



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

# VLIV TĚSNÍCÍ SPÁRY NA DYNAMIKU ROTORU

INFLUENCE OF ANNULAR SEAL ON ROTOR DYNAMICS

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. MICHAELA KURKOVÁ

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. VLADIMÍR HABÁN, Ph.D.

BRNO 2023



# Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav  
Studentka: **Bc. Michaela Kurková**  
Studijní program: Energetické a termofluidní inženýrství  
Studijní obor: Fluidní inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.**  
Akademický rok: 2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Vliv těsnící spáry na dynamiku rotoru

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Těsnící spára je prostor mezi statorem a hřídelí, odděluje prostory s rozdílným tlakem po délce hřídele. Při optimalizaci těsnící spáry je nutno dbát na ztrátový moment a na minimalizaci ztrátového průtoku. Ve většině návrhu je ale nutno dbát i na dynamické vlastnosti těsnící spáry. Dynamika rotoru turbín i čerpadel je velmi závislá na vlastnostech těsnících spár v interiéru vodního stroje.

### Cíle diplomové práce:

Literární rešerše problematiky těsnících spár.  
Základní analytické řešení dynamiky těsnící spáry.  
Stanovení vlivu těsnící spáry na dynamiku rotoru.  
Návrh experimentu.

### Seznam doporučené literatury:

Black, H.F., Effects of Hydraulic Forces in Annular Pressure Seals on the Vibrations of Centrifugal Pump Rotors, 1.M.Eng. Sci., Vol. 11, No. 2, pp. 206-213, 1969

Childs, D., Turbomachinery Rotordynamics. Phenomena, Modeling and Analysis, John Wiley & Sons, Inc. ISBN-10: 047153840X, 1993,

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Diplomová práce pojednává o problematice kapalinových těsnících spár a jejich vlivu na dynamiku rotoru. V první části je uvedeno odvození základního analytického řešení. Následně je sestaven MKP model rotoru s vlivem těsnící spáry. Sestavený model je využit pro analýzu vlivu spáry na dynamiku rotoru. Poslední část práce se věnuje koncepčnímu návrhu experimentu a jeho základní dynamické analýze.

## **Klíčová slova**

Těsnící spára, dynamika rotoru, metoda konečných prvků, přídavné účinky kapaliny, modální analýza

## **Abstract**

The thesis deals with the problem of annular seals and their influence on rotor dynamics. In the first part the derivation of the basic analytical solution is presented. Subsequently, a FEM model of the rotor with the influence of annular seal is constructed. The model is used to analyze the effect of the seal on the rotor dynamics. The last part of the paper is devoted to the conceptual design of the experiment and its basic dynamic analysis.

## **Keywords**

Seal, rotordynamics, Finite Element Method, additional effects of liquid, modal analysis

## Bibliografická citace

KURKOVÁ, M. *Vliv těsnící spáry na dynamiku rotoru*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2023. 60 s. Vedoucí doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Vliv těsnící spáry na dynamiku rotoru* vypracovala samostatně pod vedením doc. Ing. Vladimíra Habána, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

26. května 2023

.....  
Bc. Michaela Kurková

## Poděkování

Na tomto místě chci poděkovat vedoucímu práce doc. Ing. Vladimíru Habánovi, PhD. především za jeho ochotu a trpělivost, se kterými vedl tuto práci, dále také za jeho cenné rady z oblasti dynamiky. Poděkování patří vyučujícím na Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana za veškeré poznatky, které mi předali během studia. V neposlední řadě děkuji svým blízkým za podporu během nelehkých chvil.

Bc. Michaela Kurková





# Obsah

Úvod	10
<b>1 Rešeršní studie těsnících spár</b>	<b>11</b>
<b>2 Analytické řešení tenké spáry</b>	<b>16</b>
2.1 Odvození koeficientů	16
2.2 Stanovení přídavných účinků na rotor	22
<b>3 MKP model rotoru</b>	<b>26</b>
3.1 Hřídelový prvek	26
3.2 Tuhý kotouč	30
3.3 Ložiskové vazby	31
3.4 Sestavení celkového modelu rotoru	32
3.5 Modální analýza	33
3.6 Ustálená odezva systému na nevyváženost	35
3.7 Model rotoru s vlivem tenké kapalinové spáry	37
3.8 Implementace matematického modelu	37
<b>4 Aplikace na příkladu rotoru</b>	<b>39</b>
4.1 Testování MKP modelu	39
4.2 Testování výpočtu přídavných účinků tenké kapalinové spáry	42
4.3 Vliv tenké kapalinové spáry na dynamiku rotoru	44
<b>5 Návrh experimentu</b>	<b>49</b>
5.1 Návrh geometrie	50
5.2 Modální analýza soustavy	52
<b>Závěr</b>	<b>55</b>
<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>56</b>
<b>Seznam použitých symbolů a zkratk</b>	<b>58</b>
<b>Seznam příloh</b>	<b>60</b>
<b>Přílohy</b>	<b>60</b>

# Úvod

Těsnící spára je důležitý konstrukční prvek z oblasti hydraulických strojů a má významný vliv na dynamiku rotoru. Empiricky byly dokázány rozdíly mezi tzv. suchými a mokřými kritickými otáčkami rotoru, což vedlo na myšlenku analyzovat vliv proudící tekutiny na rotující součásti. Obecně se jedná o přídavné účinky kapaliny na těleso, kdy nelze chování kapaliny a tělesa řešit jako dva oddělené systémy, protože dochází k jejich vzájemnému ovlivňování.

V současné době existuje řada postupů ke stanovení přídavných účinků tenké kapalinové spáry na rotor, avšak i základní analýza problému poskytuje dobrou představu o tom, jakým způsobem je dynamika rotoru ovlivněna tímto zdánlivě malým prvkem. Při vlastní konstrukci by měla proběhnout rozvaha, jak se těsnící spáry budou projevovat při provozu stroje. Nežádoucí kmitání namáhá strojní součásti a tím snižuje jejich životnost, případně může být příčinou havárií. Tyto aspekty jsou motivací pro pochopení problematiky a její inženýrské uchopení pro technickou praxi.

Úvodní část práce shrnuje poznatky související s problematikou těsnících spár, přičemž důraz byl kladen na aplikaci ve vodních strojích. Stručně jsou popsány základní analytické přístupy a rozdíly mezi nimi a případná omezení. Následně je uvedeno podrobné odvození analytického řešení dynamiky těsnící spáry, aby bylo jasné fyzikální a matematické pozadí ukrývající se za zdánlivě jednoduchými tvary výsledných vztahů.

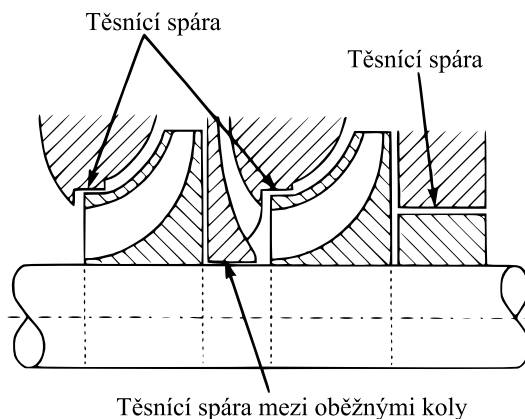
Pro analýzu přídavných účinků spáry na dynamiku rotoru je sestaven matematický model rotoru založený na metodě konečných prvků. Výsledný model je validován pomocí komerčního softwaru ANSYS a současně jsou diskutovány jeho limity. Následně je analyzován vliv těsnící spáry na dynamiku rotoru, který geometrií odpovídá návrhu geometrie z poslední části práce.

Poslední kapitola obsahuje koncepční návrh experimentálního měření. Návrh vychází z úvodní literární rešerše a možností hydraulické laboratoře. V rámci konceptu jsou navrženy základní rozměry a je provedena modální analýza systému, aby bylo možné odhadnout jeho chování při měření.

# 1 Rešeršní studie těsnících spár

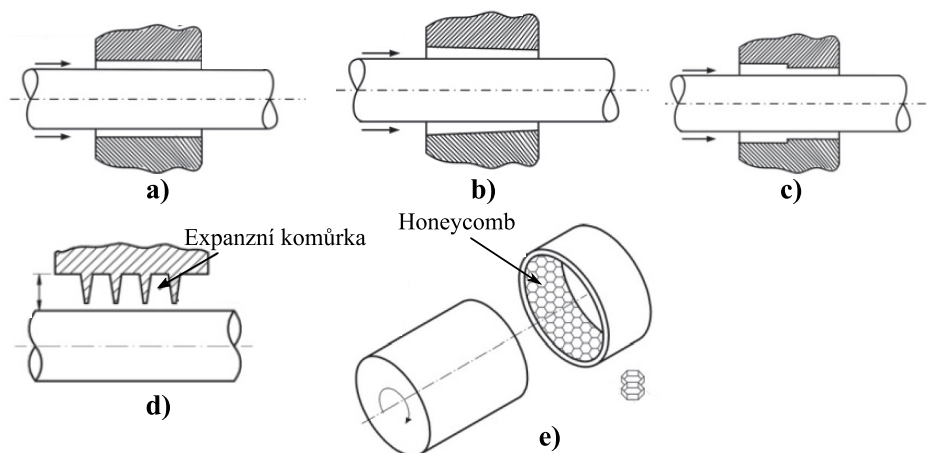
Problematika rotorové dynamiky je velmi obsáhlá, proto je tato část zaměřena úzce na těsnící spáry a jejich vliv na dynamiku rotoru. Jednomu z praktických přístupů řešení rotorové soustavy se věnuje kapitola 3.

V interiéru vodních strojů lze těsnící spáru nalézt na řadě typických míst [1], na obr. 1.1 je znázorněn řez víceštapňovým čerpadlem s vyznačenými lokacemi těsnících spár mezi rotorem a statorem. Šířka těsnících spár se pohybuje okolo 0,1 mm [2]. Proudění v těchto úzkých prostorách je způsobeno rozdílnými tlaky na vstupu a výstupu a tyto oblasti jsou typickým zdrojem objemových ztrát v čerpadlech.



Obrázek 1.1: Umístění těsnících spár na příkladu víceštapňového čerpadla. Upraveno a převzato z [1].

Z hlediska geometrie spáry lze rozlišit několik základních typů těsnících spár [3], některé z nich jsou zobrazeny na obr. 1.2. Nejjednodušším příkladem je válcová spára, avšak v technických aplikacích jsou používány těsnící spáry s komplikovanější geometrií. Cílem těchto složitějších geometrií je minimalizovat zpětné průtoky, ale také nežádoucí dynamické účinky spáry na celý rotor. Další využívanou geometrií jsou tzv. labyrintové těsnící

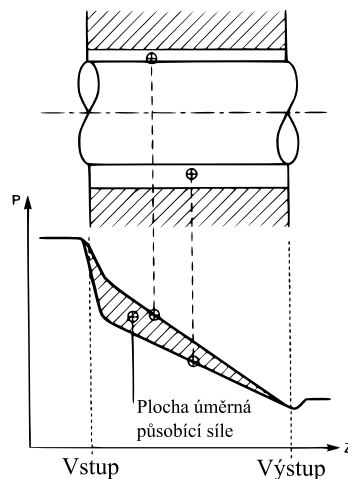


Obrázek 1.2: Geometrie těsnících spár – a) válcová spára, b) kónická spára, c) spára s odsazením, d) spára s drážkami, e) "Honeycomb". Upraveno a převzato z [3].

spáry. Zajímavým příkladem je pak geometrie inspirovaná včelími plástvemi označovaná jako "Honeycomb"(na obr. 1.2e).

### Lomakinův efekt

V roce 1958 autor Lomakin publikoval práci zaměřenou na analýzu radiální síly působící v excentrické válcové spáře, která působí jako samovystředovací. Vycházel z analýzy tlakového pole v prostoru spáry, graf tlaku v závislosti na axiální vzdálenosti je na obr. 1.3. V jeho přístupu byl zanedbán vliv rotace kapaliny. Zjistil, že první vlastní frekvence rotoru při provozu bez okolní kapaliny jsou nižší než v případě provozu s kapalinou [3].

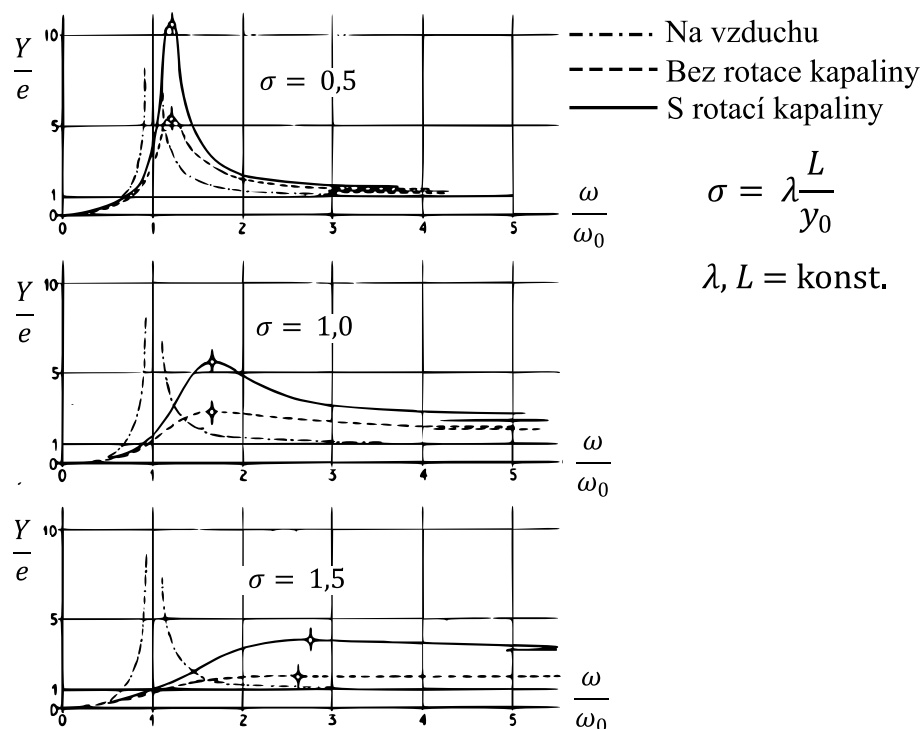


Obrázek 1.3: Distribuce tlaku ve válcové těsnící spáře. Upraveno a převzato z [1]

### Bulk-Flow analýza

Autor Black v roce 1969 představil model přídatných účinků tenké těsnící spáry založený na výpočtu koeficientů na základě daných parametrů spáry [4]. Jedná se o základní model přídatných účinků a jeho matematicko-fyzikálnímu popisu je věnován prostor v následující kapitole 2. Základem analýzy je úprava a řešení zákonů zachování pro danou geometrii a okrajové podmínky – zákon zachování hmotnosti (rovnice kontinuity) a zákon zachování hybnosti (Navierova–Stokesova rovnice). V případě Blackova modelu lze postup označit za kvazi-analytický, protože v určitém kroku je nutné přistoupit k numerickému řešení. Příklad vlivu těsnící spáry na amplitudo-frekvenční charakteristiku je zobrazen na obrázku 1.4. Při uvažování přídatných účinků kapaliny dochází pro danou geometrii ke zvýšení vlastní frekvence, pro nulovou rotaci kapaliny je přídatné tlumení značně vyšší než s rotací kapaliny odpovídající polovině rotace hřídele.

Autor Childs provedl dynamickou analýzu válcové těsnící spáry na základě řešení Hirsovy lubrikační rovnice pomocí perturbační metody [5]. Jeho metodika na rozdíl od Blackova modelu umožňuje stanovit přídatné účinky pro různé hodnoty rotace kapaliny v prostoru spáry, která je ovlivněna drsností povrchu rotoru a statoru, případně rotací na vstupu. Dalším rozdílem je definice součinitele délkových ztrát  $\lambda$ , kdy Black využívá definici  $\lambda$  podle Yamady [6], odpovídá vztahu (3.56). Zatímco Childs v původním článku definuje  $\lambda$  jiným způsobem [5], následně v publikaci [7] adaptuje definici ztrátového součinitele podle Blasiusa s úpravami pro geometrii spáry. O čistě analytický postup se jedná pouze v případě krátké spáry. Tvar základního dynamického modelu je v obou případech stejný a odpovídá rovnici (2.57).



Obrázek 1.4: Amplitudo-frekvenční charakteristika rotoru buzeného nevyvážeností. Parametr  $\sigma$  charakterizuje geometrii spáry s vlivem součinitele délkových ztrát, v tomto případě byla variována pouze šířka spáry. Upraveno a převzato z [4].

Řada autorů se problematice dále věnovala a byly odvozeny komplikovanější modely, pro případ spáry s rovnoběžně umístěnými drážkami je popsán postup v [8], kdy autoři vycházeli z Childsova modelu. Zde odvozený postup je použitelný také pro hladkou spáru. Childs společně Dressmanem rozvinul svou metodu pro kónickou geometrii, kdy je třeba aplikovat kombinovaný analyticko-numerický přístup [9].

### Experimentální výzkum

Výše uvedené metody pro stanovení přídatných účinků zavádí během výpočtu řadu zjednodušení, proto i zde jako v jiných odvětvích hydromechaniky hraje významnou roli experimentální výzkum. Ve všech níže zmíněných experimentech byla zkoumaným médiem voda.

Nordmann a Massmann provedli měření těsnící spáry o šířce 0,35 mm v roce 1984. Měřena byla poloha rotoru a buzení probíhalo impulzním kladívkem, při srovnání s Blaczkovým modelem byla zjištěna shoda v axiální rychlosti, ale vysoké odchylky v predikci koeficientů [10].

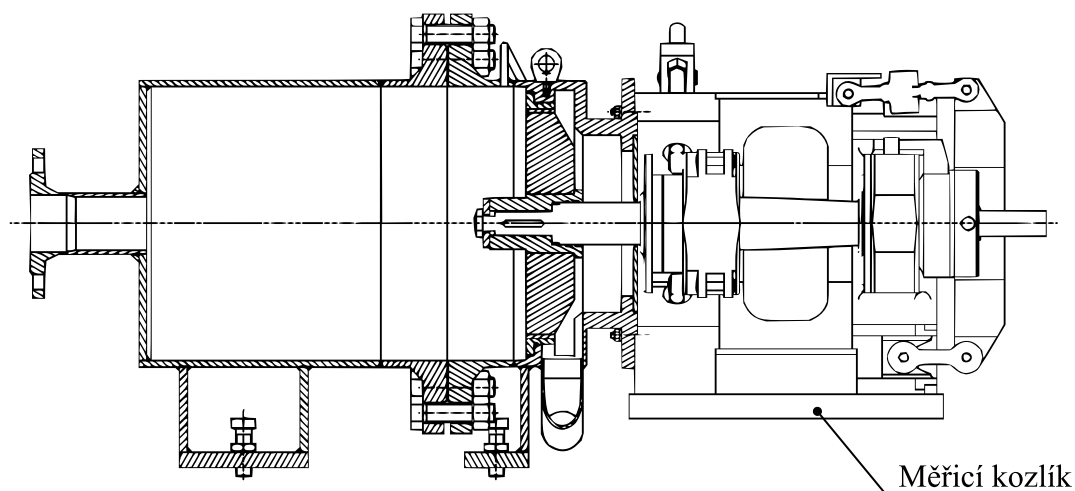
Childs a Dressmann (1985) se svým experimentem zaměřili na kónickou spáru, kdy se její šířka mění po délce [9]. Měření proběhlo pro několik kombinací hodnot tlakového spádu, geometrie spáry a otáček. V jejich případě byl rotor buzen nevyvážeností a použity byly opět snímače polohy. V rámci stejné publikace popisují také výpočetní stanovení přídatných účinků, se kterými porovnávají výsledky experimentu, kde se ukazuje, že teoreticky predikované hodnoty diagonální přídatné tuhosti jsou vyšší než naměřené.

Iwatsubo a kolektiv (1989) experimentálně zjišťovali statické a dynamické charakteristiky těsnících spár [11]. Jejich zjištěním je stabilizační efekt vstupní předrotace kapaliny

v opačném směru než jsou otáčky hřídele. Měřena byla výchylka a tlak, na jejichž základě byla dopočítána radiální a tangenciální síla, ze kterých pak byly určeny přídatné účinky.

Marscher (2008) provedl experiment a jeho srovnání s Blackovým modelem. Podobně jako Nordmann a Massmann byl rotor buzen impulsním kladívkem. Při vyhodnocení výsledků byla snaha o minimalizaci vlivu přirozeného buzení (nehomogenita materiálu apod.), proběhlo kumulativní časové středování měřené odezvy.

Kohut se ve své diplomové práci věnoval experimentálnímu stanovení přídatných účinků kapalinové těsnící spáry na základě měření radiální síly pomocí tenzometrických snímačů [18]. Z důvodu vysokého šumu v měřeném signálu nebylo možné přídatné účinky stanovit. Buzení soustavy bylo provedeno úderem paličkou. Sestrojené zařízení je oproti výše zmíněným unikátní svou nesymetrickou konstrukcí a je zobrazeno na obrázku 1.5. Stejně tak je ojedinělé přímé měření síly, většina experimentálních studií využívá snímačů polohy, zrychlení, v novějších výzkumech je také využito měření síly pomocí elektromagnetických ložisek [10].



Obrázek 1.5: Řez měřicím zařízením použitým v práci Ing. Kohuta – tenzometrické snímače byly umístěny na tělesech dvou radiálních ložisek. Upraveno a převzato z [18].

### Numerické simulace

V rámci neustálého pokroku výpočetní techniky se rozšiřují možnosti pro uplatnění tzv. Fluid Structure Interaction (FSI) simulací. V těchto typech simulací je provázán CFD (Computational Fluid Dynamics) výpočet s interakcí s tělesy. Pro stanovení přídatných účinků je třeba provést několik nestacionárních výpočtů pro různé otáčky rotoru. Z výsledků jsou metodou nejmenších čtverců stanoveny aproximační polynomy (funkce otáček) pro radiální a tangenciální sílu, na základě nich jsou pak identifikovány přídatné účinky. Uvedený postup ve své dizertační práci prezentuje Havlásek [13]. Věnuje se několika verzím simulace, přičemž poslední z nich je transientní výpočet pro kompletní geometrii čerpadla. Rozsah geometrie a nutnost provést několik takových výpočtů vede na vysokou časovou náročnost takových simulací.

### **Srovnání těsnících spár a kluzných ložisek**

Z pohledu geometrie se jedná o velice podobné prvky, ale jejich účinky na rotorový systém se značně liší. Těsnící spára má typicky větší šířku než kluzné ložisko. Pro popis kluzných ložisek se tradičně používá laminární Reynoldsova rovnice, tedy i předpoklad charakteru proudění v úzkém prostoru je rozdílný. U kluzných ložisek má na frekvenci vliv rozložení teploty olejového filmu, avšak u těsnící spáry jsou tyto efekty zanedbatelné [1].

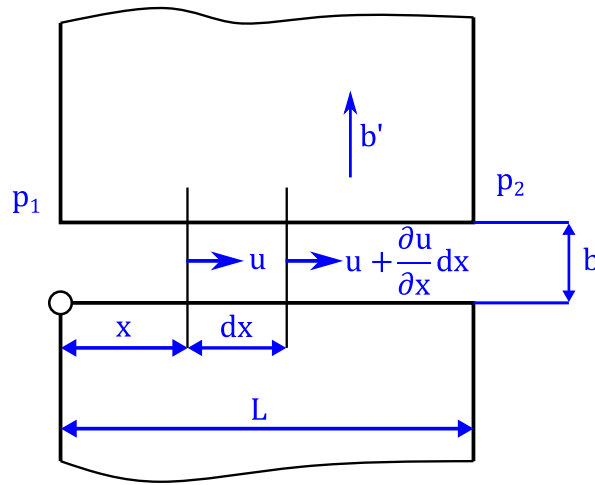
V rámci této teoretické části práce byla snaha pokrýt základní poznatky z oblasti výzkumu těsnících spár. Výše uvedené poznatky jsou zaměřeny především na oblast čerpadel, řada výzkumů se zabývá spárami, kde je proudícím médiem plyn. Na základě studia analytických přístupů k řešení těsnící spáry pak byl zvolen model podle Blacka, který je dále podrobně popsán a analyzován. Poznatky z experimentálně zaměřených publikací byly využity při návrhu experimentu.

## 2 Analytické řešení tenké spáry

V této kapitole je uvedeno základní analytické řešení tenké spáry, které je následně v práci využito pro stanovení přídatných účinků na dynamiku rotoru. Odvození koeficientů je provedeno na základě článku [4].

### 2.1 Odvození koeficientů

Pro stanovení přídatných účinků tenké kapalinové spáry jsou často využívány koeficienty, které jsou určeny na základě geometrie spáry, vlastností kapaliny a tlakovém spádu. V této části je popsán postup pro určení těchto koeficientů. Cílem je nastínit fyzikální pozadí využívaných koeficientů, které vychází ze základních rovnic hydromechaniky.



Obrázek 2.1: Geometrie kontrolního objemu tenké spáry. Upraveno a převzato z [4].

Na obrázku 2.1 je zobrazena geometrie tenké spáry s vyznačeným kontrolním objemem kapaliny  $bdx$ , kde  $b = y_0 + \bar{y}$  vyjadřuje šířku spáry se zahrnutím malých výchylek  $-y_0$  je šířka spáry a  $\bar{y}$  značí její malé výchylky.

Pro daný kontrolní objem lze psát rovnici kontinuity v následujícím tvaru (2.1). Úpravou rovnice a její integrací je pak získán vztah pro rychlost.

$$b \frac{\partial u}{\partial x} dx + \dot{b} dx = 0 \quad (2.1)$$

Vztah pro rychlost je pak:

$$u = U - \frac{\dot{b}}{b} x \quad (2.2)$$

kde  $U$  je určeno na základě okrajových podmínek. Je uvažován nestacionární děj, poté lze zrychlení kapaliny vyjádřit totální derivací rychlosti podle času.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.3)$$

Při úvaze výše uvedených vztahů a označení pro šířku spáry a její fluktuaci lze rovnici (2.3) přibližně přepsat do následujícího tvaru.



$$\frac{du}{dt} = \dot{U} - \frac{\dot{\bar{y}}}{y_0}U - \frac{\ddot{\bar{y}}}{y_0}x \quad (2.4)$$

Gradient tlaku podél délky spáry  $L$  je vyjádřen následující rovností. Pro další úpravy je zavedeno označení  $U = V + v$ , kde  $V$  je střední rychlost kapaliny při stacionárních podmínkách, tedy platí, že výchylka šířky spáry  $\bar{y}$  je nulová, a  $v$  je výchylka rychlosti.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{du}{dt} - \frac{\lambda}{b}u^2 \quad (2.5)$$

Člen rovnice (2.5)  $\frac{\lambda}{b}u^2$  vyjadřuje tlakové ztráty po délce spáry  $L$ . Vztah pro gradient tlaku je třeba upravit do podoby v závislosti na zavedeném označení rychlosti. K tomu je využít výše odvozený vztah pro zrychlení kapaliny (2.4).

$$\frac{du}{dt} = \dot{v} - \frac{\dot{\bar{y}}}{y_0}(V + v) - \frac{\ddot{\bar{y}}}{y_0}x = \dot{v} - \frac{\dot{\bar{y}}}{y_0}V - \frac{\dot{\bar{y}}}{y_0}v - \frac{\ddot{\bar{y}}}{y_0}x \quad (2.6)$$

Proměnné  $v$  a  $\bar{y}$  představují výchylky, které jsou samy o sobě velmi malé, proto lze součin  $v\dot{\bar{y}}$  považovat za nulový. Upravený vztah pro zrychlení kapaliny je pak dán následující rovností.

$$\frac{du}{dt} = \dot{v} - \frac{\dot{\bar{y}}}{y_0}V - \frac{\ddot{\bar{y}}}{y_0}x \quad (2.7)$$

Pro vyjádření tlakových ztrát je zavedena proměnná  $\sigma$ , která charakterizuje geometrii spáry a zahrnuje ztrátový součinitel  $\lambda$ .

$$\sigma = \lambda \frac{L}{y_0} \quad (2.8)$$

Z výše uvedeného vztahu (2.8) je vyjádřen ztrátový součinitel  $\lambda$ , který je využit pro úpravu poměru  $\frac{\lambda}{b}$ , který vystupuje ve členu vyjadřujícím tlakové ztráty ve vztahu pro gradient tlaku (2.5).

$$\frac{\lambda}{b} = \frac{y_0\sigma}{L} \cdot \frac{1}{y_0 + \bar{y}} \cdot \frac{y_0 - \bar{y}}{y_0 - \bar{y}} = \frac{y_0\sigma}{L} \cdot \frac{y_0 - \bar{y}}{y_0^2 - \bar{y}^2} \quad (2.9)$$

Člen  $\bar{y}^2$  je opět velmi malý, proto jej lze považovat za nulový. Poměr je pak upraven do následujícího tvaru.

$$\frac{\lambda}{b} = \frac{\sigma}{L} \left(1 - \frac{\bar{y}}{y_0}\right) \quad (2.10)$$

Upravené vztahy (2.7) a (2.10) jsou následně dosazeny do vztahu pro gradient tlaku (2.5).

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\dot{v} + \frac{\dot{\bar{y}}}{y_0}V + \frac{\ddot{\bar{y}}}{y_0}x - \frac{\sigma}{L} \left(1 - \frac{\bar{y}}{y_0}\right) \left(V^2 + 2Vv - 2V\frac{\dot{\bar{y}}}{y_0}x\right) \quad (2.11)$$

Uvedený vztah je dále upravován a přepsán do vhodné podoby. Provedené úpravy zahrnují zanedbání velmi malých členů ( $v\dot{\bar{y}}$ ,  $\dot{\bar{y}}\bar{y}$ ). Výsledný vztah pro gradient tlaku je uveden níže.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \left[ \frac{\ddot{\bar{y}}}{y_0}x + \left(V + 2\sigma V \frac{x}{L}\right) \frac{\dot{\bar{y}}}{y_0} + \sigma \frac{V^2}{L} \frac{\bar{y}}{y_0} \right] - \left[ \dot{v} + 2\sigma \frac{V}{L}v \right] - \sigma \frac{V^2}{L} \quad (2.12)$$

Rovnice (2.12) je následně integrována podle  $dx$  od 0 do místa  $x$ , v místě  $x = 0$  je hodnota tlaku  $p = p_0$ .

$$\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho} = \left[ \frac{\ddot{\bar{y}}}{y_0} \frac{x^2}{2} + \left( Vx + \sigma V \frac{x^2}{L} \right) \frac{\dot{\bar{y}}}{y_0} + \sigma \frac{V^2}{L} \frac{\bar{y}}{y_0} x \right] - \left[ \dot{v} + 2\sigma \frac{V}{L} v \right] x - \sigma \frac{V^2}{L} x \quad (2.13)$$

V místě  $x = 0$  je uvažována pouze vtoková ztráta  $\xi$ , poté lze vyjádřit  $p_0$  dosazením do rovnice (2.13).

$$p_0 = p_1 - \frac{(1 + \xi)}{2} \rho (V + v)^2 \doteq p_1 - \frac{(1 + \xi)}{2} \rho (V^2 + 2Vv) \quad (2.14)$$

Obdobný postup je aplikován v místě  $x = L$ , kde je hodnota tlaku  $p_2$ , dále je zde uvažováno stacionární proudění, proto jsou fluktuální složky rychlosti ( $v$ ) i šířky spáry ( $\bar{y}$ ) nulové. Současně je do vztahu (2.13) dosazeno za  $p_0$ , které bylo odvozeno výše.

$$p_2 = p_1 - \frac{(1 + \xi)}{2} \rho V^2 - \sigma \rho V^2 \quad (2.15)$$

Uvedené úpravy byly provedeny, aby bylo možné snadno vyjádřit rozdíl tlaku  $p_1 - p_2$ , protože obecně při uvažování spáry je znám tlak před spárou a tlak za spárou, daná tlaková diference je tedy jedním ze vstupních parametrů pro výpočet dynamického vlivu proudění kapaliny tenkou spárou.

$$P = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho V^2 [(1 + \xi) + 2\sigma] \quad (2.16)$$

Výsledný vztah pro tlak v místě  $x$  podél délky spáry je odvozen dosazením za  $p_0$  z rovnice (2.14) do vztahu pro rozložení tlaku (2.13), jednotlivé členy byly následně vhodně uspořádány.

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} - \frac{1}{2} \left[ (1 + \xi) + 2\sigma \frac{x}{L} \right] V^2 - \left[ \dot{v}x + \left[ (1 + \xi) + 2\sigma \frac{x}{L} \right] Vv \right] + \\ + \left[ \frac{\ddot{\bar{y}}}{y_0} \frac{x^2}{2} + V \left( x + \sigma \frac{x^2}{L} \right) \frac{\dot{\bar{y}}}{y_0} + \sigma V^2 \frac{x}{L} \frac{\bar{y}}{y_0} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

První dva členy výše uvedené rovnice (2.17) jsou stacionární, protože v nich nevystupují žádné časové derivace ani fluktuální složky. Další analýza je zaměřena na vliv výchylky  $\bar{y}$  vůči stacionárnímu stavu  $y_0$  – dále jsou řešeny zbývající dva členy rovnice (2.17). Lze uvažovat, že se jedná o fluktuální složku tlaku v místě  $x$ , tato složka je pro další výpočty označena  $\Delta p$ .

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \left[ \frac{\ddot{\bar{y}}}{y_0} \frac{x^2}{2} + V \left( x + \sigma \frac{x^2}{L} \right) \frac{\dot{\bar{y}}}{y_0} + \sigma V^2 \frac{x}{L} \frac{\bar{y}}{y_0} \right] - \left[ \dot{v}x + \left[ (1 + \xi) + 2\sigma \frac{x}{L} \right] Vv \right] \quad (2.18)$$

Pro sílu od kapaliny působící na stěnu po délce spáry  $L$  platí vztah.

$$f = \int_0^L \Delta p dx \quad (2.19)$$

Pro další úpravy a integraci rovnice (2.19) je třeba zavést diferenciální operátor  $D$ .

$$\begin{aligned} D &\equiv \frac{d}{dt} \\ D^2 &\equiv \frac{d^2}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Vztah (2.18) lze pomocí výše uvedeného diferenciálního operátoru přepsat do následujícího tvaru.

$$\Delta p = \frac{\rho}{y_0} \left[ \frac{x^2}{2} D^2 + V \left( x + \sigma \frac{x^2}{L} \right) D + \sigma v^2 \frac{x}{L} \right] \bar{y} - \rho \left[ x D + \left[ (1 + \xi) + 2\sigma \frac{x}{L} \right] V \right] v \quad (2.21)$$

Následně je provedena integrace za účelem vyjádření síly  $f$ , po úpravách je učena vztahem níže.

$$f = \frac{1}{6} \rho \frac{L^3}{y_0} \left[ D^2 + \frac{V}{L} (3 + 2\sigma) D + 3\sigma \frac{V^2}{L^2} \right] \bar{y} - \frac{1}{2} \rho L^2 \left[ D + [2(1 + \xi) + 2\sigma] \frac{V}{L} \right] v \quad (2.22)$$

Ve výše uvedeném vztahu (2.22) figuruje flukтуаční složka rychlosti  $v$ . Je zavedena substituce, aby bylo možné vyjádřit sílu  $f$  pouze pomocí proměnné  $\bar{y}$ . Substituce je odvozena ze vztahu (2.17), kde je dosazeno  $x = L$ . Vztah je upraven tak, aby se členy obsahující  $v$  vyskytovaly pouze na jedné straně rovnosti.

$$\dot{v} + [(1 + \xi) + 2\sigma] \frac{V}{L} v = \frac{L}{2y_0} \left[ \ddot{\bar{y}} + \frac{2V}{L} (1 + \sigma) \dot{\bar{y}} + 2\sigma \frac{V^2}{L^2} \bar{y} \right] \quad (2.23)$$

Obě strany rovnice (2.23) lze přepsat pomocí diferenciálního operátoru  $D$ , tento postup umožňuje následné vyjádření flukтуаční složky rychlosti  $v$ .

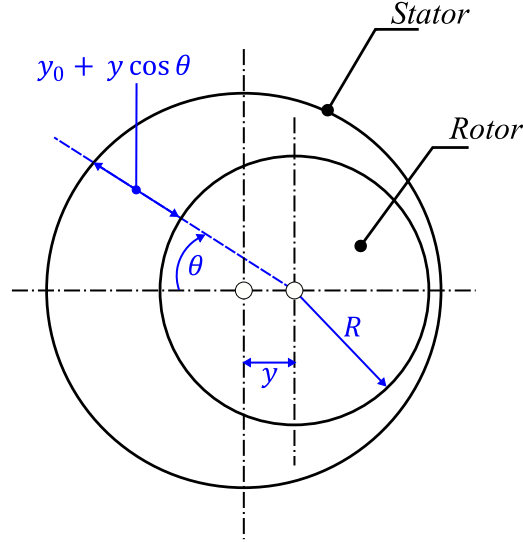
$$v = \frac{L}{2y_0} \frac{\left[ D^2 + 2\frac{V}{L} (1 + \sigma) D + 2\frac{V^2}{L^2} \sigma \right] \bar{y}}{\left[ D + [(1 + \xi) + 2\sigma] \frac{V}{L} \right]} \quad (2.24)$$

Tento výraz je dosazen do rovnice pro sílu  $f$  (2.22) a celý vztah je upraven. Koeficienty jsou dále odvozeny pro konkrétní hodnotu vtokové ztráty  $\xi = 0,5$ . Tato hodnota již byla do výrazů dosazena a využita pro algebraické úpravy, výsledkem je vztah pro sílu  $f$  v následující podobě.

$$f = -\rho \frac{L^3}{y_0} \left[ \frac{\frac{1}{12} D^3 + \frac{1}{6} (3 + \sigma) \frac{V}{L} D^2 + \left( \frac{3}{4} + \sigma + \frac{1}{3} \sigma^2 \right) \frac{V^2}{L^2} D + \frac{3}{4} \sigma \frac{V^3}{L^3}}{D + (1,5 + 2\sigma) \frac{V}{L}} \right] \bar{y} \quad (2.25)$$

Člen v hranaté závorce lze označit za funkci  $K(D)$ . Poté pro vztah pro sílu  $f$  ve zjednodušeném tvaru platí rovnost níže.

$$f = -\rho \frac{L^3}{y_0} K(D) \bar{y} = -\rho \frac{\sigma}{\lambda} L^2 K(D) \bar{y} \quad (2.26)$$



Obrázek 2.2: Pozice rotoru a statoru. Upraveno a převzato z [4].

Na obr. 2.2 je naznačena geometrie umístění rotoru vůči statoru, pro tuto geometrii je určena síla ve směru  $y$  v důsledku působení kapaliny.

$$F_y = -\rho L^2 R \frac{\sigma}{\lambda} K(D) \int_0^{2\pi} y \cos^2 \Theta d\Theta = -\pi \rho L^2 R \frac{\sigma}{\lambda} K(D) y \quad (2.27)$$

V dalších úpravách je dosazeno na funkci  $K(D)$  a celý vztah je vynásoben výrazem níže.

$$\frac{\frac{L^3}{V^3} 12}{\frac{L^3}{V^3} 12} \quad (2.28)$$

Pro přehlednější zápis je také zavedeno označení poměru  $T = \frac{L}{V}$ , vzhledem k jednotkám se jedná proměnnou s rozměrem času. Další z aplikovaných úprav je vyjádření mocniny střední rychlosti  $V^2$  ze vztahu pro tlakovou diferenci (2.16).

$$V^2 = \frac{2P}{\rho [(1 + \xi) + 2\sigma]} \quad (2.29)$$

Poté se jedná pouze o algebraické úpravy vztahu pro sílu  $F_y$  (2.27), vhodným uspořádáním lze pak vztah přepsat do následující podoby.

$$F_y = -\frac{\pi}{6\lambda} \left[ \frac{\sigma}{1,5 + 2\sigma} \right] RP \left[ \frac{T^3 D^3 + 2(3 + 2\sigma)T^2 D^2 + (3 + 2\sigma)^2 TD + 9\sigma}{TD + (1,5 + 2\sigma)} \right] y \quad (2.30)$$

Ve výše uvedeném vztahu (2.30) je výraz v druhé hranaté závorce označen jako operátor  $k(D)$ , poté lze vztah přepsat jednoduše do následujícího tvaru.

$$F_y = -\frac{\pi}{6\lambda} \left[ \frac{\sigma}{1,5 + 2\sigma} \right] RP k(D) y \quad (2.31)$$

V článku [4] autor pracuje s konkrétní hodnotou  $\xi$ , aby v této práci byla zachována větší obecnost, budou další výpočty provedeny s obecnou hodnotou vtokové ztráty  $\xi$ .

V dalších krocích je rozpracována úprava operátoru  $k(D)$ , z toho důvodu je níže uveden tvar v závislosti na  $\xi$ .

$$k(D) = \left[ \frac{T^3 D^3 + 2(2(1 + \xi) + 2\sigma)T^2 D^2 + (6(1 + \xi) + 8\sigma(1 + \xi) + 4\sigma^2)TD + 6\sigma(1 + \xi)}{TD + (1 + \xi + 2\sigma)} \right] \quad (2.32)$$

Cílem dalších úprav je vyjádřit sílu  $F_y$  v následujícím tvaru, kde již vystupují koeficienty  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  a  $\mu_2$ , které se obvykle používají pro stanovení přídavných účinků tenké kapalinové spáry na rotor.

$$|F_y| = \frac{\pi RP}{\lambda} [\mu_0 y + \mu_1 T \dot{y} + \mu_2 T^2 \ddot{y}] \quad (2.33)$$

Při porovnání vztahů (2.30) a (2.31) je patrné, že je třeba některé výrazy zahrnout do operátoru  $k(D)$ , aby bylo možné dosáhnout požadovaného tvaru. Další důležitou úvahou je zanedbání členů  $T$  s vyšší mocninou než je dva. Tento krok je učiněn za předpokladu, že  $T$  je malé vzhledem k očekávané periodě vibrací.

Jmenovatele výrazu v závorce obsahující členy  $TD$  lze aproximovat binomickou řadou. Tato operace je uvedena níže, přičemž bylo zavedeno označení  $X = TD$ , aby byl zápis dostatečně přehledný. Aproximace je provedena tak, aby maximální mocnina  $X$ , resp.  $T$ , byla opět dva, jak bylo zmíněno výše.

$$\frac{1}{X + (1 + \xi + 2\sigma)} \doteq \frac{1}{(1 + \xi + 2\sigma)} - \frac{X}{(1 + \xi + 2\sigma)^2} + \frac{X^2}{(1 + \xi + 2\sigma)^3} \quad (2.34)$$

Nyní lze upravit operátor  $k(D)$  aproximací pomocí binomické řady, výsledný výraz je velmi dlouhý a nepřehledný, proto je uveden zápis jednotlivých členů zvlášť. Bylo také bráno v úvahu zanedbání členů s vyšší mocninou  $T$  (resp.  $X$  dle zavedeného označení), tyto členy již nejsou dále uváděny.

$$\frac{2\sigma(2(1 + \xi) + 2\sigma)}{6(1 + \xi + 2\sigma)^2} X^2 + \frac{(6(1 + \xi) + 8\sigma(1 + \xi) + 4\sigma^2)\sigma}{6(1 + \xi + 2\sigma)^2} X + \frac{6\sigma^2(1 + \xi)}{6(1 + \xi + 2\sigma)^2} \quad (2.35)$$

$$- \frac{(6(1 + \xi) + 8\sigma(1 + \xi) + 4\sigma^2)\sigma}{6(1 + \xi + 2\sigma)^3} X^2 - \frac{6\sigma^2(1 + \xi)}{6(1 + \xi + 2\sigma)^3} X \quad (2.36)$$

$$\frac{6\sigma^2(1 + \xi)}{6(1 + \xi + 2\sigma)^4} X^2 \quad (2.37)$$

Aby bylo dosaženo požadovaného tvaru (2.33), byly sečteny odpovídající mocniny  $X^0$ ,  $X^1$ ,  $X^2$ . Je patrné, že mocnina  $X^0$  se ve výrazech vyskytuje pouze jedenkrát, je tak velmi snadno odvozen první hledaný koeficient  $\mu_0$ .

$$\mu_0 = \frac{(1 + \xi)\sigma^2}{(1 + \xi + 2\sigma)^2} \quad (2.38)$$

V případě  $\mu_1$  se nepodařilo získat stejný tvar, který je uváděn v literatuře. Níže je uveden postup, který byl aplikován během potřebných algebraických úprav. Mocnina  $X^1$

se vyskytuje pouze ve výrazech (2.35) a (2.36). Aby mohly být dané výrazy sečteny, je třeba je převést na společného jmenovatele. Další úpravy jsou již pouze v čitateli.

$$\begin{aligned}
(1 + \xi)(1 + \xi + 2\sigma)\sigma + \frac{4}{3}\sigma^2(1 + \xi)(1 + \xi + 2\sigma) + \frac{2}{3}\sigma^3(1 + \xi + 2\sigma) - \sigma^2(1 + \xi) &= \\
= \sigma(1 + \xi)^2 + \sigma^2(1 + \xi)\left(\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\xi\right) + \sigma^3\frac{10}{3}(1 + \xi) + \frac{4}{3}\sigma^4 &\doteq \\
\doteq \sigma(1 + \xi)^2 + \sigma^2(1 + \xi)(2,33 + 1,33\xi) + \sigma^33,33(1 + \xi) + 1,33\sigma^4 &
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Výsledný vztah pro koeficient  $\mu_1$  je uveden níže. Červeně zvýrazněná hodnota se liší od hodnoty, která je uváděná v literatuře [14]. Ale během odvozování a následné kontroly se nepodařilo naleznout chybu v algebraických úpravách, která by vedla k rozdílu právě v tomto jediném čísle – v literatuře zde figuruje hodnota 2.

$$\mu_1 = \frac{\sigma(1 + \xi)^2 + \sigma^2(1 + \xi)(2,33 + 1,33\xi) + \sigma^33,33(1 + \xi) + 1,33\sigma^4}{(1 + \xi + 2\sigma)^3} \tag{2.40}$$

V případě koeficientu  $\mu_2$  je postup analogický, jedná se pouze o algebraické úpravy a jejich vhodné uspořádání, aby bylo možné vyjádřit koeficient v požadované podobě. Bylo dosaženo shody s literaturou stejně tak, jak tomu bylo v případě koeficientu  $\mu_0$ . Níže je uveden již výsledný vztah pro  $\mu_2$ .

$$\mu_2 = \frac{0,33(1 + \xi)^2(2\xi - 1)\sigma + (1 + \xi)(1 + 2\xi)\sigma^2 + 2(1 + \xi)\sigma^3 + 1,33\sigma^4}{(1 + \xi + 2\sigma)^4} \tag{2.41}$$

Jako koeficient  $\mu_3$  je označován výraz vyskytující se ve vztahu pro sílu (2.33), v původní publikaci [4] bylo použito označení  $\epsilon$ .

$$\mu_3 = \epsilon = \frac{\pi RP}{\lambda} \tag{2.42}$$

Odvození výše uvedených koeficientů bylo založeno na řešení krátké kapalinové spáry. V článku [14] jsou koeficienty upraveny, aby zahrnovaly konečnou délku spáry  $L$ .

$$\mu_0 = \frac{\mu_0}{1 + 0,28\left(\frac{L}{R}\right)^2} \tag{2.43}$$

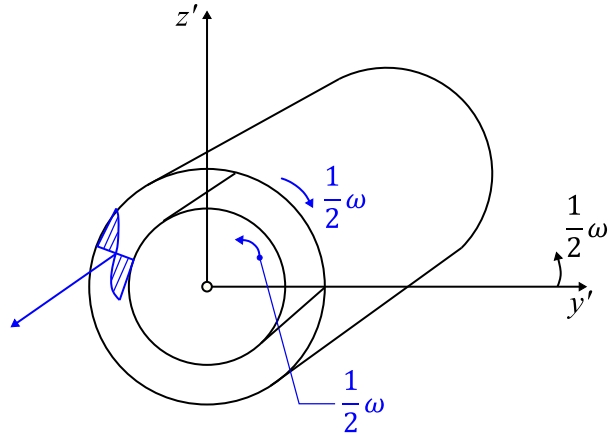
$$\mu_1 = \frac{\mu_1}{1 + 0,23\left(\frac{L}{R}\right)^2} \tag{2.44}$$

$$\mu_2 = \frac{\mu_1}{1 + 0,06\left(\frac{L}{R}\right)^2} \tag{2.45}$$

## 2.2 Stanovení přídavných účinků na rotor

Pomocí výše uvedených úprav a úvah byly vyjádřeny koeficienty, které jsou využity pro stanovení přídavných účinků. Tato podkapitola se zabývá určením těchto přídavných účinků na rotor.

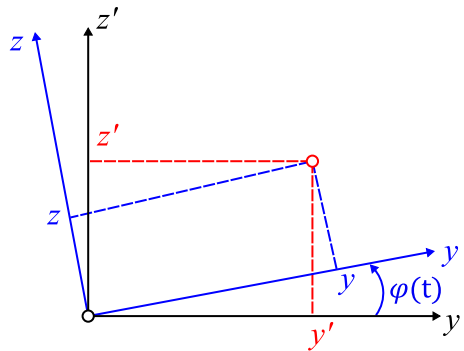
Na obrázku 2.3 je znázorněn rotor a stator, kvůli následnému řešení je uvažována jejich rotace tak, aby výsledná vzájemná rychlost rotoru vůči statoru odpovídala rychlosti



Obrázek 2.3: Schéma uvažovaného pohybu rotoru a statoru s vyznačeným rotujícím souřadným systémem  $y'z'$ . Upraveno a převzato z [4].

rotace  $\omega$ . Je tedy uvažována rychlost rotace kapaliny odpovídající polovině rychlosti rotace rotoru. V souřadném systému  $y'z'$ , který rotuje společně s hřídelí, pak lze napsat jednotlivé složky sil. Při takto uvažovaném systému rotoru a statoru je proudění čistě axiální, a proto lze využít vztah pro sílu odvozený v kapitole 2.1.

$$\begin{aligned} F_{y'} &= -\mu_3(\mu_0 + \mu_1 TD + \mu_2 T^2 D^2)y' \\ F_{z'} &= -\mu_3(\mu_0 + \mu_1 TD + \mu_2 T^2 D^2)z' \end{aligned} \quad (2.46)$$



Obrázek 2.4: Rotující souřadný systém.

Jednotlivé složky sil je nyní třeba transformovat do souřadného systému pevně spojeného s rotorem. Nejdříve je uveden postup transformace souřadnic. Na obr. 2.4 jsou naznačeny dva souřadné systémy se společným počátkem. Pro souřadnice bodu v pevném souřadném systému  $y'z'$  platí následující vztahy.

$$\begin{aligned} y' &= y \cos \varphi - z \sin \varphi \\ z' &= y \sin \varphi + z \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.47)$$

Tyto vztahy jsou následně derivovány podle času, poté je provedena také druhá derivace podle času, která vystupuje ve vztahu pro sílu.

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= \dot{y} \cos \varphi - y\dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{z} \sin \varphi - z\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z}' &= \dot{y} \sin \varphi + y\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{z} \cos \varphi - z\dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y}' &= \ddot{y} \cos \varphi - \dot{y} \dot{\varphi} \sin \varphi - (\dot{y} \dot{\varphi} + y \ddot{\varphi}) \sin \varphi - y \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\
&\quad - \ddot{z} \sin \varphi - \dot{z} \dot{\varphi} \cos \varphi - (\dot{z} \dot{\varphi} + z \ddot{\varphi}) \cos \varphi + z \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\
\ddot{z}' &= \ddot{y} \sin \varphi + \dot{y} \dot{\varphi} \cos \varphi + (\dot{y} \dot{\varphi} + y \ddot{\varphi}) \cos \varphi - y \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\
&\quad + \ddot{z} \cos \varphi - \dot{z} \dot{\varphi} \sin \varphi - (\dot{z} \dot{\varphi} + z \ddot{\varphi}) \sin \varphi - z \dot{\varphi}^2 \cos \varphi
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Úhel natočení  $\varphi(t)$  lze zapsat pomocí úhlové rychlosti rotace  $\bar{\omega}$  jako  $\varphi = \bar{\omega}t$ , úhlová rychlost  $\bar{\omega}$  je uvažována jako konstantní. Dále jsou rovnice zapsány pro čas  $t = 0$ , za tohoto předpokladu se výše uvedené vztahy zjednoduší do podoby uvedené níže.

$$\begin{aligned}
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}' &= \dot{y} - \bar{\omega}z \\
\dot{z}' &= \dot{z} + \bar{\omega}y
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y}' &= \ddot{y} - 2\bar{\omega}\dot{z} - \bar{\omega}^2y \\
\ddot{z}' &= \ddot{z} + 2\bar{\omega}\dot{y} - \bar{\omega}^2z
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Souřadný systém, ve kterém jsou zapsány vztahy pro složky síly  $F_y$  a  $F_z$  rotuje rychlostí  $\frac{1}{2}\omega$ , kde  $\omega$  je rychlost rotace hřídele. Potom platí, že rychlost rotace souřadného systému, ve kterém chceme síly vyjádřit,  $\bar{\omega}$  je také  $\frac{1}{2}\omega$ . Znovu je využit diferenciální operátor  $D$ , pomocí kterého můžeme vztahy (2.51) a (2.52) vyjádřit následovně.

$$\begin{aligned}
Dy' &\equiv \dot{y} - \frac{1}{2}\omega z \\
Dz' &\equiv \dot{z} + \frac{1}{2}\omega y
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
D^2y' &\equiv \ddot{y} - \omega\dot{z} - \frac{1}{4}\omega^2y \\
D^2z' &\equiv \ddot{z} + \omega\dot{y} - \frac{1}{4}\omega^2z
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Identity (2.53) a (2.54) nyní mohou být dosazeny do vztahu pro složky sil (2.46), po úpravách jsou získány následující vztahy.

$$F_y = -\mu_3 \left[ \left( \mu_0 - \frac{1}{4}\mu_2\omega^2T^2 \right) + \mu_1TD + \mu_2T^2D^2 \right] y + \mu_3\omega \left[ \frac{1}{2}\mu_1T + \mu_2T^2D \right] z \tag{2.55}$$

$$F_z = -\mu_3 \left[ \left( \mu_0 - \frac{1}{4}\mu_2\omega^2T^2 \right) + \mu_1TD + \mu_2T^2D^2 \right] z - \mu_3\omega \left[ \frac{1}{2}\mu_1T + \mu_2T^2D \right] y \tag{2.56}$$

Vztahy (2.55) a (2.56) jsou přepsány do maticové podoby, kterou je možné nalézt v dostupných zdrojích [16].

$$\begin{bmatrix} -F_y \\ -F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & b \\ -b & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \tag{2.57}$$



Porovnáním odpovídajících si členů jsou tak odvozeny vztahy pro přídatnou tuhost  $(K,k)$ , přídatné tlumení  $(B,b)$  a přídatnou hmotnost  $(M)$ .

$$K = \mu_3 \left( \mu_0 - \frac{1}{4} \omega^2 T^2 \right) \quad (2.58)$$

$$k = \frac{1}{2} \mu_3 \mu_1 \omega T \quad (2.59)$$

$$B = \mu_3 \mu_1 T \quad (2.60)$$

$$b = \mu_3 \mu_2 \omega T^2 \quad (2.61)$$

$$M = \mu_3 \mu_2 T^2 \quad (2.62)$$

Tyto odvozené silové účinky tenké kapalinové spáry na rotor jsou dále v práci využity při analýze vlivu kapalinové spáry na dynamiku rotoru.

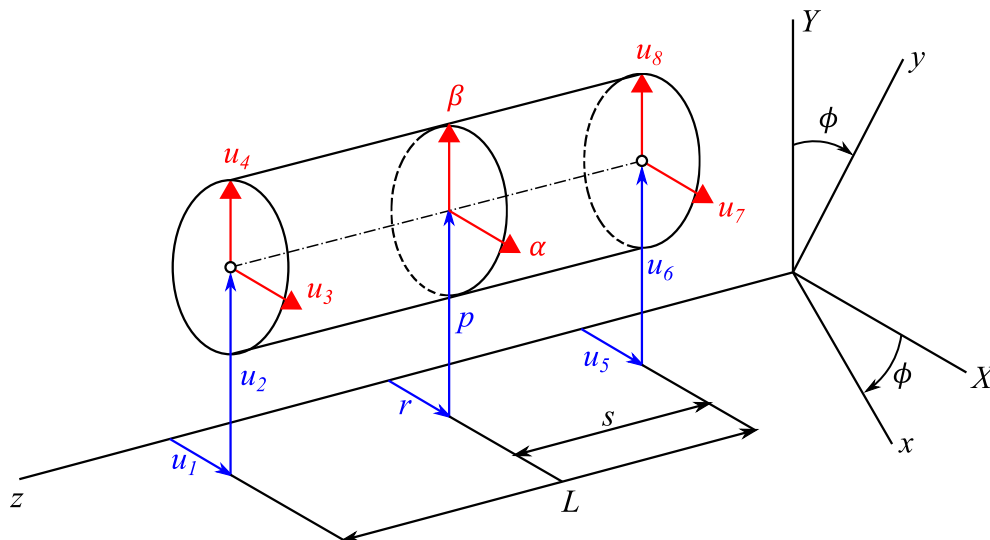
### 3 MKP model rotoru

V předchozí kapitole byl podrobně popsán postup při základním analytickém určení přídavných účinků tenké kapalinové spáry na dynamiku rotoru. Tato kapitola se zabývá popisem sestavení modelu rotoru a řešením základních úloh rotorové dynamiky.

Rotor je modelován metodou konečných prvků (MKP) ve své nejjednodušší možné podobě. Jedná se o přístup, který lze snadno algoritmizovat a provést řešení při současných výpočetních možnostech. V dnešní době se na trhu vyskytuje řada komerčních i volně dostupných nástrojů založených na MKP. Z technického hlediska je určitě vhodné rozumět základům algoritmů, které stojí v pozadí těchto programů, aby bylo možné se vyvarovat např. nevhodné interpretace dosažených výsledků.

#### 3.1 Hřídelový prvek

Je uvažován hřídelový prvek se spojitě rozloženou hmotností. Zavedené označení je zobrazeno na následujícím obrázku 3.1. Prvek má dva uzly a v každém uzlu čtyři deformační parametry (dva posuvy a dvě natočení), dále je uvažovaný prvek prizmatický (konstantní průřez po délce prvku  $L$ ). Odvození prvku je provedeno na základě [7].



Obrázek 3.1: Hřídelový prvek a zavedené označení posuvů (modře) a natočení (červeně). Upraveno a převzato z [7].

Pro daný prvek jsou definovány tzv. báze (označované také jako tvarové) funkce. Tyto funkce jsou odvozeny na základě daných okrajových podmínek, které musí být splněny v uzlech elementu. Dané okrajové podmínky jsou patrné z vykreslení bázevých funkcí a jejich prvních derivací viz obr. 3.2. Pro funkce  $\psi_1$  a  $\psi_3$  platí, že v jednom uzlu mají mít hodnotu rovnou jedné a ve druhém nule. Pro zbývající dvě funkce  $\psi_2$  a  $\psi_4$  tato okra-

ková podmínka platí pro první derivace daných funkcí. V případě hřídelového prvku mají báze funkce následující tvar [7].

$$\begin{aligned}\psi_1(s) &= 1 - 3\frac{s^2}{L^2} + 2\frac{s^3}{L^3} \\ \psi_2(s) &= s - 2\frac{s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2} \\ \psi_3(s) &= 3\frac{s^2}{L^2} - 2\frac{s^3}{L^3} \\ \psi_4(s) &= -\frac{s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Báze funkce slouží k aproximaci posuvů a natočení po délce prvku  $L$ . Pro místo  $s$  na prvku pak platí níže uvedené vztahy pro vyjádření posuvů  $r$  a  $p$ . V daných vztazích je  $u_i = f(t)$  a báze funkce  $\psi_i = f(s)$ .

$$\begin{aligned}r(s, t) &= u_1\psi_1 + u_4\psi_2 + u_5\psi_3 + u_8\psi_4 \\ p(s, t) &= u_2\psi_1 - u_3\psi_2 + u_6\psi_3 - u_7\psi_4\end{aligned}\tag{3.2}$$

Pro natočení v místě  $s$  pak v platí následující vztahy odvozené z výše uvedených rovností.

$$\begin{aligned}\beta(s, t) &= \frac{\partial r(s, t)}{\partial s} = u_1\psi'_1 + u_4\psi'_2 + u_5\psi'_3 + u_8\psi'_4 \\ \alpha(s, t) &= -\frac{\partial p(s, t)}{\partial s} = -u_2\psi'_1 + u_3\psi'_2 - u_6\psi'_3 + u_7\psi'_4\end{aligned}\tag{3.3}$$

Vztahy (3.2) a (3.3) lze vyjádřit v maticovém tvaru, který je výhodný pro další práci s nimi.

$$\begin{bmatrix} r(s, t) \\ p(s, t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi}(s)\mathbf{u}^{(e)}(t)\tag{3.4}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha(s, t) \\ \beta(s, t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}(s)\mathbf{u}^{(e)}(t)\tag{3.5}$$

Tvary matic  $\mathbf{\Psi}$  a  $\mathbf{\Gamma}$  lze snadno odvodit z rozepsaných rovnic (3.2) a (3.3).

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & -\psi_4 & 0 \end{bmatrix}\tag{3.6}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_\alpha \\ \mathbf{\Gamma}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\psi'_1 & \psi'_2 & 0 & 0 & -\psi'_3 & \psi'_4 & 0 \\ \psi'_1 & 0 & 0 & \psi'_2 & \psi'_3 & 0 & 0 & \psi'_4 \end{bmatrix}\tag{3.7}$$

Vektor deformačních parametrů  $\mathbf{u}^{(e)}(t)$  je pak uspořádán tak, že první čtyři prvky přísluší prvnímu uzlu a druhá čtveřice prvků druhému uzlu. Vždy jsou nejdříve posuvy v uzlu a pak natočení, toto uspořádání respektuje zobrazení prvku a deformací na obrázku 3.1.

Je uvažován prvek o jednotkové elementární délce  $ds$ , lze napsat vztah pro kinetickou energii v následující podobě, kde  $m$  je hmotnost na jednotku délky,  $J$  je kvadratický moment průřezu k příčným osám a  $J_p$  je polární kvadratický moment průřezu.

$$dE_k = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{p}^2) + \frac{J}{2}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) + \frac{J_p}{2}(\dot{\phi}^2 - 3\dot{\phi}\alpha\dot{\beta})\tag{3.8}$$

V případě kruhového průřezu o průměru  $d$  jsou konstanty  $m$ ,  $J$  a  $J_p$  vyjádřeny rovnostmi níže.

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} \quad (3.9)$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64} \quad (3.10)$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3.11)$$

Vztah 3.8 je upraven dosazením za posuvy a natočení z maticových zápisů definovaných výše v (3.4) a (3.5).

$$dE_k = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{u}}^{(e)T} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{u}}^{(e)} + \frac{J}{2} \dot{\mathbf{u}}^{(e)T} \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma} \dot{\mathbf{u}}^{(e)} - J_p \dot{\phi} \mathbf{u}^{(e)T} \boldsymbol{\Gamma}_\alpha^T \boldsymbol{\Gamma}_\beta \dot{\mathbf{u}}^{(e)} + \frac{J_p}{2} \dot{\phi}^2 \quad (3.12)$$

První člen ve vztahu (3.12) představuje kinetickou energii danou translačními posuvy, druhý člen je kinetická energie daná rotací, třetí člen představuje vliv gyroskopických účinků a poslední člen rotaci kolem osy.

Celková kinetická energie elementu  $E_k$  je získána integrací elementární energie  $dE_k$  po délce elementu  $L$ , jednotlivé členy jsou uspořádány a označeny, aby bylo možné vztah zapsat v jednoduchém maticovém zápisu.

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^{(e)T} (\mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R) \dot{\mathbf{u}}^{(e)} - \dot{\phi} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^{(e)} + \frac{J_p}{2} \dot{\phi}^2 \quad (3.13)$$

Jednotlivé matice odpovídají níže uvedeným vztahům.

$$\mathbf{M}_T = \int_0^L m \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} ds \quad (3.14)$$

$$\mathbf{M}_R = \int_0^L J \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma} ds \quad (3.15)$$

$$\mathbf{N} = \int_0^L J_p \boldsymbol{\Gamma}_\alpha^T \boldsymbol{\Gamma}_\beta ds \quad (3.16)$$

Obdobně je vyjádřena také potenciální energie prvku, nejdříve je zapsána ve své elementární podobě, potenciální energie akumulovaná v prvku odpovídá energii napjatosti od ohybu.  $E$  je Youngův modul pružnosti a  $I$  je kvadratický moment průřezu.

$$dE_p = \frac{EI}{2} (r''^2 + p''^2) = \frac{EI}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \boldsymbol{\Psi}''^T \boldsymbol{\Psi}'' \mathbf{u}^{(e)} \quad (3.17)$$

Po integraci je získán vztah pro  $E_p$ , kde  $\mathbf{K}_e$  je matice tuhosti hřídelového prvku.

$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}_e \mathbf{u}^{(e)} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L EI \Psi''^2 \Psi'' ds \quad (3.19)$$

Pohybové rovnice pro prvek v maticovém tvaru jsou získány z Lagrangeových rovnic druhého druhu. Nevyskytuje se zde disipační energie, protože vliv tlumení bývá u dynamických výpočtů rotorů běžně zanedbáván [7], [15]. Index  $e$  značí, že se jedná o matice příslušící prvku (elementu). Úhel natočení  $\phi$  os  $xy$  kolem osy  $z$  (viz obr. 3.1) lze zapsat pomocí úhlové rychlosti  $\omega$  jako  $\phi = \omega t$ , kde  $\omega$  je konstantní. Nulová pravá strana rovnice znamená, že na prvek nepůsobí žádné vnější síly.

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}^{(e)} - \omega \mathbf{G}_e \dot{\mathbf{u}}^{(e)} + \mathbf{K}_e \mathbf{u}^{(e)} = 0 \quad (3.20)$$

Matice hmotnosti je  $\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R$ ,  $\mathbf{G}_e = \mathbf{N} - \mathbf{N}^T$  je matice gyroskopických účinků. Tvary výsledných matic jsou uvedeny podle [7].

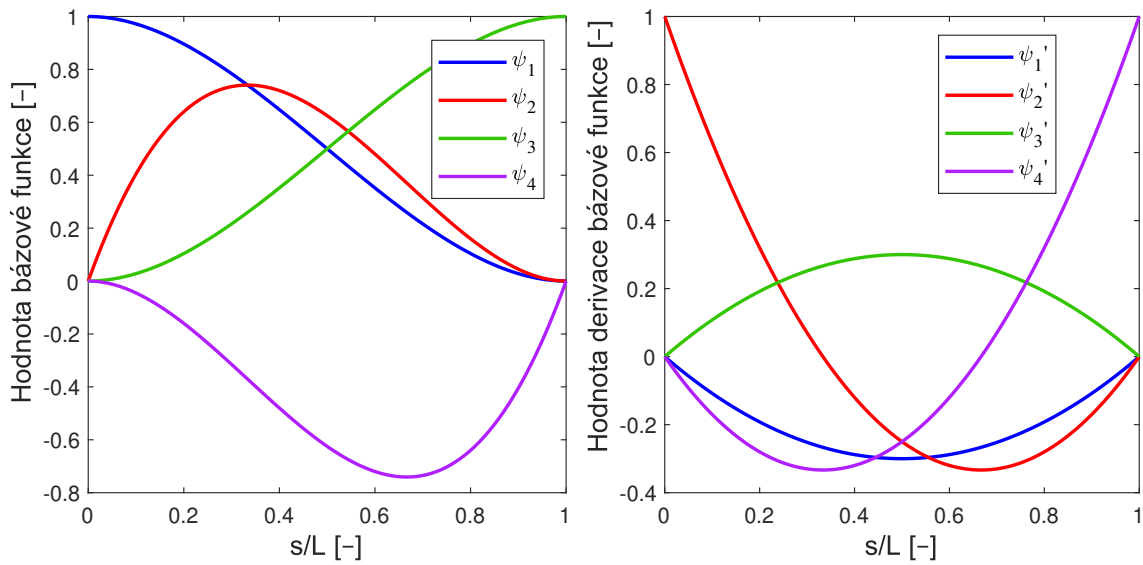
$$\mathbf{M}_T = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22L & 54 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 156 & -22L & 0 & 0 & 54 & 13L & 0 \\ 0 & -22L & 4L^2 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 0 \\ 22L & 0 & 0 & 4L^2 & 13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & 13L & 156 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 156 & 22L & 0 \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 22L & 4L^2 & 0 \\ -13L & 0 & 0 & -3L^2 & -22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{M}_R = \frac{J}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 3L \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{G}_e = \frac{J_p}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ 0 & 3L & -4L^2 & 0 & 0 & -3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \\ 0 & 3L & L^2 & 0 & 0 & -3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & -12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & -6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6L & 12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 6L & 4L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Matice hmotnosti  $\mathbf{M}_T$  a  $\mathbf{M}_R$  jsou symetrické, symetrická je pak i výsledná matice  $\mathbf{M}_e$ , matice tuhosti  $\mathbf{K}_e$  je také symetrická a matice gyroskopických účinků  $\mathbf{G}_e$  je antisymetrická.



Obrázek 3.2: Průběh báze funkcí a jejich prvních derivací.

## 3.2 Tuhý kotouč

V předchozí kapitole byly odvozeny matice pro modelování poddajné hřídele. Tato část popisuje postup použitý při modelování tuhých kotoučů, které v modelu mohou představovat např. oběžná kola čerpadla, turbínové a kompresorové kolo turbodmychadla apod. Vztahy byly převzaty a upraveny pro značení zavedené výše podle [15].

Je uvažován kotouč o vnějším průměru  $D$ , vnitřním průměru  $d$  a šířce  $h$ , kotouč je nasazen na hřídel v daném uzlovém bodě, současně je předpokládáno, že střed hmotnosti leží přímo v uzlovém bodě. Dále jsou uvažovány čtyři stupně volnosti v uzlu jak tomu bylo v případě hřídelového prvku, jinak by výsledné matice nebyly konzistentní, což by znemožňovalo sestavení celkového modelu rotoru. Níže jsou uvedeny parametry, které

vystupují ve výsledných maticích. Jedná se o hmotnost kotouče  $m$ , moment setrvačnosti k ose rotace  $I_0$  a moment setrvačnosti k příčným osám  $I$ .

$$\begin{aligned} m &= \rho \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} h \\ I &= \rho \frac{1}{64} \pi(D^4 - d^4) h \\ I_o &= \rho \frac{1}{32} \pi(D^4 - d^4) h \end{aligned} \quad (3.25)$$

Diagonální matice hmotnosti tuhého disku má pak následující tvar, index  $d$  značí, že se jedná o matici příslušící tuhému disku.

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Matice gyroskopických účinků je stejně jako u hřídelového prvku a má následující podobu.

$$\mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_0 \\ 0 & 0 & -I_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Matice mají rozměr  $4 \times 4$ , protože na rozdíl od hřídelového prvku přísluší pouze jednomu uzlu. V případě hřídelového prvku (rozměr matic  $8 \times 8$ ) prvková matice zahrnuje dva uzly, kterým je prvek definován.

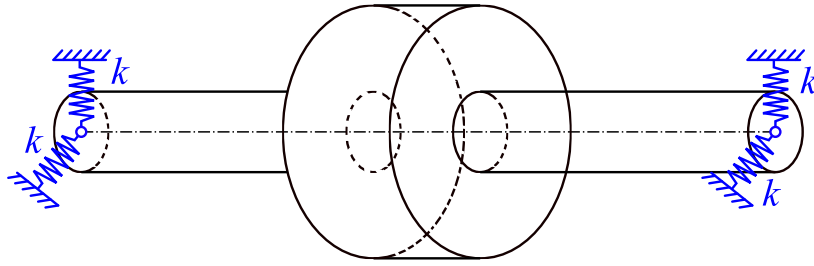
### 3.3 Ložiskové vazby

Rotor je zpravidla uložen v ložiskách, matematické modelování ložisek je samo o sobě komplikovanou disciplínou [15]. Obecně jsou ložiskové vazby nelineární, avšak v této práci bude využito nejjednoduššího možného přístupu k zavedení ložiskových vazeb.

V případě kluzných ložisek vychází model z Reynoldsovy rovnice [7]. Hladké kluzné ložisko se od tenké kapalinové spáry řešené v kapitole 2 liší charakterem proudění v úzkém prostoru. U tenké kapalinové spáry v případě nulové rotace není silové působení. Tato skutečnost je dobře patrná z výsledných sil působících na rotor (2.57), které jsou závislé na výchylce.

Valivá ložiska je možná modelovat pomocí nelineárních modelů, jeden z modelů je popsán v [15]. Dalším typem používaných ložisek jsou ložiska elektromagnetická.

Cílem práce je analyzovat vliv tenké kapalinové spáry, proto jsou ložiska modelována jako izotropní – popsána pouze tuhostí  $k$ , vliv tlumení  $b$  je zanedbán. Ve své podstatě se jedná o uložení na pružinách o velmi vysoké tuhosti jak je naznačeno na obr. 3.3, aby byl jejich vliv na vlastní frekvence soustavy co nejmenší.



Obrázek 3.3: Schématické vykreslení použité ložiskové vazby.

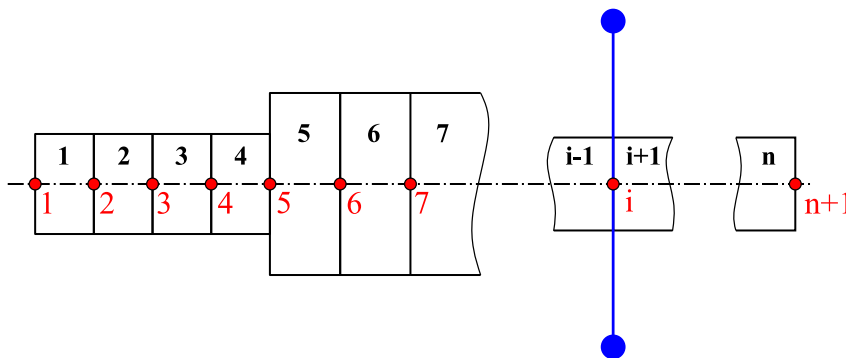
Pro matici tuhosti ložiska  $\mathbf{K}_l$  pak platí následující vztah, jde vidět, že ložisko má vliv pouze na první dva deformační parametry v uzlu a to posuvy, zbývající prvky matice jsou nulové.

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

### 3.4 Sestavení celkového modelu rotoru

V předchozích kapitolách práce byly uvedeny vztahy popisující chování jednotlivých prvků a vazeb při sestavení celkového modelu rotoru, jedná se vždy o matice příslušící konkrétnímu uzlu modelu, v případě hřídelového prvku pak dvěma uzlům. V dalším postupu při MKP modelování je třeba sestavit globální matice řešení soustavy.

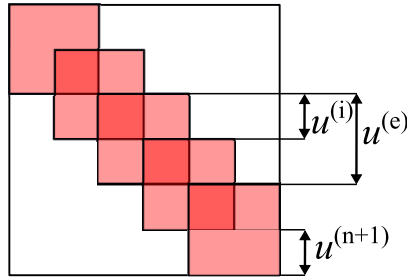
V prvním kroku je třeba provést diskretizaci rotoru. Dlouhé části hřídelí je vhodné rozdělit na několik úseků, aby bylo možné dobře zachytit ohybové tvary, dále změna průřezu hřídele vede na umístění uzlů, protože je třeba, aby byly jednotlivé prvky prizmatické. Kotouče a ložiska jsou z hlediska modelování vždy umístěny v uzlu. Většina z těchto skutečností vede na přirozenou tvorbu konečně prvkového modelu, avšak u komplikovanějších soustav tento krok může vyžadovat již jistou zkušenost z oblasti modelování rotorů.



Obrázek 3.4: Znázornění diskretizace rotoru. Červeně jsou označeny jednotlivé uzly, kterým odpovídá červené číslování. Černé číslování odpovídá prvkům. V  $i$ -tém uzlu rotoru je nasazen kotouč (znázorněn modře).



Na obr. 3.4 je znázornění rozdělení rotoru na jednotlivé prvky, jejichž počet je  $n$ , počet uzlů je pak  $n + 1$ . Globální matice modelu jsou čtvercové o rozměru  $4(n + 1)$ . Schéma jednotlivých příspěvků do globální matice je na obr. 3.5.



Obrázek 3.5: Příspěvky od jednotlivých elementů resp. uzlů do globální matice systému. Upraveno a převzato z [15].

Při algoritmizaci výpočtu je nejdříve sestavena globální matice všech hřídelových prvků, poté globální matice kotoučů, kdy jednotlivé příspěvky od daných kotoučů jsou vždy na pozici odpovídajícího uzlu. Analogicky je postupováno v případě ložisek. Výsledné globální matice modelovaného systému jsou pak získány součtem odpovídajících si jednotlivě sestavených globálních matic (hmotnosti, tuhosti, tlumení, gyroskopických účinků).

Dále je třeba sestavit vektor všech deformačních parametrů. Uvedené sestavení globálních matic vede na vektor, kde jsou za sebou postupně poskládány vektory jednotlivých uzlů. Jestliže je vektor deformačních parametrů  $i$ -tého uzlu označen jako  $\mathbf{u}^{(i)}$ , pak je sestaven vzhledem k rovnicím (3.2) a (3.3) následovně.

$$\mathbf{u}^{(i)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Jednotlivé složky vektoru (3.29) odpovídají posuvům a natočením, jak je naznačeno na obr. 3.1. Výsledný vektor je označen jako  $\mathbf{u}$  a má tvar uveden níže.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Výsledný sestavený model systému je pak dán následující maticovou rovnicí, kde je uvažována i matice tlumení  $\mathbf{B}$ , přestože ve výše uvedených prvcích nefiguruje. Je to z toho důvodu, že tlumení se vyskytuje v modelu tenké kapalínové spáry.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{B} + \omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (3.31)$$

### 3.5 Modální analýza

Jednou ze základních úloh dynamiky je stanovení vlastních frekvencí a jím příslušících vlastních tvarů kmitů. Z technického hlediska mají vlastní frekvence velký význam.

Jestliže dochází k buzení soustavy na vlastní frekvenci, dochází k rezonanci, což je nežádoucí a může mít fatální následky. V této části je popsán postup pro stanovení vlastních frekvencí v případě sestaveného MKP modelu. Popis metodiky je založen na publikaci [15].

Je uvažováno volné kmitání lineární soustavy popsané rovnicí (3.31), jedná se o homogenní diferenciální rovnici v maticovém tvaru. Modální analýzu soustavy je vhodné řešit ve stavovém prostoru, který je definován stavovým vektorem  $\mathbf{q}$ .

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Počet stupňů volnosti je pak dvojnásobný, oproti původní soustavě. Soustava (3.31) je rozšířena o identitu  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} = 0$ . Výsledná soustava dvou maticových rovnic je pak následující.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{B} + \omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Soustavu (3.33) lze zapsat pomocí matic.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} + \omega\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

Z výše uvedeného zápisu lze snadno odvodit tvar soustavy vyjádřený pomocí stavového vektoru  $\mathbf{q}$ .

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

Z rovnice (3.35) je pak vyjádřena časová derivace stavového vektoru  $\dot{\mathbf{q}}$ , aby byla soustava zapsána ve tvaru, který vede na řešení problému vlastních hodnot.

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{q} \quad (3.36)$$

V rovnici výše je  $\mathbf{A}$  tzv. systémová matice, v níž  $\mathbf{E}$  představuje jednotkovou matici.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B} + \omega\mathbf{G}) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Rovnici ve tvaru (3.36) odpovídá následující řešení.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}e^{\lambda t} \\ \dot{\mathbf{q}}(t) &= \lambda\mathbf{q}e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dosazením řešení do původní diferenciální rovnice (3.36) je získán vztah níže, který odpovídá problému vlastních hodnot systémové matice  $\mathbf{A}$ .

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.39)$$

Řešena je tedy následující charakteristická rovnice, kdy řešením jsou tzv. vlastní čísla  $\lambda_v$ .

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0 \quad (3.40)$$

Vlastní čísla mohou být komplexně sdružená nebo reálná, kde  $\alpha_v$  značí reálnou část a  $\beta_v$  imaginární část vlastního čísla.

$$\begin{aligned}\lambda_v &= \alpha_v \pm i\beta_v \\ \lambda_v &= \alpha_v\end{aligned}\tag{3.41}$$

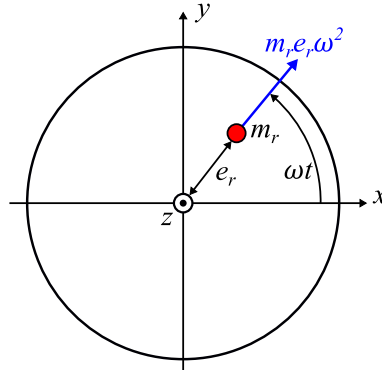
Z hlediska analýzy dynamické soustavy je výhodné vlastní čísla  $\lambda_v$  vhodně uspořádat. Nejdříve jsou seřazeny čísla komplexně sdružená podle velikosti imaginární části  $\beta_v$ . Poté až jsou uvedeny vlastní čísla reálná.

$$\begin{aligned}\lambda_v &= \alpha_v + i\beta_v \quad \text{pro } v = 1, 2, \dots, m \\ \lambda_v &= \alpha_v - i\beta_v \quad \text{pro } v = 1, 2, \dots, m \\ \lambda_v &= \alpha_v \quad \text{pro } v = 2m + 1, \dots, 2n\end{aligned}\tag{3.42}$$

Imaginární část komplexně sdružených vlastních čísel  $\beta_v$  představuje vlastní frekvenci systému. Reálná část vlastního čísla  $\alpha_v$  vyjadřuje stabilitu systému. Jestliže existuje kladná reálná část vlastního čísla  $\alpha_v$ , pak je soustava v daném módu nestabilní.

### 3.6 Ustálená odezva systému na nevyváženost

V předchozích částech byla pohybová rovnice uvažována jako homogenní, popisovala tedy volné kmitání vyšetřované soustavy. Nyní bude do modelu zaveden vliv nevyváhy, který je u rotorů častým typem buzení. Uvedený postup je zpracován podle [15]. Je prakticky nemožné dosáhnout plně vyváženého rotoru např. z důvodů nehomogenity materiálu a montáže.



Obrázek 3.6: Nevyváženost rotoru o hmotnosti  $m_r$  ve vzdálenosti  $e_r$  od osy rotace  $z$ .

Na obr. 3.6 je znázorněna nevyváženost rotoru spolu s působící odstředivou silou, která zde působí. Je uvažováno, že nevyváženost je umístěna v  $i$ -tém uzlu modelu rotoru, potom je vektor buzení  $\mathbf{f}(t)$  následující.

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_r e_r \omega^2 \cos \omega t \\ m_r e_r \omega^2 \sin \omega t \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\tag{3.43}$$

Nenulové prvky  $\mathbf{f}(t)$  odpovídají umístění souřadnic  $u_1^{(i)}$  a  $u_2^{(i)}$  uzlu  $i$  v rámci vektoru  $\mathbf{u}$ . Toto umístění lze snadno určit na základě čísla uzlu  $i$ .

$$\begin{aligned} u_1^{(i)} &\Rightarrow 4i - 3 \\ u_2^{(i)} &\Rightarrow 4i - 2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ustálená odezva je odhadnuta v komplexním tvaru, kde  $\mathbf{u}_r$  je vektor komplexních amplitud výchylek.

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}_r e^{i\omega t} \quad (3.45)$$

Podobně je do komplexního tvaru přepsán vztah pro harmonickou budící sílu (3.43).

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_r e_r \omega^2 \cos \omega t \\ -i m_r e_r \omega^2 \sin \omega t \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathbf{f}_r e^{i\omega t} \quad (3.46)$$

Celkový model soustavy v komplexním tvaru je pak následující.

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{u}}} + (\mathbf{B} + \omega\mathbf{G})\dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (3.47)$$

Je třeba vyjádřit derivace odhadovaného řešení (3.45), poté lze dosadit do modelu výše a dále jej upravit.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{u}}} &= i\omega \mathbf{u}_r e^{i\omega t} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{u}}} &= -\omega^2 \mathbf{u}_r e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Po úpravách je získána rovnice (3.47) ve tvaru níže, kde matici v hranaté závorce, lze označit jako  $\mathbf{Z}(\omega)$  a jedná se o tzv. matici dynamické tuhosti.

$$\begin{aligned} [-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega(\mathbf{B} + \omega\mathbf{G}) + \mathbf{K}] \mathbf{u}_r &= \mathbf{f}_r \\ \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{u}_r &= \mathbf{f}_r \end{aligned} \quad (3.49)$$

Vektor komplexních amplitud  $\mathbf{u}_r$  je pak získán řešením rovnice (3.49).

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \mathbf{f}_r \quad (3.50)$$

Získaný vektor  $\mathbf{u}_r$  je dosazen do odhadovaného tvaru řešení (3.45), které může být pomocí vztahů platných pro komplexní čísla dále rozepsán.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{u}_r e^{i\omega t} = (\mathbf{u}_r^{\text{Re}} + i\mathbf{u}_r^{\text{Im}})(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ \tilde{\mathbf{u}}(t) &= (\mathbf{u}_r^{\text{Re}} \cos \omega t - \mathbf{u}_r^{\text{Im}} \sin \omega t) + i(\mathbf{u}_r^{\text{Re}} \sin \omega t + \mathbf{u}_r^{\text{Im}} \cos \omega t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Reálná část výše uvedeného komplexního vektoru  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  pak odpovídá řešení reálnému  $\mathbf{u}(t)$ .

$$\mathbf{u}(t) = \text{Re}[\tilde{\mathbf{u}}(t)] = \mathbf{u}_r^{\text{Re}} \cos \omega t - \mathbf{u}_r^{\text{Im}} \sin \omega t \quad (3.52)$$

### 3.7 Model rotoru s vlivem tenké kapalinové spáry

Kapitola 2.2 byla věnována stanovením silových účinků od tenké kapalinové spáry na rotor. Nyní budou tyto vztahy využity a implementovány do sestaveného matematického modelu.

Je uvažováno, že tenká kapalinová spára působí v  $i$ -tém uzlu modelu rotoru. Pro lepší představu jsou působící síly dané vztahem (2.57) přepsány a přeznačeny, aby korespondovaly se značením zavedeným podle obr. 3.1, které se vyskytuje v matematickém modelu.

$$\begin{bmatrix} -F_1^{(i)} \\ -F_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & b \\ -b & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1^{(i)} \\ \dot{u}_2^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{(i)} \\ \ddot{u}_2^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Tvar odvozených silových účinků kapalinové spáry je výhodný, protože je zde zřetelná podobnost s matematickým modelem. Jednotlivé matice odpovídající přídavné tuhosti, tlumení a hmotnosti je však třeba rozšířit, aby respektovaly čtyři volné parametry v uzlu. Tento postup je naznačen pro matici přídavné tuhosti  $\mathbf{K}_p$ , analogicky by se postup opakoval u matic přídavného tlumení  $\mathbf{B}_p$  a přídavné hmotnosti  $\mathbf{M}_p$ .

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} K & k & 0 & 0 \\ -k & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

S takto upravenými maticemi lze nyní pracovat jako s jinými prvky zahrnutými v modelu – je třeba přičíst je na odpovídající pozice v globálních maticích, jak bylo popsáno v 3.4. Výsledný matematický model má pak stále stejnou podobu, jak popisuje vztah (3.31). Úlohy rotorové dynamiky (modální analýza, odezva na nevyváženost) popsané v předchozích kapitolách jsou řešitelné popsáními postupy.

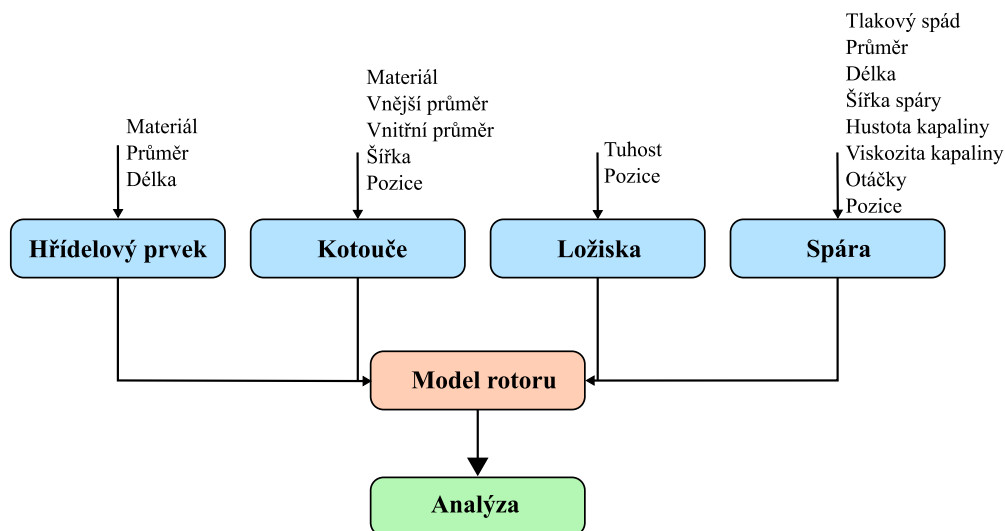
Vliv kapalinové spáry se redukuje na silové účinky působící v jednom uzlu modelu, na tuto skutečnost je dobré pamatovat při tvorbě diskretizace a uzly rozmístit vhodně vzhledem k této skutečnosti.

### 3.8 Implementace matematického modelu

Uvedený MKP model byl naprogramován v prostředí Matlab ve verzi R2022b. Níže je uvedena stručná logika řešení a případná omezení. Nebylo cílem sestavit model pro jeden konkrétní rotor, ale jednoduchý systém, který uživateli poskytne volbu určitých parametrů, případně může být rozšířen o další prvky.

Matlab je vysokoúrovňový programovací jazyk vytvořen pro potřeby inženýrů a vědců, jejichž každodenní práce vyžaduje nepřeborné množství matematických operací. Lze jej využít pro tvorbu jednoduchých skriptů, ale také pro vývoj rozsáhlejších aplikací. Novější verze umožňují i objektově orientované programování, které je vhodné při tvorbě komplexnějších programů a je typické například pro programovací jazyk Python.

Na obr. 3.7 je schématicky naznačeno, jaké funkce byly vytvořeny a co jsou jejich vstupní parametry. Vstupy i jejich požadované jednotky jsou vždy uvedeny v komentáři k dané funkci v příloženém kódu. Výstupem ze základních funkcí (světle modré označení)



Obrázek 3.7: Struktura programového řešení s popsány vstupy do jednotlivých funkcí.

jsou pak vždy matice popisující daný prvek a případně pozice (číslo uzlu), kde je prvek umístěn.

Tyto jednotlivé výstupy jsou následně využity pro sestavení celkového modelu rotoru. V tomto kroku jsou v kódu sestaveny globální matice vyšetřovaného systému. Tyto globální matice vstupují do samotné analýzy, jedná se buď o stanovení vlastních frekvencí, nebo určení odezvy na nevyváženost rotoru. Logický postup přesně následuje dříve popsaný matematický model.

V rámci výpočtu koeficientů pro stanovení přídatných účinků tenké kapalinové spáry ( $\mu_0$  až  $\mu_3$ ), je třeba stanovit hodnotu střední rychlosti  $V$ , aby mohl být vypočítán součinitel délkových ztrát  $\lambda$ . Pro výpočet  $\lambda$  byl využit vztah uveden v [16], který vychází z tzv. axiálního ( $Re_a$ ) a obvodového ( $Re_o$ ) Reynoldsova čísla.

$$\begin{aligned}
 Re_a &= \frac{2\rho V y_0}{\mu} \\
 Re_o &= \frac{\rho R \omega y_0}{\mu}
 \end{aligned}
 \tag{3.55}$$

Ve vztazích výše je  $\omega$  úhlová rychlost rotoru,  $R$  je poloměr rotoru,  $\mu$  dynamická viskozita kapalina,  $\rho$  hustota kapaliny a  $y_0$  šířka tenké spáry. Ztrátový součinitel je pak definován následovně.

$$\lambda = 0,079 Re_a^{-0,25} \left[ 1 + \left( \frac{7 Re_o}{8 Re_a} \right)^2 \right]^{0,375}
 \tag{3.56}$$

Postup pro stanovení  $V$  je iterační a bylo využito základních funkcí v Matlabu. Do vztahu pro tlakovou diferenci (2.16) je dosaženo za  $\sigma$  pomocí výše uvedeného vztahu pro  $\lambda$ , v takové rovnici je již jediná neznámá a to právě střední rychlost  $V$ . Tato rychlost je dopočítána a následně může být stanovena hodnota ztrátového součinitele  $\lambda$  a poté jsou dopočítány jednotlivé koeficienty.

## 4 Aplikace na příkladu rotoru

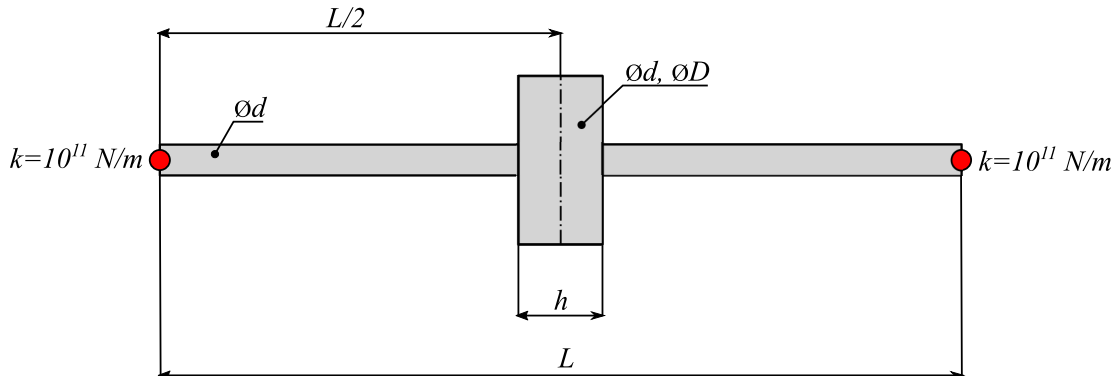
V této kapitole jsou popsány výsledky získané sestavením matematického modelu rotoru a je analyzován vliv tenké těsnicí spáry na dynamiku rotoru. Nejdříve bylo provedeno testování matematického modelu, kdy byl referenční výpočet proveden v programu ANSYS. Také vlastní výpočet přídavných účinků tenké těsnicí spáry byl nejdříve srovnán s literaturou, aby byla ověřena jeho správnost.

### 4.1 Testování MKP modelu

Testovací příklad byl zpracován na rozměrech rotoru, které vzešly z návrhu experimentu. Jedná se o symetrický rotor, který je zobrazen na obrázku 4.1. Červená kolečka značí uložení na izotropních ložiskách, jednotlivé rozměry a materiál rotoru je pak popsán v tabulce 4.1.

Tabulka 4.1: Parametry rotoru v testovacím příkladu

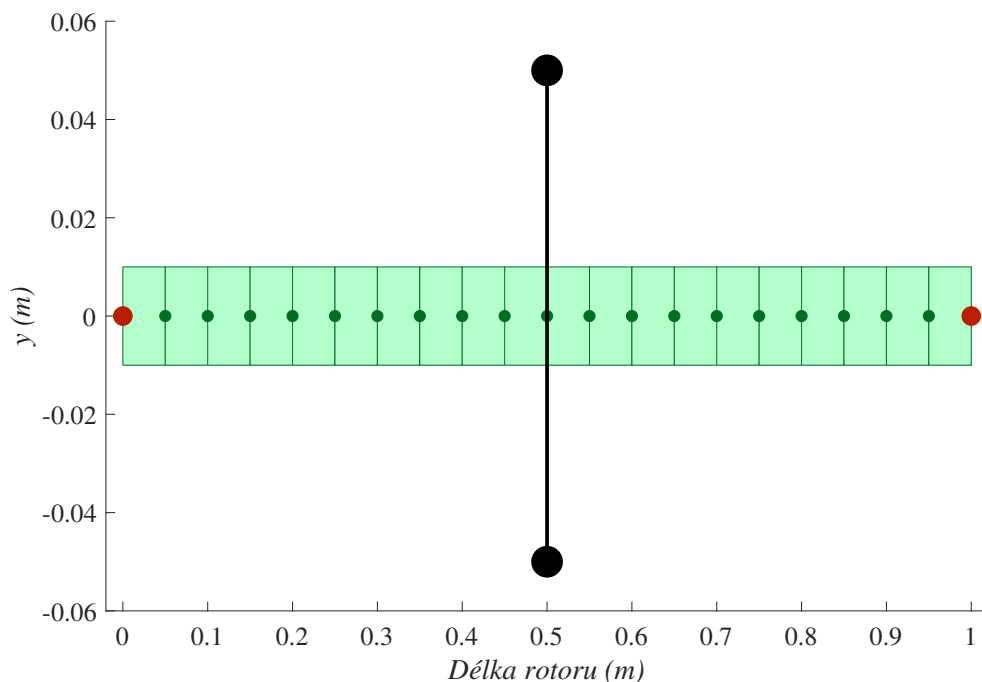
$L$ (mm)	1000
$d$ (mm)	20
$D$ (mm)	100
$h$ (mm)	55
$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	7800
$E$ (Pa)	$2,1 \cdot 10^{11}$



Obrázek 4.1: Schéma rotoru využíteho pro testování sestaveného matematického modelu.

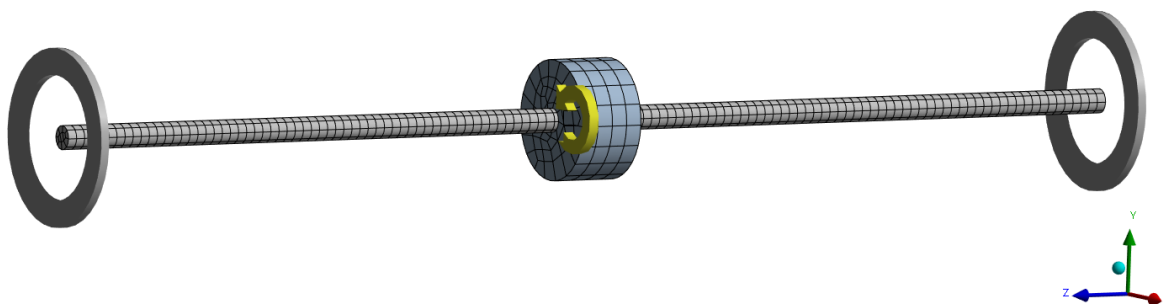
Rotor byl rozdělen na dvacet stejných prvků, délka jednoho prvku tedy odpovídala  $L_e = 50$  mm. Kotouč je umístěn uprostřed hřídele, čemuž odpovídá uzel č. 11 (programovací jazyk Matlab indexuje od jedničky a ne od nuly, jak je běžné v jiných programovacích jazycích). Vykreslení diskretizace rotoru je součástí kódu a je k nahlédnutí na obr. 4.2. Uvedené vykreslení nemá nastavené stejné měřítko os. Červenými body je označeno umístění ložisek, kotouč je pak naznačen černou barvou.

Srovnávací výpočet byl proveden v programu ANSYS ve verzi 2023R1. Pro modální analýzu program obsahuje modul *Modal*. Geometrie byla vytvořena v prostředí *Design Modeler* a následně byl využit síťovací nástroj *Meshing* pro vytvoření výpočetní sítě. Z hlediska nároků na výpočetní síť pro základní modální analýzu geometrie není nutné volit



Obrázek 4.2: Vykreslení diskretizace rotoru v programu Matlab.

příliš jemnou diskretizaci. Vytvořená síť má celkem 8 598 uzlů, což odpovídá 1 608 prvkům a je zobrazena na obr. 4.3. Materiálové vlastnosti byly použity stejné, jako jsou uvedeny v tabulce 4.1. Ložiska byla modelována pomocí funkce *Bearing*, která umožňuje zadat tuhosti a tlumení v jednotlivých směrech. V tomto případě byla zadána tuhost  $10^{11}$  N/m pro diagonální prvky, ostatní hodnoty byly ponechány nulové.



Obrázek 4.3: Model rotoru, který byl vytvořen v programu ANSYS.

Vlastní simulace byla provedena pro dvě hodnoty rychlosti rotace. V prvním případě byla rotace hřídele nulová, ve druhém případě byla nastavena na hodnotu 1000 ot./min. Pro stejné hodnoty byla provedena také simulace v Matlabu, získané frekvence jsou uvedeny v následující tabulce.

Z tabulky 4.2 je patrné, že dvojice frekvencí vždy přísluší jednotlivým směrům kolmým na osu rotace. V rámci matematického modelu sestaveného v Matlabu jsou tyto frekvence shodné, což neplatí pro výsledky získané simulací v programu ANSYS. Tahle skutečnost



Tabulka 4.2: Vlastní frekvence získané výpočtem v Matlabu a pomocí programu ANSYS.

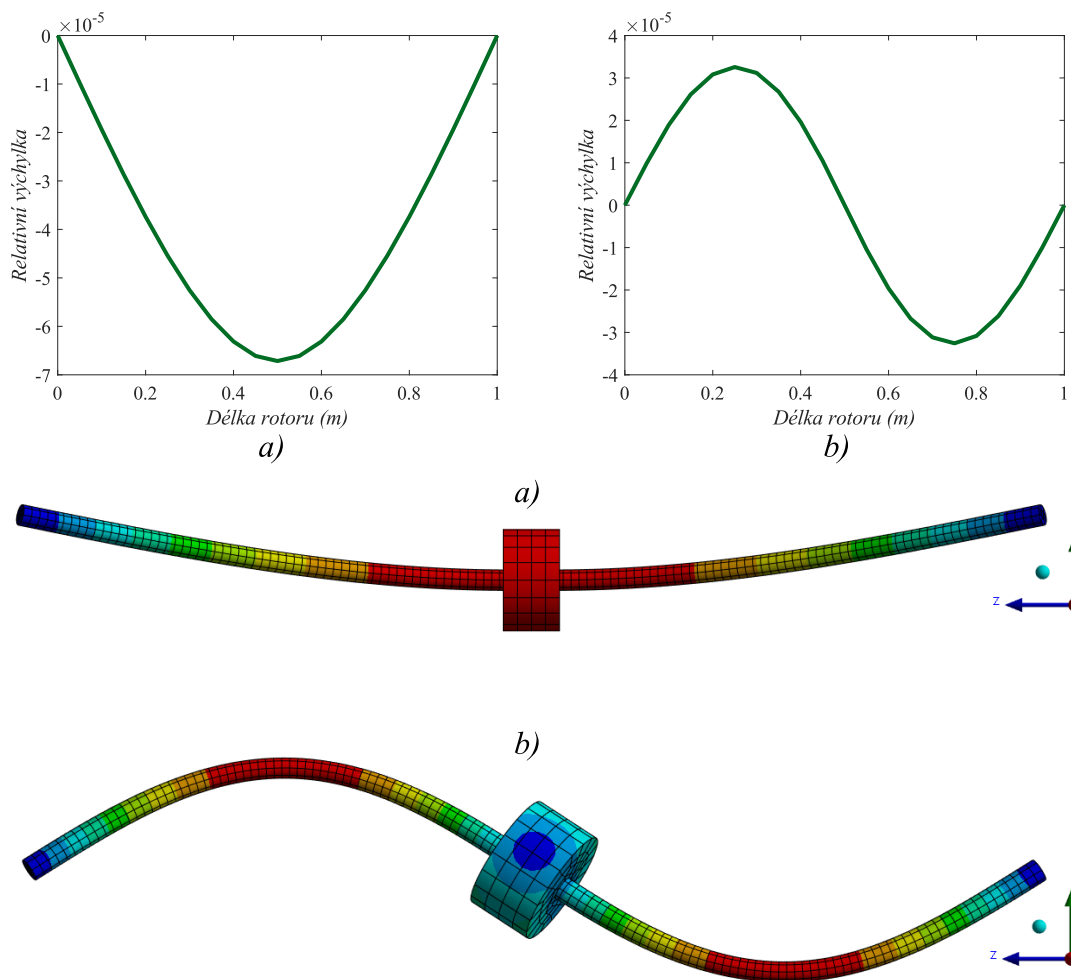
n (ot./min)	Matlab (Hz)		ANSYS (Hz)	
	0	1000	0	1000
	21,3	21,3	22,6	22,6
	21,3	21,3	22,6	22,6
	157,5	156,4	155,4	154,3
	157,5	158,5	155,4	156,5
	275	275	298,7	298,7
	275	275	298,7	298,7
	557,4	552,1	546	542,3
	557,4	562,6	546,1	549,9

je dána především nepravidelnou diskretizací modelu v řešiči, kdy jednotlivé prvky nemusí být umístěny plně souměrně.

Nejlepší shody bylo dosaženo u první vlastní frekvence, kde je rozdíl 1,3 Hz. U druhého módu je tento rozdíl v případě bez rotace již 2,1 Hz a u vyšších frekvencí dále narůstá, avšak z hlediska dynamické analýzy jsou pro nás nejvýznamnější nízké frekvence, u kterých může nastat shoda s budící frekvencí působící na systém. Rozdíly ve vypočítaných frekvencích vznikají také v přístupu k modelování kotouče, kdy v matematickém modelu je disk uvažován jako tuhý, zatímco v programu ANSYS jsou řešeny také jeho deformace.

V tabulce 4.2 je také vidět vliv rychlosti rotace na vlastní frekvence, ale protože se jedná o symetrický rotor včetně symetrického uložení, tak tento vliv gyroskopických účinků není příliš výrazný.

Obrázek 4.4 zachycuje první dva vlastní tvary daného rotoru. Vykreslení pomocí kódu v Matlabu vychází z vlastních vektorů, které přísluší vlastním číslům. Jedná se o odhad vlastního tvaru, přičemž výchylka na svislé ose nemá význam reálné výchylky kmitů. Podobně je to i v případě řešení v programu ANSYS, proto není zobrazena legenda, neboť hodnoty deformace jsou také pouze relativní. Numerický řešič MKP v programu ANSYS je založen na řešení problému vlastních hodnot, přičemž algoritmy jsou optimalizované a značně pokročilé oproti jednoduchému přístupu prezentovanému v práci.



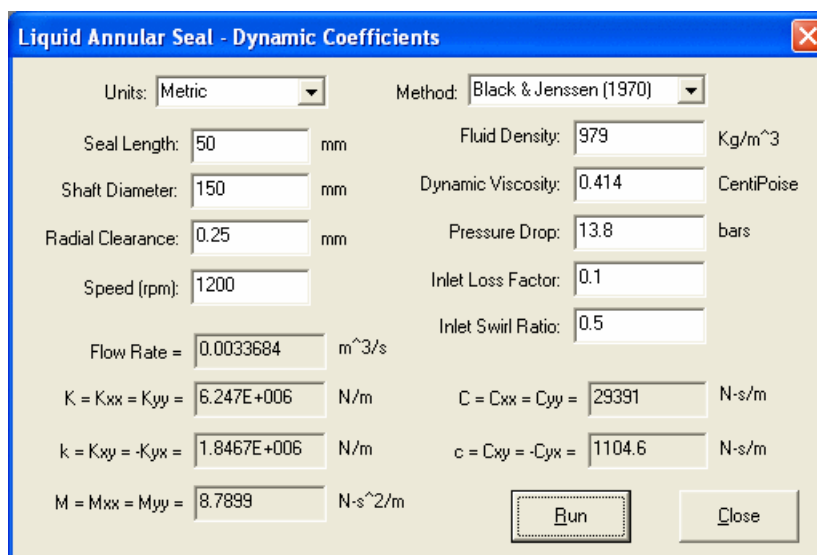
Obrázek 4.4: Vykreslení prvních dvou vlastních tvarů kmitů řešeného rotoru – a) první vlastní tvar, b) druhý vlastní tvar. Nahoře vykreslení v programu Matlab, dole vizualizace z programu ANSYS.

## 4.2 Testování výpočtu přídatných účinků tenké kapalinové spáry

Pro testování výpočtu přídatných účinků tenké kapalinové spáry byl použit příklad dostupný v [16], protože uvádí veškeré potřebné parametry pro výpočet jednotlivých prvků matic. V této části je také analyzován vliv rozdílu odvozeného tvaru koeficientu  $\mu_1$ , který je popsán ve vztahu (2.40).

Vstupní parametry výpočtu přídatných účinků tenké spáry shrnuje následující tabulka, která koresponduje s obr. 4.5. Poslední hodnota na obrázku *Inlet Swirl Ratio* (vstupní rotace kapaliny) nemá pro výpočet význam, protože v předloženém přístupu je rotace kapaliny daná a to polovina rychlosti rotace hřídele, pro kterou byly odvozeny vztahy v kapitole 2.2.

Nejdříve byl proveden výpočet pro koeficienty uvedené v literatuře, poté byl upraven koeficient  $\mu_1$  dle odvozeného vztahu a pro stejné vstupní hodnoty byly přídatné účinky přepočítány. V obou případech byl zahrnut vliv konečné délky spáry. Tyto výsledky shrnuje tabulka 4.4, vliv rozdílu jednoho čísla v čitateli koeficientu  $\mu_1$  způsobuje minimální



Obrázek 4.5: Parametry a výstupy testovacího příkladu na výpočet přídatných účinků tenké kapalinové spáry [16].

Tabulka 4.3: Parametry tenké spáry.

Vstup	Značení	Hodnota
Délka spáry	$L$ (mm)	50
Průměr rotoru	$D$ (mm)	150
Šířka spáry	$y_0$ (mm)	0,25
Otáčky	$n$ (ot./min)	1200
Hustota kapaliny	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	979
Dynamická viskozita	$\mu$ (Pa · s)	0,000414
Tlakový spád	$P$ (Pa)	138 000
Vtoková tlaková ztráty	$\xi$ (-)	0,1

rozdíly na výsledné přídatné účinky. V případě vztahů přebraných z literatury se podařilo dosáhnout přesné shody, zde bylo největší riziko ve správném určení střední rychlosti  $V$  (resp. průtoku  $Q$ ), kde muselo být využito numerické řešení.

Tabulka 4.4: Výsledné hodnoty přídatných účinků a průtoku pro testovací příklad těsnící spáry.

	Dle literatury	Dle odvození
$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	0,003363	0,003363
$K$ (N/m)	$6,247 \cdot 10^6$	$6,247 \cdot 10^6$
$k$ (N/m)	$1,8467 \cdot 10^6$	$1,833 \cdot 10^6$
$B$ (N · s/m)	$2,9391 \cdot 10^4$	$2,9173 \cdot 10^5$
$b$ (N · s/m)	$1,1046 \cdot 10^3$	$1,1046 \cdot 10^3$
$M$ (kg)	8,7899	8,7898

### 4.3 Vliv tenké kapalinové spáry na dynamiku rotoru

Tato část se zabývá stanovením vlivu těsnicí spáry na dynamiku rotoru. Pokud není uvedeno jinak, geometrie zkoumaného rotoru a spáry vychází z návrhu experimentu, který je obsahem kapitoly 5. Parametry rotoru byly již dříve uvedeny v tabulce 4.1.

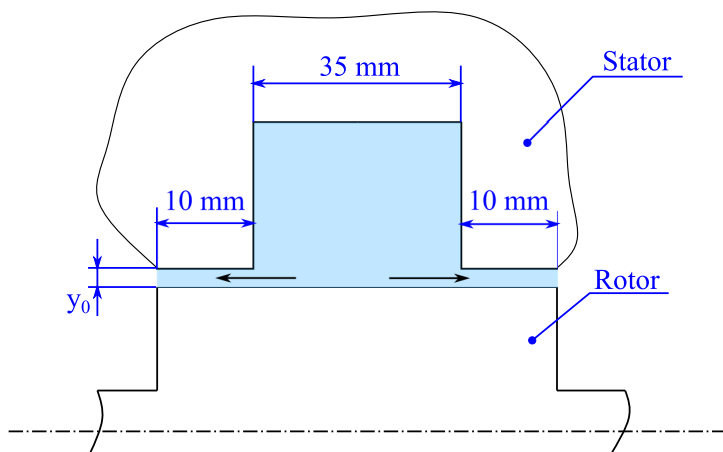
V případě výpočtu odezvy na nevyváženost rotoru byla stanovena hodnota nevyváženosti podle normy ISO 1940-1. Dle normy patří čerpadla a vodní turbíny do kategorie G 6,3, výpočetní koeficient  $k_N$  má hodnotu 6,3 mm/s. Vztah pro výpočet povolené nevyváženosti je uveden níže.

$$m_r e_r = 1000 \frac{k_N m}{\omega_p} \text{ (g} \cdot \text{mm)} \quad (4.1)$$

Ve vztahu 4.1  $\omega_p$  značí úhlovou rychlost odpovídající provozním otáčkám, pro výpočet byly provozní otáčky stanoveny 1000 ot./min. Hodnota nevyvážky dle vztahu nevychází v jednotkách SI, na tuto skutečnost je třeba brát zřetel při výpočtu. Ve všech dále popsaných výpočtech byla nevyváženost rotoru alokována v uzlu, který odpovídá umístění kotouče.

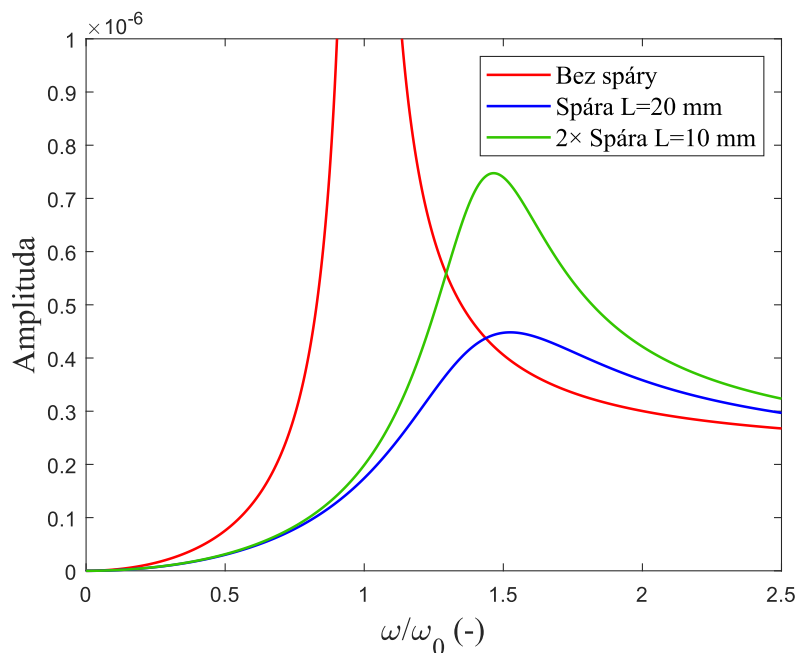
#### Přístup k modelování tenké spáry

V návrhu experimentu je tenká spára umístěna dle následujícího obrázku 4.6. Z matematického modelu vyplývá, že vliv tuhého kotouče se redukuje do jednoho uzlu modelu. Vznikají tak dvě možnosti, jak přistoupit k zahrnutí vlivu tenké spáry do modelu. První možností je sečíst délku spáry a místo dvou samostatných spár modelovat jednu. Druhá možnost je zahrnout do uzlu dvakrát účinky spáry o délce 10 mm, přičemž tato možnost lépe odpovídá fyzikální podstatě.



Obrázek 4.6: Schéma geometrie spáry v řešené úloze.

Byl proveden výpočet ustálené odezvy na nevyváženost rotoru pro tři konfigurace, šířka spáry byla  $y_0 = 0,3$  mm, tlakový spád, vtoková ztráta a fyzikální vlastnosti kapaliny jsou souhlasné s hodnotami v tab. 4.5. Vykreslená amplitudo-frekvenční charakteristika je na obr. 4.7. Vlivem tenké spáry dochází k posunu první vlastní frekvence k vyšším hodnotám. Zásadní rozdíl mezi variantami zahrnutí spáry do modelu je v amplitudě, kdy v případě jedné spáry dochází k většímu útlumu.



Obrázek 4.7: Ustálená odezva na buzení nevyvážeností. Významný je vliv rozdílného tlumení spáry, posun vlastní frekvence není tak znatelný.

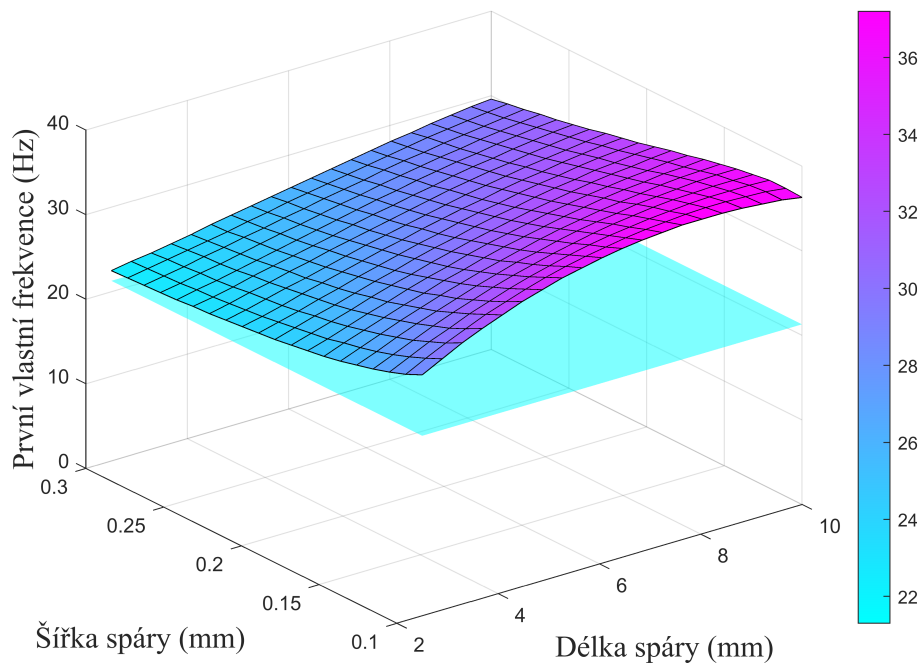
### Vliv geometrických parametrů spáry na vlastní frekvenci

Z konstrukčního hlediska jsou nejlépe ovlivnitelnými parametry šířka spáry a její délka, proto bylo zkoumáno, jakým způsobem tyto rozměry ovlivňují první vlastní frekvenci systému při konstantních otáčkách. Rozsah hodnot a ostatní parametry, pro které byl proveden výpočet, uvádí tabulka 4.5.

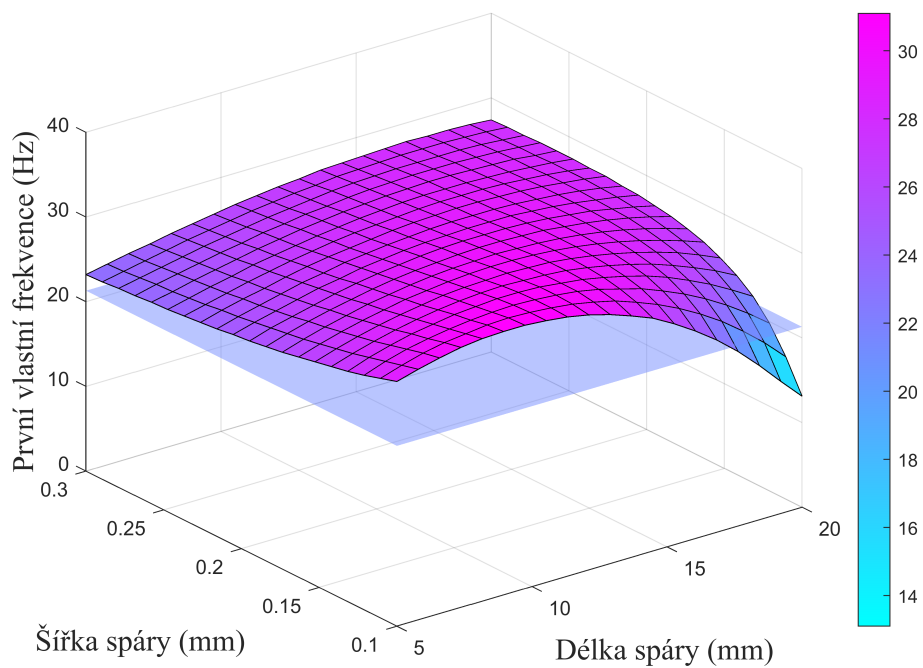
Tabulka 4.5: Parametry pro výpočet tenké spáry.

Parametr	Hodnoty
Šířka spáry	0,1-0,3 mm
Délka spáry	2,5-10 mm
Otáčky rotoru	1000 ot./min
Tlakový spád	70 kPa
Vtokový ztrátový součinitel	0,1
Hustota kapaliny	1000 kg/m <sup>3</sup>
Dynamická viskozita kapaliny	0,00102 Pa · s

Při výpočtu bylo uvažováno uspořádání dvou symetrických spár, jak bylo zmíněno výše. Na obr. 4.8 je vykreslena první vlastní frekvence v závislosti na délce a šířce spáry, tyrkysová rovina značí první vlastní frekvenci rotoru bez těsnící spáry při nulových otáčkách. Z tvaru plochy je patrné, že s rostoucí délkou spáry dochází k navýšování vlastní frekvence. Naopak u velmi krátké spáry, která je poměrně široká, je rozdíl ve frekvencích minimální.



Obrázek 4.8: Mapa první vlastní frekvence jako funkce geometrických parametrů spáry pro případ dvou symetrických spár.

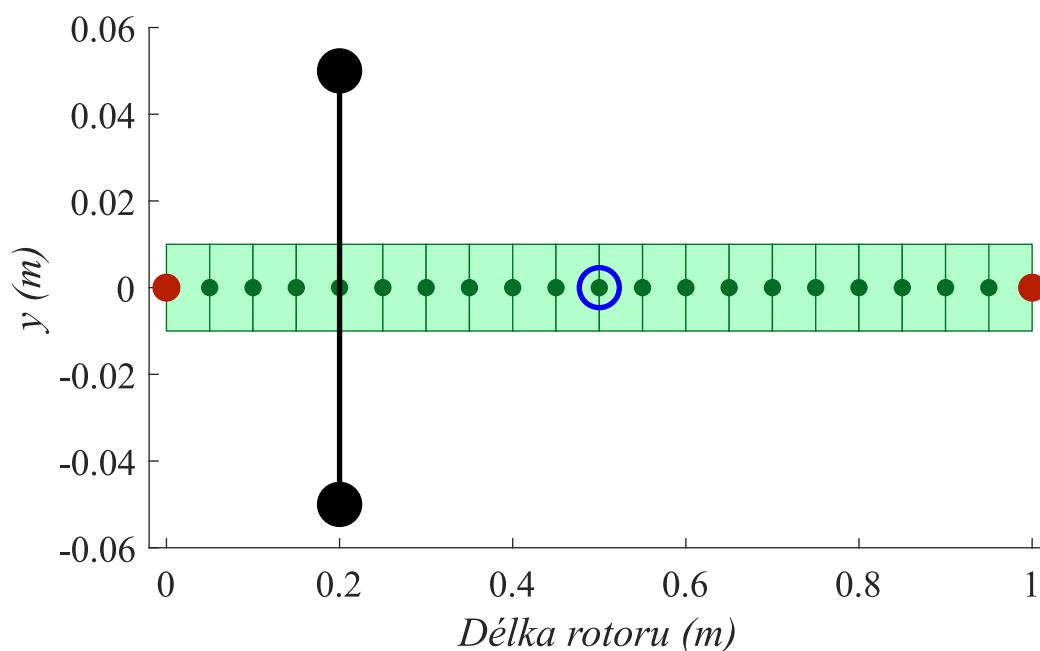


Obrázek 4.9: Mapa první vlastní frekvence jako funkce geometrických parametrů spáry pro případ jedné spáry.

Druhý výpočet byl proveden tak, že byla opět uvažována jedna spára. Na obr. 4.9 je vidět, že nejdříve dochází k navyšování frekvence a následně k poklesu až pod hodnotu vlastní frekvence systému.

### Vliv na Campbellův diagram

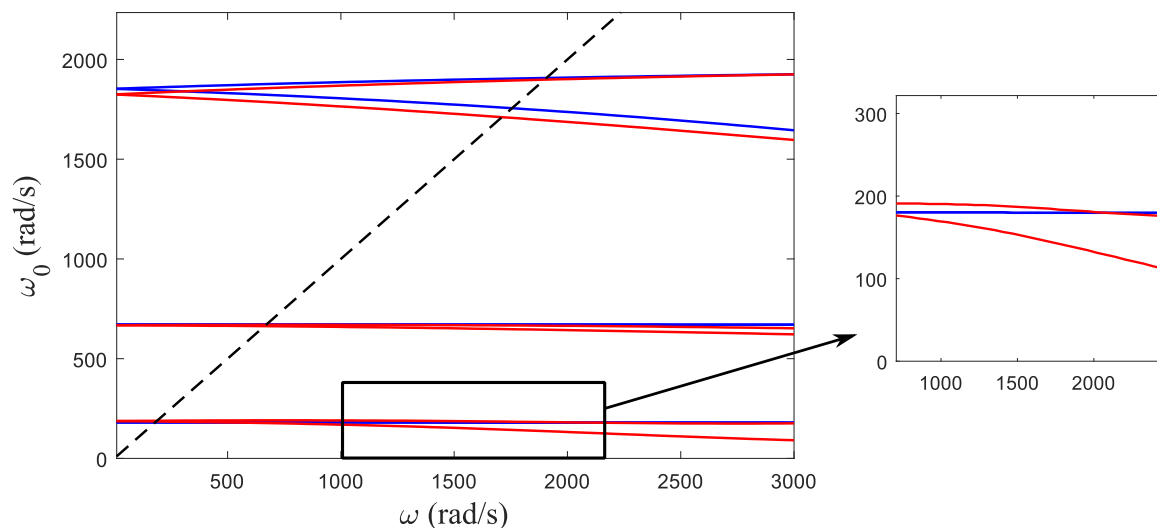
Pro tento případ byla upravena základní geometrie rotoru tak, aby nebyla symetrická. Kotouč byl posunut do uzlu č. 5. Počet prvků a další parametry zůstaly beze změny. Bylo počítáno s přidavnými účinky od jedné spáry délky 20 mm a šířky 0,3 mm (0,1 mm), která byla umístěna v uzlu č. 11. Bylo třeba při definici spáry upravit průměr, na kterém se nachází, v tomto případě 20 mm. Další zde nezmiňené parametry jsou stejné jako v tabulce 4.5. Diskretizace rotoru je naznačena na obr. 4.10.



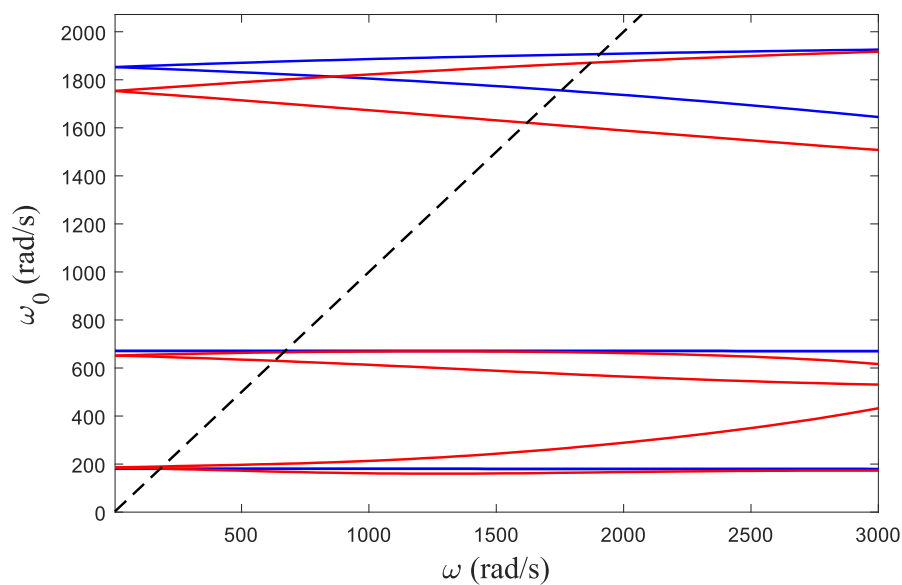
Obrázek 4.10: Model nesymetrického rotoru. Modrou kružnicí je znázorněna pozice tenké spáry.

Pro tuto konfiguraci rotoru byl výpočet v Matlabu a využitím sestaveného modelu sestrojen Campbellův diagram (viz obr. 4.11 a obr. 4.12). Modrou barvou je v obou grafech rotor bez účinků tenké spáry, červená barva značí vliv tenké spáry. Z grafů je patrné, že tenčí spára výrazněji zvyšuje první vlastní frekvenci.

Provedené výpočty dokazují výrazný vliv tenké spáry na dynamiku celého systému, a proto by měla být tato problematika brána v potaz při analýze konstrukce. Během konstrukčního řešení jsou často předmětem objemové ztráty vznikající v těsnících spárách, avšak i z hlediska dynamiky je to důležitý prvek. Predikce přidavných účinků výše uvedenou metodou podle Blacka nedosahuje takové přesnosti jako v případě komplikovanějších metod [7], ale dobře ilustruje trend, jakým způsobem se těsnící spára podílí na dynamice celého rotoru.



Obrázek 4.11: Campbellův diagram pro první tři frekvence rotor pro spáru o délce 20 mm a šířce **0,3 mm** – bez spáry modře, s vlivem spáry červeně. V pravé části je detail na první vlastní frekvenci.



Obrázek 4.12: Campbellův diagram pro první tři frekvence rotor pro spáru o délce 20 mm a šířce **0,1 mm** – bez spáry modře, s vlivem spáry červeně.



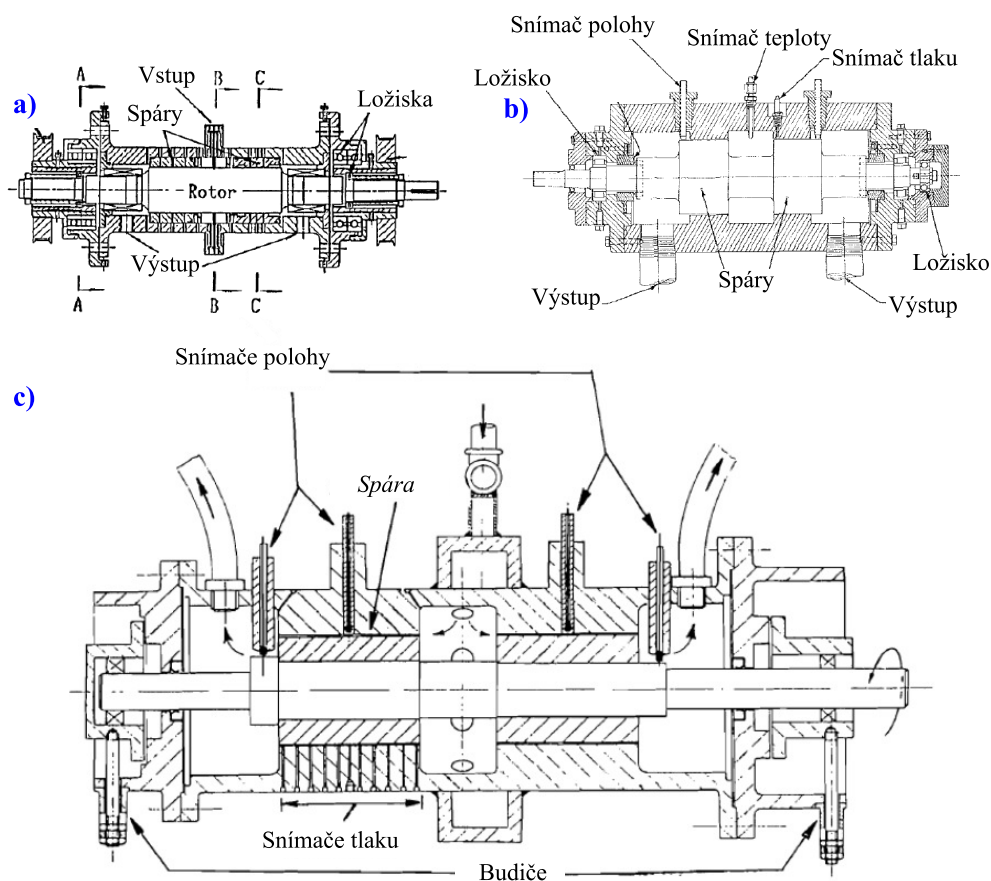
## 5 Návrh experimentu

Tato část práce představuje koncepční návrh experimentu pro měření přídavných účinků tenké spáry na dynamiku rotoru. V rámci předchozího proběhlého zkoumání problematiky na Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana (OFIVK) vznikla práce [18], bohužel se nepodařilo přídavné účinky jednoznačně identifikovat.

V rámci rešeršní části byl věnován prostor experimentálním výzkumům přídavných účinků, kterých proběhla celá řada a komplexní shrnutí nabízí publikace [10]. V rámci koncepce měření, které má ryze experimentální charakter, byly stanoveny určité požadavky na návrh konstrukce, jsou jimi následující body.

- Symetrie konstrukce
- Možnost přejíždět první vlastní frekvenci
- Jednoduchost návrhu

Požadavek na symetrii konstrukce se opírá o záznamy dříve provedených experimentů, kde probíhalo měření v podobných rozsazích parametrů, jakých je možno dosáhnout v hydraulické laboratoři OFIVK. Ukázky těchto konstrukčních řešení jsou na následujícím obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Ukázky konstrukčních řešení přípravků pro měření přídavných účinků těsnící spáry. Upraveno a převzato z a) [11] b) [9] a c) [12].

V případě provozu strojů je snaha se vlastním frekvencím vyhnout a zamezit buzení na frekvenci blízké vlastní. Při návrhu experimentu však byly rozměry přizpůsobeny tak, aby bylo možné vlastní frekvenci přejíždět v rámci frekvence rotace hřídele, jejíž předpokládaná maximální hodnota je 3000 ot./min.

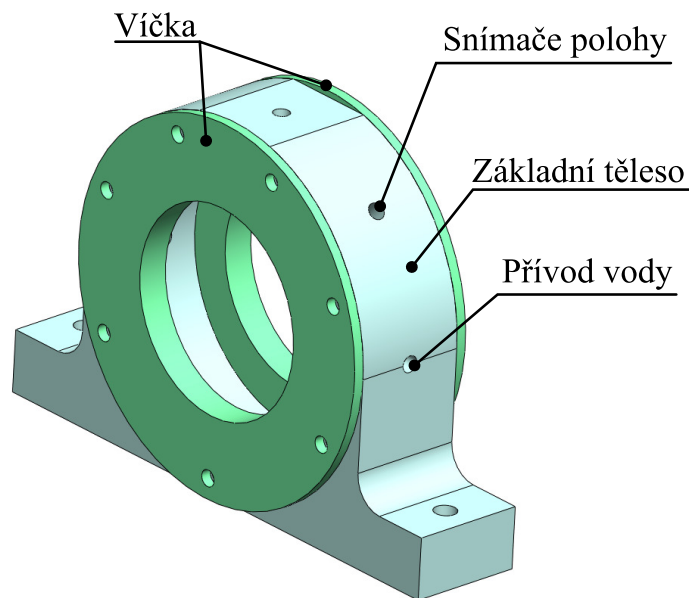
V neposlední řadě byla snaha, aby navržená konstrukce byla jednoduchá a snadno sestavitelná. Ovšem při návrhu bylo třeba učinit řadu kompromisů, které jsou dále diskutovány.

## 5.1 Návrh geometrie

Geometrii experimentálního přípravku lze rozdělit na tři hlavní celky – stator, rotor a základ, na němž je konstrukce uložena. Tato sekce stručně shrnuje geometrii jednotlivých komponent a popisuje předpokládané umístění snímačů. Zpracování 3D modelů a výkresové dokumentace bylo provedeno v rámci programu Solidworks. Jedná se o koncepční návrh, proto nejsou v sestavách zahrnuty některé normované prvky (např. šrouby).

### Stator

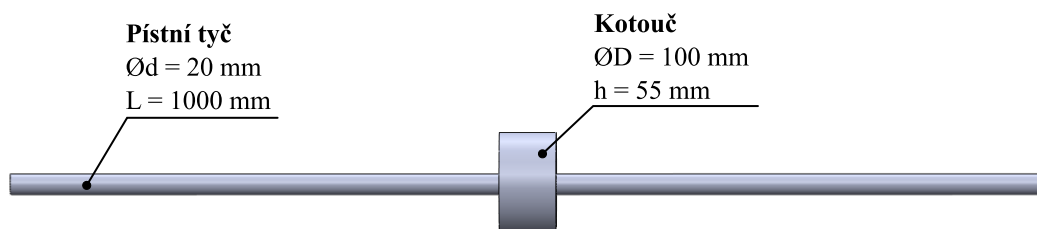
Statorovou část tvoří tři části, prostřední základní těleso a dvě víčka, která tvoří vlastní prostor těsnící spáry viz obr. 5.2. Toto řešení statoru bylo zvoleno, protože snímače polohy vyžadují určitý prostor od kovových částí, aby byla zajištěna jejich správná funkcionality. Dalším důvodem je samotná výroba statoru, kdy je jednodušší obrobění tří základních kusů než-li jednoho komplikovaného celku. Na základním tělese se nachází otvory pro umístění snímačů polohy pootočené o 90°. Symetricky jsou umístěny dva otvory pro přívod tlakové vody. Poslední otvor nacházející se na horní straně tělesa je pro případné umístění odběru snímače tlaku, případně může být ucpán.



Obrázek 5.2: Schéma statorové části.

## Rotor

Rotor se skládá z hřídele a kotouče (obr. 5.3). V případě hřídele se jedná o pístní tyč o délce jeden metr. Rozměry kotouče byly přizpůsobeny rozměrům statorové části, kdy na každé straně statoru byl ponechán prostor 5 mm, aby byl zmírněn rozstřík kapaliny. Přesné obrobení válcové plochy disku proběhne až po nasazení na pístní tyč. V případě vzniklého požadavku na jinou délku rotoru lze pístní tyč zkrátit na požadovaný rozměr.



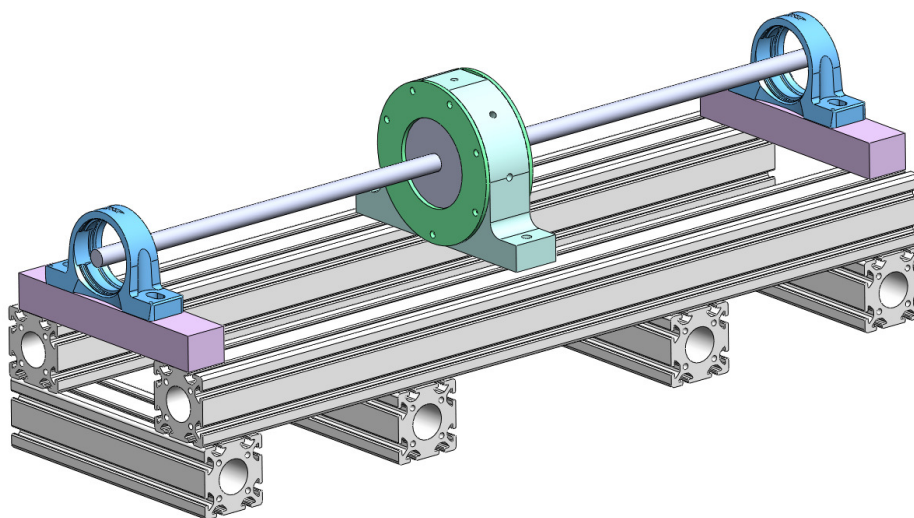
Obrázek 5.3: Schéma rotoru.

## Základ

Uložení rotoru je v ložiskových domcích dostupných v laboratoři OFIVK. Celý základ je složen z hliníkového profilového systému, přičemž pro ustavení ložiskových domků jsou využity obrobené ocelové hranoly. Z hlediska celkového sestavení je problematické zajištění sousostí rotorové a statorové části, kdy je předpokládáno využití ustavovacích podložek.

## Shrnutí

Celkový pohled na sestavu je na obrázku 5.4. Fialově jsou naznačeny ustavovací hranoly a modře ložiskové domky. Konkrétní rozměry statorových částí jsou uvedeny v příložené výkresové dokumentaci. Hlavní rozměry jsou shrnuty v tabulce 5.1, maximální navrhovaná šířka spáry je značně omezena technologií výroby a možnostmi přesného ustavení sestavy. Je plánováno snímání polohy kotouče pomocí snímačů polohy umístěnými v připravených



Obrázek 5.4: Schématické znázornění navržené experimentální sestavy.

otvorech v základu statoru. Dále je uvažováno umístění snímačů zrychlení na ložiskových domcích a snímání tlaku na přívodu vody. Maximální hodnota tlaku na vstupu bude přibližně 0,7 bar. V úvodu měření by nejdříve mělo být zjištěno vlastní naladění celé soustavy bez přídavných účinků kapaliny, poté by měla proběhnout série měření pro různé hodnoty tlaku a otáček rotoru. Riziko tvoří zachycení kapaliny vystupující z rotorové části a její rozstřík na výstupu vlivem její rotace.

Tabulka 5.1: Návrhové rozměry experimentální sestavy.

<b>Rozměr</b>	<b>Hodnota</b>
Délka rotoru	1000 mm
Průměr kotouče	100 mm
Šířka kotouče	55 mm
Průměr hřídele	20 mm
Maximální šířka spáry	0,3 mm
Délka spáry	$2 \times 10$ mm

## 5.2 Modální analýza soustavy

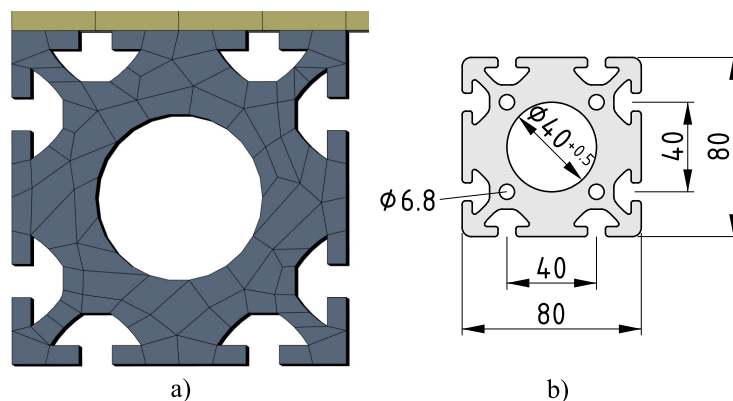
V rámci návrhu experimentu byla zpracována modální analýza zjednodušené konstrukce v programu ANSYS, aby byla získána představa o celkové tuhosti (poddajnosti) navrženého systému. Analýza samotné rotorové části byla provedena v rámci testování sestavného modelu v kapitole 4.1.

V rámci přípravy geometrie byly provedeny některé její drobné úpravy, aby bylo možné snadno vytvořit výpočetní síť. Byly odstraněny otvory pro snímače na statorovém základu, stejně tak bylo učiněno s dírami pro šrouby. Hliníkové profily byly zjednodušeny, jak je zobrazeno na obr. 5.5. Ložiskové domky nebyly v modelu uvažovány kvůli své složité geometrii, dále není předpokládán jejich významný vliv na vlastní frekvenci celé sestavy. Uložení rotoru bylo nastaveno pomocí funkce *Bearing* a předepsaná tuhost ložisek byla  $10^{11}$  N/m. Pro hliníkové části byl jako materiál nastaven hliník, zbytek součástí byl simulován jako ocel, materiálové charakteristiky jsou uvedeny v následující tabulce 5.2.

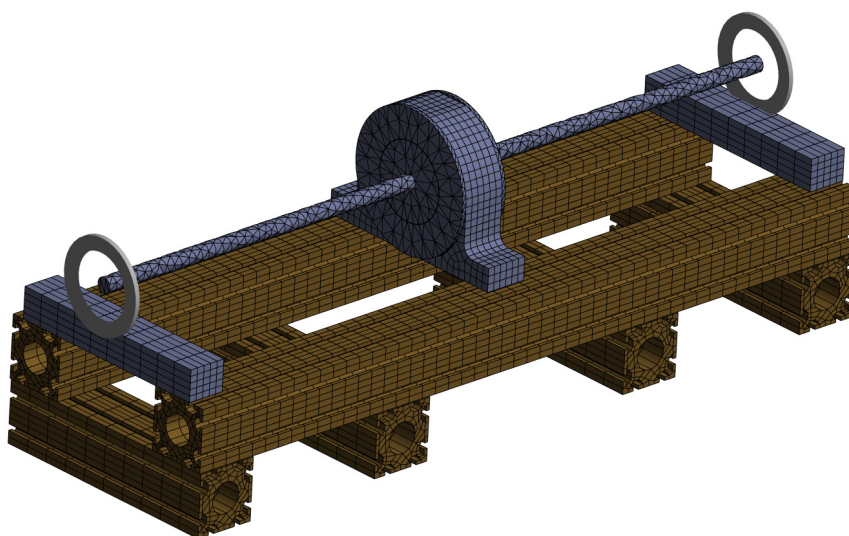
Tabulka 5.2: Vlastnosti materiálů použitých při modální analýze sestavy experimentu.

<b>Materiálová vlastnost</b>	<b>Značení</b>	<b>Ocel</b>	<b>Hliník</b>
Hustota	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	7800	2770
Youngův modul pružnosti	$E$ (Pa)	$2,1 \cdot 10^{11}$	$7,1 \cdot 10^{10}$
Poissonova konstanta	$\mu$ (-)	0,3	0,33

Výpočetní síť tvořilo celkem 17 649 elementů, čemuž odpovídá 92 277 uzlů. Jednotlivá tělesa k sobě byla připojena pomocí kontaktu typu *Bonded*, který zajišťuje pevné spojení daných těles. Použitá výpočetní síť je zobrazena na obr. 5.6, detail v oblasti profilu je na obr. 5.5.



Obrázek 5.5: Zjednodušená geometrie hliníkového profilu – a) detail profilu bez zaoblení a otvorů, který byl použit pro modální analýzu, b) originální profil s rozměry (převzato ze stránek výrobce [19]).



Obrázek 5.6: Výpočetní síť, která byla použita při modální analýze sestavy experimentu. Šedou barvou jsou zobrazeny ocelové součásti, hnědou barvou hliníkové.

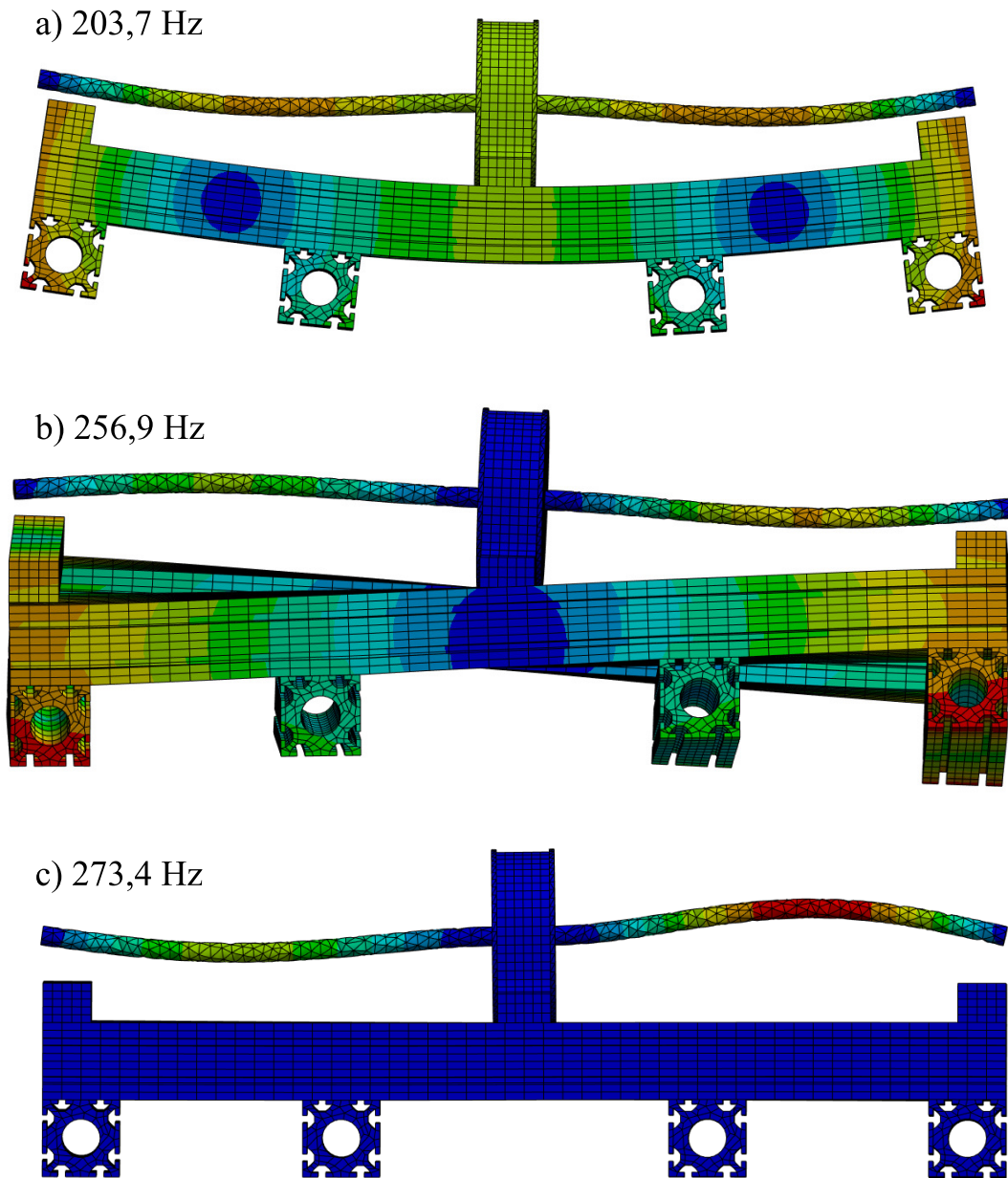
V úvodním nastavení simulace byl umožněn volný pohyb sestavy v prostoru, proto při vyhodnocení výsledků nebylo bráno v potaz prvních šest vlastních frekvencí, tyto módy odpovídají translačnímu a rotačnímu pohybu soustavy jako celku v prostoru. Následně byla provedena simulace, kde byla nastavena vazba typu *Fixed Support* na dolní plochy čtyř hliníkových profilů, jedná se o model s pevným ukotvením k zemi. První tři vlastní frekvence sestavy pro obě analýzy jsou uvedeny v tabulce 5.3, na obr. 5.7 jsou pak zobrazeny první tři módy systému pro případ bez fixní vazby k zemi.

Tabulka 5.3: Vlastní frekvence získané modální analýzou sestavy experimentu.

Vlastní frekvence č.	Volný pohyb v prostoru	Vazba Fixed Support
1	203,7 Hz	272,9 Hz
2	256,9 Hz	276,4 Hz
3	273,4 Hz	287,7 Hz



První vlastní frekvence v obou analýzách jsou řádově vyšší než první vlastní frekvence samotného rotoru, nemělo by tak docházet k výrazným deformacím hliníkového základu. Pro kontrolu byl proveden výpočet systému, který se skládal pouze z hliníkového základu, statoru a ustavovacích hranolů. První vlastní frekvence takového systému byla 214,7 Hz v případě bez použití vazby *Fixed Support*, rotor tedy celý systém činí poddajnějším.



Obrázek 5.7: První tři vlastní tvary soustavy pro případ neukotvení v prostoru.

# Závěr

V rámci diplomové práce byla provedena literární rešerše, která byla úzce zaměřena na problematiku těsnících spár. Výzkumy lze pomyslně rozdělit do tří větví, kdy část z nich je zaměřena na analytickou predikci přídavných účinků, experimentální výzkum má za cíl ověřit předpokládané řešení, případně přinést zjištění nová. Poslední částí jsou ryze numerické simulace, které jsou však stále časově a výpočetně náročné.

Dále v práci bylo provedeno odvození základního řešení dynamiky těsnící spáry a to podle Blacka s vlivem rotace kapaliny. Důležitým předpokladem je právě rotace kapaliny, která odpovídá polovině rotace hřídele. Z praktického hlediska je však problematické skutečnou rotaci kapaliny určit, protože na ni má vliv řada faktorů jako je např. drsnost povrchů rotoru a statoru. V rámci této části nebylo dosaženo plně uspokojivého výsledku, neboť v jednom z odvozených koeficientů je rozdíl oproti tvaru uvedenému v literatuře.

Další kapitola je věnována MKP modelu rotoru a jeho analýze, která přináší vhled do rotorové dynamiky a představuje jednu z cest, jak rotor modelovat. Ačkoliv se jedná o jednoduchý matematický model, tak na testovacím výpočtu provedeném v programu ANSYS bylo ukázáno, že odhad první vlastní frekvence si velmi dobře odpovídá. Výhodou jednodušších modelů je jejich snadná modifikace a zahrnutí požadovaných vlivů dle konkrétního zadání. Využití tohoto přístupu se jeví jako praktické především v počátečních fázích návrhu konstrukce, kdy může být provedena řada rychlých analýz, které nevyžadují robustní výpočetní nástroj jako je ANSYS. Do modelu byly zahrnuty přídavné účinky odvozené v předcházející kapitole. Celý model byl následně implementován v prostředí Matlab a byl využit pro stanovení vlivu těsnící spáry na dynamiku rotoru.

Z hlediska metodiky se jeví jako vhodný postup vytipovat si možné konfigurace těsnící spáry, jaké mohou být využity, a pro ty následně provést jednoduchý výpočet přídavných účinků. Zobecnění přídavných účinků tenké spáry je komplikované, protože do výpočtu vstupuje velké množství proměnných. Dále je třeba získané výsledky vždy brát s rezervou a podrobit je kritickému zhodnocení, protože zde prezentovaný model obsahuje řadu zjednodušení. Tato zjednodušení jsou na druhé straně i výhodou, protože umožňují větší vhled do problematiky bez studia pokročilých matematických metod. Problematika těsnících spár je obsáhlá a složitá, ale doufám, že průvodní text práce čtenáři poskytne základní přehled.

Poslední část popisuje koncepci experimentálního měření přídavných účinků, kdy byla navržena sestava a její rozměry. Dále byla provedena modální analýza systému, z jejího výsledku lze soudit, že navrhované uložení na hliníkových profilech by nemělo zásadně ovlivňovat kmitání rotoru, které má být hlavním předmětem zájmu.

# Seznam použitých zdrojů

- [1] CORBO, M. A. a S. B. MALANOSKI. Pump Rotordynamics Made Simple. In: *Proceedings of the 15th International Pump Users Symposium*. Texas A&M University: Turbomachinery Laboratories, 1998, s. 167-204. Dostupné z: doi:<https://doi.org/10.21423/R1WH5D>
- [2] ARGHIR, M. a J. FRENE. Static and Dynamic Analysis of Annular Seals. In: *Proceedings of the ASME 2006 2nd Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting Collocated With the 14th International Conference on Nuclear Engineering Volume 2: Fora*. Miami, Florida, USA: ASME, 2006, s. 517-526. ISBN 0-7918-4751-9. Dostupné z: doi:<https://doi.org/10.1115/FEDSM2006-98565>
- [3] TIWARI, R. *Rotor systems : analysis and identification*. 1. Boca Raton: CRC press, Taylor & Francis Group, 2018. ISBN 9781138036284.
- [4] BLACK, H. F. Effects of Hydraulic Forces in Annular Pressure Seals on the Vibrations of Centrifugal Pump Rotors. *Journal of Mechanical Engineering Science*. 1969, **11**(2), 206-213. ISSN 0022-2542. Dostupné z: doi:[10.1243/JMES\\_JOUR\\_1969\\_011\\_025\\_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1969_011_025_02)
- [5] CHILDS, D. W. Dynamic Analysis of Turbulent Annular Seals Based On Hirs- Lubrication Equation. *Journal of Lubrication Technology*. 1983, **105**(3), 429-436. ISSN 0022-2305. Dostupné z: doi:[10.1115/1.3254633](https://doi.org/10.1115/1.3254633)
- [6] YAMADA, Yutaka. Resistance of a Flow through an Annulus with an Inner Rotating Cylinder. *Bulletin of JSME*. 1962, **5**(18), 302-310. ISSN 0021-3764. Dostupné z: doi:[10.1299/jsme1958.5.302](https://doi.org/10.1299/jsme1958.5.302)
- [7] CHILDS, Dara W. *Turbomachinery rotordynamics: phenomena, modeling, and analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1993, xv, 476 stran : ilustrace. ISBN 0-471-53840-X.
- [8] NORDMANN, R., F. J. DIETZEN, W. JANSON, A. FREI a S. FLORJANCIC. Rotordynamic coefficients and leakage flow of parallel grooved seals and smooth seals. *NASA. Lewis Research Center Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery*. 1986, 129-153.
- [9] CHILDS, D. W. a J. B. DRESSMAN. Convergent-Tapered Annular Seals: Analysis and Testing for Rotordynamic Coefficients. *Journal of Tribology*. 1985, **107**(3), 307-316. ISSN 0742-4787. Dostupné z: doi:[10.1115/1.3261059](https://doi.org/10.1115/1.3261059)
- [10] TIWARI, R., S. MANIKANDAN a S. K. DWIVEDY. A review of the experimental estimation of the rotor dynamic parameters of seals. *Shock and Vibration Digest*. 2005, **37**(4), 261-284.
- [11] IWATSUBO, T., B. C. SHENG a T. MATSUMOTO. An experimental study on the static and dynamic characteristics of pump annular seals. In: *Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, 1988*. Lewis Research Center: NASA, 1989, s. 229-251.



- [12] MARSCHER, William D. Analysis and Test of Multistage Pump “Wet” Critical Speeds. *Tribology Transactions*. Ft. Lauderdale, 2008, **34**(3), 445-457. ISSN 1040-2004. Dostupné z: doi:10.1080/10402009108982056
- [13] HAVLÁSEK, Michal. *Fluid-structure interaction between structural components of hydraulic turbine and fluid flow*. Brno, 2021. Dizertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [14] BLACK, H. F. a D. N. JENSSEN. Dynamic Hybrid Bearing Characteristics of Annular Controlled Leakage Seals. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*. 1969, **184**(14), 92-100. ISSN 0367-8849. Dostupné z: doi:10.1243/PIME\_CONF\_1969\_184\_427\_02
- [15] BYRTUS, Miroslav, Michal HAJŽMAN a Vladimír ZEMAN. *Dynamika rotujících soustav*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010. ISBN 978-80-7043-953-1. Dostupné také z: <http://www.digitalnik-nihovna.cz/mzk/uuid/uuid:8cdce770-8e52-11e8-87bd-005056827e52>
- [16] Liquid Annular Seal. *Dyrobes - A Revolution in Rotor Dynamics Software* [online]. [cit. 2023-05-22]. Dostupné z: <https://dyrobes.com/help1800/Rotor/html/dyro64v5.htm>
- [17] ISO 1940-1. *Mechanical vibration - Balance quality requirements for rotors in a constant (rigid) state: Specification and verification of balance tolerances*. 2. 2003.
- [18] KOHUT, V. *Stanovení tuhosti, tlumení a přídavné hmotnosti tenké kapalinové vrstvy v těsnící spáře*. Brno, 2012. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Doc. Ing. Vladimír Habán, PhD..
- [19] *Item - Detaily produktu* [online]. [cit. 2023-05-23]. Dostupné z: <https://cz-product.item24.com/cs/detaily-produktu/products/line-8-profiles-with-internal-diameter-1001046481/profile-8-80x80-d40-natural-40828/>

# Seznam použitých symbolů a zkratek

V práci se některá označení opakují, byla snaha uvést odpovídající význam v daném kontextu v průvodním komentáři.

Symbol	Význam
$\alpha, \beta$	natočení bodu na prvku
$\alpha_v$	reálná část vlastního čísla
$\beta_v$	imaginární část vlastního čísla
$\lambda$	součinitel délkových ztrát
$\lambda$	vlastní číslo
$\mu_{0-3}$	koefficienty pro výpočet přídatných účinků těsnící spáry
$\mu$	dynamická viskozita
$\mu$	Poissonova konstanta
$\xi$	součinitel místní ztráty
$\rho$	hustota
$\sigma$	proměnná charakterizující geometrii spáry
$\psi_{1-4}$	bázové funkce
$\omega$	úhlová frekvence
<b>A</b>	systémová matice
<i>b</i>	šířka spáry
<b>B</b>	matice tlumení
<b>B<sub>p</sub></b>	matice přídatného tlumení
<i>D, d</i>	průměr
<b>E</b>	jednotková matice
<i>E</i>	Youngův modul pružnosti
<i>E<sub>k</sub></i>	kinetická energie
<i>E<sub>p</sub></i>	potenciální energie
<i>e<sub>r</sub></i>	vzdálenost nevyváženosti od osy rotace
<i>f</i>	síla od kapaliny působící na stěnu po délce spáry
<i>F</i>	síla
$\tilde{f}$	harmonická budící síla v komplexním tvaru
<b>G<sub>d</sub></b>	matice gyroskopických účinků tuhého disku
<b>G<sub>e</sub></b>	matice gyroskopických účinků
<i>h</i>	šířka
<i>I</i>	moment setrvačnosti k příčným osám
<i>I<sub>0</sub></i>	moment setrvačnosti k ose rotace
<i>i</i>	imaginární jednotka
<i>J</i>	kvadratický moment průřezu k příčným osám
<i>J<sub>p</sub></i>	polární kvadratický moment
<i>k</i>	tuhost
<b>K</b>	matice tuhosti
<b>K<sub>e</sub></b>	matice tuhosti hřídelového prvku
<b>K<sub>l</sub></b>	matice tuhosti ložiska

$K_p$	matice přídavné tuhosti
$k_N$	koeficient pro výpočet normovaného nevyvážku
<b>Symbol</b>	<b>Význam</b>
$L$	délka
$m$	hmotnost
$M$	matice hmotnosti
$M_d$	matice hmotnosti tuhého disku
$M_e$	matice hmotnosti hřídelového prvku
$M_p$	matice přídavné hmotnosti
$m_r$	hmotnost nevyváženosti
$n$	otáčky
$p$	tlak
$\Delta p$	flukтуаční složka tlaku
$P$	tlakový spád
$q$	stavový vektor
$Q$	průtok
$r, p$	posuvy bodu na prvku
$Re_a$	axiální Reynoldsovo číslo
$Re_o$	obvodové Reynoldsovo číslo
$s$	bod na prvku
$T$	proměnná značící $L/V$ v Blackově modelu
$u$	rychlost kapaliny
$u_{1-8}$	posuvy a natočení hřídelového prvku
$\mathbf{u}$	vektor deformačních parametrů elementu
$\mathbf{u}_r$	vektor komplexních amplitud
$\tilde{\mathbf{u}}$	ustálená odezva v komplexním tvaru
$V$	střední rychlost kapaliny při stacionárních podmínkách
$v$	výchylka rychlosti
$y_0$	šířka spáry
$\bar{y}$	malá výchylka šířky spáry
$Z$	matice dynamické tuhosti

### Zkratka

CFD	Computational Fluid Dynamics
MKP	metoda konečných prvků
OFIVK	Odbor fluidního inženýrství Viktora Kaplana

# Seznam příloh

<b>Příloha 1</b>	Matlab kódy pro sestavený MKP model s testovacími příklady
<b>Příloha 2</b>	Výkresová dokumentace statorové části