UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Exponenciální funkce

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jiří Fišer, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Hana Laštovicová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2019

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Hana Laštovicová

Název práce: Exponenciální funkce

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Jiří Fišer, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2019

Abstrakt: Tato bakalářská práce popisuje číslo e a exponenciální funkci z mnoha různých pohledů.

Klíčová slova: Číslo e, Exponenciální funkce

Počet stran: 36

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Hana Laštovicová

Title: The exponential function

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Jiří Fišer, Ph.D.

The year of presentation: 2019

Abstract: This bachelor thesis describes number e and exponential function from many different perspectives.

Key words: Number e, Exponencial function

Number of pages: 36

Number of appendices: 0

Language: czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Jiřího Fišera, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat RNDr. Jiřímu Fišerovi, Ph.D. za odborné vedení a cenné rady, bez kterých by tato práce nikdy nevznikla.

Úvod

Cílem této bakalářské práce je přiblížit problematiku exponenciálních funkcí. Pro porozumění danému tématu je nejdříve nezbytné čtenářovi představit číslo e, jednu z nejvýznamnějších matematických konstant. Pro studenty je často tato konstanta velkou záhadou, jelikož bývává v učebních materiálech pouze zmiňována. Moje bakalářská práce se proto zaměřuje na číslo e z širší perspektivy.

První kapitola se tedy zabývá číslem e (neboli Eulerovým číslem) ze známých i méně známých pohledů, poskytuje krátký pohled do historie této konstanty v souvislosti s významnými matematiky, dále také představuje její odlišné podoby, vlastnosti a aplikace.

V druhé kapitole je představena exponenciální funkce, jedna ze základních elementárních funkcí. Zaměřila jsem se především na její podobu, zajímavé vlastnosti a aplikace.

Kapitola 1

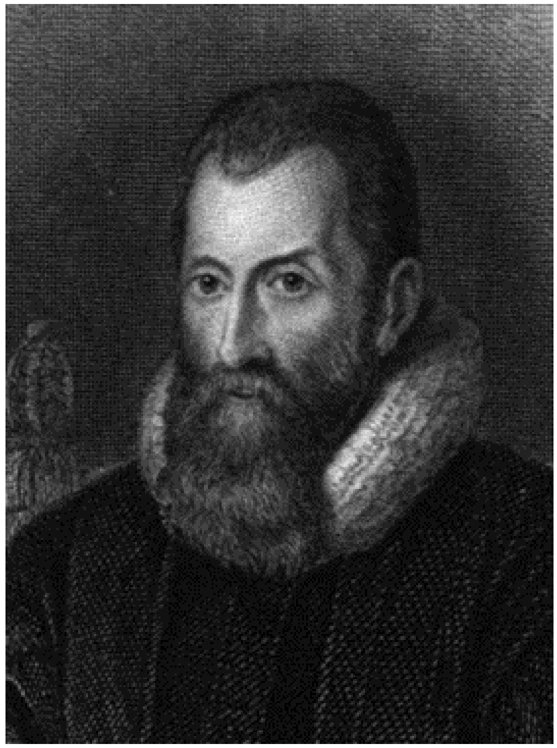
Číslo e

Číslo e (neboli Eulerovo číslo či Napierova konstanta) je matematická konstanta, které je základem přirozeného logaritmu. Stejně jako Ludolfovo číslo (π) je číslo e iracionální a transcendetní. V následujícím textu se dozvíme mnohé o objevení této konstanty, dále také o jejích vlastnostech a podobách. Přibližná hodnota čísla e činí 2,718 281 828 459 045 235 360 287 471 352 662 497 757 247 093 699 959 574 966 967 627 724 076 630 353 547 594 571 382 178 525 166 427 427 466 391 932 003 059 921 817 413 596 629 043 572 900 334 295 260 595 630 738 132 328 627 943 490 763 233 829 880 753 195 251 019 011 573 834 187 930 702 154 089 149 934 884 167 509 244 761 460 668 082 264 800 168 477 411 853 742 345 442 437 107 539 077 744 992 069 551 702 761 838 606 261 331 384 583 000 752 044 933 826 $\cdots$.

Britský autor knih o vědě David Darling napsal, že číslo e je ,,pravděpodobně nejdůležitější číslo celé matematiky. Číslo π je sice mezi lidmi známější, e je však na vyšších úrovních této disciplíny mnohem důležitější a také mnohem častější." [4]

1.1. Historie čísla e

Historie čísla e je spojena s mnoha osobnostmi. Jako první by nás mohli napadnout světoznámí matematikové jako Jacob Bernoulli nebo Leonard P. Euler, kteří sehráli v historii čísla e velmi významnou roli. Rozhodně však nebyli prvními,



Obrázek 1.1: John Napier.

kteří číslo e zkoumali. Na tuto problematiku narazil naprosto neočekávaný matematik, a to téměř o celé století dříve.

1.1.1. John Napier

Byl to John Napier, skotský matematik, fyzik a astronom, kterého si nejčastěji připomínáme jako objevitele logaritmu. Kdybychom ale nahlédli do Napierova života před matematickými objevy, rozhodně by nás nenapadlo, že právě on stojí na počátcích objevu čísla e. John Napier se narodil na Merchistonském hradu v roce 1550. V mládí se rozhodl ke studiu náboženství, u kterého poté i setrval. Jeho silné protestantské kořeny podpořily nejen antipatie ke katolické církvi, ba i k samotnému papeži. Napierovi patřilo veliké panství, proto se zajímal o chod svého hospodaření. V roce 1579 vytvořil tzv. hydraulický šroub k čerpání vody z uhelných jam. Dále se také zajímal o vojenství, inspirován Archimedem, navrhl tucet válečných zbraní, jejichž sestrojení však nebylo nikdy potvrzeno.

Přelom 16. a 17. století přinesl společnosti mnohé vědecké objevy. Mluvíme o době Johanese Keplera a Galilea Galileiho, tedy rozkvětu fyziky, astronomie, matematiky a celkové změny vnímání světa. Značné vědecké pokroky však byly limitovány rostoucím počtem nashromážděných dat. Badatelé tak byli nuceni trávit dlouhé hodiny numerickými výpočty. V tuto dobu se do historie zapsal i John Napier. Díky svým znalostem v oblasti trigonometrie navázal na předchozí studie a pokusil se matematikům ulehčit jejich výpočty na základě všeobecně známých výrazů:

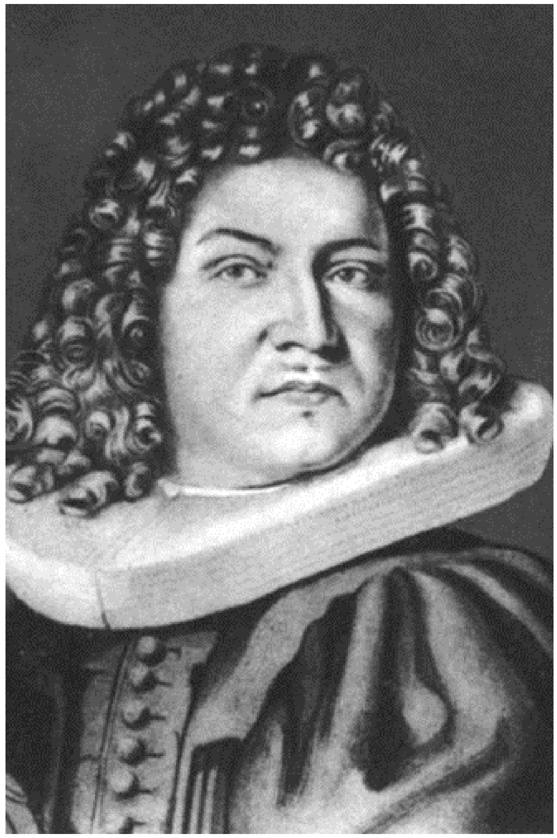
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big],$$

podobně i pro $\cos A\cdot\cos B, \sin A\cdot\cos B$, které známe jako *Prosthaphaeretic rules*, přeloženo jako „Sčítání a odčítání“. Součin dvou trigonometrických výrazů, jako je $\sin A\cdot\sin B$ může být vypočítán na základě součtu a rozdílu $\cos(A-B)$ a $\cos(A+B)$. Napier tak přišel s myšlenkou sestrojení tabulek, které přiřadí ke zvolenému základu příslušného mocnitele. Dále tedy bude jednodušší sečíst mocniny o stejném základu, než je násobit. Základní myšlenkou je tedy vztah:

$$a^n = \underbrace{a\times a\times\cdots\times a.}_{\text{n krát}}$$

Napierův výzkum trval necelých dvacet let, poté v roce 1614 publikoval dílo *Mirifici logaritmorum canonis descriptio*, ve kterém popsal pravidla pro konstrukci s logaritmy. Posmrtně, roku 1619, byla zveřejněna jeho práce *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, ve které je vysvětleno, jak s logaritmy počítat. Nejsou to však logaritmy, které používáme. Ty do dnešní podoby upravil L. P. Euler. Ve své práci se však Napier nepatrně přiblížil k objevu čísla e jakožto základu pro přirozené logaritmy. [1]

Na Napierovu práci navázalo mnoho významných matematiků jako byl například angličan Henry Briggs, profesor geometrie na Gresham College a později i na Oxford University. Briggs byl natolik ohromen Napierovou prací, že se s ním rozhodnul setkat a prodiskutovat určitá vylepšení Napierova logaritmu. Napier s ním v



Obrázek 1.2: Jacob Bernoulli.

mnoha ohledech souhlasil, avšak setrval ve své činnosti a dokončil svou dlouholetou práci sám. Briggs tedy v roce 1624 publikoval dílo *Arithmetica Logarithmica*, ve kterém zdokonalil logaritmické tabulky pomocí definování dekadických logaritmů.

1.1.2. Jacob Bernoulli

Žádnému z dosud zmíněných matematiků však nebyla připsána zásluha za objev čísla e. Tento titul byl udělen švýcarskému matematikovi a fyzikovi Jacobu Bernoullimu. I přes výhrady svého otce studoval matematiku a odstartoval tak éru vědců rodu Bernoulli. Se svým bratrem Johannem, který byl také významným vědcem, vedl často matematické spory. Dále jsme také mohli slyšet o zakladateli hydrodynamiky Danielu Bernoullim, synu Johanna Bernoulliho.

Jacob Bernoulli zásadně přispěl do historie matematiky. Nejen že jako první

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2,00 Kč
12	2,61 Kč
360	2,71 Kč

Tabulka 1.1: Zkracování délky úrokovacích období.

použil slovo *integrál*, ale také se zajímal o mocninné řady a dokazování pomocí matematické indukce. Velmi významně také přispěl do teorie pravděpodobnosti, ve které představil kombinace, permutace a variace. Pracoval také se zákonitostmi křivek (problém visícího řetězu „řetězovka“), podle kterých nastínil chování paraboly. Ve svém díle *Ars conjectandi*, publikovaném posmrtně v roce 1713, představil první verzi *Zákona velkých čísel*.

Co je číslo e

Nyní se zaměříme na Bernoulliho souvislost s číslem e. Byl to právě on, kdo si v roce 1683 položil velmi jednoduchou otázku ohledně složeného úročení. Snažil se totiž najít limitu výrazu

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

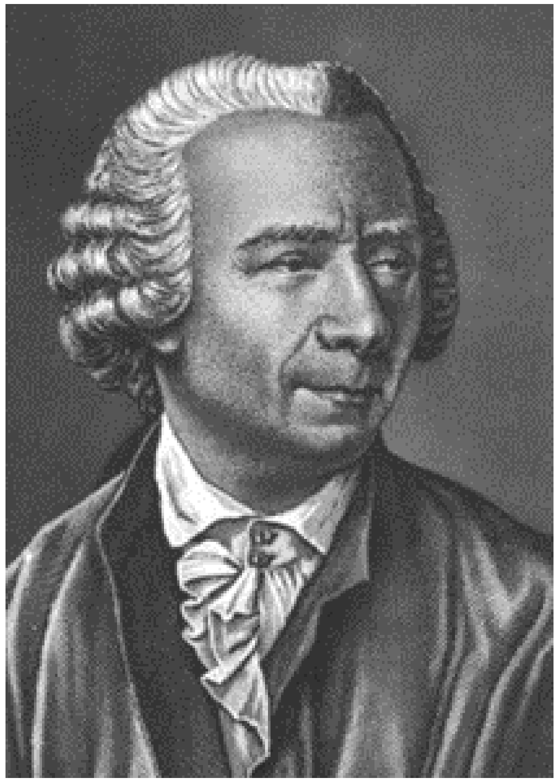
která odpovídá situaci složeného polhůtního úročení 1 Kč s připisováním úroků n-krát ročně s nominální roční úrokovou mírou 100%. Tedy pro n = 1 (úrok 1x ročně)

$$1 \text{ Kč} \cdot \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 1 \text{ Kč} \cdot 2 = 2 \text{ Kč},$$

nebo pro n = 12 (měsíční úročení a připisování úroků)

$$1 \text{ Kč} \cdot \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 1 \text{ Kč} \cdot \left(1+\frac{1}{12}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{12}\right)^{11} = 2{,}61 \text{ Kč},$$

kde 1 Kč $\cdot \left(1+\frac{1}{12}\right)$ je částka na konci prvního měsíce. Pokud dále zkracujeme délku úrokovacích období a tím zvyšujeme jejich počet (viz tabulku 1.1), má



Obrázek 1.3: Leonhard Paul Euler.

smysl uvažovat limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Jak uvidíme v následujícím textu, tato limita existuje a historicky byla označena jako Eulerovo číslo.

Bernoulli pomocí binomické věty dokázal, že hledaný výraz bude mít limitu v intervalu $[2;3]$. Učinil tak první odhad čísla e. Zároveň tak poprvé v historii vyjádřil číslo jako limitu posloupnosti.

1.1.3. Leonhard Paul Euler

Leonhard Paul Euler je považován za nejvýznamnějšího matematika 18. století. Narodil se ve švýcarské Basileji roku 1707 a již od svého dětství byl velmi nadaným studentem. Kromě studia teologie a filozofie studoval i matematiku a fyziku. Zanedlouho si jeho potenciálu všimnul Johannes Bernoulli, bratr již zmíněného Jacoba Bernoulliho, ten se stal Eulerovým učitelem. Leonhard P. Euler několikrát vyhrál první místo soutěže francouzské akademie věd.

Zápal pro vědu ho přivedl do ruského Petrohradu, kde mu bylo nabídnuto místo na matematické katedře. Tamější univerzita byla štědře dotována vládou a vytvářela pro vědce velmi dobré zázemí. Téměř polovina Eulerových prací byla sepsána právě tam. Zanedlouho bylo Eulerovi nabídnuto místo v čele matematické katedry. Kvůli politické situaci byl však Euler nucen opustit Petrohrad a usadit se v Berlíně, kde se věnoval diferenciálnímu počtu.

Známým mezníkem v Eulerově životě bylo také doučování princezny z Anhalt-Dessau, neteře Fridricha II. Velikého, kterou naučil mnoho nejen z filozofie a náboženství, ale i z matematiky. Po téměř třiceti letech se vrátil do Ruska, kde roku 1783 zemřel.

L. P. Euler napsal za svůj život téměř 900 prací. Kromě velkého vlivu v matematice, ve které se věnoval téměř všem oblastem od geometrie až po numeriku, se také angažoval v mechanice, optice a astronomii. Je známo, že v oblastech matematické analýzy vděčíme mnoha objevům právě L. P. Eulerovi, neboť zavedl mnoho pojmů, které používáme dodnes, např. pojem dvojrozměrný integrál, konvergence nekonečné řady, imaginární číslo, a dokonce v roce 1735 označení funkce f(x). Zavedl také mnoho matematických symbolů, například symbol $\sum$ pro součet, písmeno i pro $\sqrt{-1}$ a konečně i písmeno e jako základ přirozeného logaritmu.

Obecně je považován za zakladatele teorie grafů; v roce 1736 vyvrátil řešitelnost úlohy o sedmi mostech z pruského Königsbergu (tedy, že je možné projít přes každý z mostů právě jednou, a přitom se vrátit na výchozí místo). Při této příležitosti definoval pojem Eulerovský graf.

Věnoval se také problematice variace konstant pro řešení diferenciálních rovnic. V roce 1768 publikoval Eulerovu metodu numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Podle Eulera jsou pojmenované dvě matematické konstanty; Eulerovo číslo (e) a Eulerova konstanta (nebo též Eulerova–Mascheroniho konstanta).

L. P. Euler dokázal, že Bernoulliho vzorec pro úročení vede ke stejnému číslu, jako následující nekonečná řada:

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots ,$$

tedy k číslu, které následovně označil písmenem e jako základ přirozeného logaritmu. Podařilo se mu jej vyčíslit na několik desetinných míst, dokonce byl i blízko důkazu, že je e iracionální (nelze jej vyjádřit jako podíl dvou celých čísel). Exponenciální funkci e^x vyjádřil pomocí mocninné řady

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Také dokázal vztah (pomocí imaginární jednotky) mezi goniometrickými funkcemi a komplexní exponenciální fukncí e^{xi} :

$$\mathrm{e}^{x\mathrm{i}} = \cos x + \mathrm{i} \sin x.$$

Jako první také odvodil řetězový zlomek pro číslo e:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}}$$

čímž nevědomky dokázal iracionalitu čísla e.

Pro více informací můžeme nahlédnout do knihy [1] od *E. Maora*, ve které autor velmi dopodrobna popisuje vývoj této konstanty. Nalezneme v ní i další jména, na která v této práci nezbylo místo.

1.2. Definice čísla e

Číslo e můžeme definovat jako limitu posloupnosti (jak jsme si již uvedli výše), nebo jako součet číselné řady:

1. $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,

2. $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Nyní ověřme opodstatněnost obou tvrzení, tedy že ona limita a součet řady existují a navzájem se rovnají.

1.2.1. Číslo e jako limita posloupnosti

Dokážeme, že limita

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$$

existuje. Prvky zkoumané posloupnosti si označíme:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Dále definujeme pomocnou posloupnost (b_n):

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

V následujících krocích ukážeme, že posloupnost (a_n) je rostoucí a shora omezená (pomocí posloupnosti (b_n)), a tudíž konvergentní.

Krok 1: Posloupnost (a_n) je rostoucí.

Dokážeme, že (a_n) je rostoucí posloupnost, tedy že $a_{n+1} > a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jelikož má posloupnost pouze kladné členy, můžeme to také zapsat nerovnostmi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Podíl $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ nejdříve upravíme (pro kažné přirozené n):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

Výsledný výraz, respektive nejprve jeho část $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$, zdola odhadneme pomocí Bernoulliho nerovnosti

$$(1+x)^n > 1+nx, \quad n \in N, \quad x \in (-1,\infty),$$

do které za x dosadíme výraz x = $-\dfrac{1}{(n+1)^2}$. Je zřejmé, že -1 $< -\dfrac{1}{(n+1)^2} < 0$, a tak je splněn předpoklad, že takto zvolené $x \in (-1,\infty)$. Dostáváme nerovnost

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1+n\frac{-1}{(n+1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vynásobíme-li ji kladným výrazem $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$, dostaneme na levé straně odhadovaný tvar podílu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}=\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) > \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Po úpravě pravé strany dostáváme vztah

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1+\frac{1}{(n+1)^3}, \qquad n \in N,$$

který přímo vede k dokazovaným nerovnostem $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, n \in \mathbb{N}$, posloupnost (a_n) je tedy **rostoucí**.

Máme tedy $n \in \mathbb{N}$, tak platí:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots .$$

Podobně lze dokázat, že je posloupnost (b_n) klesající, tedy platí:

$$b_1 > b_2 > \cdots > b_n > \cdots .$$

Poznámka 1.1. Vztah, který nazýváme Bernoulliho nerovnost, poprvé zveřejnil Jacob Bernoulli v jednom ze svých pojednání při svém pobytu v Basileji roku 1689.

Krok 2: Posloupnost (a_n) je omezená shora.

S pomocí (b_n) dokážeme, že (a_n) je omezená shora.

Nejprve si připomeňme, že každá rostoucí posloupnost je omezená zdola svým prvním členem. Posloupnost (a_n) je tedy zdola omezená:

$$2 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots .$$

Jelikož je každá klesající posloupnost omezená shora opět svým prvním členem, je posloupnost (b_n) je shora omezená:

$$b_1 = 4 > b_2 > \cdots > b_n > \cdots .$$

Porovnáme-li n-té členy obou posloupností, dostaneme

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} > a_n.$$

Společně s předchozími nerovnostmi dostáváme

$$2 \leq a_n < b_n \leq 4, \qquad n \in N.$$

Obě posloupnosti jsou tedy omezené.

Jestliže jsou obě posloupnosti monotónní a omezené, musejí konvergovat. Nyní dokážeme, že mají stejnou limitu.

Z definice $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, potom

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left[\mathrm{e}\cdot 1\right] = \mathrm{e}.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu e, ke které se a_n blíží zdola a b_n shora.

Pro každé $n \in N$ je interval (a_n, b_n),

$$(1+\frac{1}{n})^n < \mathrm{e} < (1+\frac{1}{n})^{n+1},$$

intervalovým odhadem čísla e. Čím vyšší n, tím přesnější odhad. Například pro $n = 5$ dostaneme

$$2{,}48832 < \mathrm{e} < 2{,}985984.$$

Pro $n = 10$ potom

$$2{,}5937424601 < \mathrm{e} < 2{,}85311670611.$$

Poznámka 1.2. Vidíme, že se odhad zlepšil, ale stále není příliš přesný ($\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$). Ukazuje se, že rychlejší konvergenci vykazuje odhad čísla e pomocí částečného součtu číselné řady. Tomu se budeme věnovat v následujícím textu.

1.2.2. Číslo e jako součet řady

Dokážeme, že číslo e je rovno součtu řady

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} \cdots ,$$

tedy že tato řada konverguje a její součet $\mathrm{s} = \lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}$, kde

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Použijeme srovnávací kritérium, kde k naší řadě $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ najdeme konvergentní majoranttní řadu:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots \leq$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ je tedy konvergentní.

Rovnost $\lim_{n\to\infty} s_n = e$ dokážeme ve dvou krocích

1. $\lim_{n\to\infty} s_n \geq$ e,
2. $\lim_{n\to\infty} s_n \leq e$.

Krok 1

Pomocí binomické věty upravíme každý člen součtu podle vztahu

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!}.$$

Posloupnost a_n tedy bude

$$
\begin{aligned}
a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2}\frac{1}{2!} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n^n}\frac{1}{n!} \\
&= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \dots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!} \\
&\leq \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}}_{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}} = s_n
\end{aligned}
$$

Dokázali jsme, že platí $a_n \leq s_n$, $n \in \mathbb{N}$, a tedy i

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n,$$

odkud již

$$\mathrm{e} \leq \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Krok 2

Označme součet prvních k členů binomického rozvoje a_n pro k $\leq$ n symbolem $a_{n,k}$. Bude tedy platit

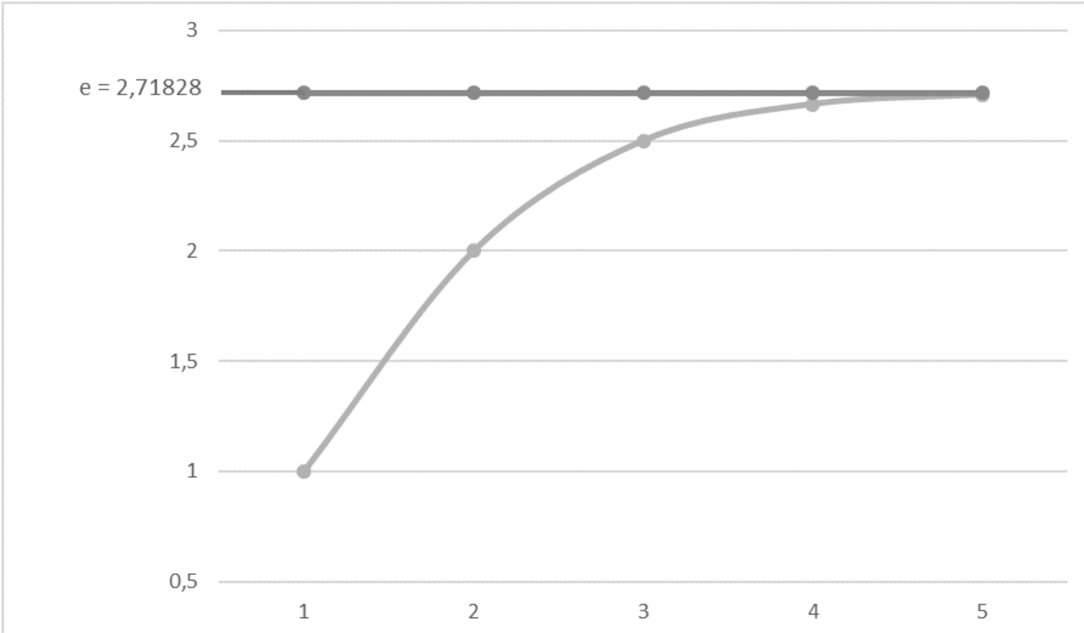
$$a_{n,k} = 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \dots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Jelikož jsou všechny členy a_n a $a_{n,k}$ kladné, platí vztah

$$a_{n,k} \leq a_n,\ n \in \mathbb{N},\ k \leq n.$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} = s_k.$$



Obrázek 1.4: Limita posloupnosti částečných součtů.

Tudíž pro všechna $k \in \mathrm{N}$ platí

$$s_k = \lim_{n\to\infty} a_{n,k} \leq \mathrm{e}.$$

Proto také

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq \mathrm{e}.$$

Tím jsme dokázali, že platí počáteční tvrzení, tedy

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

což znamená, že číslo e lze vyjádřit pomocí součtu řady

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots .$$

Tento fakt si můžeme dokreslit na obrázku 1.4, na kterém pozorujeme, že se posloupnost částečných součtů limitně blíží k hodnotě čísla e.

Podpořme si tento vztah výpočtem. Samozřejmě opět platí; čím vyšší n, tím přesnější odhad. Například pro n=5 dostaneme

$$\mathrm{e} \doteq 2{,}71666.$$

Pro n=10 potom

$$e \doteq 2{,}718281801.$$

Poznámka 1.3. Srovnáme-li odhady čísla e pomocí limity posloupnosti a pomocí číselné řady, zjistíme, že rychlejší konvergenci zajišťuje odhad čísla e pomocí částečného součtu číselné řady. Postup je však, oproti výpočtu limity posloupnosti, mnohem zdlouhavější, jelikož musíme přičítat stále další členy řady.

1.3. Iracionalita čísla e

V předchozím textu jsme si řekli, že číslo e je iracionální. Iracionální číslo je takové reálné číslo, které nelze napsat ve zlomku, jako podíl dvou celých čísel. Jeho desetinný rozvoj je nekonečný a neperiodický.

1.3.1. Důkaz pomocí řady

Již víme, že číslo e můžeme zapsat jako součet nekonečné řady

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots .$$

Posloupností částečných součtů označíme konečnou řadu

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = +\frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Iracionalitu čísla e dokážeme sporem.

Krok 1

Je zřejmé, že rozdíl řady $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ a n-tého částečného souštu s_n bude kladný. Potom pro každé $n \in$ N:

$$
\begin{aligned}
0 < \mathrm{e} - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right],
\end{aligned}
$$

kde v hranaté závorce je součet geometrické řady s parametry $a = 1, q = \frac{1}{n+1}$, a součtem $\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$.

Máme tedy odhad

$$
\mathrm{e} - s_n < \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n!n}.
$$

Z toho vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$
0 < \mathrm{e} - s_n < \frac{1}{n!n},
$$

$$
0 < n!(\mathrm{e} - s_n) < \frac{1}{n}.
$$

Krok 2

Předpokládejme, že číslo e je kladné racionální číslo, tedy že se dá vyjádřit jako podíl dvou celých čísel $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ pro nějaká $p, q \in \mathbb{N}$.

Vybereme-li z množiny přirozených čísel jakékoli $n > q$, bude platit $\frac{1}{n} < 1$. V takovém případě $n!(\mathrm{e} - s_n)$ **nebude celočíselné**, jelikož platí:

$$
0 < n!(\mathrm{e} - s_n) < \frac{1}{n} < 1.
$$

Dosadíme-li však do této nerovnice racionální číslo e, dostaneme:

$$0 < n!\,(\mathrm{e} - s_n) = n! \left(\frac{p}{q} - s_n\right) = n!\,\frac{p}{q} - n!\,s_n = \frac{n!}{q}\,p - n!\,s_n$$

$$= \frac{n!}{q}\,p - n! \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{n!}{q}\,p}_{\in\mathbb{N}} - \underbrace{\left[n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!}\right]}_{\in\mathbb{N}}.$$

Číslo $\frac{n!}{q}p$ je přirozené, jelikož je $n > q$. Hodnota závorky je také přirozené číslo, jelikož $n > 1$ a zároveň $n \in \mathbb{N}$.

Víme tedy, že výraz $n!(\mathrm{e} - s_n)$ **je celočíselný**. Tady však dochází ke sporu s tím, že je $n!(\mathrm{e} - s_n)$ neceločíselný. Číslo e tedy musí být iracionální.

1.3.2. Geometrický důkaz

Tento důkaz provedeme také sporem. Z definice:

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

Připomeňme si nerovnost

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

Jelikož $\frac{1}{n!n} \leq \frac{1}{n!}$, můžeme ji upravit na

$$0 < \mathrm{e} - s_n < \frac{1}{n!},$$

a dále na

$$s_n < \mathrm{e} < s_n + \frac{1}{n!},\ n \in \mathbb{N}.$$

Takto můžeme definovat posloupnost intervalů (intervalových odhadů čísla e):

$$I_k = \left[s_k; s_k + \frac{1}{k!}\right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Jelikož s_k můžeme vyjádřit jako $\frac{a}{k!}$, kde a je nějaké přirozené číslo, lze I_k zapsat jako:

$$\left[\frac{a}{k!}, \frac{a+1}{k!}\right].$$

Například pro k = 2 máme

$$I_2 = \left[s_2; s_2 + \frac{1}{2!}\right] = \left[1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!}; 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}\right] = \left[\frac{5}{2!}; \frac{6}{2!}\right],$$

tedy a = 5. Prvních pět intervalů vyjádříme pro lepší srovnání se stejným jmenovatelem 120:

$$I_1 = \left[\frac{2}{1!}, \frac{3}{1!}\right] = \left[\frac{240}{120}; \frac{360}{120}\right]$$

$$I_2 = \left[\frac{5}{2!}, \frac{6}{2!}\right] = \left[\frac{300}{120}; \frac{360}{120}\right]$$

$$I_3 = \left[\frac{16}{3!}, \frac{17}{3!}\right] = \left[\frac{320}{120}; \frac{340}{120}\right]$$

$$I_4 = \left[\frac{65}{4!}, \frac{66}{4!}\right] = \left[\frac{325}{120}; \frac{330}{120}\right]$$

$$I_5 = \left[\frac{326}{120}, \frac{327}{120}\right] = \left[2{,}71\overline{6}; 2{,}725\right].$$

Pátý intervalový odhad (e $\in I_5$) nám tedy říká, že

$$2{,}716\overline{6} < \mathrm{e} < 2{,}7833.$$

Dále se zdá, že $I_{k+1} \subset I_k,\ k \in \mathbb{N}$. Dokážeme to. Přirozeně

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{(k+1)!} > s_k.$$

Pro důkaz

$$I_{k+1} = \left[s_{k+1}; s_{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\right] \subset \left[s_k; s_k + \frac{1}{k!}\right] = I_k$$

ještě tedy potřebujeme porovnat pravé koncové body intervalů

$$s_{k+1} + \frac{1}{(k+1)!} \leq s_k + \frac{1}{k!},$$

$$s_k + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!} \leq s_k + \frac{1}{k!},$$

$$\frac{2}{(k+1)!} \leq \frac{1}{k!},$$

$$\frac{2k!}{(k+1)!} \leq 1,$$

$$\frac{2}{k+1} \leq 1.$$

Poslední nerovnost je splněna pro všechna $k \in \mathbb{N}$, a tak skutečně

$$I_{k+1} \subset I_k,\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Současně se délky intervalů I_k limitně blíží k 0 (pro k $\to \infty$). Mají takto jednobodový průnik, kterým je číslo e:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{\mathrm{e}\}.$$

Číslo e se nachází v každém z intervalů $I_k,\ k \in \mathbb{N}$, a tak při jeho vyjádření $e = \dfrac{b}{k!}$ je $b\ \in (a, a+1)$, a tak $b \notin \mathbb{N}$. Toto platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$, a tak e nelze vyjádřit jako

$$\frac{\text{přirozené číslo}}{k!},$$

pro žádné $k \in \mathbb{N}$. Pokud by $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$, tak

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q} = \frac{p(q-1)!}{q(q-1)!} = \frac{p(q-1)!}{q!}, \quad \text{pro nějaká } p, q \in \mathbb{N}.$$

Obrázek 1.5: Monument Gateway Arch (St. Louis, Missouri).

Tady však vzniká spor, neboť čitatel zlomku $\frac{p(q-1)!}{q!} = \mathrm{e}$ je zde celočíselný. Číslo e tedy musí být iracionální.

1.4. Číslo e v reálném životě

Číslo e se využívá v rozmanitých oblastech, například ve vzorci pro řetězovku, což je tvar provazu či řetízku zavěšeného na obou koncích. Na obrázku 1.5 vidíme Monument Gateway Arch v americkém městě St. Louis, Missouri, který zde byl postaven jako symbol rozdělující Spojené státy americké na východní a západní část. [4] Tento oblouk má tvar obrácené řetězovky, který definuje vzorec

$$y = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{\frac{-x}{a}}\right).$$

Jak jsme si již uvedli, číslo e se také využívá pří výpočtech složeného úroku.

Kapitola 2

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce je jednou ze základních elementárních funkcí. Exponenciální funkce vyjadřuje tzv. zákon přirozeného růstu (odtud pojem exponenciální růst), který se využívá při modelování jevů z různých oblastí lidského zkoumání. Například v biologii se s exponenciálním růstem můžeme setkat při pozorování počtu nárůstu bakterií v optimálním prostředí. Exponenciální funkce využíváme v modelu ekonomického růstu, nebo v bankovnictví při spojitém úročení. Více informací se můžeme dozvědět ve skritpech [2] od P. Kouřilové a M. Pavlačkové.

Exponenciální funkce je každá funkce vyjádřená vztahem

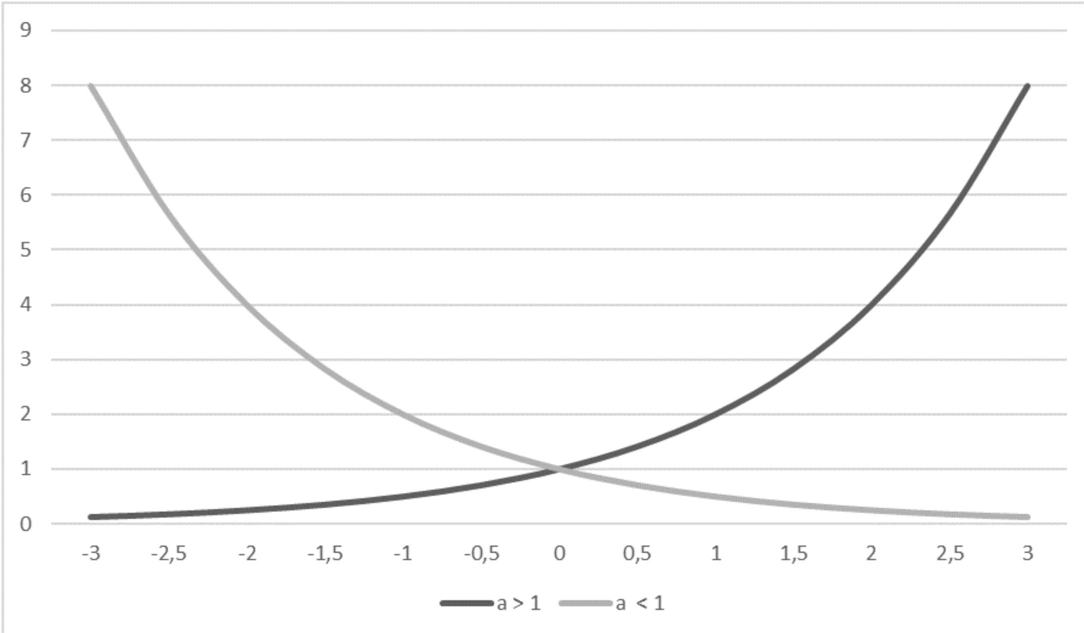
$$f(x) = a^x, x \in \mathbb{R},$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$. Jelikož se jedná o funkci, jejíž proměnná se nachází v exponentu mocniny, nazýváme tuto funkci exponenciální.

Definičním oborem exponenciální funkce je celá množina $\mathbb{R}$, oborem hodnot je množina $\mathbb{R}^+$. Funkce a^x je vždy monotónní. Jestliže je $a > 1$, potom je funkce rostoucí. Jestliže $a < 1$, potom je funkce klesající (viz také obrázek 2.1). Obě varianty však prochází bodem $[0; 1]$. Exponenciální funkce je (na celém svém definičním oboru) prostá, tudíž k ní existuje inverzí funkce, která se nazývá logaritmická.

Poznámka 2.1.

- Číslo a se nazývá základem exponenciální funkce a můžeme za něj dosadit jakékoli kladné reálné číslo, které se ovšem nerovná 1. Důvod je prostý, pokud bychom za $a = 1$, dostali bychom funkci $f(x) = 1$, což je



Obrázek 2.1: Graf exponenciální funkce.

konstantní funkce.

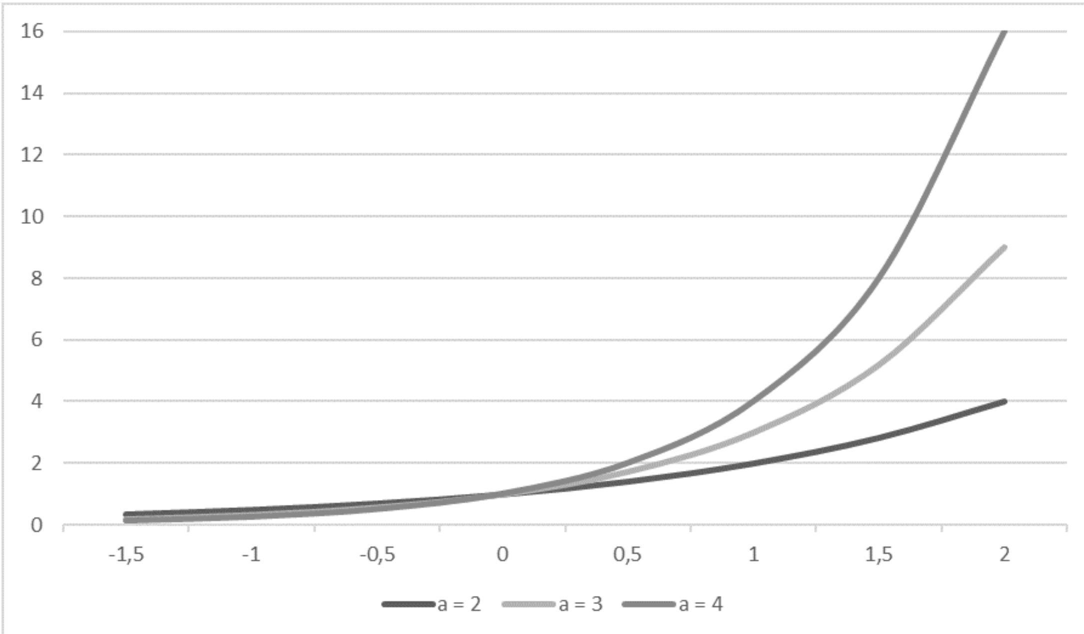
- Definice také říká, že a musí být kladné číslo. Tato skutečnost má opět jednoduché vysvětlení. Pokud bychom za x $=\frac{1}{2}$, dostali bychom funkci $f(x) = a^{\frac{1}{2}}$, což je totéž jako $f(x) = \sqrt{a}$. Záporné číslo však (v oboru reálných čísel) odmocnit nelze.

Víme, že základem exponenciální funkce může být jakékoli kladné číslo různé od 1. Pro hodnoty základu $a > 1$ je funkce rostoucí a čím je koeficient větší, tím funkce roste rychleji (viz také obrázek 2.2). Opačně platí i pro klesající exponenicální funkci, kde $a < 1$. Čím je koeficient menší, tím $f(x) = a^x$ klesá rychleji.

Poznámka 2.2. Můžeme se také setkat se speciálními exponenciálními funkcemi:

- Tzv. přirozená exponenciální funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$, jejíž základem je číslo e.

- Dekadická exponenciální funke $f(x) = 10^x$.



Obrázek 2.2: Nárůst exponenciální funkce vlivem zvyšování základu a.

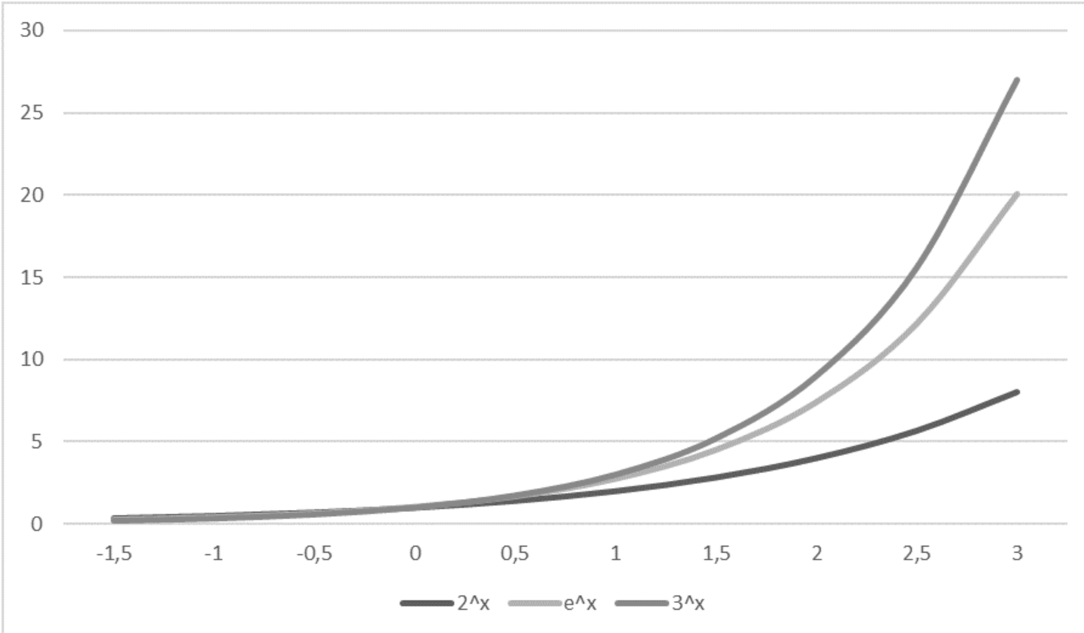
Vztahy mezi exponenciálními funkcemi o stejném základu

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$,
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$,
4. $a^x \cdot a^{-x} = 1$.

Poznámka 2.3. Exponenciální funkce se často využívá i ve statistice, a to při modelování exponenciálního trendu. Například se s takovým modelem můžeme setkat při uvedení nového produktu na trh.

2.0.1. Přirozená exponenciální funkce

Již jsme si řekli, exponenciální funkce, jejíž základ je roven číslu e, se nazývá přirozená exponenciální funkce. Víme, že přibližná hodnota čísla e je 2,71828, proto nás také nepřekvapí, že její grafické zobrazení leží mezi funkcemi 2^x a 3^x (viz obrázek 2.3).



Obrázek 2.3: Přirozená exponenciální funkce.

Maclaurinův rozvoj funkce

Z matematické analýzy známe Taylorův rozvoj jako speciální postup, kterým lze fukci nahradit nekonečnou mocninnou řadou. Tento postup lze uplatnit pouze tehdy, když má funkce v bodě x_0 derivace všech řádů. Jestliže $x_0 = 0$, mluvíme o Maclaurinově řadě ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

jejíž n-tý koeficient $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Pomocí Maclaurinova rozvoje lze f(x) = e^x zapsat jako

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Víme, že pro funkci e^x existují derivace všech řádů a jsou rovny e^x. Hodnoty všech derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou rovny 1. Pro n-tý člen bude tedy platit

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Dosadíme-li n-tý člen do Maclaurinovy řady, dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ověřme, že řada e^x konverguje pro všechna x $\in \mathbb{R}$, tedy že poloměr konvergence $r = \infty$.

1. Jak jsme si již řekli, střed mocninné řady $x_0 = 0$.

2. Abychom mohli určit poloměr konvergence, musíme nejříve vypočítat hodnotu λ, jelikož platí

$$\begin{aligned} &r = \tfrac{1}{\lambda}, \text{ pro } \lambda \in (0; \infty),\\ &r = 0 \quad \text{pro } \lambda = \infty,\\ &r = \infty \text{ pro } \lambda = 0.\end{aligned}$$

3. $\lambda = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0.$

4. Pro poloměr konvergence tedy platí r $= \infty$. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je (-∞, ∞). Řada tedy konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Derivace exponenciální fuknce

Jednou z nejpopulárnějších vlastností exponenciální funkce je skutečnost, že se její podoba derivací nemění, tedy

$$f(x) = \mathrm{e}^x = f'(x).$$

Tento vztah lze dokázat pomocí derivace mocninné řady

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x).$$

Exponenciální funkce není racionální

Další z vlastností exponenciální funkce je iracionalita, kterou dokážeme sporem. Předpokládejme, že je exponenciální funkce racionální funkcí, tedy že je definována jako podíl dvou polynomů A a B stupňů a a b, které lze zapsat:

$$\mathrm{e}^x = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

Vynásobením obou stran polynomen *B(x)* dostáváme:

$$\mathrm{e}^x B(x) = A(x).$$

Nyní zderivujeme:

$$(\mathrm{e}^x B(x))' = A'(x)$$

$$\mathrm{e}^x B'(x) + \mathrm{e}^x B(x) = A'(x),$$

$$\mathrm{e}^x B'(x) + A(x) = A'(x),$$

$$\underbrace{\frac{A(x)}{B(x)} B'(x) + A(x)}_{a} = \underbrace{A'(x)}_{a-1}.$$

Zde však dochází ke sporu, jelikož na levé straně dostáváme polynom stupně a, zatímco na pravé straně polynom stupně nejvýše $a - 1$. Funkce tedy nemůže být racionální.

Závěr

Tato bakalářská práce ukázala, jakými způsoby lze na číslo e nahlížet. Za pomoci použité literatury jsem přiblížila jeho roli v historii matematiky, zaměřila jsem se především na Johna Napiera, Jacoba Bernoulliho a Leonharda P. Eulera. Vyjádřila jsem také číslo e pomocí limity a součtu řady. Ukázala jsem několik způsobů, kterými lze ukázat, že je číslo e iracionální.

V následující kapitole jsem popsala exponenciální funkci, kterou se většina učebních materiálů zabývá pouze okrajově. Zaměřila jsem se na její vlastnosti a podobu.

Doufám, že moje bakalářská práce přiblíží čtenářovi problematiku exponenciálních funkcí a ujistí ho, že Eulerova konstanta zaujímá velmi důležitou roli nejen v oblastech ekonomie.

Literatura

[1] Maor, E.: *e: The story of a number.* Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1994.

[2] Kouřilová, P., Pavlačková, M.: *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii.* VUP Olomouc, Olomouc 2013.

[3] Moll, V. H.: *Numbers and Functions, From a classical-experimental mathematician's point of view.* AMS, Providence, RI, 2012.

[4] Pickover, C. A.: *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky.* Praha: Argo, 2012.

[5] Laitochová, J.: *Matematická analýza 1: diferenciální počet.* Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 2007.

[6] Sondow, J.: *A Geometric Proof That e Is Irrational and a New Measure of Its Irrationality.* The American Mathematical Monthly; **113** (7), 2006, 637–641.

[7] Edwards, C. H. Jr.: *The Historical Development of the Calculus.* Springer–Verlag, New York, 1994.

[8] Říhová, H: *Elementární funkce.* [online] 2006. [cit. 2019-04-29] dostupné z: http://dagles.klenot.cz/rihova/elfunkce.pdf

[9] Finance v praxi–Matematika. [online] 2017–2019 [cit. 2019-04-29] dostupné z: http://www.financevpraxi.cz/matematika-exponencialni-funkce

[10] Milefoot.com–Mathematics [online][cit. 2019-04-29] dostupné z: http://www.milefoot.com/math/calculus/limits/LimitDefinitionOfE10.htm

[11] Složilová, E.: *Mocninné řady - sbírka příkladů.* Olomouc, 2013.

[12] E-learningový portál Moodle [online]. [cit. 2019-04-29] dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/course/view.php?id=341