



# Analýza vyvažovacího mechanismu motoru ČZ500 typ 863 OHC

## Bakalářská práce

*Studijní program:*

*Autor práce:*

*Vedoucí práce:*

B0715A270008 Strojírenství

**Jan Klimeš**

Ing. Jan Škoda, Ph.D.

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti





## Zadání bakalářské práce

# Analýza vyvažovacího mechanismu motoru ČZ500 typ 863 OHC

*Jméno a příjmení:* Jan Klimeš  
*Osobní číslo:* S19000050  
*Studijní program:* B0715A270008 Strojírenství  
*Zadávací katedra:* Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti  
*Akademický rok:* 2020/2021

### Zásady pro vypracování:

1. Seznámení se s principem vyvažování daného motoru ČZ500 typ 863 OHC.
2. Seznámení s dalšími principy vyvažování klikového mechanismu pístového spalovacího motoru.
3. Sestavení analytického matematického modelu dynamiky klikového mechanismu s vyvažovacím ústrojím daného typu motoru.
4. Analýza možností potlačení silových účinků pohybujících se hmot klikového mechanismu daným typem vyvažovacího ústrojí.
5. Určení setrvačných parametrů vyvažovacího ústrojí pro co nejlepší potlačení nežádoucích silových účinků pohyblivých hmot klikového mechanismu.

Rozsah grafických prací:  
Rozsah pracovní zprávy:  
Forma zpracování práce:  
Jazyk práce:

30  
tištěná/elektronická  
Čeština



### Seznam odborné literatury:

JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA. *Mechanika. Sv. 2., Dynamika*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987.  
SLAVÍK, Jaromír, Vladimír STEJSKAL a Vladimír ZEMAN. *Základy dynamiky strojů*. Praha: ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01622-6.  
Joseph R. Harkness. *Methods of Balancing Single Cylinder Engines*. SAE Transactions, 1968, Vol. 77, Section 3: Papers 680436–680591 (1968), pp. 2329-2338  
Feng Yu, Jun Xie, Zhong Ming Xu. The vibration reduction design of single-cylinder engine based on the balance shaft. *Journal of Vibroengineering*. Lithuania: Vibroengineering PROCEDIA, 2019, Vol. 23, p. 18-23, ISSN 2538-8479.

Vedoucí práce: Ing. Jan Škoda, Ph.D.  
Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Datum zadání práce: 23. listopadu 2020  
Předpokládaný termín odevzdání: 23. května 2022

doc. Ing. Jaromír Moravec, Ph.D.  
děkan

L.S.

doc. Ing. Iva Petříková, Ph.D.  
vedoucí katedry

## Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Jsem si vědom toho, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má bakalářská práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědom následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

19. května 2022

Jan Klimeš

## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat především Ing. Janu Škodovi, Ph.D. za odborné vedení mé bakalářské práce, za vstřícný a přátelský přístup.

Také chci poděkovat své přítelkyni a mým rodičům za neutichající podporu a také, že to se mnou přetrpěli, když mi zrovna něco nevycházelo.

## **Anotace**

Bakalářská práce se zabývá stručnou rešerší v oblasti vyvažování klikových mechanismů pístových spalovacích motorů, zejména jednoválcových. Dále se zabývá sestavením matematického modelu dynamiky klikového a vyvažovacího mechanismu motoru z motocyklu ČZ500 typ 863 OHC a vytvoření optimalizačního programu, jenž hledá optimální hmotové charakteristiky závaží vyvažovacího mechanismu, pro co nejlepší potlačení nežádoucích setrvačných silových účinků pohyblivých hmot klikového mechanismu. V závěru práce je pak vypočteno několik optimalizovaných konfigurací hmotových parametrů závaží vyvažovacího mechanismu.

## **Klíčová slova**

vyvažování motoru, klikový mechanismus jednoválcového spalovacího motoru, vyvažovací mechanismus, matematický model dynamiky mechanismu, Matlab

## **Anotation**

This bachelor thesis deals with a research in the balancing crank mechanisms of balancing the crank mechanism of internal combustion piston engines, especially single-cylinder engines. It also deals with the derivation of a mathematical model of the dynamics of the crank and balancing mechanism of the engine from the motorcycle ČZ500 type 863 OHC. Furthermore, on creating an optimization program that finds optimal mass characteristics of balancing mechanism parts, that allow the most adequate suppression of undesirable inertial forces of crank mechanism. At the end of the work, several optimized configurations of mass parameters of balancing mechanism weights are proposed.

## **Keywords**

balancing a reciprocating internal combustion engine, crank mechanism of internal combustion piston engines, balancing mechanism, mathematical model of the dynamics of mechanism, Matlab

# Obsah

Úvod.....	9
Cíl bakalářské práce .....	10
1 Úvod do problematiky vyvažování motorů.....	11
1.1 Dynamika klikového mechanismu.....	13
1.1.1 Vyvážením setrvačných sil u rotujících součástí.....	13
1.1.2 Vyvážení sil od posuvného pohybu.....	15
1.1.3 Vyvažování momentů.....	15
1.1.4 Vyvažování pomocí přidavného mechanismu.....	16
1.1.5 Příklady použití jednotlivých způsobů vyvážení.....	16
1.2 Příklady konstrukčních řešení vyvážení pístových strojů.....	17
1.2.1 Vyvážení pomocí vyvažovacího hřídele .....	17
1.2.2 Vyvážení pomocí vyvažovacího disku .....	18
1.2.3 Vyvážení pomocí přidané páky .....	18
1.2.4 Přínosy vyvážení pomocí přidané páky obecně: .....	19
1.2.5 Nevýhody vyvážení pomocí přidané páky .....	20
1.2.6 Zhodnocení vyvážení pomocí přidané páky .....	20
2 Praktická část.....	21
2.1 Popis reálné soustavy – motoru.....	21
2.1.1 Způsoby popisu .....	21
2.1.2 Použitý druh popisu.....	22
2.2 Kinematika mechanismu.....	23
2.2.1 Geometrie mechanismu a popis jednotlivých součástí.....	23
2.2.2 Kinematické řetězce .....	28
2.2.3 Kinematický řetězec 1 – vyvažovací mechanismus .....	29

2.2.4	Kinematický řetězec 2 – klikový mechanismus .....	36
2.2.5	Popis pohybu těžišť a referenčních bodů těles .....	38
2.3	Silové a momentové účinky v mechanismu .....	52
2.3.1	Těleso 2 – ojnice vyvažovacího mechanismu .....	52
2.3.2	Těleso 3 – vyvažovací hmota .....	55
2.3.3	Těleso 4 – kliková hřídel .....	57
2.3.4	Těleso 5 – ojnice .....	59
2.3.5	Těleso 6 – píst .....	61
2.3.6	Zhodnocení odvozených popisů dynamiky mechanismu .....	62
2.4	Výpočet silových reakcí do rámu .....	63
2.5	Optimalizace vyvažovacího mechanismu .....	65
2.5.1	Výběr vhodných parametrů pro optimalizaci .....	65
2.5.2	Citlivostní analýza .....	65
2.5.3	Hodnotící kritérium .....	65
2.5.4	Optimalizační metody .....	66
2.5.5	Výsledná optimalizovaná konfigurace .....	69
3	Závěr .....	75
	Seznam použité literatury .....	77



# Úvod

Tématem práce je analýza vyvažovacího mechanismu jednoválcového čtyřtaktu motoru OHC sportovně cestovního motocyklu ČZ400/ČZ250 model 863 a dopočet optimálních parametrů závaží. Tento model byl navržen Františkem Pudilem v roce 1986. Model se nikdy sériově nevyráběl. Do současnosti se dochovaly pouze 3 nekompletní prototypy motoru.

V současnosti se může zdát zbytečné, zkoumat motor z minulé doby, který se ani nedostal do výroby. Ovšem koncept tohoto motoru má velký potenciál. Motor má totiž mechanismus, který působí jako protiváha pístu a ojnice a tím razantně snižuje, optimálně až zcela potlačuje vibrace.

Každý, kdo měl jednoválcový motocykl, zná nepříjemnost vibrací. Tyto vibrace, v případě, že je správně vyvážená klika a její součásti, jsou způsobené především setrvačnými silami od pístu a ojnice.

Setrvačné síly členů klikového mechanismu se přenášejí ložisky do karteru. Tyto síly vyvolají pohyb celého stroje se zrychlením, které je úměrné celkové hmotnosti stroje a velikosti setrvačných sil. Zrychlení jednotlivých součástí a s tím i setrvačné síly se v čase mění. Průběh sil a zrychlení si můžeme představit obecně jako periodickou funkci. V čase mění svou velikost, ale i otáčí směr. Výsledkem je, že tyto síly mohou rozkmitat celý motocykl. Typicky vyvolají alespoň nepatrné vibrace, které se nesou rámem a mohou pak posloužit k vybuzení zvukového projevu některé ze součástí motocyklu. Například mohou rozeznít díl kapotáže motocyklu, důsledkem je pak nepříjemný zvukový projev typu: drnčení, bzučení apod.

Koncept tohoto motoru dokáže do značné míry zmenšit vliv setrvačných sil od pístu a ojnice, díky tomu se vyznačuje velmi klidným a tichým chodem. Krom toho má tento koncept vyšší životnost v důsledku nižších silových účinků do rámu a také vyšší efektivitu, s tím i nižší spotřebu.

Pro tyto výjimečné vlastnosti, jsem se rozhodl dané téma zpracovat a vytvořit optimalizační program, který dopočte optimální hmotnostní charakteristiky závaží pro vyvažovací mechanismus.

## Cíl bakalářské práce

Cílem bakalářské práce je seznámit se s vyvažováním obecně, následně provést analýzu stávajícího stavu motoru a sestavit funkční výpočtový model, který na základě zadaných parametrů jednotlivých součástí (rozměry, polohy těžiště, hmotnosti, momenty setrvačnosti), vypočte hlavní reakce od mechanismu motoru do rámu motocyklu. Neboli výslednici reakcí od uložení klikového mechanismu a vyvažovacího mechanismu v rámu.

Dalším z cílů je určení konkrétních parametrů vyvažovacího závaží a následné vykreslení průběhu silových reakcí do rámu.

# 1 Úvod do problematiky vyvažování motorů

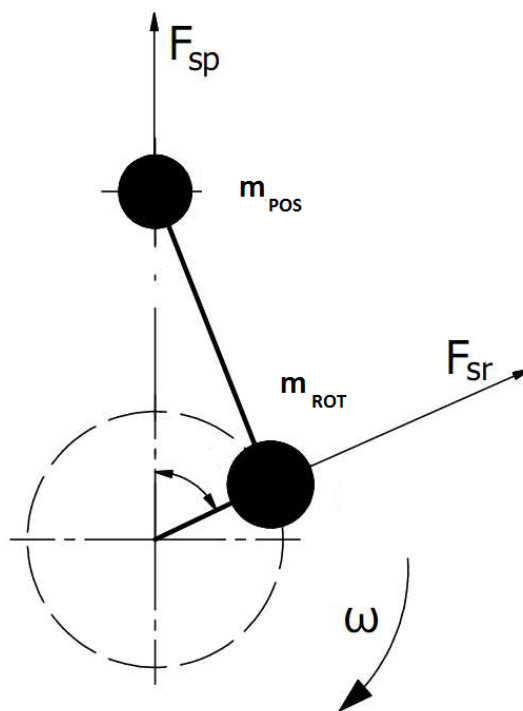
Jak již bylo naznačeno v úvodu, při chodu motoru vznikají síly různé povahy a vlastností. Na klikové ústrojí působí síly od expanze, případně komprese směsi ve spalovacím prostoru válce a setrvačné síly pohyblivých součástí.

Síly od tlaku plynů ve spalovacím prostoru působí kolmo na povrch uzavírající tento prostor. Síla může být tlaková (expanze) nebo tahová (sání). Tyto síly se mění periodicky. Velikost sil je závislá na vstupujícím objemu spalovací směsi do válce. Průtok spalovací směsi je typicky ovládán obsluhou stroje a tím je řízen výkon hnacího ústrojí. Změna průtoku má za následek změnu konkrétního objemu této směsi vstupující do válce na začátku cyklu, s tím tedy i změnu sil od tlaku plynu. Protože tyto síly jsou závislé na provozním režimu a obsluze stroje, tak nelze předem definovat jejich průběh. Proto nemá smysl je nějak vyvažovat. Při vyvažování se tedy budeme zabývat pouze jen setrvačnými účinky klikového ústrojí.

Jak již bylo zmíněno, na klikové ústrojí působí i setrvačné síly, případně silové dvojice, od jednotlivých pohyblivých částí klikového mechanismu.

Tyto síly jsou vyvolány různým druhem pohybu daných částí:

1. Setrvačné síly, silové dvojice od rotace
  - Normálová setrvačná síla – odstředivá síla  $O$ , Tečná setrvačná síla  $T_D$ , Setrvačný moment  $M_D$
2. Setrvačné síly od posuvného pohybu
  - d'Alebertova setrvačná síla,



Obr. 1 - Zobrazení rotujících a posuvných hmot [2]

V případě, že těleso koná obecný rovinný pohyb, lze setrvačné účinky tohoto tělesa vyjádřit jako superpozici setrvačných účinků unášivého posuvného pohybu a relativní rotace. [1 s. 127]

Klikový hřídel koná rotační pohyb. V případě ojnice je to složitější, ta koná obecný rovinný pohyb neboli pohyb složený z relativní rotace a unášivého posuvného pohybu. Píst koná pouze přímočarý posuvný pohyb.

Vzniklé setrvačné silové účinky od jednotlivých částí mechanismu se vzhledem k vzájemným vazbám přenáší mezi jednotlivými členy mechanismu, a nakonec se rozkládají v místech uložení (vazeb k rámu) v podobě reakcí.

Jednotlivé síly, případně výsledné reakce do rámu, lze rozdělit dle průběhu dané síly v závislosti na rotaci kliky. Síla se přiřazuje řád, dle násobku jejich frekvence oproti frekvenci kliky. Tzn. setrvačné síly I. řádu mají shodnou frekvenci s frekvencí kliky. Setrvačné síly II. řádu mají dvojnásobnou frekvenci, než je frekvence kliky. Setrvačné síly n-tého řádu mají n-násobnou frekvenci, než je frekvence kliky. Pro praktické řešení vyvažování má smysl řešit hlavně síly do 2. řádu. Síly vyšších řádů mají typicky nižší amplitudu, a tak menší vliv.

Podobným způsobem lze rozdělit i řády u silových dvojic, např.: silové dvojice – momenty I. řádu neboli moment, který přechází z jednoho lokálního maxima do dalšího lokálního maxima se stejnou periodou jako klika. Tento způsob rozdělení lze také nalézt v literatuře [1].

Vyvažování klikového mechanismu se provádí za účelem odstranění nebo zmenšení vlivu setrvačných silových účinků a tím i snížení výsledné reakce do rámu v němž je mechanismus uložen. Požadované úrovně vyvážení je obecně možné dosáhnout vhodným rozložením klikového hřídele a jednotlivých válců, případně pomocí vyvažovacích hřídelů nebo jiným přídatným tělesem viz kapitola 1.2.

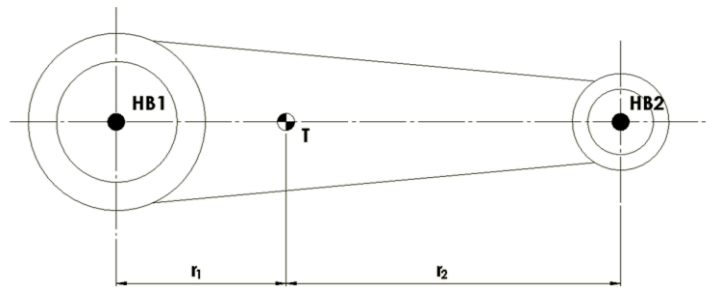
## 1.1 Dynamika klikového mechanismu

Vzhledem ke konstrukčnímu uspořádání klikového mechanismu u pístových motorů, vznikají síly od rotačního a posuvného pohybu, případně kombinace obou pohybů. Tyto síly lze vyvažovat (minimalizovat) různými způsoby popsány v následujících podkapitolách.

### 1.1.1 Vyvážením setrvačných sil u rotujících součástí.

V klikovém mechanismu, bez jakéhokoli dalšího vyvažujícího mechanismu, se takto vyvažují rotující součásti. To je tedy kliková hřídel včetně k ní patřících součástí (zátky mazacích otvorů, klikový čep atp.) a část hmoty ojnice. Hmotnost ojnice se v teorii rozloží na dva hmotné body, jed-

nomu bodu se přiřadí posuvný unášivý pohyb a druhému bodu relativní rotace. Polohy bodů musí být tedy takové, aby jim odpovídali dané typy pohybu. Bod zastupující posuvný unášivý pohyb bude



Obr. 2 Znárodnění polohy hmotných bodů na ojnici

tedy v místě pístního čepu, tj. v místě které se pohybuje pouze pohybem přímočarým posuvným. Bod zastupující rotaci bude v místě, které se pohybuje pouze pohybem rotačním, tj. v místě klikového čepu. Každému hmotnému bodu přísluší určité vlastnosti (např. redukovaná hmotnost bodu), jejich určení bude popsáno v následujících kapitolách.

### Rozklad hmotnosti ojnice

V našem případě hmotný bod zastupující unášivý posuvný pohyb tělesa je bod  $HB2$ , hmotný bod zastupující rotaci kolem osy klikové hřídele je  $HB1$ . Při určení redukovaných hmotností musí být dodrženo:

1. Součet hmotností  $HB$  ( $m_{HB1}, m_{HB2}$ ) musí být roven hmotnosti ojnice.

$$m_{ojnice} = m_{HB1} + m_{HB2}$$

2. Při rozkladu na  $HB$  nesmí být přesunuto těžiště ( $T$ ).

$$m_{HB1} \cdot r_1 = m_{HB2} \cdot r_2$$

- $r_1, r_2$  jsou, jak je patrné z obr. 2, vzdálenosti hmotných bodů ( $HB1, HB2$ ) od těžiště ojnice.

3. Moment setrvačnosti ojnice ( $I_{ojnice}$ ) musí být zachován.

$$m_{HB1} \cdot r_1^2 + m_{HB2} \cdot r_2^2 = I_{ojnice}$$

- Tato podmínka, vzhledem k poměru hmotnosti  $HB1$  a  $HB2$ , lze zanedbat, dopustíme se jen malé chyby.

Z podmínek 1 a 2 vyplývá:

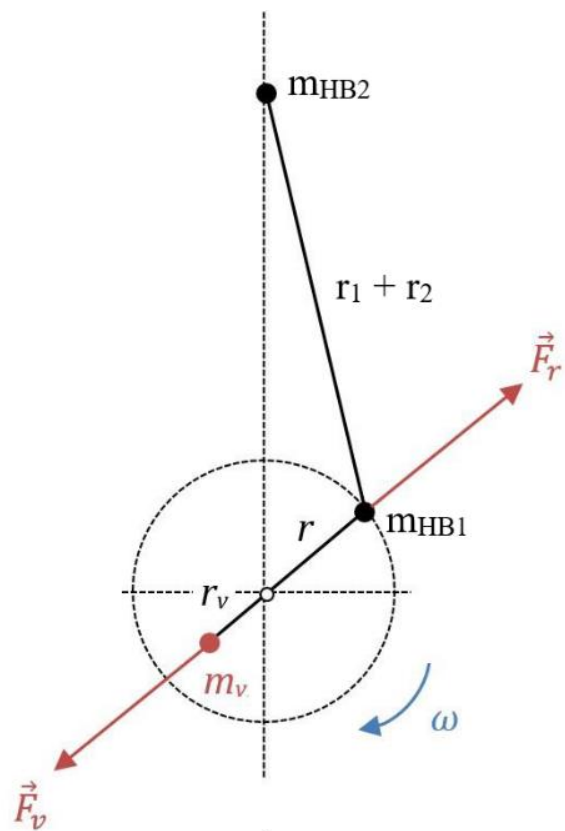
$$m_{HB1} = m_{ojnice} - m_{HB2} = m_{HB2} \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

$$m_{ojnice} = m_{HB2} \cdot \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) \Rightarrow m_{HB2} = \frac{m_{ojnice}}{\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Stejnou myšlenku tohoto odvození lze nalézt i v literaturách [2–4].

Tímto způsobem se tedy určí redukovaná hmotnost rotujících a posuvných částí ojnice. Hmotota  $m_{HB1}$  se přidá na klikový čep a s ním se vyváží. Ve skutečnosti se klika dovažuje s větší hmotností závaží, neboť se neřeší pouze setrvačné síly rotujících hmot, ale i setrvačné síly posuvných hmot, viz následující kapitola.

Na obr. 3 vpravo je vidět vyvažovací těleso o hmotnosti  $m_v$ , které má vyvolat stejně velkou, opačně orientovanou, odstředivou sílu ( $F_v$ ) než vyvolává těleso o hmotnosti  $m_{HB1}$ . Takto se minimalizuje účinek odstředivé síly od  $m_{HB1}$  ( $F_r$ ).



Obr. 3 Znárodnění sil při vyvážení rotačních hmot. (upraveno z [3])

### 1.1.2 Vyvážení sil od posuvného pohybu

V praxi se nejčastěji dovažují pouze síly I. řádu, které jsou dominantní oproti vyšším řádům. Při posuvném pohybu působí dle d'Alembertova principu setrvačná síla, která má opačný smysl než zrychlení a její velikost je dána součinem hmotnosti daného tělesa a velikostí jeho zrychlení.

Tyto d'Alembertovy setrvačné síly se dají částečně vyvážit pomocí klikového hřídele, ale mnohem lépe se dají vyvážit pomocí např. přídatných vyvažovacích hřídelů nebo vyvažovací páky a další.

#### Vyvážení protizávažím na klice

Na obr. 4 je klikový mechanismus. Poznámka 50% u klikové hřídele značí, že vyvažuje 50% z posuvné setrvačné síly vyvolané pístem. Proto je tedy u pístu 100%.

V první fázi, tj. v levé polovině obr. 4 je výsledkem tohoto vzájemného kompenzování sil snížení reakce do rámu od setrvačné síly pístu na polovinu.

V pravé polovině obr. 4, je znázorněna

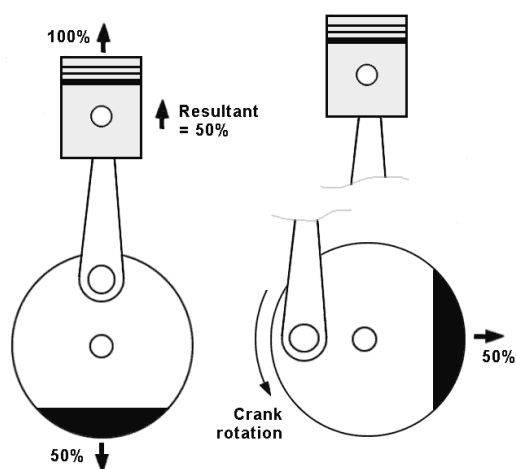
situace, kdy píst nevyvolává téměř žádnou setrvačnou sílu, ale klika vyvolává krom jiného odstředivou sílu. Výsledkem tedy je vyvolání další reakce do rámu. Zmíněné informace lze nalézt také v literatuře [5].

Tímto způsobem lze potlačit silové účinky posuvné hmoty pístu ve směru osy pístu, ale zároveň dojde ke zhoršení reakcí ve směru kolmém k ose pístu. Tento způsob je velmi jednoduchý, ale je to něco za něco. Je potřeba najít přijatelný kompromis.

Další způsoby vyvážení klikového mechanismu jsou blíže popsány v kapitole 3.2.

### 1.1.3 Vyvažování momentů

Těleso, které koná relativní rotační pohyb s nenulovým úhlovým zrychlením, vyvolává setrvačný moment. Tento moment je orientován proti smyslu úhlového zrychlení. V jednoduchém klikovém mechanismu za konstantních otáček klikového hřídele takový



Obr. 4 Znázornění vyvážení posuvných sil pomocí klikového hřídele [5]

setrvačný moment vyvolává například ojnice. V našem zkoumaném mechanismu takový moment vyvolává také vyvažovací hmota a ojnice vyvažovacího mechanismu. Setrvačný momenty od jednotlivých těles a momenty silových dvojic reakcí do rámu způsobují krom jiného nerovnoměrnost výstupního výkonu. Tento účinek se obvykle ale nevyvažuje, spíše se snaží konstrukčním řešením zabránit jeho vzniku.

#### **1.1.4 Vyvažování pomocí přidavného mechanismu**

Krom výše uvedeného způsobu vyvážení se také používají různé mechanismy, které svými silovými a momentovými účinky působí proti setrvačným účinkům od klikového mechanismu, a tak je kompenzují, výsledkem je snížení výsledných reakcí do rámu. Nejčastěji používané vyvažovací mechanismy jsou blíže popsány v kapitole 1.2.

#### **1.1.5 Příklady použití jednotlivých způsobů vyvážení**

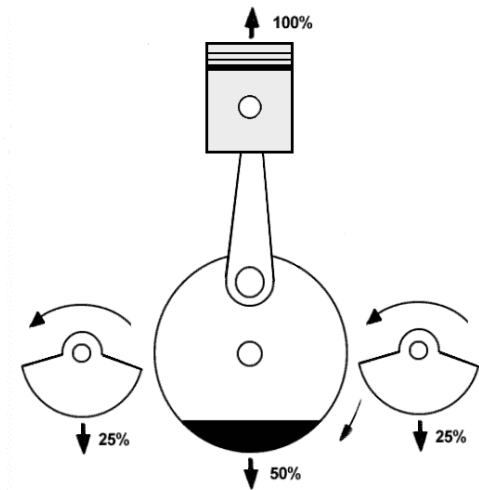
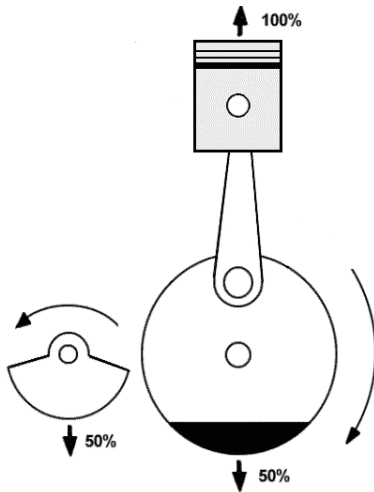
Způsob vyvážení pouze pomocí kliky se používá dodnes. Lze ho najít u většiny maloobjemových motorů, například u sekaček apod. V případě vyvažování pomocí přidavného mechanismu lze jako příklad uvést krom našeho motoru třeba Ducati Supermono nebo BMW F800. [4 s. 15] Nejčastěji se používá u vysokootáčkových motorů s malým počtem válců, ale i u běžných automobilových motorů.



## 1.2 Příklady konstrukčních řešení vyvážení pístových strojů

### 1.2.1 Vyvážení pomocí vyvažovacího hřídele

V současnosti je to nejčastější způsob. Níže na obrázku 6 a 7 je naznačen princip. Procenta znázorňují podíl vyvažovaných posuvných setrvačných sil pomocí dané součásti z celkové vzniklé setrvačné posuvné síly (vzniklá zejména pístem, proto je u něj 100%).



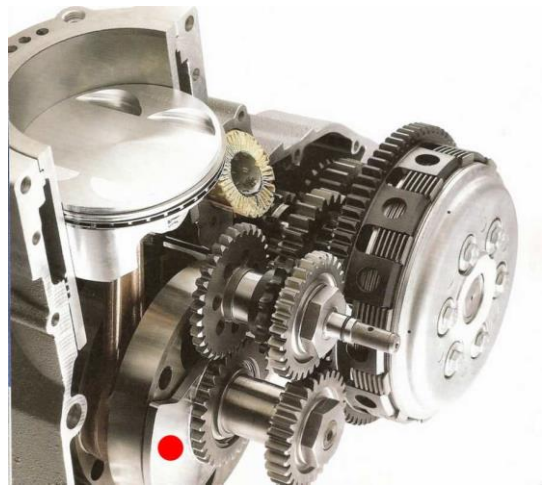
Obr. 5 vyvážení pomocí jednoho vyvažovacího hřídele [4] Obr. 6 vyvážení dvěma vyvažovacími hřídeli [4]

Toto číslo se nazývá také bilanční faktor a lze ho také popsat jako hodnotu udávající minimální výslednou nevyváženou sílu, která má konstantní velikost po celou dobu otáčení klikového hřídele.

Hlavní myšlenkou jednoho vyvažovacího hřídele je, že rozdělíme vyvážení z 50% na kliku a z 50% na vyvažovací hřídel. Při konstantní úhlové rychlosti kliky vznikne konstantní odstředivá síla, která mění směr podle natočení. Vyvažovací hřídel s klikou se točí proti sobě, proto se v určitých polohách účinky od odstředivých sil kliky a hřídele navzájem vyruší a v jiné poloze se zase sečtou. Mechanismus by měl být navržen tak, aby v místech, kde se účinky skládají by měla setrvačná síla od pístu a ojnice působit proti těmto účinkům. V případě jedné vyvažovací hřídele nám vznikne silová dvojice a s ní i moment. Proto je vhodnější uspořádání dle obr. 6 s dvěma vyvažovacími hřídeli. [1, 5, 6]

### 1.2.2 Vyvážení pomocí vyvažovacího disku

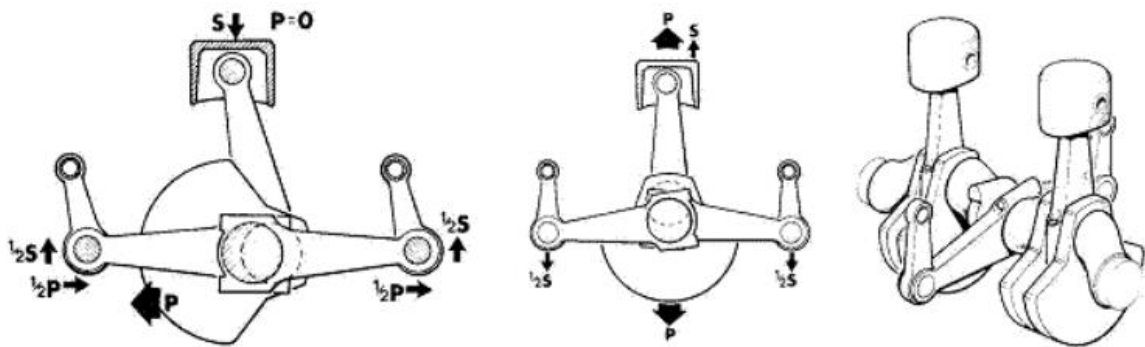
Vpravo na obrázku je řez motorem motocyklu Husaberg. Červenou tečkou je označen vyvažovací disk, který svou funkcí nahrazuje vyvažovací hřídel. Disk je přímo spojený s klikovou hřídelí, což snižuje namáhání karteru a taky rameno silové dvojice, tzn. snižuje vzniklý moment. [1, 5, 6]



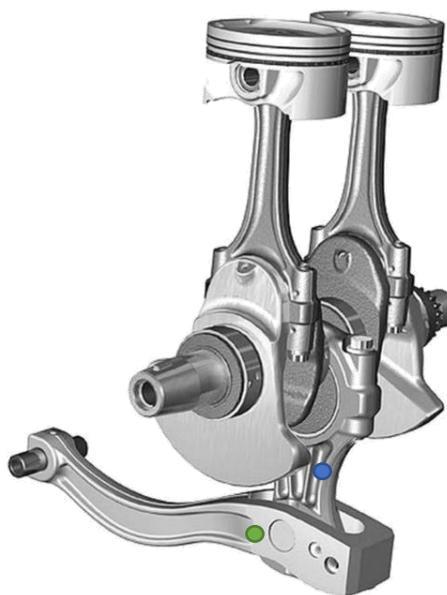
Obr. 7 Řez motorem enduro motocyklu Husaberg [4]

### 1.2.3 Vyvážení pomocí přidané páky

Jedním z příkladů může být způsob zobrazený níže na obrázku z motocyklu Norton Commando. Tento vyvažovací mechanismus je předchůdcem mechanismu, který později začala používat společnost Ducati v motocyklu Supermono a později i BMW F800. [7] Dalším příkladem je již zmíněné BMW F800 [8], viz obr. 9 a Ducati Supermono [5], obr. 10.



Obr. 8 Schéma klikového mechanismu motoru motocyklu Norton Commando Triple 1978 [6]



Obr. 9 Klikový mechanismus s vyvažovacím mechanismem motocyklu BMW F800 [7]

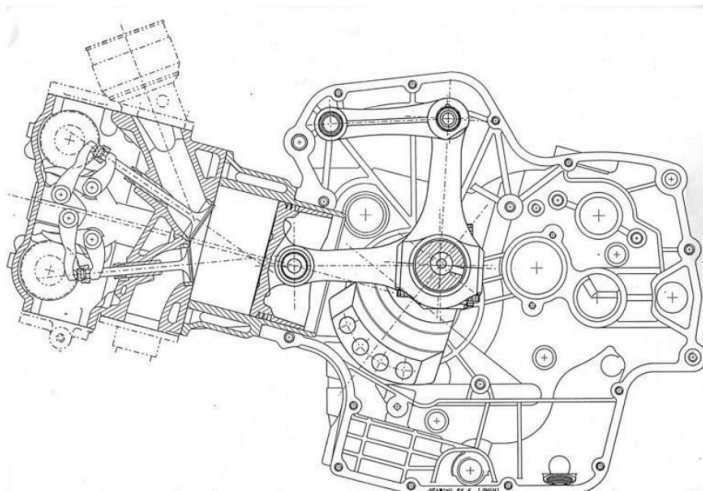
Vyvažovací páka (zelený puntík) koná kývavý pohyb. Pohyb těžiště tohoto tělesa vyvolává krom jiného setrvačnou sílu (d'Alembertovu), která působí proti setrvačným účinkům pístu. Zároveň, jak je zřejmé z obr. 9 příspěvek k potlačení setrvačných sil pístu a kliky má i těleso spojující páku s klikou (modrý puntík), které koná obecný rovinný pohyb. Tento princip vyvažování setrvačných účinků klikového mechanismu, lze nalézt i v literaturách [1, 4–6].

#### 1.2.4 Přínosy vyvážení pomocí přidané páky obecně:

Hlavním přínosem je snížení reakcí do rámu, což má za následek:

- Snížení vibrací celého stroje, s tím i snížení hlukových projevů.
- Snížení namáhání karteru, kotevnic bodů v rámu, ložisek na klíce apod.

Krom již zmíněných obecných přínosů má tento princip vyvážení, proti konstrukčně jednoduššímu vyvážení pomocí kliky, výrazně menší reakce do rámu ve směru kolmém na osu pístu, při současném zachování, obvykle však snížení velikosti výslednice reakcí do rámu ve svislém směru.



Obr. 10 Řez motorem motocyklu Ducati Supermono [4]

### **1.2.5 Nevýhody vyvážení pomocí přidané páky**

- Zvýšení hmotnosti.
- Neumožňuje dostatečně efektivně potlačit síly 2. řádu, stejně jako vyvážení pouze závažím na klice.
- Vzhledem k uložení přídavné páky vzniknou další ztráty třením.

### **1.2.6 Zhodnocení vyvážení pomocí přidané páky**

Návrh popsaného způsobu vyvážení je z předchozích 3 možností o mnoho složitější na výpočet a optimalizaci, ale je zase jednodušší na výrobu. Taky setrvačné síly od pístu a ojnice mají působiště mnohem blíže vyvažujícím silám, než tomu bylo u vyvažovací hřídele. Vyvážení pákou může zároveň snížit vliv zmíněných setrvačných sil o dost efektivněji.

## 2 Praktická část

### 2.1 Popis reálné soustavy – motoru

Pro optimalizaci potřebujeme znát chování našeho mechanismu při daných okolnostech. Popis tohoto chování lze utvořit buďto na základě sledování a měření fyzického mechanismu nebo lze vytvořit matematický model a popis získat pomocí výpočtů bez fyzického modelu.

#### 2.1.1 Způsoby popisu

- **Experimentální způsob popisu (měření a rozbor naměřených dat)**

Tato analýza spočívá ve spuštění systému a následném změření jeho chování za daných podmínek. Například: Zkoušený vzorek, motor, se roztočí na požadované otáčky a změří se jeho chování, konkrétně časový průběh sil od motoru. Výstupem z takovýchto měření obvykle bývá soubor hodnot, neboť zařízení nejčastěji měří diskrétně s určitou vzorkovací frekvencí. Tento soubor hodnot se musí vyhodnotit, například vytvořit grafický výstup průběhu a určit chybu měření a nejistoty, případně některé naměřené hodnoty vyloučit.

Tento způsob je obvykle jednodušší a pracuje s reálnou sestavu, takže nedochází k chybám plynoucích ze zjednodušení matematického modelu, chybám překreslení apod. Takové měření může být časově méně náročné než sestavení matematického modelu. Na druhou stranu měření má chyby a nejistoty dané měřicím zařízením a postupem měření. V případě změny jakékoliv součásti motoru, se musí celé měření provést znova. Dále úpravy součástí pro potřebu optimalizace jsou časově i finančně nákladnější oproti změnám v matematickém modelu a dost často jsou to změny nevratné.

- **Analytický způsob popisu (Matematicko-fyzikální analýza)**

Zde se systém rozloží na jednotlivé části a k nim se získá popis, popis celku se získá sloučením dílčích popisů. V jednotlivých krocích jde pak tedy o rozložení sestavy na jednotlivé komponenty, popsání jejich pohybu z pohledu kinematiky, určení jejich dynamických účinků na systém, superpozice těchto účinků a sestavení výsledné rovnice pro hledanou proměnou.

Tento způsob je sice náročnější, ale po sestavení finálního matematického modelu, lze velmi rychle získat výsledky pro různá uspořádání systému a okrajové podmínky. Odchylka výsledku od skutečnosti vzniká na základě zjednodušení matematického modelu nebo zjednodušení popisu jednotlivých součástí. Udělat zcela přesný popis je sice možné, ale je to nesmírně náročné. A proto se model zjednodušuje tak, aby byl dostatečně přesný a zároveň co nejméně náročný, složitý. Více viz [9].

### **2.1.2 Použitý druh popisu**

Pro popis chování zkoumaného mechanismu je použit analytický způsob. V tomto případě se za účelem určení zejména reakcí do rámu (karteru) pro ustálenou konstantní úhlovou rychlost kliky řeší tzv. první úloha dynamiky.

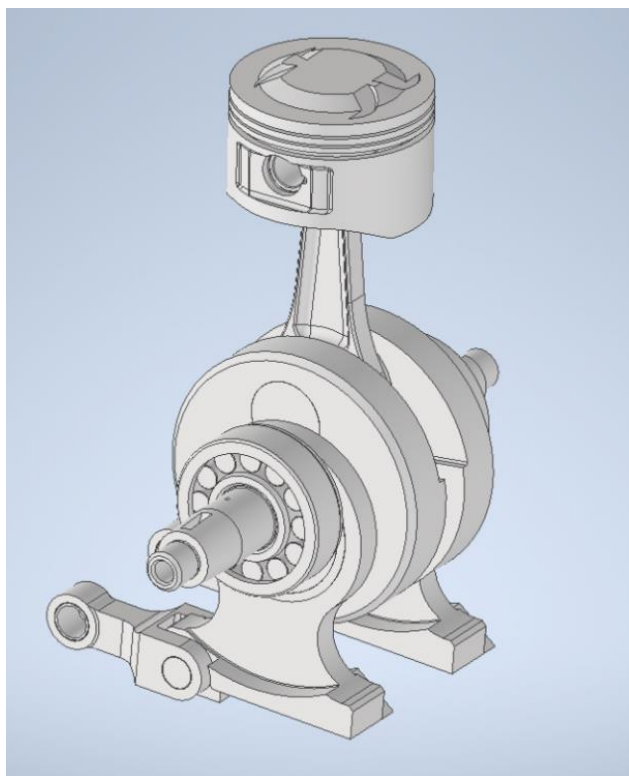
Nejprve se popíše kinematika jednotlivých těles. Dále se rozloží pohyby jednotlivých těles na posuvný a na rotaci. Určí se setrvačné účinky od těchto pohybů. Dle zákona akce a reakce se popíší silové interakce mezi tělesy v kinematických vazbách. Vzniklá soustava rovnic umožní výpočet časového průběhu sil (reakce, dynamické síly). Nakonec se provede optimalizace pomocí tří parametrů (hmotnost a souřadnice těžiště vyvažovací hmoty).

## 2.2 Kinematika mechanismu

V této kapitole je popsáno odvození rovnic pro popis kinematiky, které jsou nezbytné pro výpočet dynamických účinků jednotlivých těles.

Za účelem eliminace chyb, a tam kde to je možné, se provede výpočet (sestavení kinematických závislostí) dvěma způsoby. Pro ověření správnosti kinematiky se vykreslí průběhy jednotlivých zkoumaných veličin do grafu a ověří se zdali se chovají v souladu s předpoklady. Vybrané situace se ověří pomocí modelu v CAD programu. Pro určení jednotlivých rychlostí a zrychlení bude výpočet proveden dvěma způsoby, a to pomocí převodových funkcí anebo pomocí časové derivace polohových vektorů.

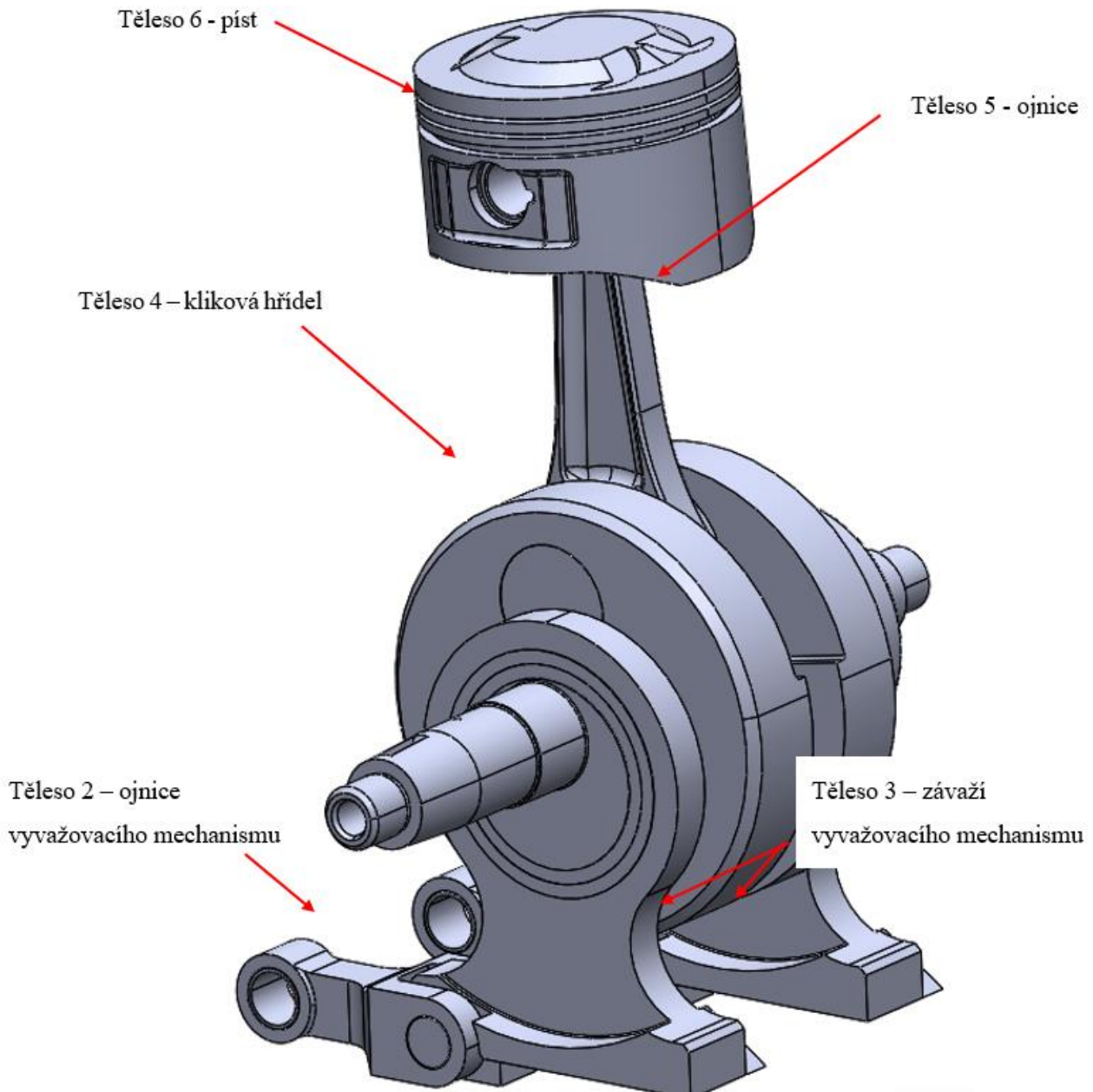
Na obr. 11 je vidět model klikového mechanismu s vyvažovacím mechanismem v programu Autodesk Inventor 2022



Obr. 11 Model vyvažovacího mechanismu v programu Autodesk Inventor 2022

### 2.2.1 Geometrie mechanismu a popis jednotlivých součástí

Na obr. 12 je náš zkoumaný mechanismus. Jak je patrné, celkový mechanismus se skládá z klikového a vyvažovacího mechanismu. Jedná se o vyvažování na způsob vyvažovací páky, jak bylo popsáno v kapitolách 1.2.3 až 1.2.6.



Obr. 12 Popis jednotlivých součástí zkoumaného mechanismu

- Těleso 2 je ojnice vyvažovacího mechanismu, jejím hlavním smyslem je spojení tělesa 3 s rámem a tím vytvoření potřebné kinematiky, také částečně přispívá k vyvážení.
- Těleso 3 je závaží vyvažovacího mechanismu. Toto závaží má hlavní podíl na vyvážení setrvačné síly posuvné od pístu a ojnice. Vyvážením se zde myslí vytvoření síly opačně orientované proti síle vyvažované.



- Těleso 4 je kliková hřídel. Spojuje závaží vyvažovacího mechanismu a ojnici. Má za úkol zejména přenášet silové účinky připojených těles.
- Těleso 5 je ojnice. Spojuje píst a klikovou hřídel. Zejména přenáší silové účinky, vedlejším produktem jsou setrvačné silové a momentové účinky.
- Těleso 6 je píst. Zejména přenáší tlakovou sílu, od tlaku spalovací směsi, na pístní čep a přes něj na ojnici.

Na obr. 13 je mechanismus znázorněn schematicky. Čísly jsou označena jednotlivá tělesa, číslování viz výše. Pomocí velkých písmen (A až F) jsou označeny kinematické vazby. Písmena A, D značí pevnou kloubovou podporu, která v teorii zastupuje místa uložení mechanismu do rámu. Písmena B, C, E, F značí kloubovou vazbu mezi dvěma přiléhajícími tělesy. Tzn. bod B značí kloubovou vazbu, spojující tělesa 2 a 3.

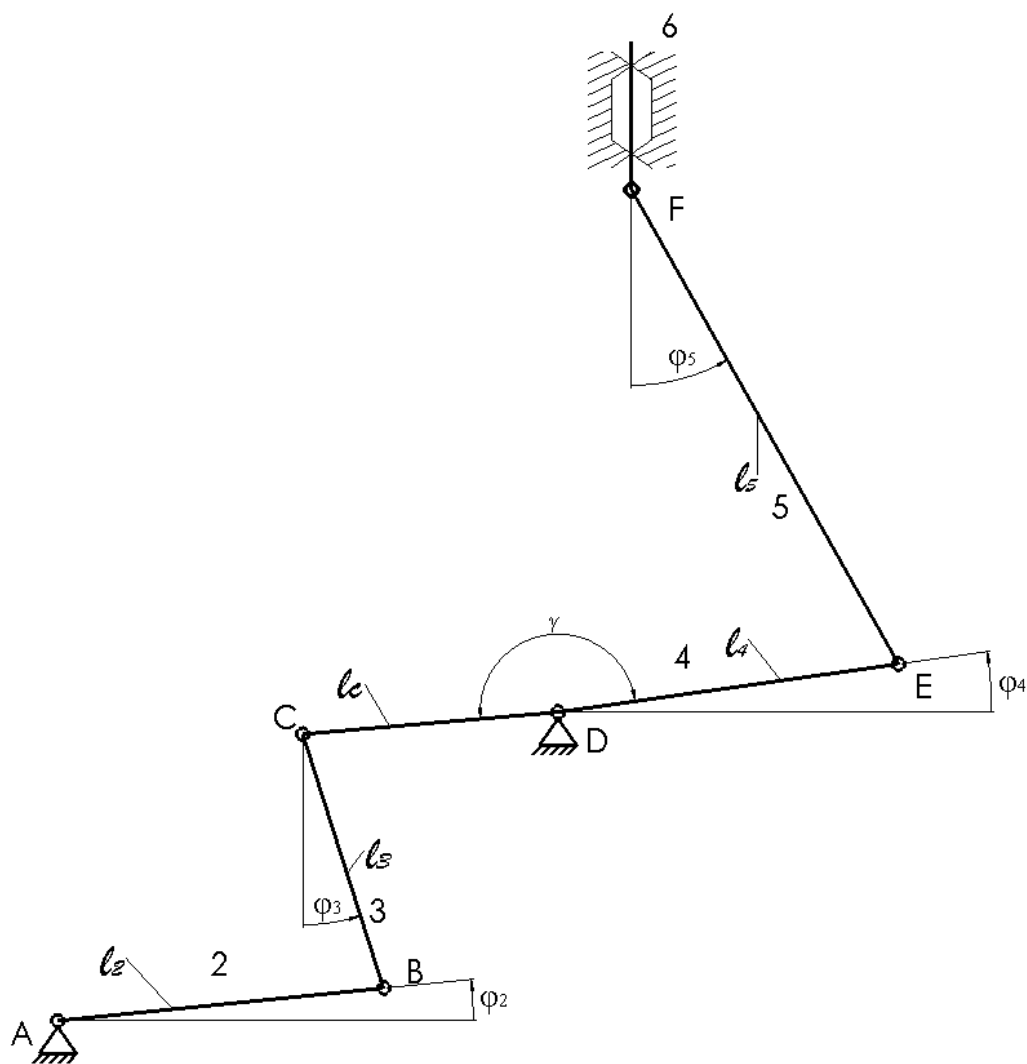
Malým písmenem  $l$  s dolním číselným indexem, se u těles 2, 3, 5, 6 značí přímá vzdálenost kloubových vazeb daného tělesa. U tělesa 4 (kliková hřídel) je pomocí  $l_4$  označena přímá vzdálenost mezi body D, E. Pomocí  $l_C$  je označena přímá vzdálenost bodů C, D.

Matematicky lze vyjádřit:

$$\begin{aligned} l_2 &= |AB| \\ l_3 &= |BC| \\ l_C &= |CD| \\ l_4 &= |DE| \\ l_5 &= |EF| \end{aligned}$$

Pomocí písmena řecké abecedy  $\varphi$  jsou označeny úhly popisující současné natočení dané součásti viz obr. 13. Zkoumaný mechanismus má 1 stupeň volnosti, takže lze popsat pomocí jedné nezávisle proměnné. Nezávisle proměnná zde bude úhel  $\varphi_4$ , bude to výhodné pro analytické řešení nejen kinematiky.

Proměnnou  $\gamma$  je označen úhel mezi  $l_4$  a  $l_C$ . Tento úhel je po změření modelu, roven přesně  $180^\circ$ , proto s ním už dále nebude počítáno a úsek  $l_4$  a  $l_C$  bude brán jako přímý.



Obr. 13 Schéma zkoumaného klikového mechanismu

### 2.2.1.1 Globální a lokální systémy souřadnic, polohy těžišť

Níže (obr. 14) je předešlé schéma (obr. 13) doplněno o osy souřadnic (x, y) pro jednotlivé lokální souřadné systémy. Dále je zde znázorněn globální systém souřadnic ( $x_G, y_G$ ).

Lokální systémy souřadnic mají zejména smysl pro zakótování těžišť jednotlivých těles. Body znázorňující těžiště jsou označeny velkým písmenem T a číselným indexem, odpovídajícím číslování těles. Níže uvedené souřadnice se týkají lokálních systémů.

$$\text{Těleso 2} - T_2 = [XT2, YT2]$$

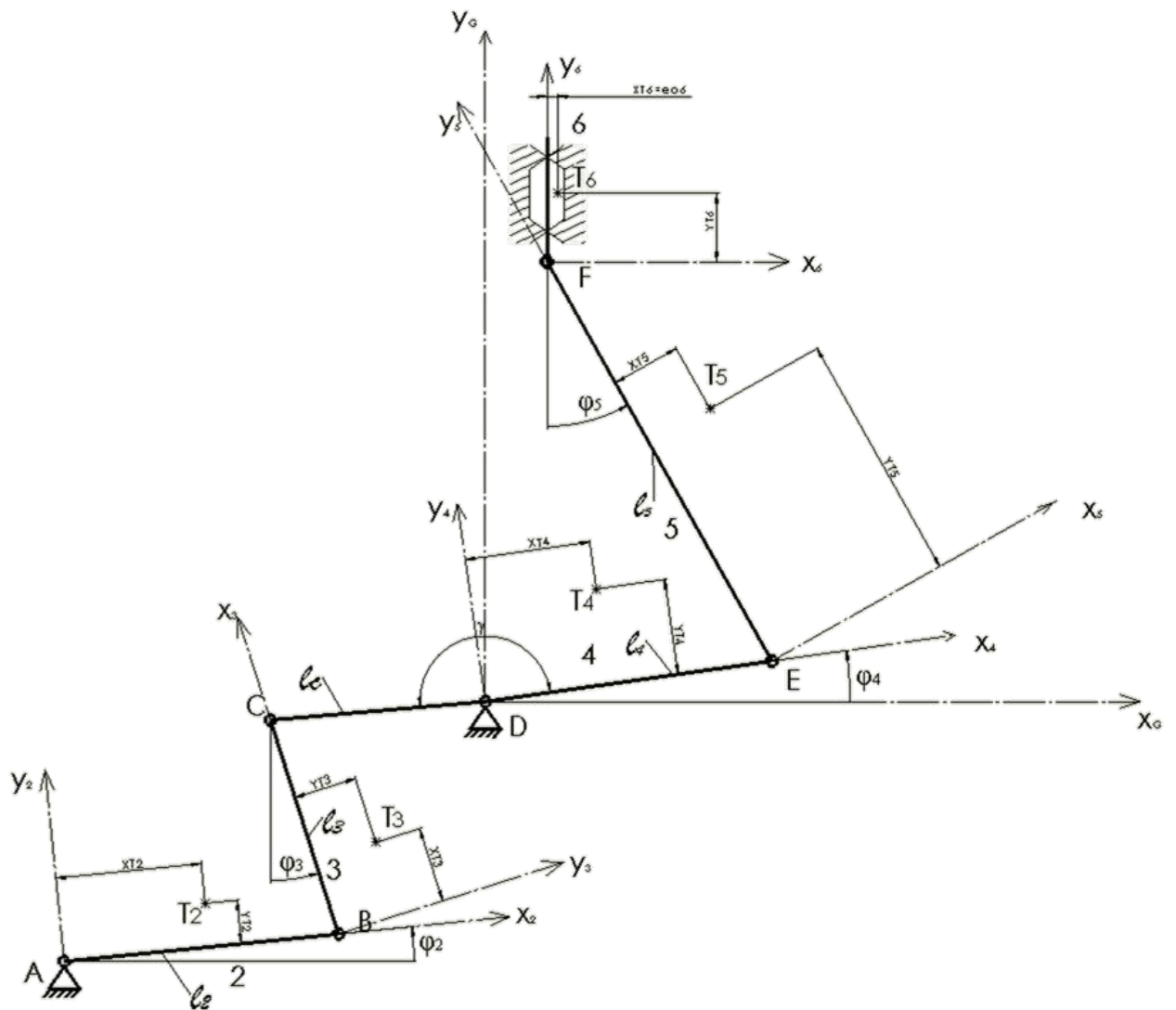
$$\text{Těleso 3} - T_3 = [XT3, YT3]$$

$$\text{Těleso 4} - T_4 = [XT4, YT4]$$

$$\text{Těleso 5} - T_5 = [XT5, YT5]$$

$$\text{Těleso 6} - T_6 = [XT6, YT6]$$

Schéma mechanismu nemusí být přesné, jde jen o zakreslení kót a odvození vztahů. Proto poloha těžišť nemusí odpovídat skutečnosti. V odvození dynamických rovnic byla souřadnice  $XT_6$  nahrazena záporně vzatou proměnou  $e_{06}$ , tzn.  $XT_6 = -e_{06}$ .

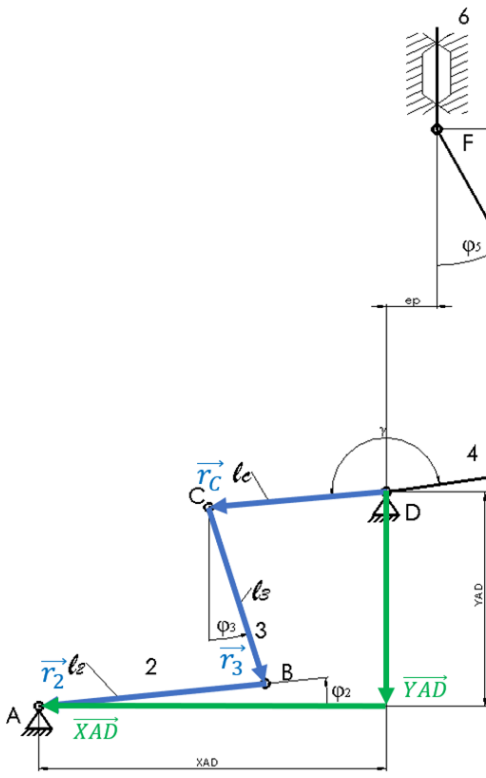


Obr. 14 Zakreslení lokálních systémů souřadnic a poloh těžišť

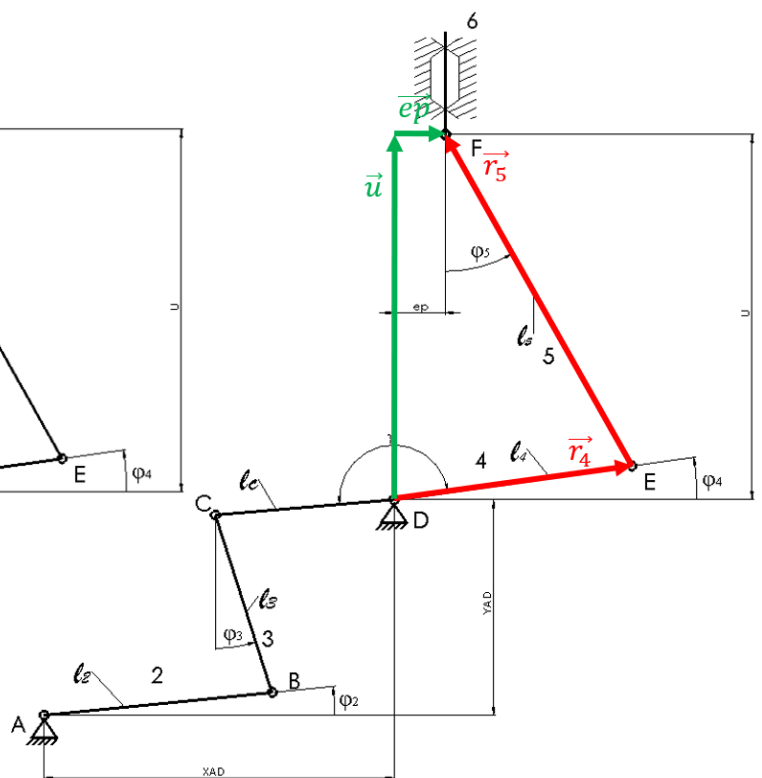
## 2.2.2 Kinematické řetězce

Podle obr. 13 zavedeme polohové vektory jednotlivých počátků souřadných systémů a bodu D, tak utvoříme kinematické řetězce, z nich následně vyjádříme neznámé v závislosti na  $\varphi_4$ .

Ve schématech mechanismu na obr. 16 a obr. 15, jsou zakótované známé rozměry ( $ep, XAD, YAD$ ) a pomocná proměnná ( $u$ ). Dále na obr. 16 je barevně zakreslený kinematický řetězec 1 a na obr. 15 je barevně zakreslený kinematický řetězec 2.



Obr. 16 Kinematický řetězec 1



Obr. 15 Kinematický řetězec 2

### 2.2.3 Kinematický řetězec 1 – vyvažovací mechanismus

Kinematický řetězec 1 (čtyřkloubový mechanismus) se skládá z vektorů:

$$\begin{aligned}\vec{r}_2 &= l_2 \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2) \end{bmatrix} \\ \vec{r}_3 &= l_3 \cdot \begin{bmatrix} +\sin(\varphi_3) \\ -\cos(\varphi_3) \end{bmatrix} \\ \vec{r}_c &= l_c \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_4) \\ -\sin(\varphi_4) \end{bmatrix} \\ \overline{XAD} &= \begin{bmatrix} -xAD \\ 0 \end{bmatrix} \\ \overline{YAD} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -yAD \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dle obr. 16 musí platit:

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_c = \overline{XAD} + \overline{YAD}$$

$$l_2 \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2) \end{bmatrix} + l_3 \cdot \begin{bmatrix} +\sin(\varphi_3) \\ -\cos(\varphi_3) \end{bmatrix} + l_c \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_4) \\ -\sin(\varphi_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -xAD \\ -yAD \end{bmatrix} \quad (1)$$

Po rozepsání na složky (x a y), dostáváme rovnici:

$$X: \quad l_2 \cdot \cos(\varphi_2) - l_3 \cdot \sin(\varphi_3) + l_c \cdot \cos(\varphi_4) - xAD = 0 \quad (2)$$

$$Y: \quad l_2 \cdot \sin(\varphi_2) + l_3 \cdot \cos(\varphi_3) + l_c \cdot \sin(\varphi_4) - yAD = 0 \quad (3)$$

V rovnicích (2) a (3) máme celkem 3 neznámé. Jak již zaznělo, bude vhodné ostatní neznámé popsat v závislosti na úhlu natočení kliky  $\varphi_4$ . Závislosti  $\varphi_2(\varphi_4)$  a  $\varphi_3(\varphi_4)$  vyjádříme z rovnic (2) a (3).

#### Řešení pro $\varphi_2$

Rovnice (2) a (3) nyní budeme řešit nejprve pro  $\varphi_2$  a to tak, že matematickými úpravami vyloučíme proměnnou  $\varphi_3$ .

$$(l_2 \cdot \cos(\varphi_2) - xAD + l_c \cdot \cos(\varphi_4))^2 = l_3^2 \cdot \sin^2(\varphi_3) \quad (4)$$

$$(l_2 \cdot \sin(\varphi_2) - yAD + l_c \cdot \sin(\varphi_4))^2 = l_3^2 \cdot \cos^2(\varphi_3) \quad (5)$$

Následně rovnice (4) a (5) sečteme, upravíme a získáme:

$$\begin{aligned}l_3^2 - l_2^2 - l_c^2 - xAD^2 - yAD^2 + 2 \cdot l_2 \cdot xAD \cdot \cos(\varphi_2) + 2 \cdot l_c \cdot xAD \cdot \\ \cos(\varphi_4) + 2 \cdot l_2 \cdot yAD \cdot \sin(\varphi_2) + 2 \cdot l_c \cdot yAD \cdot \sin(\varphi_4) - 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) \cdot \\ \cos(\varphi_2) - 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \sin(\varphi_4) \cdot \sin(\varphi_2) = 0\end{aligned} \quad (6)$$

To lze upravit:

$$\cos(\varphi_2) \cdot (2 \cdot l_2 \cdot x_{AD} - 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4)) + \sin(\varphi_2) \cdot (2 \cdot l_2 \cdot y_{AD} - 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \sin(\varphi_4)) + (l_3^2 - l_2^2 - l_c^2 - x_{AD}^2 - y_{AD}^2 + 2 \cdot l_c \cdot x_{AD} \cdot \cos(\varphi_4) + 2 \cdot l_c \cdot y_{AD} \cdot \sin(\varphi_4)) = 0 \quad (7)$$

Pomocí substituce nahradíme členy v závorkách:

$$A = 2 \cdot l_2 \cdot x_{AD} - 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) \quad (8)$$

$$B = 2 \cdot l_2 \cdot y_{AD} - 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \sin(\varphi_4) \quad (9)$$

$$C = l_3^2 - l_2^2 - l_c^2 - x_{AD}^2 - y_{AD}^2 + 2 \cdot l_c \cdot x_{AD} \cdot \cos(\varphi_4) + 2 \cdot l_c \cdot y_{AD} \cdot \sin(\varphi_4) \quad (10)$$

$$A \cdot \cos(\varphi_2) + B \cdot \sin(\varphi_2) + C = 0 \quad (11)$$

Rovnice (11) je tzv. úplná trigonometrická rovnice. Rovnice lze řešit pomocí vztahu uvedeného níže, odvození lze nalézt například v [10]. Naznačme řešení:

$$A \cdot \cos(\varphi_2) + B \cdot \sin(\varphi_2) + C = 0 \quad (12)$$

$$A \cdot \cos(\varphi_2) = -B \cdot \sin(\varphi_2) - C \quad (13)$$

$$A^2 \cdot \cos^2(\varphi_2) = (-B \cdot \sin(\varphi_2) - C)^2 \quad (14)$$

$$A^2 \cdot (1 - \sin^2(\varphi_2)) = C^2 + 2BC\sin(\varphi_2) + B^2\sin^2(\varphi_2) \quad (15)$$

$$-(A^2 + B^2) \cdot \sin^2(\varphi_2) - 2BC\sin(\varphi_2) - C^2 + A^2 = 0 \quad (16)$$

$$\sin(\varphi_2) = \frac{-BC \pm A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \quad (17)$$

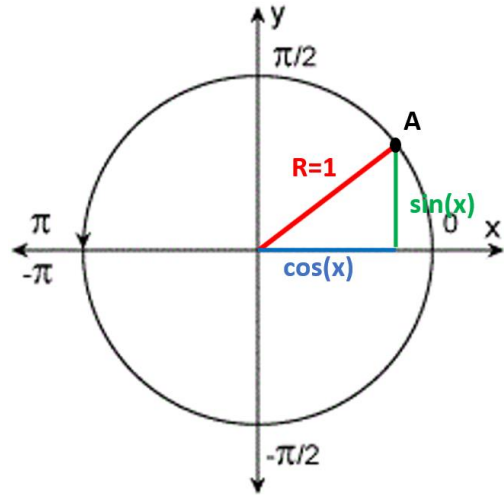
Obdobný postup zopakujeme pro  $\cos(\varphi_2)$  – eliminujeme  $\sin(\varphi_2)$ , získáme kvadratickou rovnici a vyřešíme ji, dostáváme:

$$\cos(\varphi_2) = \frac{-AC \pm B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \quad (18)$$

Přestože vztahy (17) a (18) jsou oba samy osobě řešením rovnice (11), můžeme dalšími úpravami získat další variantu řešení, která může být výhodnější.

$$\varphi_2 = \operatorname{atan} \left( \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} \right) = \operatorname{atan} \left( \frac{\frac{-BC \pm A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}}{\frac{-AC \pm B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}} \right)$$

Samotná funkce tangens, resp. arkus tangens, je pro nás, při řešení kinematiky v programu (konkrétně Matlab), nevýhodná. Proto použijeme funkci atan2. Tato funkce je také inverzní funkcí k tangentu. Jejím argumentem jsou souřadnice bodu na jednotkové kružnici a díky tomu nemůže dojít k dělení nulou, ale hlavně funguje na všech kvadrantech. Běžný atan má obor hodnot  $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ , tím může dojít k chybě. Funkce atan2 má obor hodnot  $(-\pi, +\pi)$ . U funkce atan2 si můžeme představit, že program si zakreslí polohu bodu (např. bod A), z počátku souřadnic k němu vede úsečku a pak určí pod jakým úhlem jde úsečka vůči horizontále. Náhorný příklad je na obr. 17. Tím lze získat výsledek i v 2. a 3. kvadrantu. Navíc funkce atan2 v Matlabu má dobře ošetřeny případy, kdy by docházelo k dělení nulou.



Obr. 17 popis funkce atan2

Výsledný vztah je potom:

$$\varphi_2 = \text{atan2} \left( \frac{-BC \pm A\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2}, \frac{-AC \pm B\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2} \right) \quad (19)$$

### Řešení pro $\varphi_3$

Řešení provedeme podobně jako v případě  $\varphi_2$ . Nejprve se eliminuje úhel  $\varphi_2$ , následně se rovnice sečtou. Pak provedeme substituci a dosadíme do vzorce (19).

$$(l_3 \cdot \sin(\varphi_3) - xAD + l_c \cdot \cos(\varphi_4))^2 = l_2^2 \cdot \cos(\varphi_2)^2 \quad (20)$$

$$(l_3 \cdot \cos(\varphi_3) - yAD + l_c \cdot \sin(\varphi_4))^2 = l_2^2 \cdot \sin(\varphi_2)^2 \quad (21)$$

$$l_2^2 + 2 \cdot l_c \cdot xAD \cdot \cos(\varphi_4) + 2 \cdot l_3 \cdot yAD \cdot \cos(\varphi_3) + 2 \cdot l_c \cdot yAD \cdot \sin(\varphi_4) + 2 \cdot l_3 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) \cdot \sin(\varphi_3) - l_3^2 - 2 \cdot \cos(\varphi_3) \cdot \sin(\varphi_4) \cdot l_3 \cdot l_c - 2 \cdot \sin(\varphi_3) \cdot l_3 \cdot xAD - l_c^2 - xAD^2 - yAD^2 = 0 \quad (22)$$

$$\cos(\varphi_3) \cdot (2 \cdot l_3 \cdot yAD - 2 \cdot \sin(\varphi_4) \cdot l_3 \cdot l_c) + \sin(\varphi_3) \cdot (2 \cdot l_3 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) - 2 \cdot l_3 \cdot xAD) + (l_2^2 + 2 \cdot l_c \cdot xAD \cdot \cos(\varphi_4) + 2 \cdot l_c \cdot yAD \cdot \sin(\varphi_4) - l_3^2 - l_c^2 - xAD^2 - yAD^2) = 0 \quad (23)$$

Potom za  $A$ ,  $B$ ,  $C$  budeme do vzorce (27) dosazovat:

$$A = 2 \cdot l_3 \cdot y_{AD} - 2 \cdot \sin(\varphi_4) \cdot l_3 \cdot l_c \quad (24)$$

$$B = 2 \cdot l_3 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) - 2 \cdot l_3 \cdot x_{AD} \quad (25)$$

$$C = l_2^2 + 2 \cdot l_c \cdot x_{AD} \cdot \cos(\varphi_4) + 2 \cdot l_c \cdot y_{AD} \cdot \sin(\varphi_4) - l_3^2 - l_c^2 - x_{AD}^2 - y_{AD}^2 \quad (26)$$

Výsledný vztah je potom, (za  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , dosazujeme z 24-26):

$$\varphi_3 = \text{atan2} \left( \frac{-BC \pm A\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2}, \frac{-AC \pm B\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2} \right) \quad (27)$$

### 2.2.3.1 Výběr správné konfigurace mechanismu

Jak je patrné z odvození na předešlé straně, případně z výsledného vzorce (19), rovnice (11) má celkem čtyři různá řešení. Tato řešení odpovídají čtyřem různým geometrickým konfiguracím čtyřkloubového mechanismu. Správnou variantu lze odhalit například pomocí vykreslení průběhů jednotlivých úhlů a jejich následnou diskuzí. Posledním krokem je pak pro několik diskrétních hodnot mechanismus sestrojít v CAD programu a ověřit.

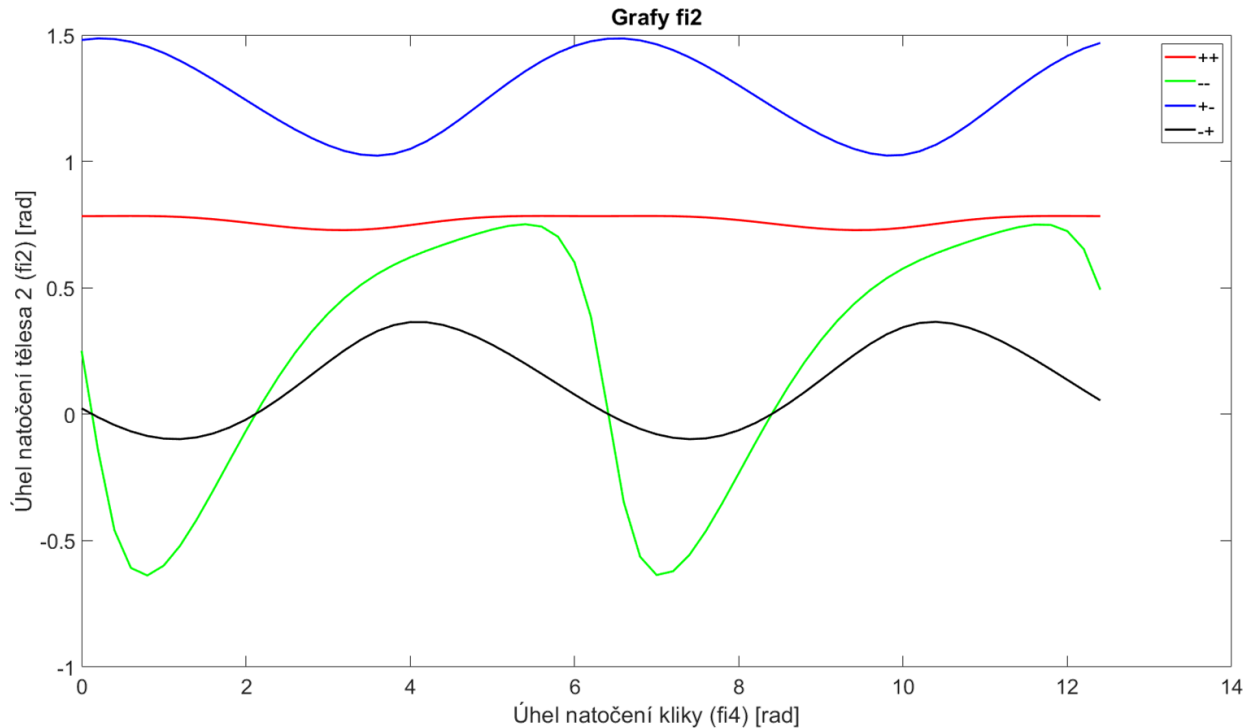
#### Řešení pro $\varphi_2$

Z pohledu vzorce jsou možné konfigurace:

- $\varphi_2 = \text{atan2} \left( \frac{-BC + A\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2}, \frac{-AC + B\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2} \right)$  V obou argumentech je vybráno z možností + a -, ta kladná. Proto tuto možnost budu dále označovat jako ++.
- $\varphi_2 = \text{atan2} \left( \frac{-BC + A\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2}, \frac{-AC - B\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2} \right)$  Označím jako +-.
- $\varphi_2 = \text{atan2} \left( \frac{-BC - A\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2}, \frac{-AC + B\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2} \right)$  Označím jako --.
- $\varphi_2 = \text{atan2} \left( \frac{-BC - A\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2}, \frac{-AC - B\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2} \right)$  Označím jako - -.



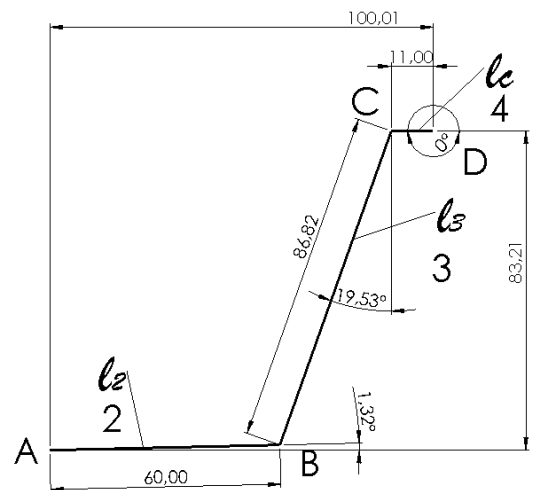
Níže na obr. 18 jsou vykreslené jednotlivé průběhy úhlu  $\varphi_2$  v závislosti na natočení kliky, tj. na úhlu  $\varphi_4$ . Úhly jsou v obloukové míře.



Obr. 18 Vykreslení úhlu  $\varphi_2$  pro různé konfigurace mechanismu

Vzhledem k pracovnímu prostoru vyhrazenému pro mechanismus, lze na první pohled některá řešení vyloučit. Správné řešení lze s jistotou určit dle rozkreslení geometrie ve 2D se správnými rozměry a polohami bodů A, D. Na obr. 19 je zobrazený mechanismus se správnými rozměry a polohami bodů A, D. Mechanismus je zobrazen v poloze, kdy je  $\varphi_4 = 0^\circ$ . Z toho je zřejmé, že správná varianta z grafu na obr. 18 může být pouze ta vykreslená černě (-+). Následně se mechanismus nastavil do různých konfigurací, od  $\varphi_4 = 0^\circ$  až do celé otáčky a porovnávaly se hodnoty mechanismu ve 2D s hodnotami v grafu.

Z kontroly vyplynulo, že graf odpovídá skutečnosti.



Obr. 19 Schéma mechanismu podle skutečných rozměrů

Správným řešením je tedy rovnice:

$$\varphi_2 = \operatorname{atan2} \left( \frac{-BC - A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}, \frac{-AC + B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \right) \quad (28)$$

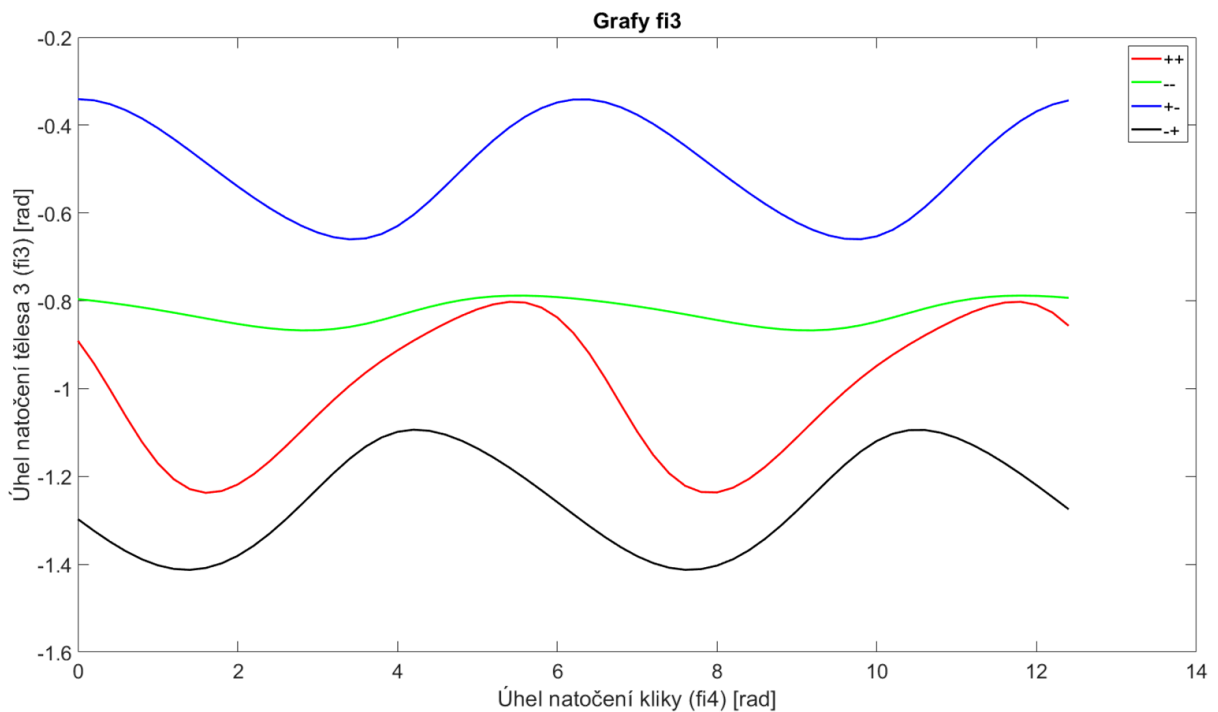
### Řešení pro $\varphi_3$

Stejně jako při řešení úhlu  $\varphi_2$  jsou i zde 4 možné varianty řešení.

Z pohledu vzorce jsou možné tyto konfigurace:

- $\varphi_3 = \operatorname{atan2} \left( \frac{-BC + A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}, \frac{-AC + B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \right)$  Označím jako ++
- $\varphi_3 = \operatorname{atan2} \left( \frac{-BC + A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}, \frac{-AC - B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \right)$  Označím jako +-
- $\varphi_3 = \operatorname{atan2} \left( \frac{-BC - A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}, \frac{-AC + B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \right)$  Označím jako -+
- $\varphi_3 = \operatorname{atan2} \left( \frac{-BC - A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}, \frac{-AC - B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \right)$  Označím jako --

Na obr. 20 jsou vykreslené jednotlivé průběhy úhlu  $\varphi_3$  v závislosti na natočení kliky, tj. na úhlu  $\varphi_4$ . Úhly jsou v obloukové míře.



Obr. 20 Vykreslení úhlu  $\varphi_3$  pro různé konfigurace mechanismu

Z obr. 19 na předešlé straně, kde je zobrazené schéma mechanismu, vyplývá, že správná varianta řešení může být pouze ta, která je na obr. 20 vykreslená modře. Stejným postupem jak v předešlé kapitole, se ověřilo zvolené řešení (+-) a lze říci, že níže uvedená rovnice správně popisuje průběh úhlu  $\varphi_3$ .

$$\varphi_3 = \operatorname{atan2} \left( \frac{-BC + A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}, \frac{-AC - B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \right) \quad (29)$$

Nyní máme vyřešené neznámé  $\varphi_2, \varphi_3$  v závislosti na natočení kliky (těleso 4) a tak lze již popsat chování jakéhokoli bodu v kinematickém řetězci 1.

## 2.2.4 Kinematický řetězec 2 – klikový mechanismus

Vpravo na obr. 21 je barevně vyznačený zkoumaný kinematický řetězec 2 (klikový mechanismus).

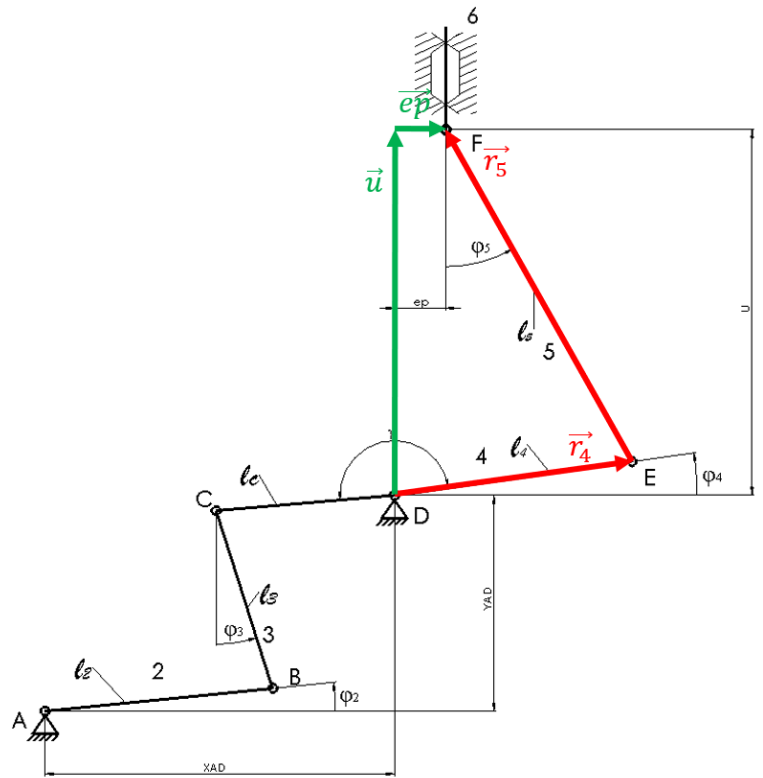
Kinematický řetězec 2 se skládá z vektorů:

$$\vec{r}_4 = l_4 \cdot \begin{bmatrix} +\cos(\varphi_4) \\ +\sin(\varphi_4) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_5 = l_5 \cdot \begin{bmatrix} +\cos(\varphi_5) \\ -\sin(\varphi_5) \end{bmatrix}$$

$$\vec{ep} = \begin{bmatrix} ep \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$



Obr. 21 Kinematický řetězec 2

Dle obr. 21 musí platit:

$$\vec{r}_4 + \vec{r}_5 = \vec{ep} + \vec{U}$$

$$l_4 \cdot \begin{bmatrix} +\cos(\varphi_4) \\ +\sin(\varphi_4) \end{bmatrix} + l_5 \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_5) \\ +\cos(\varphi_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ep \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \quad (30)$$

Po rozepsání na složky (x a y), dostáváme:

$$X: \quad l_4 \cdot \cos(\varphi_4) - l_5 \cdot \sin(\varphi_5) - ep = 0 \quad (31)$$

$$Y: \quad l_4 \cdot \sin(\varphi_4) + l_5 \cdot \cos(\varphi_5) - u = 0 \quad (32)$$

V rovnicích (31) a (32) jsou neznámé  $\varphi_5$  a  $u$ .  $\varphi_4$  je nezávisle proměnná.

### Řešení pro $u$ :

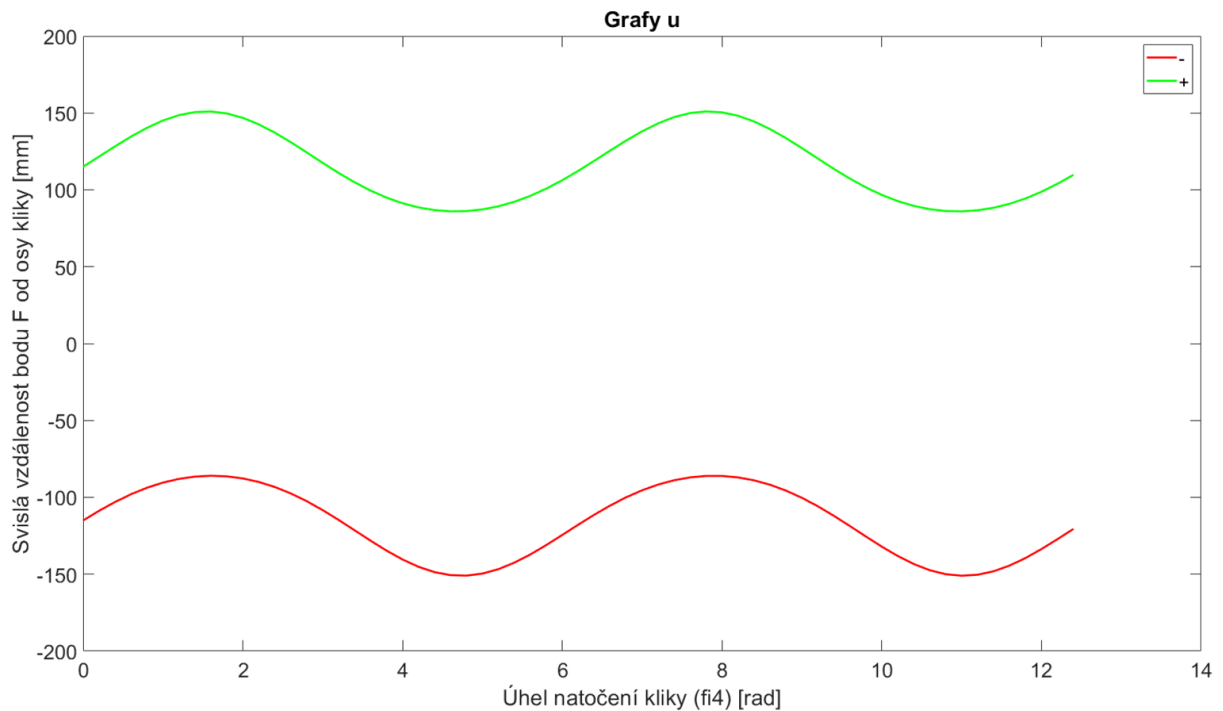
Nejprve převedeme členy s  $\varphi_5$  na pravou stranu a obě rovnice (31) a (32) umocníme na druhou. Následně je sečteme, vyjádříme  $u$  a dostaneme dvě řešení:

$$u_1 = l_4 \cdot \sin(\varphi_4) + \sqrt{l_4^2 \cdot \sin(\varphi_4)^2 - l_4^2 + l_5^2 - ep^2 + 2 \cdot l_4 \cdot ep \cdot \cos(\varphi_4)} \quad (33)$$

$$u_2 = l_4 \cdot \sin(\varphi_4) - \sqrt{l_4^2 \cdot \sin(\varphi_4)^2 - l_4^2 + l_5^2 - ep^2 + 2 \cdot l_4 \cdot ep \cdot \cos(\varphi_4)} \quad (34)$$

Stejně jako pro  $\varphi_2$  a  $\varphi_3$  si řešení vykreslíme do grafu, posoudíme reálnost řešení.

Z obr. 22 níže vyplývá, že řešení  $u_2$  popsané rovnicí (34) není určité správné, neboť pístní čep se z konstrukčního hlediska zkoumaného mechanismu a motoru, nemůže dostat pod úroveň osy kliky. Takže souřadnice  $u$  musí být vždy kladná.



Obr. 22 Průběh souřadnice  $u$  v závislosti na natočení kliky

Vybrané modré řešení pro  $u_1$  popsané rovnicí (33) se ověřilo stejným postupem jak v předešlé kapitole a lze říci, že níže uvedená rovnice správně popisuje průběh souřadnice  $u$ .

$$u_1 = l_4 \cdot \sin(\varphi_4) + \sqrt{l_4^2 \cdot \sin(\varphi_4)^2 - l_4^2 + l_5^2 - ep^2 + 2 \cdot l_4 \cdot ep \cdot \cos(\varphi_4)} \quad (35)$$

### Řešení pro $\varphi_5$ :

Další neznámou je úhel  $\varphi_5$ , popisující natočení tělesa 5, ojnice. Řešení vyplývá z dříve odvozené rovnice (31).

$$l_4 \cdot \cos(\varphi_4) - l_5 \cdot \sin(\varphi_5) - ep = 0 \quad (31)$$

Pomocí funkce arkussinus vyjádřím úhel  $\varphi_5$ :

$$\varphi_5 = \text{asin}\left(\frac{l_4 \cdot \cos(\varphi_4) - ep}{l_5}\right) \quad (36)$$

Řešení bylo zkontrolováno stejným způsobem jako u předešlých výsledků a je správné.

## 2.2.5 Popis pohybu těžišť a referenčních bodů těles

Pro popis dynamiky budeme potřebovat rychlosti a zrychlení těžišť všech těles, u některých těles budeme potřebovat i popis pohybu referenčního bodu, kterým je obvykle počátek lokálního souřadného systému daného tělesa.

Nejprve si spočítáme převodové funkce pro úhly  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_5$  a souřadnici  $u$ . Jakmile budeme mít tyto převodové funkce, můžeme již snadno popsat kinematiku jakékoli části mechanismu.

Jako převodovou funkci lze označit i již vypočtené závislosti úhlů  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_5$  a souřadnice  $u$  na  $\varphi_4$ . To jsou převodové funkce nultého řádu. Převodové funkce závisí pouze na geometrii mechanismu, takže jsou nezávislé na pohybu hnacího členu  $\varphi = \varphi(t)$ .

Pokud proměnné  $\varphi$  a  $\psi$ , popisující polohu hnacího a hnaného členu jsou mezi sebou vázány závislostí  $\psi = \psi(\varphi)$ , pak  $\psi = \psi(\varphi)$  je zdvihová závislost,  $\mu_{\varphi\psi} = \frac{d\psi}{d\varphi}$  je první převodová funkce a její derivace  $\nu_{\varphi\psi} = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = \frac{d\mu_{\varphi\psi}}{d\varphi}$  je druhá převodová funkce.

Výhoda použití převodových funkcí je, že s jejich pomocí lze popsat průběh jednotlivých veličin v závislosti na  $\varphi_4$ . Také se s nimi dobře pracuje.

### 2.2.5.1 Převodové funkce pro $\varphi_2$

#### Zdvihová závislost (0. převodová funkce)

Tato převodová funkce udává závislost  $\varphi_2$  na  $\varphi_4$ .

V předchozích kapitolách jsme odvodili tento vztah:

$$\varphi_{2(\varphi_4)} = \operatorname{atan2} \left( \frac{-BC - A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}, \frac{-AC + B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \right) \quad (28)$$

Za  $A, B, C$  budeme do vzorce (28) dosazovat:

$$A = 2 \cdot l_2 \cdot x_{AD} - 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) \quad (8)$$

$$B = 2 \cdot l_2 \cdot y_{AD} - 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \sin(\varphi_4) \quad (9)$$

$$C = l_3^2 - l_2^2 - l_c^2 - x_{AD}^2 - y_{AD}^2 + 2 \cdot l_c \cdot x_{AD} \cdot \cos(\varphi_4) + 2 \cdot l_c \cdot y_{AD} \cdot \sin(\varphi_4) \quad (10)$$

## 1. převodová funkce

První převodovou funkci získáme implicitní derivací rovnice (12) podle  $d\varphi_4$  a vyjádřením členu  $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_4}$ , což je hledaná převodová funkce  $\mu_{\varphi_2}$ .

$$A \cdot \cos(\varphi_2) + B \cdot \sin(\varphi_2) + C = 0 \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} \quad (12)$$

$$\frac{dA}{d\varphi_4} \cdot \cos(\varphi_2) - A \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} + \frac{dB}{d\varphi_4} \cdot \sin(\varphi_2) + B \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} + \frac{dC}{d\varphi_4} = 0 \quad (37)$$

$$\mu_{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} = \frac{\frac{dA}{d\varphi_4} \cdot \cos(\varphi_2) + \frac{dB}{d\varphi_4} \cdot \sin(\varphi_2) + \frac{dC}{d\varphi_4}}{A \cdot \sin(\varphi_2) - B \cdot \cos(\varphi_2)} \quad (38)$$

Kde členy  $A, B, C$  zůstávají stejné viz rovnice (8-10),  $\frac{dA}{d\varphi_4}, \frac{dB}{d\varphi_4}, \frac{dC}{d\varphi_4}$  jsou níže:

$$\frac{dA}{d\varphi_4} = 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \sin(\varphi_4) \quad (39)$$

$$\frac{dB}{d\varphi_4} = -2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) \quad (40)$$

$$\frac{dC}{d\varphi_4} = 2 \cdot l_c \cdot y_{AD} \cdot \cos(\varphi_4) - 2 \cdot l_c \cdot x_{AD} \cdot \sin(\varphi_4) \quad (41)$$

## 2. převodová funkce

Druhou převodovou funkci získáme implicitní derivací rovnice (37) podle  $d\varphi_4$  a vyjádřením členu  $\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_4^2}$ , což je hledaná převodová funkce  $\nu_{\varphi_2}$ .

$$\frac{dA}{d\varphi_4} \cdot \cos(\varphi_2) - A \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} + \frac{dB}{d\varphi_4} \cdot \sin(\varphi_2) + B \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} + \frac{dC}{d\varphi_4} = 0 \quad / \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2A}{d\varphi_4^2} \cdot \cos(\varphi_2) - \frac{dA}{d\varphi_4} \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} - \frac{dA}{d\varphi_4} \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} - A \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_4}\right)^2 - A \cdot \\ & \sin(\varphi_2) \cdot \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_4^2} + \frac{d^2B}{d\varphi_4^2} \cdot \sin(\varphi_2) + \frac{dB}{d\varphi_4} \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} + \frac{dB}{d\varphi_4} \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \frac{d\varphi_2}{d\varphi_4} - B \cdot \\ & \sin(\varphi_2) \cdot \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_4}\right)^2 + B \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_4^2} + \frac{d^2C}{d\varphi_4^2} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Výraz zjednodušíme nahrazením převodových funkcí příslušnými proměnnými a vyjádříme  $\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_4^2}$ .

$$v_{\varphi_2} = \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_4^2} = \frac{\frac{d^2 A}{d\varphi_4^2} \cdot \cos(\varphi_2) + \frac{d^2 B}{d\varphi_4^2} \cdot \sin(\varphi_2) - 2 \cdot \left( \frac{dA}{d\varphi_4} \cdot \sin(\varphi_2) - \frac{dB}{d\varphi_4} \cdot \cos(\varphi_2) \right) \cdot \mu_{\varphi_2} - (A \cdot \cos(\varphi_2) + B \cdot \sin(\varphi_2)) \cdot \mu_{\varphi_2}^2 + \frac{d^2 C}{d\varphi_4^2}}{A \cdot \sin(\varphi_2) + B \cdot \cos(\varphi_2)} \quad (43)$$

Nově přibyly členy  $\frac{d^2 A}{d\varphi_4^2}$ ,  $\frac{d^2 B}{d\varphi_4^2}$ ,  $\frac{d^2 C}{d\varphi_4^2}$ , které jsou vypočtené níže:

$$\frac{d^2 A}{d\varphi_4^2} = 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) \quad (44)$$

$$\frac{d^2 B}{d\varphi_4^2} = 2 \cdot l_2 \cdot l_c \cdot \sin(\varphi_4) \quad (45)$$

$$\frac{d^2 C}{d\varphi_4^2} = -2 \cdot l_c \cdot y_{AD} \cdot \sin(\varphi_4) - 2 \cdot l_c \cdot x_{AD} \cdot \cos(\varphi_4) \quad (46)$$

### Výsledná úhlová rychlost a zrychlení tělesa 2

Úhlová rychlost tělesa 2 je potom pomocí převodových funkcí:

$$\omega_2 = \mu_{\varphi_2} \cdot \omega_4 \quad (47)$$

Úhlové zrychlení tělesa 2 je rovno:

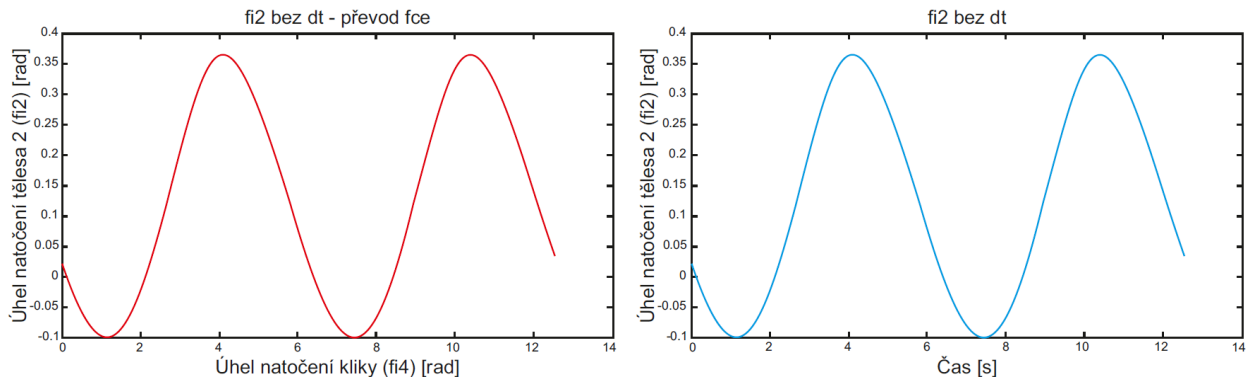
$$\alpha_2 = v_{\varphi_2} \cdot \omega_4^2 + \mu_{\varphi_2} \cdot \alpha_4 \quad (48)$$

### Ověření správnosti pro $\varphi_2$

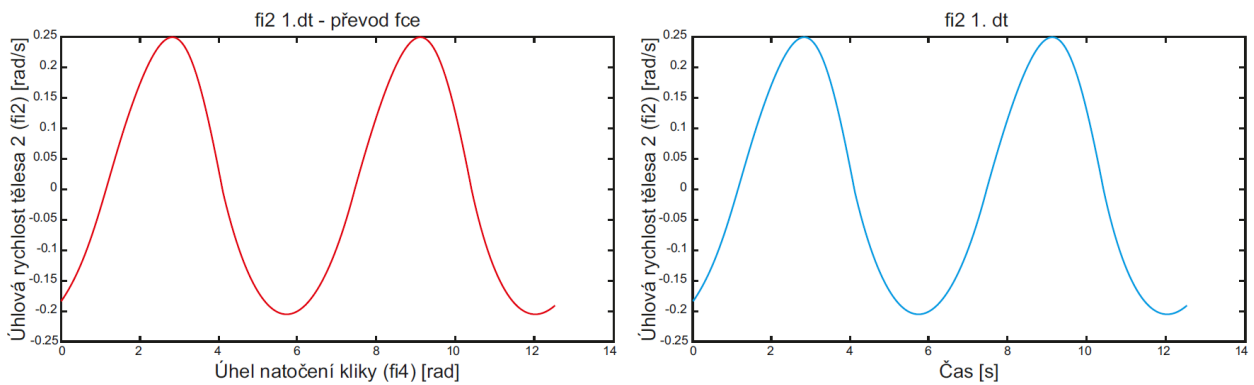
Derivace jednotlivých členů byly vypočteny v ruce a ověřeny výpočtem v programu MATLAB.

Z výsledných převodových funkcí byla vypočtena úhlová rychlost a úhlové zrychlení. Úhlová rychlost byla zároveň vypočtena pomocí přímé derivace  $\varphi_2$  podle času, kdy před derivací bylo za  $\varphi_4$  dosazeno  $\omega_4 \cdot t$  a za  $\omega_4$  byl dosazen 1 [rad/s]. Následně se pro derivaci  $\varphi_2$  podle času ( $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$ ) vykreslil graf a porovnal se s grafem pro  $\omega_2$ , které bylo vypočteno pomocí převodových funkcí. Důležité je, aby  $\omega_4=1$  neboť jen tehdy si graf  $\omega_{2(t)}$  a graf  $\omega_{2(\varphi_4)}$  odpovídají. Protože na vodorovné ose je v jednom grafu  $\varphi_4$  a v druhém čas  $t$ , když klika obkrouží jednu otáčku, tak pro  $\varphi_4$  to budou  $2\pi$  a pro čas  $t$  to bude v čase  $2\pi$  [s]. Níže jsou výsledné grafy. Porovnali se i přímo diskrétní hodnoty.



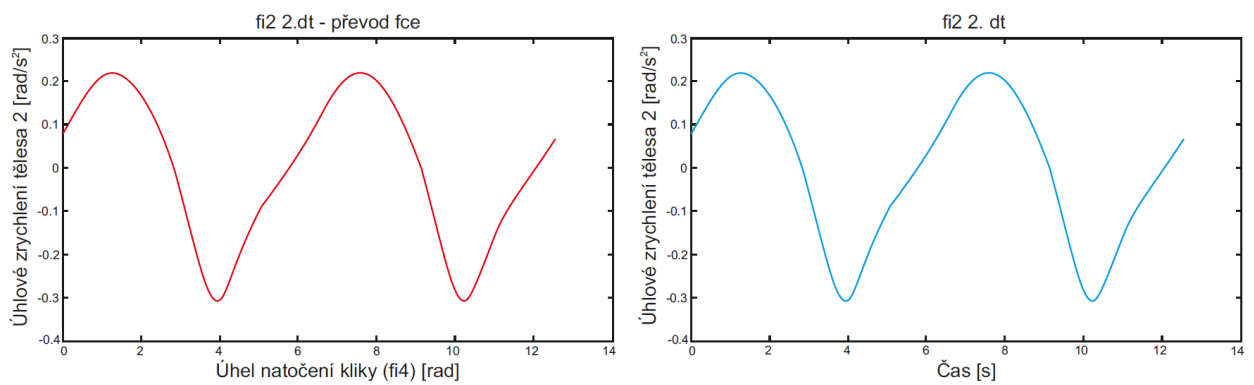


Obr. 24 Srovnání průběhu úhlu  $\varphi_2$  podle času a podle natočení kliky



Obr. 23 Srovnání průběhu úhlové rychlosti tělesa 2 podle času a podle natočení kliky

Obdobným způsobem se ověřila i správnost výpočtu úhlového zrychlení a tím tedy i druhá převodová funkce, viz obr. 25. Nakonec lze říct, že si grafy odpovídají, a tak jsou vypočtené převodové funkce správné.



Obr. 25 Srovnání průběhu úhlového zrychlení tělesa 2 podle času a podle natočení kliky

### 2.2.5.2 Převodové funkce pro $\varphi_3$

#### 0. převodová funkce (zdvihová závislost)

Tato převodová funkce udává závislost  $\varphi_3$  na  $\varphi_4$ .

V předchozích kapitolách jsme odvodili tento vztah:

$$\varphi_{3(\varphi_4)} = \text{atan2} \left( \frac{-BC + A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}, \frac{-AC - B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \right) \quad (29)$$

Zde za  $A, B, C$  budeme do vztahu (29) dosazovat:

$$A = 2 \cdot l_3 \cdot yAD - 2 \cdot \sin(\varphi_4) \cdot l_3 \cdot l_c \quad (24)$$

$$B = 2 \cdot l_3 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) - 2 \cdot l_3 \cdot xAD \quad (25)$$

$$C = l_2^2 + 2 \cdot l_c \cdot xAD \cdot \cos(\varphi_4) + 2 \cdot l_c \cdot yAD \cdot \sin(\varphi_4) - l_3^2 - l_c^2 - xAD^2 - yAD^2 \quad (26)$$

#### 1. převodová funkce

První převodovou funkci získáme implicitní derivací rovnice (49) podle  $d\varphi_4$  a vyjádřením členu  $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_4}$ , což je hledaná převodová funkce  $\mu_{\varphi_3}$ . Rovnice (49) je až na úhel  $\varphi_2$  totožná jako rovnice (12). Princip řešení je stejný jako v předchozích kapitolách, jen místo  $\varphi_2$  je  $\varphi_3$ .

$$A \cdot \cos(\varphi_3) + B \cdot \sin(\varphi_3) + C = 0 \cdot \frac{d\varphi_3}{d\varphi_4} \quad (49)$$

$$\mu_{\varphi_3} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_4} = \frac{\frac{dA}{d\varphi_4} \cdot \cos(\varphi_3) + \frac{dB}{d\varphi_4} \cdot \sin(\varphi_3) + \frac{dC}{d\varphi_4}}{A \cdot \sin(\varphi_3) - B \cdot \cos(\varphi_3)} \quad (50)$$

Kde členy  $A, B, C$  zůstávají stejné viz rovnice (24-26),  $\frac{dA}{d\varphi_4}, \frac{dB}{d\varphi_4}, \frac{dC}{d\varphi_4}$  jsou níže:

$$\frac{dA}{d\varphi_4} = -2 \cdot l_3 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) \quad (51)$$

$$\frac{dB}{d\varphi_4} = -2 \cdot l_3 \cdot l_c \cdot \sin(\varphi_4) \quad (52)$$

$$\frac{dC}{d\varphi_4} = 2 \cdot l_c \cdot yAD \cdot \cos(\varphi_4) - 2 \cdot l_c \cdot xAD \cdot \sin(\varphi_4) \quad (53)$$

## 2. převodová funkce

Druhou převodovou funkci získáme stejným postupem jako je naznačeno v předchozích kapitolách, v rovnicích (42-43).

$$v_{\varphi_3} = \frac{d^2 \varphi_3}{d\varphi_4^2} = \frac{\frac{d^2 A}{d\varphi_4^2} \cdot \cos(\varphi_3) + \frac{d^2 B}{d\varphi_4^2} \cdot \sin(\varphi_3) - 2 \cdot \left( \frac{dA}{d\varphi_4} \sin(\varphi_3) - \frac{dB}{d\varphi_4} \cos(\varphi_3) \right) \cdot \mu_{\varphi_3} - (A \cdot \cos(\varphi_3) + B \cdot \sin(\varphi_3)) \cdot \mu_{\varphi_3}^2 + \frac{d^2 C}{d\varphi_4^2}}{A \cdot \sin(\varphi_3) + B \cdot \cos(\varphi_3)} \quad (54)$$

Nově přibyly členy pro těleso 3  $\frac{d^2 A}{d\varphi_4^2}$ ,  $\frac{d^2 B}{d\varphi_4^2}$ ,  $\frac{d^2 C}{d\varphi_4^2}$ , které jsou vypočtené níže:

$$\frac{d^2 A}{d\varphi_4^2} = 2 \cdot l_3 \cdot l_c \cdot \sin(\varphi_4) \quad (55)$$

$$\frac{d^2 B}{d\varphi_4^2} = -2 \cdot l_3 \cdot l_c \cdot \cos(\varphi_4) \quad (56)$$

$$\frac{d^2 C}{d\varphi_4^2} = -2 \cdot l_c \cdot y_{AD} \cdot \sin(\varphi_4) - 2 \cdot l_c \cdot x_{AD} \cdot \cos(\varphi_4) \quad (57)$$

### Výsledná úhlová rychlost a zrychlení tělesa 3

Úhlová rychlost tělesa 3 je potom pomocí převodových funkcí:

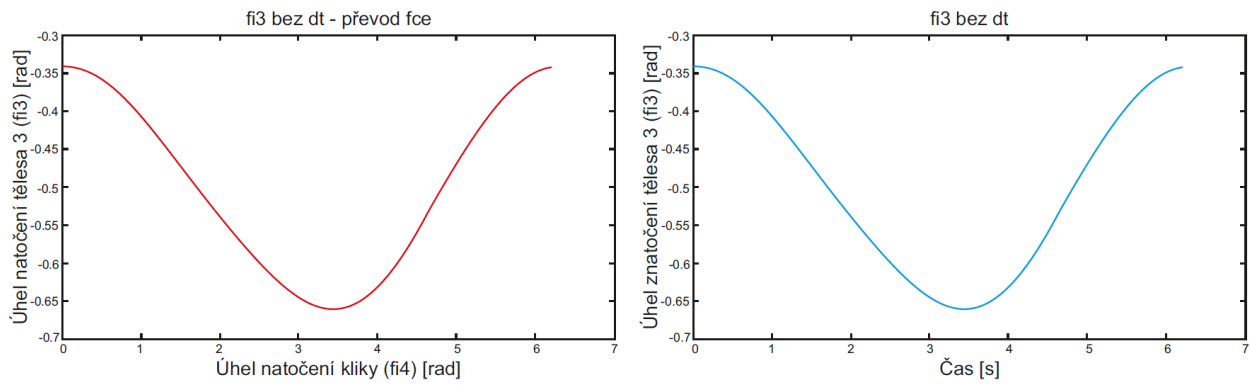
$$\omega_3 = \mu_{\varphi_3} \cdot \omega_4 \quad (58)$$

Úhlové zrychlení tělesa 3 je rovno:

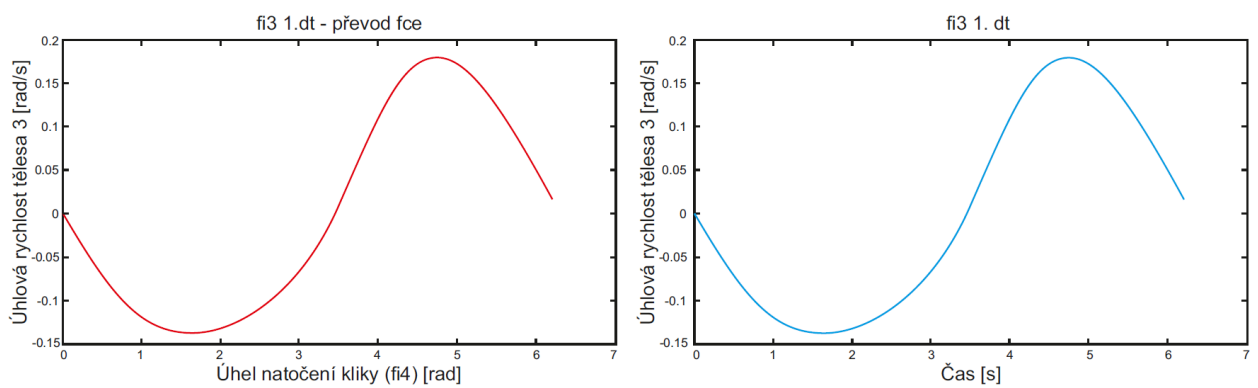
$$\alpha_3 = v_{\varphi_3} \cdot \omega_4^2 + \mu_{\varphi_3} \cdot \alpha_4 \quad (59)$$

### Ověření správnosti převodových funkcí pro $\varphi_3$

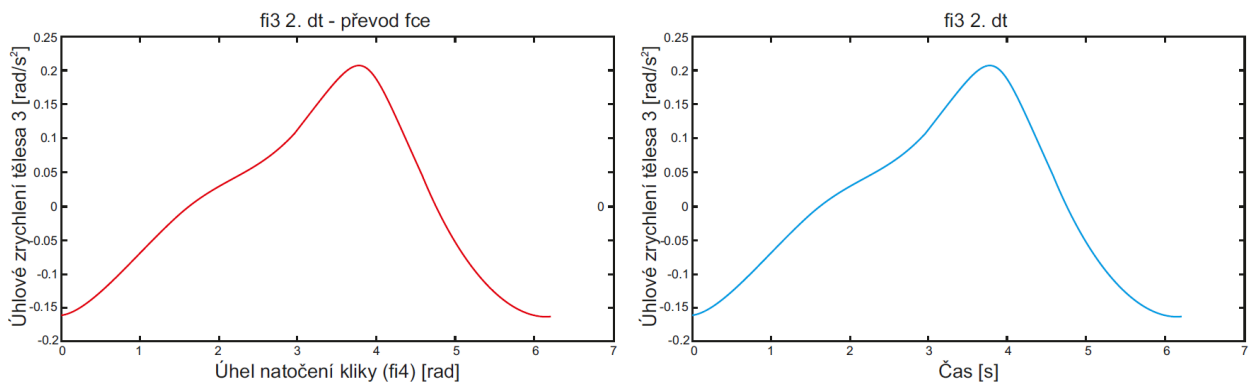
Při ověřování správnosti průběhu úhlu, úhlové rychlosti a úhlového zrychlení pro těleso 3 byl aplikován stejný jako v předchozí kapitole pro těleso 2. Níže jsou výsledné průběhy zakreslené v grafu. Opět se zkontrolovaly i diskrétní hodnoty.



Obr. 28 Srovnání průběhu úhlu  $\varphi_3$  podle času a podle natočení kliky



Obr. 27 Srovnání průběhu úhlové rychlosti tělesa 3 podle času a podle natočení kliky



Obr. 26 Srovnání průběhu úhlového zrychlení tělesa 3 podle času a podle natočení kliky

### 2.2.5.3 Převodové funkce pro $\varphi_5$

#### 0. převodová funkce

V předchozích kapitolách jsme odvodili tento vztah:

$$\varphi_5(\varphi_4) = \arcsin\left(\frac{l_4 \cdot \cos(\varphi_4) - ep}{l_5}\right) \quad (36)$$

#### 1. převodová funkce

První převodovou funkci získáme implicitní derivací rovnice (31) podle  $d\varphi_4$  a vyjádřením členu  $\frac{d\varphi_5}{d\varphi_4}$ , což je hledaná převodová funkce  $\mu$ .

$$l_4 \cdot \cos(\varphi_4) - l_5 \cdot \sin(\varphi_5) - ep = 0 \quad / \cdot \frac{d}{d\varphi_4} \quad (31)$$

$$\frac{d\varphi_5}{d\varphi_4} = \frac{-l_4 \cdot \sin(\varphi_4)}{l_5 \cdot \cos(\varphi_5)} \quad (60)$$

#### 2. převodová funkce

Druhou převodovou funkci získáme dvojnásobnou implicitní derivací rovnice (31) podle  $d\varphi_4$  a vyjádřením členu  $\frac{d^2\varphi_5}{d\varphi_4^2}$ , což je hledaná převodová funkce  $\nu_{\varphi_5}$ .

$$\nu_{\varphi_5} = \frac{d^2\varphi_5}{d\varphi_4^2} = \frac{-l_4 \cdot \cos(\varphi_4) + l_5 \cdot \sin(\varphi_5) \cdot \mu_5^2}{l_5 \cdot \cos(\varphi_5)} \quad (61)$$

### Výsledná úhlová rychlost a zrychlení tělesa 5

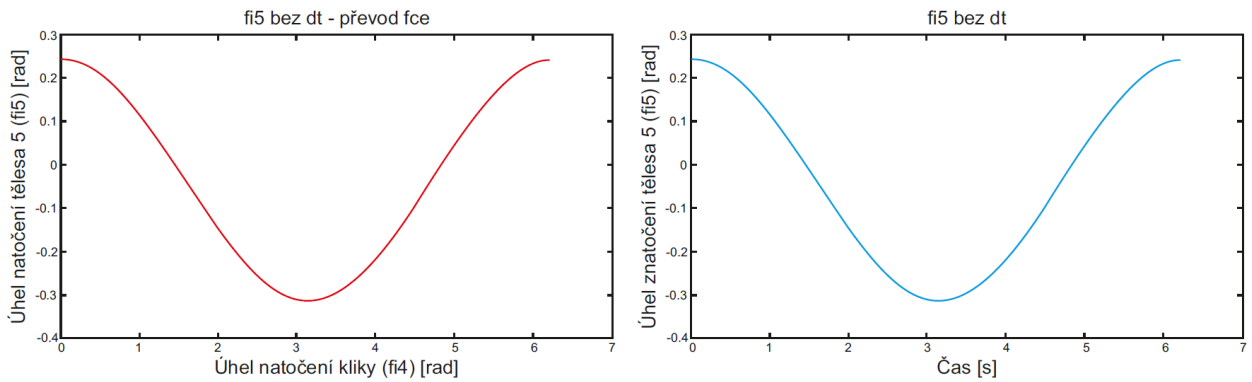
Úhlová rychlost tělesa 5 je potom pomocí převodových funkcí:

$$\omega_5 = \mu_{\varphi_5} \cdot \omega_4 \quad (62)$$

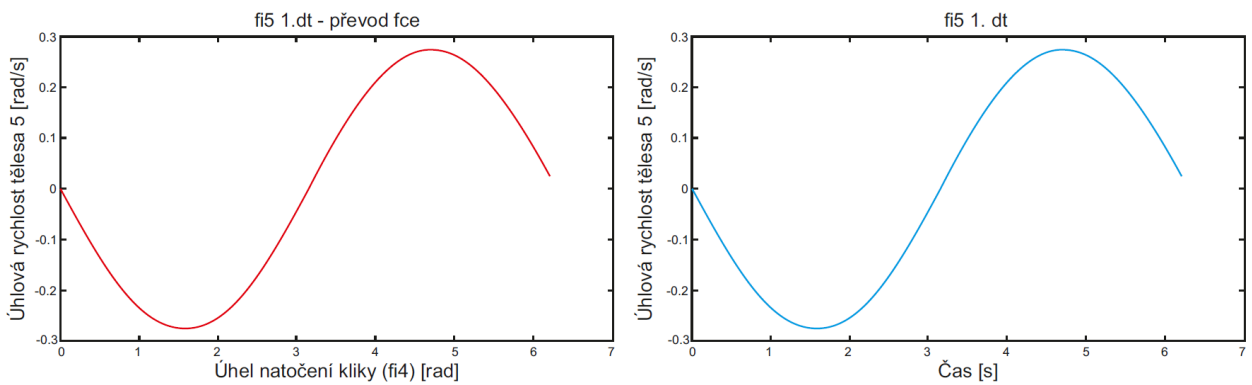
Úhlové zrychlení tělesa 5 je rovno:

$$\alpha_5 = \nu_{\varphi_5} \cdot \omega_4^2 + \mu_{\varphi_5} \cdot \alpha_4 \quad (63)$$

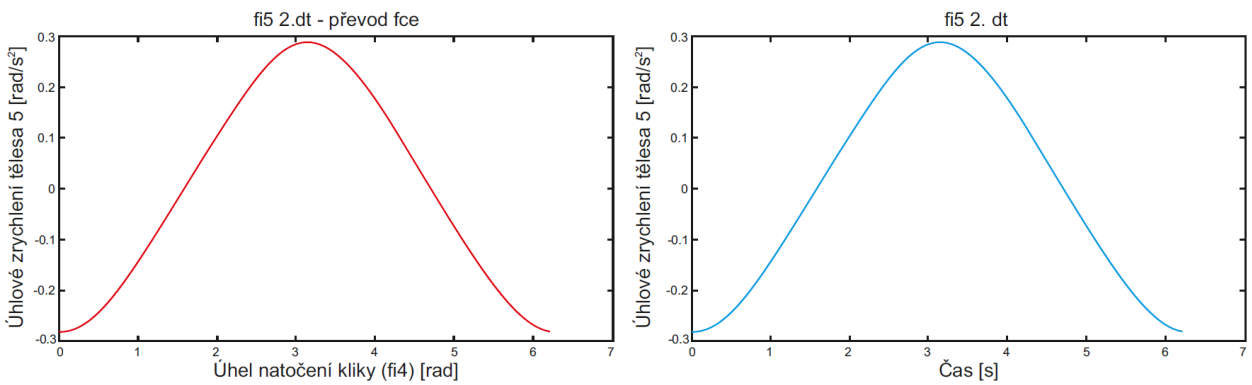
## Ověření správnosti převodových funkcí pro $\varphi_5$



Obr. 29 Srovnání průběhu úhlu  $\varphi_5$  podle času a podle natočení kliky



Obr. 31 Srovnání průběhu úhlové rychlosti tělesa 5 podle času a podle natočení kliky



Obr. 30 Srovnání průběhu úhlového zrychlení tělesa 5 podle času a podle natočení kliky

## 2.2.5.4 Převodové funkce pro souřadnici $u$

### 0. převodová funkce

V předchozích kapitolách jsme odvodili tento vztah:

$$u_{(\varphi_4)} = l_4 \cdot \sin(\varphi_4) + \sqrt{l_4^2 \cdot \sin(\varphi_4)^2 - l_4^2 + l_5^2 - ep^2 + 2 \cdot l_4 \cdot ep \cdot \cos(\varphi_4)} \quad (35)$$

### 1. převodová funkce

První převodovou funkci získáme implicitní derivací rovnice (32) podle  $d\varphi_4$  a vyjádřením členu  $\frac{du}{d\varphi_4}$ , což je hledaná převodová funkce  $\mu$ . V rovnici (32) se objevuje závisle proměnná  $\varphi_5$  a později přibude i její první a druhá derivace, to nám ale nevádí, neboť vše potřebné k tělesu 5 máme již výše vypočtené, takže pak pouze dosadíme. Pro jednoduchost výpočtu dosadíme až přímo do příslušného programu v Matlabu (viz příloha).

$$l_4 \cdot \sin(\varphi_4) + l_5 \cdot \cos(\varphi_5) - u = 0 \quad / \cdot \frac{d}{d\varphi_4} \quad (32)$$

$$\mu_u = \frac{du}{d\varphi_4} = l_4 \cdot \cos(\varphi_4) - l_5 \cdot \sin(\varphi_5) \cdot \mu_5 \quad (64)$$

### 2. převodová funkce

Druhou převodovou funkci získáme implicitní derivací rovnice (64) podle  $d\varphi_4$  a vyjádřením členu  $\frac{d^2u}{d\varphi_4^2}$ , což je hledaná převodová funkce  $\nu_u$ .

$$\nu_u = \frac{d^2u}{d\varphi_4^2} = -l_4 \cdot \sin(\varphi_4) - l_5 \cdot \cos(\varphi_5) \cdot \mu_5^2 - l_5 \cdot \sin(\varphi_5) \cdot \nu_5 \quad (65)$$

## Výsledná rychlost a zrychlení tělesa 6 (souřadnice $u$ )

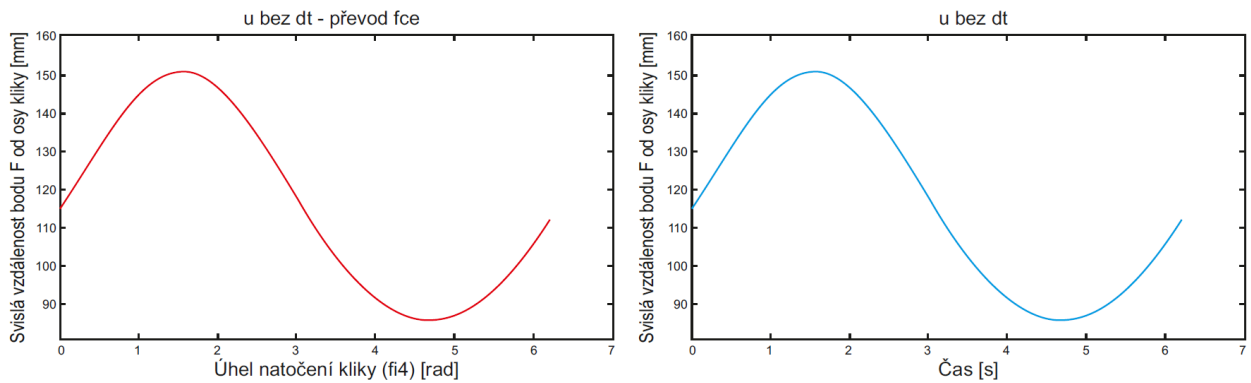
Rychlost tělesa 6 je potom pomocí převodových funkcí:

$$v_u = \mu_u \cdot \omega_4 \text{ [mm/s]} \quad (66)$$

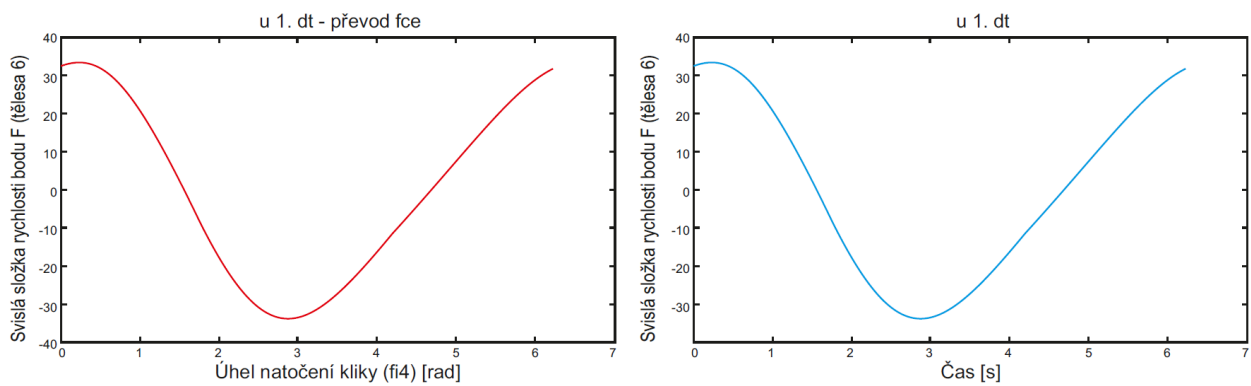
Zrychlení tělesa 6 je rovno:

$$a_u = \nu_u \cdot \omega_4^2 + \mu_u \cdot \alpha_4 \text{ [mm/s}^2\text{]} \quad (67)$$

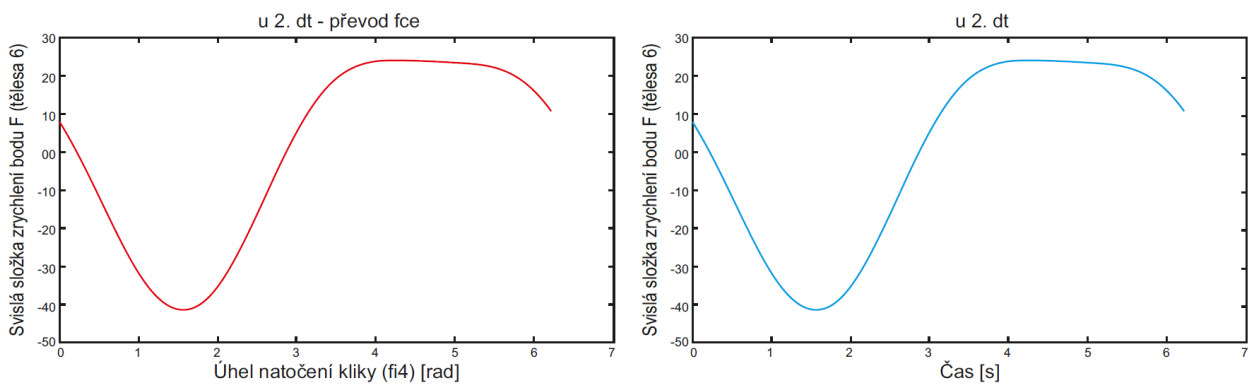
## Ověření správnosti převodových funkcí pro $u$



Obr. 32 Srovnání průběhu souřadnice  $u$  podle natočení kliky a podle času



Obr. 33 Srovnání průběhu svislé rychlosti bodu F podle natočení kliky a podle času



Obr. 34 Srovnání průběhu svislé složky zrychlení bodu F podle natočení kliky a podle času



### 2.2.5.5 Rychlost a zrychlení bodu B

Poslední částí popisu kinematiky, která je potřebná pro řešení dynamiky těles, je popis pohybu bodu B a E. Tyto body jsou totiž referenčními body pro tělesa 3 a 5, která konají obecný rovinný pohyb. V této kapitole budeme řešit bod B.

Rychlost a zrychlení bodu je vyjádřeno vektorově v globálním systému souřadnic a opět pomocí převodových funkcí v závislosti na  $\varphi_4$ .

#### 0. převodová funkce

Převodová funkce nultého řádu lze odvodit jako vektor z počátku souřadného systému do bodu B.

$$\vec{r}_B = \begin{bmatrix} -l_c \cdot \cos \varphi_4 + l_3 \cdot \sin \varphi_3 \\ -l_c \cdot \sin \varphi_4 - l_3 \cdot \cos \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (68)$$

Složkově:

$$r_{Bx} = -l_c \cdot \cos \varphi_4 + l_3 \cdot \sin \varphi_3 \quad (69)$$

$$r_{By} = -l_c \cdot \sin \varphi_4 - l_3 \cdot \cos \varphi_3 \quad (70)$$

#### 1. převodová funkce

První převodové funkce získáme implicitní derivací rovnic (69) a (70) podle  $d\varphi_4$  a vyjádřením členů  $\frac{dr_{Bx}}{d\varphi_4}$  a  $\frac{dr_{By}}{d\varphi_4}$ , což je hledaná převodová funkce  $\mu_{Bx}$  a  $\mu_{By}$ .

$$\mu_{Bx} = \frac{dr_{Bx}}{d\varphi_4} = l_c \cdot \sin \varphi_4 + l_3 \cdot \cos \varphi_3 \cdot \frac{d\varphi_3}{d\varphi_4} = l_c \cdot \sin \varphi_4 + l_3 \cdot \cos \varphi_3 \cdot \mu_3 \quad (71)$$

$$\mu_{By} = \frac{dr_{By}}{d\varphi_4} = -l_c \cdot \cos \varphi_4 + l_3 \cdot \sin \varphi_3 \cdot \frac{d\varphi_3}{d\varphi_4} = -l_c \cdot \cos \varphi_4 + l_3 \cdot \sin \varphi_3 \cdot \mu_3 \quad (72)$$

#### 2. převodová funkce

Druhé převodové funkce získáme implicitní derivací rovnic (71) a (72) podle  $d\varphi_4$  a vyjádřením členů  $\frac{d^2r_{Bx}}{d\varphi_4^2}$  a  $\frac{d^2r_{By}}{d\varphi_4^2}$ , což je hledaná převodová funkce  $\nu_{Bx}$  a  $\nu_{By}$ .

$$\nu_{Bx} = \frac{d^2r_{Bx}}{d\varphi_4^2} = l_c \cdot \cos \varphi_4 - l_3 \cdot \sin \varphi_3 \cdot \mu_3^2 + l_3 \cdot \cos \varphi_3 \cdot \nu_3 \quad (73)$$

$$\nu_{By} = \frac{d^2r_{By}}{d\varphi_4^2} = l_c \cdot \sin \varphi_4 + l_3 \cdot \cos \varphi_3 \cdot \mu_3^2 + l_3 \cdot \sin \varphi_3 \cdot \nu_3 \quad (74)$$

## Rychlost bodu B

$$v_{Bx} = \mu_{Bx} \cdot \omega_4 \quad (75)$$

$$v_{By} = \mu_{By} \cdot \omega_4 \quad (76)$$

## Zrychlení bodu B

$$a_{Bx} = v_{Bx} \cdot \omega_4^2 + \mu_{Bx} \cdot \alpha_4 \quad (77)$$

$$a_{By} = v_{By} \cdot \omega_4^2 + \mu_{By} \cdot \alpha_4 \quad (78)$$

### 2.2.5.6 Rychlost a zrychlení bodu E

V této kapitole budeme řešit bod E. Postup bude stejný jako pro bod B.

#### 0. převodová funkce

Vektor z počátku souřadného systému do bodu E:

$$\vec{r}_E = \begin{bmatrix} l_4 \cdot \cos \varphi_4 \\ l_4 \cdot \sin \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Složkově:

$$r_{Ex} = l_4 \cdot \cos \varphi_4 \quad (80)$$

$$r_{Ey} = l_4 \cdot \sin \varphi_4 \quad (81)$$

#### 1. převodová funkce

$$\mu_{Ex} = \frac{dr_{Ex}}{d\varphi_4} = -l_4 \cdot \sin \varphi_4 \quad (82)$$

$$\mu_{Ey} = \frac{dr_{Ey}}{d\varphi_4} = l_4 \cdot \cos \varphi_4 \quad (83)$$

#### 2. převodová funkce

$$v_{Ex} = \frac{d^2 r_{Ex}}{d\varphi_4^2} = -l_4 \cdot \cos \varphi_4 \quad (84)$$

$$v_{Ey} = \frac{d^2 r_{Ey}}{d\varphi_4^2} = -l_4 \cdot \sin \varphi_4 \quad (85)$$

### **Rychlost bodu E**

$$v_{Ex} = \mu_{Ex} \cdot \omega_4 \quad (86)$$

$$v_{Ey} = \mu_{Ey} \cdot \omega_4 \quad (87)$$

### **Zrychlení bodu E**

$$a_{Ex} = v_{Ex} \cdot \omega_4^2 + \mu_{Ex} \cdot \alpha_4 \quad (88)$$

$$a_{Ey} = v_{Ey} \cdot \omega_4^2 + \mu_{Ey} \cdot \alpha_4 \quad (89)$$

### **Ověření správnosti převodových funkcí pro body B a E**

Ověření probíhalo stejným způsobem a odhalilo chyby, které byly následně opraveny. Nakonec průběhy rychlostí a zrychlení pomocí převodových funkcí jsou totožné jako průběhy získané derivací polohového vektoru podle času  $t$ , kdy za  $\varphi_4$  bylo dosazeno  $\omega \cdot t$ . Za  $\omega$  byl dosazen 1 [rad/s].

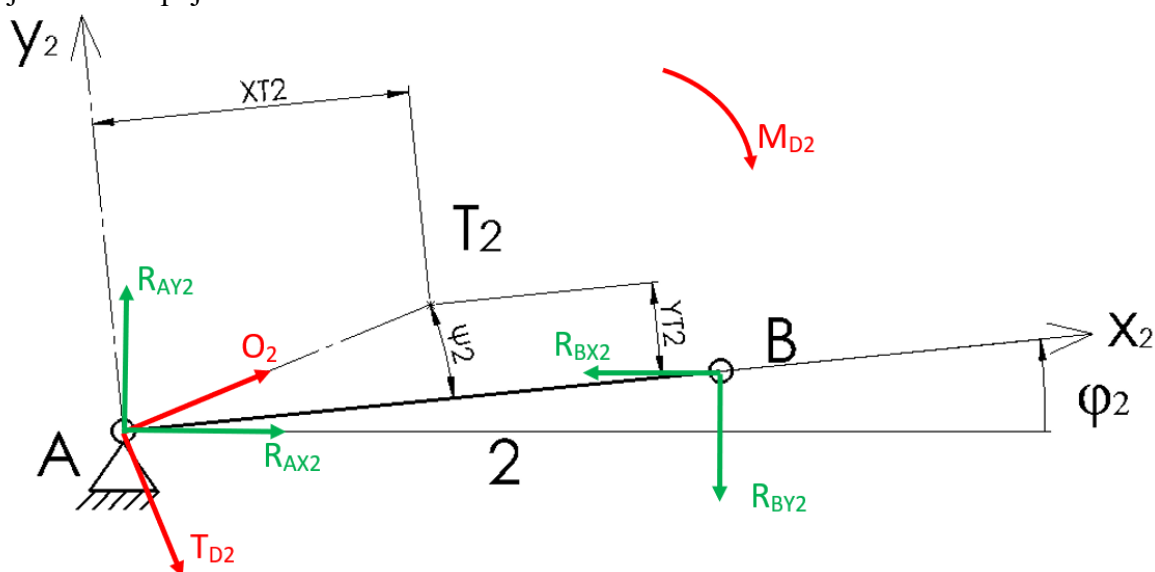
## 2.3 Silové a momentové účinky v mechanismu

V klikovém a vyvažovacím mechanismu vznikají při chodu setrvačné silové a momentové účinky těles. Tyto účinky se přenášejí skrze vazby mezi tělesy do rámu. Hlavním smyslem vyvažovacího mechanismu je, aby v důsledku působení setrvačných sil jeho členů byl součet všech silových účinků působících do rámu co nejmenší.

Abychom mohli určit průběhy sil působících na rám, musíme mechanismus rozdělit na jednotlivá tělesa a ty uvolnit. To znamená, že každé těleso vezmeme zvlášť a zakreslíme silové a momentové účinky, které na něj působí. To jest účinky od těles, která jsou s ním spojena a setrvačné účinky daného tělesa. Následně sestavíme pohybové rovnice d'Alambertovým způsobem. Ze vzniklých rovnic vyjádříme hledané síly, které jsou funkcemi kinematických veličin mechanismu, pak superpozicí získáme výslednici reakcí do rámu.

### 2.3.1 Těleso 2 – ojnice vyvažovacího mechanismu

Níže na obr. 35 je těleso 2 se zakreslenými setrvačnými účinky a s účinky od těles, která jsou s ním spojena.



Obr. 35 Uvolnění tělesa 2

Síly  $R_{AX2}$  a  $R_{AY2}$  jsou síly od tělesa 2 do rámu. Síly  $R_{BX2}$  a  $R_{BY2}$  jsou reakce od tělesa 3, které je připojené na těleso 2 v bodě B.

### 2.3.1.1 Fyzikální rovnice

#### Normálová setrvačná síla – odstředivá síla $O_2$

$$O_2 = m_2 \cdot e_2 \cdot \omega_2^2 \quad (90)$$

Proměnná  $\omega_2$  značí úhlovou rychlost tělesa 2 vypočtenou již dříve, viz rovnice (47).

Obecně za proměnnou  $m_x$  budeme dosazovat hmotnost tělesa X, zde tedy za  $m_2$  budeme dosazovat hmotnost tělesa 2 v tunách. Jednotka hmotnosti vychází ze zvoleného konzistentního systému jednotek: síla [N]; vzdálenost [mm]; čas[s]; hmotnost [t]. Vztah pro výpočet odstředivé síly a zároveň definice jejího působíště a směru lze nalézt v literatuře [1 s. 119].

Proměnnou  $e_x$  budeme označovat přímou vzdálenost těžiště tělesa X od počátku lokálního souřadného systému, který je pro dané těleso referenčním bodem.

$$e_2 = \sqrt{XT^2 + YT^2} \quad [\text{mm}] \quad (91)$$

#### Tečná setrvačná síla $T_{D2}$

$$T_{D2} = m_2 \cdot e_2 \cdot \alpha_2 \quad (92)$$

Proměnná  $\alpha_2$  značí úhlové zrychlení tělesa 2 vypočtené již dříve. Vztah pro výpočet a zároveň samotná definice této síly lze nalézt v literatuře [1 s. 119]

#### Setrvačný moment $M_{D2}$

$$M_{D2} = J_{A2} \cdot \alpha_2 \quad (93)$$

$J_{A2}$  je moment setrvačnosti tělesa 2 k referenčnímu bodu A v jednotkách  $t \cdot \text{mm}^2$ . Moment setrvačnosti  $J_{A2}$  se vypočte pomocí Steinerovy věty, kterou lze nalézt např. v literatuře [1 s. 92].

$$J_o = J_{TX} + m \cdot e^2 \quad (94)$$

Kde  $J_o$  je moment setrvačnosti daného tělesa k referenčnímu bodu O.  $J_{TX}$  je moment setrvačnosti tělesa X k jeho těžišti a  $e$  je vzdálenost referenčního bodu od těžiště.

V našem případě známe z CAD programu moment setrvačnosti k těžišti a potřebujeme vypočítat moment setrvačnosti k referenčnímu bodu A, který je od těžiště vzdálen o  $e_2$ . Vzdálenost  $e_2$  byla již výše definována a lze vypočítat z rovnice (91).

Potom  $J_{A2}$  lze spočítat jako:

$$J_{A2} = J_{T2} + m_2 \cdot e_2^2 \quad (95)$$

### **2.3.1.2 Rovnice dynamické rovnováhy sestavené d'Alembertovým způsobem**

**Rovnice dynamické rovnováhy ve směru osy x (globální souřadný systém)**

$$R_{AX2} - R_{BX2} + O_2 \cdot \cos(\Psi_2 + \varphi_2) + T_{D2} \cdot \sin(\Psi_2 + \varphi_2) = 0 \quad (96)$$

$$\Psi_2 = \text{atan}\left(\frac{YT2}{XT2}\right) \quad (97)$$

**Rovnice dynamické rovnováhy ve směru osy y (globální souřadný systém)**

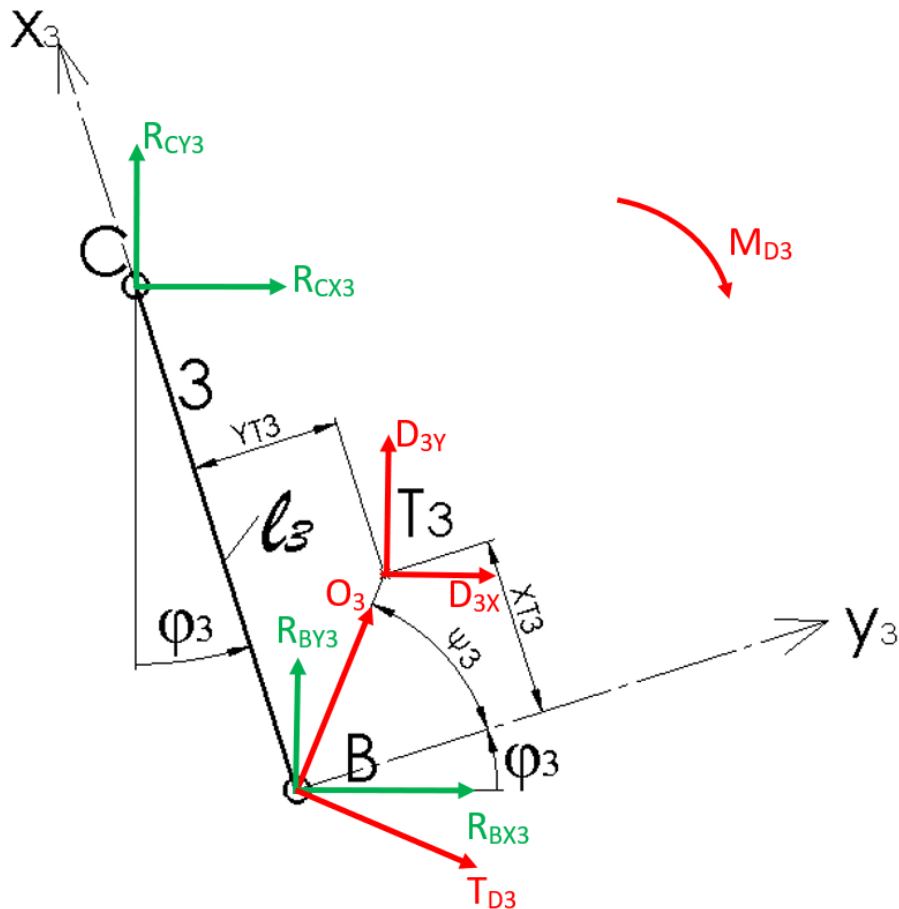
$$R_{AY2} - R_{BY2} + O_2 \cdot \sin(\Psi_2 + \varphi_2) - T_{D2} \cdot \cos(\Psi_2 + \varphi_2) = 0 \quad (98)$$

**Rovnice dynamické rovnováhy momentů k bodu A**

$$-R_{BX2} \cdot \sin \varphi_2 \cdot l_2 + R_{BY2} \cdot \cos \varphi_2 \cdot l_2 + M_{D2} = 0 \quad (99)$$

### 2.3.2 Těleso 3 – vyvažovací hmota

Níže na obr. 36 je těleso 3 se zakreslenými silovými a momentovými účinky, které na těleso působí.



Obr. 36 Uvolnění tělesa 3

Síly  $R_{BX3}$  a  $R_{BY3}$  jsou reakce od tělesa 2, které je připojené na těleso 3 v bodě B. Velikosti sil  $R_{BX3}$  a  $R_{BY3}$  mají stejné velikosti jako  $R_{BX2}$ , resp.  $R_{BY2}$ , ale opačný smysl. Orientace reakcí je ošetřena zavedením sil v opačných směrech, takže matematicky platí:

$$R_{BX3} = R_{BX2} \quad (100)$$

$$R_{BY3} = R_{BY2} \quad (101)$$

Síly  $R_{CX3}$  a  $R_{CY3}$  jsou reakce od tělesa 4, které je připojené na těleso 3 v bodě C. Těleso 3 koná obecný rovinný pohyb. Tento pohyb se skládá z rotačního a posuvného pohybu. Setrvačné účinky působící na těleso pak lze vyjádřit jako superpozici setrvačných účinků unášivého posuvného pohybu a relativní rotace tělesa.

Unášivému posuvnému pohybu přísluší d'Alembertova setrvačná síla  $\vec{D}_3$  a relativní rotaci bude přísluší odstředivá síla  $O_3$ , tečná setrvačná síla  $T_{D3}$  a setrvačný moment  $M_{D3}$ . [1 s. 127]

### 2.3.2.1 Fyzikální rovnice

**Normálová setrvačná síla – odstředivá síla  $O_3$**

$$O_3 = m_3 \cdot e_3 \cdot \omega_3^2 \quad (102)$$

$$e_3 = \sqrt{XT3^2 + YT3^2} \quad [\text{mm}] \quad (103)$$

**Tečná setrvačná síla  $T_{D3}$**

$$T_{D3} = m_3 \cdot e_3 \cdot \alpha_3 \quad (104)$$

**Setrvačný moment  $M_{D3}$**

$$M_{D3} = JB3 \cdot \alpha_3 \quad (105)$$

$J_{B3}$  je moment setrvačnosti tělesa 3 k referenčnímu bodu  $B$ .

$$J_{B3} = J_{T3} + m_3 \cdot e_3^2 \quad (106)$$

**d'Alebertova setrvačná síla**

Vektorově:

$$\vec{D}_3 = m_3 \cdot (-\vec{a}_B) \quad (107)$$

Po složkách:

$$D_{3X} = m_3 \cdot (-a_{Bx}) \quad (108)$$

$$D_{3Y} = m_3 \cdot (-a_{By}) \quad (109)$$

### 2.3.2.2 Rovnice dynamické rovnováhy sestavené d'Alembertovým způsobem

**Rovnice dynamické rovnováhy ve směru osy x (globální souřadný systém)**

$$R_{BX3} + R_{CX3} + D_{3X} + O_3 \cdot \cos(\Psi_3 + \varphi_3) + T_{D3} \cdot \sin(\Psi_3 + \varphi_3) = 0 \quad (110)$$

$$\Psi_3 = \text{atan}\left(\frac{XT3}{YT3}\right) \quad (111)$$

**Rovnice dynamické rovnováhy ve směru osy y (globální souřadný systém)**

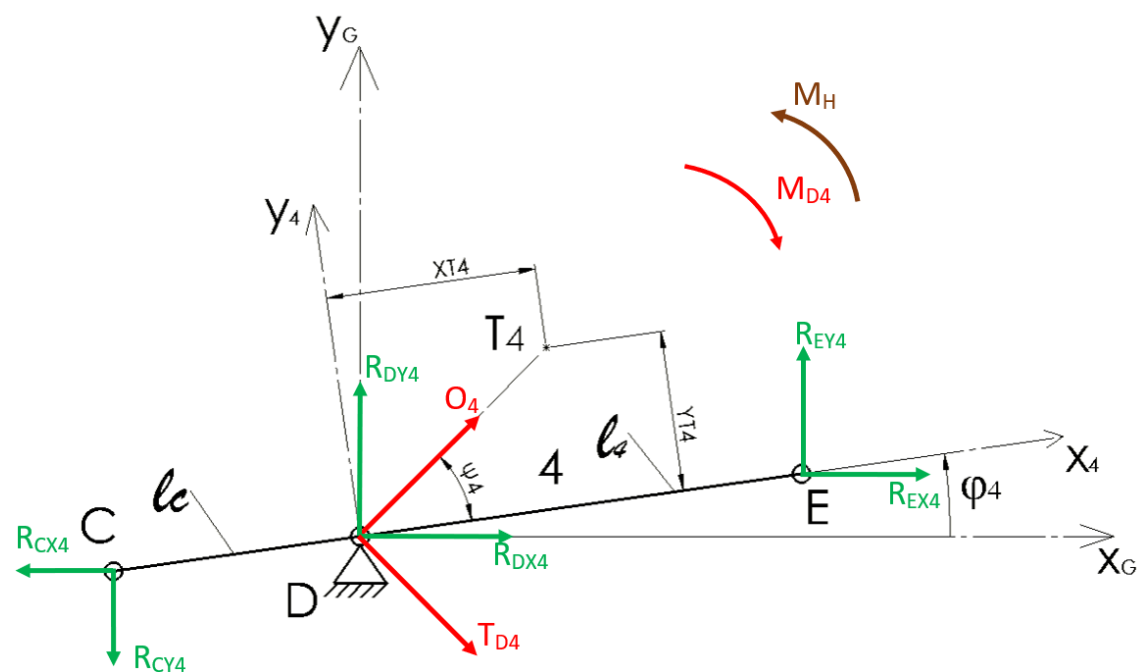
$$R_{BY3} + R_{CY3} + D_{3Y} + O_3 \cdot \sin(\Psi_3 + \varphi_3) - T_{D3} \cdot \cos(\Psi_3 + \varphi_3) = 0 \quad (112)$$



## Rovnice dynamické rovnováhy momentů k bodu B

$$R_{CX3} \cdot \cos \varphi_3 \cdot l_3 + R_{CY3} \cdot \sin \varphi_3 \cdot l_3 + D_{3X} \cdot e_3 \cdot \sin(\Psi_3 + \varphi_3) - D_{3Y} \cdot e_3 \cdot \cos(\Psi_3 + \varphi_3) + M_{D3} = 0 \quad (113)$$

### 2.3.3 Těleso 4 – kliková hřídel



Obr. 37 Uvolnění tělesa 4

Síly  $R_{DX4}$  a  $R_{DY4}$  jsou síly od tělesa 4 do rámu. Moment  $M_H$  je hnací moment.

$$R_{CX4} = R_{CX3} \quad (114)$$

$$R_{CY4} = R_{CY3} \quad (115)$$

Těleso 4 koná pouze rotační pohyb.

#### 2.3.3.1 Fyzikální rovnice

Normálová setrvačná síla – odstředivá síla  $O_4$

$$O_4 = m_4 \cdot e_4 \cdot \omega_4^2 \quad (116)$$

$$e_4 = \sqrt{XT4^2 + YT4^2} \quad (117)$$

### **Tečná setrvačná síla $T_{D4}$**

$$T_{D4} = m_4 \cdot e_4 \cdot \alpha_4 \quad (118)$$

### **Setrvačný moment $M_{D4}$**

$$M_{D4} = J_{D4} \cdot \alpha_4 \quad (119)$$

$J_{D4}$  je moment setrvačnosti tělesa 4 k referenčnímu bodu  $D$ .

$$J_{D4} = J_{T4} + m_4 \cdot e_4^2 \quad (120)$$

### **2.3.3.2 Rovnice dynamické rovnováhy sestavené d'Alembertovým způsobem**

#### **Rovnice dynamické rovnováhy ve směru osy x (globální souřadný systém)**

$$-R_{CX4} + R_{DX4} + R_{EX4} + O_4 \cdot \cos(\Psi_4 + \varphi_4) + T_{D4} \cdot \sin(\Psi_4 + \varphi_4) = 0 \quad (121)$$

$$\Psi_4 = \text{atan}\left(\frac{YT4}{XT4}\right) \quad (122)$$

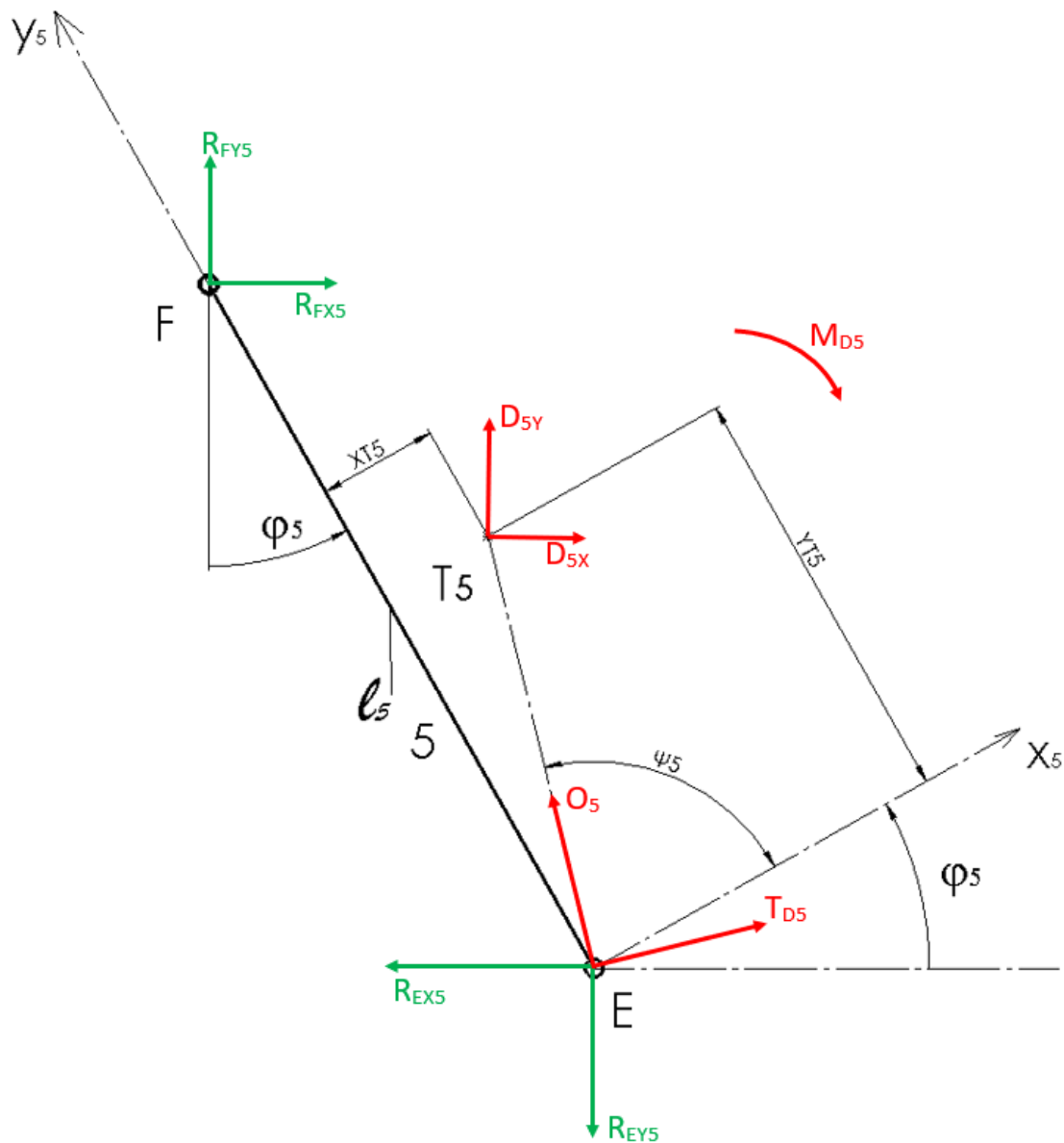
#### **Rovnice dynamické rovnováhy ve směru osy y (globální souřadný systém)**

$$-R_{CY4} + R_{DY4} + R_{EY4} + O_4 \cdot \sin(\Psi_4 + \varphi_4) - T_{D4} \cdot \cos(\Psi_4 + \varphi_4) = 0 \quad (123)$$

#### **Rovnice dynamické rovnováhy momentů k bodu D**

$$R_{CX4} \cdot \sin \varphi_4 \cdot l_C - R_{CY4} \cdot \cos \varphi_4 \cdot l_C + R_{EX4} \cdot l_4 \cdot \sin(\varphi_4) - R_{EY4} \cdot l_4 \cdot \cos(\varphi_4) + M_{D4} - M_H = 0 \quad (124)$$

### 2.3.4 Těleso 5 – ojnice



Obr. 38 Uvolnění tělesa 5

$$R_{EX5} = R_{EX4} \quad (125)$$

$$R_{EY5} = R_{EY4} \quad (126)$$

Těleso 5 koná obecný rovinný pohyb.

#### 2.3.4.1 Fyzikální rovnice

**Normálová setrvačná síla – odstředivá síla  $O_5$**

$$O_5 = m_5 \cdot e_5 \cdot \omega_5^2 \quad (127)$$

$$e_5 = \sqrt{XT5^2 + YT5^2} \quad (128)$$

### **Tečná setrvačná síla $T_{D5}$**

$$T_{D5} = m_5 \cdot e_5 \cdot \alpha_5 \quad (129)$$

### **Setrvačný moment $M_{D5}$**

$$M_{D5} = J_{E5} \cdot \alpha_5 \quad (130)$$

$J_{E5}$  je moment setrvačnosti tělesa 5 k referenčnímu bodu  $E$ .

$$J_{E5} = J_{T5} + m_5 \cdot e_5^2 \quad (131)$$

### **d'Alebertova setrvačná síla**

Vektorově:

$$\vec{D}_5 = m_5 \cdot (-\vec{a}_E) \quad (132)$$

Po složkách:

$$D_{5X} = m_5 \cdot (-a_{Ex}) \quad (133)$$

$$D_{5Y} = m_5 \cdot (-a_{Ey}) \quad (134)$$

### **2.3.4.2 Rovnice dynamické rovnováhy sestavené d'Alebertovým způsobem**

#### **Rovnice dynamické rovnováhy ve směru osy x (globální souřadný systém)**

$$R_{FX5} - R_{EX5} + D_{5X} - O_5 \cdot \sin\left(\Psi_5 + \varphi_5 - \frac{\pi}{2}\right) + T_{D5} \cdot \cos\left(\Psi_5 + \varphi_5 - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (135)$$

$$\Psi_5 = \text{atan}\left(\frac{YT5}{XT5}\right) \quad (136)$$

#### **Rovnice dynamické rovnováhy ve směru osy y (globální souřadný systém)**

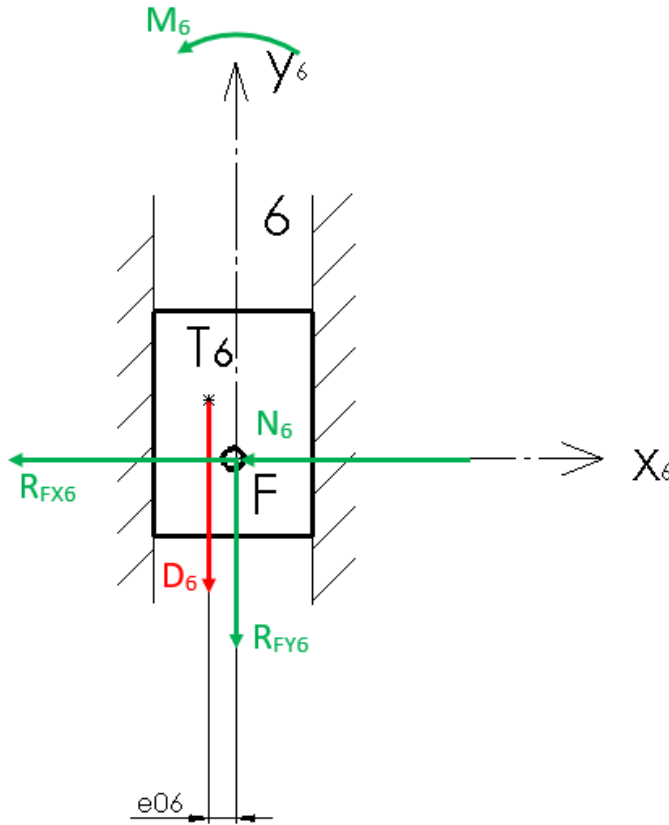
$$R_{FY5} - R_{EY5} + D_{5Y} + O_5 \cdot \cos\left(\Psi_5 + \varphi_5 - \frac{\pi}{2}\right) + T_{D5} \cdot \sin\left(\Psi_5 + \varphi_5 - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (137)$$

#### **Rovnice dynamické rovnováhy momentů k bodu E**

$$R_{FX5} \cdot \cos \varphi_5 \cdot l_5 + R_{FY5} \cdot \sin \varphi_5 \cdot l_5 + D_{5X} \cdot e_5 \cdot \cos\left(\Psi_5 + \varphi_5 - \frac{\pi}{2}\right) + D_{5Y} \cdot e_5 \cdot \sin\left(\Psi_5 + \varphi_5 - \frac{\pi}{2}\right) + M_{D5} = 0 \quad (138)$$

### 2.3.5 Těleso 6 – píst

Pro těleso 6 bude vhodnější vytvořit přesnější schéma tělesa, než je v úvodu pro výpočet kinematiky.



Obr. 39 Uvolnění tělesa 6

Těleso 6 je ve skutečnosti píst, má tedy s rámem posuvnou vazbu. Tato vazba lze uvolnit různými způsoby, v našem případě způsobu uvolnění se vazbou přenáší normálová síla a reakční moment. Vzhledem k tomu, že  $e_{06}$  je ve skutečnosti 0,7338mm bude vzniklý moment v porovnání s ostatními účinky velmi malý.

Těleso 6 koná posuvný pohyb po přímce rovnoběžné s globální osou y, díky tomu víme přesný směr d'Alembertovy setrvačné síly. Dále platí:

$$R_{FX6} = R_{FX5} \quad (139)$$

$$R_{FY6} = R_{FY5} \quad (140)$$

### 2.3.5.1 Fyzikální rovnice

**d'Alebertova setrvačná síla**

$$D_6 = m_6 \cdot a_u \quad (141)$$

### 2.3.5.2 Rovnice dynamické rovnováhy sestavené d'Alembertovým způsobem

**Rovnice dynamické rovnováhy ve směru osy x (globální souřadný systém)**

$$R_{FX6} + N_6 = 0 \quad (142)$$

**Rovnice dynamické rovnováhy ve směru osy y (globální souřadný systém)**

$$R_{FY6} + D_6 = 0 \quad (143)$$

**Rovnice dynamické rovnováhy momentů k bodu F**

$$M_6 + D_6 \cdot e_{06} = 0 \quad (144)$$

### 2.3.6 Zhodnocení odvozených popisů dynamiky mechanismu

V tuto chvíli máme popsány všechny silové a momentové účinky, které v mechanismu působí v rámci zvoleného zjednodušení. Ve skutečnosti působí na jednotlivé součásti v mechanismu i další silové či momentové účinky (například pasivní odpory), ty jsme se rozhodli zanedbat. Pasivní odpory se v průběhu životnosti motoru mění a velmi špatně se kvantifikují a obecně se při návrhu vyvažovacího ústrojí neuvažují. Zvolené zjednodušení je rozsahem odpovídající obvyklému zjednodušení při řešení podobných problémů.

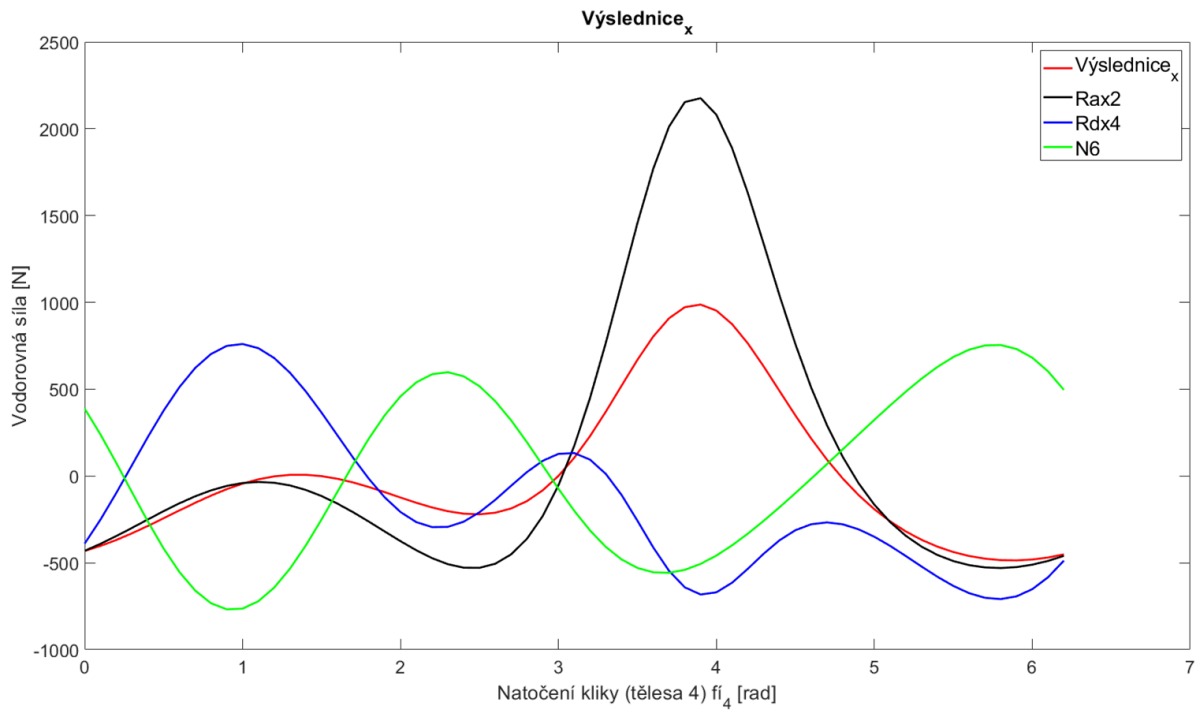
Nyní již zbývá z rovnic (90) až (144) vyjádřit silové reakce do rámu. To jsou v našem případě síly:  $R_{AX2}$ ,  $R_{AY2}$ ,  $R_{DX4}$ ,  $R_{DY4}$  a  $N_6$ .

## 2.4 Výpočet silových reakcí do rámu

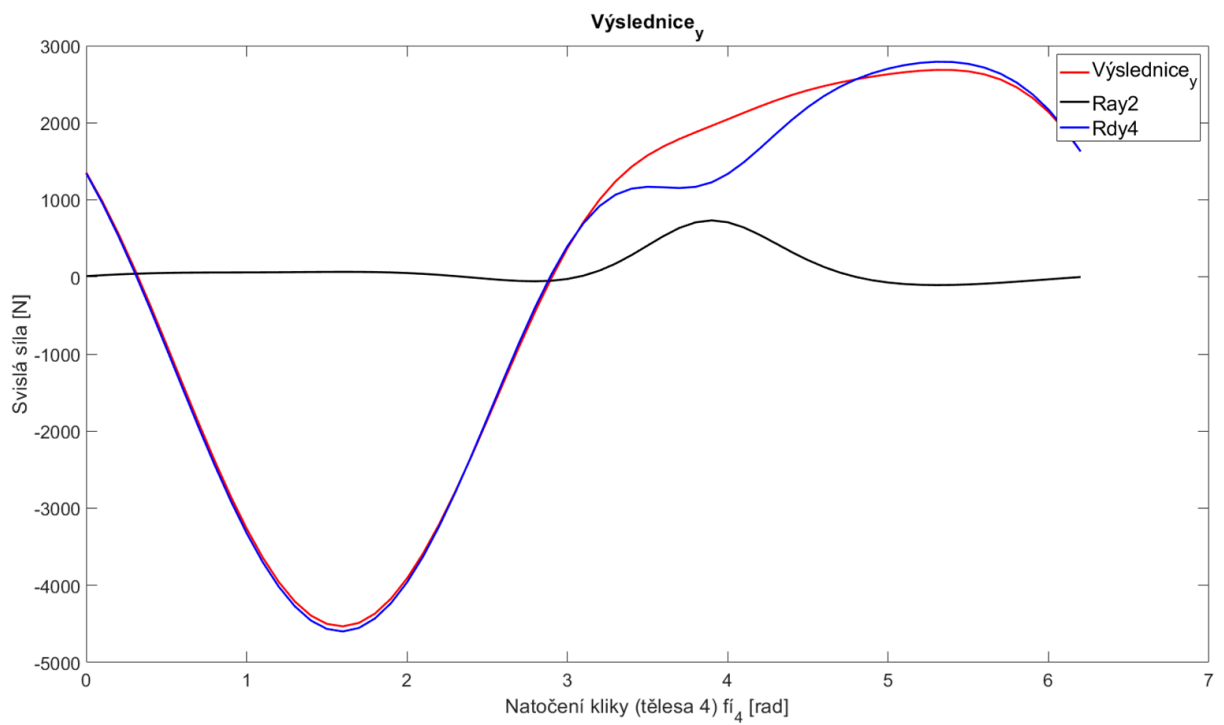
Řešení soustavy rovnic bylo provedeno v programu Matlab R2019b pomocí live skriptu. Live skript má výhodu oproti normálnímu skriptu v Matlabu, že po napsání matematické operace, rovnou tuto operaci provede a graficky ji zobrazí se správným formátováním, nikoli pouze jako text.

Do tohoto skriptu jsem napsal rovnice. Všechny neznámé jsem zadal jako symbolické. Rovnice jsem pro kontrolu souběžně počítal i ručně. Výpočet v Matlabu je v příloze. Výstupem jsou vyjádřené reakce do rámu, pomocí známých veličin.

V předchozí kapitole „2.2 Kinematika mechanismu“, jsem vyjádřil všechny kinematické veličiny v závislosti na úhlu  $\varphi_4$  a jeho časových derivacích. Tyto kinematické veličiny jsem dosadil do vypočtených reakcí. Pro úhlovou rychlost  $\omega_4 = 314,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (tj. 3000 otáček kliky za minutu) a nulovém úhlovém zrychlení  $\alpha_4 = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$  jsem vykreslil průběhy silových reakcí do rámu. Zároveň jsem vypočetl výslednice těchto sil v osách x a y a vykreslil jejich průběh. Průběhy jsou vykresleny v závislosti na úhlu natočení kliky. Grafy jsou uvedeny níže. Průběhy sil v grafu jsou brány vzhledem ke globálnímu souřadnému systému. V případě, že je některá síla záporná, tak ve skutečnosti směřuje proti smyslu osy souřadného systému.



Obr. 41 Průběhy sil v ose x při původním stavu vyvážení



Obr. 40 Průběhy sil v ose y při původním stavu vyvážení



## 2.5 Optimalizace vyvažovacího mechanismu

### 2.5.1 Výběr vhodných parametrů pro optimalizaci

Z dostupných informací vyplývá, že v současnosti lze upravovat pouze těleso 3, neboli vyvažovací závaží, neboť vše ostatní má zůstat dle původního návrhu. Hlavní funkcí tělesa 3 je zejména kompenzovat silové reakce od klikového mechanismu do rámu. Těleso 3 se ve skutečnosti skládá ze závaží a nosiče závaží, nosič závaží je již vyroben dle původních návrhů. Z toho vyplývá, že lze upravovat pouze hmotové charakteristiky tělesa 3.

Na tělese 3 lze upravovat: polohu těžiště tělesa  $[x, y]$ , hmotnost tělesa  $m$ , moment setrvačnosti  $J_{T3}$ .

### 2.5.2 Citlivostní analýza

Citlivostní analýza se provádí za účelem zjištění intenzity vlivu změn jednotlivých parametrů na sledovanou veličinu. Neboli jak velký vliv má změna parametru na výsledek. [11 kap. 7]

Z citlivostní analýzy vyplynulo, že moment setrvačnosti tělesa 3 na výslednici v ose  $x$  a v ose  $y$  nemá výrazný vliv. Neboť setrvačný moment tělesa 3 se rozloží na silovou dvojici, přičemž jedna silová reakce se přenese na těleso 4 a druhá na těleso 2. Následně se tyto reakce přes daná tělesa převedou do rámu a zde se navzájem kompenzují. Pro ostatní parametry (souřadnice těžiště  $[x, y]$  a hmotnost  $m$ ) bylo zjištěno, že v různých vzájemných konfiguracích jsou různě citlivá, avšak rozdíly v citlivosti nejsou výrazné, a tak nemá smysl upřednostňovat některý z nich při optimalizaci.

### 2.5.3 Hodnotící kritérium

Cílem optimalizace je minimalizovat reakce resp. amplitudy reakcí jak ve směru osy válce, tak ve směru kolmém. Proto je třeba zvolit vhodné kritérium kvality optimalizace, které bere v potaz obě minimalizované veličiny.

Hodnotící kritérium kvality vyvážení má tedy zajistit, aby optimální konfigurace systému měla co nejmenší amplitudy výslednice silových reakcí do rámu ve směru  $x$  a  $y$ .

Tímto kritériem jsou tedy globální extrémy výslednice v ose x (osa kolmá na osu válce) a v ose y (osa ve směru válce). Globálním extrémem je tedy globální minimum a maximum. Globálním minimem síly je v našem případě maximum dané síly ve směru proti globální ose. Hodnotícím kritériem vyvážení je tedy maximální rozptyl velikosti výslednice sil. Matematicky:

$$kriterium_{osa\ x} = \max(výslednice_x) - \min(výslednice_x) \quad (145)$$

$$kriterium_{osa\ y} = \max(výslednice_y) - \min(výslednice_y) \quad (146)$$

$$kriterium_{celkové} = kriterium_{osa\ x} + kriterium_{osa\ y} \quad (147)$$

V případě původního stavu jsou tyto hodnoty:

$$kriterium_{osa\ x} = 1473,2N$$

$$kriterium_{osa\ y} = 7218,1N$$

$$kriterium_{celkové} = 8691,3N$$

Vzhledem k periodicitě funkce výslednice sil, stačí hledat extrémy v rámci jedné otáčky kliky.

## 2.5.4 Optimalizační metody

Pro najetí optimální konfigurace bude třeba použít nějakou optimalizační metodu. Neboli vybrat vhodný postup pro hledání optimálních parametrů tělesa 3. Z citlivostní analýzy vyplynulo, že při optimalizaci se stačí věnovat pouze 3 parametrům, který jsou na sobě nezávislé.

### Metoda hrubé síly

Nejjednodušším způsobem hledání optimálních parametrů je pomocí metody tzv. hrubé síly, také známe jako metoda pokus omyl. Tato metoda spočívá ve zvolení různých hodnot parametrů a následném vyhodnocení kritéria a porovnání. Kdybychom chtěli zkusit 10 hodnot pro každý parametr, tak pro 3 parametry je to  $10^3$  výpočtů. Tato metoda je vhodná pro úlohy s malým počtem parametrů a s rychlým vyhodnocením kritériální funkce. V našem případě tato metoda není vhodná.

## Analytické řešení

Analytické řešení spočívá v hledání minima nebo maxima funkce pomocí derivací.

$$\frac{df}{dx_i} = 0, \text{ pro } i=1, 2, \dots, n$$

Obvykle se jen zkontrolují hodnoty všech konfigurací s nulovými prvními derivacemi. Za účelem vyloučení sedlových bodů je vhodné posoudit i znaménko druhých derivací:

$$\frac{d^2f}{dx_i^2} < 0 \text{ pro všechna } i \text{ v případě maxima}$$

$$\frac{d^2f}{dx_i^2} > 0 \text{ pro všechna } i \text{ v případě minima}$$

Vzhledem k tomu, že kritériální funkce v našem případě není analytická, nelze analyticky hledat její extrémy, tudíž je tato metoda nepoužitelná.

## Metoda podél os

Při této metodě se nejprve zvolí startovací bod a pro něj se vypočítá hodnotící kritérium. Následně se zvolí další bod a opět se pro něj vypočte zvolené hodnotící kritérium. Pokud se kritérium zlepšilo, pak ve stejném směru pokračujeme, dokud se kritérium zlepšuje. Jakmile se přestane zlepšovat, zvolíme jiný směr neboli jiný parametr, který měníme.

Podél os se tato metoda jmenuje, protože pro dvouparametrovou optimalizaci si lze dané hodnoty parametrů zakreslit do grafu. Pak daná konfigurace je v grafu v bodě o souřadnicích  $x$  a  $y$ , kde  $x$  je první parametr a  $y$  druhý parametr. Při optimalizaci měníme současně jen jeden parametr, a tak se vždy pohybujeme buď podél osy  $x$  nebo podél osy  $y$ . Tato metoda je také zpracovaná v zahraniční literatuře pod názvem Hill Climbing v literatuře [12 kap. 10]

## Použitá metoda optimalizace

Použitá metoda optimalizace vychází z metody podél os. Avšak pracuje se všemi parametry najednou. Použitá metoda má postup podobný metodě Multi-Objective Hill Climbing, blíže popsané v literatuře [12 s. 254].

Nejprve se zvolí startovací bod, v našem případě se nabízí původní stav. Dále se vybere jeden ze tří parametrů, které lze měnit a tento parametr se o daný krok zvětší, pokud se kritérium zlepšilo, úpravu se nechá a přistoupí ke zvětšení dalšího parametru. V našem případě se první zvětší hmotnost, podle vyhodnocení kritéria se změna buď nechá nebo se vrátí. Pak se zvětší vodorovná vzdálenost těžiště od počátku lokálního souřadného systému. Následně se opět vypočte kritérium a rozhodne se o ponechání poslední úpravy. Poté se zvětšuje svislá vzdálenost těžiště od počátku souřadnic. Nakonec se proces opakuje, ale teď se již parametry zmenšují.

Takže během prvního cyklu se upraví všechny 3 parametry tak, aby se zlepšilo hodnotící kritérium. Při dvou parametrové optimalizaci by se dalo říct, že se udělá vždy jeden krok podél jedné osy a pak hned krok podél druhé osy, vždy tím směrem, kterým se kritérium zlepšuje.

Když už žádné zvětšení a ani zmenšení některého ze tří parametrů o daný krok nepřinese zlepšení hodnotícího kritéria, změní se krok na 0,5 násobek předchozího kroku a postup se opakuje. V prvním kole je krok  $10 \cdot 10^{-1}$  kg a pro polohu těžiště je to 10mm. Takže v druhém kole je krok  $5 \cdot 10^{-1}$  kg pro hmotnost  $m_3$ , 5mm pro  $y_{T3}$  a 5mm pro  $x_{T3}$ . Pro základní krok a pro koeficient zmenšení kroku lze volit samozřejmě i jiné hodnoty, ale pro daný problém zvolené hodnoty konvergovaly nejrychleji.

Takto program cykluje a optimalizuje dané vyvážení, dokud není krok menší než nastavená mez. V současnosti je mez 0,0001, což je sice až moc přesné, ale na dobu výpočtu to v podstatě nemá vliv. Ve chvíli, kdy je tedy krok menší než 0,0001, program vypíše poslední optimální konfiguraci, tj. poslední použité  $m_3$ ,  $y_{T3}$  a  $x_{T3}$ . Následně vykreslí průběhy jednotlivých sil a výslednic v osách x a y.

Nejrychleji proběhla optimalizace při počátečním kroku 10 a při snížení kroku na konci každého cyklu 0,5x. V takovém případě se cyklus zopakoval pouze 84x. Avšak optimalizační program má i variantu s jemnějším krokem, neboť pro výběr skutečné konfigurace je vhodnější mít spočteno více možností, obzvláště když výpočet netrvá dlouho.

Pro představu, když je mez, při které se cyklus zastaví nastavena na 0,001, počáteční krok je nastaven na 1 mm, 1 kg a násobitel změny kroku je nastaven na 0,8, pak výpočet trvá 4 minuty a 3 sekundy a program zopakoval cyklus 187, tzn. 187x změnil krok úprav. Pro mez 0,0001 výpočet trvá 4 minuty a 35 sekund, přičemž cyklus úprav se provede 216x a tolikrát se i změní krok úprav.

### 2.5.5 Výsledná optimalizovaná konfigurace

Do optimalizačního programu byla vložena původní hmotnost  $m_3$  a původní souřadnice těžiště tělesa 3. Program se spustil, nejprve načtl kinematiku a dosadil do ní. Pak vypočetl síly pro původní konfiguraci a následně dopočítal hodnotící kritérium a začal měnit parametry a optimalizovat vyvážení.

Pro porovnání jsou níže uvedené parametry původní konfigurace, včetně vypočteného hodnotícího kritéria.

#### Původní stav

Parametry:

hmotnost  $m_3 = 1.3987$  kg

poloha těžiště [48.29, 22.79]

Hodnotící kritéria:

$kriterium_{osa\ x} = 1473,2N$

$kriterium_{osa\ y} = 7218,1N$

$kriterium_{celkové} = 8691,3N$

#### Optimalizovaný stav

Parametry:

hmotnost  $m_3 = 4.703$  kg

poloha těžiště [50.23, 23.09]

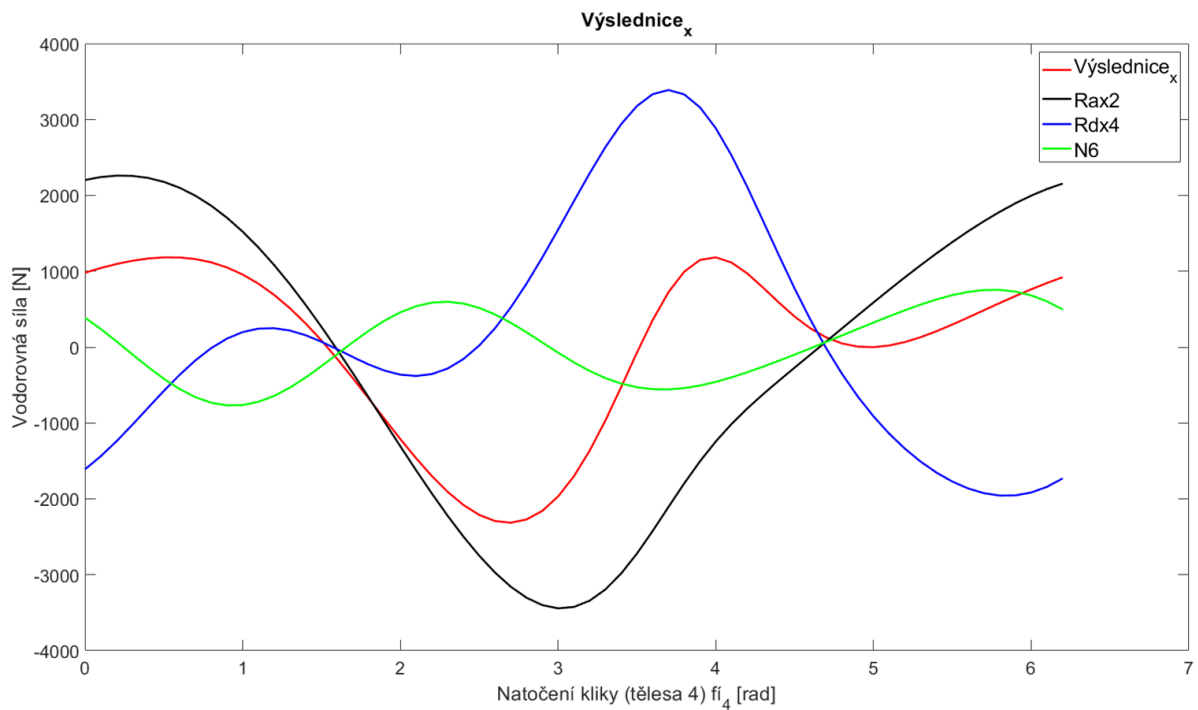
Hodnotící kritéria:

$kriterium_{osa\ x} = 3501,1N$

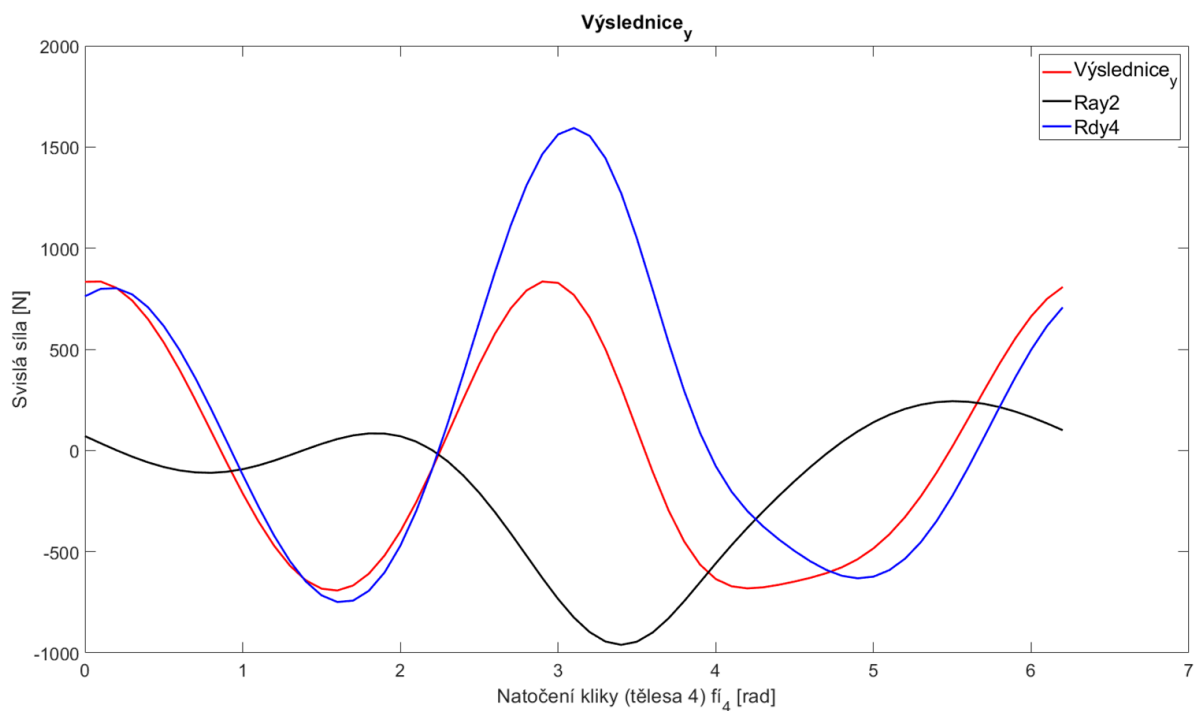
$kriterium_{osa\ y} = 1521,7N$

$kriterium_{celkové} = 5022,8N$

## Průběh sil optimalizované konfigurace



Obr. 42 Průběh sil v ose x při optimalizované konfiguraci



Obr. 43 Průběh sil v ose y při optimalizované konfiguraci

### 2.5.5.1 Zhodnocení výsledného optimalizovaného stavu

Z průběhů jednotlivých reakcí do rámu, viz obr. 42 a obr. 43, je zřejmé, že oproti výchozímu stavu se amplitudy některých reakcí zvýšily, ale zároveň se přibližně na polovinu zmenšila hodnota mezi minimem a maximem výslednice sil. V důsledku vyšších reakcí v bodě A v bodě D, bude více namáhaný zejména karter motoru, ložiska na klice (bod D) a ložiska ojnice vyvažovacího mechanismu (bod A), ale mnohem méně bude namáháno uchycení motoru do rámu a rám motocyklu. Z průběhu výslednice je vidět, že došlo k snížení amplitud sil 1. řádu, v tom důsledku jsou teď dominantní síly 2. řádu, které tímto mechanismem nelze účinně potlačovat.

Hmotnost závaží se zvýší přibližně 3x. Nárůst hmotnosti motoru je pak tedy o 3,3kg, ale za současného snížení reakcí do rámu o 3,7kN, což se nejspíše vyplatí.

Během návrhu jsme neuvažovali žádné omezení dané optimalizace. Ve skutečnosti je ovšem spousta omezení, například maximální přírůstek hmotnosti, případně poloha těžiště s ohledem na maximální pracovní prostor kvůli zástavbě do klikové skříně apod. Naše výsledná optimalizovaná konfigurace se zdá být proveditelnou, avšak kdyby se při skládání motoru, případně v jiné části návrhu motoru zjistilo, že výsledné konfigurace nelze dosáhnout, lze program jednoduše upravit. Každá úprava jednotlivého parametru je totiž psána pomocí podmínkové funkce. Tato funkce na základě splnění podmínky rozhodne o dalším postupu. V našem případě rozhoduje, zdali provedenou úpravu ponechá nebo ji vrátí, děje se tak na základě zlepšení, případně zhoršení hodnotícího kritéria. K této podmínce by se dala přidat jednotlivá omezení parametrů. Případně lze některý z parametrů vyloučit z optimalizace. Bohužel nemáme informace o žádných omezeních a v současnosti ani o proveditelnosti optimalizované konfiguraci. Výstupem je tedy široce uplatnitelný a snadno modifikovatelný optimalizační program. Na následující straně je uvedený demonstrativní příklad, kdy je dáno několik různých hmotností závaží vyvažovacího mechanismu (těleso 3) a je třeba dopočítat polohu těžiště. Výsledky jsou v tabulce 1. V praxi to může představovat situaci, kdy máme vyrobená závaží a hledáme kam je umístit na těleso 3. Program, který na základě zadané hmotnosti závaží počítá optimální polohu těžiště, je v příloze.

Tabulka 1 Optimalizovaná poloha těžiště pro několik různých hmotností tělesa 3

Zadaná hmotnost závaží tělesa 3 [kg]	4,7033	4,4	3,9	3,4	2,7	2,2	1,6	1,4
Optimalizovaná poloha těžiště $X_{T3}$ [mm]	50,23	51,3	51,42	54,4	59,36	63,92	74,23	78,92
Optimalizovaná poloha těžiště $Y_{T3}$ [mm]	23,0944	23,5	25,23	26,6	25,7	24,98	21,98	20,86
Hodnotící kritérium [N]	5023	5132	5436	5757	6360	6892	7567	7808
Rozptyl výslednice v ose x (peak2peak) [N]	3501	3252	2932	2492	1889	1464	925	758
Rozptyl výslednice v ose y (peak2peak) [N]	1522	1880	2504	3265	4471	5428	6642	7050

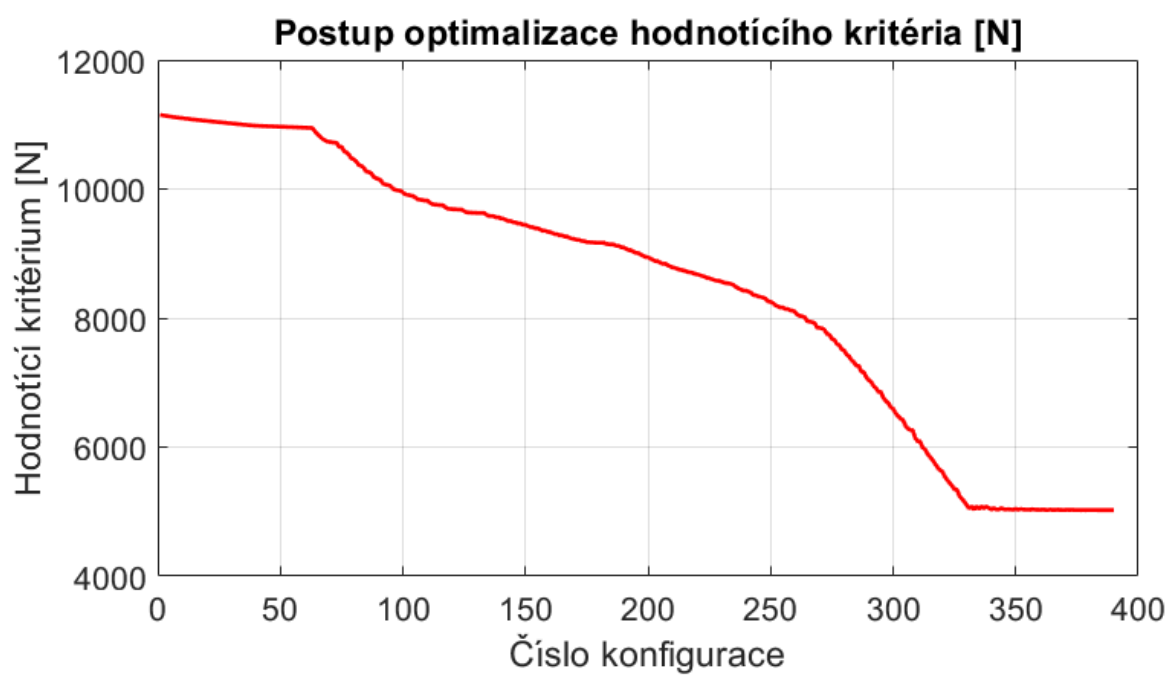
V průběhu výsledné optimalizace bez omezení se vypočetly i různé další optimalizované konfigurace, které by bylo možné také použít. Program totiž každou konfiguraci, pro kterou spočítá hodnotící kritérium, zapíše do matice. Takže po optimalizaci je v nabídce přibližně 200 dalších možných konfigurací a k nim velikost výslednic. Níže je tabulka 2 s několika vybranými stavy konfigurací. Uvedená řešení, představují konfigurace, které nejsou nejoptimálnější pro jeden z parametrů, jako pro danou hmotnost byla tabulka 1, ale jsou jednou z možností konfigurace, která je lepší než výchozí. Jsou vhodné pro představu při volbě omezení, případně při návrhu ostatních součástí, způsobujících nějaká omezení. Nebo i pro případ samotného výběru výsledné konfigurace.

Tabulka 2 Možné další konfigurace

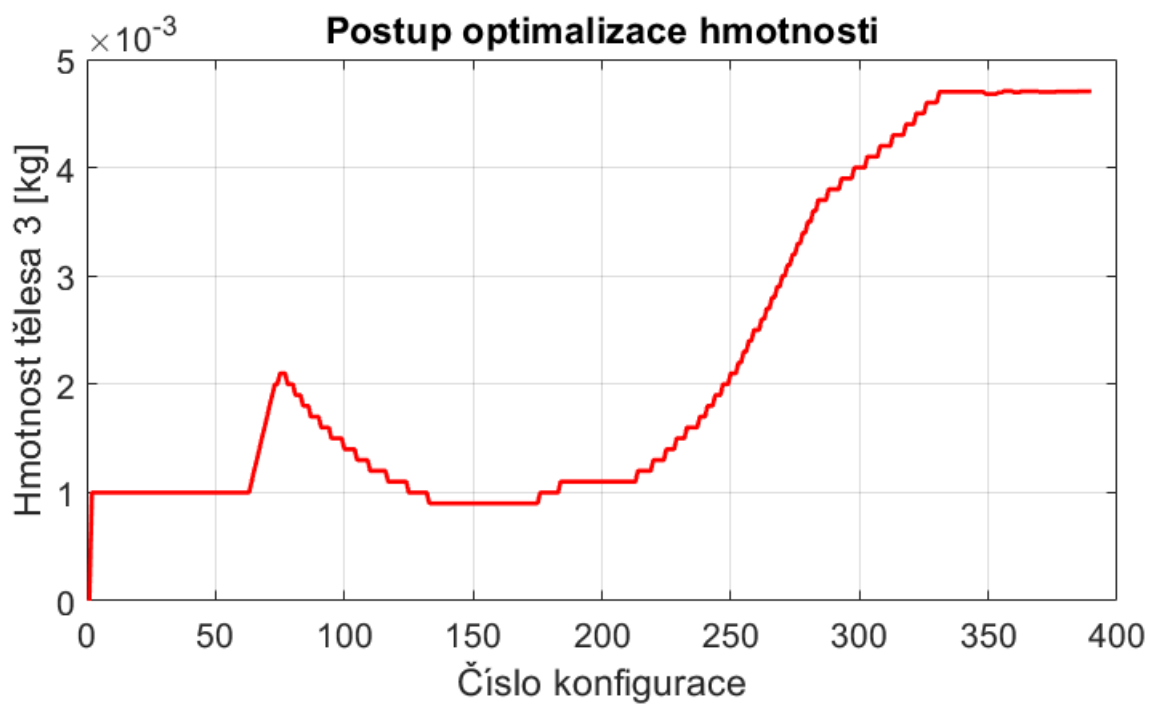
Hmotnost závaží (těleso 3) [kg]	4,7033	4,7026	4,6987	4,3987	3,8987	3,3987	2,6987	1,5987	1,3987
Poloha těžiště $X_{T3}$ [mm]	50,23	50,3	50,3	47,3	42,3	42,3	47,3	48,3	48,3
Poloha těžiště $Y_{T3}$ [mm]	23,0944	23,09	23,79	15,79	3,79	0	0	0,79	22,8
Hodnotící kritérium [N]	5023	5031	5067	5717	6790	7189	7451	8321	8691
Rozptyl výslednice v ose x (peak2peak) [N]	3501	3506	3514	3232	2784	2366	1813	1079	1473
Rozptyl výslednice v ose y (peak2peak) [N]	1522	1525	1553	2485	4006	4823	5638	7242	7218

V příloze je také optimalizační program s jemnějším krokem. Daný krok je tak nastavený proto, aby program spočítal více možných konfigurací. Výchozí konfigurace je nastavena na  $x_{T3} = 1$  mm,  $y_{T3} = 1$  mm,  $m = 1$  kg. Pro získání širší nabídky konfigurací, je vhodné, aby výchozí stav nebyl blízko výsledné optimalizované konfigurace. Níže jsou různé konfigurace zakreslené v grafech, a tak je možno vidět postup optimalizace jednotlivých parametrů. Přičemž na svislé ose je vždy hodnota dané optimalizované veličiny (vodorovná poloha těžiště, svislá poloha těžiště, hmotnost, hodnotící kritérium), na vodorovné ose je pak číslo dané konfigurace. Výchozí stav je označen jako konfigurace 1.

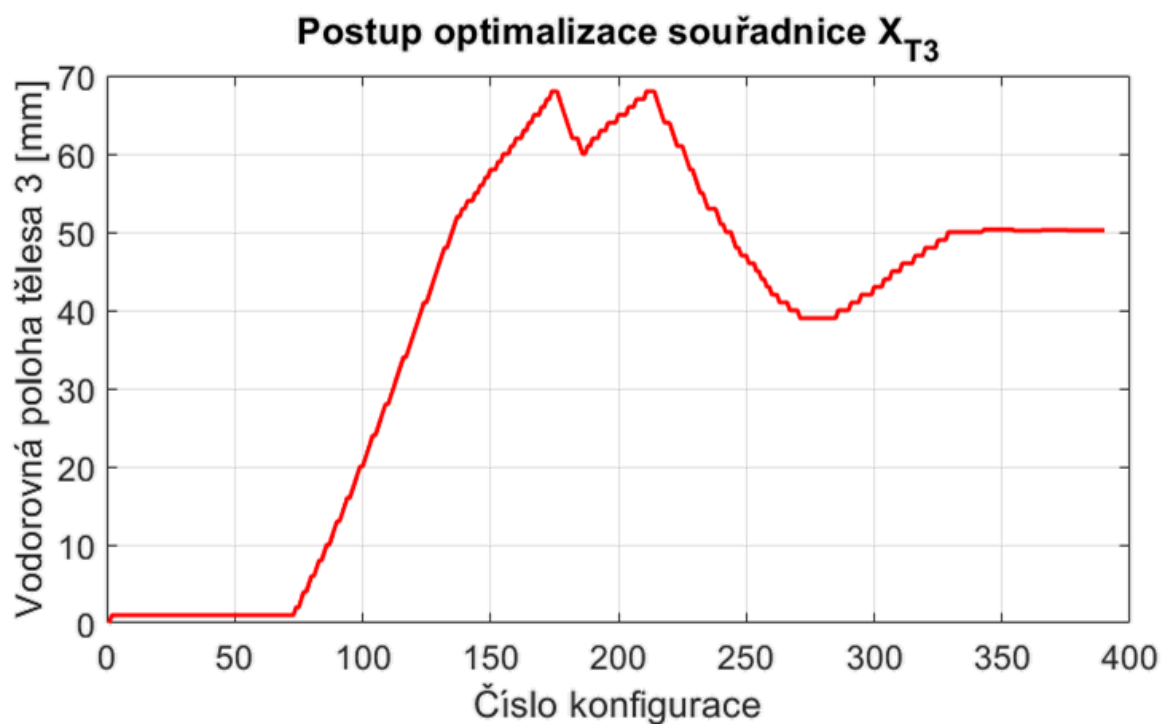




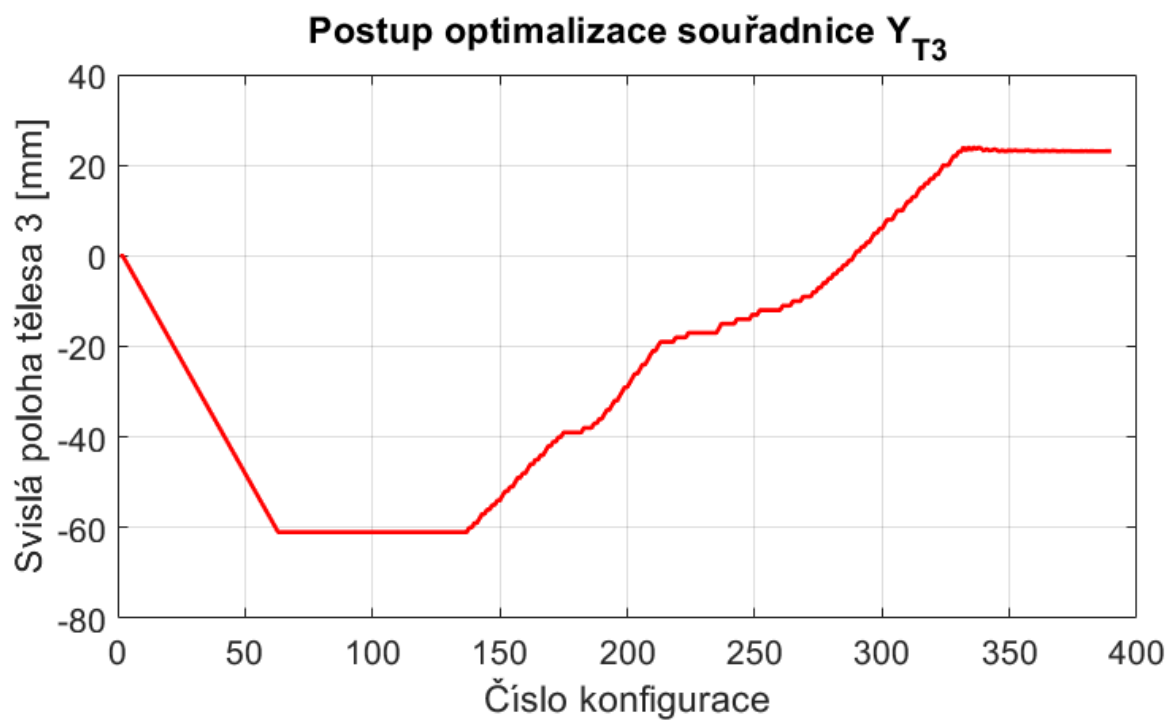
Obr. 44 Průběh optimalizace hodnotícího kritéria



Obr. 45 Průběh optimalizace hmotnosti tělesa 3



Obr. 47 Průběh optimalizace vodorovné polohy těžiště tělesa 3



Obr. 46 Průběh optimalizace svislé polohy těžiště tělesa 3

### 3 Závěr

Na začátku práce, v teoretické části jsem provedl rozbor silových a momentových účinků vznikajících v jednoduchém klikovém mechanismu pístového spalovacího motoru. Následně jsem popsal nejběžnější principy vyvážení klikového mechanismu včetně principu vyvažování zkoumaného motoru ČZ500 typ 863 OHC. U vybraných vyvažovacích mechanismů jsem provedl rozbor a následně zhodnotil jejich přínosy a negativa a uvedl i konkrétní příklady použití.

V praktické části jsem vybral způsob popisu. Jednotlivé součásti a jejich funkce v mechanismu jsem stručně popsal a pokračoval sestavením matematického modelu a řešení první úlohy dynamiky. To spočívalo v získání kinematického popisu jednotlivých součástí a sestavení výpočtového modelu v programu Matlab. Následně jsem určil silové a momentové účinky působící na jednotlivá tělesa v mechanismu v rámci zvoleného zjednodušení a opět sestavil funkční program pro jejich výpočet a vykreslil průběhy jednotlivých sil působících na karter motoru a jejich výslednice.

Poslední část práce se věnovala optimalizaci vyvažovacího mechanismu. Vzhledem k možnostem skutečných úprav motoru a citlivostní analýze jsem vybral parametry vhodné pro optimalizaci. Dle vybrané metody optimalizace jsem vytvořil program, který dokáže na základě vstupních parametrů mechanismu spočítat a vykreslit průběhy reakcí do rámu při počáteční konfiguraci mechanismu a následně vybranou optimalizační metodou určí hmotové parametry závaží vyvažovacího mechanismu. Program nakonec vykreslí průběhy jednotlivých reakcí do karteru motorů a jejich výslednici. Krom výsledné optimalizované konfigurace program vypíše i velké množství dalších konfigurací a k nim příslušné hodnotící kritérium. Což je vhodné v situaci, kdy z důvodů požadavku na prostor, případně nároků na nízkou hmotnost, není možné mechanismus sestrojít podle výsledné optimalizované konfigurace. Konstruktor si tak může vybrat vhodnou konfiguraci sám. Vybrané příklady konfigurací jsou na předchozí straně, viz tabulka na straně 7472.

Výsledný optimalizační program lze široce uplatnit, je vhodný pro jakýkoli motor, který má shodný princip vyvážení. Stačí pouze zadat rozměrové a hmotové parametry jednotlivých součástí a spustit program.

Sestavený dynamický model je možné dále využít také pro optimalizaci setrvačných parametrů kliky, a to samostatně nebo společně s parametry vyvažovacího

mechanismu. Při rekonstrukci motoru bylo cílem zachovat co nejvíce původního, proto proběhla optimalizace pouze úpravou vyvažovací hmoty. Lépe by ovšem bylo optimalizovat setrvačné parametry alespoň kliky a vyvažovacího závaží najednou (šesti parametrová optimalizace), případně přidat do optimalizace i parametry tělesa 2. Sestavený model by umožňoval také optimalizaci kinematiky vyvažovacího mechanismu, ale tato úloha by svým rozsahem odpovídala spíše diplomové práci.

Práce by se tedy dala rozšířit o optimalizaci hmotových charakteristik tělesa 4 – klikového hřídele, tělesa 2 – ojnice vyvažovacího mechanismu, nakonec o optimalizaci délek vybraných součástí a tím i optimalizaci kinematiky pro výhodnější dynamiku. Nejvyšším krokem optimalizace by pak mohlo být hledání optima na základě hodnotícího kritéria v určitém spektru otáček neboli pro určitý interval úhlových rychlostí kliky.

Závěrečná práce značně rozšířila mé znalosti a obzory, jak v oblasti dynamiky, tak i práci v softwarech Autodesk Inventor, SolidWorks a Matlab. Proto práci shledávám sám pro sebe velmi přínosnou.

## Seznam použité literatury

- [1] JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA. *Mechanika. sv. 2., Dynamika*. 1. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987.
- [2] MUCHNA, Zdeněk. *Modelování a simulace silničních vozidel se zaměřením na pohony*. Plzeň, 2012. bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni.
- [3] VACULA, Jan. *Jednoválcový čtyřdobý motor motokrosového motocyklu*. Brno, 2015. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství.
- [4] VRÁTNÍK, Pavel. *Vyvažování motorů s nízkým počtem válců*. Plzeň, 2017. Diplomová práce. ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI.
- [5] MUNIER, Has. Some science of balance [online]. nedatováno [vid. 2022-03-31]. Dostupné z: [https://www.academia.edu/33061689/Some\\_science\\_of\\_balance](https://www.academia.edu/33061689/Some_science_of_balance)
- [6] VLK, Frantisek. *Převodová ústrojí motorových vozidel: spojky, převodovky, rozvodovky, diferenciály, hnací hřídele, klouby*. 1. Brno: Nakladatelství a vydavatelství Vlk, 2000. ISBN 978-80-238-5275-2.
- [7] *Norton Motorcycle Sparts Specialist - Genuine Norton Commando Factory Spare Parts - Genuine Norton Dominator Factory Spare Parts - Norton Motorbikes* - [online]. [vid. 2022-03-31]. Dostupné z: <https://andover-norton.co.uk/en/our-bikes/detail/291>
- [8] The Power of the Parallel Twin Engine | DRAWING THE LINE. *Motorcyclist* [online]. [vid. 2022-03-31]. Dostupné z: <https://www.motorcyclistonline.com/power-parallel-twin-engine-motorcycles-engine-tech-motorcyclist-drawing-line/>
- [9] OLEHLA, Miroslav, Slavomír NĚMEČEK a Ivan ŠVARC. *Automatické řízení*. 2. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2011. ISBN 978-80-7372-732-1.
- [10] BRADSKÝ, Zdeněk, Václav JÁČ, Rudolf VRZALA, TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCÍ a pružnosti a pevnosti KATEDRA MECHANIKY. *Mechanika II.: kinematika*. Liberec: Technická univerzita, Strojní fakulta, 2001. ISBN 978-80-7083-478-7.
- [11] SLAVÍK, Jaromír, Vladimír STEJSKAL a Vladimír ZEMAN. *Základy dynamiky strojů*. Praha: ČVUT, 1997. ISBN 978-80-01-01622-0.
- [12] WEISE, Thomas. *Global Optimization Algorithms – Theory and Application* – [online]. 2. Anhui, China: Institute of Applied Optimization, 2006. Dostupné z: <http://www.it-weise.de/projects/book.pdf>

## Seznam příloh

Příloha 1 – Matlab skript: Kinematika těles 2 a 3 výpočet

(kin\_parametricky\_klika\_vypocet.m)

Příloha 2 – Matlab skript: Kinematika těles 5 a 6 výpočet

(kin\_parametricky\_ojnice\_pist\_vypocet.m)

Příloha 3 – Matlab skript: Kinematika těles 2 a 3 grafické zobrazení průběhu pro validaci výsledků

(kin\_parametricky\_klika\_graf.m)

Příloha 4 – Matlab skript: Kinematika těles 4 a 5 grafické zobrazení průběhu pro validaci výsledků

(kin\_parametricky\_ojnice\_pist\_graf.m)

Příloha 5 – Matlab skript: Záznam parametrického vyjádření funkce úhlu  $\varphi_2, \varphi_3$

(kin\_fi2\_fi3.mat)

Příloha 6 – Matlab skript: Záznam parametrického vyjádření funkce úhlu  $\varphi_5$  a souřadnice  $u$

(kin\_fi5\_u.mat)

Příloha 7 – Matlab liveskript: Výpočet soustavy rovnic dynamiky

(dyn\_vypocet.mlx)

Příloha 8 – Matlab skript: Optimalizační program

(rychla\_optimalizace.m)

Příloha 9 – Matlab skript: Optimalizační program s jemným krokem a výpisem dalších konfigurací

(jemny\_krok\_optimalizace\_dyn.m)

Příloha 10 – Matlab skript: Optimalizační program, který pro danou hmotnost a vypočte optimální polohu těžiště

(pouze\_xt\_yt\_dynamika.m)