UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Riziko životního pojištění

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.

Vypracovala:
Markéta Daněčková
ME, III. ročník

Rok odevzdání: 2011

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením Mgr. Evy Bohanesové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla.

V Olomouci dne 13. dubna 2011

Poděkování:

Na tomto místě bych ráda poděkovala Mgr. Evě Bohanesové, Ph.D. za rady a připomínky při vedení této práce.

Obsah:

Úvod

Svět, ve kterém žijeme, je ovlivňován řadou nahodilých a nepředvídaných událostí, které mají kladné i negativní důsledky. Proto rizika a důsledky, která mohou plynout z těchto nahodilých událostí, je dobré předem zjišťovat a snažit se jim zabránit, nebo pokud to lze, je úplně odstranit. Mnohé z těchto rizik lze označit za pojistná rizika, neboť jsou předmětem pojistných produktů nabízených pojišťovnami. Pokud dojde k realizaci pojistných rizik, mluví se o pojistné události. Riziko je tedy spjato s pojištěním, které slouží jako ochrana proti pojistným rizikům. Pojištění je výhodné pro obě strany. Pojištěný přenese svá rizika na pojistitele, protože je pro něj výhodnější platit dopředu známou menší částku, než kdyby musel uhradit celou škodu. Pojistitel je při dostatečně velkém pojistném kmeni schopen rizika zvládat a z pojistného, které platí pojištěný za pojistnou ochranu, se poskytování pojištění může stát pro pojistitele výdělečnou činností. [1]

V práci budu odvozovat vztahy pro výpočet pojistně-technického rizika u jednotlivých druhů životního pojištění a ukážu, jak se bude měnit riziko při zvyšování pojistného kmene.

1 Pojistné riziko

Pojistné riziko dle zákona: *„pro účely tohoto zákona se rozumí pojistným rizikem míra pravděpodobnosti vzniku pojistné události vyvolané pojistným nebezpečím“*. [4]

Jak uvádí profesor Cipra [1], pojistná rizika se mohou dělit podle různých hledisek:

- čisté riziko
  - je výhradně náhodného charakteru, představují nebezpečí ztráty,
- spekulativní riziko
  - dobrovolně vytvářené riziko za účelem dosažení zisku př. hazardní hry, sázková činnost,
- objektivní riziko
  - je dáno objektivními faktory př. věk, zdravotní stav, profese…,
- subjektivní riziko
  - dáno subjektivními faktory př. snaha pojištěného zachovat své zdraví a život…,
- živelní riziko
  - riziko škod na movitých i nemovitých věcech v důsledku živelných událostí př. požár, povodeň,
- dopravní riziko
  - riziko škod, které vzniknou v souvislosti s dopravním prostředkem nebo přepravovaným zbožím.

  ...

2 Pojistně-technické riziko

Rozsah pojistných plnění, který bude muset pojišťovna vyplatit, není znám díky nahodilosti, proto hrozí nebezpečí, že pojišťovna nebude schopna vyplatit pojistná plnění z vybraného pojistného. Vzniká tak pojistně technické riziko. Toto riziko se měří nejčastěji směrodatnou odchylkou mezi očekávaným stavem (vychází z něho výpočet pojistného) a skutečným stavem, který se odrazí ve vyplaceném pojistném plnění. Na následujícím příkladu si ukážeme, jak s růstem počtu pojistných smluv se snižuje riziko, že pojišťovna nebude schopna vyplatit včas pojistná plnění. [1]

Příklad 1. Nechť v určitém pojištění nastává během jednoho roku pojistná událost s pravděpodobností 0,01 (v jedné ze stovky případů), pojistná událost je spojena se škodou ve výši 500 000Kč.

Řešení: Náhodná veličina X_i označuje výši škody v i-té pojistné smlouvě ($i = 1, \ldots, N$). Budeme předpokládat, že tyto náhodné veličiny jsou navzájem nezávislé a mají pravděpodobnostní rozdělení tvaru

$$X_i \begin{cases} 500\,000 & s\ pravděpodobností\ 0{,}01, \\ 0 & s\ pravděpodobností\ 0{,}99. \end{cases}$$

N označuje počet smluv stejného druhu.

Průměrnou výši škody vypočítáme jako střední hodnotu náhodné veličiny X_i.

$E(X_i) = 500\,000 * 0{,}01 + 0 * 0{,}99 = 5\,000\ Kč;$

Výše škody připadající v průměru na jednu pojistnou smlouvu se vypočítá jako střední hodnota součtu škod v N pojistných smlouvách vydělená počtem pojistných smluv:

$$E\left[\frac{X_1 + X_2 \ldots + X_N}{N}\right] = \frac{[E(X_1) + \cdots + E(X_N)]}{N} = \frac{5\,000 + \cdots + 5\,000}{N} = \frac{1}{N} 5\,000 * N = \\ = 5\,000\ Kč.$$

Předepsané roční pojistné bude tedy ve výši 5 000 Kč.

Takové pojistné inkasované za rok např. v $N = 100$ pojistných smlouvách, tj. celkem $100 * 5000 = 500\,000$ Kč, pokryje právě jednu pojistnou událost.

Rozptyl náhodné veličiny X_i je roven:

$$Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = [(500\,000)^2 * 0{,}01 + 0^2 * 0{,}99] - (5\,000)^2 \\ = 2{,}475 * 10^9$$

$$Var\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}\right] = \frac{1}{N^2} * \left(var(X_1) + var(X_2) + \cdots + var(X_N)\right)$$
$$= \frac{1}{N^2} * (2{,}475 * 10^9) * N = \frac{2{,}475 * 10^9}{N};$$

Následně vypočteme směrodatnou odchylku výše škody na jednu pojistnou smlouvu a vypočítáme tak pojistně-technické riziko pojistitele, že vybrané pojistné 5 000 Kč z N pojistných smluv nebude stačit.

$$\sigma\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}\right] = \sqrt{\frac{var(X_1) + var(X_2) + \cdots + var(X_N)}{N}} = \sqrt{\frac{2{,}475 * 10^9}{N}}$$
$$= \frac{49749{,}372}{\sqrt{N}} K\check{c}.$$

Abychom viděli, jak se riziko se zvyšujícím pojistným kmenem mění, budu postupně za hodnoty N dosazovat 10,100,1 000 …;

Tabulka 2.1: Hodnoty rizika pro vhodně zvolená N

N	$\sigma\left(\frac{X_1 + \cdots X_N}{N}\right)$
10	15732,133
100	4974,937
1 000	1573,213
10 000	497,494
100 000	157,321
1 000 000	49,749

Vidíme, že riziko s rostoucí velikostí pojistného kmene klesá. Lze říci, že zhruba počínaje počtem smluv 100 v kmeni pojistné ve výši 5 000 Kč bude stačit. Všechny výpočty k tomuto příkladu jsou uvedeny v příloze A na straně 1.

2.1 Risk management

Rizika by mohla způsobit ztráty na životech, na majetku, z přerušení činnosti, podnik by mohl ztratit „dobré jméno". Proto se lidé snažili o řízení rizik využíváním určitých znalostí a dovedností k dosažení bezpečné činnosti v průběhu celého životního cyklu určitého projektu, produktu nebo systému.

Postupně se z těchto úvah a znalostí vyvinula vědní disciplína Risk management. Úkolem Risk managementu je nalezení rizik a posouzení, která rizika jsou pro podnik nejvýznamnější, která rizika odstraní, redukují, která si ponechají. Podnik si může nechat pouze taková rizika, která by neohrozila existenci podniku.

Risk management má čtyři fáze [2]:

- identifikace rizika
  - hledají se rizika, která by mohla ohrozit daný subjekt;
  - podle J.Daňhela [2] znamená především nalézt odpovědi na otázky:
    - *„Které nežádoucí události jsou pravděpodobné?"*
    - *„Jaká je pravděpodobnost jejich výskytu?"*
    - *„Jaké jsou očekávané důsledky?"*
  - není možné nalézt všechna rizika, protože rizika se časem mění, vývojem vznikají nová rizika;
- ohodnocení rizika
  - zkoumáme, s jakými ztrátami by se musel podnik vypořádat při realizaci jednotlivých rizik;
  - rizika se ohodnotí a vyberou ta, kterým je potřeba věnovat pozornost.
- strategie zvládnutí rizik
  - v této fázi jsou přijímána opatření, aby k realizaci rizika nedošlo nebo se riziku dalo co v největší míře zabránit;
  - jsou vytvářeny finanční prostředky, které by mohli být použity pro odstranění škod při realizaci rizika;
  - podnik může krýt škody z vlastních prostředků, pokud má dostatek financí a toto krytí je pro něj výhodnější, než platit pojišťovně pojistné, ale je to riskantní z toho důvodu, že velké škody by mohli ohrozit existenci podniku nebo způsobit obrovské ztráty.
- monitoring rizik
  - vše se musí neustále sledovat, protože se mohou objevit nová rizika.

3 Životní pojištění

Životní pojištění si sjednávají fyzické osoby z důvodu pokrytí dvou rizik: dožití se určitého věku, smrti, příp. obojího. Pojišťovna vyplatí osobě uvedené v pojistné smlouvě pojistné plnění v případě, že dojde k pojistné události.

V této části budu zkoumat pojistně-technické riziko v případě životního pojištění, konkrétně riziko pojistného životního pojištění neboli riziko, že pojistné vypočtené na 1 pojistnou smlouvu nebude stačit ke krytí škod potřebného pojistného plnění. Propočet rizika ukážeme v případě:

- pojištění na dožití,
- pojištění pro případ smrti,
- dočasného pojištění pro případ smrti,
- smíšeného pojištění.

Životní pojištění můžeme také dělit z hlediska tvorby rezervy vytvořené ze zaplaceného pojistného na: [1]

- nerezervotvorná životní pojištění – taková, u nichž se převážná část pojistného spotřebovává ke krytí rizika smrti a ke spoření zůstává jen minimální nebo vůbec žádná část; typickým příkladem těchto pojištění je pojištění pro případ smrti,
  - dojde-li k pojistné události (smrt pojištěného) je oprávněným osobám (obmyšlenému/obmyšleným) vyplacena sjednaná pojistná částka;
- rezervotvorná životní pojištění – taková, u nichž se rezerva v průběhu trvání pojištění skutečně tvoří; typickým příkladem je pojištění na dožití a smíšené pojištění pro případ smrti a dožití;
  - pojistnou událostí je především dožití se věku stanoveného v pojistné smlouvě.

3.1 Matematika životního pojištění

Abychom byli schopni počítat pojistné a příslušné riziko, musíme znát principy, pomocí kterých se modely pro výpočty pojistného tvoří a dále je potřeba mít k dispozici statistická data ve formě úmrtnostních tabulek. Při modelování pojistně matematických vztahů se vychází z teorie pravděpodobnosti a finanční matematiky. Teorii pravděpodobnosti potřebujeme proto, že předpokládáme, že jevy, které jsou předmětem pojistně matematických modelů, jsou čistě náhodného charakteru (např. nelze do pojištění zahrnout smrt člověka způsobenou úmyslně). Finanční matematika je pak použita především k diskontování finančních toků. Budu vycházet z literatury profesora Cipry [1].

Model úmrtnosti lze založit na náhodné veličině T_0, která popisuje budoucí délku života právě narozeného jedince.

Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny se popisuje pomocí distribuční funkce

$$F_0(t) = P\,(T_0 \leq t).$$

Jelikož je náhodná veličina T_0 spojitá, platí: $P\,(T_0 \leq t) = P\,(T_0 < t)$.

Zavádí se i **funkce přežití**

$$S_0(t) = P(T_0 > t) = 1 - F_0(t).$$

Náhodná veličina T_x vyjadřuje budoucí délku života jedince ve věku x za podmínky, že daný jedinec se dožil věku x. Distribuční funkce délky života jedince ve věku x se počítá s pomocí podmíněné pravděpodobnosti.

Definice podmíněné pravděpodobnosti [3]: *„ Nechť je dán pravděpodobnostní prostor (Ω, A“, P) a náhodný jev B náleží některé podmnožině množiny Ω, P(B)>0. Funkce P(|B) definovaná na A“ předpisem*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

$A \in A$" *se nazývá podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky B.“*

Distribuční funkce délky života jedince ve věku x je:

$$F_x(t) = P(T_x \leq t) = P(T_0 \leq x + t | T_0 > x) = \frac{P(x < T_0 \leq x + t)}{P(T_0 > x)} =$$
$$= \frac{[F_0(x + t) - F_0(x)]}{1 - F_0(x)};$$

v posledním kroku je použita věta o distribuční funkci:

Věta: *„pro libovolná reálná $a \leq b$ platí $P(a < X \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$.“* [3]

Pro funkci přežití pro jedince ve věku x platí [1]:

$$S_x(t) = P(T_x > t) = P(T_0 > x + t | T_0 > x) = \frac{P(T_0 > x + t)}{P(T_0 > x)} = \frac{S_0(x + t)}{S_0(x)}.$$

Pro zjednodušení se používají symboly [1]:

- Pravděpodobnost, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře před dosažením věku $x + 1$

$$q_x = F_x(1) = P(T_x \leq 1).$$

- Pravděpodobnost, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x + 1$

$$p_x = S_x(1) = P(X_x > 1).$$

- Pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře před dosažením věku $x + t$

$${}_tq_x = F_x(t) = P(T_x \leq t).$$

- Pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x + t$

$${}_tp_x = S_x(t) = P(T_x > t).$$

- Pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře ve věku $x + s$, ale před dosažením věku $x + s + 1$

$${}_{s|}q_x = F_x(s+1) - F_x(s) = P(s < T_x \leq s+1).$$

- Pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x + s$, ale zemře před dosažením věku $x + s + t$

$${}_{s|t}q = F_x(s+t) - F_x(s) = P(s < T_x \leq s+t).$$

V oblasti životního pojištění rozlišujeme dva stavy: *„naživu"* a *„zemřelý"* [1], přičemž každý z těchto stavů existuje s určitou pravděpodobností. Mezi pravděpodobnostmi obou stavů platí vztah:

$${}_tp_x + {}_tq_x = 1.$$

Při výpočtech pojistného se používá náhodná veličina K_x značící celočíselnou délkou života a definovaná jako $K_x = [T_x]$, tj. celá část náhodné veličiny T_x. Diskrétní náhodná veličina K_x má následující pravděpodobnostní rozdělení:

$$P(K_x = k) = P(k \leq T_x < k+1) = F_x(k+1) - F_x(k) = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_kp_x - {}_kp_x * p_{x+k} = {}_kp_x * q_{x+k}.$$

Interpretace pravděpodobnosti výše, že x-letý se dožije věku $x+k$, ale zemře před dosažením věku $x+k+1$, tj. jedná se o pravděpodobnost úmrtí ve věku $x+k$ pro x-letého jedince. Pro úplnost uvádím střední hodnotu náhodné veličiny K_x označovanou jako střední délka života ve věku x. [1]

$$E(K_x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} k * P(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k * {}_kp_x * q_{x+k}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} P(K_x = j) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_x \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x \,.$$

$$var(K_x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 * {}_kp_x * q_{x+k} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x \right)^2 .$$

3.2 Úmrtnostní tabulky

Úmrtností tabulky jsou nástrojem matematiky životního pojištění, ukazují vymírání lidské populace. Jsou sestavovány obvykle pro muže a ženy zvlášť. Při výpočtech se většinou používají úplné úmrtnostní tabulky, ve kterých jsou celočíselné věky od 0 až po zvolenou horní hranici. V úmrtnostních tabulkách pracujeme s určitým počtem lidské populace, u kterého sledujeme pravděpodobnosti dožití popř. úmrtí. Na základě těchto údajů se konstruují funkce úmrtnostní tabulky.[1]

Vybrané funkce v úmrtnostní tabulce[1]:

l_x značí počet dožívajících se věku x

- posloupnost $\{l_x\}$ se definuje

$$l_x = l_0 * {}_xp_0$$

kde l_0 je kořen úmrtnostní tabulky značící počet právě narozených jedinců. V úmrtnostních tabulkách se většinou za l_0 bere hodnota 100000. Náhodná veličina l_x má binomické rozdělení Bi$\left(l_0,\ {}_xp_0\right)$, kde střední hodnota je:

$$l_0 * {}_xp_0 = l_x,$$

l_x lze interpretovat jako průměrný počet jedinců ve věku x. Odtud je zřejmé, že

$$ {}_{x}p_0 = \frac{l_x}{l_0}, \tag{1} $$

Posloupnost $\{l_x\}_{x=0}^{w}$ se nazývá dekrementní řád, zobrazuje totiž vymírání lidské populace. Platí tedy:

$$ l_0 \geq l_1 \geq l_2 \geq \dots, $$

tzn., s rostoucím věkem ubývá počet jedinců.

Symbol ω značí horní věkovou hranici. Český statistický úřad stanovil hodnotu $\omega = 103$. Počty žijících ve věku vyšším než omega jsou tedy nulové.

Analogicky jako vztah (1) platí:

$$ {}_{n}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}. $$

$$ {}_{n}p_x = p_x * p_{x+1} * \dots * p_{x+n-1} $$

Pro pravděpodobnost úmrtí x-letého jedince před dosažením věku $x + n$ bude vzhledem k tomu, že jsou možné pouze dva stavy (dožití se dalšího roku života a úmrtí před dosažením dalšího roku života) platit:

$$ {}_{n}q_x = 1 - {}_{n}p_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}. \tag{2} $$

Další funkce v úmrtností tabulce je d_x

- označuje počet zemřelých ve věku x a je definovaný jako:

$$ d_x = l_x - l_{x+1}; $$

Tzn., od počtu jedinců, kteří se dožili věku x odečteme počet jedinců, kteří se dožili věku $x + 1$.

Dosadíme-li do vzorce (2) za $n = 1$, dostaneme:

$$ q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}. $$

3.3 Princip ekvivalence a princip fiktivního souboru

Na principu ekvivalence jsou založeny všechny pojistně-matematické výpočty. Tento princip spočívá v tom, že příjmy a výdaje pojišťovny by měly být v rovnováze. Ve skutečném životě tomu však obvykle tak není. Pojišťovna musí tedy přibližně určit budoucí příjmy a výdaje. Musí je časově rozložit. Proto shrne tyto částky k určitému okamžiku, u životního pojištění je to okamžik uzavření smlouvy a počítají se počáteční hodnoty pojištění. Veškeré budoucí finanční toky se diskontují pomocí diskontního faktoru:[1]

$$v = \frac{1}{1+i} \ ,$$

kde i je pojistně-technická úroková míra.

Abychom zjistili počáteční hodnotu S, budeme ji diskontovat o n roků zpět:

$$S * v^n.$$

Dále pojišťovna musí brát v úvahu náhodný charakter finančních toků, tzn., pojišťovna neví, kdy klient zemře, tedy kdy přestane platit pojistné, a naopak, jestli se dožije další výplaty pojistného plnění. Proto při výpočtech pracuje se středními hodnotami příslušných náhodných veličin, v nichž už je zahrnuta pravděpodobnost dožití se určitého věku nebo pravděpodobnost úmrtí. Obě pravděpodobnosti se určí pomocí počtů osob žijících nebo zemřelých v určitém věku, které jsou převzaty z úmrtnostních tabulek. Nejedná se tedy o skutečné počty osob, nýbrž o fiktivní počty a odtud pochází název druhého principu.[1]

Pojišťovna tedy pracuje s počátečními hodnotami v průměru očekávaných finančních toků. Rovnováhu mezi očekávanými příjmy a očekávaným výdaji pak můžeme popsat rovnicí: [1]

Očekávaná počáteční hodnota pojistného = očekávaná počáteční hodnota pojistného plnění.

Pojišťovna však musí brát v úvahu také pojistně-technické riziko. Finanční toky by se mohly výrazně lišit od průměru a pojišťovna by se tak mohla dostat do komplikované situace. Výše pojistně-technického rizika dává pojišťovně, aspoň teoreticky, možnost pohybovat se s pojistným v určitém intervalu (konkrétně „počáteční hodnota pojistného minus pojistně-technické riziko; počáteční hodnota pojistného plus pojistně-technické riziko“), proto by ve svém zájmu i v zájmu klientů měla pojišťovna zvolit vhodný kompromis mezi výší pojistného a pojistným plněním i přesto, že s narůstajícím počtem smluv pojistně technické riziko klesá (viz příklad str. 7). V matematických modelech budeme počáteční hodnotu pojištění považovat přímo za jednorázové nettopojistné, k němuž bude určeno i riziko tohoto pojistného.

3.4 Jednorázové nettopojistné a riziko životních pojištění

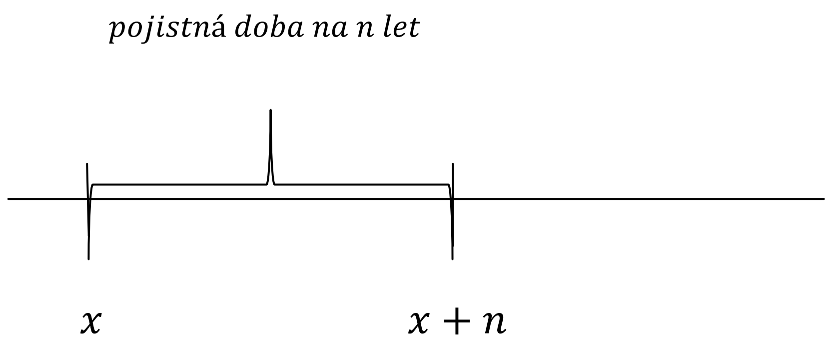
V této kapitole ukážu, jakými způsoby se modeluje jednorázové nettopojistné v těchto životních pojištěních:

- pojištění na dožití,
- pojištění pro případ smrti,
- dočasné pojištění pro případ smrti,
- smíšeného pojištění.

Dále ukážu, jak se odvodí riziko každého ze jmenovaných pojištění, tj. riziko, že jednorázové nettopojistné nebude stačit k výplatám pojistných plnění. Propočet pojistného a rizika uvedu na konkrétních příkladech pro každé z uvedených pojištění. Budu nejprve přepokládat, že pojistná částka (označena symbolem *S*) bude rovna 1 Kč a budu používat hodnoty z úmrtnostních tabulek z roku 2008 [5]:

3.4.1 Pojištění na dožití

Pojišťovna uzavře s pojištěným ve věku x pojistnou smlouvu na dožití věku $x+n$. Pokud se pojištěný dožije věku $x+n$, pojišťovna mu vyplatí pojistné plnění. U životního pojištění je pojistné plnění rovno pojistné částce. Jestliže se pojištěný nedožije pojistné doby, pojištění zanikne.



Obr. 1 Princip odvození jednorázového nettopojistného u pojištění na dožití

Výpočet počáteční hodnoty pojištění probíhá pomocí náhodné veličiny Z označující výši současné hodnoty pojistného plnění, jednorázové nettopojistné je pak střední hodnota této náhodné veličiny, nebo se počítá rovnou pomocí obou zmíněných principů. V konečné fázi lze vztah pro jednorázové nettopojistné přepsat do stručnější podoby pomocí tzv. komutačních čísel.

Nejprve ukážu výpočet pomocí náhodné veličiny:

Náhodnou veličinu Z definujeme pomocí náhodné veličiny K_x jako:

$$Z = \begin{cases} 0, & K_x = 0,1,\dots,n-1, \\ v^n, & K_x = n, n+1, \dots, \end{cases}$$

Tabulka 3.1: Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny Z [1]

Hodnota K_x	Hodnota Z	Pravděpodobnost
0	0	$P(K_x = 0) = {}_{0\,|}q_x = q_x$
1	0	$P(K_x = 1) = {}_{1\,|}q_x$
2	0	$P(K_x = 2) = {}_{2\,|}q_x$
. . .	. . .	. . .
$\left.\begin{matrix} n \\ n+1 \\ . \\ . \\ . \end{matrix}\right\}$	v^n	$P(K_x = n) = {}_{n}p_x$

Výpočet jednotkové počáteční hodnoty ${}_{n}E_x$:

$${}_{n}E_x = E(Z) = 0 * q_x + 0 * {}_{1\,|}q_x + 0 * {}_{2\,|}q_x + \dots + v^n * {}_{n}p_x = {}_{n}p_x * v^n;$$

Riziko pojištění pro případ dožití:

$$\sigma(Z) = \sqrt{var(Z)} = \sqrt{E(Z^2) - [E(Z)]^2} = \sqrt{(v^n)^2 * {}_{n}p_x - \left({}_{n}p_x * v^n\right)^2}$$
$$= \sqrt{v^{2n} * {}_{n}p_x - \left({}_{n}p_x * v^n\right)^2} = v^n * \sqrt{\left[{}_{n}p_x - \left({}_{n}p_x\right)^2\right]}$$
$$= v^n * \sqrt{{}_{n}p_x * \left(1 - {}_{n}p_x\right)} = v^n * \sqrt{{}_{n}p_x * {}_{n}q_x}.$$

Příklad 2:

Muž ve věku 30 let uzavře pojistnou smlouvu na dožití se věku 70. Tedy na pojistnou dobu 40 let.

$n = 40, x = 30.$

Výpočet jednotkové počáteční hodnoty ${}_{40}E_{30}$:

$$ {}_{40}E_{30} = {}_{40}p_{30} * v^{40} = \left(\frac{1}{1 + 0{,}024}\right)^{40} * 0{,}686311 = 0{,}266; $$

${}_{40}p_{30} = p_{30} * p_{31} * p_{32} * \dots * p_{69}.$

Výpočet rizika, že pojišťovna nebude schopna vyplatit pojistné plnění:

$$ \sigma(Z) = v^{40} * \sqrt{{}_{40}p_{30} * {}_{40}q_{30}} = \left(\frac{1}{1 + 0{,}024}\right)^{40} * \sqrt{0{,}686311 * 0{,}313689} = 0{,}180; $$

Výpočty střední hodnoty a rizika v tomto příkladu jsou uvedeny v příloze A.

Odvození vztahu pro výpočet jednorázového nettopojistného pomocí principu ekvivalence a principu fiktivního souboru (komutačních čísel)

Pojišťovna musí počítat s celkovým pojistným plněním pro všechny pojištěné, kteří se dožili věku $x + n$, s částkou 1 Kč vynásobenou počtem těchto jedinců. Tedy: $1 * l_{x+n}$. Pojistné je však třeba určit pro věk pojištěných x, proto pomocí diskontního faktoru převedeme celkovou částku v budoucnu potřebného pojistného k okamžiku uzavírání pojistné smlouvy, k věku x. Počet jedinců, kteří se dožili věku x, je podle úmrtnostních tabulek l_x. Celkové pojistné plnění diskontované k věku x se tedy rozdělí mezi všechny pojištěné osoby tohoto věku stejně, tím, že danou rovnici podělíme l_x.

$$ \frac{1 * l_{x+n} * v^n}{l_x} = 1 * \frac{l_{x+n}}{l_x} * v^n = {}_{n}p_x * v^n; $$

Dospěli jsme ke stejnému vyjádření jako v případě, kdy vztah pro jednorázové nettopojistné byl odvozován na základě střední hodnoty. Získaný vzorec nyní vyjádříme pomocí komutačních čísel:

$$ \frac{l_{x+n}}{l_x} * v^n = \frac{l_{x+n} * v^n * v^x}{l_x * v^x} = \frac{l_{x+n} * v^{x+n}}{l_x * v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}, $$

kde D_{x+n} a D_x jsou komutační čísla. Jejich definice jsou následující:

$D_x = l_x * v^x$,

kde D_x je diskontovaný počet žijících ve věku x,

$D_{x+n} = l_{x+n} * v^{x+n}$,

kde D_{x+n} je diskontovaný počet žijících ve věku $x + n$.

Jestliže je pojistná částka jiná než 1 Kč, rovnici vynásobíme S

$$S * {}_nE_x = S * \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Nyní vypočítám jednorázové nettopojistné u pojištění na dožití pro muže ve věku 30 let a pojistnou dobu 40 let pomocí komutačních čísel a porovnám výsledky s výpočtem pomocí náhodné veličiny.

Příklad 3:

$n = 40, x = 30.$

$${}_{40}E_{30} = \frac{D_{70}}{D_{30}} = 0{,}266.$$

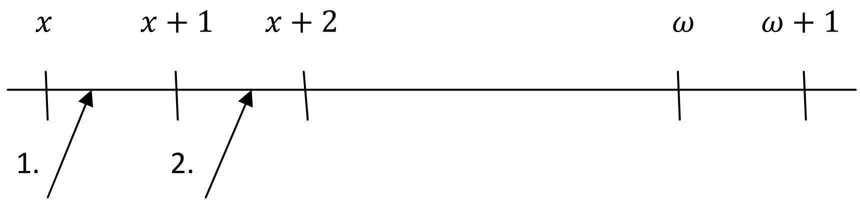
Střední hodnota ${}_{40}E_{30}$ při výpočtu pomocí náhodné veličiny Z i pomocí komutačních čísel vyšla stejně a to 0,266.

Výpočty k tomuto příkladu jsou uvedeny v příloze A na straně 3.

3.4.2 Pojištění pro případ smrti

V tomto případě je sjednávána pojistná smlouva na pojistnou událost, kterou je smrt pojištěného. Pokud dojde k pojistné události, pojišťovna vyplatí na konci roku úmrtí pojištěného oprávněné osobě pojistnou částku. Pojištění není časově omezeno, trvá až do konce života pojištěného. Je tedy sjednáno na dobu neurčitou.

Obr. 2 Princip odvození jednorázového nettopojistného u pojištění pro případ smrti



1. Zemře-li pojištěný během prvního pojistného roku, jak ukazuje šipka na obrázku č. 2, tj. ve věku x, pojistná částka bude vyplacena až na konci tohoto roku.

2. Zemře-li během druhého pojistného roku, tj. ve věku $x+1$, dostane oprávněná osoba pojistné plnění na konci druhého pojistného roku, atd.

Nejprve opět uvedu výpočet počáteční hodnoty pojištění A_x pomocí náhodné veličiny Z:

pro náhodnou veličinu Z platí:

$$Z = v^{K_x+1}, \ \ K_x = 0,1,2,\dots,\omega - x;$$

Tabulka 3.2: Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny Z [1]

Hodnota K_x	Hodnota Z	Pravděpodobnost
0	v^1	$P(K_x = 0) = {}_{0\,\vert}q_x = q_x$
1	v^2	$P(K_x = 1) = {}_{1\,\vert}q_x$
2	v^3	$P(K_x = 2) = {}_{2\,\vert}q_x$
. . .	. . .	. . .
$\omega - x$	$v^{\omega-x+1}$	$P(K_x = \omega - x) = {}_{\omega-x\,\vert}q_x$

Výpočet počáteční hodnoty pojištění A_x:

$$A_x = E(Z) = v * q_x + v^2 * {}_{1\,\vert}q_x + v^3 * {}_{2\,\vert}q_x + \cdots + v^{\omega-x+1} * {}_{\omega-x\,\vert}q_x =$$
$$= \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} * P(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} * {}_{k\,\vert}q_x;$$

Riziko pojištění pro případ smrti:

$$\sigma(Z) = \sqrt{E(Z^2) - [E(Z)]^2}$$

$$= \sqrt{{}^2A_x - (A_x)^2} = \sqrt{\left(v^2 * q_x + v^4 * {}_{1|}q_x + \cdots + v^{2*(\omega-x+1)} * {}_{\omega-x|}q_x\right) - \left(\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} * {}_{k|}q_x\right)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{2*(k+1)} * {}_{k|}q_x - \left(\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} * {}_{k|}q_x\right)^2}.$$

${}^2A_x$je jednorázové nettopojistné počítané na místo diskontního faktoru v diskontním faktorem v^2.

Příklad 4:

Muž ve věku 30 let uzavře pojistnou smlouvu na pojištění pro případ smrti. Pojistné plnění bude vyplaceno na konci roku, v němž muž zemřel.

$x = 30$

Výpočet počáteční hodnoty pojištění:

$$A_{30} = \sum_{k=0}^{73} v^{k+1} * {}_{k|}q_{30} = 0{,}358,$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{\sum_{k=0}^{73} v^{2*(k+1)} * {}_{k|}q_{30} - \left(\sum_{k=0}^{73} v^{k+1} * {}_{k|}q_{30}\right)^2} = \sqrt{0{,}142976891 - 0{,}127887223}$$
$$= 0{,}123.$$

Výpočty k tomuto příkladu jsou uvedeny v příloze A.

Výpočet počáteční hodnoty pojištění pomocí principu ekvivalence a fiktivního souboru a komutačních čísel:

$$A_x = \frac{1 * d_x * v^1}{l_x} + \frac{1 * d_{x+1} * v^2}{l_x} + \frac{1 * d_{x+2} * v^3}{l_x} + \cdots + \frac{1 * d_\omega * v^{\omega+1-x}}{l_x}$$
$$= \frac{1 * d_x * v^1 * v^x}{l_x * v^x} + \frac{1 * d_{x+1} * v^2 * v^x}{l_x * v^x} + \frac{1 * d_{x+2} * v^3 * v^x}{l_x * v^x} + \cdots$$
$$+ \frac{1 * d_\omega * v^{\omega+1-} * v^x}{l_x * v^x}$$
$$= \frac{d_x * v^{1+x} + d_{x+1} * v^{x+2} + d_{x+2} * v^{x+3} + \cdots + d_\omega * v^{\omega+1}}{l_x * v^x}$$
$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_\omega}{D_x} = \frac{M_x}{D_x},$$

kdeD_x, C_x, M_x jsou komutační čísla. D_xuž bylo definováno u pojištění na dožití, C_x a $M_x$se definují takto:

$C_x = d_x * v^{x+1}$,

kde C_x znamená diskontovaný počet zemřelých ve věku x.

Platí:

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_\omega = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j}\ .$$

Jestliže je pojistná částka jiná než 1 Kč rovnici vynásobíme S:

$$A_x * S = \frac{M_x}{D_x} * S.$$

Opět uvedu výpočet střední hodnoty, tedy jednorázového nettopojistného, pomocí komutačních čísel u muže ve věku 30 let na pojistnou dobu 40 let. Poté opět porovnám s výpočtem pomocí náhodné veličiny Z pro stejný věk a stejnou pojistnou dobu.

Příklad 5:

$n = 40, x = 30.$

$$A_{30} = \frac{M_{30}}{D_{30}} = 0{,}358\,.$$

Při výpočtu pomocí náhodné veličiny Z vyšla střední hodnota 0,358. Výsledek při použití komutačních čísel vyšel stejně a to 0,358. Výpočty k tomuto příkladu jsou uvedeny v příloze A na straně 3.

3.4.3 Dočasné pojištění pro případ smrti

Toto pojištění je velmi podobné pojištění pro případ smrti. Rozdíl je pouze v časovém omezení doby trvání pojištění: dočasné pojištění pro případ smrti se sjednává na dobu určitou. Typicky je využíváno při poskytnutí dlouhodobého úvěru, např. hypotečního, přičemž je možnost v průběhu splácení úvěru snižovat pojistnou částku. Pojistnou událostí je zde opět smrt pojištěného. Pokud nastane pojistná událost, pojišťovna vyplatí oprávněné osobě pojistnou částku na konci pojistného roku, v němž k úmrtí došlo. Pojistná událost, ale musí nastat během pojistné doby, jestliže nastane až po pojistné době, pojištění se už na tuto událost nevztahuje.

Výpočet jednorázového nettopojistného pomocí náhodné veličiny Z:

Pro náhodnou veličinu Z platí:

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x = 0,1,2,\dots,n-1, \\ 0, & K_x = n, n+1, \dots, \end{cases}$$

Tabulka 3.3: Pravděpodobnosti náhodné veličiny Z [1]

Hodnota K_x	Hodnota Z	Pravděpodobnost
0	v^1	$P(K_x = 0) = {}_{0\,|}q_x = q_x$
1	v^2	$P(K_x = 1) = {}_{1\,|}q_x$
2	v^3	$P(K_x = 2) = {}_{2\,|}q_x$
. . .	. . .	. . .
$n-1$	v^n	$P(K_x = n-1) = {}_{n-1\,|}q_x$

Výpočet počáteční hodnoty pojištění $A_{\overline{xn}}^{1}$:

$$A_{\overline{xn}}^{1} = E(Z) = v^1 * q_x + v^2 * {}_{1|}q_x + v^3 * {}_{2|}q_x + \cdots + v^n * {}_{n-1|}q_x$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} * P(K_x = k) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} * {}_{k|}q_x;$$

Riziko dočasného pojištění pro případ smrti:

$$\sigma(Z) = \sqrt{var(Z)} = \sqrt{E(Z^2) - [E(Z)]^2} = \sqrt{{}^{2}A_{\overline{xn}}^{1} - (A_{\overline{xn}}^{1})^2}$$
$$= \sqrt{\left(v^2 * q_x + v^4 * {}_{1|}q_x + \cdots + v^{2*n} * {}_{n-1|}q_x\right) - \left(v^1 * q_x + v^2 * {}_{1|}q_x + \cdots + v^n * {}_{n-1|}q_x\right)^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} v^{(k+1)*2} * {}_{k|}q_x - \left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} * {}_{k|}q_x\right)^2}.$$

${}^{2}A_{\overline{xn}}^{1}$ je jednorázové nettopojistné počítané na místo diskontního faktoru v diskontním faktorem v^2;

Příklad 6:

Muž ve věku 30 let uzavře pojistnou smlouvu na dočasné pojištění pro případ smrti. Pojistná doba je stanovena na 40 let. Pojistné plnění bude vyplaceno následující rok.

$x = 30$

Výpočet počáteční hodnoty pojištění:

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} * {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{39} v^{k+1} * {}_{k|}q_{30} = 0{,}157;$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{E(Z^2) - [E(Z)]^2} = \sqrt{0{,}083129342 - 0{,}024783575} = 0{,}242.$$

Výpočty střední hodnoty a rizika k tomuto příkladu jsou uvedeny v příloze A.

Výpočet počáteční hodnoty pojištění pomocí komutačních čísel:

$$A^1_{\overline{xn}} = \frac{d_x * v^1}{l_x} + \frac{d_{x+1} * v^2}{l_x} + \cdots + \frac{d_{x+n-1} * v^n}{l_x} =$$
$$= \frac{d_x * v^1 * v^x}{l_x * v^x} + \frac{d_{x+1} * v^2 * v^x}{l_x * v^x} + \cdots + \frac{d_{x+n-1} * v^n * v^x}{l_x * v^x} =$$
$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x};$$

$M_{x+n} = C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + \cdots + C_\omega.$

Je-li pojistná částka různá od 1 Kč, rovnici vynásobíme S:

$$A^1_{\overline{xn}} * S = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} * S.$$

Opět uvádím pro srovnání výpočet střední hodnoty, tedy jednorázového nettopojistného, pomocí komutačních čísel pro muže ve věku 30 let na pojistnou dobu 40 let.

Příklad 7:

$n = 40, x = 30.$

$$A^1_{\overline{30,40}} = \frac{M_{30} - M_{70}}{D_{30}} = 0{,}157.$$

Střední hodnota v případě výpočtu pomocí náhodné veličiny vyšla 0,157. Při výpočtu pomocí komutačních čísel je 0,157. Vyšla tedy opět stejně. Výpočet k tomuto příkladu je uveden v příloze A na straně 3.

3.4.4 Smíšené pojištění

Je to pojištění, které v sobě zahrnuje dočasné pojištění pro případ smrti a pojištění na dožití. Bývá označováno jako kapitálové životní pojištění. Pojišťovna vyplatí oprávněné osobě pojistnou částku, jestliže nastane pojistná událost, tou je v tomto případě smrt pojištěného nebo dožití se určitého věku. Pokud pojištěný zemře ve věku x, pojišťovna oprávněné osobě na konci tohoto roku vyplatí pojistné plnění, pojistné plnění v rámci tohoto životního pojištění je mu vyplaceno i v případě pokud se dožije konce pojistné doby n uvedené v pojistné smlouvě.

Výpočet jednorázového nettopojistného pomocí náhodné veličiny Z:

jednorázové nettopojistné jakožto střední hodnota náhodné veličiny Z se značí $A_{\overline{xn}}$. Je to tedy kombinace dočasného pojištění pro případ smrti a pojištění na dožití proto platí: $A_{\overline{xn}} = {}_{n}E_x + A^1_{\overline{xn}}$.

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x = 0,1,\dots,n-1, \\ v^n & , K_x = n, n+1, \dots, \end{cases}$$

Tabulka 3.4: Pravděpodobnosti náhodné veličiny Z [1]

Hodnota K_x	Hodnota Z	Pravděpodobnost
0	v^1	$P\big(K_x = 0 = {}_{0\,\vert}q_x = q_x\big)$
1	v^2	$P(K_x = 1) = {}_{1\,\vert}q_x$
2	v^3	$P(K_x = 2) = {}_{2\,\vert}q_x$
. . .	. . .	. . .
$n-2$	v^{n-1}	$P(K_x = n-2) = {}_{n-2\,\vert}q_x$
$\left.\begin{matrix} n-1 \\ n \\ . \\ . \\ . \end{matrix}\right\}$	v^n	${}_{n-1\,\vert}q_x + {}_{n}p_x = {}_{n-1}p_x$

Výpočet počáteční hodnoty pojištění $A_{\overline{xn}}$:

$$A_{\overline{xn}} = v * q_x + v^2 * {}_{1\,\vert}q_x + \dots + v^{n-1} * {}_{n-2\,\vert}q_x + v^n * {}_{n-1\,\vert}q_x + v^n * {}_{n}p_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} * {}_{k\,\vert}q_x + v^n * {}_{n}p_x = \sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1} * {}_{k\,\vert}q_x + v^n * {}_{n-1}p_x\,;$$

Riziko smíšeného pojištění:

$$\sigma(Z) = \sqrt{var(Z)} = \sqrt{E(Z^2) - [E(Z)]^2} = \sqrt{{}^2A_{\overline{xn}} - (A_{\overline{xn}})^2}$$

$$= \sqrt{\left(v^2 * q_x + \cdots + v^{2*n} * {}_{n-1\,|}q_x + v^{2*n} * {}_np_x\right) - \left(v * q_x + \cdots + v^n * {}_{n-1\,|}q_x + v^n * {}_np_x\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n-2} v^{2*(k+1)} * {}_{k\,|}q_x + v^{2*n} * {}_{n-1}p_x\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1} * {}_{k\,|}q_x + v^n * {}_{n-1}p_x\right)^2}.$$

${}^2A_{\overline{xn}}$ je jednorázové nettopojistné počítané na místo diskontního faktoru v s diskontním faktorem v^2

Příklad 8:

Muž ve věku 30 let uzavře pojistnou smlouvu na dočasné pojištění pro případ smrti. Zemře ve věku 70 let. Pojistné plnění bude vyplaceno následující rok.

$x = 30$,

výpočet počáteční hodnoty pojištění a rizika:

$$A_{\overline{xn}} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1} * {}_{k\,|}q_x + v^n * {}_{n-1}p_x = \sum_{k=0}^{38} v^{k+1} * {}_{k\,|}q_{30} + v^{40} * {}_{39}p_{30} = 0{,}423;$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{E(Z^2) - [E(Z)]^2} = \sqrt{{}^2A_{\overline{xn}} - (A_{\overline{xn}})^2} =$$
$$\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{2*(k+1)} * {}_{k\,|}q_x + v^{2*n} * {}_np_x\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} * {}_{k\,|}q_x + v^n * {}_np_x\right)^2} =$$
$$\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{39} v^{(k+1)*2} * {}_{k\,|}q_{30} + v^{2*40} * {}_{40}p_{30}\right) - \left(\sum_{k=0}^{39} v^{k+1} * {}_{k\,|}q_{30} + v^{40} * {}_{40}p_{30}\right)^2} =$$
$$\sqrt{0{,}186055205 - 0{,}17910526} = 0{,}083;$$

Výpočty střední hodnoty a rizika k tomuto příkladu jsou uvedeny v příloze A.

Výpočet jednorázového nettopojistného pomocí principu ekvivalence a fiktivního souboru a komutačních čísel:

$$
\begin{aligned}
A_{\overline{xn}} = \frac{d_x * v^1}{l_x} + \frac{d_{x+1} * v^2}{l_x} + \cdots + \frac{d_{x+n-1} * v^n}{l_x} + \frac{l_{x+n}}{l_x} * v^n \\
= \frac{d_x * v^1 * v^x}{l_x * v^x} + \frac{d_{x+1} * v^2 * v^x}{l_x * v^x} + \cdots + \frac{d_{x+n-1} * v^n * v^x}{l_x * v^x} + \frac{l_{x+n} * v^n * v^x}{l_x * v^x} \\
= \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \cdots + \frac{C_{x+n-1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x};
\end{aligned}
$$

Je-li pojistná částka různá od $1\ Kč$, rovnici vynásobíme S:

$$A_{\overline{xn}} * S = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} * S\,.$$

Nyní uvedu výpočet střední hodnoty, tedy jednorázového nettopojistného, pomocí komutačních čísel a porovnám s výsledkem při výpočtu střední hodnoty pomocí náhodné veličiny Z.

Příklad 9:

Výpočet střední hodnoty pomocí komutačních čísel pro muže ve věku 30 let a na pojistnou dobu 40 let.

$n = 40$ a $x = 30$.

$$A_{\overline{30,40}} = \frac{M_{30} - M_{70} + D_{70}}{D_{30}} = 0{,}423.$$

Střední hodnota při výpočtu pomocí náhodné veličiny Z i pomocí komutačních čísel vyšla stejně a to $0{,}423$. Výpočet je uveden v příloze A na straně 3.

Nyní uvedu hodnoty jednorázového nettopojistného a rizik pro jednotlivá životní pojištění do tabulky číslo 3.9. Hodnoty beru z příkladů číslo 2, 4, 6, 8 pro $x = 30$, $n = 40$ a pojistnou částku $S = 1\ Kč$.

Tabulka 3.9: Hodnoty jednorázového nettopojistného a rizik pro jednotlivá životní pojištění

Životní pojištění	$E(Z)$	$\sigma(Z)$
na dožití	0,266	0,180
pro případ smrti	0,358	0,123
dočasné pojištění pro případ smrti	0,157	0,242
smíšené pojištění	0,423	0,083

Pojištění pro případ smrti a smíšené pojištění patří k nejdražším pojištěním, přičemž ale riziko, že pojišťovna nedostojí svým závazkům, je zde poměrně malé. Nejmenší riziko je u smíšeného pojištění, což je způsobeno konstrukcí vzorce pro výpočet rizika. Způsobuje to složka pojištění na dožití, především v druhé části hodnota $v^n * {}_{n-1}p_x$. U pojištění na dožití nám riziko s rostoucí pojistnou dobou roste, od určité pojistné doby začne klesat. Je to způsobeno tím, že ve vzorci pro výpočet rizika násobíme pravděpodobnosti úmrtí s pravděpodobnostmi dožití (viz přílohu A). Riziko se zvyšuje do té doby než se nám obě pravděpodobnosti ${}_np_x$a ${}_nq_x$ vyrovnají, poté se začne riziko snižovat. V pojištěních, jejichž předmětem je úmrtí pojištěného, se ukazuje, že omezením délky pojistné doby dochází ke zvýšení rizika, viz tabulku 3.9. Dochází též ke snížení ceny tohoto pojištění.

Tabulka 3.10: Hodnoty jednorázového nettopojistného a rizik pojištění na dožití v případě různé délky pojistné doby a muže ve věku 30 let a $S = 1\ K$č.

Délka pojistné doby n	Jednorázové nettopojistné $E(Z)$	Rizika $\sigma(Z)$
$n = 10$	0,779	0,087
$n = 20$	0,595	0,128
$n = 30$	0,426	0,167
$n = 40$	0,266	0,180
$n = 50$	0,124	0,150

Výpočty k tabulce 3.10 jsou uvedeny v příloze A na straně 1 nad grafy.

Poznámka: Mezi životní pojištění řadíme i pojištění s pevnou dobou výplaty. Toto pojištění je uzavíráno na pojistnou dobu n, po uplynutí pojistné doby je pojištěnému popř. oprávněné osobě vyplaceno pojistné plnění. Pojistné plnění je vyplaceno i v případě, že pojištěný se nedožil konce pojistné doby n. Pojišťovna tak na sebe přebírá placení pojistného. Z tohoto důvodu se při modelování vztahu pro jednorázové nettopojistné nepracuje s náhodnými finančními toky. Většinou je uzavíráno pro zabezpečení potomka, kdy pojišťovna vyplácí od jeho určitého věku (plnoletost) v určitých časových intervalech dohodnutou částku.

Jednorázové nettopojistné:

$$Jednotková\ počáteční\ hodnota\ pojištění\ \ s\ pevnou\ dobou\ výplaty = \ v^n$$

3.5 Rizika životních pojištění v případě N smluv

Zatím jsme počítali jednorázové nettopojistné a riziko, že pojišťovna nebude schopna vyplatit pojistné plnění na 1 smlouvu. Pojišťovna ale uzavírá mnohem více smluv, proto v této části se budu zabývat odvozením vztahů pro celý pojistný kmen. Odvodím vztahy pro výpočet rizika pro jednotlivá životní pojištění pro N pojistných smluv. Předpokládáme, že smlouvy musí být identické, tj. jsou sjednány na stejné riziko tzn., smlouvy pouze na dožití, pro případ smrti, dočasného pojištění pro případ smrti a smíšeného pojištění. Náhodná veličina $Z_i, i = 1, \dots, N$, bude popisovat současnou hodnotu pojistného plnění vyplaceného v případě, že nastane pojistná událost. Dále budeme předpokládat, že pojištěné osoby mají stejný věk a pojistná částka pro každé z pojištění činí S Kč.

3.5.1 Pojištění na dožití

Náhodnou veličinu $S * Z_i, i = 1, \dots, N$, popisující současnou hodnotu pojistného plnění v i −té smlouvě v rámci pojistného kmene o N smlouvách, $i = 1, \dots, N$ definujeme způsobem:

$$S * Z_i = \begin{cases} 0, & K_x = 0,1, \dots, n-1, \\ S * v^n, & K_x = n, n+1, \dots, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, N$.

Předpokládáme, že náhodné veličiny $S * Z_i$ jsou stejně rozdělené a vzájemně nezávislé. Proto můžeme snadno spočítat charakteristiky náhodné veličiny

$$\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \cdots + S * Z_N}{N}.$$

Střední hodnota bude interpretována jako výše jednorázového nettopojistného, které v průměru připadá na každou pojistnou smlouvu a směrodatná odchylka pak bude vyjadřovat riziko, které připadá v průměru na každou smlouvu daného pojistného kmene.

$$E\left(\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \cdots + S * Z_N}{N}\right) = S * E\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N}{N}\right)$$
$$= S * \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} E(Z_i) = S * \frac{1}{N} * N * E(Z_i) = S * v^n * {}_n p_x.$$

Střední hodnota a riziko pojištění na dožití v případě jedné pojistné smlouvy ($N = 1$) jsou už uvedeny v kapitole 3.4, v části týkající se životního pojištění. Pro $S = 1\,000\ Kč$, $x = 30$ a $n = 40$ střední hodnota činí 265,78, neboli jednorázové nettopojistné v průměru na každou smlouvu v rámci pojistného kmene je 265,78 Kč.

$$var\left(\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \cdots + S * Z_N}{N}\right) = S^2 * \frac{1}{N^2} var\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N}{N}\right)$$
$$= \frac{S^2}{N^2} * \sum_{i=1}^{N} var(Z_i) = \frac{S^2}{N^2} * N * var(Z_i) = S^2 * \frac{1}{N} * var(Z_i)$$
$$= \frac{S^2 * v^{2n} * {}_n p_x * {}_n q_x}{N};$$

$$\sigma\left(\frac{S*Z_1+S*Z_2+\cdots+S*Z_N}{N}\right)=\sqrt{var\left(\frac{S*Z_1+S*Z_2+\cdots+S*Z_N}{N}\right)}$$
$$=\frac{S}{\sqrt{N}}*\sqrt{var(Z_i)}=\frac{S}{\sqrt{N}}*\sqrt{v^{2n}*\ {}_np_x*\ {}_nq_x}=\frac{S}{\sqrt{N}}*v^n*\sqrt{{}_np_x*\ {}_nq_x}.$$

Nyní vypočítám konkrétní hodnoty rizik, které v průměru připadají na jednu smlouvu v rámci celého pojistného kmene o N smlouvách pro vhodně zvolená N, abychom viděli, jak se bude pojistně-technické riziko se zvyšujícím pojistným kmenem měnit. Pro lepší zřetelnost budou hodnoty rizik vypočteny na $1\,000\ K\check{c}$ pojistné částky. V případě $N=1$ použiji hodnotu určenou v příkladu číslo 2 a vynásobím ji 1 000. Hodnoty rizik najdeme v tabulce číslo 3.5.

Tabulka 3.5: Hodnoty rizik v pojištění na dožití v případě N smluv a pojistné částky $S=1\,000 K\check{c}$

N	$\sigma\left(\frac{1\,000*Z_1+\cdots+1\,000*Z_N}{N}\right)$
1	179,685
10	56,821
100	17,969
1 000	5,682
10 000	1,797
100 000	0,568
1 000 000	0,180

Zde opět vidíme, jak rychle riziko klesá se zvyšujícím se počtem smluv. Pojistné ve výši $265{,}78\ K\check{c}$ by stačilo v případě, že pojistný kmen obsahuje řádově aspoň 100 000 smluv.

3.5.2 Pojištění pro případ smrti

Náhodnou veličinu $S * Z_i, i = 1, \dots, N$, definujeme jako:

$$S * Z_i = S * v^{K_x+1}, \quad K_x = 0,1,2,\dots,\omega - x,$$

$i = 1, \dots, N$.

Výpočet charakteristik:

$$E\left(\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \dots + S * Z_N}{N}\right) = S * E\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N}{N}\right)$$
$$= S * \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} E(Z_i) = S * \frac{1}{N} * N * E(Z_i) = S * \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} * {}_{k|}q_x\,;$$

Pro $S = 1\,000\,Kč$, $x = 30$ a $n = 40$ střední hodnota činí 358, neboli jednorázové nettopojistné v průměru na každou smlouvu v rámci pojistného kmene je 358 Kč.

$$var\left(\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \dots + S * Z_N}{N}\right) = S^2 * var\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N}{N}\right) = \frac{S^2}{N^2} * \sum_{i=1}^{N} var(Z_i)$$
$$= \frac{S^2}{N^2} * N * \left[\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{2(k+1)} * {}_{k|}q_x - \left(\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} * {}_{k|}q_x\right)^2\right]$$
$$= \frac{S^2}{N} * \left[\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{2(k+1)} * {}_{k|}q_x - \left(\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} * {}_{k|}q_x\right)^2\right];$$

$$\sigma\left(\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \dots + S * Z_N}{N}\right) = \sqrt{var\left(\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \dots + S * Z_N}{N}\right)}$$
$$= \frac{S}{\sqrt{N}} * \sqrt{var(Z_i)} = \frac{S}{\sqrt{N}} * \sqrt{\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{2(k+1)} * {}_{k|}q_x - \left(\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} * {}_{k|}q_x\right)^2}.$$

Tabulka 3.6: Hodnoty rizik v pojištění pro případ smrti v případě N smluv a pojistné částky $S = 1\,000 Kč$

N	$\sigma\left(\frac{1\,000 * Z_1 + \cdots + 1\,000 * Z_N}{N}\right)$
1	122,840
10	38,845
100	12,284
1 000	3,885
10 000	1,228
100 000	0,389
1 000 000	0,123

Zde opět vidíme, jak riziko klesá s přibývajícím počtem smluv. Pojistné ve výši 358 $Kč$ by stačilo až při 100 000 smlouvách.

3.5.3 Dočasné pojištění pro případ smrti

Náhodnou veličinu $S * Z_i, i = 1, \dots, N$, definujeme jako:

$$S * Z_i = \begin{cases} S * v^{K_x+1}, & K_x = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ 0, & K_x = n, n+1, \dots, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, N$.

Výpočet charakteristik:

$$E\left(\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \cdots + S * Z_N}{N}\right) = S * E\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N}{N}\right)$$
$$= S * \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} E(Z_i) = S * \frac{1}{N} * N * E(Z_i) = S * \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} * {}_{k|}q_x;$$

Pro $S = 1\,000\,Kč$, $x = 30$ a $n = 40$ střední hodnota činí 157, neboli jednorázové nettopojistné v průměru na každou smlouvu v rámci pojistného kmene je 157 $Kč$.

$$var\left(\frac{S*Z_1+S*Z_2+\cdots+S*Z_N}{N}\right)=\frac{S^2}{N^2}*\sum_{i=1}^{N}var(Z_i)$$
$$=\frac{S^2}{N}*\left[\sum_{k=0}^{n-1}v^{2(k+1)}*{}_{k\,|}q_x-\left(\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}*{}_{k\,|}q_x\right)^2\right];$$

$$\sigma\left(\frac{S*Z_1+S*Z_2+\cdots+S*Z_N}{N}\right)=\sqrt{var\left(\frac{S*Z_1+S*Z_2+\cdots+S*Z_N}{N}\right)}$$
$$=\frac{S}{\sqrt{N}}*\sqrt{var(Z_i)}=\frac{S}{\sqrt{N}}*\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}v^{2(k+1)}*{}_{k\,|}q_x-\left(\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}*{}_{k\,|}q_x\right)^2}.$$

Odvození vztahů pro toto pojištění je analogické jako v předchozích případech, proto uvádím jen konečný výsledek.

Tabulka 3.7: Hodnoty rizik v dočasném pojištění pro případ smrti v případě N smluv a pojistné částky $S = 1\,000 Kč$

N	$\sigma\left(\frac{1\,000*Z_1+\cdots+1\,000*Z_N}{N}\right)$
1	241,549
10	76,384
100	24,155
1 000	7,638
10 000	2,416
100 000	0,764
1 000 000	0,242

Vidíme, že riziko klesá se zvyšujícím se pojistným kmenem. Pojistné ve výši 157 $Kč$ by stačilo minimálně při 100 000 smlouvách, ale i zde je riziko ještě velké. V pojistném kmeni s 1 000 000 je riziko už dostatečně malé, aby pojistné 157 $Kč$ stačilo.

3.5.4 Smíšené pojištění

Náhodnou veličinu $S * Z_i, i = 1, \dots, N$ definujeme jako:

$$S * Z_i = \begin{cases} S * v^{K_x+1}, & K_x = 0,1, \dots, n-1, \\ S * v^n, & K_x = n, n+1, \dots, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, N.$

Výpočet charakteristik:

$$E\left(\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \dots + S * Z_N}{N}\right) = S * \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} E(Z_i) = S * \frac{1}{N} * N * E(Z_i) = S * \left(\sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1} * {}_{k|}q_x + v^n * {}_{n-1}p_x\right);$$

Pro $S = 1\,000\, Kč$, $x = 30$ a $n = 40$ střední hodnota činí 423, neboli jednorázové nettopojistné v průměru na každou smlouvu v rámci pojistného kmene je 423 $Kč$.

$$var\left(\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \dots + S * Z_N}{N}\right) =$$

$$= \frac{S^2}{N} * \left[\left(\sum_{k=0}^{n-2} v^{2(k+1)} * {}_{k|}q_x + v^{2n} * {}_{n-1}p_x\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1} * {}_{k|}q_x + v^n * {}_{n-1}p_x\right)^2\right];$$

$$\sigma\left(\frac{S * Z_1 + S * Z_2 + \dots + S * Z_N}{N}\right) = \frac{S}{\sqrt{N}} * \sqrt{var(Z_i)}$$

$$= \frac{S}{\sqrt{N}} * \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n-2} v^{2(k+1)} * {}_{k|}q_x + v^{2n} * {}_{n-1}p_x\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1} * {}_{k|}q_x + v^n * {}_{n-1}p_x\right)^2}.$$

Tabulka 3.8: Hodnoty rizik ve smíšeném pojištění v případě N smluv a pojistné částky $S = 1\,000 K\check{c}$

N	$\sigma\left(\frac{1\,000 * Z_1 + \cdots + 1\,000 * Z_N}{N}\right)$
1	83,366
10	26,363
100	8,337
1 000	2,636
10 000	0,834
100 000	0,264
1 000 000	0,0834

Riziko se zvyšujícím se pojistným kmenem klesá. Pojistné ve výši $423\ K\check{c}$ by mělo stačit v pojistném kmeni s $100\,000$ smlouvami. Riziko je dostatečně malé, ale pojištění s pojistným $423\ K\check{c}$ je poměrně drahé na rozdíl od předchozích pojištění.

4 Závěr

V práci jsem se zabývala odvozením vzorců pro výpočet jednorázového nettopojistného a rizika, že pojišťovna nebude schopna vyplatit pojistné plnění, pro jednotlivé druhy životních pojištění: pojištění na dožití, pojištění pro případ smrti, dočasného pojištění pro případ smrti a smíšeného pojištění. Vzorce jsou odvozeny nejprve pro jedinou smlouvu s pojistnou částkou $S = 1\ Kč$, poté pro pojistný kmen o N smlouvách a pojistné částce $S = 1\,000\ Kč$. Ke každému pojištění jsem uvedla příklad na výpočet jednorázového nettopojistného a rizika pro muže ve věku 30 let a na pojistnou dobu 40 let jak pro kmen s jednou pojistnou smlouvou, tak pro kmen o N smlouvách. Z hlediska rizika vyšlo nejlépe smíšené pojištění, které je ale poněkud drahé. Je to tím, že smíšené riziko je kombinací dvou pojištění, a to pojištění na dožití a dočasného pojištění pro případ smrti, kde riziko snižuje složka na dožití. Nejlevnějším pojištěním pro muže ve věku 30 let a pojistnou dobu 40 let pak je dočasné pojištění pro případ smrti. V případě výpočtu rizika pro celý pojistný kmen o N smlouvách bylo ukázáno, že při rostoucí početnosti pojistného kmene riziko klesá. Jednorázové pojistné vypočtené v podobě střední hodnoty bude stačit tehdy, když pojistný kmen bude obsahovat řádově aspoň 100 000 pojištěných osob.

5 Seznam literatury

[1] Cipra, T., *Pojistná matematika – teorie a praxe*, 1. vydání. Ekopress, Praha, 1999.

[2] Daňhel, J. a kol., *Pojistná teorie*, 1. vydání. Professional Publishing, Praha, 2005.

[3] Kunderová, P., *Úvod do počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*, 1. vydání. Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci, 1997.

[4] Zákon o pojistné smlouvě [online] dostupné z: http://business.center.cz/business/pravo/zakony/pojistna_smlouva/cast1h1.aspx, [citováno 16. 4. 2011].

[5] Úmrtností tabulky [online] dostupné z: http://www.czso.cz/csu/2009edicniplan.nsf/publ/4002-09-2008, [citováno 19. 4. 2011].

6 Seznam příloh

Příloha A (na přiloženém CD)