

Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta

Bakalářská práce

2015

Petr Schovánek

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA OPTIKY



**PŘEKONÁNÍ DIFRAKČNÍHO LIMITU V JEDNOCESTNÉ
NEKOHERENTNÍ KORELAČNÍ HOLOGRAFII S
DIGITÁLNÍ REKONSTRUKCÍ OBRAZU**

Autor práce: Petr Schovánek

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Zdeněk Bouchal, Dr.

Konzultant: Ing. Petr Bouchal

Datum: 12. května 2015

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá fyzikálními limity rozlišení ve Fresnelově nekoherentní korelační holografii. Metoda využívá holografický záznam 3D objektů v prostorově nekoherentním záření, následovaný numerickou rekonstrukcí obrazu. Zobrazovací technika je specifická porušením základní zobrazovací vazby, která je u běžných optických systémů určena Lagrangeovým invariantem. Tato vlastnost může být při vhodně zvolených parametrech experimentu využita k překonání Rayleighova limitu rozlišení.

Řešení bakalářské práce vychází z dříve publikovaných výpočetních modelů korelačního zobrazení a využívá je k hlubšímu prozkoumání vazeb mezi parametry experimentu a příčným a podélným obrazovým rozlišením. Součástí bakalářské práce je také experimentální ověření mechanismů, které vedou k překonání difrakčního limitu zobrazení. Potřebné numerické zázemí bylo vytvořeno v programovacím prostředí *Mathematica*. Rekonstrukce experimentálně zaznamenaných hologramů byly provedeny v prostředí *Matlab* s rozšířením o nástrojovou sadu *LightPipes*.

Klíčová slova

digitální holografie, difrakční limit rozlišení, Lagrangeův invariant

Abstract

The bachelor thesis deals with the physical limits of resolution in the Fresnel incoherent correlation holography. This method uses a holographic record of 3D objects in spatially incoherent radiation, followed by the numerical reconstruction of the image. The imaging technique is specific in overcoming the basic optical links, which are determined by Lagrange invariant, in the common imaging systems. With the properly selected parameters of the experiment, this property can be used to overcome the Rayleigh resolution limit.

The work done in the bachelor thesis is based on the previously published computational models of the correlation imaging, which are further used to investigate the links between the parameters of the experiment and the transverse and longitudinal image resolution. In the bachelor thesis, the experimental verification of the mechanisms leading to overcoming the diffraction resolution limit is also included. In the numerical analysis of the image resolution, software Mathematica was utilized. Reconstruction of the experimentally recorded holograms was performed by Matlab software operating with LightPipes toolbox.

Keywords

digital holography, diffraction resolution limit, Lagrange invariant

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Překonání difrakčního limitu v jednocestné nekoherentní korelační holografii s digitální rekonstrukcí obrazu* vypracoval samostatně pod odborným vedením pana prof. RNDr. Zdeňka Bouchala, Dr. a v seznamu literatury uvedl všechny použité informační zdroje.

V Olomouci dne 12. května 2015

.....

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu bakalářské práce panu prof. RNDr. Zdeňku Bouchalovi, Dr. za odborné vedení, motivaci, vstřícnost a trpělivost při konzultacích a spoustu cenných rad. Mé poděkování patří rovněž panu Ing. Petru Bouchalovi za konzultace, ochotu a pomoc s realizací experimentu.

OBSAH

1 ÚVOD	6
2 DIGITÁLNÍ HOLOGRAFIE	7
2.1 Od optické k digitální holografii.....	7
2.2 Princip metody.....	8
2.2.1 Vznik, záznam a zpracování hologramu	9
2.2.2 Numerická rekonstrukce hologramu	10
3 METODA FINCH	11
3.1 Standardní konfigurace	13
3.1.1 Ohnisková vzdálenost syntetické čočky	14
3.1.2 Příčné a podélné měřítko zobrazení	15
3.1.3 Speciální případy	16
3.2 Dvoučočková konfigurace.....	16
3.2.1 Základní parametry zobrazení.....	17
3.2.2 Speciální případ	18
4 ROZLIŠENÍ V OPTICKÉM A FINCH ZOBRAZENÍ	18
4.1 Difrakční rozlišení ideální čočky	19
4.2 Difrakční rozlišení pro standardní FINCH konfiguraci.....	21
4.2.1 Předmět v ohnisku	21
4.2.2 Předmět umístěný mimo ohniskovou rovinu.....	25
4.2.3 Konfigurace bez kolimační optiky	28
4.3 Difrakční rozlišení pro dvoučočkovou FINCH konfiguraci	29
5 EXPERIMENTÁLNÍ OVĚŘENÍ	31
5.1 Popis experimentálních sestav	31
5.2 Experimentální výsledky	33
5.2.1 Standardní konfigurace	33
5.2.2 Dvoučočková konfigurace	34
6 ZÁVĚR	35

1 ÚVOD

Bakalářská práce se zabývá fyzikálními limity rozlišení, které mohou být dosaženy ve Fresnelově nekoherentní korelační holografii (metoda je v anglické literatuře známá jako FINCH - Fresnel Incoherent Correlation Holography [1]). Metoda je specifická možností pořízení korelačních holografických záznamů 3D předmětů v prostorově nekoherentním záření. V holografickém záznamu je zakódovaná úplná 3D informace o zobrazovaném objektu, což ve spojení s numerickou rekonstrukcí hologramu nabízí možnost digitálního přeastření obrazu.

Metoda FINCH je zajímavá svými optickými vlastnostmi i aplikačním potenciálem. Z hlediska tématu bakalářské práce je nejvýznamnější vlastností porušení Lagrangeova invariantu [2], který představuje základní vazbu optických parametrů v obvyklých zobrazovacích systémech. Tento efekt umožňuje v numericky rekonstruovaném obrazu dosáhnout rozlišení, které dvojnásobně překračuje optický difrakční limit objektivu použitého v experimentální sestavě [3].

Bakalářská práce řeší tematiku rozlišení metody FINCH ve čtyřech kapitolách. V první z nich je představen koncept digitální holografie, jsou objasněny základní aspekty této zobrazovací metody a prezentovány možné záznamové geometrie spolu s jejich specifiky. Je vysvětlen základní princip vzniku hologramu, jeho záznam a následná numerická rekonstrukce. Druhá a třetí kapitola je věnována nekoherentní korelační holografii. S využitím předchozích publikací jsou prezentovány základní zobrazovací charakteristiky FINCH systému a reprodukovány vztahy nezbytné k diskusi difrakčního rozlišení. Vlastní přínos bakalářské práce spočívá v podrobné numerické analýze závislosti příčného a podélného rozlišení FINCH zobrazení na parametrech typických experimentálních konfigurací. Numerické výpočty byly provedeny v programu *Mathematica*. Hlavní pozornost byla věnována případům, které umožňují překročení difrakčního limitu zobrazení. Ve čtvrté, experimentální části, jsou prezentovány výsledky, které ověřují teoreticky zkoumané vztahy mezi parametry experimentální sestavy a příčným rozlišením. Experimentální data byla zkoumána pro dvě základní konfigurace metody FINCH. Pro pořízení záznamů byl využit funkční systém korelačního mikroskopu, který byl zkonstruován ve spolupráci PŘF UP Olomouc a VUT Brno a je k dispozici v laboratoři Katedry optiky. Zpracování experimentálně pořízených záznamů, numerická rekonstrukce bodových obrazů a

vyhodnocení rozlišení bylo provedeno v programu *Matlab* s využitím optické nadstavby LightPipes.

2 DIGITÁLNÍ HOLOGRAFIE

Holografie¹ je metoda záznamu úplné informace o trojrozměrném světelném poli (informace o amplitudě i fázi vlnění) na dvojrozměrné záznamové médium. Tato komplexní informace je zakódovaná v hologramu, který vzniká důsledkem interference zkoumaného světelného pole (signální vlny) a vhodně fázově modulovaného světelného pozadí (referenční vlny).

V klasické holografii je proces záznamu i rekonstrukce hologramu (obnovy zaznamenaného světelného pole) realizován opticky. Hologram zaznamenaný na světlocitlivou holografickou desku musí být nejprve vyvolán a následně osvětlen původní referenční vlnou, která zprostředkovává jeho rekonstrukci. Principy digitální holografie nabízejí zjednodušení a zrychlení tohoto komplikovaného procesu. V digitální holografii je hologram zaznamenaný nejčastěji pomocí CCD kamery a jeho rekonstrukce je řešena numericky (viz podkapitola 2.2.2). Digitalizace hologramu s sebou přináší řadu výhod, jako je možnost uchování velkého objemu dat, jejich kvantitativního vyhodnocení, nebo navazujícího numerického zpracování obrazu [4]. S digitalizací signálu jsou spojená ale také jistá úskalí, pramenící z diskretizace zaznamenaných a následně zpracovávaných dat. K plnohodnotnému záznamu hologramu a zisku nenarušené obrazové informace je nutné vždy splnit Nyquistův-Shannonův vzorkovací teorém. Tento teorém udává, že vzorkovací frekvence musí nabývat alespoň dvojnásobku maximální prostorové frekvence detekovaného signálu [5]. Nesplněním kritéria vznikají v obraze artefakty a dochází tak k degradaci obrazové informační hodnoty.

2.1 Od optické k digitální holografii

Za zakladatele holografie je považován fyzik maďarského původu Dennis Gabor², který o této nové záznamové metodě informoval v roce 1948 [6]. Je zajímavé, že motivací práce bylo právě zlepšení rozlišení v elektronové mikroskopii. Metoda byla dále rozvíjena a experimentálně demonstrována [7].

¹ Z řeckých slov *holos* = úplný a *grafie* = záznam.

² V roce 1971 získal za objev a rozvoj holografie Nobelovu cenu za fyziku.

Díky nedostatečnému technickému zázemí se holografii po jejím objevu nedostalo patřičného uznání. Zlom nastal po objevení laseru, jako zdroje koherentního světla, nezbytného ke vzniku hologramů. Dostupnost koherentních zdrojů poté stimulovala navazující vývoj holografie. Významného pokroku v této oblasti dosáhli J. Upatnieks a E. N. Leith, kteří využili již komerčně dostupného laseru a představili mimoosovou geometrii záznamu, umožňující z holografického záznamu odstranit komplexně sdružený obraz. Jako první se zasloužili také o vznik transmisního hologramu³ [8, 9, 10].

S rozvojem výpočetní techniky a optoelektroniky se následně otevřela cesta také pro digitální holografii. Rozvoj CCD senzorů umožnil digitalizaci zaznamenaných hologramů [11], které bylo možné rekonstruovat pomocí prvních numerických algoritmů [12, 13]. V současnosti je digitální holografie široce rozpracovanou oblastí nabízející řadu praktických aplikací zaměřených zejména na optickou mikroskopii. Moderní metody digitální holografie těží z technického pokroku a pomocí vhodných experimentálních konfigurací umožňují provedení záznamu a rekonstrukce hologramu také v nekoherentním záření. Jednou z těchto technik je také metoda FINCH [1], podrobně zkoumaná v hlavní části práce.

2.2 Princip metody

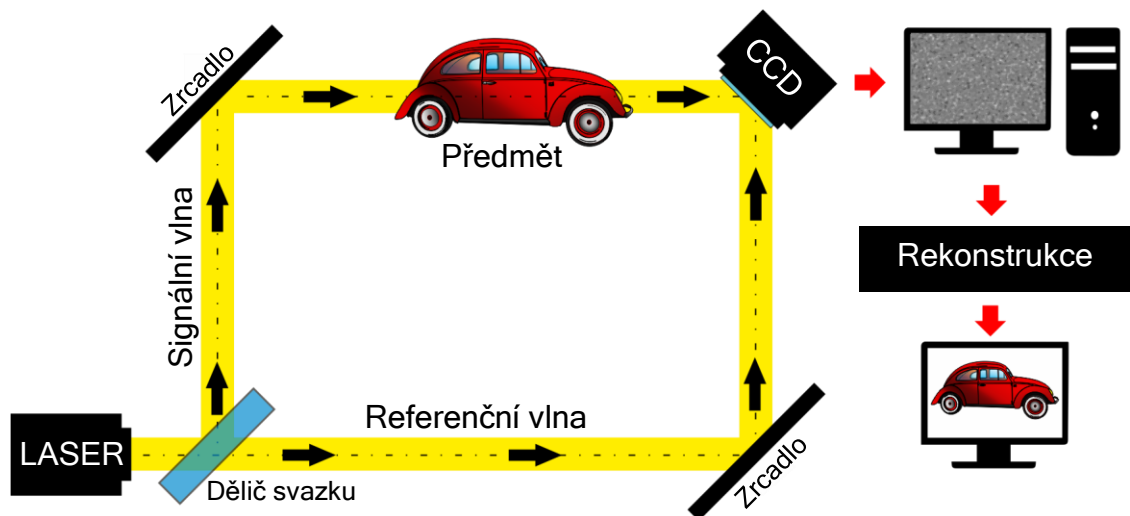
Záznam hologramu a následná rekonstrukce obrazu je v digitální holografii dvoustupňový proces. V prvním kroku je dosaženo interference signální a referenční vlny v rovině CCD senzoru a digitalizace vzniklého interferenčního pole. Druhým krokem je zpracování digitálního záznamu hologramu a provedení numerické rekonstrukce obrazu. Záznam hologramu je možné realizovat ve dvou základních geometriích, známých jako osová a mimoosová.

Mimoosová holografie [9] využívá vzájemného úhlového odklonu mezi signální a referenční vlnou, který zajišťuje prostorové oddělení světelných polí vytvořených rekonstrukcí hologramu. Světelné pole s obrazovanou informací potom není ovlivňováno nedifraktovaným světlem a komplexně sdruženým obrazem, který při rekonstrukci také vzniká. Schéma principu mimoosového holografického záznamu je v obrázku 1.

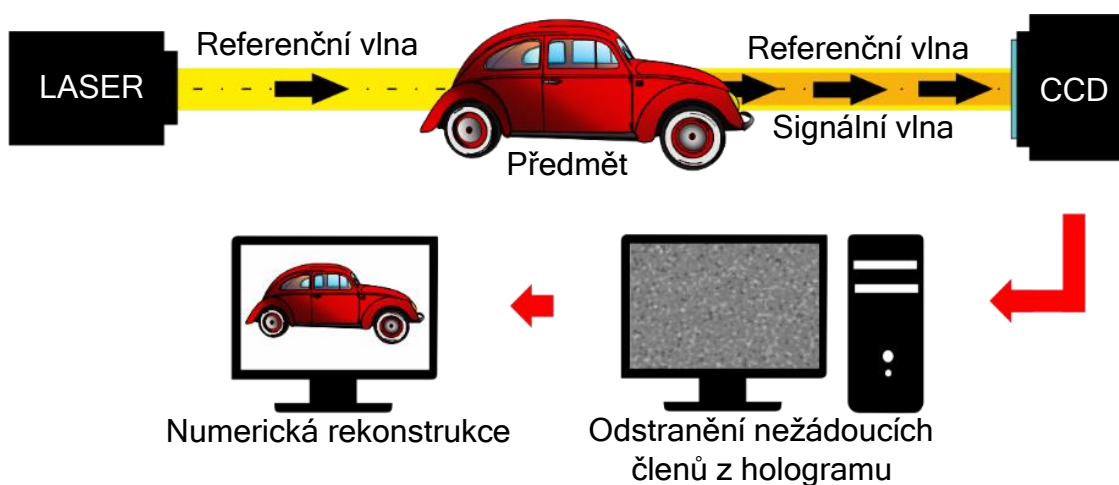
V osově konfiguraci (obrázek 2) jsou signální a referenční vlny orientovány souběžně s optickou osou systému. Příspěvky odpovídající komplexně sdruženému

³ Tzv. *Toy train* uložený v The National Museum of American History.

obrazu a přímému světlu jsou proto prostorově překryty s obrazem a je potřeba je eliminovat numericky. Jednou z možných metod je metoda fázových posunutí [14].



Obrázek 1: Schéma principu digitální mimoosové holografie: interference signální a referenční vlny dopadající na CCD kameru pod různými úhly – digitální záznam hologramu – numerická rekonstrukce hologramu.



Obrázek 2: Schéma principu digitální osové holografie: Interference signální a referenční vlny dopadající na CCD kameru pod stejným úhlem a v osové symetrii – digitální záznam a zpracování hologramu – numerická rekonstrukce hologramu.

2.2.1 Vznik, záznam a zpracování hologramu

Hologram představuje intenzitní záznam vytvořený interferencí signální vlny U_S s vhodnou referenční vlnou U_R . Matematicky může být vyjádřen interferenčním zákonem [15]

$$I(x, y) = |U_S + U_R|^2 = |U_S|^2 + |U_R|^2 + U_S^* U_R + U_S U_R^*. \quad (1)$$

Intenzitní 2D profil $I(x, y)$ obsahuje komplexní informaci zaznamenaného světelného pole. Pro holografii je podstatný zejména poslední člen v rovnici (1), ze kterého se rekonstrukčním procesem získá původní signální vlna. Ostatní členy je možné eliminovat buď již zmíněnou mimoosovou geometrií záznamu hologramu, nebo pomocí metody fázových posunutí v případě osové geometrie experimentu [16]. Metoda je založena na zpracování tří dílčích holografických záznamů H_1, H_2, H_3 , realizovaných s přesným fázovým posunem referenční, nebo signální vlny o hodnoty $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 120^\circ$ a $\theta_3 = 240^\circ$. Výsledný hologram U_H odpovídá členu $U_S U_R^*$ a může být získán podle vztahu [17]

$$U_H = H_1[\exp(i\theta_3) - \exp(i\theta_2)] + H_2[\exp(i\theta_1) - \exp(i\theta_3)] + H_3[\exp(i\theta_2) - \exp(i\theta_1)]. \quad (2)$$

2.2.2 Numerická rekonstrukce hologramu

Přehled základních algoritmů pro numerickou rekonstrukci hologramů je názorně popsán například v práci [17]. Podstatou numerické rekonstrukce je simulace difrakce referenční vlny na interferenční struktuře zaznamenaného hologramu. Komplexní amplitudu rekonstruovaného světelného pole lze získat Fresnelovým-Kirchhoffovým difrakčním integrálem

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_H(x, y) U_R(x, y) \frac{1}{\rho} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \rho\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \delta\right) dx dy, \quad (3)$$

kde x, y (resp. ξ, η) jsou souřadnice v rovině holografického záznamu (resp. v rovině rekonstrukce), $U_H(x, y)$ je funkce propustnosti hologramu, $U_R(x, y)$ rozložení pole referenční vlny, δ je úhel mezi optickou osou a spojnicí bodů v rovině x - y a ξ - η (viz obrázek 3) a λ je vlnová délka použitého záření. Pro vzdálenost ρ vyšetřovaného bodu v rovině hologramu a v obrazové rovině platí

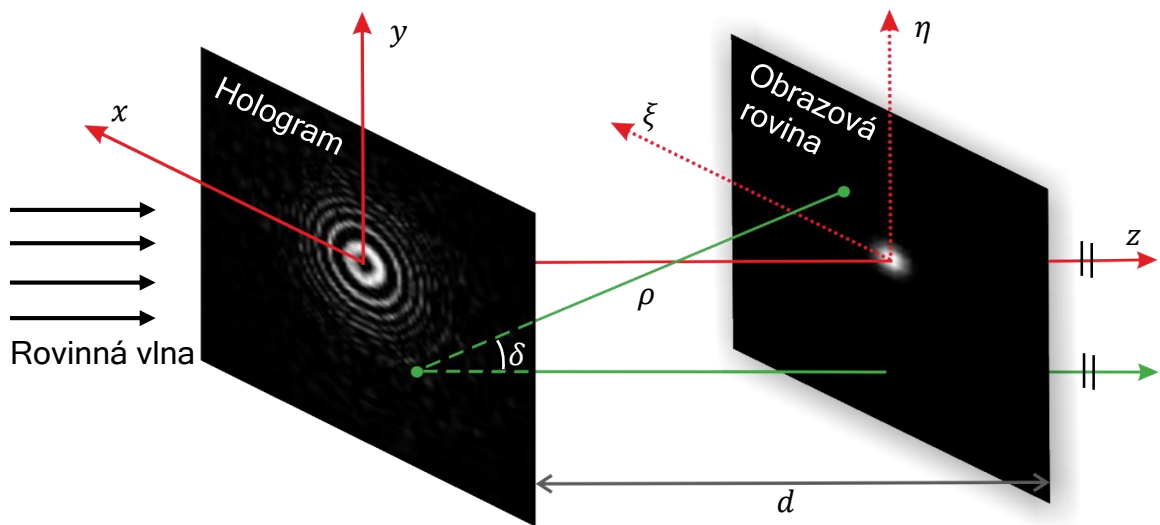
$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + d^2}. \quad (4)$$

Rekonstrukční geometrii spolu s vyznačeními parametry, které vystupují v rovnici (3) a (4) ilustruje obrázek 3.

V praktických případech je často integrace (3) řešena v aproximaci, která vede na Fresnelovu transformaci

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda d} \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^2 + \eta^2 + 2d^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) R(x, y) \times \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2) + i \frac{2\pi}{\lambda d} (x\xi + y\eta) \right] dx dy, \quad (5)$$

která je platná, pokud je hodnota Fresnelova čísla⁴ pro danou záznamovou geometrii blízká jedné. Fresnelovu transformaci je navíc možné pomocí Fourierovy transformace⁵ popř. konvolučního teorému výpočetně optimalizovat a zajistit tak numerickou rekonstrukci v reálném čase [17, 18].



Obrázek 3: Geometrie numerické rekonstrukce. d je vzdálenost obrazové roviny od hologramu.

3 METODA FINCH

Metoda FINCH vychází z obecného konceptu digitální osové holografie a předchozích návrhů pro záznam bodových hologramů v nekoherentním světle, které využívají dobře známá uspořádání samo-referenční interferometrie [19]. Hlavním přínosem metody FINCH je zjednodušení systému, který zajišťuje rozdělení vln vycházejících z jednotlivých bodů zobrazovaného 3D objektu [1]. K tomuto účelu byl použit PMS, který umožnil realizovat bodové holografické záznamy objektu ve výhodném uspořádání jednocestného interferometru v prostorově nekoherentním kvazi-monochromatickém světle. Takto osvětlený, nebo vyzařující předmět je možné podle Huygensova-Fresnelova principu interpretovat jako soubor vzájemně nekorelovaných bodových zdrojů, z nichž každý vyzařuje sférickou vlnu. Záření

⁴ Fresnelovo číslo je definováno jako poměr kvadrátu velikosti poloměru apertury a součinu vzdálenosti obrazové roviny od apertury a vlnové délky použitého záření

⁵ Programově implementovaná pomocí rychlé Fourierovy transformace (FFT)

vycházející z jednotlivých bodů je pomocí PMS rozděleno do dvojic vzájemně koherentních signálních a referenčních vln. V rovině CCD dochází k vzájemné interferenci těchto vln (označované jako samo-interference) a vzniká hologram bodového zdroje. Záznamy objektu jsou opakovány nejméně třikrát při různém fázovém posunutí a numericky zpracovány [14]. Pro numerickou rekonstrukci bodového záznamu je tak vytvořena kvadratická fázová funkce, která reprezentuje difraktivní čočku a není ovlivněna nežádoucími holografickými členy. Parametry této čočky uchovávají plnou informaci o 3D pozici a amplitudě zaznamenaného předmětového bodu a mají poměrně komplikovanou závislost na parametrech experimentální sestavy. Tyto souvislosti byly pro metodu FINCH poprvé prozkoumány v [2] a jsou podrobně diskutovány v pracích [16, 20]. Výsledný hologram celého 3D objektu je pak tvořen nekoherentním součtem takto vzniklých bodových hologramů. Významným aspektem metody FINCH je hybridní koherenční režim, při kterém je plně nekoherentní superpozice bodových záznamů následována plně koherentním součtem numericky rekonstruovaných bodových obrazů. Tato vlastnost byla objasněna v práci [2] a využita pro implementaci vírových interferenčních efektů v systémech pracujících s nekoherentním světlem. Tímto způsobem bylo dosaženo anizotropního spirálního kontrastu ve FINCH zobrazení [21] a přesné axiální holografické lokalizace mikroskopických objektů pomocí rotujícího vírového obrazu [22].

Technickým základem metody FINCH je PMS, který představuje moderní optoelektronický prvek tvořený maticí buněk tekutých krystalů, jejichž orientaci je možné měnit vnějším elektrickým polem. Vytvořením vhodné číselné matice, jejíž hodnoty řídí velikost napětí přiváděného na jednotlivé pixely, tak můžeme na PMS adresovat vhodnou fázovou funkci a dynamicky realizovat řadu optických prvků. Princip činnosti a základní vlastnosti PMS jsou shrnuty například v pracích [23, 24]. Podmínky využití PMS a příprava počítačem generovaných hologramů pro jeho řízení ve FINCH experimentech jsou diskutovány v [16, 20].

Aplikační potenciál metody FINCH byl prokázán v [25], kde byl prezentován první návrh mikroskopu založeného na nekoherentním korelačním holografickém zobrazení — tzv. FINCHSCOPE. Navržený systém umožňuje záznam fluoreskujících objektů bez nutnosti časově náročného prostorového skenování a přeastřování k získání 3D informace o zobrazovaném předmětu. V laboratoři Katedry optiky byl v rámci společných projektů PŘF UP Olomouc a VUT Brno navržen a realizován

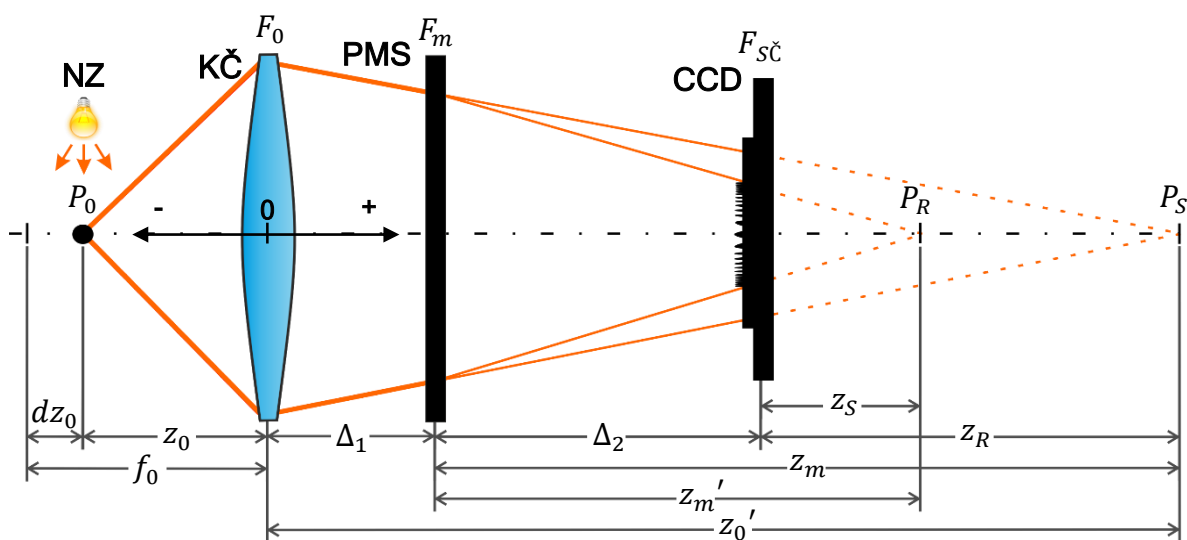
variabilní funkční systém korelačního mikroskopu, který umožňuje pozorování v transmisním i fluorescenčním režimu. Jeho kompaktní varianta, která představuje prototyp multifunkčního mikroskopu kombinujícího FINCH zobrazení s metodami kvantitativního fázového kontrastu, je v rámci projektu TA ČR konstruována na VUT v Brně.

3.1 Standardní konfigurace

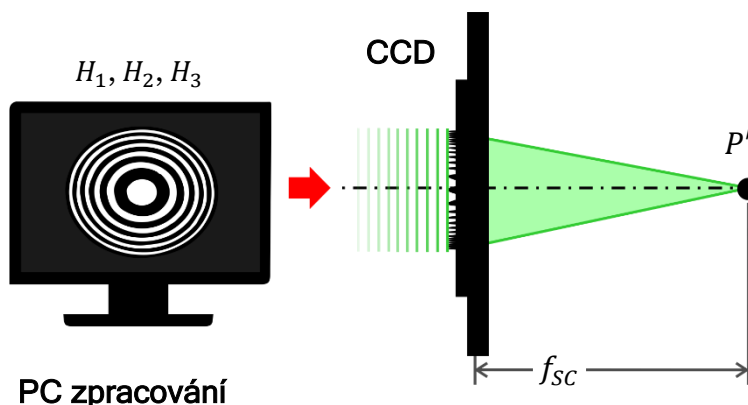
Záznam hologramu v prostorově nekoherentním záření je v metodě FINCH umožněn díky vhodně provedenému střihu vln dopadajících na PMS, který zajišťuje vznik signální a referenční vlny pro každý bod zobrazovaného objektu. Při prvotním FINCH návrhu [1] byla na polovinu pixelů PMS adresovaná konstantní fázová funkce, zajišťující vznik referenční vlny s fázovým posunem a na druhé polovině pixelů byla vytvořena kvadratická fázová funkce odpovídající účinku spojné čočky. Kvadratická fázová funkce zajišťuje vznik sférické signální vlny. Tento zobrazovací režim lze vytvořit také využitím polarizačních vlastností PMS, bez nutnosti rozdělení pixelů do dvou fázových funkcí. Využití všech pixelů PMS k současnému vytvoření signální i referenční vlny vedlo k výraznému zlepšení kvality rekonstruovaných hologramů [26]. Pro uspořádání, využívající k vytvoření bodových záznamů rovinné referenční vlny, bylo navrženo označení "standardní konfigurace" [20], které ji odlišuje od konstrukčních alternativ navržených v dalším postupném vývoji metody. Popsané uspořádání bylo v odborné literatuře již zkoumáno a jeho matematický popis [2], se stal podkladem k této práci, zaměřené na podrobné objasnění vztahů potřebných pro diskusi rozlišovací schopnosti.

Uvažujme standardní FINCH konfiguraci s bodovým zdrojem umístěným na optické ose systému a předpokládejme platnost paraxiální aproximace. Bod $P_0(x_0, y_0, z_0)$ vysílá divergentní sférickou vlnu, která je následně transformovaná kolimační čočkou. Část této vlny prochází PMS beze změny a část je transformovaná fázovou funkcí spojné čočky nahrané na PMS. Čistě teoreticky, referenční vlna vytváří obraz $P_R(x_R, y_R, z_R)$ a signální vlna obraz $P_S(x_S, y_S, z_S)$. Zaveďme značení uvedené na obrázku 4 k popisu základních zobrazovacích charakteristik.

Proces numerické rekonstrukce, jehož výsledkem je digitální obraz bodu $P'(x', y', z')$, je schematicky znázorněn na obrázku 5. Matematický princip digitální rekonstrukce byl krátce představen v kapitole 2.2.2.



Obrázek 4: Standardní FINCH konfigurace s vyznačenými parametry. NZ značí nekoherentní zdroj světla, KČ kolimační čočka.



Obrázek 5: Geometrie digitální rekonstrukce hologramu. f_{SC} je ohnisková vzdálenost syntetické čočky⁶, P' rekonstruovaný obraz bodového záznamu.

3.1.1 Ohnisková vzdálenost syntetické čočky

Po uvážení geometrie na obrázku 4, je možné s využitím paraxiální zobrazovací rovnice ohniskovou vzdálenost syntetické čočky f_{SC} vyjádřit jako

$$f_{SC} = \frac{z_S z_R}{z_R - z_S}, \quad (6)$$

přičemž

$$z_S = z'_m - \Delta_2 \quad (7)$$

a

⁶ Pojem *syntetická čočka* byl zaveden v [16, 20] a vychází ze skutečnosti, že výsledný hologram byl vytvořen ze 3 dílčích holografických záznamů.

$$z_R = z_m - \Delta_2. \quad (8)$$

Ze zobrazovací rovnice pro čočku adresovanou na PMS platí

$$z'_m = \frac{f_m(z'_0 - \Delta_1)}{f_m + z'_0 - \Delta_1} \quad (9)$$

a ze zobrazovací rovnice pro kolimační čočku

$$z'_0 = \frac{f_0 z_0}{f_0 + z_0}. \quad (10)$$

Dosazením vztahu (10) do substituovaného vztahu pro vzdálenost z_m

$$z_m = z'_0 - \Delta_1 \quad (11)$$

je možné psát

$$z_m = \frac{f_0 z_0 - \Delta_1(f_0 + z_0)}{f_0 + z_0}. \quad (12)$$

Dosazením vztahů (7)–(12) do (6) a provedením vhodných úprav, lze pro ohnisko syntetické čočky získat finální vztah [2]

$$f_{sc} = (1 - F)[f_m(1 - F) - \Delta_2], \quad (13)$$

kde

$$F = \frac{\Delta_2(f_0 + z_0)}{f_0 z_0 - \Delta_1(f_0 + z_0)}. \quad (14)$$

3.1.2 Příčné a podélné měřítko zobrazení

Důležitými parametry zobrazovacích systémů jsou příčné a podélné měřítko zobrazení. Pro obecný optický systém je příčné měřítko zobrazení m definováno vztahem

$$m = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}, \quad (15)$$

kde x, y (resp. x', y') jsou příčné rozměry zobrazovaného předmětu (resp. obrazu). Po uvážení geometrie na obrázku 4, využití zobrazovacích rovnic jednotlivých prvků a vztahů (13)–(15), lze pro příčné měřítko zobrazení m psát [2]

$$m = \frac{f_0 \Delta_2}{z_0(f_0 - \Delta_1) - f_0 \Delta_1}. \quad (16)$$

Obecný vztah pro podélné měřítko zobrazení α je dán poměrem infinitezimálního podélného rozměru obrazu dz' a odpovídajícího infinitezimálního podélného rozměru předmětu dz [27]

$$\alpha = \frac{dz'}{dz}. \quad (17)$$

V našem případě tedy

$$\alpha = \frac{df_{SC}}{dz_0}. \quad (18)$$

Po provedení derivace (18) vztahu (13) a algebraické úpravě výrazu získáme [2]

$$\alpha = \frac{f_0^2 F^2 [2f_m(1-F) - \Delta_2]}{\Delta_2 (f_0 + z_0)^2}, \quad (19)$$

kde F je určeno vztahem (14).

3.1.3 Speciální případy

Prakticky významným případem je umístění předmětu do ohniskové roviny kolimační čočky. V tomto případě $z_0 \rightarrow -f_0$ a od vztahů (13), (16) a (19) lze limitně přejít ke vztahům [2]

$$f_{SC} = f_m - \Delta_2, \quad (20)$$

$$m = -\frac{\Delta_2}{f_0}, \quad (21)$$

$$\alpha = -\frac{\Delta_2 - 2f_m \Delta_2}{f_0 f_0}. \quad (22)$$

Druhým speciálním případem je konfigurace bez použití kolimační optiky. Praktická realizace je například v [28]. V tomto případě $\Delta_1 \rightarrow 0$ a $f_0 \rightarrow \infty$. Limitním přechodem vztahů (13), (16) a (19) je v tomto případě možno získat [2]

$$f_X = (1 - m_X)[f_m(1 - m_X) - \Delta_2], \quad (23)$$

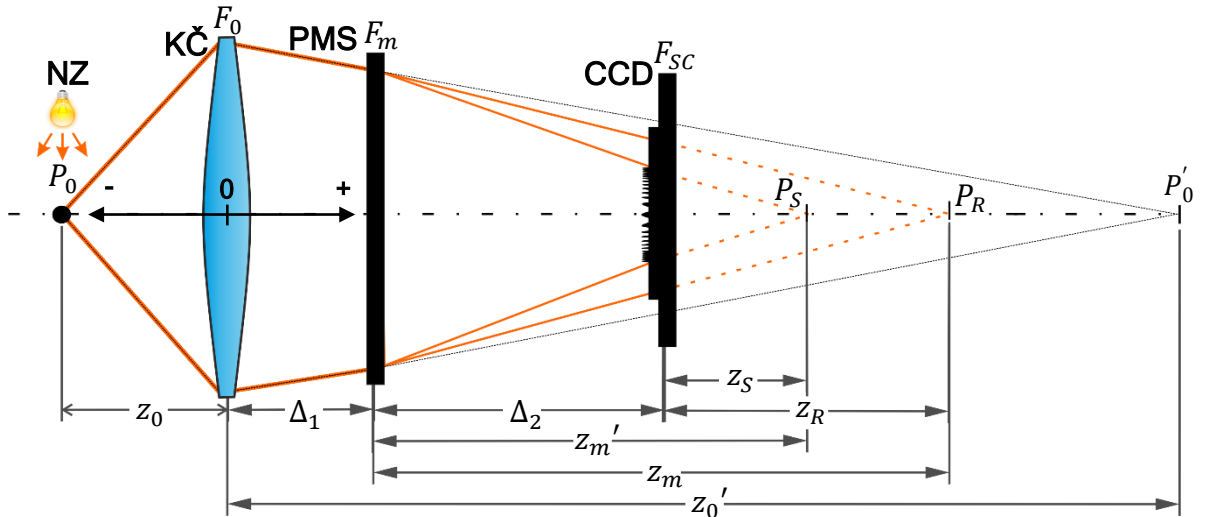
$$m_X = \frac{\Delta_2}{z_0}, \quad (24)$$

$$\alpha_X = \frac{m_X^2 [2f_m(1 - m_X) - \Delta_2]}{\Delta_2}. \quad (25)$$

3.2 Dvoučočková konfigurace

Poprvé byla tato konfigurace prezentovaná v [29], kde byla mimo jiné teoreticky stanovena její příčná rozlišovací schopnost. Její rozdíl oproti standardní konfiguraci spočívá v aplikaci dvou kvadratických fázových funkcí na prostorový modulátor světla. Schematický náčrt s vyznačením základních parametrů je na obrázku 6. Podrobnější analýza dvoučočkové konfigurace byla provedena v [30]. Byla zde také prezentovaná hlavní výhoda této konfigurace, kterou je minimalizace optické dráhy (OPD) interferujících vln a bylo demonstrováno dosažení lepší kvality rekonstruovaného obrazu. Důsledná demonstrace fyzikálních aspektů dvoučočkové

konfigurace byla provedena až v publikaci zaměřené na analýzu vlivu časové koherence světla v korelačním zobrazení [31]. Pomocí koncepce koherenční apertury zde bylo prokázáno, že ve vhodně konfigurovaných FINCH experimentech je možné dosáhnout subdifrakčního rozlišení, i při použití záření se širokým spektrem (v extrémním případě s bílým světlem). Bylo rovněž prokázáno, že těchto limitů je dosaženo pouze v systémech s odstraněnou disperzí. Tohoto požadavku je obtížné dosáhnout, protože PMS vykazuje mimořádně výraznou difraktivní disperzi. Pokrokem na cestě k širokospektrálním korelačním experimentům se stal korekční afokální systém umožňující achromatizaci činnosti PMS [32]. Systém byl vyroben v Meoptě Přerov v rámci projektu TA ČR a úspěšně testován v laboratoři Katedry optiky. Možnost rozšíření spektra záření je významná, protože současné experimenty vyžadují použití spektrálních filtrů o šířce několika nanometrů.



Obrázek 6: Dvoučočková FINCH konfigurace s vyznačenými parametry. NZ nekoherentní zdroj světla, KČ kolimační čočka.

3.2.1 Základní parametry zobrazení

Při odvození ohniskové vzdálenosti syntetické čočky f_{sc} vycházejme opět ze vztahu (6), který je možné podle základních parametrů konfigurace z obrázku 6 vyjádřit ve tvaru

$$f_{sc} = \frac{G_1 G_2}{(f_{m_2} - f_{m_1})}, \quad (26)$$

kde

$$G_j = \frac{(1 - F)f_{m_{1,2}}z_0 + F\Delta_1(f_0 + z_0) - f_0(Fz_0 + Ff_{m_{1,2}} - f_{m_{1,2}})}{(f_0 + z_0)}, \quad j = 1, 2 \quad (27)$$

Po provedení derivace (18) vztahu (26) lze najít pro podélné měřítko zobrazení α

$$\alpha = K - L, \quad (28)$$

kde

$$K = \frac{2F(F-1)f_{m_1}f_{m_2}f_0^2}{(f_{m_1} - f_{m_2})(f_0 + z_0)[f_0z_0 - \Delta_1(f_0 + z_0)]} \quad (29)$$

a

$$L = \frac{F^2f_0^2[f_0z_0(f_{m_1} - f_{m_2}) + \Delta_1(f_{m_1} + f_{m_2})(f_0 + z_0)]}{(f_{m_1} - f_{m_2})(f_0 + z_0)^2[f_0z_0 - \Delta_1(f_0 + z_0)]}. \quad (30)$$

F je ve vztazích (27), (29), (30) dáno substitucí (14).

Z obecného vztahu pro příčné měřítko (15) a zobrazovacích poměrů na obrázku 6 lze ukázat, že pro příčné měřítko zobrazení dvoučočkové konfigurace platí vztah (16), stejný jako v případě standardní konfigurace.

3.2.2 Speciální případ

V prakticky používaném případě umístění bodového zdroje do ohniskové roviny kolimační čočky se limitním přechodem $z_0 \rightarrow -f_0$ vztahy pro ohniskovou vzdálenost syntetické čočky a příčné a podélné měřítko zobrazení zjednoduší na tvary

$$f_{sc} = \frac{(\Delta_2 - f_{m_1})(\Delta_2 - f_{m_2})}{f_{m_2} - f_{m_1}}, \quad (31)$$

$$m = -\frac{\Delta_2}{f_0}, \quad (32)$$

$$\alpha = \frac{\Delta_2[\Delta_2(f_{m_1} + f_{m_2}) - 2f_{m_1}f_{m_2}]}{f_0^2(f_{m_1} - f_{m_2})}. \quad (33)$$

4 ROZLIŠENÍ V OPTICKÉM A FINCH ZOBRAZENÍ

Aparát nutný k diskusi rozlišení byl shrnut v předešlé kapitole. Rozlišení je diskutováno v paraxiální aproximaci, bez uvažování optických vad, kdy je rozlišení limitováno pouze difrakčními efekty. Předmět je osvětlen monochromatickým prostorově nekoherentním zářením, popřípadě sám takové záření vysílá. Před a za optickým systémem je uvažováno homogenní prostředí o stejném indexu lomu. Diskuse nepřihlíží k projevům časové koherence světla a disperze, které výrazně ovlivňují rozlišení, pokud záření není dokonale monochromatické.

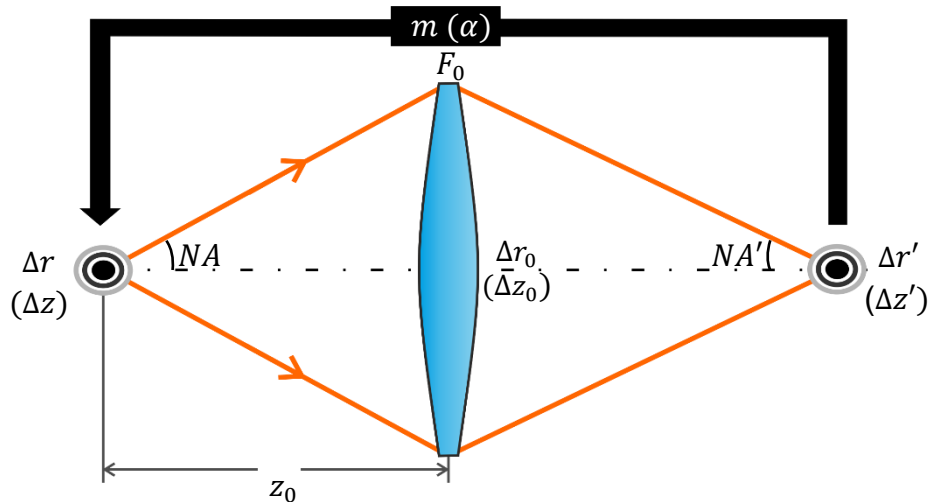
Rozlišovací schopnost zobrazovacího systému je limitovaná vlnovou podstatou světla; i v případě dokonalého optického systému se bodový zdroj nezobrazí jako bodový obraz, ale difrakční obrazec s určitým průměrem. Principiálně je možné definovat různá kritéria⁷ [33], kdy jsou od sebe dva tyto difrakční obrazce rozlišitelné. Běžně používaným kritériem je Rayleighovo rozlišovací kritérium⁸ definující vzdálenost dvou rozlišitelných bodů Y . Pro případ zobrazovacího systému s kruhovou aperturou, použití nekoherentního osvětlení a předpoklad stejné intenzity zobrazovaných bodů, je tato vzdálenost určena jako

$$Y = 0,61 \frac{\lambda}{NA}, \quad (34)$$

kde NA je numerická apertura optického zobrazovacího systému. Výraz na pravé straně rovnice (34) odpovídá poloměru nultého difrakčního řádu interferenčního obrazce – tzv. Airyho disku.

4.1 Difrakční rozlišení ideální čočky

V této kapitole bude diskutováno difrakční rozlišení pro optický systém, který lze v provedené úvaze nahradit jedinou ideální čočkou. Schematický náčrt je na obrázku 7.



Obrázek 7: Optický systém reprezentovaný ideální spojnou čočkou s vyznačenými numerickými aperturami a velikostmi difrakčních stop.

Pro konvenční zobrazovací optické systémy platí Lagrangeův invariant [34]

$$\Delta r' NA' = \Delta r NA, \quad (35)$$

⁷ Např. Rayleighovo, Abbeovo či Sparrowovo.

⁸ Vycházející z předpokladu, že dva difrakční obrazce jsou rozlišitelné právě tehdy, když intenzitní minimum prvního leží v maximu druhého.

kde $\Delta r'$ je velikost obrazové difrakční stopy, NA' obrazová numerická apertura, Δr velikost difrakční stopy přepočítaná z velikosti obrazové difrakční stopy pomocí příčného měřítka zobrazení do předmětového prostoru a NA předmětová numerická apertura. Minimální příčný rozměr stopy, který je možné při zobrazování čočkou rozlišit, odpovídá difrakčnímu limitu čočky a je dán vztahem

$$\Delta r_0 = K_r \frac{\lambda}{NA}, \quad (36)$$

kde konstanta K_r závisí na použité aperturní funkci vymežující aktivní oblast čočky. Příčný rozměr difrakční stopy pro bodové zobrazení a v případě dokonalého zaostření je určen

$$\Delta r' = K_r \frac{\lambda}{NA'}. \quad (37)$$

Aplikujeme-li obecný vztah pro příčné měřítko zobrazení (15) na příčné rozměry difrakčních stop Δr a $\Delta r'$, získáme

$$m = \frac{\Delta r'}{\Delta r} \quad (38)$$

a po uvážení platnosti Lagrangeova invariantu (35)

$$m = \frac{NA}{NA'}, \quad (39)$$

je možné s využitím vztahů (36)–(39) upravit Δr

$$\Delta r = \frac{1}{m} \Delta r' = K_r \frac{NA'}{NA} \frac{\lambda}{NA'} = \Delta r_0, \quad (40)$$

a tedy příčná velikost předmětové difrakční stopy⁹ Δr přesně odpovídá difrakčnímu limitu čočky [16].

Podobně pro čočkou minimálně rozlišitelný podélný rozměr stopy platí [2]

$$\Delta z_0 = K_z \frac{\lambda}{NA^2}, \quad (41)$$

kde K_z je konstanta závislá na použité aperturní funkci. Podélný rozměr difrakční stopy pro bodové zobrazení v případě dokonalého zaostření je určen

$$\Delta z' = K_z \frac{\lambda}{NA'^2}. \quad (42)$$

Využitím vztahu (17) získáme podélné měřítko zobrazení jako poměr podélných rozměrů difrakčních stop $\Delta z'$ a Δz

⁹ Předmětovou difrakční stopou rozumíme difrakční stopu bodového předmětu přepočítanou přes odpovídající měřítko zobrazení do předmětového prostoru.

$$\alpha = \frac{\Delta z'}{\Delta z}. \quad (43)$$

Využitím Lagrangeova invariantu pro podélné měřítko zobrazení [34]

$$\Delta z' NA'^2 = \Delta z NA^2, \quad (44)$$

kde Δz je podélná velikost předmětové difrakční stopy, je možné výraz (43) přepsat

$$\alpha = \frac{NA^2}{NA'^2} \quad (45)$$

a použitím vztahů (42), (43), (45) lze pro Δz psát

$$\Delta z = \frac{1}{\alpha} \Delta z' = K_z \frac{NA'^2}{NA^2} \frac{\lambda}{NA'^2} = \Delta z_0, \quad (46)$$

čímž je opět dokázáno, že podélná velikost předmětové difrakční stopy přesně odpovídá difrakčnímu limitu čočky pro podélné zobrazení.

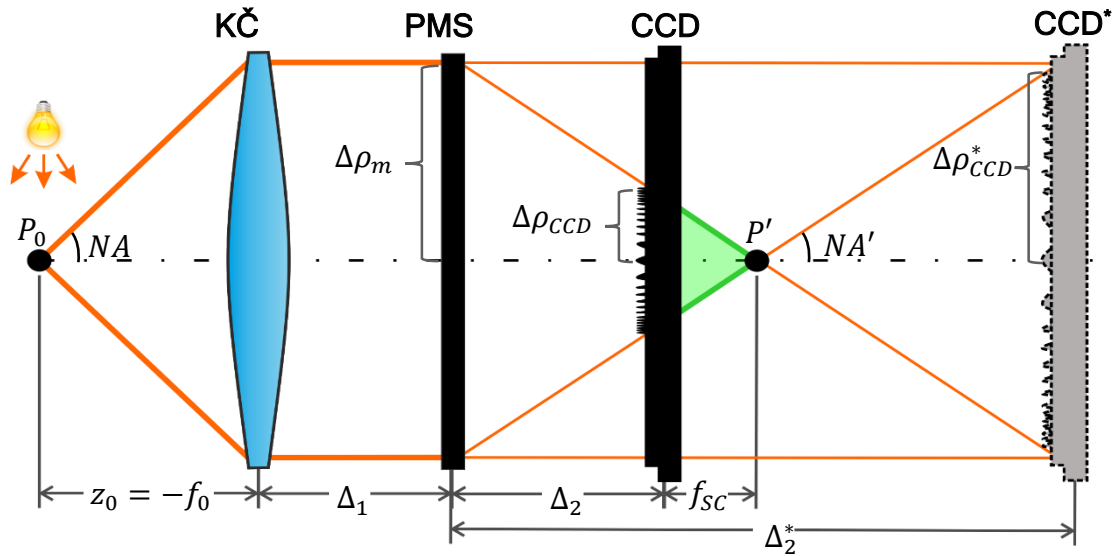
Protože Lagrangeův invariant lze zobecnit pro více optických prvků, dospěli bychom ke stejným závěrům i pro složitější konvenční optické soustavy se stejnými numerickými aperturami.

4.2 Difrakční rozlišení pro standardní FINCH konfiguraci

Při průzkumu difrakčního rozlišení pro FINCH konfiguraci, bylo v [2, 20, 29] upozorněno na zajímavou vlastnost FINCH zobrazení, a sice překročení difrakčního limitu pro příčné měřítko zobrazení. V této kapitole provedme diskusi tohoto efektu pro příčné i podélné měřítko zobrazení.

4.2.1 Předmět v ohnisku

Diskuse překročení difrakčního rozlišení je vedena pro případ bodového zdroje umístěného na optické ose. Tato situace je znázorněna na obrázku 8. Zajímavou skutečností patrnou z tohoto nákresu je nezávislost numerické apertury syntetické čočky NA' na vzdálenosti Δ_2 pro případ, kdy je interferenční oblast vymezena signální vlnou, tedy pro $\Delta_2 \leq 2f_m$. Oproti tomu příčné i podélné měřítko na Δ_2 závisí, viz vztahy (21) a (22), a nemůže tedy platit optická vazba určená Lagrangeovým invariantem (35), (44). Nastává tedy zajímavá situace (nemající analogii v klasickém zobrazování), kdy numericky rekonstruované difrakční stopě odpovídá v předmětovém prostoru difrakční stopa závislejší na vzdálenosti Δ_2 . Jak bude následně ukázáno, lze najít takové nastavení systému, při kterém je možné, zobrazovat s lepším rozlišením, než které je dáno difrakčním limitem kolimační čočky.



Obrázek 8: Geometrie standardní FINCH konfigurace pro bodový zdroj P_0 umístěný v ohnisku kolimační čočky KČ. $\Delta\rho_{CCD}$ značí poloměr zaznamenaného hologramu vymezeného signální vlnou, $\Delta\rho_{CCD}^*$ je poloměr hologramu v případě maximálního překrytí signální a referenční vlny, f_{SC} je ohnisková vzdálenost syntetické čočky

Kvantifikujeme tento efekt porovnáním velikosti předmětové difrakční stopy a velikosti difrakční stopy kolimační čočky. Předmětová numerická apertura systému NA je po uvážení geometrie na obrázku 8 daná vztahem

$$NA = \frac{\Delta\rho_m}{f_0}. \quad (47)$$

Podobně obrazová numerická apertura NA' je daná vztahy

$$NA' = \frac{\Delta\rho_m}{f_m} \text{ pro } \Delta_2 \leq 2 f_m \quad (48)$$

a

$$NA' = \frac{\Delta\rho_m}{f_{SC}} \text{ pro } \Delta_2 > 2 f_m, \quad (49)$$

kde $\Delta\rho_m$ je poloměr zaznamenaného hologramu a f_{SC} ohnisková vzdálenost syntetické čočky. Využitím vztahů (21), (37), (38), (47) a (48) určíme příčnou míru překonání difrakčního rozlišení [16]

$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = \frac{1}{m} \frac{NA}{NA'} = \frac{1}{m} \frac{f_m}{f_0} = \left| \frac{f_m}{\Delta_2} \right| \text{ pro } \Delta_2 \leq 2 f_m \quad (50)$$

a s využitím (21), (37), (38), (47) a (49) [16]

$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = \frac{1}{m} \frac{NA}{NA'} = \frac{f_{SC}}{f_0} = \left| 1 - \frac{f_m}{\Delta_2} \right| \text{ pro } \Delta_2 > 2 f_m. \quad (51)$$

Proveďme podobnou diskusi pro případ podélného rozlišení. S využitím vztahů (41)–(43) je možné pro poměry podélných rozměrů difrakčních stop Δz a Δz_0 psát

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \frac{1}{\alpha} \frac{NA^2}{NA'^2}. \quad (52)$$

Dosažením příslušných numerických apertur (47), (48) resp. (49) do rovnice (52) a využitím vztahů (20)–(22), je nasnadě vyjádřit

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \frac{1}{\alpha} \frac{f_m^2}{f_0^2} = \left| -\frac{f_m^2}{\Delta_2(\Delta_2 - 2f_m)} \right| \text{ pro } \Delta_2 \leq 2 f_m \quad (53)$$

a

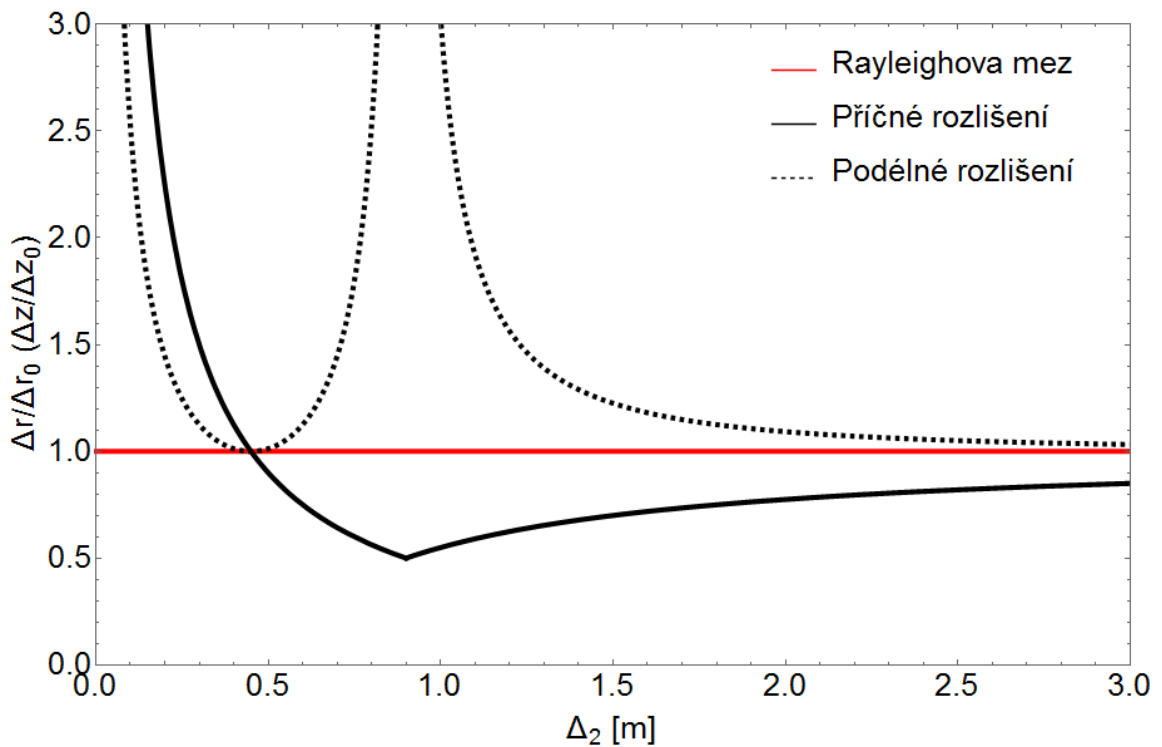
$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \frac{1}{\alpha} \frac{f_{SC}^2}{f_0^2} = \left| \frac{(f_m - \Delta_2)^2}{\Delta_2(\Delta_2 - 2f_m)} \right| \text{ pro } \Delta_2 > 2 f_m. \quad (54)$$

Grafické zpracování závislostí (50), (51), (53) a (54) na daných intervalech platnosti je na obrázku 9. Z něj je patrné, že k subdifrakčnímu rozlišení v případě podélného zobrazení nedochází.

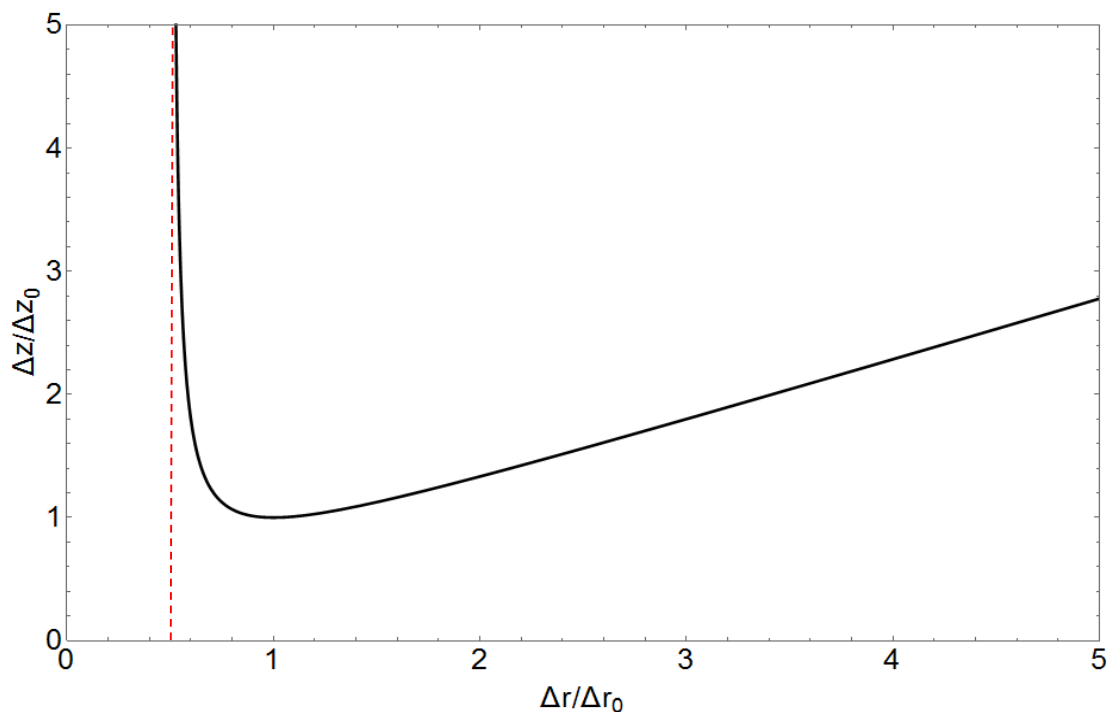
Porovnáním vztahů (50), (53) pro $\Delta_2 \leq 2 f_m$ a (51), (54) pro $\Delta_2 > 2 f_m$ je možné nalézt závislost rozlišovací schopnosti pro podélné měřítko zobrazení na odpovídající rozlišovací schopnosti pro příčné měřítko zobrazení

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \frac{\left(\frac{\Delta r}{\Delta r_0}\right)^2}{2 \frac{\Delta r}{\Delta r_0} - 1} \text{ pro } \frac{\Delta r}{\Delta r_0} > 0,5. \quad (55)$$

Závislost (55) je graficky zpracovaná na obrázku 10. Z něj je také patrný zásadní problém při tomto zobrazování, a sice při dosažení nejlepšího subdifrakčního rozlišení pro příčné měřítko zobrazení je podélné rozlišení nulové. Jak ukážeme později, vztah (55) nabývá platnosti pro všechny zde zkoumané případy FINCH zobrazování.



Obrázek 9: Závislost poměru rozlišení standardní FINCH konfigurace a difrakčně limitovaného rozlišení pro podélné a příčné měřítko zobrazení na vzdálenosti Δ_2 ; předmět umístěn v ohniskové rovině kolimační čočky. Parametr $f_m = 450$ mm.

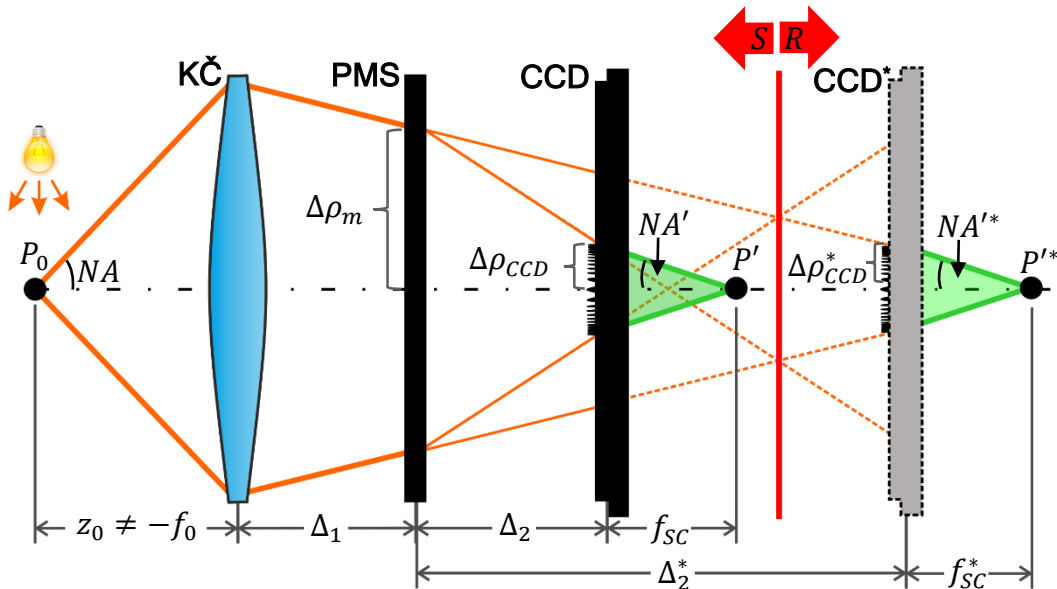


Obrázek 10: Závislost rozlišovací schopnosti pro podélné měřítko zobrazení na odpovídající rozlišovací schopnosti pro příčné měřítko zobrazení v případě FINCH zobrazování.

Z výpočetních vztahů a jejich vyhodnocení je zřejmé, že pro dosažení nejlepšího příčného rozlišení má zásadní význam správná pozice CCD. Je zajímavé poznamenat, že v práci [26], přímo nazvané "Optimal resolution in FINCH", byla jako optimální poloha CCD určena vzdálenost $\Delta_2 = f_m/2$. Tato poloha byla ve skutečnosti zcela nevhodná a způsobovala dvojnásobné zhoršení rozlišení použitého kolimačního objektivu. Správné nastavení parametrů FINCH experimentů bylo provedeno s využitím výsledků výpočetního modelu [2].

4.2.2 Předmět umístěný mimo ohniskovou rovinu

Zobecněme naše diskuse subdifrakčního rozlišení pro případ, kdy není předmět umístěn přímo v předmětové ohniskové rovině kolimační čočky. Průzkum vychází z geometrie obrázku 11.



Obrázek 11: Geometrie standardní FINCH konfigurace pro bodový zdroj P_0 umístěný mimo ohnisko kolimační čočky KČ. $\Delta\rho_{CCD}$ značí poloměr zaznamenaného hologramu, jenž je vymezen signální vlnou, $\Delta\rho_{CCD}^*$ je poloměr hologramu v případě jeho vymezení referenční vlnou. Červená vertikální linie vytyčuje oblast maximálního překrytí signální vlny S a referenční vlny R.

Využitím vztahů (36)–(38) a vyjádřením příslušných numerických apertur z obrázku 11, je možné získat poměr

$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = \frac{1}{m} \frac{f_{SC} \Delta \rho_C}{z_0 \Delta \rho_{CCD}} \quad (56)$$

pro oblast, kdy je překryv interferujících vln určen signální vlnou. Po uvážení geometrie systému z obrázků 4 a 11 můžeme vyjádřit poměr $\Delta\rho_C$ a $\Delta\rho_{CCD}$ jako

$$\frac{\Delta\rho_C}{\Delta\rho_{CCD}} = \frac{z'_m z'_0}{z_m(z'_m - \Delta_2)}. \quad (57)$$

Dosazením výrazu (57) do (56) za současného využití vztahů (9), (10), (12) a (14) získáme poměr difrakčního rozlišení FINCH systému a konvenčního parametrově analogického systému

$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = \left| \frac{f_m}{\Delta_2} (1 - F) \right|. \quad (58)$$

Stejnou diskusi provedme pro interval Δ_2 , kdy je překryvová oblast obou vln určena vlnou referenční. V tomto případě

$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = \left| \frac{1}{m} \frac{f_{SC} \Delta\rho_C}{z_0 \Delta\rho_{CCD}^*} \right|, \quad (59)$$

kde poměr $\Delta\rho_C$ a $\Delta\rho_{CCD}^*$ je z geometrie obrázků 4 a 11 určen jako

$$\frac{\Delta\rho_C}{\Delta\rho_{CCD}^*} = \frac{z'_0}{z_R}. \quad (60)$$

Dosazením (60) do (59) a využitím vztahů (8), (10), (12) a (14) můžeme psát

$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = \left| 1 - \frac{f_m}{\Delta_2} (1 - F) \right|. \quad (61)$$

Nalezením průsečíku závislostí (58) a (61) je možné určit vzdálenost $\bar{\Delta}_2$ vymezující oblast nejefektivnějšího průniku signální a referenční vlny

$$\bar{\Delta}_2 = \frac{2f_m[\Delta_1(f_0 + z_0) - f_0 z_0]}{\Delta_1(f_0 + z_0) - 2f_m z_0 - f_0(2f_m + z_0)}. \quad (62)$$

Před touto pozicí je míra překonání difrakčního limitu určena vztahem (58), za touto oblastí vztahem (61). Navíc je potřeba ještě rozlišit případ kdy

$$\Delta_1 \in (z'_0, 2f_m z'_0), \quad (63)$$

kde vzdálenost z'_0 je daná vztahem (10), neboť pro Δ_1 z tohoto intervalu, jak je patrné po uvážení zobrazovacích rovnic a geometrie na obrázku 4, je interferenční oblast na celém intervalu Δ_2 vymezena pouze signální vlnou a platí tedy závislost (58). Je možné se přesvědčit, že tento speciální případ nastane, když by Δ_2 ze vztahu (62) vyšlo menší než nula.

Porovnání podélného rozlišení FINCH systému s difrakčně limitovaným rozlišením pro $\Delta_2 \leq \bar{\Delta}_2$ vychází z (41)–(43), přičemž numerické apertury byly určeny v předchozí diskusi, tedy

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{f_{sc} \Delta \rho_c}{z_0 \Delta \rho_{CCD}} \right)^2. \quad (64)$$

Využitím vztahů (9), (10), (13), (14), (19) a (57) a geometrických poměrů na obrázcích 4 a 11 je možné (64) přepsat na

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \left| -\frac{f_m^2 (F - 1)^2}{\Delta_2 [\Delta_2 + 2f_m (F - 1)]} \right|, \quad (65)$$

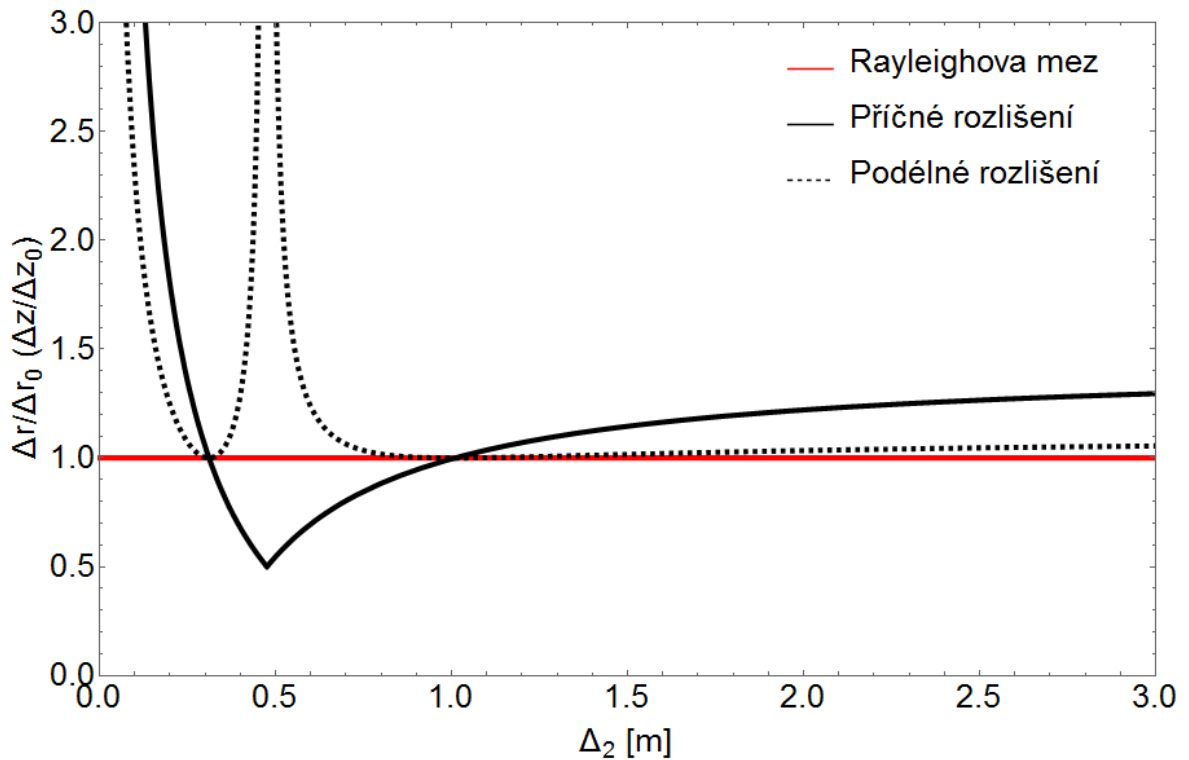
Podobně pro oblast $\Delta_2 > \bar{\Delta}_2$

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{f_{sc} \Delta \rho_c}{z_0 \Delta \rho_{CCD}^*} \right)^2, \quad (66)$$

kdy pomocí vztahů (10), (13), (14), (19) a (60) lze (66) upravit na

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \left| \frac{[f_m (F - 1) + \Delta_2]^2}{\Delta_2 [\Delta_2 + 2f_m (F - 1)]} \right|. \quad (67)$$

Pro $\Delta_1 \in (z'_0, 2f_m z'_0)$ je opět interferenční oblast na celém intervalu Δ_2 vymezena signální vlnou a poměr poloměru difrakční stopy FINCH systému a poloměru difrakční stopy kolimační čočky je pro podélné měřítko zobrazení dán vztahem (65). Závislost poměrů (58), (61), (65), (67) na vzdálenosti Δ_2 je pro konkrétně zvolené parametry graficky zpracovaná na obrázku 12.



Obrázek 12: Závislost poměru rozlišení standardní FINCH konfigurace a difrakčně limitovaného rozlišení pro podélné a příčné měřítko zobrazení na vzdálenosti Δ_2 ; předmět umístěn 0,1 mm před ohniskovou rovinou kolimační čočky. Parametry $f_m = 450$ mm, $f_0 = 10$ mm, $\Delta_1 \rightarrow 0$ m.

Pro ideální korelační překrytí je nutno volit vzdálenost Δ_1 nulovou. Tento požadavek byl elegantně vyřešen návrhem konfigurace využívající 4-f systém [35].

Porovnáním vztahů (58), (65) a vztahů (61), (67) se lze opět přesvědčit, že závislost rozlišovací schopnosti pro podélné měřítko zobrazení na rozlišovací schopnosti pro příčné měřítko zobrazení je dána vztahem (55), jak tomu bylo pro případ předmětu umístěného v ohnisku kolimační čočky.

4.2.3 Konfigurace bez kolimační čočky

Porovnání příčné rozlišovací schopnosti bezčočkové FINCH konfigurace s případem, kdy je PMS nahrazen klasickou čočkou shodných parametrů, vychází ze vztahů (23), (24), (36)–(38). Vyjádřením příslušných numerických apertur z geometrie na obrázku 4 a 11 pro případ odstranění kolimační čočky a využitím zobrazovacích rovnic, je možné míru překonání difrakčního limitu vyjádřit jako

$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = \left| \frac{f_m (z_0 - \Delta_2)}{\Delta_2 z_0} \right| \text{ pro } \Delta_2 \leq \frac{2f_m z_0}{2f_m + z_0} \quad (68)$$

a

$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = \left| \frac{\Delta_2 (f_m + z_0) - f_m z_0}{\Delta_2 z_0} \right| \text{ pro } \Delta_2 > \frac{2f_m z_0}{2f_m + z_0}. \quad (69)$$

Pro případ $z_0 \in (0, -2f_m)$ je interferenční oblast na celém intervalu Δ_2 vymezena signální vlnou a míra překročení difrakčního limitu pro příčné měřítko zobrazení je daná vztahem (68).

Podobně s využitím vztahů pro příslušné numerické apertury z případu pro příčné měřítko zobrazení a s využitím (25), (41)–(43) je možné poměr podélného rozlišení bezčočkové FINCH konfigurace a difrakčně limitovaného rozlišení získat ve tvaru

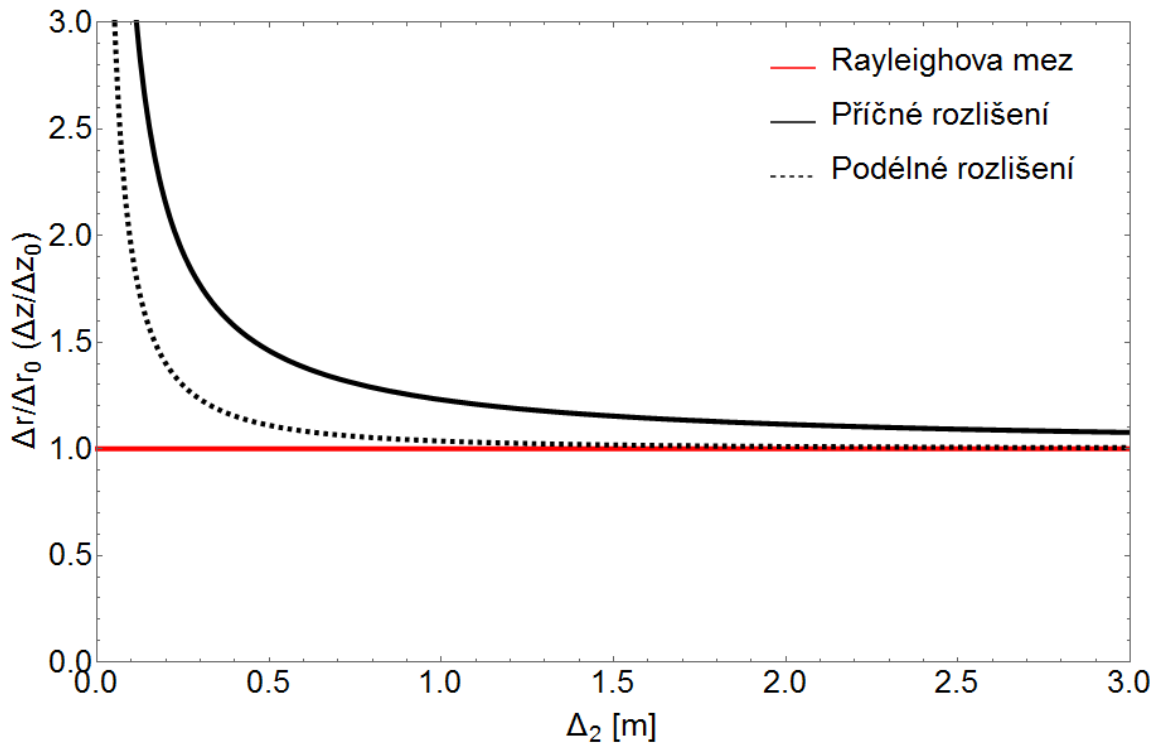
$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \left| \frac{f_m^2 (\Delta_2 - z_0)^2}{\Delta_2 z_0 [2f_m z_0 - \Delta_2 (2f_m + z_0)]} \right| \text{ pro } \Delta_2 \leq \frac{2f_m z_0}{2f_m + z_0} \quad (70)$$

a

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \left| -\frac{[f_m z_0 - \Delta_2 (f_m + z_0)]^2}{\Delta_2 z_0 [2f_m z_0 - \Delta_2 (2f_m + z_0)]} \right| \text{ pro } \Delta_2 > \frac{2f_m z_0}{2f_m + z_0}, \quad (71)$$

přičemž pro $z_0 \in (0, -2f_m)$ je uvedený poměr pro libovolnou vzdálenost Δ_2 dán vztahem (70).

Opět se dá ukázat, že vztah (55) platí pro libovolnou vzdálenost Δ_2 . Zkoumané závislosti (68)–(71) jsou graficky zpracované na obrázku 13.

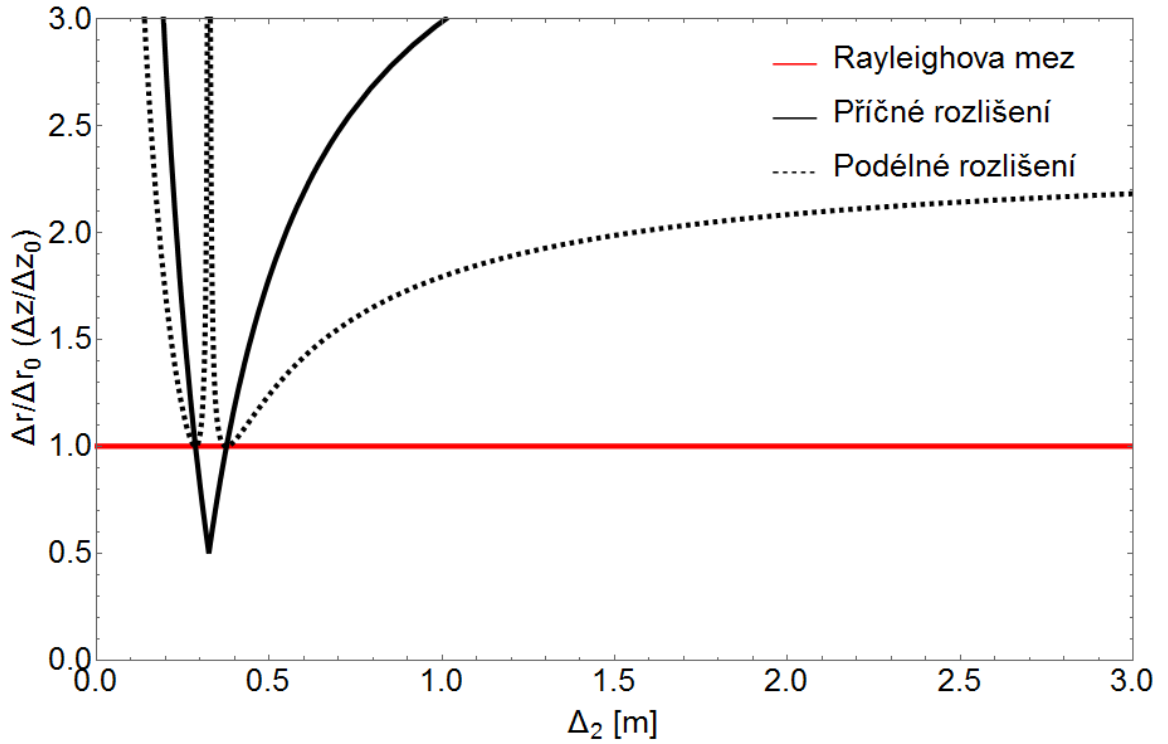


Obrázek 13: Závislost poměru rozlišení bezčočkové FINCH konfigurace a difrakčně limitovaného rozlišení pro podélné a příčné měřítko zobrazení na vzdálenosti Δ_2 . Parametry $f_m = 230 \text{ mm}^{10}$, $z_0 = -230 \text{ mm}$.

4.3 Difrakční rozlišení pro dvoučočkovou FINCH konfiguraci

Diskuzi míry překročení difrakčního limitu zobrazení v dvoučočkové konfiguraci je možné vést v podobném duchu jako v případě standardního FINCH zobrazení (viz kapitola 4.2). Využitím vztahu pro obecné příčné a podélné měřítko zobrazení a geometrických poměrů na obrázku 6 je možné vztah (56) vyjádřit pomocí základních parametrů systému. Pro vybrané parametry experimentu a předmět umístěný mimo ohniskovou rovinu kolimační čočky, je tato závislost graficky zpracovaná na obrázku 14. Opět je možné dosáhnout maximálního příčného rozlišení dvakrát lepšího, než je difrakční rozlišení kolimační čočky, avšak podélné rozlišení je pro tento případ nulové. Vztah (55) zůstává v platnosti.

¹⁰ Ohnisko bylo zvoleno jako reálně nejmenší možné, které je, co se kvality rekonstruovaných snímků týče, při tomto typu zobrazování nejvýhodnější. Praktická realizace v [28].



Obrázek 14: Závislost poměru rozlišení dvoučočkové FINCH konfigurace a difrakčně limitovaného rozlišení pro podélné a příčné měřítko zobrazení na vzdálenosti Δ_2 ; předmět umístěn 0,1 mm před ohniskovou rovinou kolimační čočky. Parametry $f_{m_1} = 400$ mm, $f_{m_2} = 600$ mm, $f_0 = 10$ mm, $\Delta_1 \rightarrow 0$ m.

Uvážíme-li prakticky využívaný případ – umístění bodového zdroje do ohniskové roviny kolimační čočky, obecné vztahy se značně zjednoduší na tvary

$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = \left| \frac{f_{m_1}(\Delta_2 - f_{m_2})}{\Delta_2(f_{m_1} - f_{m_2})} \right| \text{ pro } \Delta_2 \leq \frac{2f_{m_1}f_{m_2}}{f_{m_1} + f_{m_2}}, \quad (72)$$

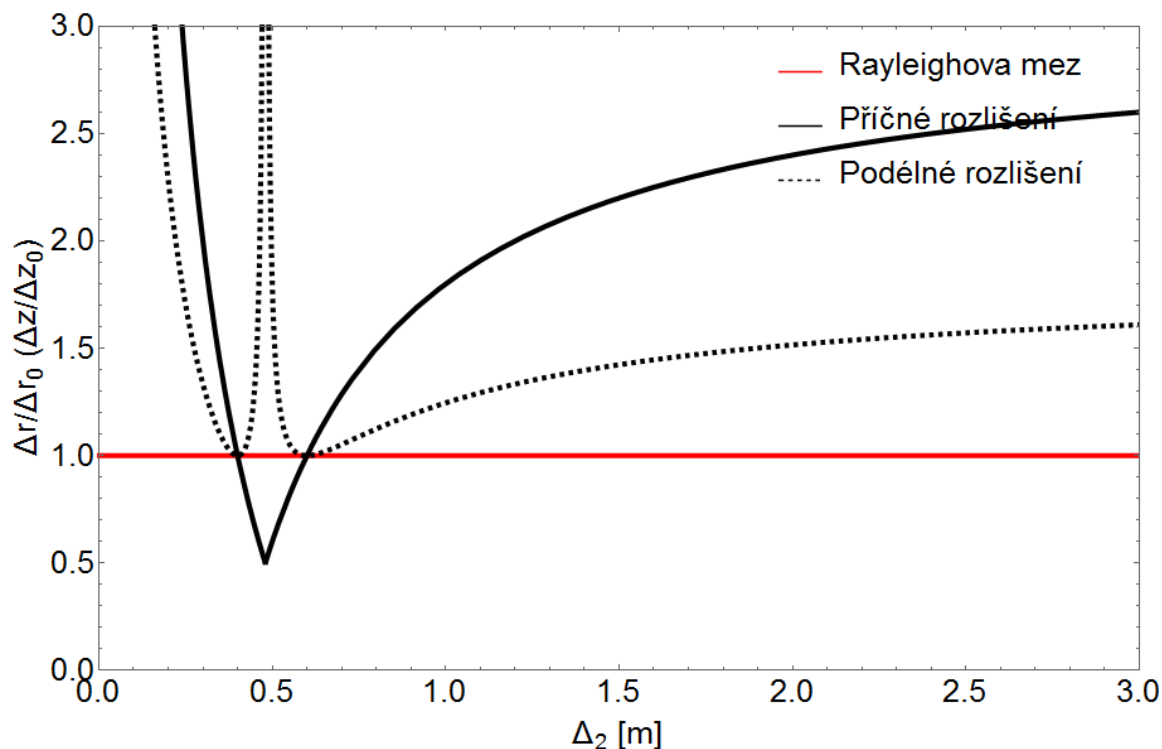
$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = \left| -\frac{f_{m_2}(\Delta_2 - f_{m_1})}{\Delta_2(f_{m_1} - f_{m_2})} \right| \text{ pro } \Delta_2 > \frac{2f_{m_1}f_{m_2}}{f_{m_1} + f_{m_2}} \quad (73)$$

a

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \left| \frac{f_{m_1}^2(\Delta_2 - f_{m_2})^2}{\Delta_2(f_{m_1} - f_{m_2})[-2f_{m_1}f_{m_2} + \Delta_2(f_{m_1} + f_{m_2})]} \right| \text{ pro } \Delta_2 \leq \frac{2f_{m_1}f_{m_2}}{f_{m_1} + f_{m_2}}, \quad (74)$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = \left| \frac{-f_{m_2}^2(\Delta_2 - f_{m_1})^2}{\Delta_2(f_{m_1} - f_{m_2})[-2f_{m_1}f_{m_2} + \Delta_2(f_{m_1} + f_{m_2})]} \right| \text{ pro } \Delta_2 > \frac{2f_{m_1}f_{m_2}}{f_{m_1} + f_{m_2}}. \quad (75)$$

Závislosti (72)–(75) jsou pro vhodné parametry graficky zpracovány na obrázku 15.



Obrázek 15: Závislost poměru rozlišení dvoučočkové FINCH konfigurace a difrakčně limitovaného rozlišení pro podélné a příčné měřítko zobrazení na vzdálenosti Δ_2 ; předmět umístěn v ohniskové rovině kolimační čočky. Parametry $f_{m_1} = 400$ mm, $f_{m_2} = 600$ mm.

5 EXPERIMENTÁLNÍ OVĚŘENÍ

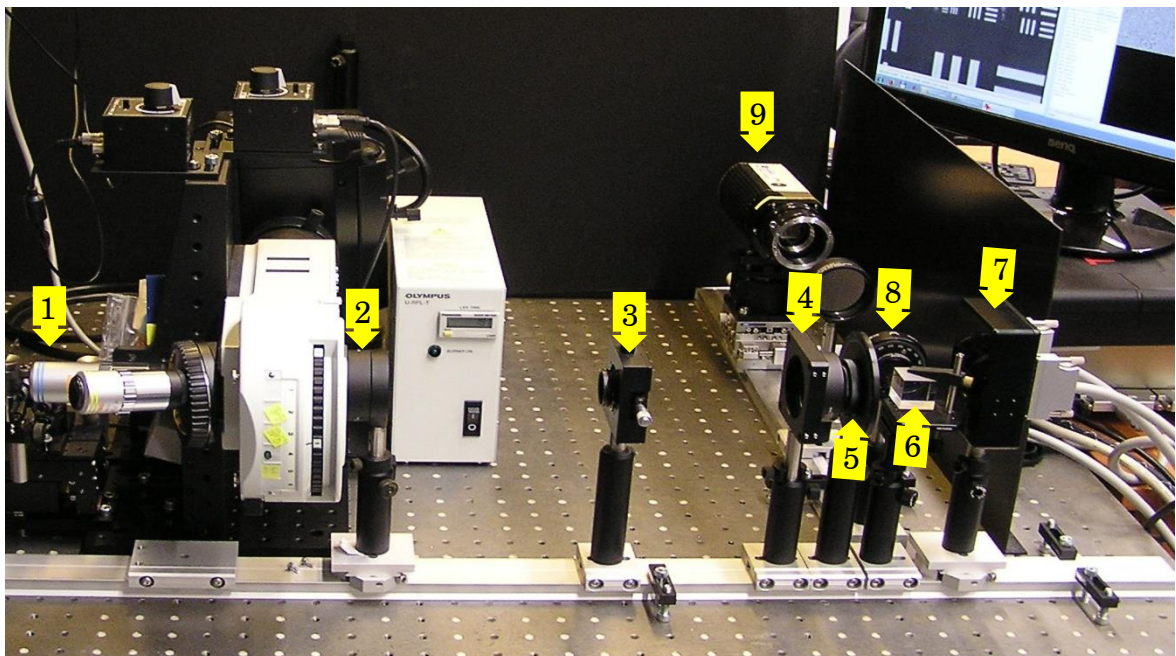
Motivací pro experimentální část bakalářské práce byla demonstrace mechanismů vedoucích k zobrazení pod difrakčním limitem kolimační optiky ve standardní a dvoučočkové FINCH konfiguraci. Bodový zdroj byl v obou případech umístěn do ohniskové roviny kolimační čočky.

5.1 Popis experimentálních sestav

Experimentální sestava pro standardní a dvoučočkovou FINCH konfiguraci, na které demonstrace probíhala, je na obrázku 16. Bodový zdroj byl realizován pomocí čela optického vlákna, do kterého bylo navázáno záření z helium neonového laseru o vlnové délce 632,8 nm. Pomocí mikroposuvů jsme zajistili kontrolovaný pohyb čela vlákna v transverzálním směru o nastavitelnou vzdálenost. Světlo z čela vlákna bylo kolimované mikroskopovým objektivem firmy *Olympus* o ohniskové vzdálenosti 45 mm a numerické apertuře 0,1. Kolimovaný svazek vystupující z mikroskopového objektivu byl následně pomocí 4-f systému zobrazen do roviny PMS. Pomocí 4-f

systemu je navíc dosaženo dokonalého korelačního překrytí signální a referenční vlny, které jsou vytvořené v rovině PMS. Rozdělení světla na část procházející nezměněnou a na část kvadraticky modulovanou byla zajištěna adresováním spojné čočky o ohniskové vzdálenosti 450 mm na prostorový modulátor světla *Hamamatsu X10468* (792 x 600 pixelů o velikosti 20 μm). Umístěním polarizátoru před a za PMS bylo zajištěno optimální provedení PMS ve standardní konfiguraci. Záznam hologramů byl pořízen CCD kamerou *Retiga-4000R* (2048 x 2048 pixelů o velikosti 7,4 μm).

Sestava pro dvoučočkovou konfiguraci byla podobná standardní konfiguraci s tím rozdílem, že na PMS byla adresována funkce propustnosti odpovídající dvěma kvadratickým fázovým funkcím spojných čoček o ohniskových vzdálenostech 400 mm a 600 mm.

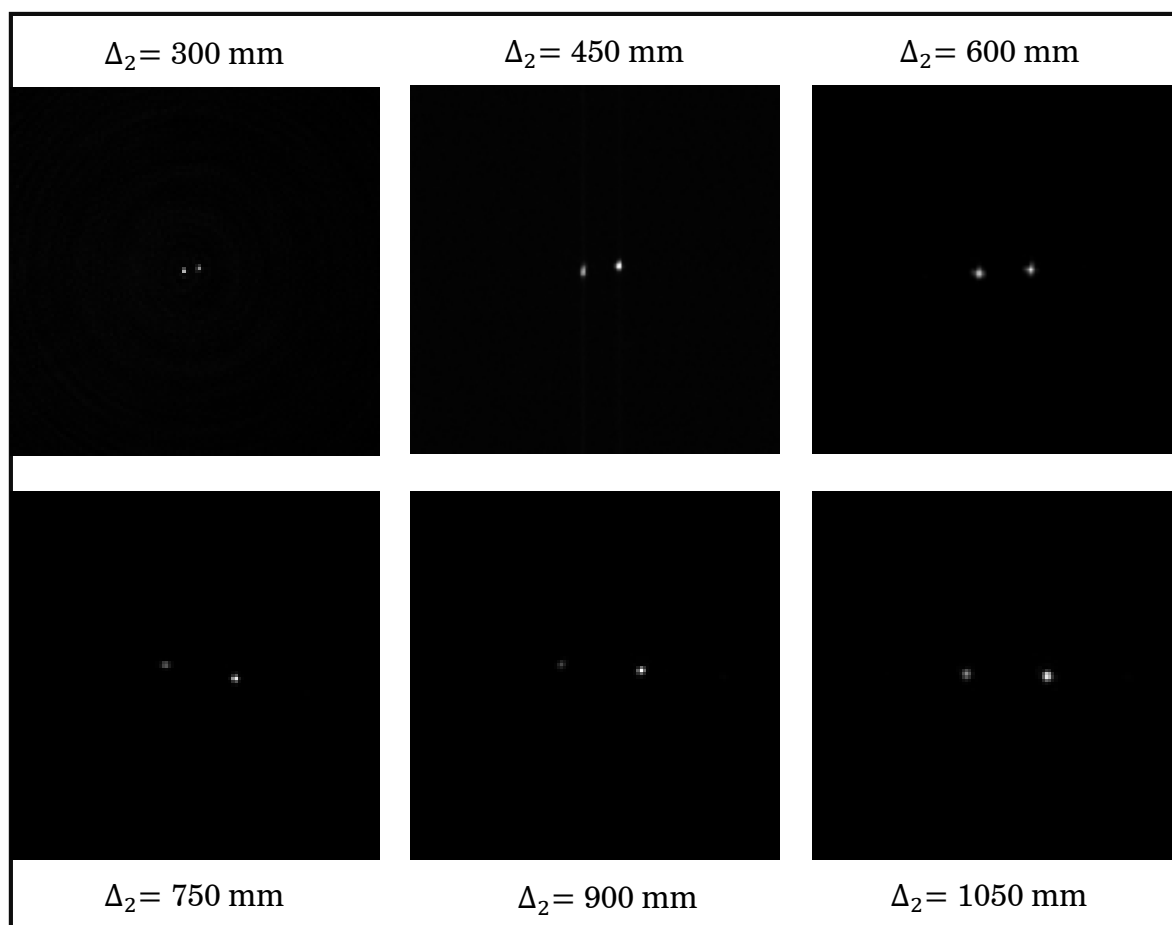


Obrázek 16: Experimentální sestava pro standardní a dvoučočkové FINCH zobrazení. 1 – mikroskopový objektiv, 2 a 4 – tubusová a Fourierovské čočka tvořící 4-f systém, 3 – polní clona, 5 – vstupní polarizátor, 6 – dělicí kostka, 7 – prostorový modulátor světla, 8 – výstupní polarizátor, 9 – CCD kamera.

5.2 Experimentální výsledky

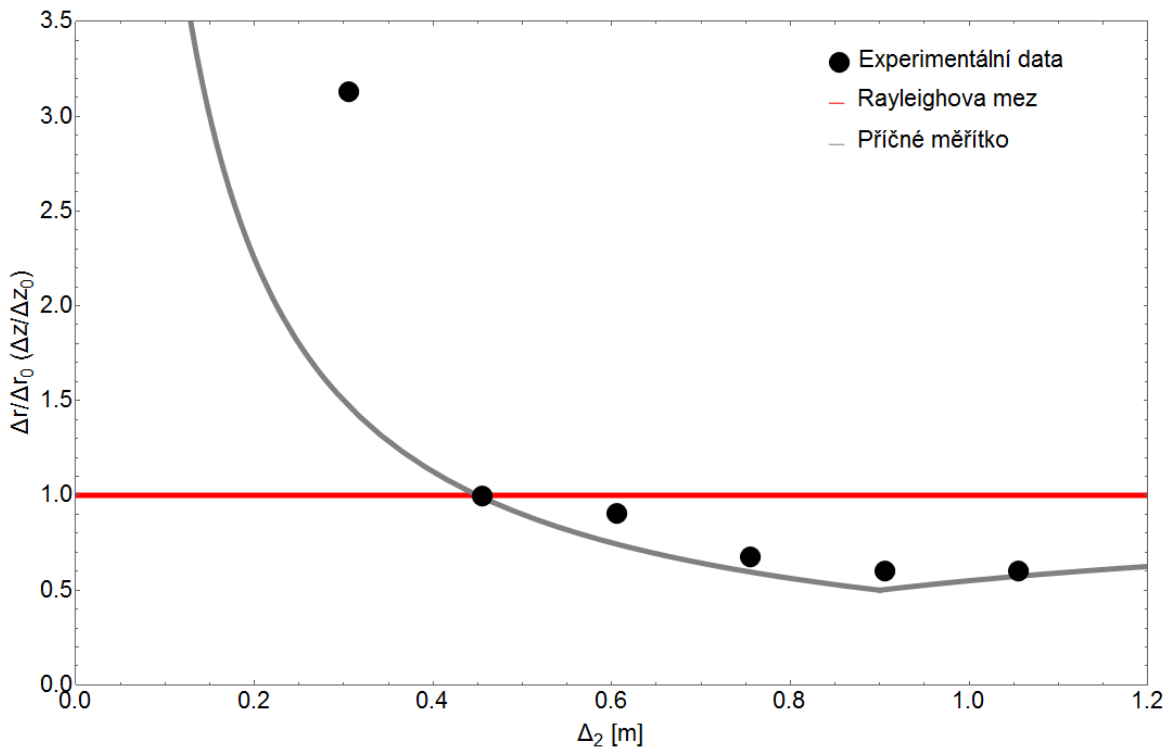
5.2.1 Standardní konfigurace

Experimentálně jsme se snažili prokázat závislost subdifrakčního rozlišení na vzdálenosti Δ_2 . Zvolili jsme 5 reprezentativních poloh a pro ně jsme provedli sérii tří holografických bodových záznamů potřebných k odstranění nepotřebných členů metodou fázových posunutí. Posléze jsme bodový zdroj příčně posunuli o $50 \mu\text{m}$ a opět zaznamenali sérii tří hologramů. Hologramy těchto dvou bodových záznamů jsme nekoherentně sečetli a numericky rekonstruovali procesem popsáním v kapitole 2.2.2. Rekonstruované bodové záznamy jsou pro konkrétní vzdálenosti Δ_2 na obrázku 17. Z těchto záznamů je rovněž patrný princip subdifrakčního rozlišení popsaného v kapitole 4.2.1, a sice zachování velikosti difrakčních spotů při současném zvětšování jejich vzdálenosti v závislosti na Δ_2 .



Obrázek 17: Rekonstruované bodové záznamy pořízené standardní FINCH konfigurací pro vybrané vzdálenosti Δ_2 . Velikost pole $2,5 \times 2,5 \text{ mm}$. Vzdálenost $\Delta_2 = 450 \text{ mm}$ odpovídá přímému zobrazení.

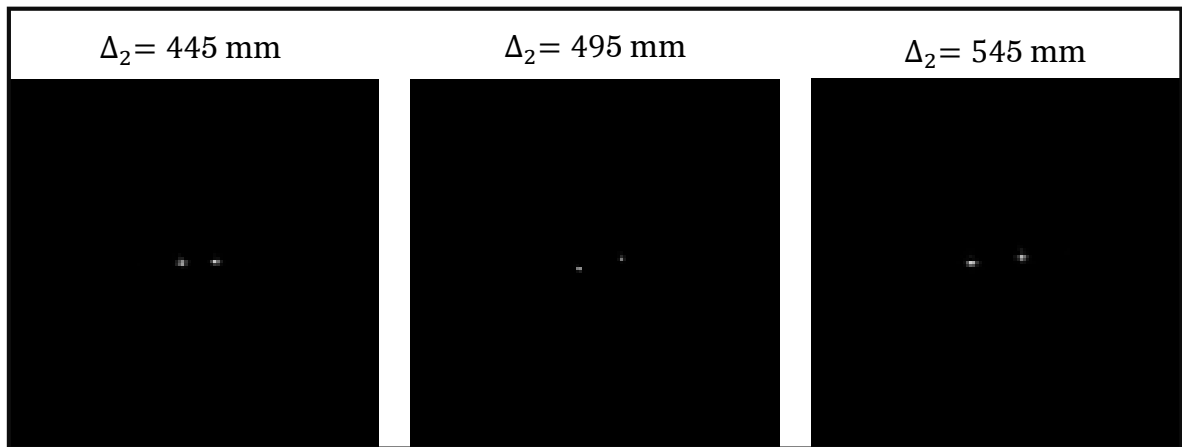
Z experimentálních dat jsme poté sestrojili graf závislosti míry překonání difrakčního limitu zobrazení na vzdálenosti Δ_2 a porovnali ho s teoretickým modelem z kapitoly 4.2.1 (viz obrázek 9). Získané výsledky jsou na obrázku 18.



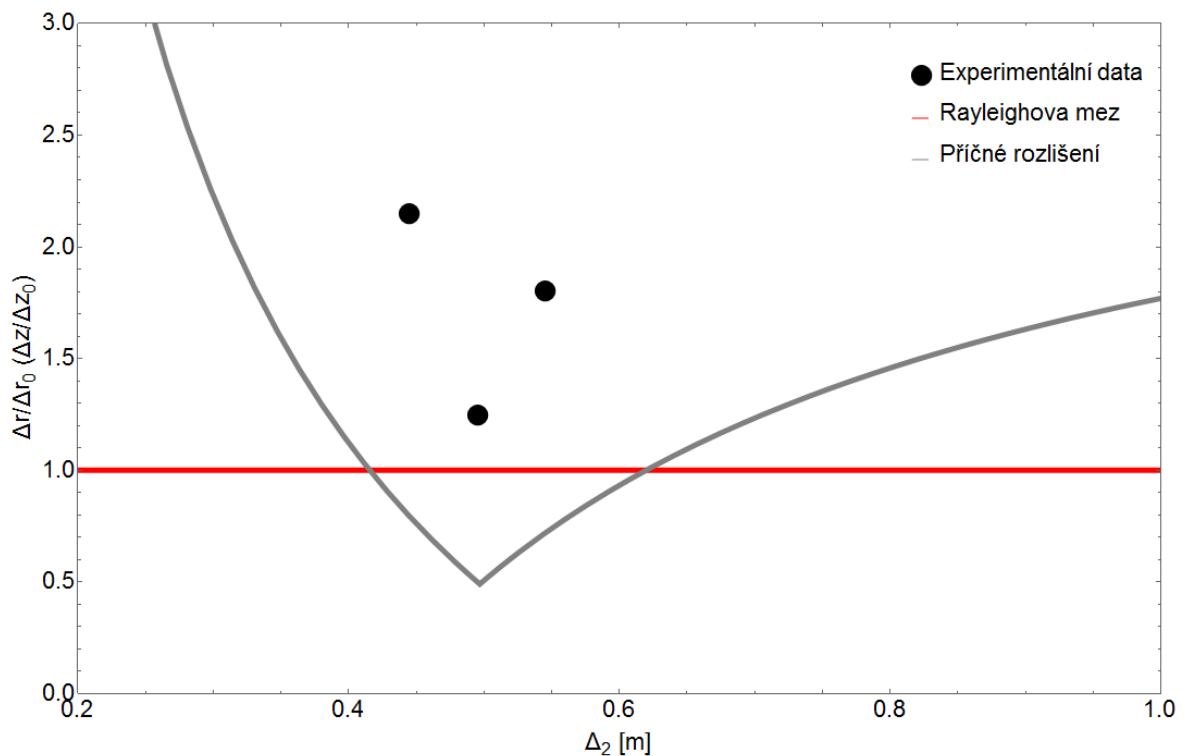
Obrázek 18: Experimentálně stanovená závislost míry překročení difrakčního rozlišení mikroskopového objektivu pro příčné měřítko zobrazení standardní FINCH konfigurace na vzdálenosti Δ_2 a její porovnání s teoretickým modelem. Předmět byl umístěn v ohniskové rovině kolimační čočky. Parametr $f_m = 450$ mm.

5.2.2 Dvoučočková konfigurace

Podobně jako ve standardní konfiguraci (kapitola 5.2.1) byly i v případě dvoučočkové konfigurace zaznamenány a numericky rekonstruovány bodové hologramy, tentokrát pro 3 pozice CCD kamery Δ_2 . Body byly zaznamenány v příčné vzdálenosti $100 \mu\text{m}$. Rekonstruované hologramy jsou na obrázku 19, ze kterého je patrné, že rozlišovací schopnost je opět závislá na Δ_2 (změnou Δ_2 dochází ke změně ohniskové vzdálenosti syntetické čočky a tím i velikosti difrakční stopy), nicméně porovnáme-li to s difrakčním limitem mikroskopového objektivu, subdifrakčního rozlišení dosaženo nebylo. Výsledky jsou graficky zpracované v obrázku 20.



Obrázek 19: Rekonstruované bodové záznamy pořízené v dvoučočkové FINCH konfiguraci pro vybrané vzdálenosti Δ_2 . Velikost pole 2,5 x 2,5 mm.



Obrázek 20: Experimentálně stanovená míra překročení difrakčního rozlišení kolimační čočky, pro příčné měřítko zobrazení dvoučočkové FINCH konfigurace, v závislosti na vzdálenosti Δ_2 a její porovnání s teoretickým modelem. Předmět byl umístěn v ohniskové rovině kolimační čočky. Parametry $f_{m_1} = 400$ mm, $f_{m_2} = 600$ mm.

6 ZÁVĚR

Bakalářská práce je zaměřena na prozkoumání rozlišovacích limitů, kterých lze dosáhnout ve Fresnelově nekoherentní korelační holografii s digitální rekonstrukcí obrazu. Tato problematika byla v posledních letech podrobně studována jak

teoreticky, tak experimentálně a výsledkem těchto aktivit byl návrh parametrů experimentů, které umožňují překonání difrakčního limitu rozlišení. Podmínky, při kterých bylo subdifrakční rozlišení demonstrováno, byly v některých ohledech idealizované a otázka praktického využití efektu zůstává stále otevřená.

Úkolem bakalářské práce bylo aktivní seznámení s principy korelačního zobrazení a mechanismy subdifrakčního rozlišení. Dalším cílem bylo získání vlastních zkušeností se základními experimenty. Teoretická část bakalářské práce vychází z modelu FINCH experimentů [2, 20], který pracuje s idealizovanou představou fyzikálně dokonalého systému a předpokládá použití monochromatického prostorově nekoherentního záření. V bakalářské práci jsou prezentovány výsledky výpočetního modelu, které jsou důležité pro diskusi příčného a podélného rozlišení. V hlavní části bakalářské práce jsou uvedeny numerické výsledky připravené v programu *Mathematica*, které analyzují souvislost nejdůležitějších parametrů experimentu s příčným a podélným rozlišením rekonstruovaného obrazu a demonstrují podmínky překonání difrakčního limitu rozlišení. Pozornost je věnována oběma geometrickým konfiguracím, které jsou užívány ve FINCH experimentech. Detailně jsou prozkoumány speciální případy, kterým byla v odborných publikacích věnována menší pozornost. Experimentální data, potřebná pro ověření teoretických výsledků, byla pořízena na experimentální sestavě korelačního mikroskopu, která využívá fázový PMS *Hamamatsu* a je dostupná v laboratoři Katedry optiky. Numerické zpracování experimentálních dat, rekonstrukce bodových obrazů a analýza příčného rozlišení byla provedena v programu, který byl v rámci bakalářské práce připraven v prostředí *Matlab* s využitím optické nadstavby *Lightipes*. Součástí bakalářské práce je také diskuse souladu teoretických a experimentálních výsledků.

Bakalářská práce byla motivována výzkumem v oblasti nekoherentní korelační mikroskopie, který dlouhodobě probíhá ve spolupráci Katedry optiky PřF Olomouc a VUT Brno v rámci projektů GA ČR a TA ČR. Součástí výzkumu je dosažení subdifrakčního rozlišení v reálných experimentálních podmínkách a bakalářská práce tak může pokračovat i v této oblasti. Příslibem pro další výzkum jsou výsledky, které demonstrují možnost dosažení subdifrakčního rozlišení při použití širokospektrálního záření [31] a návrh a úspěšná realizace systému pro kompenzaci difrakční disperze PMS [32].

REFERENCE

- [1] J. Rosen, G. Brooker, *Digital spatially incoherent Fresnel holography*, Opt. Lett. 32, 912–914 (2007)
- [2] P. Bouchal, J. Kapitán, R. Chmelík, Z. Bouchal, *Point spread function and two-point resolution in Fresnel incoherent correlation holography*, Opt. Express 19 (16), 15603–15620 (2011)
- [3] J. Rosen, N. Siegel, G. Brooker, *Theoretical and experimental demonstration of resolution beyond the Rayleigh limit by FINCH fluorescence microscopic imaging*, Opt. Express 19, 26249–26289 (2011)
- [4] U. Schnars, W. Jueptner, *Digital Holography*, Springer Verlag (2004)
- [5] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York (1996)
- [6] D. Gabor, *A new microscopic principle*, Nature 161, 777–778 (1948)
- [7] D. Gabor, *Microscopy by Reconstructed Wave-Fronts*, The Royal Society, 454–487 (1949)
- [8] E. N. Leith, J. Upatnieks, *Reconstructed wavefronts and communication theory*, J. Opt. Soc. Amer. 52, 1123–30 (1962)
- [9] E. N. Leith, J. Upatnieks, *Wavefront Reconstruction with Continuous-Tone Objects*, J. Opt. Soc. Am. 53, 1377–81 (1963)
- [10] E. N. Leith, J. Upatnieks, *Wavefront reconstruction with diffused illumination and three-dimensional objects*, J. Opt. Soc. Am. 54, 1295–1301 (1964)
- [11] U. Schnars, W. Jueptner, *Direct recording of holograms by a CCD-target and numerical reconstruction*, Appl. Opt., 33179–33181 (1994)
- [12] M. A. Kronrod, N. S. Merzlyakov, L. P. Yaroslavski, *Reconstruction of holograms with a computer*, Soviet Physics-Technical Physics 17, 333–334 (1972)
- [13] M. A. Kronrod, N. S. Merzlyakov, L. P. Yaroslavski, *Computer synthesis of transparency holograms*, Soviet Physics-Technical Physics 17, 329–332 (1972)
- [14] I. Yamaguchi, T. Zhang, *Phase-shifting digital holography*, Opt. Lett. 22, 1268–1270 (1997)

- [15] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Základy fotoniky 1*, MATFYZPRESS, Praha (1994)
- [16] P. Bouchal, *Fresnelova nekoherentní korelační holografie (FINCH)*, Bakalářská práce, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Brno (2010)
- [17] U. Schnars, W. Jueptner, *Digital recording and numerical reconstruction of holograms*, Meas. Sci. Technol. 13, 85–101 (2002)
- [18] L. Mořka, *Základní principy, experimentální ověření a aplikace digitální 'in-line' holografie*, Diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, Olomouc (2012)
- [19] P. Hariharan, D. Sen, *Triangular path macro-interferometer*, JOSA 49, 1105–1105 (1959)
- [20] P. Bouchal, *Fresnelova nekoherentní korelační holografie (FINCH)*, Diplomová práce, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Brno (2012)
- [21] P. Bouchal, Z. Bouchal, *Selective edge enhancement in three-dimensional vortex imaging with incoherent light*, Opt. Lett. 37, 2949–2951 (2012)
- [22] P. Bouchal, Z. Bouchal, *Non-iterative holographic axial localization using complex amplitude of diffraction-free vortices*, Opt. Express 22, 30200–30216 (2014)
- [23] Z. Doležel, *Teoretické a experimentální posouzení účinnosti prostorových modulátorů světla*, Diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, Olomouc (2007)
- [24] F. Chlup, *Metody pro ovládání amplitudových a fázových modulatorů světla*, Diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, Olomouc (2007)
- [25] J. Rosen, G. Brooker, *Non-scanning motionless fluorescence three-dimensional holographic microscopy*, Nature Photonics 2, 190–195 (2008)
- [26] G. Brooker, N. Siegel, V. Wang, J. Siegel, *Optimal resolution in Fresnel incoherent correlation holographic fluorescence microscopy*, Opt. Express 19, 5047–5062 (2011)
- [27] P. Malý, *Optika*, Karolinum, Praha (2013)

- [28] B. Katz, D. Wulich, J. Rosen, *Optimal noise suppression in Fresnel incoherent correlation holography (FINCH) configured for maximum imaging resolution*, Appl. Opt. 49, 5757–5763 (2010)
- [29] J. Rosen, N. Siegel, G. Brooker, Theoretical and experimental demonstration of resolution beyond the Rayleigh limit by FINCH fluorescence microscopic imaging, Optics Express 19, 26249-26268 (2011)
- [30] B. Katz, J. Rosen, R. Kelner, G. Brooker, Enhanced resolution and throughput of Fresnel incoherent correlation holography (FINCH) using dual diffractive lenses on a spatial light modulator (SLM), Opt. Express 20, 9109-9121 (2012)
- [31] P. Bouchal, Z. Bouchal, Concept of coherence aperture and pathways toward white light high-resolution correlation imaging, New J. Phys. 15, 123002 (2013)
- [32] Z. Bouchal, V. Chlup, R. Čelechovský, P. Bouchal, I. C. Nistor, Achromatic correction of diffractive dispersion in white light SLM imaging, Opt. Express 22, 12046 (2014)
- [33] *THE UNIVERSITY OF UTAH: Advanced Microscopy* [online], [cit. 2015-03-7]. Dostupné z: <http://advanced-microscopy.utah.edu/education/super-res/>
- [34] R. Kingslake, R. Johnson, *Lens design fundamentals*, Academic Press, Boston (2010)
- [35] P. Bouchal and Z. Bouchal, *Wide-field common-path incoherent correlation microscopy with a perfect overlapping of interfering beams*, J. Europ. Opt. Soc.-Rap. Pub. 8, 13011 (2013)