UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Srovnání různých přístupů k intervalové a fuzzy aritmetice

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.**
Vypracoval: **Lukáš Konopka**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Lukáš Konopka

Název práce: Srovnání různých přístupů k intervalové a fuzzy aritmetice

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá srovnáním různých přístupů k intervalové a fuzzy aritmetice. V první části jsou zavedeny základní pojmy z teorie fuzzy množin, a to především definice fuzzy množiny a fuzzy čísla. V druhé části je nejdříve popsána intervalová a fuzzy aritmetika. Následně jsou zde představeny postupně tři přístupy k intervalové a fuzzy aritmetice, a to konkrétně standardní intervalová a fuzzy aritmetika, podmíněná fuzzy aritmetika a Hukuharova diference. Každý z přístupů je nejdřív popsán teoreticky a posléze se zkoumá platnost zavedených vlastností a rovnic. V závěru této práce je provedeno souhrnné srovnání jednotlivých přístupů.

Klíčová slova: Fuzzy množiny, Fuzzy čísla, aritmetika, interval, podmíněná fuzzy aritmetika, Hukuharova diference

Počet stran: 44

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Lukáš Konopka

Title: Comparison of various approaches to interval and fuzzy arithmetics

Type of thesis: Bachelor's

Department:
Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: This bachelor thesis deals with the comparison of various approaches to interval and fuzzy arithmetics. The first part of the thesis consists of the basic terms from fuzzy sets theory, mainly of the definitions of fuzzy sets and fuzzy number. The second part of the thesis deals with the description of interval and fuzzy arithmetics. Then, there are introduced three approaches to interval and fuzzy arithmetics, namely: standard interval and fuzzy arithmetics, constrained fuzzy arithmetic and Hukuhara difference. Each of the approaches is at first described theoretically, then the applicability of established properties and equations is examined. In the end of this bachelor thesis an overall comparison of each of the individual approaches is made.

Key words: Fuzzy sets, Fuzzy numbers, arithmetics, interval, constrained fuzzy arithmetic, Hukuhara difference

Number of pages: 44

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 25. dubna 2015

Obsah

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph.D. za spolupráci a věnovaný čas při konzultacích i opravách. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za podporu a pochopení v tomto stresujícím období.

1. Úvod

Dokážete si představit, že bychom každý z nás žili ve světě, který by byl jednoznačný a na všechno bychom dostali jasnou a pravdivou odpověď, ať už pozitivní nebo negativní? Představa to může být hezká, ale realita je odlišná. Dennodenně se v životě setkáváme s neurčitostí, nejasností neboli vágností. Například potkáte-li na ulici člověka a neřeknete si, že ten váží přesně 68,456 kg. Většina lidí by řekla, že váží kolem 70 kg nebo že je spíše hubený. Ale jak víme, co pojem spíše hubený (tlustý, „tak akorát“, vyhublý...) znamená číselně? Nebo co se stane, zeptáte-li se někoho ze svých známých, zda půjde zítra s vámi na oběd. Na tuto otázku se dá jednoznačně odpovědět „ano, půjdu“ nebo „ne, nepůjdu“, ale také můžete dostat odpovědi „ještě nevím“, „asi ano“, „spíše ne“, atd. Někoho by napadlo řešit tento problém pomocí pravděpodobnosti, že budeme počítat, s jakou pravděpodobností vlastně další den dorazí. Pokud by odpověděl, že na 70 % přijde, jednalo by se o pravděpodobnost, ale jakou pravděpodobnost bychom přiřadili odpovědím „spíše ne“, „asi ano“? Problém s neurčitostí, vágností se vyskytuje právě i v matematice, jelikož bychom chtěli vědět, jak počítat s těmito neurčitými hodnotami.

V této bakalářské práci se zaměříme na způsoby a přístupy k intervalové a fuzzy aritmetice. V první části této práce se seznámíme se základními pojmy z oblasti teorie fuzzy množin. V další kapitole si řekneme nejdůležitější informace o intervalové a fuzzy aritmetice, zavedeme vlastnosti a rovnice, které budeme u jednotlivých přístupů zkoumat a plynule navážeme na první přístup k dané problematice, který se nazývá standardní intervalová a fuzzy aritmetika. Poté se podíváme na přístup podmíněné fuzzy aritmetiky a na přístup pomocí Hukuharovy diference. V závěru této práce všechny tyto přístupy porovnáme.

2. Základní pojmy teorie fuzzy množin

V této kapitole se seznámíme s nejdůležitějšími pojmy z fuzzy množin. S těmito pojmy budeme poté pracovat v následujících kapitolách. Tato kapitola byla zpracována podle [4], [5], [6], [7], [9], [12]. Obrázky jsou vytvořeny v programu FuzzME.

2.1. Fuzzy množiny

Nejdříve si uvedeme základní pojmy z teorie množin a z nich posléze přejdeme k základním pojmům z teorie fuzzy množin.

Definice 2.1 *Množinou* rozumíme určitou skupinu objektů V. O libovolném objektu přitom můžeme říci, zda do této množiny patří nebo nepatří.

Omezíme se pouze na studium libovolných, ale pevně daných podmnožin jedné tzv.*univerzální množiny (universa)*, kterou budeme značit U.

Jedním ze způsobu zadání množiny je pomocí charakteristické funkci, kterou si nyní zadefinujeme.

Definice 2.2 *Charakteristická funkce* χ_A množiny A, kde $\chi_A : U \to \{0, 1\}$, je definovaná pro všechna $x \in U$ vztahem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } x \in A, \\ 0 \ \text{ jinak.} \end{cases}$$

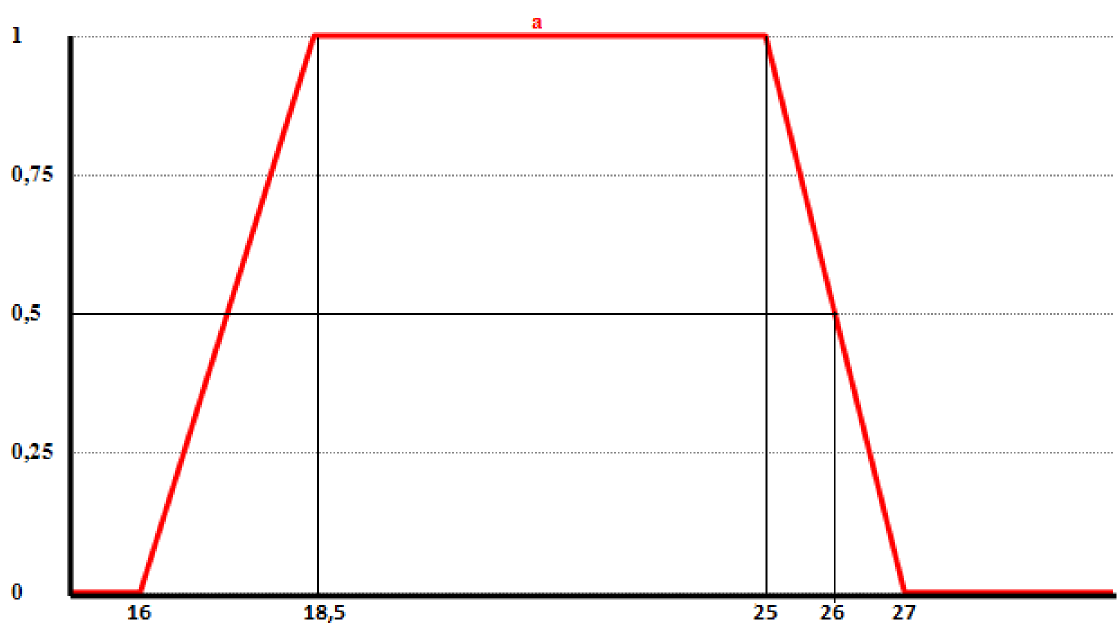
Charakteristická funkce může nabývat pouze dvou hodnot, a to 1, pokud daný prvek do množiny patří, nebo 0, pokud nepatří.
Charakteristická funkce klasické množiny lze zobecnit na funkci, která nabude více hodnot. Množinou hodnot bude interval reálných čísel $\langle 0, 1\rangle$ nebo jeho podmnožina. Uvažujeme opět universum U a nyní můžeme zadefinovat fuzzy množinu i její funkci příslušnosti.

Definice 2.3 Nechť je daná neprázdná množina U, tzv. univerzum. Pak *fuzzy množina* A na univerzu U je definována zobrazením $\mu_A : U \to \langle 0, 1\rangle$.

Funkci μ_A nazýváme *funkcí příslušnosti fuzzy množiny* A. Pro každé $x \in U$ nazveme hodnotu $\mu_A(x)$ stupněm příslušnosti prvku x k fuzzy množině A.

Teď tedy funkce příslušnosti fuzzy množiny může nabývat kromě krajních hodnot i hodnoty mezi 0 a 1.

Příklad 2.1 U následujícího příkladu jsem čerpal z [13]. BMI neboli index tělesné hmotnosti je číslo, které udává, zda dospělý člověk je podvyživený, má normální váhu nebo trpí nadváhou, či obezitou. Index se vypočítá, když vydělíme hmotnost daného člověka druhou mocninou jeho výšky. Uvažujme nyní fuzzy množinu „ideální váha člověka". U ideální váhy člověka se uvádí, že člověk má mít BMI v rozmezí 18,5-25. (Pro představu to pro 180 cm vysokého muže představuje váhu mezi 60-81 kg).Určíme si krajní hodnoty BMI, a to 16 a 27, které nám značí minimální a maximální BMI pro fuzzy množinu „ideální váha člověka". Nakresleme si nyní obrázek, který bude reprezentovat naši zadanou fuzzy množinu „ideální váha člověka".



Obrázek 1: Funkce příslušnosti fuzzy množiny z příkladu 2.1

Z obrázku 1 vidíme, že funkce příslušnosti je u ideálního rozmezí BMI 18,5-25 jednička. Pokud by daná osoba měla například BMI 26, můžeme říci, že má z půlky „ideální váhu člověka“, a tedy funkce příslušnosti této fuzzy množiny by byla 0,5, a to znamená, že tento člověk napůl patří do fuzzy množiny „ideální váha člověka“.

Nyní si zavedeme nezbytné pojmy, které popisují fuzzy množinu. S těmito pojmy budeme posléze pracovat.

Poznámka 2.1 Pro zjednodušení zápisu budeme dříve značenou funkci příslušnosti μ_A zapisovat jako $A(.)$ a následně stupeň příslušnosti $\mu_A(x)$ jako $A(x)$, kde $x \in U$.

Definice 2.4 Nechť je dána fuzzy množina A definovaná na univerzu U a reálné číslo $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak α- *řezem* fuzzy množiny A nazýváme (ostrou) množinu

$$A_\alpha = \{x \in U \mid A(x) \geq \alpha\}.$$

Definice 2.5 *Jádrem* fuzzy množiny A na univerzu U rozumíme (ostrou) množinu

$$KerA = \{x \in U \mid A(x) = 1\}.$$

Definice 2.6 *Nosičem* fuzzy množiny A na univerzu U nazýváme (ostrou) množinu

$$Supp\ A = \{x \in U \mid A(x) > 0\}.$$

Definice 2.7 *Výška* $hgt(A)$ fuzzy množiny A na univerzu U je definována následovně:

$$hgt(A) = sup_{x \in U} A(x).$$

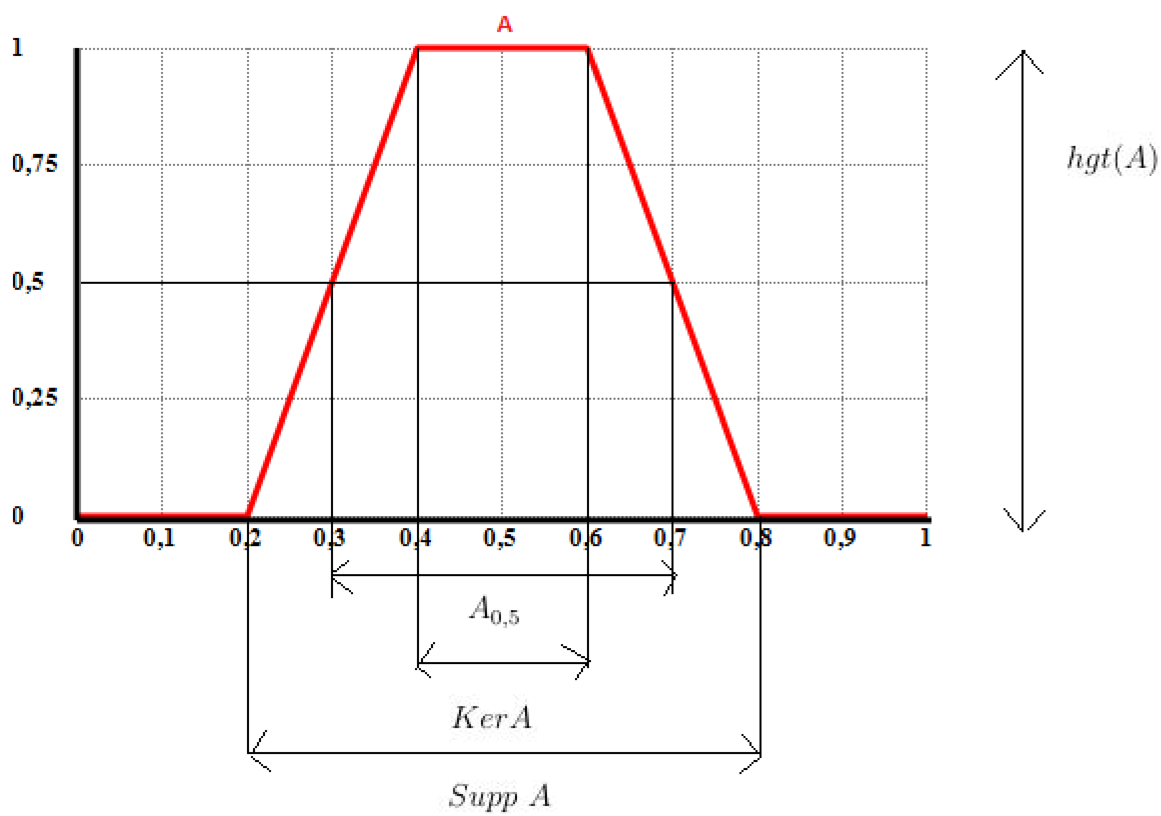
Definice 2.8 Fuzzy množina A na univerzu U se nazývá *normální*, jestliže

$$KerA \neq \emptyset.$$

V opačném případě se nazývá *subnormální*.

Na začátku jsme si tedy zadefinovali fuzzy množinu pomocí funkce příslušnosti. Tomuto zápisu se taky někdy říká vertikální reprezentace. Fuzzy množina se taky dá ovšem zadefinovat pomocí α-řezů. Princip spočívá v tom, že máme systém řezů fuzzy množiny A, kde každému $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ přiřazujeme tzv. α-řez. Zápisu pomocí α- řezů se taky někdy říká horizontální reprezentace.

Pro lepší pochopení jsou jednotlivé pojmy znázorněny na následujícím obrázku.



Obrázek 2: Grafická reprezentace základních charakteristik fuzzy množin

2.2. Fuzzy čísla

Kvantitavní údaje, které nám vyjadřují přibližná, neurčitá množství, jako například „přibližně 8,“ „asi mezi 200-250“, atd. můžeme reprezentovat pomocí fuzzy čísel.

Definice 2.9 Fuzzy množina C definovaná na množině reálných čísel $\mathbb{R}$, která má následující vlastnosti:

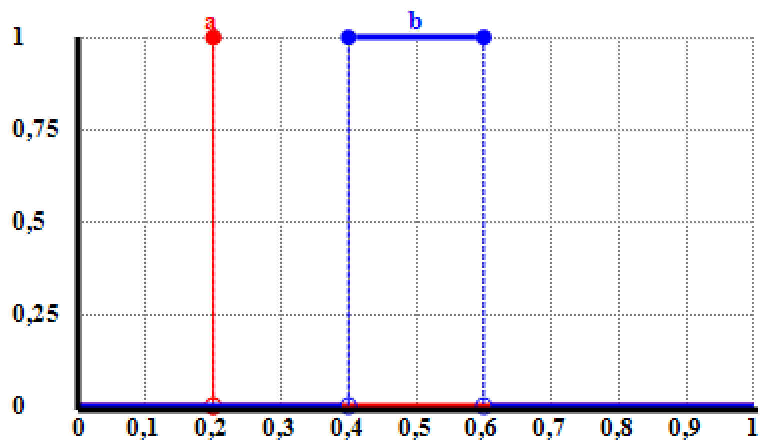
1. C je normální fuzzy množina,

2. α-řezy C_α představují pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$ uzavřené intervaly,

3. nosič $Supp\, C$ je ohraničený,

se nazývá *fuzzy číslem*. Symbolem $F_N(\mathbb{R})$ budeme označovat množinu všech fuzzy čísel.

Poznámka 2.2 Za speciální případ fuzzy čísla lze považovat reálné číslo a interval. Odpovídající funkce příslušností jsou znázorněné na následujícím obrázku.



Obrázek 3: Funkce příslušnosti reálného čísla $0,2$ a intervalu $\langle 0,4; 0,6\rangle$

Následující věta nám umožní si udělat lepší představu o charakteru funkcí příslušnosti fuzzy čísel.

Věta 2.1 *Nechť C je fuzzy množina na $\mathbb{R}$. Pak C je fuzzy číslo právě tehdy, když existují $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, kde $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \in$*

$$C(x) = \begin{cases} L(x), & \text{pro } x \in (-\infty, x_2) \\ 1, & \text{pro } x \in \langle x_2, x_3\rangle \\ P(x), & \text{pro } x \in (x_3, \infty) \end{cases}$$

přičemž platí:

a) $L(x)$ *je neklesající a zprava spojitá funkce na* $(-\infty, x_2)$ *a* $L(x) = 0$ *pro* $(-\infty, x_1)$,

b) $P(x)$ *je nerostoucí a zleva spojitá funkce na* (x_3, ∞) *a* $P(x) = 0$ *pro* (x_4, ∞).

Bodům x_1, x_2, x_3, x_4 z předchozí věty říkáme význačné hodnoty fuzzy čísla C a musí splňovat následující podmínky:

a) $\langle x_1, x_4 \rangle = \overline{Supp\ C}$, kde $\overline{Supp\ C}$ značí uzávěr nosiče,

b) $\langle x_2, x_3 \rangle = Ker\ C$.

Každé fuzzy číslo je jednoznačně určeno pomocí dvojice reálných funkcí $\underline{c}(\alpha)$, $\overline{c}(\alpha)$, které jsou na $\langle 0, 1 \rangle$ definovány takto:

Věta 2.2 *Nechť* C *je fuzzy číslo a pro funkce* $\underline{c}(\alpha)$, $\overline{c}(\alpha)$, *které jsou na* $\langle 0, 1 \rangle$ *definovány následovně:* $\langle \underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha) \rangle = C_\alpha$, *pro* $\alpha \in (0, 1\rangle$ *a* $\langle \underline{c}(0), \overline{c}(0) \rangle = \overline{Supp\ C}$. *Pak pro funkce* $\underline{c}$, $\overline{c}$ *platí:*

a) $\forall \alpha \leq \beta, kde\ \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \underline{c}(\alpha) \leq \underline{c}(\beta) \leq \overline{c}(\beta) \leq \overline{c}(\alpha)$,

b) funkce $\underline{c}$, $\overline{c}$ *jsou spojité zleva na* $(0, 1\rangle$ *a zprava v 0.*

Věta 2.3 *Nechť* $\underline{c}(\alpha)$, $\overline{c}(\alpha)$, *na* $\langle 0, 1 \rangle$ *jsou spojité zleva na* $(0, 1\rangle$, *zprava spojité v 0 a splňují nerovnost* $\forall \alpha \leq \beta : \underline{c}(\alpha) \leq \underline{c}(\beta) \leq \overline{c}(\beta) \leq \overline{c}(\alpha)$. *Pak* $\langle \underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha) \rangle$ *pro* $\alpha \in (0, 1\rangle$ *jsou* α*- řezy nějakého fuzzy čísla a* $\langle \underline{c}(0), \overline{c}(0) \rangle$ *je jeho uzávěr nosiče.*

Poznámka 2.3 Tyto tři předchozí věty jsou dokázány v [3], [8].

Fuzzy číslo C budeme zapisovat pomocí této dvojice funkcí $\underline{c}, \overline{c}$ následovně:

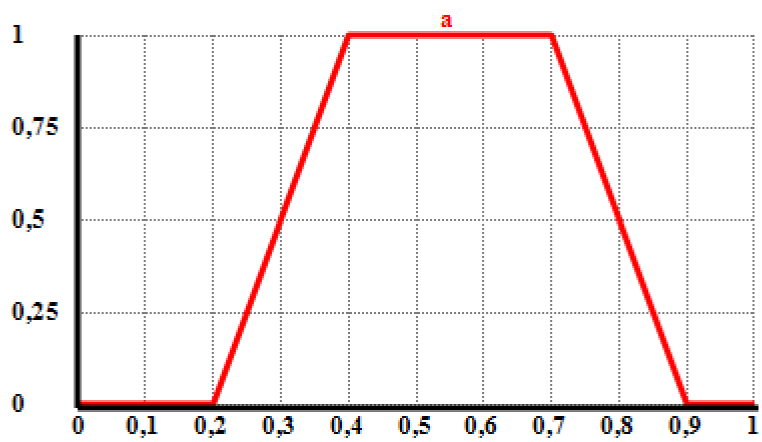
$$C = \{\langle \underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Když dostaneme neurčité vstupní hodnoty, je našim cílem použít co nejjednodušší matematický model a zároveň získat co nejpřesnější výsledky. Nejjednodušší fuzzy číslo se nazývá lineární.

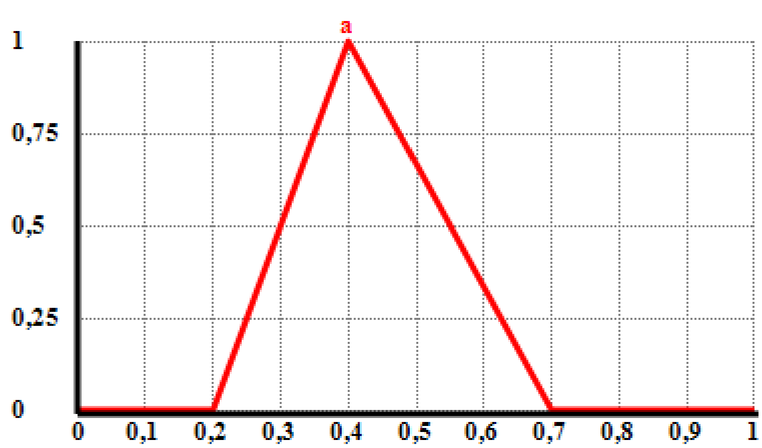
Definice 2.10 Nechť C je fuzzy množina na $\mathbb{R}$ a $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ jsou význačné hodnoty fuzzy čísla. Fuzzy číslo C se nazývá lineární, jestliže jeho funkce příslušnosti má tvar

$$C(x; x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & \text{pro} \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ 1, & \text{pro} \quad x_2 \leq x \leq x_3 \\ \frac{x_4-x}{x_4-x_3}, & \text{pro} \quad x_3 \leq x \leq x_4 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Mezi nejznámější lineární fuzzy čísla patří lichoběžníkové fuzzy číslo a trojúhelníkové fuzzy číslo (zde $x_2 = x_3$).



Obrázek 4: Funkce příslušnosti lichoběžníkového fuzzy čísla



Obrázek 5: Funkce příslušnosti trojúhelníkového fuzzy čísla

Poznámka 2.4 Kromě lineárního fuzzy čísla známe ještě po částech lineární fuzzy čísla či kvadratické fuzzy čísla. O těchto dalších typech fuzzy čísla najdeme více informací v [12].

3. Srovnání různých přístupů k intervalové a fuzzy aritmetice

V této kapitole si nejdříve vymezíme vlastnosti a vztahy, které poté budeme zkoumat, jestli jsou dodrženy u konkrétních přístupů k intervalové a fuzzy aritmetice. Předtím se ještě podíváme, jaký je vlastně vztah mezi intervalovou a fuzzy aritmetikou. Poté si konkrétně představíme ty nejznámější přístupy k intervalové a fuzzy aritmetice. Přístupy, na které se postupně zaměříme, jsou následující:

- Standardní intervalová a fuzzy aritmetika
- Podmíněná fuzzy aritmetika
- Hukuharova diference.

Tato kapitola byla zpracována podle [1], [2], [4], [10], [11], [12], [14]. Obrázky a výpočty jsem prováděl v programech FuzzME a FuzzyNumbersOperations.

Jak jsem uvedl, ještě předtím, než si začneme definovat intervalovou a fuzzy aritmetiku, tak si zde představíme dvě algebraické vlastnosti, které posléze budeme zkoumat u jednotlivých přístupů, zda jsou dodrženy, či nikoliv. Pro tyto dvě vlastnosti potřebujeme znát pojmy *opačné číslo* a *inverzní číslo*.

Definice 3.1 Nechť a je reálné číslo. Reálné číslo $-a$ nazveme *opačným číslem* k číslu a, pokud platí následující vztah:

$$a + (-a) = 0. \tag{1}$$

Definice 3.2 Nechť a je reálné číslo, které je nenulové. Reálné číslo a^{-1} nazveme *inverzním číslem* k číslu a, pokud platí následující vztah:

$$a \cdot a^{-1} = 1. \tag{2}$$

Nyní si napíšeme dvě jednoduché rovnice, při jejichž řešení využijeme vlastností (1) a (2), a opět budeme posléze zkoumat, zda tyto rovnice platí i u konkrétních přístupů intervalové a fuzzy aritmetiky. Mějme reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$, potom první rovnice, pří jejímž řešení využijeme vlastnost (1), vypadá následovně:

$$a + x = b.$$

Řešením této rovnice je výraz:

$$x = b - a.$$

Pokud dosadíme za x do původní rovnice, tak dostaneme konečný tvar:

$$a + (b - a) = b.$$

Druhá rovnice, pří jejímž řešení využijeme vlastnost (2), kde $a \neq 0$, vypadá takto:

$$a \cdot x = b.$$

Řešením této rovnice je výraz:

$$x = b/a.$$

Pokud opět dosadíme za x do původní rovnice, tak dostaneme konečný tvar:

$$a \cdot b/a = b.$$

Abychom mohli vůbec provádět jednotlivé aritmetické operace s fuzzy čísly, je nutné si zadefinovat tzv. *princip rozšíření*, jehož autorem je profesor Lotfali Askar Zadeh [14].

Definice 3.3 Fuzzifikací zobrazení $f : U \to V$ rozumíme zobrazení:

$$f_F : F(U) \to F(V),$$

které každé fuzzy množině $A \in F(U)$ přiřazuje fuzzy množinu $f_F(A) \in F(V)$ s funkcí příslušnosti definovanou pro každé $y \in V$ vztahem

$$f_F(A)(y) = \begin{cases} \sup\{A(x) | f(x) = y, x \in U\}, & \text{když } \{A(x) | f(x) = y, x \in U\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Princip rozšíření je základem pro veškeré operace s fuzzy množinami a říká nám, jak je reálnou funkcí f a fuzzy množinou A na $\mathbb{R}$ indukována fuzzy množina $B = f_F(A)$ na $\mathbb{R}$. Nyní, když už máme všechny zkoumané vlastnosti a princip rozšíření zadefinovaný, tak postoupíme k podkapitole, kde si vysvětlíme, co intervalová a fuzzy aritmetika znamenají a jaký je mezi nimi vztah.

3.1. Vztah mezi intervalovou a fuzzy aritmetikou

Abychom si mohli říct, co znamená intervalová aritmetika, potřebujeme znát pojem interval. Interval je speciální podmnožina množiny $\mathbb{R}$. V rámci intervalové aritmetiky rozumíme intervalem množinu $\{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ a značíme ho $\langle a, b\rangle$. Tedy uvažujeme pouze uzavřené intervaly.

Intervalová aritmetika nám pomáhá si poradit s problémem, kdy máme nepřesná vstupní data, nebo také s chybami, které nastanou při zaokrouhlování. Uvažujeme, že vstupní data nejsou přesné hodnoty, ale intervaly, ve kterých dané hodnoty leží. Díky tomu, že během výpočtu nedochází ke ztrátě informace o nepřesnosti vstupních dat, jsme schopni říci, že konečný výsledek se bude nacházet ve vypočítaném intervalu. Například při zaokrouhlování danou hodnotu rozšíříme do intervalu, který nám opět bude pokrývat skutečnou hodnotu.

Příklad 3.1 Mějme přístroj, který nám měří nějakou veličinu (např. vzdálenost). Naměřená hodnota nemusí být naměřena úplně přesně. Uvažujme, že přístroj měří s přesností na dvě desetinná místa, takže skutečná hodnota je pak něco mezi mezemi intervalu. Například, vyšla-li nám naměřená hodnota 0,95, tak ještě tato hodnota nemusí být přesná, ale my víme, že skutečná hodnota se nachází například v intervalu $\langle 0,945, 0,955)$.

Fuzzy aritmetika nám vychází z intervalové aritmetiky. Připomeňme si, že fuzzy číslo představuje fuzzy množinu s omezeným nosičem a každé fuzzy číslo je jednoznačně určeno pomocí dvojice reálných funkcí, které jsme si zadefinovali v minulé kapitole. Tedy veškeré aritmetické operace, které provádíme s fuzzy čísly, se při vyjádření fuzzy čísla v podobě α-řezů dají definovat pomocí intervalové aritmetiky, jelikož vlastně v praxi provádíme operace s intervaly.

Nyní se už můžeme podívat na první přístup k intervalové a fuzzy aritmetice, který se jmenuje standardní intervalová a fuzzy aritmetika.

3.2. Standardní intervalová a fuzzy aritmetika

Tento koncept používáme, když mezi jednotlivými veličinami není žádný vztah. Základní operace intervalové aritmetiky pro dva intervaly $\langle a, b\rangle$ a $\langle c, d\rangle$ jsou následující:

- sčítání
$$\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \langle a + c, b + d\rangle$$
- odečítání
$$\langle a, b\rangle - \langle c, d\rangle = \langle a - d, b - c\rangle$$
- násobení
$$\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle = \langle min\{ac, ad, bc, bd\}, max\{ac, ad, bc, bd\}\rangle$$
- dělení
$$\frac{\langle a, b\rangle}{\langle c, d\rangle} = \left\langle min\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}, max\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}\right\rangle, \text{ kde } 0 \notin \langle \text{c, d}\rangle.$$

Uveďme si nyní konkrétní příklady jednotlivých operací.

Příklad 3.2 Mějme zadefinované dva intervaly $a = \langle 2, 4\rangle$ a $b = \langle -1, 3\rangle$. Nyní si napíšeme výsledky jednotlivých operací.

$$\langle 2, 4\rangle + \langle -1, 3\rangle = \langle 1, 7\rangle$$

$$\langle 2, 4\rangle - \langle -1, 3\rangle = \langle -1, 5\rangle$$

$$\langle 2, 4\rangle \cdot \langle -1, 3\rangle = \langle -4, 12\rangle$$

$$\frac{\langle 3, 4\rangle}{\langle -1, 3\rangle} = \text{nedefinováno}.$$

Ve fuzzy aritmetice místo intervalů obsahující reálné čísla počítáme s fuzzy čísly, které jsou vyjádřené pomocí α-řezů, kde $\alpha \in (0, 1\rangle$. Mějme nyní dvě fuzzy čísla A a B a označme si jejich α-řezy následovně: $A_\alpha = \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle$ a $B_\alpha = \langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle$. S těmito fuzzy čísly můžeme provádět tyto čtyři základní aritmetické operace, kde α-řezy těchto operací, pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$, jsou dány následovně:

- sčítání

$$(A+B)_\alpha = \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle + \langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle = \langle \underline{a}(\alpha) + \underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) + \overline{b}(\alpha)\rangle$$

- odečítání

$$(A-B)_\alpha = \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle - \langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle = \langle \underline{a}(\alpha) - \overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) - \underline{b}(\alpha)\rangle$$

- násobení

$$(A \cdot B)_\alpha = \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle \cdot \langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle = \langle l(\alpha), m(\alpha)\rangle$$

  kde

$$l(\alpha) = \min\{\underline{a}(\alpha)\underline{b}(\alpha), \underline{a}(\alpha)\overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\overline{b}(\alpha)\}$$

$$m(\alpha) = \max\{\underline{a}(\alpha)\underline{b}(\alpha), \underline{a}(\alpha)\overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\overline{b}(\alpha)\}$$

- dělení (uvažujeme podmínku, že $0 \notin \langle \underline{b}(0), \overline{b}(0)\rangle$)

$$(A/B)_\alpha = \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle / \langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle = \langle n(\alpha), o(\alpha)\rangle$$

  kde

$$n(\alpha) = \min\{\underline{a}(\alpha)/\underline{b}(\alpha), \underline{a}(\alpha)/\overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha)/\underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha)/\overline{b}(\alpha)\}$$

$$o(\alpha) = \max\{\underline{a}(\alpha)/\underline{b}(\alpha), \underline{a}(\alpha)/\overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha)/\underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha)/\overline{b}(\alpha)\}.$$

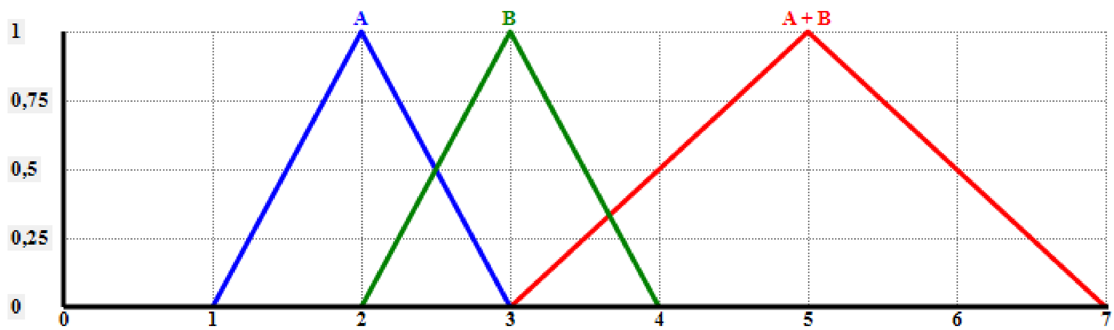
Pojďme se podívat na jednotlivé operace v konkrétních příkladech.

Příklad 3.3 Mějme zadané dvě trojúhelníkové fuzzy čísla A a B s význačnými hodnotami $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ následovně $A = \langle 1, 2, 3\rangle, B = \langle 2, 3, 4\rangle$. Obě fuzzy čísla si vyjádříme pomocí funkcí $\underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)$, tedy $A = \{\langle 1+\alpha, 3-\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$, $B = \{\langle 2+\alpha, 4-\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$. Nyní budeme počítat součet, rozdíl, součin a podíl těchto dvou fuzzy čísel podle zadaných definic.

- sčítání

$$(A+B)_\alpha = \langle 1+\alpha, 3-\alpha\rangle + \langle 2+\alpha, 4-\alpha\rangle = \langle 3+2\alpha, 7-2\alpha\rangle.$$

Pokud například budeme chtít zjistit $0,5$-řez, tak za α pouze dosadíme $0,5$ a dostaneme výsledek $\langle 4, 6\rangle$.

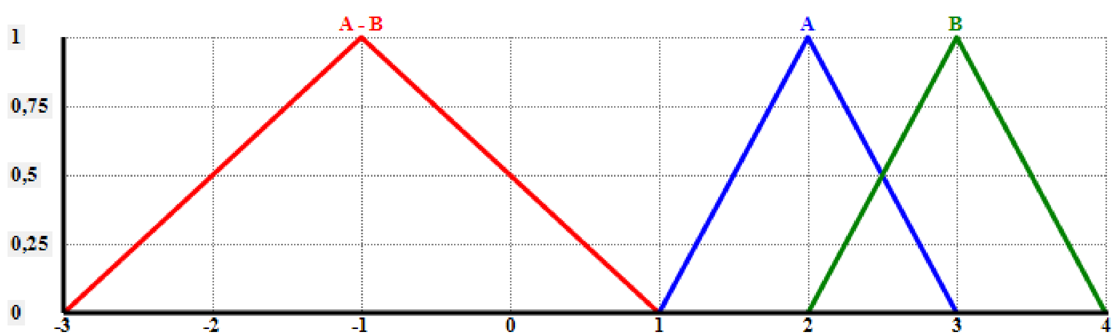


Obrázek 6: Graf reprezentující součet fuzzy čísel A a B

- odečítání

$$(A - B)_\alpha = \langle 1 + \alpha, 3 - \alpha\rangle - \langle 2 + \alpha, 4 - \alpha\rangle = \langle -3 + 2\alpha, 1 - 2\alpha\rangle.$$

Výsledek pro $0,5$-řez teď bude vypadat $\langle -2, 0\rangle$.



Obrázek 7: Graf reprezentující odečítání fuzzy čísel A a B

- násobení

$$(A \cdot B)_\alpha = \langle 1 + \alpha, 3 - \alpha\rangle \cdot \langle 2 + \alpha, 4 - \alpha\rangle = \langle 2 + 3\alpha + \alpha^2, 12 - 7\alpha + \alpha^2\rangle.$$

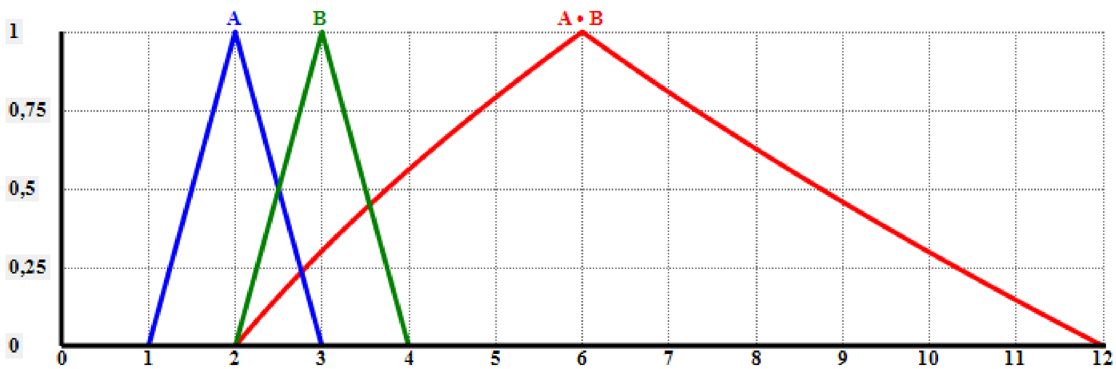
kde:

$$2+3\alpha+\alpha^2 = \min\{(1+\alpha)\cdot(2+\alpha), (1+\alpha)\cdot(4-\alpha), (3-\alpha)\cdot(2+\alpha), (3-\alpha)\cdot(4-\alpha)\},$$

$$12-7\alpha+\alpha^2 = \max\{(1+\alpha)\cdot(2+\alpha), (1+\alpha)\cdot(4-\alpha), (3-\alpha)\cdot(2+\alpha), (3-\alpha)\cdot(4-\alpha)\}.$$

Nyní si na ukázku rozepíšeme postup k dosažení výsledku pro $0,5$-řez:

$$(A \cdot B)_\alpha = \langle 1,5; 2,5\rangle \cdot \langle 2,5; 3,5\rangle = \langle 3,75; 8,75\rangle$$



Obrázek 8: Graf reprezentující násobení fuzzy čísel A a B

- dělení

$$(A/B)_\alpha = \langle 1+\alpha, 3-\alpha\rangle/\langle 2+\alpha, 4-\alpha\rangle = \langle (1+\alpha)/(4-\alpha), (3-\alpha)/(2+\alpha)\rangle.$$

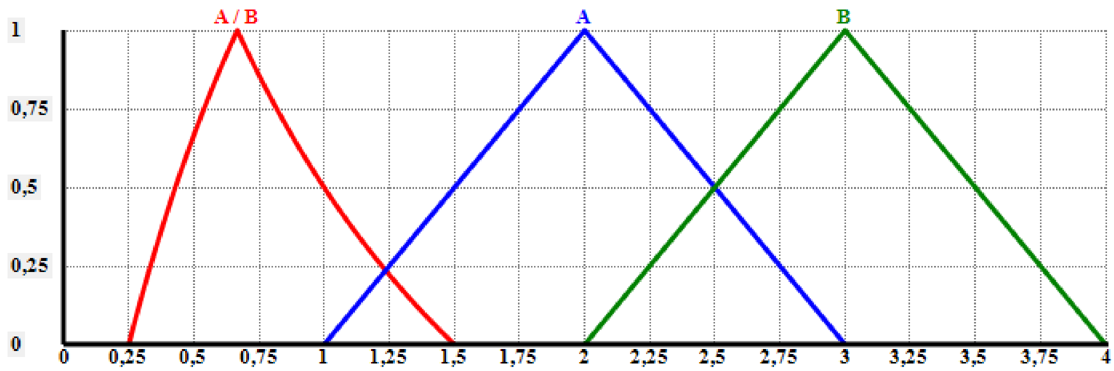
kde:

$$(1+\alpha)/(4-\alpha) = \min\{(1+\alpha)/(2+\alpha), (1+\alpha)/(4-\alpha), (3-\alpha)/(2+\alpha), (3-\alpha)/(4-\alpha)\},$$

$$(3-\alpha)/(2+\alpha) = \max\{(1+\alpha)/(2+\alpha), (1+\alpha)/(4-\alpha), (3-\alpha)/(2+\alpha), (3-\alpha)/(4-\alpha)\}.$$

Opět si rozepíšeme výsledek pro $0,5$-řez:

$$(A/B)_\alpha = \langle 1,5; 2,5\rangle/\langle 2,5; 3,5\rangle = \langle 0,43; 1\rangle$$



Obrázek 9: Graf reprezentující dělení fuzzy čísel A a B

Poznámka 3.1 Podle výsledku jednotlivých operací a obrázků si můžeme všimnout, že operace sčítání a násobení zachovávají linearitu funkcí popisujících krajní hodnoty jednotlivých α-řezů, zatímco operace násobení a dělení nikoliv.

Nyní se podíváme, které algebraické vlastnosti, které jsme si zadefinovali na začátku kapitoly, jsou platné pro standardní intervalovou a fuzzy aritmetiku. Jak jsme si řekli, tak fuzzy aritmetika je rozšířením intervalové, a tedy platné vlastnosti pro fuzzy aritmetiku jsou dodrženy i pro intervalovou. Fuzzy číslo 0 budeme v intervalové a fuzzy aritmetice chápat jako reálné číslo, tj. uzavřený interval $\langle 0, 0\rangle$. Následně vlastnosti (1) a (2) nemusí být splněny, pojďme se na ně podívat podrobněji.

Pokud máme fuzzy číslo A, tak nemusí platit, že $A - A = 0$ (vlastnost (1)). Pro lepší pochopení si představme, že jdeme do obchodu koupit si šunku. Zjistíme, že v kapse máme v drobných přibližně 20 Kč (fuzzy číslo A). 10dkg šunky stojí 20 Kč a my řekneme paní prodavačce, že chceme přibližně 10 dkg, což znamená, že jí zaplatíme přibližně 20 Kč (-A).V kapse jsme ovšem přesně 20 Kč neměli, takže nám nezůstane 0 Kč a nevíme kolik přesně nám paní prodavačka šunky naváží. Pokud by nám například navážila víc než 10 dkg, tak by se mohlo stát, že bychom dokonce neměli dostatek peněz na zaplacení.

Opět, pokud máme fuzzy číslo A, tak nemusí platit, že $A \cdot A^{-1} = 1$ (vlastnost (2)). Zde jako příklad si můžeme představit, že máme 9 kamarádů a každý má už svoji rodinu. Každoročně jeden z kamarádů udělá bramborový salát pro všechny ostatní, včetně sebe. Letos to vyšlo na nás, tedy uděláme přibližně 10 kg bramborového salátu (fuzzy číslo A). Poté rozdělíme salát od oka na přibližně deset stejných částí. $(\cdot A^{-1})$. To ovšem teď neznamená, že každý z nás dostane přesně 1 kg salátu. Každý dostane okolo 1 kg salátu.

Jelikož nemusí platit tyto dvě zmíněné vlastnosti, tak také nemusí platit ani naše zadané výsledné rovnosti vyjádřené z rovnic, kde se při jejich řešení těchto vlastností využívá. První rovnice, kterou se budeme zabývat, je $A + X = B$. Po vypočtení $X = B - A$ a následném dosazení za X do původní rovnice, dostaneme výslednou rovnost $A + (B - A) = B$, která ovšem nemusí platit, jelikož bychom při řešení využili vlastnosti (1), o které už víme, že nemusí být splněna. Tento problém je způsoben definicemi sčítaní a odečítání fuzzy čísel, jelikož vždy pro výsledek uvažujeme extrémní možnou situaci. Tedy nejdříve odečteme fuzzy číslo A od B. Musíme brát extrémní situaci, a to znamená, že od dolní meze fuzzy čísla B odečteme horní mez fuzzy čísla A, tj.$\langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle - \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle = \langle \underline{b}(\alpha) - \overline{a}(\alpha), \overline{b}(\alpha) - \underline{a}(\alpha)\rangle$. Poté, když přičteme fuzzy číslo A, tak sčítáme horní meze, tj.

$$\langle \underline{b}(\alpha) - \overline{a}(\alpha), \overline{b}(\alpha) - \underline{a}(\alpha)\rangle + \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle = \langle \underline{b}(\alpha) - \overline{a}(\alpha) + \underline{a}(\alpha), \overline{b}(\alpha) - \underline{a}(\alpha) + \overline{a}(\alpha)\rangle.$$

Vidíme, že výsledek se nerovná původnímu fuzzy číslu $B = \langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle$.

Příklad 3.4 Ukažme si nesplnění rovnosti na konkrétním příkladě. Mějme fuzzy číslo $A = \{\langle 1+\alpha, 3-\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ a fuzzy číslo $B = \{\langle 2+\alpha, 4-\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$. Nejdřív odečteme od fuzzy čísla B fuzzy číslo A, tj.

$$\langle 2 + \alpha, 4 - \alpha\rangle - \langle 1 + \alpha, 3 - \alpha\rangle = \langle -1 + 2\alpha, 3 - 2\alpha\rangle.$$

K výsledku přičteme fuzzy číslo A a dostaneme:

$$\langle -1 + 2\alpha, 3 - 2\alpha\rangle + \langle 1 + \alpha, 3 - \alpha\rangle = \langle 3\alpha, 6 - 3\alpha\rangle.$$

Jak vidíme výsledek se nerovná fuzzy číslu B.

Druhá rovnice vypadala následovně $A \cdot X = B$. Opět při vypočtení $X = B/A$ a jeho následném zpátečním dosazení do původní rovnice, dostaneme výslednou rovnost $A \cdot B/A = B$, která také nemusí platit, jelikož při jejím řešení bychom využili vlastnost (2), která nemusí být dodržena ve standardní intervalové a fuzzy aritmetice. Tentokrát je tento problém způsoben definicemi násobení a dělení, kde zase uvažujeme pro výsledek extrémní možnou situaci. Po rozepsání jednotlivých operací podle definice bychom zjistili, že opravdu výsledná rovnost nemusí být platná.

Následující přístupy se snaží některé z těchto problému elegantně vyřešit, ovšem většinou za cenu výskytu problémů jiných. Pojďme se na ně tedy konkrétněji podívat.

3.3. Podmíněná fuzzy aritmetika

V případě podmíněné fuzzy aritmetiky [2] si určíme dodatečnou podmínku, díky které posléze můžeme řešit některé rovnice, které v případě standardní intervalové a fuzzy aritmetiky nešlo vyřešit. Uvažujme, že máme n proměnných. Mějme zadanou ostrou relaci D definovanou na prostoru R^n, kde $D \subseteq R^n$. Relace D nám vyjadřuje všechny přípustné kombinace hodnot. Symbol * nám bude značit jednu ze čtyř základních aritmetických operací, a to konkrétně sčítání, odečítání, násobení a dělení. Zápis pro jednu z těchto čtyř operací dvou fuzzy čísel A a B zadaných podle α-řezů, bez zavedené podmínky by vypadal následovně:

$$(A * B)_\alpha = \{a * b | a \in A_\alpha, b \in B_\alpha\}.$$

Pokud budeme uvažovat naši zadanou relaci $D \subseteq R^n$, tak zde už se jedná o *podmíněnou fuzzy aritmetiku* a obecný předpis vypadá následovně:

$$(A *_D B)_\alpha = \{a * b | a \in A_\alpha, b \in B_\alpha, (a, b) \in D\}.$$

Podmínka je vždy dána externě a vychází z povahy problému.

Poznámka 3.2 Jelikož se zabýváme čtyřmi základními aritmetickými operacemi, uvažujeme tedy binární relaci D na $R \times R$.

Teď mějme zadanou relaci $D \subseteq R^2$ a dvě fuzzy čísla, které si označíme takto: $A = \{\langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$ a $B = \{\langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$, potom výsledky aritmetických operací s těmito fuzzy čísly vypadají následovně:

$$(A *_D B)_\alpha = \left\langle \underline{a *_D b}(\alpha), \overline{a *_D b}(\alpha) \right\rangle,$$

kde

$$\underline{a *_D b}(\alpha) = \min\{a * b | a \in \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha) \rangle, b \in \langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha) \rangle, (a, b) \in D\},$$

$$\overline{a *_D b}(\alpha) = \max\{a * b | a \in \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha) \rangle, b \in \langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha) \rangle, (a, b) \in D\}.$$

Poznámka 3.3 Tyto výpočty platí i pro intervalovou aritmetiku, jelikož jak jsme si řekli, tak intervaly můžeme vidět jako speciální případ fuzzy čísel, a tedy vše, co dokážeme pro fuzzy čísla, je dokázané i pro intervaly.

U podmíněné fuzzy aritmetiky ovšem nemusí nutně platit, že výsledkem musí být fuzzy číslo. Aby výsledek bylo právě fuzzy číslo, tak jsou postačující následující dvě podmínky:

1. Pro alespoň jednu dvojici $(x, y) \in D$ musí platit $A(x) = B(y) = 1$.
2. D je uzavřená konvexní podmnožina R^2.

Uveďme si nyní konkrétní příklad na podmíněnou fuzzy aritmetiku.

Příklad 3.5 Vezměme si stejné zadání jako u příkladu 3.3. Mějme tedy dvě trojúhelníková fuzzy čísla A, B zadefinované následovně:

$$A = \{\langle 1 + \alpha, 3 - \alpha \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

$$B = \{\langle 2 + \alpha, 4 - \alpha \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Podívejme se podrobněji na operací odečítání. V rámci standardní fuzzy aritmetiky by se výsledek spočítal následovně:

$$(A - B)_\alpha = \langle 1 + \alpha, 3 - \alpha \rangle - \langle 2 + \alpha, 4 - \alpha \rangle = \langle -3 + 2\alpha, 1 - 2\alpha \rangle.$$

Zadejme si nyní konkrétní relaci $D = \{a+b | a \leq b, a \in A_\alpha, b \in B_\alpha\}$. Nyní výsledek s ohledem na zadanou podmínku bude vypadat následovně:

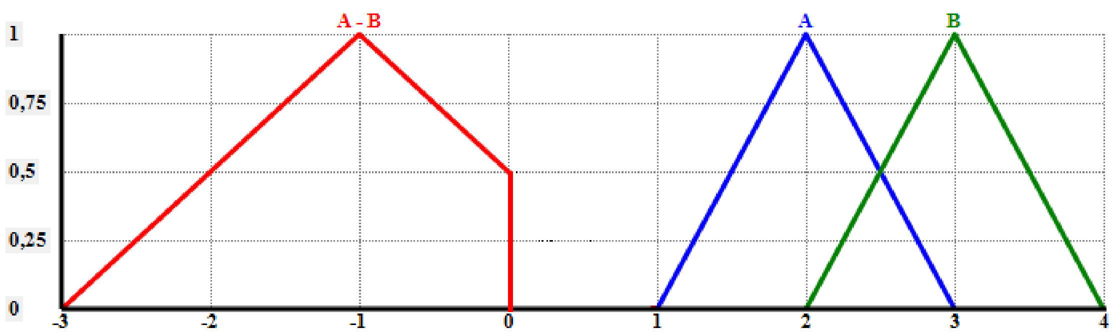
$$(A -_D B)_\alpha = \left\langle \underline{a -_D b}(\alpha), \overline{a -_D b}(\alpha) \right\rangle,$$

kde

$$\underline{a -_D b}(\alpha) = -3 + 2\alpha \text{ pro } \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\overline{a -_D b}(\alpha) = \begin{cases} 1 - 2\alpha & \text{pro } \alpha \in \langle 0,5; 1 \rangle \\ 0 & \text{pro } \alpha \in \langle 0; 0,5). \end{cases}$$

Výsledek si znázorníme na obrázku 10.



Obrázek 10: Graf reprezentující odečítání fuzzy čísel A a B s relací D

Nyní se podíváme, jestli jsme schopni zadat si takové podmínky, které nám zaručí, že budou splněny vlastnosti (1), (2). Jak už víme, tyto dvě vlastnosti ve standardní intervalové a fuzzy aritmetice splněny nebyly. Zadejme si nyní tedy tuto relaci $E \subseteq R^2$:

$$E = \{(x, y) \in R^2 | x = y\}.$$

Uvažování této relace nám zařídí, že budou ony dvě vlastnosti platit. Pojďme si podrobněji rozebrat, proč tomu tak bude.

Mějme tedy fuzzy číslo A, potom platí, že $A -_E A = 0$ (vlastnost (1)), jelikož díky naši podmínce teď opačné fuzzy číslo $-A$ je závislé na původním fuzzy čísle A. Odečítáme tedy přesně stejné množství a tudíž zbude nám reálné číslo 0. Opět si představme, že máme v kapse asi 20 Kč (fuzzy číslo A). Potkáme na ulici kamaráda, který nás požádá, jestli bychom mu nepůjčili 20 Kč na sušenky. My mu půjčíme našich asi 20 Kč ($-A$) s tím, že kamaráda upozorníme, že nevíme jestli máme přesně 20 Kč. Je tedy ale jasné, že nám v kapse po odevzdání peněz musí zůstat přesně 0 Kč.

I vlastnost (2), a to $A \cdot A^{-1} = 1$ bude díky zadané relaci splněna. Budeme násobit inverzním fuzzy číslem, které také bude závislé na původním fuzzy čísle A, a tedy výsledek bude roven reálnému číslu 1. Představme si, že matka si zapisovala hodnoty výšky svého syna po jeho plnoletost. Ze zápisů ví, že ve třech letech její syn měřil přesně 1 m. Nyní už je její syn dospělý, a tedy už jen ví, že měří přibližně 2m. Pokud tedy řekneme že její syn byl ve třech letech přibližně dvakrát menší než je teď, tak musíme dělit stejným fuzzy číslem, jelikož máme podmínku, že ve třech letech měřil právě 1 m.

Nyní se podíváme, jestli budou platit naše rovnosti, kde využíváme těchto dvou vlastností zmíněných výše. Zadáme si následující relaci $D \subseteq R^3$:

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 = x_3\}.$$

Z první rovnice $A + X = B$ vypočteme X, tj. $X = B - A$. Výsledek X je řešením, ale pokud počítáme zároveň s X a s A, tak X závisí na A. Dosadíme X do původní rovnice a dostaneme rovnost $A +_D (B - A) = B$ Potom fuzzy číslo A a opačné fuzzy číslo $-A$ nám modelují neurčitou hodnotu proměnných x_1, x_3. Jako podmínku jsme si zadali rovnost těchto dvou proměnných, tudíž $A -_D A = 0$ a nám vyjde, že opravdu fuzzy číslo B se rovná fuzzy číslu B.

V případě druhé rovnice si zadáme relaci $D \subseteq R^3$:

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 = x_2\}.$$

Řešením druhé rovnice $A \cdot X = B$ je výraz $X = B/A$. Opět uvažujeme závislost mezi X a A. Po dosazení X do původní rovnice dostáváme výsledek $A \cdot_D A^{-1} \cdot B =$ $= B$. Zde fuzzy číslo A a inverzní fuzzy číslo k fuzzy číslu A modelují neurčitou hodnotu proměnných x_1 a x_2. Podmínka nám určí, že $A \cdot_D A^{-1} = 1$, a posléze fuzzy číslo B se opravdu rovná fuzzy číslu B.

3.4. Hukuharova diference

Nyní se podíváme na další možné řešení, díky kterému pak budou splněné naše zadané vlastnosti a rovnice, které ve standardní intervalové a fuzzy aritmetice splněny nebyly. Hukuhara [1] zavedl Hukuharovu diferenci, neboli rozdíl, kde jak nám název už napovídá, se budeme věnovat hlavně operaci odečítání. V [11] ovšem tento princip ještě rozšířili a autor zde zavedl zobecněnou Hukuharovu diferenci, kterou se budeme dopodrobna zabývat v následující podkapitole. Ideu podobné zobecněné Hukuharovy diference pak Stefanini [11] aplikoval na operaci dělení, a tedy v poslední podkapitole se zaměříme na takzvané zobecněné dělení. Ještě než se začneme věnovat Hukuharově diferenci, je důležité si říci, že se budeme zabývat nejdříve intervaly a posléze až fuzzy čísly, jelikož, jak později zjistíme, tak výsledek, který pro intervaly existuje, nemusí existovat pro fuzzy čísla. Pro lepší přehlednost budeme intervaly značit malými písmeny a fuzzy čísla klasicky velkými. Operace sčítání se bude počítat pomocí standardní intervalové a fuzzy aritmetiky.

Podívejme se nyní na Hukuharovu diferenci obecně pro intervalovou aritmetiku. Pro uzavřené intervaly $a, b, c \subset \mathbb{R}$ představil Hukuhara [1] následující *Hukuharovu diferenci*:

$$a \ominus b = c \Longleftrightarrow a = b + c.$$

To znamená, že k výslednému intervalu c najdeme takový interval b, že dostaneme zpátky opět interval a. Ovšem může se stát, že nenajdeme takové b, které by splnilo tuto podmínku.

3.4.1. Zobecněná Hukuharova diference

My ovšem můžeme reprezentovat rozdíl dvou intervalů i následovně:

$$a \boxminus b = c \Longleftrightarrow b = a + (-c).$$

Obě podmínky jsou navzájem kompatibilní a tedy byla zavedena Stefaninim v [11] takzvaná *zobecněná Hukuharova diference* neboli *zobecněný Hukuharový rozdíl*.

Definice 3.4 Nechť $a, b \subseteq \mathbb{R}$. *Zobecněnou Hukuharovu diferenci* pro intervaly a, b definujeme jako interval $c \subseteq \mathbb{R}$, tak, že platí:

$$a \ominus_g b = c \Longleftrightarrow \begin{cases} \quad\;\; (i) \;\; a = b + c, \\ \text{nebo } (ii) \;\; b = a + (-c). \end{cases}$$

Věta 3.1 *Pokud $c = a \ominus_g b$ existuje, pak je c určeno jednoznačně. Jestliže navíc existuje $a \ominus b$, tak platí $a \ominus_g b = a \ominus b$.*

Důkaz této věty je proveden v [11].

Teď když už máme zadefinované základní pojmy, tak se můžeme podívat, jak budou vypadat výpočty zobecněné Hukuharovy diference v rámci intervalové aritmetiky. Mějme tedy nyní dva intervaly a, b. Intervaly si označíme následovně $\langle a^-, a^+ \rangle$, $\langle b^-, b^+ \rangle$. Budeme uvažovat prostor reálných čísel $\mathbb{R}$, kdy pro uzavřené intervaly v tomto prostoru vždy existuje zobecněná Hukuharova diference. Potom zobecněná Hukuharova diference pro tyto dva intervaly je následující:

$$\langle a^-, a^+ \rangle \ominus_g \langle b^-, b^+ \rangle = \langle c^-, c^+ \rangle \Longleftrightarrow \begin{cases} \qquad (i) & \begin{cases} a^- = b^- + c^-, \\ a^+ = b^+ + c^+, \end{cases} \\ \text{nebo } (ii) & \begin{cases} b^- = a^- - c^+, \\ b^+ = a^+ + c^-. \end{cases} \end{cases}$$

To znamená, že hodnoty c^-, c^+ výsledného intervalu $c = \langle c^-, c^+ \rangle$ jsou vždy definovány takto:

$$c^- = \min\{a^- - b^-, a^+ - b^+\},$$

$$c^+ = \max\{a^- - b^-, a^+ - b^+\}.$$

Obě podmínky (i), (ii) platí současně, pokud intervaly $\langle a^-, a^+ \rangle$, $\langle b^-, b^+ \rangle$ mají stejnou délku a $c^- = c^+$ [11].

Poznámka 3.4 Existuje i alternativní reprezentace intervalu $a = \langle a^-, a^+ \rangle$, a to pomocí středu intervalu $\hat{a} = (a^- + a^+)/2$ a poloviční šířky intervalu $\overline{a} = (a^+ - a^-)/2$. Poté můžeme psát $a = (\hat{a}, \overline{a})$, $\overline{a} \geq 0$ a platí, že $a^- = \hat{a} - \overline{a}$ a $a^+ = \hat{a} + \overline{a}$. To stejné budeme mít i pro interval b a potom výsledek zobecněné Hukuharovy diference se spočítá jako $(\hat{a}, \overline{a}) \ominus_g (\hat{b}, \overline{b}) = (\hat{a} - \hat{b}, |\overline{a} - \overline{b}|)$ [11].

Pojďme se teď podívat na konkrétní příklad.

Příklad 3.6 Mějme zadefinované dva intervaly $a = \langle 1, 4\rangle$, $b = \langle 2, 7\rangle$. Potom výsledek vypočítaný pomocí zobecněné Hukuharovy diference bude vypadat následovně:

$$\langle 1, 4\rangle \ominus_g \langle 2, 7\rangle = \langle -3, -1\rangle,$$

jelikož

$$-3 = \min\{(1-2), (4-7)\},$$

$$-1 = \max\{(1-2), (4-7)\}.$$

Po dosazení do podmínek (i), (ii), zjistíme, že je splněna podmínka druhá, jelikož platí :

$$2 = 1 - (-1),$$

$$7 = 4 - (-3).$$

Alternativní zápis, zavedený v poznámce 3.4, by vypadal následovně:

$$\hat{a} = (1+4)/2 = 2,5 \text{ a } \overline{a} = (4-1)/2 = 1,5,$$

$$\hat{b} = (2+7)/2 = 4,5 \text{ a } \overline{b} = (7-2)/2 = 2,5,$$

následně

$$(2,5; 1,5) \ominus_g (4,5; 2,5) = ((2,5-4,5), |1,5-2,5|) = (-2, 1).$$

Poznámka 3.5 Pokud bychom měli intervaly $c = \langle 2, 4\rangle$, $d = \langle -1, 1\rangle$, tak výsledkem zobecněné Hukuharovy diference $c \ominus_g d$ bude interval $e = \langle 3, 3\rangle = \{3\}$ a budou platit obě rovnosti $(i), (ii)$, jelikož je splněno, že intervaly c, d mají stejnou délku a $e^- = e^+$.

V případě fuzzy čísel bude postup obdobný. Mějme fuzzy čísla $U, V \in F_N(\mathbb{R})$. Potom Hukuharova diference pro fuzzy čísla [1] je definována takto:

$$U \ominus V = W \Longleftrightarrow U = V + W.$$

Nyní α-řezy Hukuharovy diference jsou $(U \ominus V)_\alpha = \langle \underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha)\rangle$, kde $U_\alpha = \langle \underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha)\rangle$ a $V_\alpha = \langle \underline{v}(\alpha), \overline{v}(\alpha)\rangle$. Opět jenom tato podmínka nestačí, a proto byla zavedena zobecněná Hukuharova diference pro fuzzy čísla [11].

Definice 3.5 Nechť $U, V \in F_N(\mathbb{R})$. *Zobecněná Hukuharova diference* je definována následovně:

$$U \ominus_g V = W \iff \begin{cases} U = V + W, \\ \text{nebo } V = U + (-1)W. \end{cases}$$

Zobecněná Hukuharova diference pro α-řezy fuzzy čísel $U, V \in F_N(\mathbb{R})$ vypadá následovně:

$$(U \ominus_g V)_\alpha = W_\alpha = \langle \underline{w}(\alpha), \overline{w}(\alpha) \rangle,$$

kde

$$\underline{w}(\alpha) = \min\{\underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha)\},$$

$$\overline{w}(\alpha) = \max\{\underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha)\},$$

za předpokladu, že $\underline{w}(\alpha)$ je neklesající, $\overline{w}(\alpha)$ nerostoucí a $\underline{w}(1) \leq \overline{w}(1)$. Konkrétně pro $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí:

$$(1) \begin{cases} \underline{w}(\alpha) = \underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha) \\ \overline{w}(\alpha) = \overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha) \end{cases} \text{pokud } len(U_\alpha) \leq len(V_\alpha),$$

$$(2) \begin{cases} \underline{w}(\alpha) = \overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha) \\ \overline{w}(\alpha) = \underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha) \end{cases} \text{pokud } len(U_\alpha) \geq len(V_\alpha),$$

kde $len(U_\alpha) = \overline{u}(\alpha) - \underline{u}(\alpha)$ značí délku α-řezů U a $len(V_\alpha)$ délku α-řezů V. Zobecněná Hukuharova diference pro dvě fuzzy čísla U, V existuje pouze tehdy, jestliže je splněna právě jedna z těchto dvou podmínek:

$$(a) \begin{cases} len(U_\alpha) \geq len(V_\alpha) \text{ pro všechna } \alpha \in (0, 1\rangle, \\ \underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha) \text{ je rostoucí vzhledem k } \alpha, \\ \overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha) \text{ je klesající vzhledem k } \alpha, \end{cases}$$

nebo

$$(b) \begin{cases} len(U_\alpha) \leq len(V_\alpha) \text{ pro všechna } \alpha \in (0, 1\rangle, \\ \overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha) \text{ je rostoucí vzhledem k } \alpha, \\ \underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha) \text{ je klesající vzhledem k } \alpha. \end{cases}$$

Vše výše převzato z [11]. Pojďme se podívat na konkrétní příklady.

Příklad 3.7 Mějme dvě trojúhelníková fuzzy čísla U a V zadefinované následovně $U = \{\langle 11 + 3\alpha, 18 - 4\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ a $V = \{\langle 1 + \alpha, 4 - 2\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$. Potom výsledek zobecněné Hukuharovy diference těchto dvou fuzzy čísel vypadá následovně:

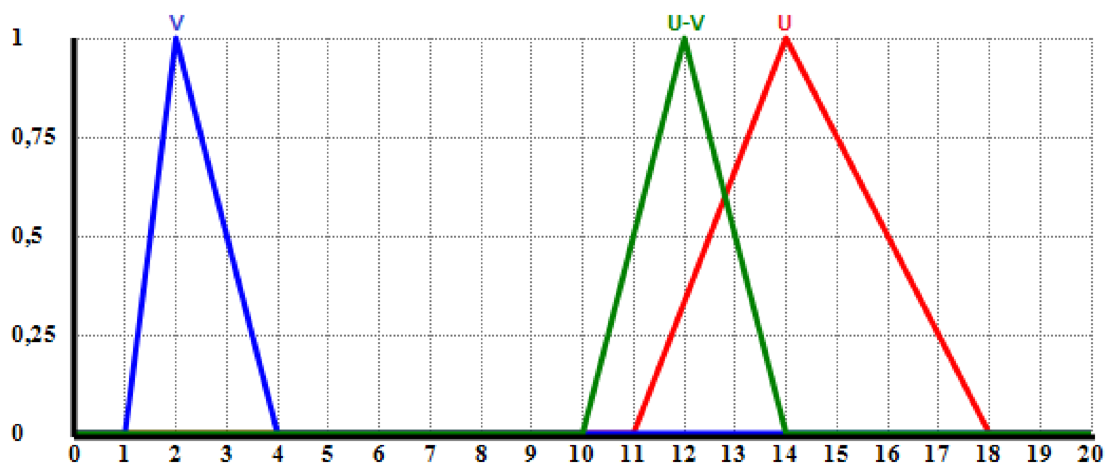
$$(U \ominus_g V)_\alpha = \langle 11 + 3\alpha, 18 - 4\alpha\rangle \ominus_g \langle 1 + \alpha, 4 - 2\alpha\rangle = \langle 10 + 2\alpha, 14 - 2\alpha\rangle,$$

kde

$$10 + 2\alpha = \min\{(11 + 3\alpha) - (1 + \alpha), (18 - 4\alpha) - (14 - 2\alpha)\},$$

$$14 - 2\alpha = \max\{(11 + 3\alpha) - (1 + \alpha), (18 - 4\alpha) - (14 - 2\alpha)\}.$$

Z výsledku vidíme, že $10+2\alpha$ je rostoucí vzhledem k $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, $14-2\alpha$ je klesající vzhledem k $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ a navíc délka všech α-řezů fuzzy čísla U je větší než délka všech α-řezů fuzzy čísla V, a tudíž je splněna podmínka (a).



Obrázek 11: Graf reprezentující odečítání fuzzy čísel $U \ominus_g V$

Příklad 3.8 Kdybychom měli trojúhelníková fuzzy čísla O, P zadefinované následovně $O = \{\langle 11+3\alpha, 15-\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ a $P = \{\langle 1+\alpha, 6-4\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$, tak by zobecněná Hukuharova diference pro tyto dvě fuzzy čísla neexistovala, jelikož:

$$(11 + 3\alpha) - (1 + \alpha) = 10 + 2\alpha,$$

$$(15 - \alpha) - (6 - 4\alpha) = 9 + 3\alpha,$$

tedy vidíme, že $10+2\alpha$ i $9+3\alpha$ jsou rostoucí vzhledem k $\alpha \in (0,1\rangle$, tudíž nemůže být splněna ani jedna z podmínek $(a),(b)$.

Poznámka 3.6 Převzato z [11]. Kdyby fuzzy čísla X, Y byla lichoběžníková fuzzy čísla zadefinována následovně $X = \langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$ a $Y = \langle y_1, y_2, y_3, y_4\rangle$, s tím, že $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4$, a navíc by jejich α řezy vypadaly takto $X_\alpha = \langle x_1+\alpha(x_2-x_1), x_4+\alpha(x_3-x_4)\rangle$, $Y_\alpha = \langle y_1+\alpha(y_2-y_1), y_4+\alpha(y_3-y_4)\rangle$, tak by k existenci zobecněné Hukuharovy diference stačilo pouze ověřit, zda platí právě jedna z následujících dvou podmínek:

$$x_1 - y_1 \leq x_2 - y_2 \leq x_3 - y_3 \leq x_4 - y_4,$$

nebo

$$x_1 - y_1 \geq x_2 - y_2 \geq x_3 - y_3 \geq x_4 - y_4.$$

U trojúhelníkových fuzzy čísel máme pouze tři významné body $X = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$, $Y = \langle y_1, y_2, y_3\rangle$. K existenci zobecněné Hukuharovy diference opět stačí pouze ověřit, zda platí právě jedna z následujících dvou podmínek:

$$x_1 - y_1 \leq x_2 - y_2 \leq x_3 - y_3,$$

nebo

$$x_1 - y_1 \geq x_2 - y_2 \geq x_3 - y_3.$$

Příklad 3.9 Vraťme se k příkladu 3.7, kde po dosazení hodnot do podmínek z předchozí poznámky si ověříme, že opravdu zobecněný Hukuharův rozdíl pro tyto dvě fuzzy čísla neexistuje, jelikož $11-1 \leq 14-2 \nleq 15-6$ nebo $11-1 \ngeq 14-2 \geq 15-6$.

Než přejdeme na operaci dělení, založenou na Hukuharově diferenci, tak se podíváme, zdali je dodržena vlastnost (1). Chceme tedy vědět, zda platí $U \ominus_g U = \{0\}$. Podle definice platí, že hledáme takové U, které když přičteme k reálnému číslu 0, tak dostaneme naše původní U. Aby definice byla dodržena, je tedy jasné, že nám musí vyjít $\{0\}$.

Nyní se podíváme jestli existuje řešení našich zadaných rovnic pomocí zobecněné Hukuharovy diference. Nejdříve budeme uvažovat intervaly $a = \langle a^-, a^+\rangle, b = \langle b^-, b^+\rangle$ a $x = \langle x^-, x^+\rangle$. Máme tedy rovnici $a + x = b$. Označme si $len(a) = a^+ - a^-$, $len(b) = b^+ - b^-$ jako délku intervalů a, b. Pokud $len(b) \geq len(a)$, tak řešení bude vypadat následovně: $x = b - a$. Jestli ale $len(b) \leq len(a)$, tak poté výsledek musíme interpretovat takto: $b - x = a$. Tedy $x = b \ominus_g a$ vždy existuje a platí buď $a + x = b$ nebo $a = b - x$. Interval x tedy vypočítáme podle [11] následovně:

$$\text{případ } len(b) \geq len(a) : \begin{cases} x^- = b^- - a^-, \\ x^+ = b^+ - a^+, \end{cases}$$

$$\text{případ } len(b) \leq len(a) : \begin{cases} x^- = b^+ - a^+, \\ x^+ = b^- - a^-. \end{cases}$$

Ukažme si oba případy na příkladu.

Příklad 3.10 Mějme intervaly $a = \langle 2, 4\rangle, b = \langle 3, 6\rangle$. Jedná se o případ, kdy $len(b) \geq len(a)$, tedy uvažujeme rovnici $a + x = b$. Řešení $x = b \ominus_g a$ vypočítáme následovně:

$$x^- = 3 - 2,$$

$$x^+ = 6 - 4.$$

Výsledkem je tedy interval $x = \langle 1, 2\rangle$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme rovnost $\langle 3, 6\rangle = \langle 3, 6\rangle$.

Příklad 3.11 Nyní mějme intervaly $a = \langle 3, 6\rangle, b = \langle 2, 4\rangle$. Zde se jedná o případ, kdy $len(b) \leq len(a)$, a tudíž uvažujeme rovnici $a = b - x$. Řešení $x = b \ominus_g a$ vypočítáme následovně:

$$x^- = 4 - 6,$$

$$x^+ = 2 - 3.$$

Výsledkem je tedy interval $x = \langle -2, -1\rangle$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme rovnost $\langle 2, 4\rangle = \langle 2, 4\rangle$.

Pokud budeme uvažovat fuzzy čísla U, V, tak aplikujeme stejný postup s tím rozdílem, že jak jsme si už řekli, tak zobecněná Hukuharova diference pro fuzzy čísla nemusí vždy existovat.

Poznámka 3.7 V [11] navrhují, že pokud $u \ominus_g v$ neexistuje, tak lze použít takzvanou aproximovanou zobecněnou Hukuharovu diferenci.

3.4.2. Zobecněné dělení

Využité poznatky ze zobecněné Hukuharovy diference následně použil Stefanini v [11] na operaci dělení. Nejdříve v rámci intervalové aritmetiky uvažujme dva intervaly $a = \langle a^-, a^+ \rangle$, $b = \langle b^-, b^+ \rangle$, kde $b^- > 0$ nebo $b^+ < 0$ (což znamená $0 \notin b$). Pro interval $c = \langle c^-, c^+ \rangle$, kde $c = a \cdot b$, vypočteme krajní hodnoty c^-, c^+ dle standardní intervalové aritmetiky. To znamená:

$$c^- = \min\{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^-, a^+b^+\},$$

$$c^+ = \max\{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^-, a^+b^+\}.$$

Poté si zadefinujme inverzní interval c^{-1} k intervalu c tak, že $c^{-1} = \langle 1/c^+, 1/c^- \rangle$.

Definice 3.6 Nechť $a = \langle a^-, a^+ \rangle$ a $b = \langle b^-, b^+ \rangle$. *Zobecněné dělení* $\div_g$ definujeme takto:

$$a \div_g b = c \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) \;\; a = b \cdot c, \\ \text{nebo } (ii) \;\; b = a \cdot c^{-1}. \end{cases}$$

Je vidět, že $a \div_g b$ vždy existuje pro intervaly $a, b \in \mathbb{R}$, kde $0 \notin b$. Při zadání může nastat 6 situací, kde konečný výsledek se vypočte podle toho, jaká situace nastane. Pojďme se nyní na tyto situace, které jsou převzaté z [11], podívat podrobněji:

1. Když $0 < a^- \leq a^+$ a $b^- \leq b^+ < 0$, tak

$$\text{buď } a^-b^- \geq a^+b^+, \text{tak } c^- = a^+/b^-, c^+ = a^-/b^+ \text{a } (i) \text{ je splněno},$$

$$\text{nebo } a^-b^- \leq a^+b^+, \text{tak } c^- = a^-/b^+, c^+ = a^+/b^- \text{a } (ii) \text{ je splněno}.$$

2. Když $0 < a^- \leq a^+$ a $0 < b^- \leq b^+$, tak

$$\text{buď } a^-b^+ \leq a^+b^-, \text{tak } c^- = a^-/b^-, c^+ = a^+/b^+ \text{a } (i) \text{ je splněno,}$$

$$\text{nebo } a^-b^+ \geq a^+b^-, \text{tak } c^- = a^+/b^+, c^+ = a^-/b^- \text{a } (ii) \text{ je splněno.}$$

3. Když $a^- \leq a^+ < 0$ a $b^- \leq b^+ < 0$, tak

$$\text{buď } a^+b^- \leq a^-b^+, \text{tak } c^- = a^+/b^+, c^+ = a^-/b^- \text{a } (i) \text{ je splněno,}$$

$$\text{nebo } a^+b^- \geq a^-b^+, \text{tak } c^- = a^-/b^-, c^+ = a^+/b^+ \text{a } (ii) \text{ je splněno.}$$

4. Když $a^- \leq a^+ < 0$ a $0 < b^- \leq b^+$, tak

$$\text{buď } a^-b^- \leq a^+b^+, \text{tak } c^- = a^-/b^+, c^+ = a^+/b^- \text{a } (i) \text{ je splněno,}$$

$$\text{nebo } a^-b^- \geq a^+b^+, \text{tak } c^- = a^+/b^-, c^+ = a^-/b^+ \text{a } (ii) \text{ je splněno.}$$

5. Když $a^- \leq 0, a^+ \geq 0$ a $b^- \leq b^+ < 0$, tak řešení nezávisí na b^+ a platí:

$$c^- = a^+/b^-, c^+ = a^-/b^- \text{a } (i) \text{ je splněno.}$$

6. Když $a^- \leq 0, a^+ \geq 0$ a $0 < b^- \leq b^+$, tak řešení nezávisí na b^- a platí:

$$c^- = a^-/b^+, c^+ = a^+/b^+ \text{a } (i) \text{ je splněno.}$$

Poznámka 3.8 Pokud $0 \in \langle b^-, b^+ \rangle$, tak zobecněné dělení není definováno. Pro intervaly $b = \langle 0, b^+ \rangle$ nebo $b = \langle b^-, 0 \rangle$ je dělení možné, ale výsledek by se posléze počítal přes jednostranné limity [11].

Ukažme si nyní na konkrétním příkladu, jak najdeme správnou situaci a spočítáme výsledek.

Příklad 3.12 Vezměme si stejné zadaní, jako jsme měli u zobecněné Hukuharovy diference. Tedy mějme intervaly $a = \langle 1, 4 \rangle$, $b = \langle 2, 7 \rangle$. Nyní se podíváme, jaká ze šesti situací nám nastala. Jednoznačně vidíme, že $0 < 1 \leq 4$ a $0 < 2 \leq 7$, což odpovídá druhé situaci. Dále zjistíme, že po roznásobení platí první řádek u druhé situace, tedy $7 \leq 8$. Dosadíme do rovnic $c^- = a^-/b^-, c^+ = a^+/b^+$ a výsledek bude tedy následující:

$$\langle 1,4\rangle \div_g \langle 2,7\rangle = \langle 1/2, 4/7\rangle.$$

U zobecněného dělení pro fuzzy čísla se používá více způsobů, jak dojít k výsledku. O nich se můžeme dočíst v [11]. My se podíváme na ten, který nejvíce vychází ze zobecněné Hukuharovy diference.

Definice 3.7 Nechť $U, V \in F(\mathbb{R})$ jsou fuzzy čísla s následujícími α-řezy $U_\alpha = \langle \underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha)\rangle$ a $V_\alpha = \langle \underline{v}(\alpha), \overline{v}(\alpha)\rangle$, kde $0 \notin V_\alpha$ pro všechna $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. *Zobecněné fuzzy dělení* $\div_g$ je operace, jejímž výsledkem je fuzzy číslo $W = U \div_g V \in F_N(\mathbb{R})$, s α-řezy $W_\alpha = \langle \underline{w}(\alpha), \overline{w}(\alpha)\rangle$, definované takto:

$$U_\alpha \div_g V_\alpha = W_\alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} \quad\;\; (i)\ U_\alpha = V_\alpha \cdot W_\alpha, \\ \text{nebo } (ii)\ V_\alpha = U_\alpha \cdot W_\alpha^{-1}, \end{cases}$$

kde $W_\alpha^{-1} = \langle 1/\overline{w}(\alpha), 1/\underline{w}(\alpha)\rangle$.

Předpokládáme, že W je fuzzy číslo a násobení v $(i), (ii)$ mezi fuzzy čísly se provádí pomocí standardní fuzzy aritmetiky.

Zobecněné fuzzy dělení $\div_g$ existuje pokud $W \in F_N(\mathbb{R})$, a tedy $\underline{w}(\alpha)$ je neklesající, $\overline{w}(\alpha)$ nerostoucí a $\underline{w}(1) \leq \overline{w}(1)$. Výpočty posléze provádíme stejně jako pro intervaly [11]. Ukažme si to na dvou příkladech, kde jeden bude mít řešení a u druhého zobecněné fuzzy dělení nebude existovat.

Příklad 3.13 Mějme opět dvě trojúhelníková fuzzy čísla U a V zadefinované tak, že $U = \{\langle 11+3\alpha, 18-4\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$ a $V = \{\langle 1+\alpha, 4-2\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$. Když se podíváme na šest případů, které jsme si zadefinovali u zobecněného dělení u intervalů, tak vidíme, že našemu zadání odpovídá případ druhý a po roznásobení platí, že $44-10\alpha-6\alpha^2 \geq 18+14\alpha-4\alpha^2$ pro $\alpha \in \langle 0,1\rangle$, a tedy výsledek počítáme podle definice druhého řádku u druhého případu. Dostaneme výsledek:

$$\langle 11+3\alpha, 18-4\alpha\rangle \div_g \langle 1+\alpha, 4-2\alpha\rangle = \langle (18-4\alpha)/(4-2\alpha), (11+3\alpha)/(1+\alpha)\rangle.$$

Takové výsledné fuzzy číslo může existuje, ale pro jistotu si ještě ověříme podmínku (ii), která podle definice má být splněna:

$$\langle 11+3\alpha, 18-4\alpha\rangle \cdot \langle (1+\alpha)/(11+3\alpha), (4-2\alpha)/(18-4\alpha)\rangle = \langle 1+\alpha, 4-2\alpha\rangle,$$

kde $1+\alpha$ rovná se minimu z roznásobení, které se provede podle standardní fuzzy aritmetiky a $4-2\alpha$ se rovná maximu. Vidíme, že výsledek se rovná V_α a rovnost je tedy splněna.

Příklad 3.14 Nyní uvažujme dvě trojúhelníková fuzzy čísla R, S zadefinované tak, že $R = \{\langle 1+0,5\alpha, 5-3,5\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$ a $S = \{\langle -3+\alpha, -1-\alpha\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$. Použijeme případ první, řádek také první a výsledek tedy podle definice by měl být

$$\langle 1+0,5\alpha, 5-3,5\alpha\rangle \div_g \langle -3+\alpha, -1-\alpha\rangle = \langle (5-3,5\alpha)/(-3+\alpha), (1+0,5\alpha)/(-1-\alpha)\rangle.$$

Když se ale podíváme na výsledek podrobněji, zjistíme že by výsledné fuzzy číslo muselo mít souřadnice $\langle -5/3; -1,5/2; -1\rangle$, ale takové fuzzy číslo neexistuje, jelikož v tomto případě $x_1 \leq x_2 \nleq x_3$, a tedy neexistuje zobecněné dělení pro fuzzy čísla R, S.

Na závěr této kapitoly se opět zaměříme, jestli je splněna naše vlastnost, a to konkrétně vlasnost (2). Zajímá nás tedy jestli platí $U \cdot U^{-1} = 1$. Přepíšeme si tuto vlastnost do ekvivalentního tvaru, abychom zde měli operaci zobecněné dělení, tj. $U \div_g U = 1$, za podmínky, že $0 \notin U_\alpha$, kde $\alpha \in (0,1\rangle$. Podle definice hledáme takové U, které když vynásobíme jedničkou, tak nám vyjde opět stejné fuzzy číslo U. Je očividné, že pokud toto konkrétní zobecněné dělení existuje, tak tato vlastnost bude splněna, jelikož abychom dostali naše původní fuzzy číslo U, musíme násobit jedničku tím stejným U.

U řešení rovnice $a \cdot x = b$, kde a, b, x jsou intervaly, použijeme podobnou myšlenku, jakou jsme použili při řešení rovnice se zobecněnou Hukuharovou diferencí. Tedy zobecněné dělení $x = b \div_g a$ existuje, pokud $0 \notin a$ a platí alespoň jedna z těchto rovností:

$$a \cdot x = b,$$

$$b/x = a.$$

Opět platí, že pokud uvažujeme fuzzy čísla a zobecněné dělení pro fuzzy čísla existuje, tak postupujeme stejně. Pokud neexistuje, tak použijeme aproximované zobecněné dělení, o kterém se více dočteme v [11].

Příklad 3.15 Na závěr této práce si udělejme poslední příklad, ve kterém srovnáme výsledky podle jednotlivých přístupů. Uvažujme pro jednoduchost intervaly $a = \langle 1, 2\rangle, b = \langle 3, 5\rangle$. Napišme si naši známou rovnici $a+x = b$ a nyní si spočítáme neznámý interval x podle jednotlivých přístupů.

1. Standardní intervalová a fuzzy aritmetika

   $$x = b - a$$

   $$x = \langle 3, 5\rangle - \langle 1, 2\rangle = \langle 1, 4\rangle.$$

   Neznámá x nám představuje všechny hodnoty, ke kterým existuje taková hodnota z a, že výsledek součtu bude patřit do b. Po dosazení výsledku do původní rovnice dostaneme:

   $$\langle 1, 2\rangle + \langle 1, 4\rangle = \langle 2, 6\rangle.$$

   Jak je vidět tento výsledný interval je širší než původní interval b, nemůžeme tedy použít klasické sčítání, jelikož intervaly a, x jsou na sebe nezávislé.

2. Podmíněná fuzzy aritmetika

   $$x = b - a$$

   $$x = \langle 3, 5\rangle - \langle 1, 2\rangle = \langle 1, 4\rangle.$$

   Zde nám interval x vyjde stejně, ovšem v tomto případě si zadáme relaci:

   $$D = \{(a, x) \in R^2 | a + x \in b\}.$$

   Tato relace nám zajistí závislost mezi intervaly a, x, navíc součet bude roven původnímu intervalu b, tedy:

   $$\langle 1, 2\rangle +_D \langle 1, 4\rangle = \langle 3, 5\rangle.$$

3. Zobecněná Hukuharova diference

$$x = b \ominus_g a$$

Uvažujeme rovnici $a + x = b$, jelikož se jedná o případ, kdy $len(b) \geq len(a)$. Řešení $x = b \ominus_g a$ vypočítáme následovně:

$$x^- = 3 - 1,$$

$$x^+ = 5 - 2.$$

Výsledkem je tedy interval $x = \langle 2, 3 \rangle$. Nyní x reprezentuje množinu všech čísel, které když sečteme s libovolným prvkem z a, tak výsledek součtu bude z b. Po dosazení do původní rovnice dostaneme:

$$\langle 1, 2 \rangle + \langle 2, 3 \rangle = \langle 3, 5 \rangle.$$

Výsledný interval se rovná původnímu intervalu b.

4. Závěr

Hlavním cílem této práce bylo představit různé přístupy k intervalové a fuzzy aritmetice a zjistit, zda konkrétní zadané vlastnosti a rovnice jsou u těchto přístupů splněny.

Prvním z přístupů byla standardní a intervalová aritmetika. Tento přístup je všeobecně nejvíce používaný, ovšem jsme zjistili, že nesplňuje ani jednu z námi zadaných vlastností a rovnic, a to hlavně díky tomu, že tento koncept vychází z toho, že jednotlivé intervaly, či fuzzy čísla jsou na sobě nezávislé. Druhým přístupem byla podmíněna fuzzy aritmetika, kde jsme si zadali ostrou relaci, díky které následně byly splněny zadané vlastnosti a rovnice, jelikož tato relace nám zajistí závislost mezi intervaly a fuzzy čísly. Problémem je, že relace je vždy dána externě a tudíž není nějaký pevný postup řešení. Posledním přístupem, kterým jsme se zabývali byla Hukuharova diference, a to konkrétně zobecněnou Hukuharovou diferencí a zobecněným rozdílem. Zobecněná Hukuharova diference a zobecněný rozdíl existovali, pokud byly splněné určité zadané podmínky a potom mohly být splněny i naše zadané vlastnosti a definice. Také jsme ale zjistili, že pokud tyto podmínky splněny nejsou, tak pomocí tohoto přístupu nemůžeme počítat, jelikož výsledek by neexistoval. Jak je tedy vidět, každý přístup je něčím ojedinělý a má taky svoje negativa.

Toto téma jsem si vybral, jelikož mě zaujalo, že se dá počítat i s neurčitými daty. S pojmy z oblasti fuzzy množin a fuzzy čísel jsem se setkal poprvé až při psaní této práce, tudíž to byla i pro mě výzva, se podívat do problematiky, která se bude studovat až v navazujícím studiu. Navíc jsem celou práci psal v editoru TeXworks, a tudíž se zdokonalil v práci s tímto programem. Také jsem se naučil pracovat i s novým program FuzzME, v němž je vytvořena většina obrázků v této práci. Věřím, že tyto nové znalosti a dovednosti dobře využiji v mém nadcházejícím studiu na této univerzitě.

Literatura

[1] Hukuhara, M.: Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe. Funkcialaj Ekvacioj 10 (1967), 205-233.

[2] Klir, G.J., Pan, Y.: Constrained fuzzy arithmetic: Basic questions and some answers. Soft Computing 2, Springer-Verlag,1998, 100-108.

[3] Klir, G.J., Yuan, B.: Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications. Preatice Hall, New Jersey, 1996.

[4] Kouřilová, P., Pavlačková, M.: Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2013, 1. vydání.

[5] Mareš, M.: Algebraické vlastnosti fuzzy veličin. Robust's (2002), 224-239.

[6] Navara, M., Olšák, P.: Základy fuzzy množin. ČVUT, Praha, 2002.

[7] Novosadová, L.: Metody porovnání fuzzy čísel. Bakalářská práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2010.

[8] Pavlačka, O., Talašová, J., Fuzzy vectors as a tool for modeling uncertain multidimensional quantities. Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 1585-1603.

[9] Pergl, M.: Vývojové prostředí pro umělou inteligenci modul fuzzy čísel. Diplomová práce, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2009.

[10] Přívozník, L.: Řešení soustav lineárních rovnic na bázi intervalové aritmetiky. Diplomová práce, České vysoké učení technické v Praze, Praha, 2008.

[11] Stefanini, L,: A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. Fuzzy Sets and Systems 161 (2010), 1564-1584.

[12] Talašová, J.: Fuzzy metody vícekriteriálního hodnocení a rozhodování. Univerzita Palackého, Olomouc, 2003, 1. vydání.

[13] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Index tělesné hmotnosti [online]. c2014 [citováno 05. 02. 2015].

[14] Zadeh, L. A.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - II. Information s, sciences, 1975, 8.4: 301-357.