JIHOČESKÁ UNIVERZTA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Studijní obor:Finanční matematika

Pravděpodobnost na internetu

Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Tomáš Mrkvička, Ph.D. **Autor:Mgr.Pohan Stanislav**

2006

Poděkování

Děkuji vedoucímu bakalářské práce RNDr. Tomášovi Mrkvičkovi, Ph.D. za odbornou pomoc a cenné rady při vedení bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně, a že jsem veškerou použitou literaturu uvedl v Seznamu použité literatury

OBSAH

Úvod

Mnoho činností, procesů či dějů se kterými se setkáváme v každodenní praxi probíhá deterministicky – tzn. určitý soubor podmínek vede k jednoznačnému výsledku. Jako příklad mohou posloužit zákony klasické fyziky nebo třeba způsob výpočtu příspěvku na zdravotní pojištění.

Naproti tomu je často nemožné vzít v úvahu nebo ovlivnit všechny podmínky do všech detailů. Možných výsledků určitého děje je pak více a nelze s určitostí předpovědět, který z nich nastane. Souhrn ne zcela zjistitelných či vůbec nezjistitelných okolností zasahujících do děje zpravidla nazýváme náhodou. O dějích, jejichž výsledky jsou náhodou ovlivněny, proto mluvíme jako o náhodných pokusech. Výsledky náhodných pokusů jsou náhodné jevy.

Teorie pravděpodobnosti zkoumá zákonitosti, jimiž se řídí tzv. hromadné náhodné jevy, které jsou výsledky opakovaného provádění téhož náhodného pokusu. Zprvu byly středem pozornosti především náhodné pokusy spojené s hazardními hrami (hody kostkou, rozdávání karet). Náhodnými pokusy jsou však i opakovaná měření v rámci pozorování a experimentů, sériová výroba stejných výrobků, provoz těchto výrobků, různé ekonomické a sociologické děje…

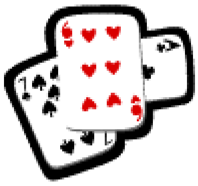
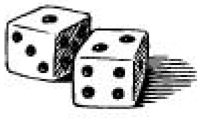
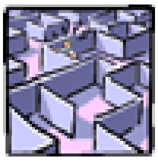
Ve své bakalářské práci jsem se zaměřil na vytvoření pomůcky pro studenty středních škol v oboru pravděpodobnost pomocí internetu. Internet jsem zvolil pro motivaci studentů a získání zajímavých příkladů.

Práci jsem rozdělil do tří kapitol. V první kapitole se budu zabývat zavedením pojmů v pravděpodobnosti. Další kapitola se bude soustředit na výklad pomocí řešených příkladů. Poslední kapitola bude sbírka příkladů k procvičení.

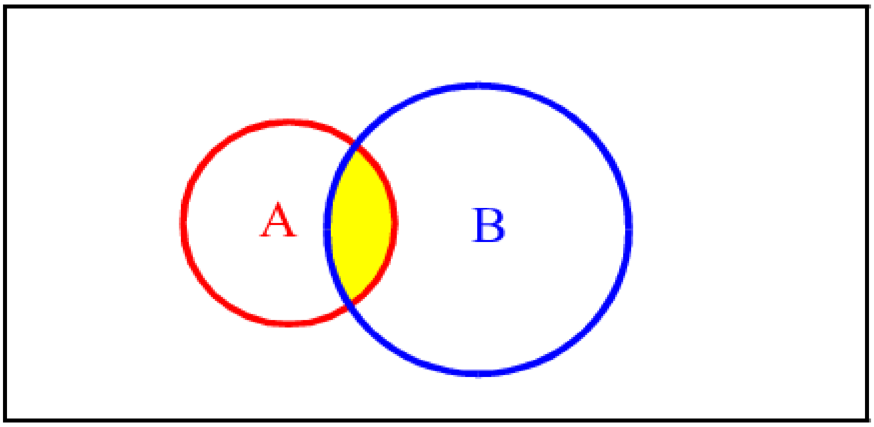
Cílem této práce je pomocí řešených příkladů vysvětlit teorii pravděpodobnosti, seznámit studenty se zákonitostmi a postupy při počítání.

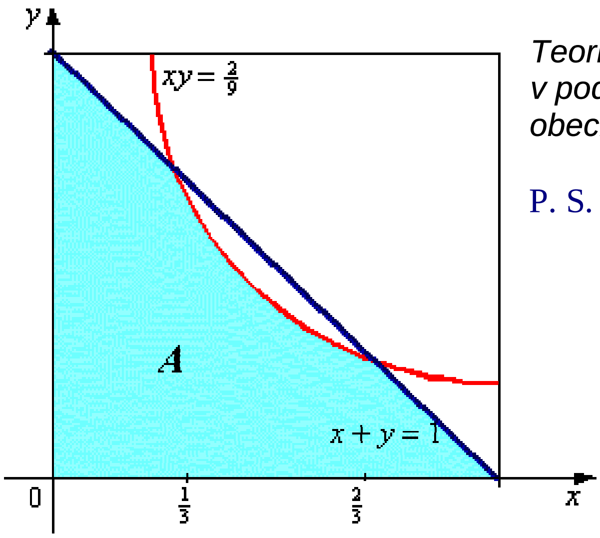
Dalším cílem je využití této práce při výuce matematiky pro učitele k vytváření příprav na hodinu.

V závěru práce uvádím seznam internetových stránek, který může posloužit čtenáři při dalším studiu tohoto tématu.

Pravděpodobnost na internetu





Teorie pravděpodobnosti není v podstatě nic jiného než vyjádření obecného povědomí počítáním.

P. S. de Laplace

1. Náhodný jev

Tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze jednoznačně (po uskutečnění pokusu) rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé, budeme nazývat ***náhodným jevem***. Jako příklad náhodného jevu můžeme uvést *(počet telefonních impulsů na ústřednu za jednu hodinu bude roven 60, při kontrolním výlovu z rybníka uvízne v síti alespoň 50 kusů ryb, při příchodu na zastávku bude cestující čekat na tramvaj déle než 10 minut atd.)*

Výsledek náhodného pokusu nelze s jistotou předpovědět. Některé výsledky však nastávají častěji, některé méně často, některé velmi zřídka. Při velkých sériích opakování však i tyto náhodné pokusy (resp. jejich výsledky) vykazují určité zákonitosti a pravidelnosti.

Cílem teorie pravděpodobnosti je právě studium těchto zákonitostí, jejich popsání a vytvoření pravidel pro určení měr početnosti výskytů těchto jevů. S těmito zákonitostmi se běžně čtenář setkává, aniž by si to mnohdy uvědomoval. Např. každý ví či intuitivně tuší, že při hodu mincí má stejnou šanci rub i líc a že tudíž při velkém počtu pokusů budou nejspíš padat stejně často. Z matrik či statistických ročenek lze snadno zjistit, že podíl chlapců narozených v jednotlivých letech vzhledem k celkovému počtu narozených dětí se pohybuje okolo 51,5%. Přestože v jednotlivých případech nelze pohlaví dítěte předpovědět, můžeme poměrně přesně odhadnout, kolik se narodí chlapců z celkového počtu 10 000 narozených dětí.

Náhodným jevem je tedy jev, který při opakovaném pokusu za stejných podmínek vykazuje stabilitu relativních četností. Jevy budeme značit velkými písmeny ze začátku abecedy (A,B,C,...).

1.1. Typy náhodných jevů

Jev jistý

Jevem jistým budeme nazývat jev, který nastane nutně při každé realizaci náhodného pokusu. Budeme jej značit **S**.

Jevem jistým je např. při házení kostkou jev *padne jedno z čísel 1,2,3,4,5,6* (samozřejmě pokud házíme běžnou hrací kostkou s obvyklým značením stran).

Sjednocením všech elementárních jevů dostaneme **jev jistý**.

Jev nemožný

Nemožným jevem budeme nazývat jev, který nemůže v daném pokusu nikdy nastat. Budeme jej značit ∅.

Nemožným jevem je např. při házení kostkou *padne číslo dělitelné devíti nebo padne číslo sedm.*

Základní vlastnosti pravděpodobnosti.

§ Pravděpodobnost P(A) náhodného jevu *A* nabývá hodnot mezi nulou a jedničkou $0 \leq P(A) \leq 1$

§ V případě, že *A* je ***jistý jev*** (jev *A* nastává vždycky), je pravděpodobnost $P(A) = 1$

§ V případě, že *A* je ***nemožný jev*** (jev *A* nikdy nenastane), je pravděpodobnost . $P(A) = 0$

Elementární jev a složený jev

Jev A budeme nazývat ***elementární jev***, jestliže neexistují jevy E a F různé od A takové, že A = E ∪ F, tj. jestliže jev A nelze vyjádřit jako sjednocení dvou jiných jevů různých od A (sjednocení dvou jevů bude ještě dále vysvětleno). Elementární jev je tedy "nejjednodušší" výsledek náhodného pokusu, který už nelze dále rozložit.

Elementárním jevem je při házení kostkou jev *padne číslo 3*. Naproti tomu jev *padne sudé číslo* je tzv. *jevem složeným*. Tento jev se totiž skládá z elementárních jevů *padne číslo 2, padne číslo 4* a *padne číslo 6*.

Prostor elementárních jevů

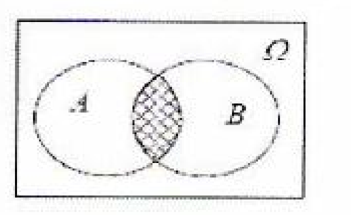
Prostorem elementárních jevů budeme rozumět množinu všech elementárních jevů , které mohou nastat jako výsledek daného náhodného pokusu. Libovolný náhodný jev je pak podmnožinou prostoru elementárních jevů. Prostor elementárních jevů budeme značit písmenem **U**.

1.2. Jevy a vzájemné vztahy:

Předpokládejme že provádíme náhodný pokus, který můžeme libovolněkrát opakovat. Výsledkem každého opakování bude některý prvek z množiny **Ω** všech možných výsledků tohoto pokusu. Náhodné jevy (budeme je označovat velkými písmeny latinské abecedy) jsou podmnožinami množiny **Ω**. Jsou-li uvažované náhodné jevy výsledky téhož náhodného pokusu, existují mezi nimi tyto vztahy:

Průnik jevů

Dva jevy se částečně překrývají. Mají tedy nějaký neprázdný průnik. To znamená, že některé výsledky jsou společné pro oba jevy. Část, ve které se dva jevy překrývají, se nazývá ***průnik jevů*** **A ∩ B** (čteme A průnik B nebo A a B - nastává totiž jak jev A tak i jev B současně).

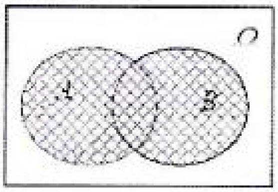


Zůstaneme u házení kostkou: jev A nechť značí padne číslo 2 nebo 3 nebo 4, a jev B padne sudé číslo. Je zřejmé, že oba jevy mají dva výsledky společné - padne číslo 2 nebo 4.

Stejně jako v předchozím případě ať jev C značí počet podniků, které vykáží v letošním roce zisk menší než 100 000 Kč, jev D je počet podniků, které vykáží zisk větší než 50 000 a menší než 200 000 Kč. Je vidět, že podniky se ziskem v rozmezí 50000 Kč -100000 Kč "patří do jevu C i D".

Sjednocení jevů

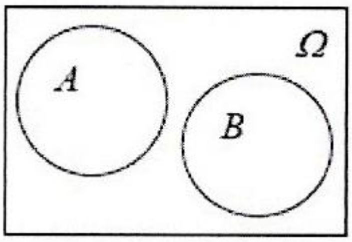
O *sjednocení jevů* A a B hovoříme tehdy, jestliže nastává jev A nebo jev B. Slůvko "nebo" znamená, že může nastat pouze jeden z těchto jevů, ale mohou nastat i oba jevy zároveň. Jinými slovy, nastane alespoň jeden z těchto jevů. Sjednocení jevů zapisujeme **A ∪ B.**



Sjednocením jevů A a B může být následující příklad: jev A - zaměstnanci v lesnictví, jejichž plat je menší než 3000 Kč, jev B - zaměstnanci v lesnictví, jejichž plat je větší než 2750 Kč. Sjednocením těchto dvou jevů je vlastně jev jistý (všichni zaměstnanci v lesnictví).

Disjunktní jevy

Dva jevy nemají spolu žádný možný společný výsledek. Takovéto jevy budeme nazývat ***jevy disjunktní*** **(někdy též *neslučitelné*)**. Disjunkci jevů A a B budeme zapisovat **A** Ç **B =** Æ .



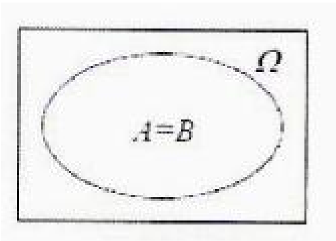
Např. při házení kostkou definujme jev A - padne sudé číslo, a jev B - padne liché číslo. Tyto jevy opravdu nemají žádný možný společný výsledek. Jestliže nastane jev A, nemůže zároveň nastat i jev B a naopak.

Další možný příklad: jev C - náhodně vybraný student VŠE je mladší než devatenáct let, jev D - náhodně vybraný student VŠE je starší než devatenáct let nebo je mu přesně devatenáct. Je opět zřejmé, že tyto dva jevy nemohou nastat současně.

Předpokládejme např., že zaměstnanci VŠE berou plat v rozmezí 2000 - 10000 Kč měsíčně. Dále definujme jev A - zaměstnanci beroucí mzdu 25000 Kč měsíčně. Takovýto jev je prázdný, neboť žádný zaměstnanec nebere mzdu 25000 Kč měsíčně.

Rovnost jevů

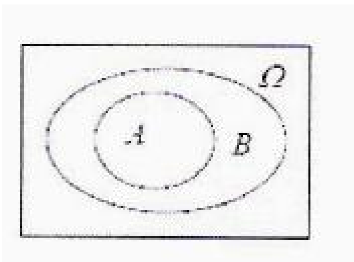
Dva jevy A a B jsou si rovny, jestliže A je částí B a zároveň B je částí A. Rovnost jevů zapisujeme **A = B**. Jinými slovy, nastoupení jevu A má za následek nastoupení jevu B a naopak nastoupení jevu B má za následek nastoupení jevu A.



Příkladem dvou totožných jevů mohou být následující jevy: A - při hodu kostkou padne sudé číslo, jev B - při hodu kostkou padne číslo dělitelné dvěma.

Jeden jev je zcela obsažen v druhém jevu

To znamená, že všechny možné výsledky jednoho jevu jsou i možnými výsledky jevu druhého. Říkáme potom, že ***jev A je podjevem jevu B*** (*jev A je částí jevu B*) a značíme **A** Ì **B.**

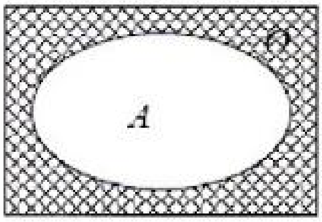


Příklad takových jevů může být následující: při hodu kostkou ať značí jev A - padne číslo 2, jev B - padne sudé číslo. Jev A je pak podjevem jevu B.

Dále např. ať jev C je počet podniků, které vykáží v letošním roce zisk menší než 100 000 Kč, jev D je počet podniků, které vykáží zisk menší než 200 000 Kč. Podniky "zařazené" do C jsou samozřejmě "obsaženy" i v D.

Opačný jev

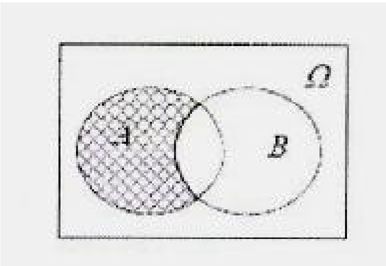
***Opačným jevem* (*doplňkovým*)** k jevu A budeme rozumět jev, který nastane, když nenastane jev A. Jev opačný budeme značit $\overline{A}$.



Opačným jevem k jevu A - náhodně vybraný student VŠE je studentem 1. ročníku, je jev A náhodně vybraný student VŠE není studentem 1. ročníku, což je totéž jako náhodně vybraný student VŠE je studentem 2. nebo vyššího ročníku.

Rozdíl jevů

***Rozdílem jevů* A a B** budeme chápat jev, který nastává právě tehdy, nastane-li jev A a nenastane-li jev B.



Zůstaneme-li u házení kostkou, nabízí se následující příklad: jev A - padne číslo větší než dvě, jev B - padne sudé číslo. Rozdíl jevů A a B je pak jev A - B - padne číslo tři nebo pět.

2. Pravidla pro počítání s pravděpodobnostmi

Klasická definice pravděpodobnosti předpokládá , že množina elementárních jevů Ω obsahuje konečný počet n prvků, a že nastoupení každého z nich je stejně možné. Je-li sledovaný náhodný jev sjednocením m elementárních jevů z množiny Ω je pravděpodobnost jevu A

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Klasická definice vlastně z matematického hlediska není definicí-nedává odpověď na otázku co je pravděpodobnost, dává pouze návod jak ji v některých případech vypočítat. To platí i o dvou následujících „definicích“

Geometrická definice pravděpodobnosti se používá v případech, kdy množina elementárních jevů Ω obsahuje nekonečný počet prvků, které vytvářejí omezenou a uzavřenou oblast. Mírou této oblasti je konečné kladné číslo $m(\Omega)$. Je-li náhodný jev A podmnožinou množiny Ω kde jsou všechny jevy stejně pravděpodobné a je-li jeho míra $m(A)$, je pravděpodobnost jevu A

$$\boxed{P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}}$$

Klasická i geometrická definice předpokládají vlastnosti prvků množiny elementárních jevů a snaží se určit pravděpodobnost jejich logickým rozborem, aniž by bylo nutné provádět náhodný pokus.

Odhad pravděpodobnosti pomocí statistického odhadu. Nám dává návod jak určit pravděpodobnost na základě výsledků mnohonásobného opakování náhodného pokusu: Opakujeme-li n-krát nezávisle určitý náhodný pokus (tzn. Výsledky jednotlivých opakování pokusu se navzájem neovlivňují) a nastane-li v těchto pokusech jev A m-krát, pak relativníé četnost nastoupení jevu A je rovna $\frac{m}{n}$. Jestliže při rostoucím počtu opakování pokusu kolísá relativní četnost $\frac{m}{n}$ ve stále užších mezích kolem určitého čísla, můžeme toto číslo považovat za pravděpodobnost jevu A.

V praxi většinou nesledujeme výskyt jednoho náhodného jevu, ale zajímáme se o více jevů současně a o jejich vzájemné interakce. Vzájemné vztahy mezi náhodnými jevy jsou vyjádřeny v následujících symbolech. Náhodný jev *C* = (*A*,*B*) nastává v případě, že nastanou oba jevy *A* a *B* současně. Náhodný jev D = (A nebo B) nastává v případě, že nastane alespoň jeden z jevů *A* a *B*, tj. buď jev *A*, nebo jev *B*, či oba jevy *A* a *B* současně (tj. jev *C*). Pravděpodobnost jevu D = (A nebo B) dovedeme vyjádřit pomocí pravděpodobností jevů *A*, *B* a *C* = (*A*,*B*) jako

$$\mathrm{P}(A \text{ nebo } B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A, B).$$

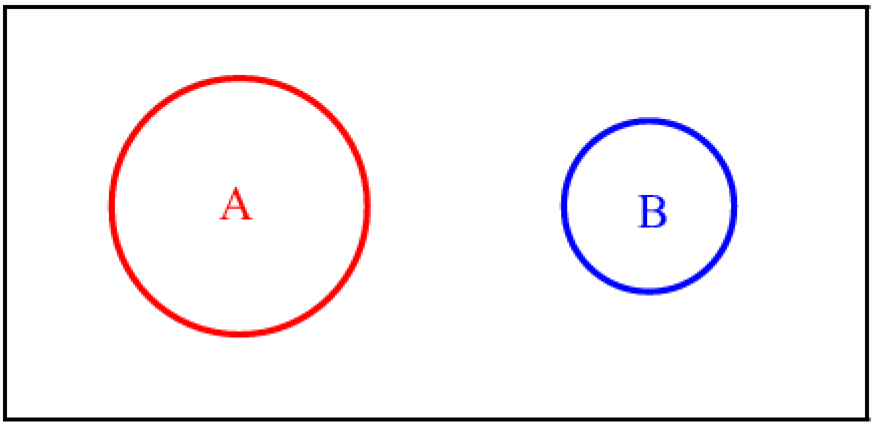
Příklad 2.1 V náhodně vybrané skupině 140 mužů ve věku 40-50 let ohrožených ateriální hypertenzí se vyskytl rizikový faktor "zvýšený cholesterol" (jev *A*) ve 37 případech a rizikový faktor "kouření" (jev *B*) v 96 případech. Ve 31 případech jsme zjistili současný výskyt obou rizikových faktorů. Odhadněte pomocí relativních četností pravděpodobnosti výskytu jevů *A*, *B*, *C* = (*A*,*B*) a D = (A nebo B).

Řešení: Pravděpodobnost výskytu faktoru "zvýšený cholesterol" je odhadnuta jako P(A) = 37/140 = 0,2643 a faktoru "kouření" jako P(B) = 98/140 = 0,7000. Odhad pravděpodobnosti současného výskytu obou faktorů je P(A,B) = 31/140 = 0,2214. Odhad pravděpodobnosti výskytu "zvýšeného cholesterolu" nebo "kouření" je P(A nebo B) = 0,2643 +0,7 – 0,2214 = 0,7429

3. Znázornění pomocí Vennových diagramů

Často nám pro objasnění vzájemných souvislostí mezi pravděpodobnostmi náhodných jevů pomáhá jejich grafické znázornění pomocí Vennových diagramů. Na obrázcích 3.1 ,3.2, 3.3 je znázorněno, že uvnitř obdélníku leží všechny možné výsledky náhodných pokusů či pozorování. Kruh s označením *A* reprezentuje jen takové výsledky, které vytvářejí jev *A*, podobně kruh s označením *B* reprezentuje výsledky, které vytvářejí jev *B*.

Obrázek 3.1: Neslučitelné jevy



Dva jevy *A* a *B* jsou *neslučitelné*, jestliže nemohou nastat oba současně (viz obrázek 3.1). Současný výskyt jevů *A* a *B* je vyjádřen jevem *C* = (*A*,*B*). Pro neslučitelné jevy *A* a *B* je jev *C* = (*A*,*B*) nemožný a jeho pravděpodobnost je rovna $P(A,B) = 0$ nule, tj. . Proto pravděpodobnost výskytu alespoň jednoho ze dvou neslučitelných jevů *A* a *B* se rovná součtu jejich pravděpodobností

$$\boxed{\mathrm{P}(A \text{ nebo } B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)}$$

Tento vztah se nazývá ***pravidlem o sčítání pravděpodobností.***

Speciálním případem dvou neslučitelných jevů jsou jevy opačné, např. "narození chlapce" a "narození dívky". Při určování pohlaví novorozence jev "narození chlapce" nastává vždy, když nenastane jev "narození dívky". Obecně rozumíme ***opačným (doplňkovým) jevem*** k jevu A takový jev (značíme ho $\neg A$), který nastává právě tehdy, když jev A nenastává. $P(A nebo \neg A) = 1$ Tedy a z pravidla o sčítání pravděpodobností dostaneme $P(\neg A) = 1 - P(A)$.

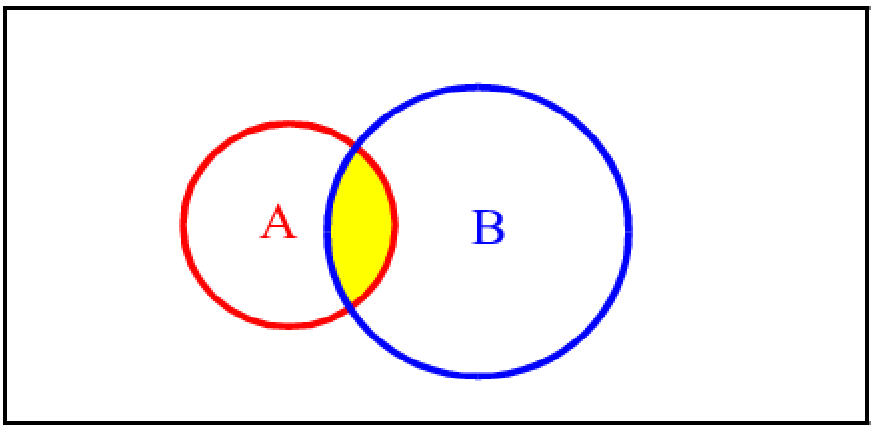
Příklad 3.2 Jestliže pravděpodobnost jevu A "narození chlapce" je $P(A) = 0{,}51$ rovna , spočtěte pravděpodobnost jevu $\neg A$ "narození dívky".

Řešení: Jev $\neg A$ "narození dívky" je opačným jevem k jevu A "narození chlapce". Proto $P(\neg A) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}51 = 0{,}49$.

Pravidlo o sčítání pravděpodobností lze snadno rozšířit na libovolný počet vzájemně neslučitelných jevů $A_1, A_2, \dots, A_k$. Označíme-li D výskyt aspoň jednoho $D = (A_1 \text{ nebo } A_2 \text{ nebo } \dots \text{ nebo } A_k)$ z těchto jevů, tj. , potom pravidlo o sčítání pravděpodobností má tvar

$$P(D) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i).$$

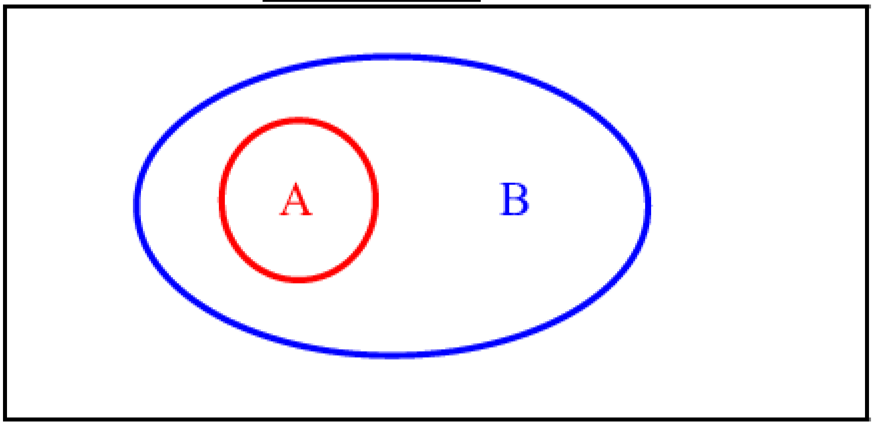
Obrázek 3.2: **Slučitelné jevy**



Na obrázku 3.2 jsou znázorněny dva jevy *A* a *B*, které se mohou vyskytovat současně. Tyto jevy tedy nejsou neslučitelné (tj. jsou ***slučitelné***), a proto pro výpočet P (A nebo B) nelze použít pravidlo o sčítání pravděpodobností, ale obecnější vzorec .

Obrázek 3.3: **Podmíněná pravděpodobnost jevu A k jevu B**

$$\boxed{P(A|B) = 1}$$



V některých situacích se zajímáme o výskyt jevu *A* jen v případě, že nastal určitý jev *B*, který má kladnou pravděpodobnost (tj. může opravdu nastat). Víme-li že nastal jev *B*, může se tím změnit i pravděpodobnost výskytu jevu *A*. Všechny jevy neslučitelné s *B* se stanou nemožnými a jevy deterministicky určené *B* se stanou jistými (viz obr. 3.3, kde jev *A* nastává vždy, když nastane jev *B*). Ostatní jevy se mohou vyskytnout s pravděpodobnostmi, které mohou být odlišné od původních. Pravděpodobnosti jevů, zjištěné za podmínky výskytu jevu *B*, se nazývají podmíněné pravděpodobnosti vzhledem k jevu *B*. ***Podmíněná pravděpodobnost*** jevu *A* vzhledem k jevu *B* je definována jako

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}}$$

Tudíž pravděpodobnost současného výskytu dvou jevů A a B lze vyjádřit jako $P(A,B) = P(A|B)P(B)$.

Příklad 3.3 Odhadněte podmíněnou pravděpodobnost výskytu faktoru "zvýšený cholesterol" (jev A) za podmínky výskytu faktoru "kouření" (jev B) z údajů uvedených v příkladu 3.1..

Řešení: Odhad podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B)$ spočteme, jestliže za pravděpodobnosti jevů A a B dosadíme jejich odhady pomocí relativních četností. Dostaneme

$$P(A|B) = \frac{0{,}2214}{0{,}7} = 0{,}3163$$

Stejný výsledek musíme dostat, jestliže z celkového počtu 98 případů, ve kterých nastal jev B, stanovíme počet případů, ve kterých zároveň nastal jev A. Těchto případů je 31. Odhad podmíněné pravděpodobnosti je tedy

$$P(A|B) = \frac{31}{98} = 0{,}3163$$

a vyjadřuje relativní četnost jevu A mezi případy, kdy nastal jev B.

Dva jevy A a B jsou ***nezávislé***, jestliže výskyt jednoho jevu neovlivňuje výskyt druhého jevu. Matematické vyjádření tohoto faktu zapíšeme pomocí podmíněné pravděpodobnosti jako $P(A|B) = P(A)$ nebo obdobně $P(B|A) = P(B)$. Vidíme tedy, že pro nezávislé jevy A, B platí

$$\boxed{P(A,B) = P(A)P(B)}$$

Tento vztah se nazývá ***pravidlem o násobení pravděpodobností.***

Příklad 3.4 Zjistěte, zda faktory *A* a *B* uvedené v příkladu 3.1 se vyskytují nezávisle, jestliže vypočtené relativní četnosti považujeme za skutečné pravděpodobnosti.

Řešení: V případě nezávislosti faktorů *A* a *B* platí $P(A|B) = P(A)$. Z dat příkladu 3.1dostáváme $P(A|B) = 0{,}3163$, což se liší od pravděpodobnosti P(A)=0,2643. Jevy *A* a *B* tedy nejsou nezávislé.

Příklad 3.5 Označme *A* jev, že "první novorozenec narozený v příštím kalendářním roce v ČR je chlapec" a *B* jev, že "druhý novorozenec narozený v příštím kalendářním roce v ČR je chlapec". Vyloučíme-li vícečetné porody, spočtěte pravděpodobnost jevu *C*, že "oba novorozenci jsou chlapci" za předpokladu, že pravděpodobnost narození chlapce je 0,51.

Řešení: Výskyt jevu *A* neovlivňuje výskyt jevu *B*, tudíž jevy *A* a *B* jsou nezávislé. Pravděpodobnost jevu *C* = (*A*,*B*), že oba novorozenci jsou chlapci, je tedy rovna

$$P(C) = P(A)P(B) = 0{,}51 \cdot 0{,}51 = 0{,}2601$$

Příklad 3.6 Pravděpodobnost jevu *A* "osoba má pravé oko modré" je rovna 0,3 a pravděpodobnost jevu *B* "osoba má levé oko modré" je také rovna 0,3. Jestliže pravděpodobnost, že "osoba má pravé oko modré" za podmínky, že nastal jev "osoba má levé oko modré" je rovna 1, spočtěte pravděpodobnost jevu *C* "osoba má obě oči modré".

Řešení: Jevy *A* a *B* nejsou nezávislé, neboť P(A)=0,3 a $P(A|B) = 1$. Proto pravděpodobnost jevu *C* = (*A*, *B*) spočteme jako

$$P(C) = P(A|B)P(B) = 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$$

Pravděpodobnost, že "osoba má obě oči modré" je tedy rovněž 0,3.

Pravidlo o násobení pravděpodobností lze rozšířit na libovolný počet nezávislých jevů $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Označíme-li *C* jev, který spočívá v současném výskytu těchto jevů, tj. $C = (A_1, A_2, ..., A_k)$, potom pravidlo o násobení pravděpodobností má tvar

$$P(C) = P(A_1, A_2, \dots, A_k) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k).$$

Příklad 3.7 Za předpokladu, že pravděpodobnost narození chlapce je 0,51, spočtěte, jaká je pravděpodobnost, že v sérii čtyř po sobě narozených dětí (vícečetné porody vyloučíme), bude právě jeden chlapec.

Řešení: Označte C jev, že mezi čtyřmi novorozenci je právě jeden chlapec. Konkrétní možnosti, které vytvářejí jev C, jsou dány jevy C_1, C_2, C_3 a $C_1 = (A, \neg A, \neg A, \neg A)$ C_4, kde je jev, kdy chlapec se narodí jako první, a $C_2 = (\neg A, A, \neg A, \neg A)$ $C_3 = (\neg A, \neg A, A, \neg A)$ $C_4 = (\neg A, \neg A, \neg A, A)$ podobně zbývající jevy vyjadřují, v jakém pořadí se chlapec narodí. Jevy C_1, C_2, C_3 a C_4 jsou vzájemně neslučitelné. Z pravidla o sčítání pravděpodobností dostaneme

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C_1 \text{ nebo } C_2 \text{ nebo } C_3 \text{ nebo } C_4) = \\ &= P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4). \end{aligned}$$

Pravděpodobnosti jevů C_1, C_2, C_3 a C_4 jsou všechny stejné a jsou vypočteny pomocí pravidla o násobení pravděpodobností. Například

$$P(C_1) = P(A)P(\neg A)P(\neg A)P(\neg A) = 0{,}51 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}49 = 0{,}06$$

Tedy P(C) = 4·0,06=0,24 je pravděpodobnost jevu, že mezi čtyřmi novorozenci bude právě jeden chlapec.

4. Bayesův vzorec

Předpokládejme, že náhodné jevy B_i, kde $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ jsou vzájemně neslučitelné a v každém pokusu nastává právě jeden z nich, takže musí platit

$$\mathrm{P}(B_1 \text{ nebo } B_2 \text{ nebo } \ldots \text{ nebo } B_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(B_i) = 1.$$

Známe-li podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B_i)$ jevu A za podmínky výskytu jevu B_i pro i =1,2,…k , potom pravděpodobnost jevu A lze vyjádřit vztahem

$$\boxed{\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A, B_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A|B_i)\mathrm{P}(B_i),}$$

nazývaným ***pravidlo o úplné pravděpodobnosti.***

Příklad 4.1 Předpokládejme, že pravděpodobnost "úrazu" (jev A) u "dítěte" (jev B_1) je $P(A|B_1) = 0{,}2$, pravděpodobnost úrazu u "osoby v reprodukčním věku" (jev B_2) je $P(A|B_2) = 0{,}1$ a pravděpodobnost úrazu u "osoby v postreprodukčním věku" (jev B_3) je $P(A|B_3) = 0{,}4$. Pravděpodobnosti, že osoba bude patřit do některé z těchto skupin, jsou $P(B_1) = 0{,}25$, $P(B_2) = 0{,}60$ a $P(B_3) = 0{,}15$. Spočtěte pravděpodobnost úrazu v dané populaci.

Řešení: Jevy B_1, B_2 a B_3 jsou vzájemně neslučitelné a v každém případě nastává právě jeden z nich. Ze znalosti podmíněných pravděpodobností výskytu úrazu v jednotlivých věkových kategoriích obyvatelstva a ze znalostí pravděpodobností těchto kategorií spočteme pravděpodobnost úrazu v populaci jako

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) =$$
$$0{,}20 \cdot 025 + 0{,}10 \cdot 0{,}60 + 0{,}40 \cdot 0{,}15 = 0{,}17$$

Pravděpodobnost úrazu v populaci je tedy l7 %.

Bayesův vzorec udává, jakým způsobem vypočítáme pravděpodobnosti $P(B_j|A)$ jevu B_j za podmínky, že nastal jev A, jestliže známe ***apriorní*** $P(B_i)$ pravděpodobnosti a ***podmíněné*** pravděpodobnosti $P(A|B_i)$ pro všechny jevy B_i, i = 1,2,…k. Bayesův vzorec má tvar

$$\boxed{P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}.}$$

Odvození Bayesova vzorce provedeme snadno pomocí vztahů

$$\begin{aligned} P(B_j, A) &= P(A, B_j) = P(A|B_j)P(B_j), \\ P(B_j|A) &= \frac{P(B_j, A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)}, \\ \text{kde } P(A) &= \sum_{i=1}^{k} P(A, B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i). \end{aligned}$$

Příklad 4.2 Pravděpodobnost, že "osoba je kuřák" (jev A) ve skupině "osob s chronickou bronchitidou" (jev B_1) je $P(A|B_1) = 0{,}75$ a pravděpodobnost, že "osoba je kuřák" ve skupině "osob bez chronické bronchitidy" (jev B_2) je $P(A|B_2) = 0{,}50$. Pravděpodobnost "výskytu osoby s chronickou bronchitidou" v populaci budiž $P(B_1) = 0{,}40$ a pravděpodobnost "výskytu osoby bez chronické bronchitidy" v populaci $P(B_2) = 0{,}60$. Spočtěte pravděpodobnost výskytu chronické bronchitidy u kuřáka.

Řešení: Pomocí Bayesova vzorce dostaneme, že pravděpodobnost výskytu chronické bronchitidy u kuřáka je

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}40}{0{,}75 \cdot 0{,}40 + 0{,}50 \cdot 0{,}60} = 0{,}50$$

Příklad 4.3 Student jde na zkoušku, ale neví, který ze tří možných předmětů (RPZ,PV,PG) se zkouší. Ví, že neumí 40% otázek z RPZ, 15% z PV a 20% z PG.

a. Jaká je pravděpodobnost, že bude vyhozen?
b. Jaká je pravděpodobnost, že bude vyhozen z RPZ?
c. Bude-li vyhozen, jaká je pravděpodobnost toho, že to bude z RPZ?

Řešení

Pravděpodobnosti zkoušky z jednotlivých předmětů jsou si rovny.

$$P(RPZ) = P(PG) = P(PV) = \frac{1}{3}.$$

Podmíněné pravděpodobnosti vyhození jsou

$$P(v|RPZ) = \frac{1}{4}, P(v|PV) = \frac{3}{20}, P(v|PG) = \frac{1}{5}.$$

a. Pravděpodobnost vyhození

$$P(v) = P(v|RPZ)P(RPZ) + P(v|PV)P(PV) + P(v|PG)P(PG) = \frac{1}{4}$$

b. Pravděpodobnost, že bude vyhozen z RPZ.

$$P(v \cap RPZ) = P(v|RPZ)P(RPZ) = \frac{2}{15}.$$

c. Z Bayesova vzorce plyne

$$P(RPZ|v) = \frac{P(v|RPZ)P(RPZ)}{P(v)} = \frac{\frac{2}{5}\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{15}.$$

5. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Klasická definice pravděpodobnosti

Příklad 1

S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet

a) šest

b) menší než 7

Řešení:

ad *a*) Šestka padne v následujících případech:

1.kostka	1	5	2	4	3
2.kostka	5	1	4	2	3

Tzn. 5 možností, *m* = 5

Počet všech možností: $n = \binom{6}{1} \cdot \binom{6}{1} = 36$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36} = 0{,}13\overline{8}$$

ad *b*)

Z předchozího vyplývá, že je 5 možností pro součet šest. Ostatní možnosti:

součet 5	**součet 4**	**součet 3**	**součet 2**
1.kostka 1 4 2 3 **2.kostka** 4 1 3 2	**1.kostka** 1 3 2 **2.kostka** 3 1 2	**1.kostka** 1 2 **2.kostka** 2 1	**1.kostka** 1 **2.kostka** 1

Takže *m* = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{15}{36} = 0{,}41\overline{6}$$

Příklad 2

Máme 230 výrobků mezi nimiž je 20 nekvalitních. Vybereme 15 výrobků, přičemž vybrané výrobky nevracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 15-ti vybranými bude 10 dobrých?

Řešení:

Z 230 výrobků vybíráme 15, přičemž nezáleží na pořadí a výrobky se nemohou opakovat (výrobky nevracíme zpět). Takže počet všech možností:

$$m = \binom{230}{15}$$

Mezi vybranými 15-ti výrobky jich má být 10 kvalitních a 5 nekvalitních. Musíme tedy z 210-ti kvalitních vybrat 10 a současně z 20-ti nekvalitních 5:

$$m = \binom{210}{10} \cdot \binom{20}{5}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{\binom{210}{10} \cdot \binom{20}{5}}{\binom{230}{15}} = 0{,}004}$$

Příklad 3

Na jedné poličce je náhodně rozestaveno deset knih. Určete pravděpodobnost toho, že určité tři knihy jsou postaveny vedle sebe.

Řešení:

Počet možností, jak uspořádat 10 knih odpovídá počtu permutací z 10 prvků: $n = 10!$, $m = 8.3!.7!$ - existuje 8 způsobů umístění dané trojice knih (na pozicích 123, 234, 345, ..., 8910), 3! způsobů jak danou trojici uspořádat a 7! způsobů, jak uspořádat zbývající knihy.

$$\boxed{P(A) = \frac{8.3!.7!}{10!} = 0{,}0\overline{6}}$$

Příklad 4

Mějme pět vstupenek po 100 Kč, tři vstupenky po 300 Kč a dvě vstupenky po 500 Kč. Vyberme náhodně tři vstupenky. Určete pravděpodobnost toho, že:

a) alespoň dvě z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu

b) všechny tři vstupenky stojí dohromady 700 Kč

Řešení:

ad *a*)

Budeme řešit pomocí opačného jevu. Opačný jev k "alespoň dvě mají stejnou hodnotu" je "každá má jinou hodnotu":

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = 0{,}75$$

ad *b*)

Dohromady za 700 Kč, tzn. jedna za 100 Kč a dvě za 300 Kč nebo dvě za 100 Kč a jedna za 500 Kč:

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{2}+\binom{5}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{24} = 0{,}291\overline{6}$$

Příklad 5

Při hodu kostkou určete pravděpodobnost jevů:

a) jev *A*: "padne číslo 5"

b) jev *B*: "padne číslo ≤ 2"

Řešení:

ad *a*) $\boxed{P(A) = \frac{1}{6}}$

ad *b*) $\boxed{P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$

Příklad 6

Rozhodněte, zda v následujících případech je stejná míra výskytu elementárních jevů:

a) hod navrtanou kostkou

b) hod mincí

c) výstřel do terče

Řešení:

ad *a*) E_1 - padne 1, E_2 - padne 2, ..., E_6 - padne 6, není stejná míra výskytu

ad *b*) E_1 - padne rub, E_2 - padne líc, je stejná míra výskytu

ad *c*) E_1 - zásah, E_2 - mimo, u většiny střelců není stejná míra výskytu

Příklad 7

Stanovte pravděpodobnost jevu, že z 10 náhodně vytažených bridžových karet budou 3 esa. (bridžové karty: 52 karet celkem, z toho 4 esa).

Řešení:

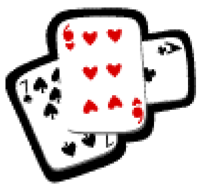
$$P(A) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{7}}{\binom{52}{10}}$$

Příklad 9

Stanovte pravděpodobnost jevu, že z 10 náhodně vytažených bridžových karet budou 3 esa. (bridžové karty: 52 karet celkem, z toho 4 esa).

Řešení:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{7}}{\binom{52}{10}}$$



Příklad 8

Házeme dvěma mincemi. Jaká je pravděpodobnost:

a) jevu A: "padnou dva líce

b) jevu B: "padne jednou rub a jednou líc

Řešení:

Možnosti, které mohou nastat:

RUB RUB

RUB LÍC

LÍC RUB

LÍC LÍC

Tzn.:

ad a) $\boxed{P(A)=\frac{1}{4}}$

ad b) $\boxed{P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}$

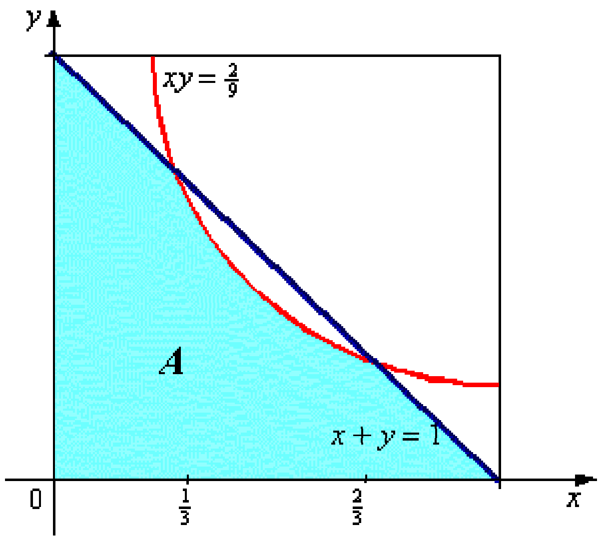
Geometrická pravděpodobnost

Příklad 1

Jaká je pravděpodobnost toho, že součet dvou náhodně zvolených kladných čísel, z nichž žádné není větší než jedna, bude nejvýše roven jedné a jejich součin nebude větší než $\frac{2}{9}$.

Řešení:

Situace je patrná z obrázku:



Je zřejmé, že $S_{\square} = 1$

Obsah oblasti *A* můžeme spočítat např. tak, že sečteme obsahy v intervalech $\left\langle 0, \frac{1}{3} \right\rangle$ a $\left\langle \frac{2}{3}, 1 \right\rangle$, tady je výsledek jasný: $\frac{1}{3}$ a k tomu připočteme obsah v intervalu $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$. Takže:

$$|A| = \frac{1}{3} + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{2}{9x} dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \ln 2 = 0{,}487$$

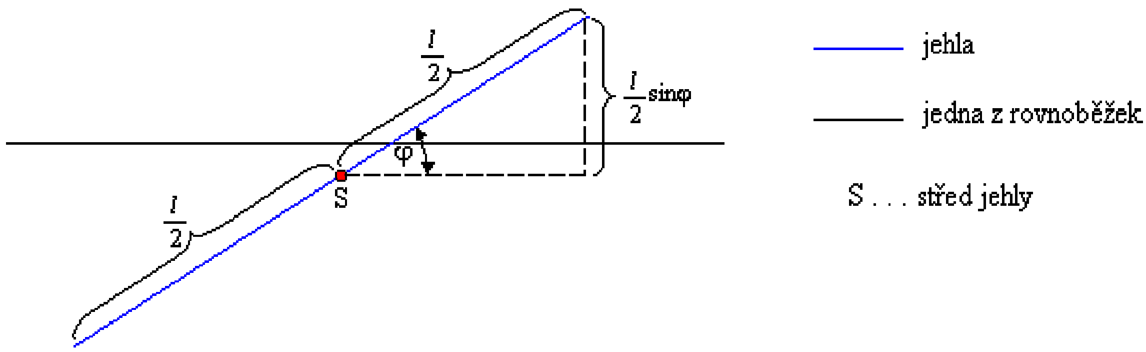
$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 0{,}487}$$

Příklad 2 (Buffonova úloha)

V rovině jsou narýsovány rovnoběžky, jejichž vzdálenost je *d*. Určete pravděpodobnost toho, že náhodně vržená jehla délky *l* (*l* < *d*) protne libovolnou přímku.

Řešení:

Situace je vystižena na obrázku:



Každou polohu jehly můžeme tedy popsat dvěmi souřadnicemi: vzdáleností *y* jejího středu S od nejbližší z přímek a úhlem j jehly s daným systémem přímek.

Platí: $0 \le y \le \frac{d}{2}, 0 \le j \le p$

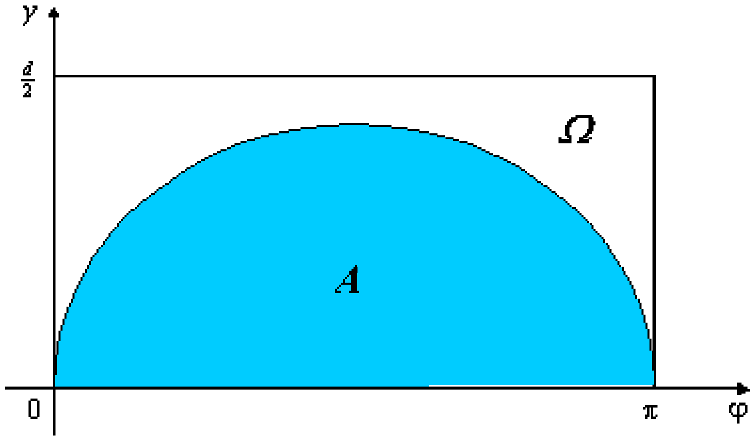
Jehla protne nejblíže položenou přímku, jestliže:

$\frac{1}{2}\sin j \ge y$ (vymezení oblasti *A*)

Všem možným polohám jehly odpovídá pravoúhelník

$$\Omega = \left\langle 0, p \right\rangle \times \left\langle 0, \frac{d}{2} \right\rangle$$

viz. obr.



Z předchozího vyplývá, že:

$$|\Omega| = \pi \frac{d}{2}$$

$$|A| = \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin\varphi \, d\varphi = \left[-\frac{l}{2}\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} = l$$

Tedy:

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2l}{\pi d}}$$

Tzn. jestliže např. *d* = 2, *l* = 1, pak

$$P(A) = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} = 0{,}318$$

Příklad 3

Jak je pravděpodobné, že meteorit padne na pevninu, víme-li, že pevnina má rozlohu 149 milionů km^2 a moře 361 milionů km^2.

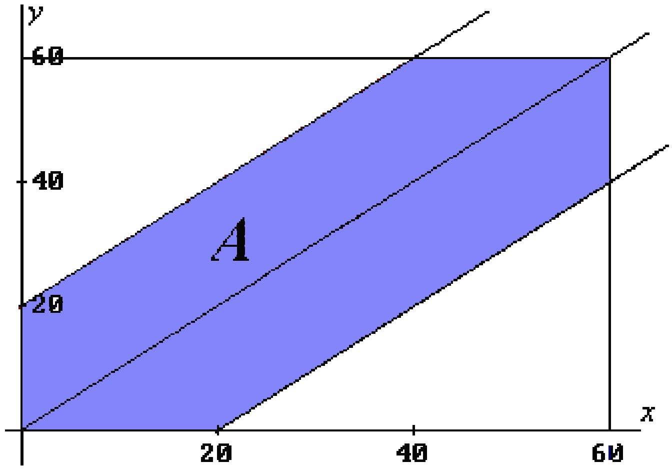
Řešení

$$\boxed{P(A) = \frac{149}{149 + 361} = 0{,}292}$$

Příklad 4

Dva známí se domluví, že se sejdou na určitém místě mezi 15. a 16. hodinou, přičemž doba čekání je 20 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se při této dohodě setkají?

Řešení:



x . . . doba po 15.hodině v níž přijde první, $x \in \langle 0,60 \rangle$

y . . . doba po 15.hodině v níž přijde druhý, $x \in \langle 0,60 \rangle$

jev A . . . oblast vymezená čtvercem a nerovnicí

$|x - y| \leq 20$

$|\Omega| = 60.60 = 3600$

Z obrázku je patrné, že když spojím dva nevyšrafované trojúhelníky, tak dostanu čteverec o straně délky 40, tedy:

$|A| = 3600 - 40.40 = 2000$

Takže:

$$\boxed{P(A) = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9} = 0{,}56}$$

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad 1

Z celkové produkce závodu jsou 4% zmetků a z dobrých je 75% standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní.

Řešení:

jev *A*...vybraný výrobek není zmetek

jev *B* ...vybraný výrobek je standardní

Víme, že: $P(A) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$; $P(B/A) = 0{,}75$

Hledaná pravděpodobnost:

$$\boxed{P(A,B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}96 \cdot 0{,}75 = 0{,}72}$$

Příklad 2

Z výrobků určitého druhu dosahuje 95% předepsanou kvalitu. V určitém závodě, který vyrábí 80% celkové produkce však předepsanou kvalitu má 98% výrobků. Mějme náhodně vybraný výrobek předepsané kvality. Jaká je pravděpodobnost, že byl vyroben ve výše uvedeném závodě?

Řešení:

jev *A*...výrobek je vyroben ve zmiňovaném závodě

jev *B*...výrobek je předepsané kvality

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}8.0{,}98}{0{,}95} = 0{,}825}$$

Příklad 3

Menza VŠB zakoupila 12 chladniček z 1.závodu, 20 z 2.závodu a 18 z 3.závodu. Pravděpodobnost, že chladnička je výborné jakosti, pochází-li z 1.závodu je 0,9, z 2.závodu 0,6 a z 3.závodu 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná chladnička bude výborné jakosti?

Řešení:

jev A...náhodně vybraná chladnička bude výborné jakosti

jev B_i... náhodně vybraná chladnička pochází z i-tého závodu

Chladniček je dohromady 50.

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

$$P(A) = P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + P(B_3).P(A/B_3)$$

$$\boxed{P(A) = \frac{12}{50}.0,9 + \frac{20}{50}.0,6 + \frac{18}{50}.0,9 = 0,78}$$

Příklad 4

Ve společnosti je 45% mužů a 55% žen. Vysokých nad 190cm je 5% mužů a 1% žen. Náhodně vybraná osoba je vyšší než 190cm. Jaká je pravděpodobnost, že je to žena?

Řešení:

jev A...vybraný člověk je vyšší než 190cm

jev B_1...vybraný člověk je muž

jev B_2...vybraný člověk je žena

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = 0,45.0,05 + 0,55.0,01 = 0,028$$

$$\boxed{P(B_2/A) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{0,55.0,01}{0,028} = 0,196}$$

Příklad 5

Sada, kterou tvoří 100 součástek je podrobena výběrové kontrole. Sada se nepřijme, jestliže mezi pěti kontrolovanými součástkami je alespoň jedna vadná. Jaká je pravděpodobnost toho, že se sada nepřijme, jestliže obsahuje 5% vadných součástek?

Řešení:

Budeme řešit pomocí opačného jevu. Ten spočívá v tom, že sada bude přijata. Tento jev je průnikem pěti jevů: $A = A_1.A_2.A_3.A_4.A_5$, kde A_k znamená, že k-tá kontrolovaná součástka je kvalitní.

Pravděpodobnost jevu A_1: $P(A_1) = \frac{95}{100}$

(100 součástek z nichž je 95 kvalitních)

Když nastane jev A_1, zůstane 99 součástek, mezi nimiž je 94 kvalitních, takže:

$P(A_2) = \frac{94}{99}$

Pravděpodobnost zbývajících jevů odvodíme obdobným způsobem, tzn.

$P(\bar{A}) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} = 0,77$

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,77 = 0,23}$$

Příklad 6

Házíme dvěma mincemi.

Jev A: padne líc a rub

Jev B: na první minci padne líc

Určete pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B.

Řešení:

Možnosti, které mohou nastat:

RUB RUB

RUB LÍC

LÍC RUB

LÍC LÍC

a) pomocí klasické definice: evidentně $P(A/B) = 0{,}5$

b) pomocí vzorce na podmíněnou pravděpodobnost:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}}$$

Příklad 7

Máme krabici se třemi bílými a dvěmi černými koulemi. Vytáhneme postupně dvě koule (první nevracíme zpět). Určete pravděpodobnost toho, že v druhém tahu vytáhneme bílou kouli za předpokladu, že v prvním tahu byla vytažena černá koule.

Řešení:

jev *A*: ve druhém tahu vytažena bílá

jev *B*: v prvním tahu vytažena černá

Možnosti:

	1.tah	**2.tah**	**celkem**
počet možností	černá $\binom{2}{1}$	černá $\binom{1}{1}$	2
	černá $\binom{2}{1}$<>	bílá $\binom{3}{1}$<>	6
	bílá $\binom{3}{1}$<>	černá $\binom{2}{1}$<>	6
	bílá $\binom{3}{1}$<>	bílá $\binom{2}{1}$<>	6

Z tabulky je zřejmé, že:

$P(A \cap B) = \frac{6}{20}$

$P(B) = \frac{8}{20}$

To znamená: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ = 0,75

Statistický odhad pravděpodobnosti

Příklad 1

Při házení mincí byly zjištěny tyto výsledky:

počet hodů n	počet padnutí líce f_n	relativní četnost $\frac{f_n}{n}$
4000	2032	0,5080
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005
30000	15010	0,5003

Řešení:

Z tabulky je zřejmé, že pravděpodobnost odpovídá hodnotě 0,5.

Z hodnot v tabulce můžeme očekávat, že čím více pokusů provedeme tím lepší odhad pravděpodobnosti dostaneme.

Závislé pokusy

Příklad 1

Mezi 15 výrobky je 5 zmetků. Vybereme 3 výrobky. Jaká je pravděpodobnost, že jeden z nich je vadný, jestliže:

a. vybereme všechny 3 najednou
b. vybíráme po jednom bez vracení

Řešení:

a. $P = \dfrac{\binom{5}{1} \cdot \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}}$

b. Možnosti: (V-vadný, D-dobrý)

VDD . . . $P_1 = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{15}{91}$

DVD . . . $P_2 = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{15}{91}$

DDV . . . $P_3 = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{15}{91}$

To jsou všechny možné způsoby výběru:

$$\boxed{P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{45}{91}}$$

Poznámka: nezáleží tedy na tom, vybereme-li výrobky najednou nebo postupně bez vracení.

Příklad 2

V osudí jsou 2 bílé a 3 černé koule. Vypočtěte pravděpodobnost toho, že :

a. vytáhneme 3 koule a budou 2 černé a 1 bílá
b. vytáhneme bez vracení jako první černou kouli, pak bílou a nakonec černou.

Řešení:

a. $$\boxed{P = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{5}}$$

b. ČBČ . . . $$\boxed{P = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{5}{1}} \cdot \frac{\binom{2}{1}}{\binom{4}{1}} \cdot \frac{\binom{2}{1}}{\binom{3}{1}} = \frac{3.2.2}{5.4.3} = \frac{1}{5}}$$

(další možná pořadí: ČČB, BČČ - obě se stejnou pravděpodobností jako ČBČ, všechny dohromady tedy dávají případ ad a)

Příklad 3

Dva střelci vystřelí po jedné ráně. Pravděpodobnosti zásahu cíle jsou po ředě 0,5 a 0,9. Určete pravděpodobnost toho, že alespoň jeden střelec zasáhne cíl.

Řešení:

jev A: alespoň jeden zasáhne cíl

jev B: cíl zasáhne první střelec

jev C: cíl zasáhne druhý střelec

$P(A) = P(B.C + B.C + B.C) = P(B.C) + P(B.C) + P(B.C) = P(B).P(C) + P(B).P(C) + P(B).P(C) = 0{,}5.0{,}1 + 0{,}5.0{,}9 + 0{,}5.0{,}9 = 0{,}95$

nebo:

$P(A) = 1 - P(B.C) = 1 - P(B).P(C) = 1 - 0{,}5.0{,}1 = 0{,}95$

Příklad 3

Ve dvou krabicích jsou koule, které se liší barvou. V první je 6 bílých, 10 modrých a 9 červených; ve druhé pak 11 bílých, 7 modrých a 7 červených. Z obou se náhodně vytáhne po jedné kouli. Jaká je pravděpodobnost, že obě koule mají stejnou barvu?

Řešení:

jev A: vytáhnu 2 bílé

jev B: vytáhnu 2 modré

jev C: vytáhnu 2 červené

$$P = P(A + B + C) = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{25}{1}} \cdot \frac{\binom{11}{1}}{\binom{25}{1}} + \frac{\binom{10}{1}}{\binom{25}{1}} \cdot \frac{\binom{7}{1}}{\binom{25}{1}} + \frac{\binom{9}{1}}{\binom{25}{1}} \cdot \frac{\binom{7}{1}}{\binom{25}{1}} = 0{,}3184$$

Úplná pravděpodobnost

Příklad 1

V obchodě jsou tři pokladny na nichž dojde k chybě v účtování s pravděpodobností: 0,1; 0,2 a 0,3. Jaká je pravděpodobnost, že osoba opouštějící obchod má chybný účet?

Řešení:

jev A: došlo k chybě v účtování

jev H_i: odbavení i-tou pokladnou

jev A je možno vyjádřit:

$A=H_1.A+H_2.A+H_3.A$, takže:

$P(A)=P(H_1.A+H_2.A+H_3.A)= P(H_1.A)+P(H_2.A)+P(H_3.A)=$

$P(H_1).P(A/H_1)+P(H_2).P(A/H_2)+P(H_3).P(A/H_3)= 1/3.0,1+1/3.0,2+1/3.0,3=0,2$

Příklad 2

Zadání je stejné jako v předchozím příkladě. Otázka: Jaká je pravděpodobnost, že jsme byli u druhé pokladny, máme-li chybný účet?

Řešení:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}.0,2}{0,2} = \frac{1}{3}$$

Nezávislé pokusy

Příklad 1

Házíme pětkrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že šestka padne dvakrát?

Řešení:

jev A: padne 6 (při jednom pokusu)

$P(A) = p = \frac{1}{6}$

počet pokusů: $n = 5$, jev nastoupí dvakrát: $k = 2$.

Tedy:

$$\boxed{P(A_k) = P(A_2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 . \frac{5^3}{6^5} = 0{,}16}$$

Příklad 2

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude znát učivo je 0,005. Jaká je pravděpodobnost, že mezi dvaceti vybranými studenty bude:

a. právě 5 znalých studentů
b. nejvýše 2 znalí studenti
c. alespoň jeden znalý student
d. jaký je nejpravděpodobnější počet znalých studentů

Řešení:

a. $P(A_5) = \binom{20}{5} . 0{,}005^5 . 0{,}995^{15}$

b. $P = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) = \binom{20}{0} . 0{,}005^0 . 0{,}995^{20} + \binom{20}{1} . 0{,}005^1 . 0{,}995^{19} + \binom{20}{2} . 0{,}005^2 . 0{,}995^{18}$

c. $P = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{20}) = 1 - P(A_0) = 1 - \binom{20}{0} . 0{,}005^0 . 0{,}995^{20}$

$$p.(n+1) - 1 \le k \le p.(n+1)$$
$$0{,}005.21 - 1 \le k \le 0{,}005.21$$
$$-0{,}895 \le k \le 0{,}105$$

d. Takže nejpravděpodobnější počet znalých studentů je $k = 0$

6. Sbírka příkladů k procvičení

Příklad 1

Zákazník si chce koupit sáček mléka a konzervu. V obchodě je 30 sáčků mléka, z toho 5 z minulého dne a 20 konzerv s nečitelným datem výroby, z toho 1 s prošlou záruční dobou. Jaká je pravděpodobnost, že si zákazník koupí dnešní mléko a konzervu v záruce?

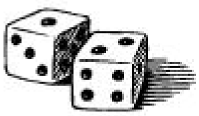
Řešení:

$$\boxed{P(A) = \frac{25}{30} \cdot \frac{19}{20} = 0{,}792}$$

Příklad 2

Házíme 2 hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet čísel na kostkách bude větší než 3?

Řešení:



$$\boxed{P(A) = \frac{33}{36} = 0{,}917}$$

Příklad 3

V antikvariátu mají knihy, z nichž 10% má vytrženou stranu, 30% je popsáno poznámkami a 65% knih je bez závad. Jaká je pravděpodobnost, že kniha , kterou si koupíte, je sice popsaná poznámkami, ale má všechny strany?

Řešení:

VS…kniha má vytrženou stranu
PP…kniha je popsaná poznámkami

BZ…kniha je bez závad

Z…kniha má závady

P(VS) = 0,1 P(PP) = 0,3 P(BZ) = 0,65 P(Z) = 1 - 0,65 = 0,35

$$P(VS) + P(PP) - P(VS \cap PP) = 0{,}35 \Rightarrow 0{,}1 + 0{,}3 - P(VS \cap PP)$$
$$P(VS \cap PP) = 0{,}4 - 0{,}35 = 0{,}05$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy: $\boxed{P(PP) - P(PP \cap VS) = 0{,}3 - 0{,}05 = 0{,}25}$

Příklad 4

Na výrobě televizí zn.Tesla se podílejí 4 dodavatelé součástek. První dodává 25% součástek a má 2%-ní zmetkovost, druhý dodává také 25% součástek a má 1%-ní zmetkovost, třetí dodává 35% součástek a má 3-ní zmetkovost,čtvrtý dodává 15% součástek a má 1%-ní zmetkovost. Koupíme-li si televizi zn.Tesla, jaká je pravděpodobnost, že

a) bude bez závad

b) bude vadná?

Řešení:

a) $\boxed{P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}98 + 0{,}25 \cdot 0{,}99 + 0{,}35 \cdot 0{,}97 + 0{,}15 \cdot 0{,}99 = 0{,}9805}$

b) $\boxed{P(B = 1 - / P(A) = 0{,}0195}$

Příklad 5

Ve firmě 40% zaměstnanců umí anglicky, 35% zaměstnanců umí německy a 15%hovoří oběma jazyky. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný zaměstnanec: a) umí anglicky nebo německy

b) neumí žádný z těchto jazyků

c) umí německy, ale neumí anglicky?

Řešení:

a) $\boxed{P(A) = 0{,}4 + 0{,}35 – 0{,}1 = 0{,}6}$

b) $\boxed{P(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4}$

c) $\boxed{P (C) = 0{,}35 – 0{,}15 = 0{,}2}$

Příklad 6

V prvním koši je 9 červených jablek a 2 jablka zelená, ve druhém koši je 8 jablek červených a 1 jablko zelené. Z prvního koše bylo náhodně vybráno jedno jablko a přeřazeno do druhého koše. Z druhého koše bylo potom vybráno jedno jablko.Jaká je pravděpodobnost, že je toto jablko zelené?

Řešení: $\boxed{P(A) = \frac{9}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{11} \cdot \frac{2}{10} = 0{,}118}$

Příklad 7

Statistiky uvádějí, že 5% mládeže do 18 let je alergická na léky, 2% na pyl a 0,8% na léky i na pyl. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný mladý člověk

a) bude alergický zároveň na pyl i na léky
b) bude alergický pouze na léky
c) bude alergický na pyl nebo na léky
d) nebude alergický na pyl
e) nebude alergický na léky
f) nebude alergický ani na léky ani na pyl?

Řešení:

a) $\boxed{\mathbf{P(A) = 0{,}008}}$

b) $\boxed{\mathbf{P(B) = 0{,}042}}$

c) $\boxed{\mathbf{P(C) = 0{,}062}}$

d) $\boxed{\mathbf{P(D) = 0{,}98}}$

e) $\boxed{\mathbf{P(E) = 0{,}95}}$

f) $\boxed{\mathbf{P(F) = 0{,}938}}$

Příklad 8

Máme možnost si vybrat dvě ze čtyř krabic, z nichž 1 je prázdná a ve třech je šunková pizza.S jakou pravděpodobností ukážeme na krabici s pizzou?

Řešení: $\boxed{P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}5}$

Příklad 9

Družstvo kryje svou potřebu ovocných stromků od dvou dodavatelů. Od prvního dodavatele kupuje 70%, pravděpodobnost, že se stromky ujmou je 0,9. Od druhého dodavatele kupuje 30%, pravděpodobnost , že se stromky ujmou je 0,8.Jaká je pravděpodobnost, že se náhodně vybraný stromek po zasazení ujme?

Řešení: $\boxed{P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}87}$

Příklad 10

Na mysliveckém plese byla tombola.Prodalo se 420 lístků, z nichž 30 je výherních.Jaká je pravděpodobnost, že :

a) koupíme-li si jediný lístek, vyhrajeme

b) koupíme-li si 3 lístky, na všechny vyhrajeme

c) koupíme-li si 10 lístků, nevyhrajeme nic?

Řešení:

a) $\boxed{P(A) = \frac{30}{420} = 0{,}0714}$

b) $\boxed{P(B) = \frac{30}{420} \cdot \frac{29}{419} \cdot \frac{28}{418} = 0{,}000331}$

c) $\boxed{P(C) = \frac{\binom{390}{10} \cdot \binom{30}{0}}{\binom{420}{10}} = 0{,}472}$

Příklad 11

Ocelové odlitky jsou kontrolované rentgenem, který odhalí chybu s 98%-ní spolehlivostí a kvalitní odlitky označí za vadný s pravděpodobností 0,001. Je známo, že vada se vyskytuje u 0,3% odlitků. Jaká je pravděpodobnost, že odlitek označený přístrojem za vadný je opravdu vadný?

Řešení:

Tv ….výrobek je označen rentgenem jako vadný (uvědomte si, že jev Tv lze rozložit na dva disjunktní jevy:

a) jev výrobek je skutečně vadný a je označen za vadný $V \cap Tv$

b) na jev výrobek je kvalitní a přesto je označen rentgenem za vadný $K \cap Tv$

K…. výrobek je kvalitní
V ….výrobek je vadný
Víme, že
$P(Tv|V) = 0{,}98$; $P(Tv|K) = 0{,}001$; $P(V) = 1 - P(K) = 0{,}003$; tedy $P(K) = 0{,}997$

$$\boxed{P(V|Tv) = \frac{P(V \cap Tv)}{P(Tv)} = \frac{P(Tv|V) \cdot P(V)}{P(Tv|V) \cdot P(V) + P(Tv|K) \cdot P(K)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}003}{0{,}98 \cdot 0{,}003 + 0{,}001 \cdot 0{,}997} = 0{,}7467}$$

Hledaná pravděpodobnost je 0,7467.

Příklad 12

Student má sirky i zapalovač. Pravděpodobnost, že použije zapalovač je 0,58. Z8roveň má poslední tři cigarety. Jaká je pravděpodobnost, že dvě z nich si zapálí zapalovačem?

Řešení:

$$\boxed{P(A) = (0{,}58 \cdot 0{,}58 \cdot 0{,}42) \cdot 3 = 0{,}424}$$

Příklad 13

Zemědělec skladuje 32 pytlů brambor, mezi nimiž jsou 3 pytle s namrzlými bramborami. Brambory prodá osmi odběratelům, každému po 4 pytlích. Jaká je pravděpodobnost, že některý z odběratelů koupí alespoň 2 pytle namrzlých brambor?

Řešení:

Pravděpodobnost, že jeden odběratel dostane 2 pytle namrzlých brambor je

$$\boxed{P(A) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{29}{2}}{\binom{32}{4}} = 0{,}0338709}$$

Pravděpodobnost, že jeden odběratel dostane 3 pytle namrzlých brambor, je

$$\boxed{P(A) = \frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{29}{1}}{\binom{32}{4}} = 0{,}000806}$$

Pravděpodobnost, že některý z osmi odběratelů dostane 2 pytle namrzlé brambory je $\boxed{P(2) = 8\cdot 0{,}0038709 = 0{,}271}$

Pravděpodobnost, že některý z osmi odběratelů dostane 3 pytle namrzlé brambory je $\boxed{P(3) = 8\cdot 0{,}000806 = 0{,}00645}$

Hledaná pravděpodobnost $\boxed{\text{P(V)} = 0{,}271 + 0{,}006 = 0{,}277}$

Příklad 14

Podnikatel má 2 auta: s benzinovým motorem a s naftovým motorem. Pravděpodobnost že při teplotě –20°C do 5 minut nenastartuje auto s benzinovým motorem je 0,3, pravděpodobnost, že nenastartuje auto s naftovým motorem je 0,6. Pravděpodobnost, že nenastartuje ani jeden z nich je 0,18. Jaká je pravděpodobnost, že:

a) alespoň jedno auto nastartuje

b) žádné auto nenastartuje?

Řešení:

a) $\boxed{P(A) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}82}$

b) $\boxed{P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18}$

Příklad 15

Student dostane test, který má 10 otázek a ke každé z nich jsou možné 3 odpovědi. Jaká je pravděpodobnost, že student odpoví správně aspoň na polovinu otázek, volí-li odpovědi náhodně?

Řešení:

$$p = \frac{1}{3} \qquad (1-p) = \frac{2}{3}$$

$$P(A) = p^{10} + 10p^{9}(1-p) + \binom{10}{2}p^{8}(1-p)^{2} + \binom{10}{3}p^{7}(1-p)^{3} +$$

$$+\binom{10}{4}p^{6}(1-p)^{4} + \binom{10}{5}p^{5}(1-p)^{5}$$

$$\underline{\underline{P(A) = 0{,}213128}}$$

Příklad 16

Jaká je pravděpodobnost, že při dvacetinásobném hodu mincí padne líc
a) nejvíc 4x
b) aspoň 5x

Řešení:

$$\text{a) } P(A) = (0,5)^{20} - \left(1 + 20 + \binom{20}{2} + \binom{20}{3} + \binom{20}{4}\right) =$$

$$= \underline{\underline{0,0059}}$$

$$\text{b) } P(B) = 1 - P(B) = \underline{\underline{0,9941}}$$

Příklad 17

V bedně je 10 součástek, 3 z nich jsou vadné. Náhodně vybereme 4 součástky.
Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi jsou:
a) 0 vadných
b) právě jedna vadná
c) právě dvě vadné
d) právě 4 vadné

Řešení:

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad n = \binom{10}{4} = 210$$

$$\text{a) } m = \binom{7}{4} \qquad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7.6.5.4}{10.9.8.7} = \underline{\underline{0,1\overline{6}}}$$

$$\text{b) } m = \binom{3}{1}\binom{7}{3} = 105 \qquad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2} = \underline{\underline{0,5}}$$

$$\text{c) } m = \binom{3}{2}\binom{7}{2} = 63 \qquad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{63}{210} = \underline{\underline{0,3}}$$

$$\text{d) } P(A) = \underline{\underline{0}}$$

Příklad 18

Zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo ze čtyřciferných čísel sestavených z číslic 1,5,6,8,9 je dělitelné čtyřmi:
a) číslice se nesmějí opakovat
b) číslice se mohou opakovat

Řešení:

a)

$$n = V(4,5) = \frac{5!}{1!} = 5.4.3.2 = 120$$

končí: 16, 56, 68, 96

$$m = 4.V(2,3) = 4.3.2 = 24$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \underline{\underline{0,2}}$$

b)

$$n = V'(4,5) = 5^4 = 625$$

končí: 16, 56, 96, 68, 88

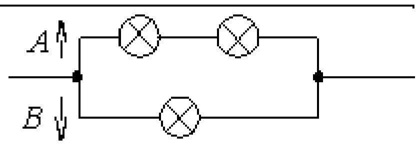
$$m = 5.V'(2,5) = 5.5^2 = 125$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \underline{\underline{0,2}}$$

Příklad 19

Jaká je pravděpodobnost, že sítí projde proud, jestliže spolehlivost každé ze žárovek je $p = 0,9$?

Řešení:



$$P(A) = 0,81$$

$$P(B) = 0,9$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 0,81 + 0,9 - 0,81.0,9 = \underline{\underline{0,981}}$$

Zajímavost na závěr

Jaká je matematická pravděpodobnost, že Bůh existuje?

Jeden vědec vypočítal, že je 67 procentní pravděpodobnost, že existuje Bůh.

Dr. Stephen Unwin použil dvě stě let staré formule a pokusil se jejím prostřednictvím vypočítat pravděpodobnost existence všemocné bytosti. Bayesova teorie se obyčejně používá k výpočtům pravděpodobnosti událostí, jako je selhání jaderné elektrárny tím, že se hodnotí různé faktory, které by mohly situaci ovlivnit.

Tento absolvent Manchester University, který nyní pracuje jako odhadce rizik v Chicagu, konstatoval, že jeho teorie vychází z předpokladu, že je pravděpodobnost 50-50, že Bůh existuje. Pak do teorie zapracoval faktory a důkazy pro existenci vyšší bytosti i faktory a důkazy proti tomu.

Mezi faktory, které byly zahrnuty, je například existence dobra, což podle dr. Unwina způsobuje, že je pravděpodobnost boží existence větší. Proti tomu stojí existence přirozeného zla - včetně zemětřesení a rakoviny.

Podrobnosti, jak celou věc vykalkuloval, vyjdou tento měsíc v jeho nové knize, takže si to bude moci každý přepočítat. Jmenuje se *The Probability of God: A simple calculation that proves the ultimate thruth (Pravděpodobnost boží existence: Prostý výpočet, který dokazuje konečnou pravdu)*.

Dr. Unwin uvedl, že ho zajímala snaha překročit hranici mezi vědou a náboženstvím. Argumentuje, že boží existence není teologickou otázkou, ale prostou věcí statistiky.

Britská sázkařská společnost William Hill však konstatovala, že určování pravděpodobnosti boží existence má podstatné technické problémy. Problémem je, jak boží existenci potvrdí. Kdyby vědci potvrdili existenci lochneské příšery, požádali bychom je, aby nám uhradili peníze pro vyplacené sázky, kdyby se ukázalo, že neexistuje. Kdo ale potvrdí existenci Boha?

Firma William Hill přijímá sázky na to, zda se bude konat soudný den. Pravděpodobnost je 1000:1.

Závěr

Ve své bakalářské práci jsem se zaměřil na výklad a řešení úloh z pravděpodobnosti s využitím internetu. V této práci jsem se snažil co nejvíce využívat dostupné internetové stránky, knihy o pravděpodobnosti a zkušenosti ze své praxe. Dané téma podávám hlavně pomocí příkladů, které pomohou studentům danou látku co nejvíce přiblížit.

Bakalářská práce, může posloužit učiteli matematiky jako pomůcka při výuce, a ke zpestření a motivaci studentů.

Seznam použité literatury a internetových stránek :

V.Dupač, M. Hušková – Pravděpodobnost a matematická statistika, UK nakladatelství karolinum, Praha, 1999

P.Hebák, J.Kahounová – Počet pravděpodobnosti v příkladech, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1988

J. Likeš, J. Machek – Počet pravděpodobnosti, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1981

Petrášková, V., Tlustý, P.: Úvod do počtu pravděpodobnosti, PF JU České Budějovice, 1992

Helena Koutková, Oldřich Dlouhý - Sbírka příkladů z pravděpodobnosti a matematické statistiky, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2005

http://badame.vse.cz/iastat/nahjev.htm

http://new.euromise.org/czech/tajne/ucebnice/html/html/node5.html

http://homen.vsb.cz/~s1m30/cdpast1/soubory/KAP02/pr12zp.htm

http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/courses/recognition/Lab_archive/RPZ_00-01w/probexam/index.html

http://www.e-matematika.cz/stredni-skoly/pravdepodobnost.php

http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/courses/recognition/Lab_archive/RPZ_00-01w/probexam/probexam.html#SECTION00023000000000000000

http://jan.gfxs.cz/studium/bib.htm

http://www.sgo.cz/html/stud_mat.htm

http://kstp.vse.cz/kstp/wcms_kstp.nsf/pages/SeznamPredmetu.html

http://www.cz-milka.net/skola/teorie-pravdepodobnosti/

http://home.zcu.cz/~friesl/hpsb/

http://homen.vsb.cz/~s1m30/cdpast1/index.htm

http://www.skolaekonom.cz/informace/HR/fma/ulohy/pravdep/index.htm

http://www.fd.cvut.cz/Personal/XJIRAP/pravd.htm

http://homen.vsb.cz/~s1m30/cdpast1/index2.htm

http://www.informatika.xcars.cz/nahodnejevy.html

http://pascal.fjfi.cvut.cz/~limpouch/sigdat/pravdh/node3.html

http://www.gymji.cz/projekt/matematika/kombinatorika/narozeniny_zadani.doc

http://botany.upol.cz/prezentace/duch/statistika2_soubory/frame.htm

http://www.blisty.cz/2004/3/9/art17250.html

Anotace

Ve své bakalářské práci jsem se zaměřil na vytvoření pomůcky pro studenty středních škol v oboru pravděpodobnost pomocí internetu.

Práci jsem rozdělil do tří kapitol. V první kapitole se budu zabývat zavedením pojmů v pravděpodobnosti. Další kapitola se bude soustředit na výklad pomocí řešených příkladů. Poslední kapitola bude sbírka příkladů k procvičení.

Cílem této práce je pomocí řešených příkladů vysvětlit teorii pravděpodobnosti, seznámit studenty se zákonitostmi a postupy při počítání.

Dalším cílem je využití této práce při výuce matematiky pro učitele k vytváření příprav na hodinu.

V závěru práce uvádím seznam internetových stránek, který může posloužit čtenáři při dalším studiu tohoto tématu.

Annotation

In my dissertation paper for Bachelor's Degree. I focus on the creation of teaching aids on the subject „Probability“ with the help the of the internet for students of the secondary school.

I divided the work into tree chapters. In the first chapter, it deals with the introduction of the concept of „ Probability“. The next chapter will concentrate on the explanation by means of problems and solutions. The last chapter will be a collection of problems for practise.

The goal of this work is to explain the „Theory of Probability“ by means of problems and solution, make the students get acquainted with familiarize with the regularity and procedure when counting.

The next aim is the utilization or use of this work by teachers with respect to the preparation for the lesson and during the lessons in Mathematics.

In conclusion to the work, I will set up a menu on the website which can serve the readers on this subject during their further study.