnost při φ -transformaci. Budeme uvažovat $\varphi(x) = f(x)$. Ukážeme zde opět pouze nejzajímavější případ. Uvažujme tedy $x \in (\varphi^i(\frac{1}{4}), \varphi^{i+1}(\frac{1}{4}))$, $y, z \in (\frac{1}{2}, 1]$:

$$U^*(\varphi(x), \varphi(y)) = \varphi^{i+2}\left(\frac{1}{4}\right) = \varphi \circ \varphi^{i+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \varphi(U^*(x, y)).$$

Podobně je možné dokázat invariantnost i pro ostatní případy. Uninorma U^* s funkcí φ tvoří příklad, kdy není pro invariantní φ -transformaci nutné, aby funkce φ měla v bodech nespojitosti U^* pevné body.

Tvrzení 4.2. *Nechť $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je jednoduchá uninorma s neutrálním prvkem e a $S(U)$ systém podmnožin uninormy U . Dále nechť $M_y(U)$ je konečná množina. Potom $\forall J \in S(U) : \varphi(\alpha_J) \in H(J)$.*

Důkaz. Vzhledem k podmínkám kladeným na uninormu U je na y -ových souřadnicích $y_1 = \sup J_y$ a $y_2 = \inf J_y$ bod nespojitosti nebo $y_1 = 1$, $y_2 = e$ a tedy díky předchozímu tvrzení platí, že $\varphi(\alpha_J) \in H(J)$. \square

Tvrzení 4.3. *Nechť $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je jednoduchá uninorma a $S(U)$ systém podmnožin uninormy U . Předpokládáme také, že $M_y(U)$ je konečná množina a $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je spojitá bijektivní funkce. Dále předpokládáme, že φ -transformací vznikne původní uninorma. Pokud $\exists x \in D(J) : \varphi(x) \in D(J)$, potom $\varphi(\sup J_x) = \sup J_x$, pro $J \in S(U)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\varphi(s) \neq s$, kde $s = \sup J_x$. Nejprve budeme uvažovat situaci, kdy $\varphi(s) > s$. Díky předpokladům existují taková $p, q \in D(J)$, že $\varphi(p) \in D(J)$ a $\varphi(q) \notin D(J)$. Potom pro φ -transformaci platí

$$U(p, \varphi^{-1}(\alpha_J)) = U(q, \varphi^{-1}(\alpha_J)) \Leftrightarrow \varphi(U(p, \varphi^{-1}(\alpha_J))) = \varphi(U(q, \varphi^{-1}(\alpha_J))),$$

ale také podle předchozího tvrzení

$$U(\varphi(p), \alpha_J) \neq U(\varphi(q), \alpha_J),$$

což je spor. Dále uvažujme případ, kdy $\varphi(s) < s$. Za této situace existují $p \in D(J)$ a $q \in [0, e) \setminus D(J)$, takové, že $\varphi(p), \varphi(q) \in D(J)$. Potom pro φ -transformaci platí

$$U(p, \alpha_J) \neq U(q, \alpha_J) \Leftrightarrow \varphi(U(p, \alpha_J)) \neq \varphi(U(q, \alpha_J)),$$

ale opět podle předchozího tvrzení

$$U(\varphi(p), \varphi(\alpha_J)) = U(\varphi(q), \varphi(\alpha_J)),$$

což je opět spor. Platí tedy, že $\varphi(s) = s$.

Poznámka: Pokud $\inf J_x$ je bod nespojitosti, je podmínka z tvrzení podle tvrzení 4.1 splněna. \square

Tvrzení 4.4. *Nechť $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je jednoduchá uninorma a $S(U)$ konečný systém podmnožin uninormy U . Dále předpokládáme spojitou bijektivní funkci $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Pokud φ -transformací vznikne původní uninorma, potom platí, že*

$$\forall J \in S(U) : \varphi(\sup J_x) = \sup J_x \text{ a } \varphi(\inf J_x) = \inf J_x.$$

Důkaz. Předpokládejme libovolnou množinu $J_i \in S(U)$ a $a_i = \inf D(J_i), b_i = \sup D(J_i)$. Vzhledem k tomu, že J_i je množina, na které uninorma U nabývá konstantní hodnoty, potom i na množinách $(\varphi^{-1}(a_i), \varphi^{-1}(b_i)) \times H(J_i)$ a $(\varphi(a_i), \varphi(b_i)) \times H(J_i)$ nabývá konstantní hodnoty. Takto postupně můžeme „generovat“ další intervaly, dostáváme tedy množinu intervalů, na kterých U nabývá konstantních hodnot:

$$M(U) = \{(a_i, b_i), (\varphi^{-1}(a_i), \varphi^{-1}(b_i)), (\varphi^{-2}(a_i), \varphi^{-2}(b_i)), \dots, \\ \dots, (\varphi(a_i), \varphi(b_i)), (\varphi^2(a_i), \varphi^2(b_i)), \dots\}.$$

Navíc platí, že $\forall K, L \in M(U), K \neq L : K \cap L = \emptyset$. Vzhledem k tomu, že $S(U)$ je konečný systém množin, je i množina $M(U)$ konečná a tedy existuje nějaké $\varphi^n(a_i) = \varphi^{n-1}(a_i)$ a tedy $\varphi(a_i) = a_i$. Podobně existuje nějaké $\varphi^n(b_i) = \varphi^{n-1}(b_i)$ a tedy $\varphi(b_i) = b_i$. \square

Poznámka: Pokud je splněna podmínka konečnosti $S(U)$ předchozího tvrzení, funkce φ nemusí být rostoucí bijekce na celém definičním oboru, ale stačí na intervalu $D(\varphi) \setminus D(J)$, kde $J \in S(U)$.

Příklad 4.2. Uvažujme uninormu U s neutrálním prvkem $e = \frac{1}{2}$ danou předpisem

$$U(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & \min\{x, y\} \geq \frac{1}{2}, \\ \min\{x, y\} & (x, y) \in (\frac{1}{2}, 1] \times (\frac{3}{8}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{8}, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1], \\ \frac{1}{8} & (x, y) \in (\frac{1}{2}, 1] \times (0, \frac{1}{8}] \cup (0, \frac{1}{8}] \times (\frac{1}{2}, 1], \\ \frac{1}{4} & (x, y) \in (\frac{1}{2}, 1] \times (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}] \cup (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}] \times (\frac{1}{2}, 1], \\ \frac{3}{8} & (x, y) \in (\frac{1}{2}, 1] \times (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}] \cup (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}] \times (\frac{1}{2}, 1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dále uvažujeme spojitou bijekci $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Na této uninormě je množina $M_x(U) = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\}$ a $M_y(U) = \emptyset$. Potom podle tvrzení 4.1 pokud φ -transformací vznikne původní uninorma, potom platí $\varphi(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8}$, $\varphi(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ a $\varphi(\frac{3}{8}) = \frac{3}{8}$ (podle tvrzení 4.3).

Důsledek 4.1. *Nechť $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je jednoduchá uninorma, funkce $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je spojitá bijekce a $M_y(U)$ je konečná množina. Vzhledem k požadovaným vlastnostem uninormy U , pokud po φ -transformaci vznikne původní uninorma, potom je možné interval $(e, 1]$ rozdělit na dílčí intervaly $I_i = (y_i, y_{i+1}]$, na kterých platí $\varphi(y_i) = y_i$.*

Tvrzení 4.5. *Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je spojitá bijekce a $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je jednoduchá uninorma. Uvažujme funkci $\psi_i(x) = U(x, y)$ pro $x \in [0, e)$ a $y \in I_i$. Potom na φ -transformaci na množině $[0, e) \times (e, 1]$ vznikne původní uninorma právě tehdy, když*

$$\varphi \circ \psi_i(x) = \psi_i \circ \varphi(x), \forall x \in [0, e), i \leq n, \quad (4.1)$$

kde n je počet subintervalů.

Důkaz. V důkazu vyjdeme z definice invariantní transformace:

$$\varphi(U(x, y)) = \varphi \circ \psi_i(x), \text{ pro } x < e, y \in I_i.$$

Díky výše uvedeným předpokladům a předchozímu důsledku, tedy $\varphi(y) \in I_i$, pro $y \in I_i$ platí

$$\varphi(U(x, y)) = \varphi \circ \psi_i(x) = U(\varphi(x), \varphi(y)) = U(\varphi(x), y) = \psi_i \circ \varphi(x),$$

pro $x < e, y \in I_i$. □

Z tohoto tvrzení plyne, že pokud si označíme množinu všech funkcí φ , které splňují rovnici (4.1), jako \mathcal{F}_i , tak množina všech funkcí φ , označíme si ji jako \mathcal{F}_φ , při jejichž transformaci vznikne ta samá uninorma na množině $[0, e) \times (e, 1]$, bude dána následujícím vztahem, tedy formálně zapsáno

$$\varphi \in \mathcal{F}_i \Leftrightarrow \varphi \circ \psi_i(x) = \psi_i \circ \varphi(x) \quad \text{a} \quad \mathcal{F}_\varphi = \bigcap_{i=0}^n \mathcal{F}_i.$$

V další části se budeme zabývat řešením funkcionální rovnice $\varphi \circ \psi_i(x) = \psi_i \circ \varphi(x), \forall x \in [0, e)$. Funkce, které vyhovují této funkcionální rovnici, se nazývají permutovatelné.

4.1.1 Čebyševovy polynomy

První částečné řešení rovnice (4.1) tvoří Čebyševovy polynomy, pojmenované po Ruském matematiku P. Čebyševovi.

Definice 4.4. [15] Čebyševovy polynomy prvního řádu T_n jsou definovány jako:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), & \text{pro } n > 0. \end{aligned}$$

Podobně Čebyševovy polynomy druhého řádu U_n jsou definovány následovně

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, \\ U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), & \text{pro } n > 0. \end{aligned}$$

Tvrzení 4.6. [13] Nechť T_n je Čebyševův polynom 1. řádu, pak pro $x \geq 0, x \in \mathbb{R}$ a $\alpha = \arccos(x)$ platí, že $T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle n . Pro $n = 0$ a $n = 1$ tvrzení zjevně platí. Nyní předpokládáme, že tvrzení platí pro $k > 1$, dokážeme, že platí i pro $k + 1$:

$$\begin{aligned} T_{k+1}(\cos \alpha) &= 2 \cos \alpha \cos(k\alpha) - \cos((k-1)\alpha) \\ &= \cos((k-1)\alpha) + \cos((k+1)\alpha) - \cos((k-1)\alpha) = \cos((k+1)\alpha). \end{aligned}$$

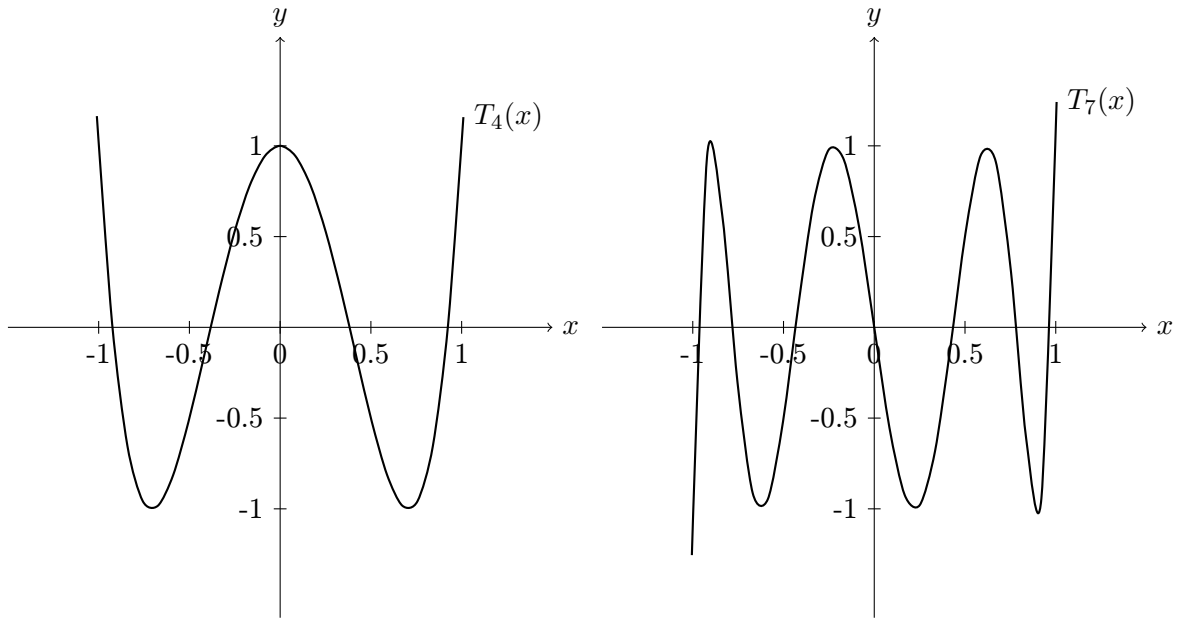
□

Tvrzení 4.7. [13] Kořeny polynomu T_n jsou dány předpisem

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right), \quad \text{pro } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Podobně kořeny polynomu U_n jsou dány následujícím předpisem:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right), \quad \text{pro } k \in \{1, \dots, n\}.$$



Obrázek 4.1: Grafy Čebyševových polynomů $T_4(x)$ a $T_7(x)$

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro Čebyševovy polynomy 1. řádu, pro polynomy 2. řádu by se důkaz provedl obdobně. $T_n(x) = 0$, tedy $T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow n \arccos(x) = k\pi - \frac{\pi}{2}$, pro $k \in \mathbb{Z}$, konečně dostáváme

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2n}(2k - 1) \Leftrightarrow x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k - 1}{n}\right), \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

□

Tvrzení 4.8. [13] *Nechť T_n je Čebyševův polynom 1. stupně, potom jeho první derivace je dána následovně*

$$T'_n(x) = nU_{n-1}(x),$$

kde U_{n-1} je Čebyševův polynom 2. stupně.

Nyní budeme hledat takové Čebyševovy polynomy, které splňují podmínky φ -transformátoru a části uninormy na intervalu $[0, e] \times (e, 1]$, tj.

1. $T_n(0) = 0$ a $T_n(e) = e$, pro $e \in (0, 1)$.
2. Polynom T_n je spojitý (splněno z definice), rostoucí na intervalu $[0, e]$.
3. Platí $T_n(x) \geq x$ pro $x \in [0, e]$.

Splnění podmínek

Nejprve se budeme věnovat splnění první podmínky. Při hledání polynomů, které splňují $T_n(0) = 0$, vyjdeme z definice Čebyševových polynomů v bodě 0: $T_n(0) = -T_{n-2}(0) = 0$. Uvedená rovnice platí zřejmě pro liché n . Další hrubý odhad, který můžeme provést je, že pro n musí platit $4|(n-1)$. V opačných případech je totiž hodnota T_n v pravém okolí bodu 0 záporná.

Dále budeme hledat polynomy, pro které platí $T_n(e) = e \in (0, 1)$. Opět vyjdeme z definice:

$$\begin{aligned} e = \cos(n \arccos(e)) &\Leftrightarrow n \arccos(e) = 2k\pi \pm \arccos(e) \Leftrightarrow \\ n = \frac{2k\pi \pm \arccos(e)}{\arccos(e)} &= \frac{2k\pi}{\arccos(e)} \pm 1, \text{ pro } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že n musí být přirozené číslo, uvedená rovnice platí právě, když

$$\frac{\pi}{\arccos(e)} \in \mathbb{Q}.$$

Při uvažování splnění dalších podmínek vyjdeme z následující úvahy. Aby mohly být splněny jednotlivé podmínky, musí platit, že $x_{e_1} > e$, kde x_{e_1} je nejmenší kladný nenulový bod, ve kterém polynom T_n nabývá svého lokálního maxima ($T_n(x_{e_1}) = 1$).

Tvrzení 4.9. *Nechť T_n je Čebyševův polynom 1. řádu. Potom body x_e , v nichž nastává lokální extrém, jsou dány následujícím vztahem:*

$$x_e = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Důkaz. Extrém nastává v případě, že $T'_n(x_e) = 0$. Využíváme toho, že $T'_n(x) = nU_{n-1}(x)$. Tedy

$$T'_n(x_e) = 0 \Leftrightarrow nU_{n-1}(x_e) = 0 \Leftrightarrow x_e = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

□

Poznámka: Pokud budeme uvažovat pouze polynomy, které splňují předchozí podmínky, tak nejmenší kladný nenulový bod, ve kterém nastává lokální maximum, je dán následovně:

$$x_{e_0} = \cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi\right).$$

Nyní se budeme věnovat nalezení nejmenšího $e \in (0, 1)$, takového, že $T_n(e) = e$. Vyjdeme z reprezentace T_n pomocí goniometrických funkcí. Tedy

$$e = \cos(n \arccos(e)) \Leftrightarrow n \arccos(e) = 2k\pi \pm \arccos(e) \Leftrightarrow e = \cos\left(\frac{2k\pi}{n \pm 1}\right).$$

Uvedená rovnost platí pro $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ (pro vyšší k se hodnoty e opakují se změnou znaménka).

V tomto okamžiku se již můžeme vrátit k výše uvedené nerovnici. Po dosazení dostáváme

$$\cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi\right) > \left| \cos\left(\frac{2k\pi}{n \pm 1}\right) \right|.$$

Vzhledem k tomu, že funkce kosinus je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ klesající, můžeme napsat

$$\left| \frac{\pi}{2} - \frac{n-1}{2n}\pi \right| > \left| \frac{\pi}{2} - \frac{2k\pi}{n \pm 1} \right| \Leftrightarrow \frac{n-1}{2n}\pi < \frac{2k\pi}{n \pm 1}.$$

Kosinus na pravé straně předchozí nerovnice nabývá svého kladného nenulového minima pro $k = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. Dále využíváme toho, že $4 \mid (n-1)$ (viz. začátek podsekcce) Tedy

$$\frac{n-1}{2n}\pi < \frac{2\pi}{n+1} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \Leftrightarrow (n-1)(n+1) < 4n \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = 4n \frac{n-1}{4}.$$

Tato nerovnice ale platí pouze pro $n = 1$. Neexistují tedy žádné Čebyševovy polynomy prvního řádu, které by vyhovovaly našim podmínkám.

4.1.2 Iterace funkcí

Další částečné řešení funkcionální rovnice (4.1) těsně souvisí s iteracemi funkcí [12]. Pro danou funkci $f : X \rightarrow X$, na množině X je její iterace definována následovně:

$$f^0 = \text{id}_X \quad f^{n+1} = f \circ f^n \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0.$$

Je snadné zjistit, že pro každá dvě $n, m \in \mathbb{N}_0$ a danou funkci f platí

$$f^n \circ f^m = f^m \circ f^n = f^{n+m}.$$

Množina $M(f)$ všech iterací dané funkce f spolu s operací skládání tedy zobrazení tvoří nekonečný komutativní monoid. Pokud bychom uvažovali pouze bijektivní f , potom je algebra $(M(f), \circ, {}^{-1}, \text{id}_X)$ nekonečnou Abelovskou grupou.

Pro přehlednost v další části textu zavedeme množinu \mathcal{F} všech neklesajících funkcí $f : [0, e] \rightarrow [0, e]$ splňující podmínky $f(x) \geq x$, $f(0) = 0$ a $f(e) = e$.

Tvrzení 4.10. *Nechť $g, f : X \rightarrow X$ jsou permutovatelné funkce (tj. $f \circ g(x) = g \circ f(x)$). Dále předpokládejme neklesající (nerostoucí) surjektivní funkci $\lambda : X \rightarrow X$. Potom funkce*

$$\Phi(x) = \lambda^{(-1)} \circ f \circ \lambda(x) \quad \text{a} \quad \Psi(x) = \lambda^{(-1)} \circ g \circ \lambda(x),$$

kde $\lambda^{(-1)}$ je pseudoinverzní funkce k funkci λ , tvoří také dvojici permutovatelných funkcí.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že λ je neklesající (nerostoucí) surjekce, platí, že $\lambda \circ \lambda^{(-1)}(x) = x$. Což znamená, že

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi(x) &= \lambda^{(-1)} \circ f \circ \lambda \circ \lambda^{(-1)} \circ g \circ \lambda(x) = \lambda^{(-1)} \circ f \circ g \circ \lambda(x) \\ &= \lambda^{(-1)} \circ g \circ f \circ \lambda(x) = \lambda^{(-1)} \circ g \circ \lambda \circ \lambda^{(-1)} \circ f \circ \lambda(x) = \Psi \circ \Phi(x). \end{aligned}$$

Poznámka. Ačkoliv funkce λ může být v obecnosti i nerostoucí, v dalším textu budeme kvůli našim požadavkům na permutovatelné funkce uvažovat pouze neklesající variantu. \square

Důsledek 4.2. *Nechť f, g jsou permutovatelné funkce, pro které platí $f, g \in \mathcal{F}$. Dále předpokládejme neklesající surjektivní funkci $\lambda : [0, e] \rightarrow [0, e]$ a funkce*

$$\Phi(x) = \lambda^{(-1)} \circ f \circ \lambda(x), \quad \Psi(x) = \lambda^{(-1)} \circ g \circ \lambda(x).$$

Potom funkce Φ a Ψ tvoří dvojici permutovatelných funkcí a navíc $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$.

Důsledek 4.3. *Nechť f je funkce, pro kterou platí $f \in \mathcal{F}$. Dále předpokládejme neklesající surjektivní funkci $\lambda : [0, e] \rightarrow [0, e]$ a funkci $\Phi_n(x) = \lambda^{(-1)} \circ f^n \circ \lambda(x)$, pro $n \in \mathbb{N}_0$. Potom funkce Φ_i a Φ_j tvoří dvojici permutovatelných funkcí a navíc $\Phi_i, \Phi_j \in \mathcal{F}$.*

Důkaz. Důkaz je prakticky stejný jako důkaz předchozího důsledku, proto zde uvedeme pouze tento. Fakt, že funkce Φ_i, Φ_j tvoří dvojici permutovatelných funkcí, plyne bezprostředně z předchozího tvrzení. Zbývá tedy dokázat, že tyto funkce patří do množiny \mathcal{F} . Vzhledem k tomu, že funkce f je neklesající, lze indukcí ukázat, že i n -tá iterace f^n je neklesající. Taktéž pro neklesající funkci λ je i $\lambda^{(-1)}$ neklesající. Tedy i Φ_n je neklesající.

Díky tomu, že 0 a e jsou pevné body zobrazení f , také $f^n(0) = 0$ a $f^n(e) = e$, tedy i $\Phi_n(0) = 0$ a $\Phi_n(e) = e$. Zbývá tedy dokázat poslední podmínku a to, že $\Phi_n(x) \geq x$. Vzhledem k tomu, že λ je neklesající funkce, platí

$$f^n \circ \lambda(x) \geq \lambda(x) \Rightarrow \varphi^{(-1)} \circ f^n \circ \lambda(x) \geq x$$

a tedy $\Phi_n(x) \geq x$, čímž je dokázáno, že $\Phi_n \in \mathcal{F}$. \square

Příklad 4.3. Uvažujme následující neklesající surjektivní funkci:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, \frac{e}{4}], \\ \frac{e}{2} & x \in (\frac{e}{4}, \frac{3e}{4}], \\ 2x - e & x \in (\frac{3e}{4}, e], \end{cases} \quad \lambda^{(-1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0, \frac{e}{2}], \\ \frac{1}{2}(x + e) & x \in (\frac{e}{2}, e]. \end{cases}$$

Dále předpokládejme permutovatelné funkce, patřící do množiny \mathcal{F} : $f_1(x) = \sqrt{ex}$ a $f_2(x) = \sqrt[5]{e^4x}$. Potom podle tvrzení 4.10 i funkce $F_1(x) = \lambda^{(-1)} \circ f_1 \circ \lambda(x)$ a $F_2(x) = \lambda^{(-1)} \circ f_2 \circ \lambda(x)$ tvoří dvojici permutovatelných funkcí.

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{2ex} & x \in [0, \frac{e}{4}], \\ \frac{e}{2} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & x \in (\frac{e}{4}, \frac{3e}{4}], \\ \frac{1}{2}\sqrt{e(2x-e)} + \frac{e}{2} & x \in (\frac{3e}{4}, e], \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt[5]{2e^4x} & x \in [0, \frac{e}{4}], \\ \frac{e}{2} \frac{1+\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}} & x \in (\frac{e}{4}, \frac{3e}{4}], \\ \frac{1}{2}\sqrt[5]{e^4(2x-e)} + \frac{e}{2} & x \in (\frac{3e}{4}, e]. \end{cases}$$

Při hledání dvojic permutovatelných funkcí můžeme vyjít již z existujících funkcí, které mají pro nás příznivé vlastnosti. Uvažujme proto t-konormu S_e , která je zúžená na množinu $[0, e]^2$, tedy

$$S_e(x, y) = eS\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right), \quad \text{pro } (x, y) \in [0, e]^2.$$

Potom pomocí této funkce jsme schopni definovat funkci δ_n^* jako

$$\delta_1^* = \text{id}_{[0, e]}, \quad \delta_{n+1}^*(x) = S_e(\delta_n^*(x), x), \quad \text{pro } n, m \in \mathbb{N}.$$

Vzhledem k tomu, že S_e je neklesající funkce v každé souřadnici, je i δ_n^* neklesající a navíc je splněna i podmínka okrajových hodnot $\delta_n^*(0) = 0$ a $\delta_n^*(e) = e$. Taktéž jednou z vlastností t-konormy S_e je, že $S_e(x, x) \geq x$, tedy i $\delta_n^*(x) \geq x$, což znamená, že $\delta_n^* \in \mathcal{F}$. Na této funkci můžeme binární operaci \oplus díky asociativnosti S_e definovat jako

$$\delta_m^* \oplus \delta_n^*(x) = \delta_n^* \oplus \delta_m^*(x) = S_e(\delta_m^*(x), \delta_n^*(x)) = \delta_{m+n}^*(x), \quad \text{pro } n, m \in \mathbb{N}.$$

Skládání těchto funkcí je definováno zcela standardně a navíc platí

$$\delta_m^* \circ \delta_n^* = \delta_n^* \circ \delta_m^* = \delta_{mn}^*, \quad \text{pro } n, m \in \mathbb{N}.$$

Množina takto definovaných funkcí δ_n^* tedy tvoří částečné řešení naší funkcionální rovnice.

Příklad 4.4. Uvažujme následující restrikti t-konormy (pravděpodobnostní součet)

$$S_e(x, y) = x + y - \frac{xy}{e}, \quad \text{pro } (x, y) \in [0, e]^2$$

a funkce δ_2^* a δ_3^* definované nad funkcí S_e

$$\delta_2^*(x) = x \left(2 - \frac{x}{e}\right), \quad \delta_3^*(x) = x \left(3 - \frac{3x}{e} + \frac{x^2}{e^2}\right).$$

Podle předchozího odstavce platí rovnost $\delta_2^* \circ \delta_3^*(x) = \delta_3^* \circ \delta_2^*(x)$.

Vzhledem k tomu, že uninormy jsou jistým zobecněním t-norem a t-konorem, budeme se v další části zabývat invariantní transformací t-norem.

4.2 Invariantní transformace t-norem

Definice 4.5. [10] Necht $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je t-norma. Potom funkci $\delta_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definovanou jako

$$\delta_1(x) = x, \quad \delta_{n+1}(x) = T(\delta_n(x), x), \quad \text{pro } x \in [0, 1], n \in \mathbb{N},$$

nazýváme diagonální funkcí t-normy T . Dále množinu všech diagonálních funkcí t-normy T označujeme $\Delta_T = \{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Nejprve uvedeme nutnou podmínku pro invariantní transformaci t-norem.

Tvrzení 4.11. (Nutná podmínka invariantnosti) Necht $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je t-norma, $\delta_n(x)$ jsou její diagonální funkce a $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je neklesající surjektivní funkce. Potom pokud je φ -transformace invariantní vůči t-normě T , potom $\varphi \circ \delta_n(x) = \delta_n \circ \varphi(x)$ pro každé $x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že φ je neklesající surjekce, původní t-norma vznikne právě tehdy, když $\varphi(T(x, y)) = T(\varphi(x), \varphi(y))$. Tedy i $\varphi \circ \delta_n(x) = \delta_n \circ \varphi(x)$ pro všechna $x \in [0, 1]$ a $n \in \mathbb{N}$. \square

Ukazuje se, že uvedená nutná podmínka je pro jisté t-normy i postačující podmínkou. Uvedeme zde příklady některých tříd t-norem, u kterých budeme uvažovat invariantní transformaci funkcí $\varphi(x) = \delta_n(x)$. Nejprve příklad invariantní transformace Frankových t-norem [10].

Příklad 4.5. Frankovy t-normy jsou definovány jako:

$$T_p^F(x, y) = \begin{cases} T_M(x, y) & \text{pokud } p = 0, \\ T_P(x, y) & \text{pokud } p = 1, \\ T_L(x, y) & \text{pokud } p = +\infty, \\ \log_p \left(1 + \frac{(p^x - 1)(p^y - 1)}{p - 1} \right) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro minimovou t-normu je diagonální funkce $\delta_{n,0}(x) = \varphi(x) = x$, zde je tedy invariantnost zřejmá. Pro součinnovou t-normu $T_P(x, y) = xy$ je diagonální funkce definována jako $\delta_{n,1}(x) = x^n$. Po transformaci dostaneme $(xy)^n = x^n y^n$, invariantnost je tedy opět zachována.

Pro Łukasiewiczovu t-normu $T_L(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}$ je diagonální funkce $\delta_{n,\infty}$ dána předpisem $\delta_{n,\infty}(x) = \varphi(x) = \max\{0, nx - n + 1\}$. Potom transformací dostaneme:

$$\varphi(T_L(x, y)) = \max\{0, n \max\{0, x + y - 1\} - n + 1\},$$

což je různé od nuly pokud $x + y - 1 > 0 \wedge nx + ny - 2n + 1 > 0$. Vzhledem k tomu, že pokud $x + y - 1 > 0 \Rightarrow nx + ny - 2n + 1 > -n + 1 \leq 0$, je druhá podmínka silnější.

$$T_L(\varphi(x), \varphi(y)) = \max\{0, \max\{0, nx - n + 1\} + \max\{0, ny - n + 1\} - 1\},$$

což je různé od nuly pokud $nx - n + 1 > 0 \wedge ny - n + 1 > 0 \wedge nx + ny - 2n + 1 > 0$. Opět pokud $nx - n + 1 > 0 \Rightarrow nx + ny - 2n + 1 > ny - n \leq 0$ (podobně s druhou podmínkou). Třetí podmínka je tedy silnější. Invariantnost je tedy zachována.

Pro ostatní případy je diagonální funkce $\varphi(x) = \delta_{n,p}(x)$ dána následovně:

$$\delta_{n,p}(x) = \log_p \left(1 + \frac{(p^x - 1)^n}{(p - 1)^{n-1}} \right).$$

Potom transformace bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} T_p^F(\varphi(x), \varphi(y)) &= \log_p \left(1 + \frac{\left(p^{\log_p \left(1 + \frac{(p^x - 1)^n}{(p - 1)^{n-1}} \right)} - 1 \right) \left(p^{\log_p \left(1 + \frac{(p^y - 1)^n}{(p - 1)^{n-1}} \right)} - 1 \right)}{p - 1} \right) \\ &= \log_p \left(1 + \frac{\frac{(p^x - 1)^n (p^y - 1)^n}{(p - 1)^{n-1} (p - 1)^{n-1}}}{p - 1} \right) = \log_p \left(1 + \frac{(p^x - 1)^n (p^y - 1)^n}{(p - 1)^{2n-1}} \right), \\ \varphi(T_p^F(x, y)) &= \log_p \left(1 + \frac{\left(p^{\log_p \left(1 + \frac{(p^x - 1)(p^y - 1)}{p - 1} \right)} - 1 \right)^n}{(p - 1)^{n-1}} \right) = \log_p \left(1 + \frac{\left(\frac{(p^x - 1)(p^y - 1)}{p - 1} \right)^n}{(p - 1)^{n-1}} \right) \\ &= \log_p \left(1 + \frac{(p^x - 1)^n (p^y - 1)^n}{(p - 1)^{2n-1}} \right). \end{aligned}$$

a tedy $T_p^F(\varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(T_p^F(x, y))$, což znamená, že invariantnost je pro třídu Frankových t-norem zachována.

Dalším příkladem je invariantní transformace Yagerových t-norem [10].

Příklad 4.6. Yagerovy t-normy jsou definovány jako:

$$T_p^Y(x, y) = \begin{cases} T_D(x, y) & \text{pokud } p = 0, \\ \max \left\{ 0, 1 - ((1 - x)^p + (1 - y)^p)^{\frac{1}{p}} \right\} & \text{pokud } 0 < p < +\infty, \\ T_M(x, y) & \text{pokud } p = +\infty. \end{cases}$$

Pro t-normu drastický součin T_D je invariantnost zřejmě zachována. Pro minimovou t-normu bylo zachování invariantnosti dokázáno již dříve.

Pro ostatní případy je diagonální funkce $\varphi(x) = \delta_{n,p}(x)$ dána následovně:

$$\varphi(x) = \delta_{n,p}(x) = \max \left\{ 0, 1 - (n(1 - x)^p)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Potom transformace bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} \varphi(T_p^Y(x, y)) &= \max \left\{ 0, 1 - \left(n \left(1 - \max \left\{ 0, 1 - ((1 - x)^p + (1 - y)^p)^{\frac{1}{p}} \right\} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &= \max \left\{ 0, 1 - (n(1 - x)^p + n(1 - y)^p)^{\frac{1}{p}} \right\}, \end{aligned}$$

což platí pokud $1 - ((1 - x)^p + (1 - y)^p)^{\frac{1}{p}} \geq 0$. Uvedené rovnosti jsou různé od nuly pro $1 - (n(1 - x)^p + n(1 - y)^p)^{\frac{1}{p}} > 0 \Leftrightarrow n(1 - x)^p + n(1 - y)^p < 1$.

$$\begin{aligned} T_p^Y(\varphi(x), \varphi(y)) &= \max \left\{ 0, 1 - \left(\left(1 - \max \left\{ 0, 1 - (n(1 - x)^p)^{\frac{1}{p}} \right\} \right)^p + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(1 - \max \left\{ 0, 1 - (n(1 - y)^p)^{\frac{1}{p}} \right\} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &= \max \left\{ 0, 1 - (n(1 - x)^p + n(1 - y)^p)^{\frac{1}{p}} \right\}, \end{aligned}$$

což platí pro $1 - (n(1-x))^{\frac{1}{p}} > 0 \wedge 1 - (n(1-y))^{\frac{1}{p}} > 0$. Uvedené rovnosti jsou různé od nuly opět pro $n(1-x)^p + n(1-y)^p < 1$. Tedy platí $\varphi(T_p^Y(x, y)) = T_p^Y(\varphi(x), \varphi(y))$.

Tvrzení 4.12. *Nechť $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je striktní t-norma. Dále předpokládáme funkci $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Potom pokud $\varphi \in \Delta_T$, potom φ -transformací vznikne původní t-norma.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že funkce φ je bijekce, platí $\varphi(T_\varphi(x, y)) = T(\varphi(x), \varphi(y))$. Podle předpokladu, že $\varphi \in \Delta_T$, budeme dále psát jen $\delta_n(T_\varphi(x, y)) = T(\delta_n(x), \delta_n(y))$, pro $n \in \mathbb{N}$. Důkaz, že $T_\varphi = T$, provedeme indukcí podle n .

1. Pro $n = 1$ je rovnost splněna triviálně. Pro $n = 2$ budeme předpokládat, že existují nějaké $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ takové, že $T(x_0, y_0) \neq T_\varphi(x_0, y_0)$. Potom ale

$$T(T(x_0, y_0), T(x_0, y_0)) = \delta_2(T(x_0, y_0)) \neq T(\delta_2(x_0), \delta_2(y_0)) = T(T(x_0, y_0), T(x_0, y_0)),$$

což je spor (v předchozím kroku jsme využili asociativnosti T a toho, že funkce δ_n^{-1} je ostře rostoucí). Tedy $T_\varphi = T$ pro transformaci funkcí δ_2 .

2. Nyní předpokládáme, že rovnost platí pro $\delta_1, \dots, \delta_n$ a dokážeme, že platí i pro δ_{n+1} .

$$\begin{aligned} T_\varphi(x, y) = \delta_{n+1}^{-1}(T(\delta_{n+1}(x), \delta_{n+1}(y))) &\Rightarrow \delta_{n+1}(T_\varphi(x, y)) = T(\delta_{n+1}(x), \delta_{n+1}(y)) \Rightarrow \\ T(\delta_n(T_\varphi(x, y)), T_\varphi(x, y)) &= T(T(\delta_n(x), x), T(\delta_n(y), y)). \end{aligned}$$

Podle indukčního předpokladu a z asociativnosti t-normy T dále plyne

$$T(T(\delta_n(x), \delta_n(y)), T_\varphi(x, y)) = T(T(\delta_n(x), \delta_n(y)), T(x, y)).$$

Vzhledem k tomu, že T je striktně rostoucí, platí $T_\varphi = T$.

Transformací pomocí diagonálních funkcí vznikne tedy původní t-norma. □

Tvrzení 4.13. *Nechť $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je spojitá archimedovská t-norma a $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ je její aditivní generátor. Dále uvažujme bijektivní funkci $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Potom φ -transformací vznikne původní t-norma právě tehdy, když existuje $\alpha > 0$: $\alpha f(x) = f \circ \varphi(x)$ (Schröderova rovnice).*

Důkaz. (\Leftarrow) Transformovaná t-norma T_φ je dána předpisem

$$T_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}[T(\varphi(x), \varphi(y))] = \varphi^{-1} \circ f^{-1}(\min\{f \circ \varphi(x) + f \circ \varphi(y), f(0)\}).$$

Vzhledem k tomu, že T_φ je opět spojitá archimedovská t-norma, je její aditivní generátor dán předpisem $g(x) = f \circ \varphi(x)$. Také ale existuje $\alpha > 0$, takové, že $g(x) = \alpha f(x)$, tedy f a g se liší pouze kladnou multiplikatívní konstantou. Generátor g je tedy také generátor t-normy T a tím pádem $T_\varphi = T$.

(\Rightarrow) Nyní předpokládáme, že platí $T_\varphi(x, y) = T(x, y)$, pro každé $(x, y) \in [0, 1]^2$ tedy

$$T_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}[T(\varphi(x), \varphi(y))] = T(x, y).$$

Aditivní generátor t-normy T_φ je dán předpisem $g(x) = f \circ \varphi(x)$, ale vzhledem k tomu, že se obě t-normy rovnají, musí existovat nějaké $\alpha > 0$ takové, že $f \circ \varphi(x) = \alpha f(x)$. □

Všechny bijektivní funkce na jednotkovém intervalu φ , při jejichž transformaci dané t-normy T vznikne původní t-norma, tvoří grupu automorfismů $\mathbf{Aut}(T)$. Tvrzením 4.13 se nám tuto grupu pro archimedovské t-normy podařilo klasifikovat.

Pomocí těchto tříd můžeme zkonstruovat další uninormy, jako je to ukázáno v následujícím příkladě.

Příklad 4.7. Uvažujme funkci $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, danou předpisem

$$U_p(x, y) = \begin{cases} -1 + 2x + 2y - 2xy & \min\{x, y\} \geq \frac{1}{2}, \\ \min\{x, y\} & \max\{x, y\} = \frac{1}{2}, \\ 0 & [0, \frac{1}{2})^2, \\ \frac{1}{2} \log_p \left(1 + \frac{(p^{2x}-1)^{2-2y}}{(p-1)^{1-2y}} \right) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nejprve dokážeme, že se jedná skutečně o uninormu. Komutativnost je zřejmá, stejně jako monotónnost a existence neutrálního prvku. Nyní dokážeme asociativnost, což zde ukážeme na nejzajímavějších případech. Uvažujme proto $x \in [0, \frac{1}{2})$ a $y, z \in (\frac{1}{2}, 1]$, potom

$$\begin{aligned} U_p(U_p(x, y), z) &= \frac{1}{2} \log_p \left(1 + \frac{\left(p^{\log_p \left(1 + \frac{(p^{2x}-1)^{2-2y}}{(p-1)^{1-2y}} \right) - 1} \right)^{2-2z}}{(p-1)^{1-2z}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_p \left(1 + \frac{\left(\frac{(p^{2x}-1)^{2-2y}}{(p-1)^{1-2y}} \right)^{2-2z}}{(p-1)^{1-2z}} \right) = \frac{1}{2} \log_p \left(1 + \frac{(p^{2x}-1)^{4-4y-4z+4yz}}{(p-1)^{3-4z-4y+4yz}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_p \left(1 + \frac{(p^{2x}-1)^{2-2U_p(y,z)}}{(p-1)^{1-2U_p(y,z)}} \right) = U_p(x, U_p(y, z)). \end{aligned}$$

Podobně by se asociativnost dokázala i pro ostatní případy. Funkce U_p je tedy uninormou. Nyní uvažujme funkci $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ danou předpisem:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} x & x > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} \log_p \left(1 + \frac{(p^{2x}-1)^n}{(p-1)^{n-1}} \right) & x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Není těžké ověřit, že transformací uvedenou funkcí vznikne původní uninorma.

Kapitola 5

Modelování fuzzy logických spojek

V této kapitole využijeme znalosti především o triangulárních normách a jejich vlastnostech získané v předchozích částech práce. Cílem této kapitoly je nalézt algoritmus pro modelování fuzzy logických spojek a na jeho základě vyhodnotit experiment modelování konjunkce používané lidmi. Ve výsledném algoritmu jsou využity již známe metody a algoritmy, které jsou vhodně upraveny, aby vyhovovaly specifickým podmínkám plynoucích z vlastností t-norem. Samotné vyhodnocení experimentu potom bylo provedeno programem, jehož implementace je popsána také v této kapitole.

Modelování fuzzy logických spojek spočívá v hledání vhodné triangulární normy, která co nejlépe vyhovuje konečnému počtu empiricky získaných dat. Vzhledem k požadavkům kladeným na každou t-normu (zejména komutativnost a asociativnost), je nejzajímavější aproximace spojitých archimedovských t-norem, které lze vyjádřit pomocí jejich aditivních generátorů (zobecnění definice 2.2)[2]:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = g^{(-1)} \left(\sum_{i=1}^n g(x_i) \right). \quad (5.1)$$

V této rovnici je $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ aditivní generátor spojitě archimedovské t-normy T . Zde vidíme, že místo aproximace samotných triangulárních norem se zachováním jejich vlastností s ohledem na aproximovaná data je výhodnější aproximovat jejich aditivní generátory. Aproximace aditivních generátorů byla představena v článku [2], některé výsledky jsou stručně uvedeny v následující sekci.

5.1 Aproximace aditivních generátorů

Aditivní generátor jisté t-normy lze aproximovat pomocí spline křivky, což je po intervalech definovaná polynomická funkce. V článku [2] je uvažována B -spline křivka. Aproximace touto křivkou se nejčastěji používá v počítačové grafice. Aproximovaný aditivní generátor tedy bude ve tvaru

$$g(x) = S_{m,t}(x) = \sum_{j=1}^J c_j B_{j,m}(x), \quad (5.2)$$

kde c_j je koeficient závislý na datech a k je stupeň polynomu. Polynomy $B_{j,k}$ jsou definovány následujícím rekurentním vztahem [9]

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$B_{i,m}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} B_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m} - x}{t_{i+m} - t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x),$$

kde t_0, \dots, t_m jsou jednotlivé uzly. Pokud jsou jednotlivé uzly rozdílné, je počet vnitřních uzlů roven stupni polynomu.

Nyní budeme předpokládat K empirických pozorování ve tvaru [2]:

$$\left\{ (x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k), y^k \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Dosazením dat v této formě do rovnice (5.1) získáme tvar, ze kterého při aproximaci budeme vycházet:

$$g(x_1^k) + g(x_2^k) + \dots + g(x_{n_k}^k) \approx g(y^k).$$

Po nahrazení funkce g za (5.2) a úpravou výrazu získáváme následující tvar [2]:

$$\sum_{j=1}^J c_j \left(\sum_{i=1}^{n_k} B_{j,m}(x_i^k) - B_{j,m}(y^k) \right) \approx 0, \quad k = 1, \dots, K.$$

Navíc musí být splněny podmínky, kladené na aditivní generátory (klesající funkce s okrajovou podmínkou $g(1) = 0$ a $g(\varepsilon) = 1$). Monotónnost lze zaručit splněním podmínky $c_j \in \mathbb{R}_0^-$ [2]. Okrajové podmínky lze s ohledem na aproximaci pomocí B -splinů zapsat jako:

$$\sum_{j=1}^J c_j B_{j,m}(1) = 0 \quad \sum_{j=1}^J c_j B_{j,m}(\varepsilon) = 1.$$

Hodnotu ε je vhodné volit tak, aby byla menší než nejmenší nenulová hodnota vstupních dat. Potom hodnoty aproximovaného generátoru na intervalu $[0, \varepsilon]$ nejsou ovlivněny vstupními daty. Na intervalu $[0, \varepsilon]$ je tedy možné generátor vyjádřit libovolně (tedy s ohledem na vlastnosti aditivních generátorů).

Naším cílem při aproximaci je nalézt takové koeficienty c_j , které odpovídají výše uvedeným podmínkám. Všechny podmínky lze maticově zapsat následovně:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} \approx \mathbf{0}, \quad -\mathbf{c} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

kde jednotlivé matice odpovídají vztahům uvedeným výše.

$$\mathbf{A} = (A_{kj}) = \sum_{i=1}^{n_k} B_{j,m}(x_i^k) - B_{j,m}(y^k), \quad \mathbf{c} = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_J)^T,$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} B_0(1) & B_1(1) & \dots & B_J(1) \\ B_0(\varepsilon) & B_1(\varepsilon) & \dots & B_J(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

5.2 Algoritmus pro aproximaci

Pokud by podmínky (5.3) neobsahovaly omezující podmínky na nerovnost a ostrou rovnost, jednalo by se o aproximační problém, který lze snadno vyřešit metodou nejmenších čtverců [3]. Tato metoda řeší aproximační problém

$$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

nalezením vektoru \mathbf{x}_{LE} minimalizující výraz

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2,$$

kde $\|\cdot\|_2$ je Euklidova míra. Díky tomu, že máme dvě omezující podmínky, rozdělíme algoritmus na dvě samostatné části, jejichž řešením se budeme zabývat v dalším textu.

5.2.1 Metoda váhování

První části, které se budeme věnovat, je omezení na rovnost $\mathbf{Ec} = (0 \ 1)^T$. Pro řešení tohoto aproximačního problému je možné využít např. metodu přímé eliminace nebo metodu váhování. V našem případě použijeme metodu váhování kvůli její jednoduchosti. Podstatou této metody je přiřazení dostatečně „velkých“ vah koeficientům, na které jsou kladeny omezující podmínky. Metoda vychází z následujícího vztahu [3]:

$$\mathbf{c}_{LSE} = \arg \min_{\mathbf{c}} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{E} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{c} - \begin{pmatrix} \gamma (0 \ 1)^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

Ze vztahu je patrné, že pomocí metody váhování je možné aproximační problém s omezením na rovnost převést na klasickou úlohu řešitelnou metodou nejmenších čtverců. V programu za γ volíme číslo, řádově větší než největší prvek matice.

5.2.2 Lawson-Hansonův algoritmus

Výše jsme si ukázali metodu váhování, která umožňuje vyřešit omezení na rovnost. V této části se budeme zabývat řešením omezující podmínky na nerovnost. Jedním z algoritmů umožňujících řešení takto omezených optimalizačních problémů nejmenších čtverců je Lawson-Hansonův algoritmus [5]. Tento algoritmus hledá vektor \mathbf{x} splňující následující podmínky:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2, \quad \mathbf{x} \geq 0.$$

Algoritmus využívá metodu aktivní množiny. V této množině jsou indexy proměnných, jejichž regresní koeficienty jsou záporné (nebo nula). Ostatní indexy proměnných jsou v pasivní množině. Pokud je aktivní a pasivní množina známa, je problém s omezením na nerovnost vyřešen metodou nejmenších čtverců na proměnné, které jsou v pasivní množině. Koeficienty proměnných v aktivní množině jsou nastaveny na nulu.

Lawson-Hansonův algoritmus je iterační algoritmus, kdy se v každé iteraci stanoví pasivní množina, nad kterou se provede metoda nejmenších čtverců a na základě výsledku se upraví pasivní a aktivní množina. Úprava pasivní a aktivní množiny spočívá ve výměně indexů proměnných. Při úpravě těchto množin dochází také ke spočítání nové hodnoty vektoru \mathbf{x} . Při výměně indexů mezi množinami se vyměňují právě ty indexy, jejichž hodnota ve vektoru \mathbf{x} je rovna nule. Zápis algoritmu v pseudokódu vypadá následovně:

Algoritmus 1: LAWSON-HANSONŮV

Vstup: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

Výstup: $\mathbf{x}^* \geq 0$, kde $\mathbf{x}^* = \arg \min \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$

```
1:  $P \leftarrow \emptyset$ 
2:  $R \leftarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 
3:  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0}$ 
4:  $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{Ax})$ 
5: while  $R \neq \emptyset \wedge \max_{i \in R}(w_i) > tolerance$  do
6:    $j \leftarrow \arg \max_{i \in R}(w_i)$ 
7:   Přidej index  $j$  do pasivní množiny  $P$  a odeber ho z množiny  $R$ 
8:    $\mathbf{s}^P \leftarrow [(\mathbf{A}^P)^T \mathbf{A}^P]^{-1} (\mathbf{A}^P)^T \mathbf{b}$ 
9:   while  $\min(\mathbf{s}^P) \leq 0$  do
10:     $\alpha \leftarrow -\min_{i \in P}(x_i / (x_i - s_i))$ 
11:     $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{s} - \mathbf{x})$ 
12:    Přesuň z  $P$  do  $R$  všechny indexy  $i$  takové, že  $x_i = 0$ 
13:     $\mathbf{s}^P \leftarrow [(\mathbf{A}^P)^T \mathbf{A}^P]^{-1} (\mathbf{A}^P)^T \mathbf{b}$ 
14:     $\mathbf{s}^R \leftarrow \mathbf{0}$ 
15:   end while
16:    $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{s}$ 
17:    $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{Ax})$ 
18: end while
19: return  $\mathbf{x}$ 
```

Poznámky k algoritmu: Pasivní množina je v pseudokódu označena jako P , aktivní jako R . Počet iterací cyklu lze ovlivnit změnou parametru *tolerance*. Zápis \mathbf{A}^P znamená omezení matice \mathbf{A} na proměnné, které jsou obsaženy v pasivní množině P . Samotné počítání nejmenších čtverců je prováděno na řádcích 8 a 13.

5.2.3 Výsledný algoritmus pro aproximaci

V této části se budeme zabývat spojením dvou předcházejících částí algoritmu a jejich použitím pro aproximaci aditivního generátoru podle předešlé sekce. Jak již bylo zmíněno dříve, výstupem Lawson-Hansonova algoritmu jsou nezáporné koeficienty. V našem případě však požadujeme, aby aproximovaný aditivní generátor byl klesající, tedy aby koeficienty B -splinu byly záporné. Musíme tedy nejprve provést transformaci vstupních empirických dat a krajních podmínek. Transformace je dána předpisem

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}^{-1}(x) = 1 - x.$$

Nad takto transformovanými daty sestavíme matice \mathbf{A} , \mathbf{E} a pomocí metody váhování zajistíme splnění transformovaných krajních podmínek. Nad upravenými maticemi pomocí Lawson-Hansonova algoritmu spočteme koeficienty B -splinu. Díky provedené transformaci již hledaným řešením není klesající funkce, ale rostoucí funkce, proto požadujeme nezápornost koeficientů B -splinu. Při sestavování výsledného aditivního generátoru pomocí B -splinu musíme provést zpětnou transformaci dosazovaných hodnot, čímž získáme požadovanou klesající funkci se správnými krajními podmínkami. Zápis výsledného algoritmu v pseudokódu je následující:

Algoritmus 2: ALGORITMUS PRO APROXIMACI ADITIVNÍHO GENERÁTORU

Vstup: Množina empirických dat ve tvaru $\{\mathbf{x}^k, y^k\}, k = 1, 2, \dots, n$

Výstup: Funkční hodnoty \mathbf{y} apr. generátoru s konstantním krokem h

- 1: $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{0}, \mathbf{b} \leftarrow \mathbf{0}, \mathbf{C} \leftarrow \mathbf{0}, \mathbf{d} \leftarrow (0 \ 1)^T$
 - 2: $\tilde{\mathbf{x}}^k \leftarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}^k), \tilde{y}^k \leftarrow \mathcal{F}(y^k)$ pro $k = 1, 2, \dots, n$
 - 3: Volba stupně polynomu B -splinu m a hodnot ε a γ
 - 4: Nastavení počtu uzlů B -splinu J a jejich hodnoty \mathbf{t}
 - 5: $A_{kj} \leftarrow \sum_{i=1}^{n_k} B_{j,m}(\tilde{x}_i^k) - B_{j,m}(\tilde{y}^k)$
 - 6: $E_{0j} \leftarrow B_{m,j}(\mathcal{F}(1)), E_{1j} \leftarrow B_{m,j}(\mathcal{F}(\varepsilon))$
 - 7: $\mathbf{A} \leftarrow \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{E} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \mathbf{b} \leftarrow \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$
 - 8: $\mathbf{c} \leftarrow \text{nonnegative}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$
 - 9: $i \leftarrow h$
 - 10: **while** $i \leq 1$ **do**
 - 11: **if** $i < \varepsilon$ **then**
 - 12: $y(i) \leftarrow \frac{1}{i} + 1 - \frac{1}{\varepsilon}$
 - 13: **else**
 - 14: $y(i) \leftarrow \sum_{j=1}^J c_j B_{j,m}(\mathcal{F}^{-1}(i))$
 - 15: **end if**
 - 16: $i \leftarrow i + h$
 - 17: **end while**
-

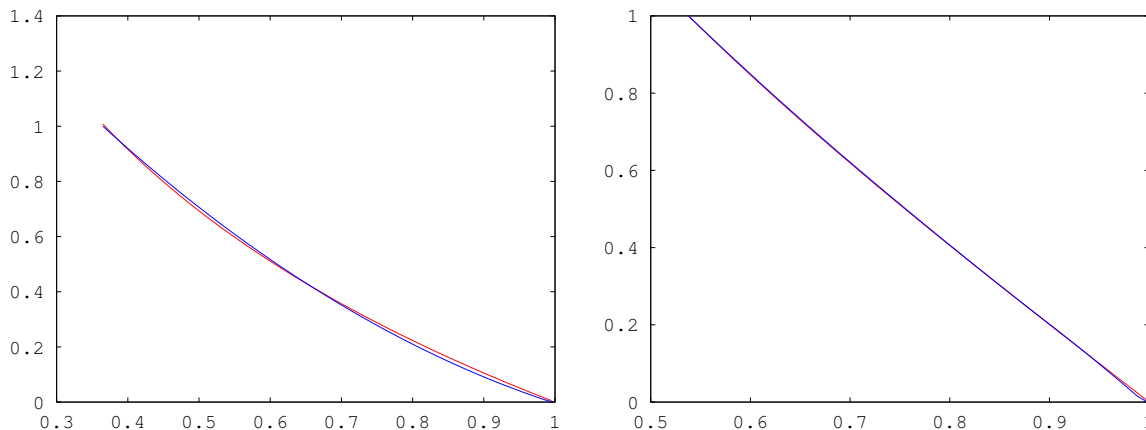
Poznámky k algoritmu: Metoda váhování je použita na řádku 7. Lawson-Hansonův algoritmus je v pseudokódu označen jako funkce *nonnegative*. Nastavení počtu uzlů B -splinu a jejich hodnot závisí na konkrétních datech a toto nastavení je nutné provést experimentálně (samozřejmě s ohledem na stupeň polynomu B -splinu). Výsledná podoba aditivního generátoru je ovlivněna volbou uzlů.

Abychom si udělali lepší představu o složitosti algoritmu, provedeme odhad asymptotické časové složitosti. V případě Lawson-Hansonova algoritmu se iteračně provádí výpočet nejmenších čtverců. Časová složitost výpočtu nejmenších čtverců je možné rozdělit do dílčích operací.

- Násobení $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) se provede se složitostí $\mathcal{O}(mn^2)$, $\mathbf{A}^T \mathbf{b}$ se složitostí $\mathcal{O}(nm)$.
- Spočítání inverzní matice s $\mathcal{O}(n^3)$ [11].
- Násobení výsledné inverzní matice s $\mathcal{O}(n^2)$.

Ve výčtu operací vidíme, že dominují operace násobení $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ a výpočet inverzní matice. V odhadu budeme tedy uvažovat pouze tyto dvě operace, ostatní zanedbáme. Výsledný odhad výpočtu nejmenších čtverců je tedy $\mathcal{O}(n^2(n+m))$. Složitost Lawson-Hansonova algoritmu závisí na celkovém počtu iterací, ve kterých se opakovaně počítají nejmenší čtverce. Odhad časové složitosti tedy bude $\mathcal{O}(pn^2(n+m))$, kde p je maximální počet provedených iterací. Jedná se pouze o odhad, ve skutečnosti bude hodnota menší, protože se nejmenší čtverce počítají pouze nad maticí omezenou na proměnné v pasivní množině P ($|P| \leq n$).

Co se týče analýzy celkového algoritmu, metoda váhování se provede s časovou složitostí $\mathcal{O}(Jn)$ a vyhodnocení funkčních hodnot polynomu se složitostí $\mathcal{O}(\lfloor \frac{1-\varepsilon}{h} \rfloor Jm)$. Časově nejnáročnější je tedy samotný výpočet koeficientů pomocí Lawson-Hansonova algoritmu, který se v algoritmu pro aproximaci aditivního generátoru provede v čase $\mathcal{O}(pn^2(n+J))$. Vzhledem k tomu, že předpokládáme $J < n$, je celková složitost algoritmu $\mathcal{O}(pn^3)$. Výpočet je možné urychlit použitím specializovaných algoritmů pro násobení matic (Strassenův algoritmus [11]) a výpočet inverzní matice [4], popřípadě využitím Cox-De Boorova algoritmu pro vyhodnocování hodnot B -splinu [17].



(a) Aproximace aditivního generátoru součinnové t-normy s aditivním generátorem $g(x) = -\log(x)$ na intervalu $[e^{-1}, 1]$ (červená křivka). Pro aproximaci byly zvoleny B -spliny stupně polynomu 3 (modrá křivka). Koeficienty byly spočítány na základě 8 empirických hodnot s dvěma argumenty.

(b) Aproximace aditivního generátoru Hamache-rovy t-normy ($p = 2$) s aditivním generátorem $g(x) = \log \frac{2-x}{x}$ na intervalu $[\frac{2}{e+1}, 1]$ (červená křivka). Pro aproximaci byly opět zvoleny B -spliny stupně 3 (modrá křivka). Koeficienty byly spočítány na základě 14 empirických hodnot.

Obrázek 5.1: Výsledky algoritmu pro modelování generátorů známých t-norem.

5.3 Implementace programu

Obsahem této podkapitoly je popis implementace aplikace pro aproximaci aditivních generátorů podle algoritmů uvedených v předcházející sekci. Pro účely implementace byl zvolen jazyk C++ (konkrétně norma C++11) kvůli podpoře objektově orientovaného programování a také značné přenositelnosti. Grafické uživatelské rozhraní (GUI) bylo vytvořeno pomocí knihovny Qt. Maticové operace na nejnižší úrovni zajišťuje knihovna ATLAS (Automatically Tuned Linear Algebra Software) ¹. Tato knihovna poskytuje implementaci API pro práci s vektorovými a maticovými operacemi pro jazyky C a Fortran a je dostupná z repozitáře Netlib. ATLAS je vysoce optimalizovaná knihovna. Optimalizace probíhá i na základě počtu procesorů a velikosti cache paměti.

Hlavním cílem při tvorbě aplikace byla možnost snadné úpravy vstupních parametrů aproximace. Toto zahrnuje možnost snadné úpravy empirických dat včetně možnosti uložení aktuální aproximace na disk pro pozdější použití. Neméně důležitá je i možnost intuitivní

¹<http://www.netlib.org/atlas/>

změny parametrů B -splinu a dynamické překreslování výsledného aditivního generátoru. Ukázka výsledné podoby aplikace je v příloze C.

5.3.1 Popis tříd zajišťující aproximaci

Celá aplikace je logicky členěna do tříd, které zajišťují jednak samotnou aproximaci, ale také vhodné grafické zobrazení. V této části si popíšeme základní třídy, které zajišťují aproximaci generátorů pomocí B -splínů. Diagram těchto tříd je v příloze B. Nebudeme se už blíže věnovat popisu a návrhu GUI. Vzhledem k tomu, že algoritmus je z velké části založen na práci s maticemi, popíšeme si nejprve, jak jsou reprezentovány v programu.

Třída `MatrixBase` zprostředkovává základní operace pro práci s maticemi. Z důvodu kompatibility s knihovnou ATLAS je matice reprezentována jednorozměrným polem typu `double`. Tato třída poskytuje operace pro přístup k jednotlivým prvkům matice a jejich přiřazování.

Třída `Matrix`, která je odvozena od třídy `MatrixBase`, reprezentuje matice v programu. Jednou z poskytovaných operací je násobení matic, k čemuž využívá knihovní funkci `cblas_dgemm`. Třída také mimo jiné implementuje metody pro transpozici (`Transpose`), výběr podmatice na základě indexů (`Submatrix`) a spočítání inverzní matice (`Inverse`), k čemuž využívá knihovní funkci `clapack_dgetri`.

Posledním stavebním kamenem pro aproximaci generátorů je třída `Vector`, která, jak již název napovídá, poskytuje operace pro práci s vektory. Tato třída je odvozena od třídy `Matrix`. Tyto tři třídy poskytují základní aparát pro implementaci algoritmu pro aproximaci.

Vzhledem k tomu, že generátor je aproximovaný pomocí B -splínů, je vytvořena třída `BSpline`, která uchovává informace o parametrech křivky a poskytuje metody (`EvalPoints`, `BaseValue`) pro vyhodnocení hodnot v bodech s daným krokem. Tyto hodnoty se použijí pro vykreslení B -splinu v okně.

Třída `Approximation` obsahuje metody pro samotný výpočet koeficientů aproximující B -splinu křivky. Dvě nejdůležitější metody jsou `NonNegative`, která implementuje Lawson-Hansonův algoritmus a metoda `Approximate`, která implementuje metodu váhování a celou aproximaci na základě vstupních empirických dat. Výstupem posledně jmenované metody je objekt třídy `BSpline`, který obsahuje spočítané koeficienty.

5.3.2 Ukládání a načítání dat

Pro ukládání dat o aktuální aproximaci na disk se pro jednoduchost využívá textového formátu. Každá probíhající aproximace je určena těmito údaji: stupněm B -splinu polynomu, počtem uzlových bodů a jejich hodnotami, hodnotou ϵ a empirickými daty. Tyto informace se do textového souboru ukládají v následujícím formátu:

```
<stupeň polynomu>\n
<počet uzl. bodů>\n
(<uzl. bod  $i$ >;)*\n
<epsilon>\n
(<y>;(< $x_i$ >;)*\n)*
```

V programu se o správné načítání vstupního souboru stará třída `DataLoader`. Samotné načítání vstupních hodnot je implementováno v metodě `ProcessInput`. Tato třída také zajišťuje kontrolu validity souboru s informacemi o aproximaci, což zahrnuje kontrolu, zda

jsou hodnoty v požadovaném intervalu, správný počet uzlových bodů apod. Pro správné provedení aproximace je také nutné, aby pro každou empirickou hodnotu y existovaly alespoň dvě hodnoty x . Vzhledem k tomu, že počet hodnot \mathbf{x}^k může být pro různá k různý a tyto hodnoty jsou ukládány do matice, je počet sloupců matice nastaven na maximální počet hodnot \mathbf{x}^k a nevyužité prvky matice jsou nastaveny na hodnotu -1.0 . Tyto prvky nejsou při aproximaci uvažovány.

5.3.3 Proces aproximace

V předchozích podsekcích jsme se zabývali hlavními třídami a ukládáním dat. Nyní se blíže zaměříme na samotný proces aproximace. Tento proces je možné popsat následujícími kroky:

1. Načtení empirických dat a informací o B -splinu ze souboru nebo jsou tyto hodnoty získány přímo z programu. V tomto kroku je také zajištěna kontrola požadovaných vlastností vstupních dat.
2. Spočítání koeficientů B -splinu na základě dat získaných v předcházejícím kroku a vyhodnocení funkčních hodnot křivky na intervalu $[\varepsilon, 1]$ s daným krokem.
3. Zobrazení aproximovaného aditivního generátoru. Pro hodnoty na intervalu $[\varepsilon, 1]$ se použijí hodnoty B -splinu z předchozího kroku. Na intervalu $(0, \varepsilon]$ je zobrazena funkce s předpisem $\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{\varepsilon}$.

Poznámka: Při každé změně některého z parametrů aproximace je nutné provést znovu všechny uvedené kroky.

5.4 Experiment modelování fuzzy konjunkce

V rámci aplikace modelování fuzzy konjunkce je proveden experiment, v němž jsou využity znalosti z předchozích podkapitol. Hlavním cílem experimentu je zjistit, jakým způsobem lidé chápou fuzzy konjunkci. Jinými slovy: najít takovou t -normu, která co nejpřesněji modeluje konjunkci ve významu používaném lidmi. Druhým cílem je zjistit, zda lidé chápou konjunkci jako komutativní operaci.

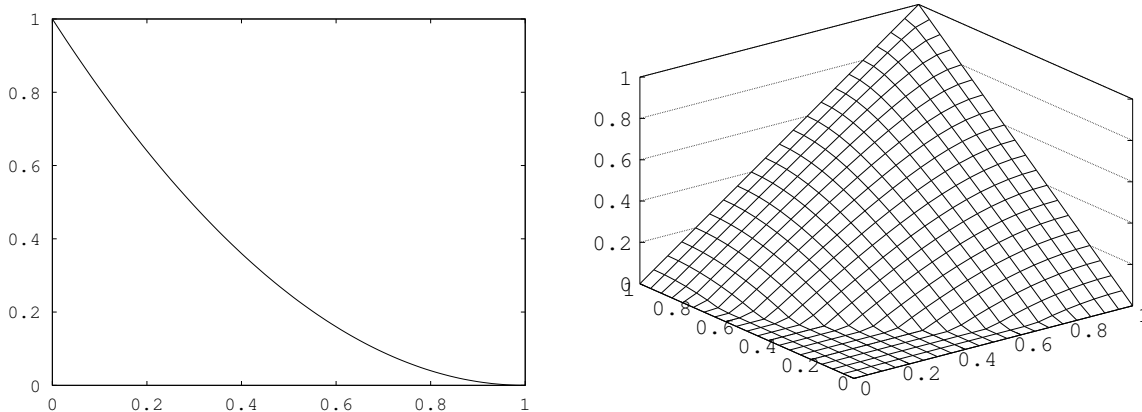
Data, na jejichž základě je modelování provedeno, byla od respondentů získána pomocí papírového dotazníku. Úkolem respondentů bylo přiřadit připraveným výrokům číselnou hodnotu v rozmezí $1-10$, která reprezentuje stupeň pravdivosti daného výroku podle jejich osobního názoru. Výroků je celkem 20, z nichž 10 je prostých a zbylých 10 je utvořeno konjunkcí oněch prostých výroků. Jednotlivé konjunkce jsou uvedeny v obou tvarech, tj. $A \wedge B$ i $B \wedge A$. Oslovení respondenti jsou především z řad studentů Fakulty informačních technologií. Použité výroky v dotazníku jsou v příloze **D**.

5.4.1 Vyhodnocení experimentu

Nakonec bylo získáno 204 vyplněných dotazníků od respondentů. Jak již bylo zmíněno dříve, experiment si kladl dva hlavní cíle.

1. *Hledání modelu fuzzy konjunkce chápanou lidmi.* Pro modelování výsledné t -nomy byla využita metoda aproximace aditivního generátoru pomocí B -splinu, popsaná dříve. Vzhledem k tomu, že v každém dotazníku bylo 20 výroků, aproximace byla

provedena na základě více než 1000 empirických hodnot, které bylo nejprve potřeba transformovat do intervalu $[0, 1]$. Nad transformovanými daty potom byla provedena aproximace pomocí B -splineů. Vzhledem k tomu, že v empirických datech jsou zastoupeny všechny hodnoty v rozmezí 1–10, byla okrajová podmínka ε nastavena na nulu. Pomocí programu a metod popsanych v předchozích podkapitolách bylo zjištěno, že výsledný aproximovaný aditivní generátor g na intervalu $[0, 1]$ je dán předpisem $g(x) = (1 - x)^2$ (obr. 5.2a). Předpis generátoru je také ovlivněn volbou uzlových bodů B -splineu.



(a) Graf aproximovaného aditivního generátoru na intervalu $[0, 1]$, který je dán předpisem $g(x) = (1 - x)^2$. (b) Graf výsledné t-normy, která byla modelována na základě empirických dat (odpovídá Yagerově t-normě s parametrem $p = 2$).

Obrázek 5.2: Grafické znázornění výsledku experimentu.

Tento generátor odpovídá t-normě:

$$T(x, y) = \max \left\{ 0, 1 - \left((1 - x)^2 + (1 - y)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

což je Yagerova t-norma s parametrem $p = 2$ (obr. 5.2b).

2. Druhým cílem bylo zjistit, zda lidé chápou konjunkci jako komutativní operaci. Z obdržených dotazníků plyne, že v asi 56 % případů byla konjunkce vyhodnocena jako komutativní operace. Respondenti nejčastěji chápali konjunkci jako komutativní operaci v dotazníku u otázek 5 a 10. Naopak nejméně často u otázek 1 a 20. Otázkou však zůstává, do jaké míry byli respondenti ovlivněni znalostí klasické logiky a jak by výsledek vypadal u méně technicky zaměřených respondentů.

Kapitola 6

Závěr

V této práci jsme se věnovali uninormám, zejména jejich φ -transformacemi a modelování fuzzy logické konjunkce z empirických dat. Nejprve jsme uvedli příklady několika uninorem, na kterých jsme zjišťovali, za jakých podmínek kladených na funkci φ vznikne transformací těchto uninorem opět uninorma. Taktéž jsme se věnovali speciálním případům, kdy transformací vznikla původní uninorma. Na základě těchto příkladů se podařilo některá tvrzení o transformaci zobecnit pro obecné uninormy.

V další části jsme se zabývali invariantní transformací uninorem a hledáním invariantů. Nejprve jsme se věnovali podmínkám na množině $[0, e) \times (e, 1]$. Uvedli jsme několik tvrzení, která stanovují podmínky pro invariantní transformaci. Mimo jiné jsme zjistili, že pro určité uninormy po φ -transformaci vznikne původní uninorma na této množině právě tehdy, když je funkce φ permutovatelná s jednotlivými funkcemi na této množině. Touto podmínkou jsme se zabývali i dále, kdy jsme hledali funkce, které by se daly pro konstrukci uninorem využít a zároveň budou invariantní vůči transformaci. Vyšetřovanými třídami permutovatelných funkcí byly iterace funkcí a Čebyševovy polynomy prvního řádu, kde se ukázalo, že neexistují žádné takové polynomy, které by se daly pro konstrukci uninorem využít. Pozornost byla také věnována invariantní transformaci t-norem. Mimo jiné jsme ukázali, že transformace diagonálními funkcemi jistých triangulárních norem je invariantní. V neposlední řadě jsme také objevili spojitost mezi invariantností a aditivními generátory.

Poslední část práce byla věnována modelování fuzzy logických spojek. Zde se podařilo nalézt a analyzovat algoritmus pro aproximaci aditivních generátorů pomocí B -splineů. Tento algoritmus je možné uplatnit například při návrhu fuzzy kontrolérů. Na základě tohoto algoritmu byl implementován program, který poskytuje jednoduchou a efektivní možnost aproximace aditivních generátorů z empirických dat. Pomocí tohoto programu byl vyhodnocen experiment, který si kladl za cíl nalézt matematický předpis fuzzy konjunkce, ve významu používaném lidmi. Z výsledků experimentu vyplynulo, že konjunkce používaná lidmi nejvíce odpovídá určité Yagerově t-normě. Tento výsledek lze v praxi využít při konstrukci vícehodnotové logiky, která odpovídá lidskému chápání. Dále jsme zjistili, že konjunkci respondenti označili jako komutativní operaci překvapivě pouze v 56 % případů. Tato hodnota však bude patrně závislá na vzorku respondentů.

Další pokračování práce by se mohlo ubírat dvěma směry. Prvním by mohlo být další studium vlastností agregačních operátorů, zejména uninorem a teoretické možnosti modelování fuzzy logických spojek. Druhým směrem, jakým se další vývoj může ubírat, je modelování implikátorů z uninorem nebo využití modelování spojek z empirických dat v oblasti doporučovací systémů.

Literatura

- [1] ALSINA, C.; SCHWEIZER, B.; FRANK, M.: *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas*. Singapur: World Scientific, 2006, ISBN 981-256-671-6, 237 s.
- [2] BELIAKOV, G.: Fitting triangular norms to empirical data. In *Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, editace E. Klement; R. Mesiar, Boston: Elsevier, 2005, ISBN 0-444-51814-2, s. 261 – 272.
- [3] BJÖRCK, A.: *Numerical Methods for Least Squares Problems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996, ISBN 978-0-898713-60-2, 408 s.
- [4] BUNCH, J. R.; HOPCROFT, J. E.: Triangular Factorization and Inversion by Fast Matrix Multiplication. *Mathematics of Computation*, ročník 28, č. 125, 1974: s. 231 – 236, ISSN 0025-5718.
- [5] CHEN, D.; PLEMMONS, R. J.: Nonnegativity constraints in numerical analysis. In *The Birth of Numerical Analysis*, Singapur: World Scientific, 2010, ISBN 978-981-283-625-0, s. 109 – 139.
- [6] FODOR, J. C.; YAGER, R. R.; RYBALOV, A.: Structure of Uninorms. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, ročník 5, č. 4, 1997: s. 411–428, ISSN 0218-4885.
- [7] HAVLENA, V.: Transformace uninorem. In *SVOČ 2014 – Soutěž studentů vysokých škol ve vědecké činnosti v matematice*, Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, 2014, str. 9.
- [8] JENEI, S.: Fibred Triangular Norms. *Fuzzy Sets and Systems*, ročník 103, č. 1, Duben 1999: s. 67–82, ISSN 0165-0114.
- [9] JOY, K. I.: Definition of a B-spline curve, [online]. Dostupné z: <https://www.cs.unc.edu/~dm/UNC/COMP258/LECTURES/B-spline.pdf>, 2000, [cit. 2015-02-21].
- [10] KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E.: *Triangular Norms*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000, ISBN 978-0792364160, 385 s.
- [11] KNUTH, D. E.: *Umění programování 2. díl – Seminumerické algoritmy*. Brno: Computer Press, a.s., 2010, ISBN 978-80-251-2898-5, 763 s.
- [12] KUCZMA, M.; CHOZEWSKI, B.; GER, R.: *Iterative Functional Equations*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1990, ISBN 0-521-35561-3, 552 s.

- [13] RIVLIN, T. J.: *The Chebyshev polynomials*. Pure and Applied Mathematics, New York: Wiley, 1974, ISBN 9780471724704, 186 s.
- [14] SMUTNÁ, D.: Limit t-norms as a basis for the construction of new t-norms. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, ročník 9, č. 2, 2001: s. 239–247, ISSN 0218-4885.
- [15] TEE, G. J.: Permutable polynomials and rational functions, [online]. Dostupné z: <http://www.citr.auckland.ac.nz/researchreports/CITR-TR-193.pdf>, Leden 2007, [cit. 2014-11-15].
- [16] YAGER, R. R.; RYBALOV, A.: Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, ročník 80, č. 1, 1996: s. 111 – 120, ISSN 0165-0114.
- [17] ŽÁRA, J.; BENEŠ, B.; SOCHOR, J.: *Moderní počítačová grafika*. Computer Press, a.s., 2004, ISBN 80-251-0454-0, 609 s.

Příloha A

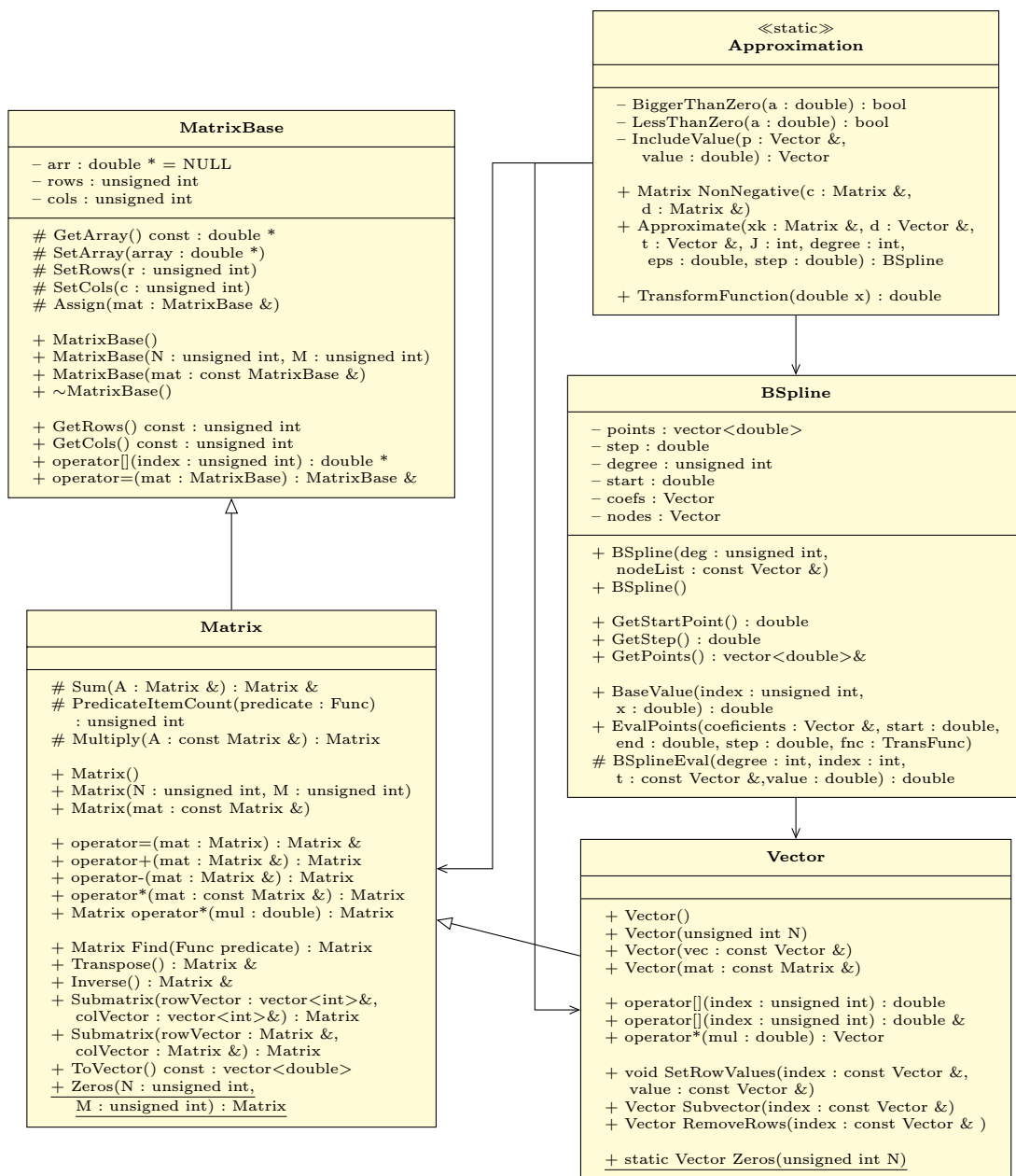
Obsah CD

Příložené CD obsahuje:

- `bp_xhav1e03.pdf` – text písemné zprávy ve formátu PDF
- `tex/` – zdrojové kódy písemné zprávy ve formátu \LaTeX
- `src/` – zdrojové kódy programu pro aproximaci aditivních generátorů
- `examples/` – příklady vstupních empirických dat
- `Makefile` – soubor pro překlad programu
- `README.txt` – návod pro instalaci

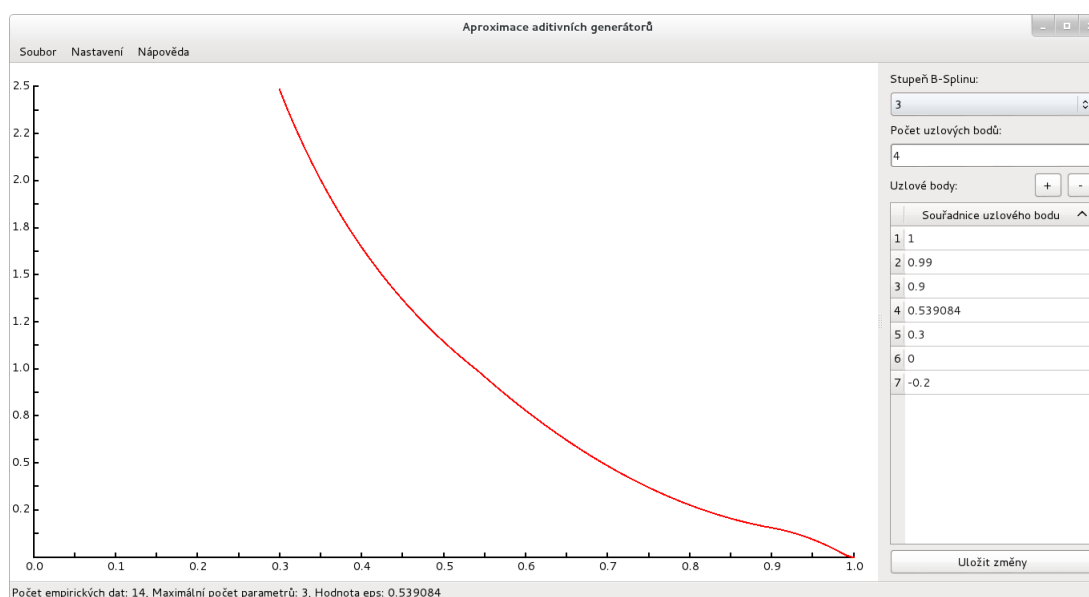
Příloha B

Diagram tříd



Příloha C

Ukázka aplikace



Obrázek C.1: Hlavní okno aplikace.

Empirická data

Epsilon: Řádek: Sloupec:

	y	x(1)	x(2)
1	0.615385	0.8	0.8
2	0.615348	0.81	0.79
3	0.80198	0.9	0.9
4	0.624205	0.79	0.82
5	0.841002	0.93	0.91
6	0.580313	0.78	0.78
7	0.714398	0.78	0.93
8	0.58891	0.77	0.8
9	0.61165	0.7	0.9
10	0.583333	0.6	0.98
11	0.62406	0.83	0.78
12	0.715965	0.85	0.86
13	0.725275	0.84	0.88
14	0.692608	0.85	0.835

Obrázek C.2: Okno pro editování empirických dat.

Příloha D

Použité výroky v dotazníku

1. Hodně lidí v této místnosti nosí brýle.
2. Chodím dříve spát.
3. Je slunečné a teplé počasí.
4. Často se cítím unavený.
5. Matematika má praktické využití.
6. Je slunečné počasí.
7. Hodně lidí v této místnosti nosí brýle a má světlé vlasy.
8. Často se cítím unavený, i když chodím dříve spát.
9. Jízdné výrazně zdražilo.
10. Matematika je zajímavý vědní obor.
11. Venku je teplo.
12. Jízdné výrazně zdražilo, ale cestování hromadnou dopravou je pohodlné.
13. Matematika má praktické využití a navíc je to i zajímavý vědní obor.
14. Je teplé slunečné počasí.
15. Hodně lidí v této místnosti má světlé vlasy a nosí brýle.
16. Cestování hromadnou dopravou je pohodlné.
17. Ačkoliv chodím dříve spát, cítím se často unavený.
18. Matematika je zajímavý vědní obor a má praktické využití.
19. Cestování hromadnou dopravou je pohodlné, ale jízdné výrazně zdražilo.
20. Hodně lidí v této místnosti má světlé vlasy.