

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Elementární bifurkace dynamických systémů



Vedoucí diplomové práce:
prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.
Rok odevzdání: 2012

Vypracoval:
Bc. Ivana Stejskalová
MAP, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení prof. RNDr. Ireny Rachůnkové, DrSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 26. března 2012

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala především vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Ireně Rachůnkové, DrSc. za ochotnou spolupráci, cenné rady i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Také bych chtěla poděkovat své rodině a příteli, že mi umožnili studium a podporovali mě po celou dobu.

Obsah

Použité značení	4
Úvod	5
1 Přípravná kapitola	6
1.1 Skalární dynamické systémy	6
1.2 Věta o implicitní funkci	12
2 Elementární bifurkace skalárních dynamických systémů	13
2.1 Skalární diferenciální rovnice s jedním reálným parametrem	13
2.1.1 Sedlová bifurkace	15
2.1.2 Transkritická bifurkace	23
2.1.3 Vidlová bifurkace	30
2.1.4 Hystereze	35
2.2 Skalární diferenciální rovnice se dvěma reálnými parametry	42
3 Simulace pohybu hydroplánu	50
3.1 Zadání modelu	50
3.2 Vyšetřování modelu	51
Závěr	60
Literatura	61

Použité značení

\mathbb{R}	množina všech reálných čísel
\mathbb{R}_0^+	množina všech nezáporných reálných čísel
\mathbb{R}^n	prostor n -tic reálných čísel
(x, y)	dvojice hodnot nebo také otevřený interval v \mathbb{R}
$[x, y]$	uzavřený interval v \mathbb{R}
$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ nebo $F_x(x, y)$	první parciální derivace dle proměnné x
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y)$ nebo $F_{xx}(x, y)$	druhá parciální derivace dle proměnné x
$\frac{\partial^2 F}{\partial xy}(x, y)$ nebo $F_{xy}(x, y)$	druhá parciální derivace dle proměnné x a y
$HF(x, y)$	Hessova matice funkce F
$\det(A)$	determinant matice A
$x'(t) = f(x(t)), x' = f(x)$	autonomní diferenciální rovnice prvního řádu
rovina (c, x)	prostor \mathbb{R}^2 s kartézskými souřadnicemi c a x
prostor (c, d, x)	prostor \mathbb{R}^3 s kartézskými souřadnicemi c, d a x
$f \in C^n$	funkce je spojitá a její derivace (popřípadě všechny parciální derivace) jsou spojitě až do řádu n

Úvod

Cílem této diplomové práce je nastudovat problematiku elementárních bifurkací dynamických systémů, uvést přehled teorie potřebné k vyšetřování jednoduchých modelů majících tvar dynamických systémů a práci doplnit příklady. K pochopení teorie elementárních bifurkací je potřeba, aby čtenář znal již některé pojmy, proto byla zařazena přípravná kapitola. Ta obsahuje základní pojmy týkající se dynamických systémů. Jsou definovány dynamický systém, Cauchyho počáteční úloha, kritický bod, orbita, fázový portrét a další klíčové pojmy.

Poté se již budeme věnovat teorii elementárních bifurkací. Nejprve nedefinujeme skalární diferenciální rovnici s jedním reálným parametrem, kterou budeme dále vyšetřovat. Čtenář bude seznámen s nejčastějšími typy lokálních bifurkací, tj. sedlovou, transkritickou, vidlovou a hysterezní. Každý typ lokální bifurkace bude demonstrován na vlastních příkladech.

Dále bude definována skalární diferenciální rovnice se dvěma reálnými parametry a nastíněn způsob jejího vyšetřování z hlediska elementárních bifurkací.

V poslední kapitole se budu věnovat reálnému modelu simulace pohybu hydroplánu. Bude uvedena diferenciální rovnice pro rychlost hydroplánu a bude ukázáno, jak se hydroplán chová pro určité hodnoty tahu motoru. Nakonec bude určen typ lokální bifurkace, která zde nastává.

V této práci jsou pro označení konce příkladů resp. důkazů použity symboly \diamond resp. \square .

1 Přípravná kapitola

V této kapitole jsou uvedeny pojmy, jejichž znalost je potřebná pro pochopení dalšího textu. Definuji zde dynamický systém, kritický bod hyperbolický a nehyperbolický, orbity, fázový portrét a další. Také uvádím vlastnost stability a uvádím zde i Větu o implicitní funkci, neboť bude dále používána při vyšetřování elementárních bifurkací dynamických systémů.

Většina definic a vět bude určena pro prostor \mathbb{R} , neboť budu dále vyšetřovat elementární bifurkace v prostoru \mathbb{R} .

1.1 Skalární dynamické systémy

Následující definice dynamického systému je pro úplnost uvedena obecně pro prostor \mathbb{R}^n . Pro nás dále bude platit $n = 1$, v tomto případě se dynamický systém nazývá **skalární**.

Definice 1.1. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C(J \times \mathbb{R}^n)$, $\varphi : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dále nechť $\varphi(t, x)$ má následující vlastnosti:

$$i) \varphi(0, x^0) = x^0 \quad \text{pro} \quad (0, x^0) \in J \times G$$

$$ii) \varphi(t + s, x^0) = \varphi(t, \varphi(s, x^0)) \quad \text{pro} \quad \forall t, s \in J, \forall x^0 \in G, \text{ pro} \text{ něž jsou obě strany definovány.}$$

$$iii) \text{ Pro každé } t \in J \text{ existuje k zobrazení } \varphi(t, \cdot) \text{ zobrazení inverzní } \varphi(-t, \cdot).$$

Zobrazení $\varphi : J \times G \rightarrow G$ nazveme **tok**.

Pro každé $t \in J$ nazveme zobrazení $\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$ **dynamický systém**.

Dynamický systém nazveme **spojitým dynamickým systémem**, jestliže je J interval. Pokud je J diskrétní množina, nazveme dynamický systém **diskrétním dynamickým systémem**.

My se budeme zabývat pouze spojitými dynamickými systémy, tudíž J pro nás bude interval a často budeme brát možnost $J = \mathbb{R}$, tj. J je celá reálná osa.

Spojité skalární dynamické systémy jsou generovány autonomními diferenciálními rovnicemi 1. řádu, tj. budou generovány následující rovnicí

$$x'(t) = f(x(t)), \quad \text{kde } t \in J \subset \mathbb{R} \quad \text{a} \quad f : G \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1)$$

Definice 1.2. Řešením rovnice (1) na intervalu J rozumíme funkci $x(t)$ takovou, že $x \in C^1(J)$ a splňuje rovnici (1) pro každé $t \in J$.

K rovnici (1) přidáváme ještě Cauchyho počáteční podmínku v bodě $t = 0$, neboť řešení se u autonomní diferenciální rovnice poté liší pouze o posunutí, pokud zvolíme bod jiný. **Cauchyho počáteční podmínka** má následující tvar

$$x(0) = x^0. \quad (2)$$

Bod x^0 je počáteční bod řešení, z něhož vychází řešení diferenciální rovnice (1) v bodě $t = 0$. Úloha (1), (2) se nazývá **Cauchyho počáteční úloha**. Řešením tedy bude funkce, kterou označíme $\varphi(t, x^0)$, jež řeší rovnici (1) a splňuje (2) tj.

$$\begin{aligned} \varphi'(t, x^0) &= f(\varphi(t, x^0)), \quad \text{pro } \forall t \in J, \\ \varphi(0, x^0) &= x^0. \end{aligned}$$

Je známo docela hodně vět týkajících se existence řešení. Nám postačí pro náš účel následující. Jedná se o základní větu o existenci a jednoznačnosti.

Věta 1.1. *Nechť $G \subset \mathbb{R}$, $f \in C^1(G)$ a $x^0 \in G$. Potom úloha (1), (2) má jediné řešení $\varphi(t, x^0)$ definované na maximálním intervalu $I_{x^0} = (a_{x^0}, b_{x^0})$ obsahujícím nulu. Navíc platí $\varphi \in C^1$.*

Důkaz: Viz [1], strana 6.

V dalším textu budeme předpokládat, že pravá strana tj. funkce f vždy splňuje $f \in C^1(G)$.

Následující věta vysvětlí, jak je vlastně generován dynamický systém pomocí autonomní diferenciální rovnice.

Věta 1.2. *Nechť $\varphi(t, x^0)$ je řešením úlohy (1), (2) na intervalu J . Pokud bereme funkci $\varphi(t, x^0)$ jako funkci dvou proměnných tj. t a x^0 , pak je funkce φ tokem. Pro každé pevné t je zobrazení $\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$ dynamickým systémem.*

Důkaz: Stačí dokázat, že řešení φ splňuje vlastnosti *i)*, *ii)* a *iii)* definice 1.1.

- 1) Funkce $\varphi(t, x^0)$ splňuje $\varphi(0, x^0) = x^0$, tj. vlastnost *i)* definice 1.1.
- 2) Zvolíme pevné $s \in J$ a položíme $\psi(t) = \varphi(t + s, x^0)$ a $x^1 = \varphi(s, x^0)$. Ukážeme, že $\psi(t)$ je také řešení rovnice (1). Zavedeme tedy substituci $\tau = t + s$ a dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= \frac{d\varphi(t + s, x^0)}{dt} = \frac{d\varphi(\tau, x^0)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\varphi(\tau, x^0)}{d\tau} = \\ &= f(\varphi(\tau, x^0)) = f(\varphi(t + s, x^0)) = f(\psi(t)), \end{aligned}$$

tj. $\psi'(t) = f(\psi(t))$, a tedy ψ je řešení (1).

Přitom platí $\psi(0) = \varphi(s, x^0) = x^1$. Lze tudíž zapsat ψ ve tvaru $\psi(t) = \varphi(t, x^1)$, protože $\varphi(t, x^1)$ je jediným řešením rovnice (1) s počáteční podmínkou $x(0) = x^1$. Odtud

$$\varphi(t + s, x^0) = \psi(t) = \varphi(t, x^1) = \varphi(t, \varphi(s, x^0)),$$

tj. je splněna vlastnost *ii)* z definice 1.1.

- 3) Zvolíme pevné $t \in J$. Z věty 1.1 plyne, že zobrazení $\varphi(t, \cdot) : x^0 \rightarrow \varphi(t, x^0)$ je prosté a existuje k němu inverzní zobrazení. Ukážeme, že toto inverzní zobrazení má tvar $\varphi(-t, \cdot)$.

Položme $y^0 = \varphi(t, x^0)$. Dle vlastnosti *i)* platí

$$\varphi(-t, y^0) = \varphi(-t, \varphi(t, x^0)) = \varphi(-t + t, x^0) = \varphi(0, x^0) = x^0.$$

Tedy platí i vlastnost *iii)* z definice 1.1.

Tímto je důkaz hotov. □

Dále si definujme fázový portrét dynamického systému, neboť znalost fázového portréту je důležitá k pochopení chování daného dynamického systému pro různé počáteční podmínky. K definici fázového portréту potřebujeme znát následující pojmy.

Definice 1.3. Graf řešení $\varphi(t, x^0)$ je množina $\{(t, \varphi(t, x^0)) : t \in I_{x^0}\} \subset \mathbb{R}^2$. Jedná se o křivku třídy C^2 v \mathbb{R}^2 s parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} t &= t, \\ x &= x(t), \end{aligned} \tag{3}$$

kde $t \in I_{x^0}$, $\varphi(t, x^0) = x(t)$.

Definice 1.4. Orbita řešení $\varphi(t, x^0)$ je množina bodů $\{\varphi(t, x^0), t \in I_{x^0}\} \subset \mathbb{R}^1$. Jedná se o křivku třídy C^2 v R s rovnicí:

$$x = x(t), \text{ kde } t \in I_{x^0}. \tag{4}$$

Orbita je projekcí grafu řešení $\varphi(t, x^0)$ do množiny $G \subset \mathbb{R}^1$.

Definice 1.5. Kritický bod diferenciální rovnice (1) je bod $\bar{x} \in G \subset \mathbb{R}^1$ splňující rovnici

$$f(\bar{x}) = 0. \tag{5}$$

Kritický bod \bar{x} se nazývá **hyperbolický kritický bod**, jestliže platí $f'(\bar{x}) \neq 0$. Jestliže platí $f'(\bar{x}) = 0$, nazveme kritický bod \bar{x} **nehyperbolickým kritickým bodem**.

Kritický bod se často nazývá také ekvilibrium nebo rovnovážný stav. Je zřejmé, že $\varphi(t, \bar{x}) = \bar{x}$ je konstantní řešení diferenciální rovnice (1), neboť $\bar{x}' = 0$, $f(\bar{x}) = 0$, a tedy $\bar{x}' = f(\bar{x})$. Dále nás bude zajímat stabilita kritických bodů.

Definice 1.6. Kritický bod $\bar{x} \in G$ diferenciální rovnice $x'(t) = f(x(t))$ nazveme **stabilní**, jestliže platí:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x^0 \in G : |x^0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, x^0) - \bar{x}| < \epsilon \text{ pro } \forall t \geq 0. \tag{6}$$

Kritický bod $\bar{x} \in G$ diferenciální rovnice $x'(t) = f(x(t))$ nazveme **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a platí:

$$\exists r > 0 \forall x^0 \in G : |x^0 - \bar{x}| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t, x^0) - \bar{x}| = 0. \tag{7}$$

Kritický bod $\bar{x} \in G$ diferenciální rovnice $x'(t) = f(x(t))$ je **nestabilní**, jestliže není stabilní.

Definice 1.7. Fázový portrét diferenciální rovnice (1) je množina všech orbit diferenciální rovnice (1) se šípkami na orbitách, které vyznačují pohyb bodu $\varphi(t, x^0)$ na orbitě pro rostoucí t .

Je důležité vědět, že nekreslíme všechny orbity, ale pouze ty typické. Pro náš případ dynamického systému v \mathbb{R} orbity budou body, omezené otevřené intervaly a neomezené intervaly.

Věta 1.3. *Nechť bod \bar{x} je kritickým bodem diferenciální rovnice $x' = f(x)$, tj. $f(\bar{x}) = 0$. Pak je-li $f'(\bar{x}) < 0$, je daný kritický bod \bar{x} asymptoticky stabilní. Je-li naopak $f'(\bar{x}) > 0$, je daný kritický bod \bar{x} nestabilní.*

Důkaz: Viz [1], strana 19.

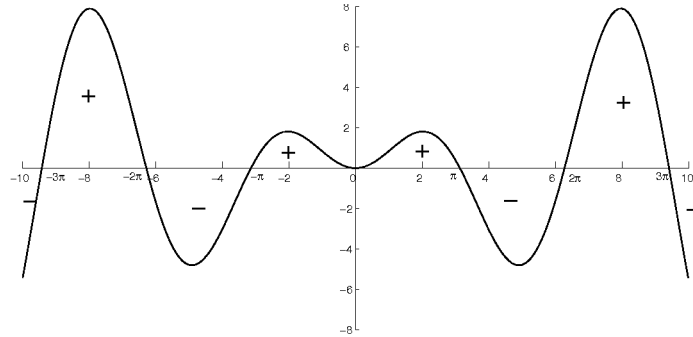
V následujícím příkladu bude nalezen fázový portrét zadané diferenciální rovnice. Metoda určení fázového portréту, kterou si v něm ukážeme, nepočítá řešení dané diferenciální rovnice, ale k jeho nalezení využívá tvaru pravé strany, tj. $f(x)$, neboť řešení dané rovnice v praxi často neznáme.

Příklad 1.1. Nechť je dána diferenciální rovnice

$$x' = x \sin(x) . \tag{8}$$

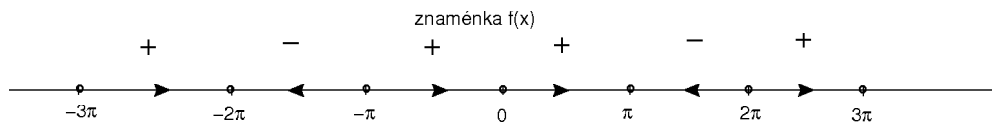
Nalezněte kritické body dané diferenciální rovnice a určete fázový portrét pomocí tvaru pravé strany diferenciální rovnice $f(x)$. Omezte se na interval $x \in [-3\pi, 3\pi]$, neboť na zbylých částech reálné osy by bylo řešení velmi podobné a pro ilustraci tento interval postačí.

Nejprve vykreslíme graf pravé strany $f(x) = x \sin(x)$ a určíme průsečíky s osou x , což budou kritické body, neboť pro ně platí $f(x) = 0$. Výpočtem $x \sin(x) = 0$ je možné si ověřit, že funkce $f(x)$ má kritické body $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Intervaly mezi kritickými body a kritické body jsou orbity. Šípky na orbitách pak určíme dle znaménka funkce $f(x)$. Dostáváme tedy následující graf.



Obrázek 1

Nyní vykreslíme fázový portrét.



Obrázek 2

Fázový portrét se skládá z orbit $\{-3\pi\}$, $(-3\pi, -2\pi)$, $\{-2\pi\}$, $(-2\pi, -\pi)$, $\{-\pi\}$, $(-\pi, 0)$, $\{0\}$, $(0, \pi)$, $\{\pi\}$, $(\pi, 2\pi)$, $\{2\pi\}$, $(2\pi, 3\pi)$ a $\{3\pi\}$. Přitom platí, že šipka na orbitě směřuje doprava, jestliže platí $f(x) > 0$ pro x náležející dané orbitě, tj. $f(x) = x' > 0$ a řešení $x(t)$ roste na této orbitě. Naopak šipka směřuje doleva, jestliže $f(x) < 0$ pro x náležející orbitě, tj. $f(x) = x' < 0$ a řešení $x(t)$ klesá na této orbitě. Stabilita daných kritických bodů je zřejmá z fázového portréту. Pokud šipky na sousedících orbitách směřují ke kritickému bodu, je tento kritický bod asymptoticky stabilní. Jakákoliv jiná kombinace směrů šipek ukazuje nestabilitu kritického bodu.

K určení stability, pokud nemáme k dispozici fázový portrét, slouží věta 1.3. Použití spočívá ve výpočtu derivace pravé strany diferenciální rovnice $f'(x)$, tj.

$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$ a dosazení kritického bodu. Například pro $x = \pi$ dostáváme $f'(\pi) = -\pi < 0$, a tedy kritický bod $x = \pi$ je asymptoticky stabilní. Pokud nám vyjde derivace rovná nule, nelze o stabilitě dle věty 1.3 rozhodnout. To nastává pro bod $x = 0$, kde $f'(0) = 0$. Ale protože máme již zjištěnu podobu fázového portréту, můžeme z něj jasně vyčíst, že bod $x = 0$ je nestabilní, neboť šipky na sousedních orbitách nesměřují k němu. \diamond

1.2 Věta o implicitní funkci

V této podkapitole uvádím Větu o implicitní funkci, která není v obecném tvaru pro funkci více proměnných, ale pouze pro funkci dvou proměnných, neboť tato verze nám v dalším textu postačí.

Věta 1.4. : Věta o implicitní funkci

Nechť je dána funkce $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $F \in C^m(\mathcal{D})$, $m \geq 1$, dále nechť \mathcal{D} je otevřená množina v \mathbb{R}^2 a $(a, b) \in \mathcal{D}$. Dále nechť platí

$$F(a, b) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0. \quad (9)$$

Pak existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a a okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b , kde $\mathcal{U}(a) \times \mathcal{U}(b) \subset \mathcal{D}$ a právě jedna funkce $g : \mathcal{U}(a) \rightarrow \mathcal{U}(b)$ taková, že $g(a) = b$, $g \in C^m$ a platí $F(x, g(x)) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{U}(a)$, tj. $y = g(x)$ pro $(x, y) \in \mathcal{U}(a) \times \mathcal{U}(b)$.

Přitom platí, že

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))} \quad \forall x \in \mathcal{U}(a). \quad (10)$$

Důkaz: Viz [4], strana 95.

2 Elementární bifurkace skalárních dynamických systémů

V této kapitole uvedu teorii k elementárním bifurkacím skalárních dynamických systémů. Nejprve budu uvažovat, že na pravé straně dané diferenciální rovnice je funkce závislá na jednom reálném parametru, poté budu uvažovat funkci závislou na dvou reálných parametrech. Pro obě možnosti uvedu typy bifurkací, jejich vlastnosti a příklady.

2.1 Skalární diferenciální rovnice s jedním reálným parametrem

Budeme uvažovat diferenciální rovnici závislou na reálném parametru c , tj.

$$x' = F(c, x), \quad (11)$$

kde $F \in C^k(\mathbb{R}^2)$, $k \geq 2$. Předpokládejme, že pro $c = 0$ má (11) kritický bod $x = 0$, tj. $F(0, 0) = 0$. Pokud diferenciální rovnice (11) nemá kritický bod $x = 0$ pro $c = 0$, ale má kritický bod $x = \bar{x} \neq 0$ pro $c = \bar{c} \neq 0$, lze pomocí substituce $y = x - \bar{x}$ a $a = c - \bar{c}$ nalézt takovou rovnici $y' = G(a, y)$, pro kterou platí $x' = y' = F(a + \bar{c}, y + \bar{x}) = G(a, y)$ a $G(0, 0) = 0$.

Definice 2.1. Jestliže pro malá $c > 0$ (resp. $c < 0$) se fázový portrét diferenciální rovnice (11) v okolí bodu 0 změní (tj. změní se počet kritických bodů resp. jejich stabilita) říkáme, že diferenciální rovnice (11) **je v bodě** $(c, x) = (0, 0)$ **v bifurkaci** a hodnota parametru $c = 0$ se nazývá **bifurkační hodnota**. Bifurkaci nazýváme **lokální bifurkací**.

Poznámka 2.1. Měníme-li c , pak příslušné kritické body jsou řešením rovnice $F(c, x) = 0$. Pro pevné c může existovat více řešení x nebo žádné. Diferenciální rovnice (11) může mít tedy pro pevné c více kritických bodů nebo žádný.

Věta 2.1. *Nutnou podmínkou pro existenci lokální bifurkace je, aby kritický bod 0 byl nehyperbolickým kritickým bodem diferenciální rovnice (11), tj. aby platilo*

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0. \quad (12)$$

Důkaz: Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy je kritický bod 0 hyperbolickým kritickým bodem diferenciální rovnice (11) pro $c = 0$, tj.

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \neq 0.$$

Toto jsou předpoklady Věty o implicitní funkci 1.4. Tedy dle této věty existuje lokálně jediné spojitě řešení $x = g(c)$ třídy C^k rovnice $F(c, x) = 0$ v okolí bodu $(0, 0)$. Tedy platí $F(\bar{c}, g(\bar{c})) = 0$ pro každé \bar{c} z okolí 0. Dále z existence $x = g(c)$ je zřejmé, že každému \bar{c} z okolí 0 odpovídá jediný bod $\bar{x} = g(\bar{c})$ z okolí 0. Přitom z rovnice $F(\bar{c}, g(\bar{c})) = 0$ plyne, že \bar{x} je kritický bod pro hodnotu $c = \bar{c}$. Stabilita tohoto bodu je dána dle věty 1.3 znaménkem derivace $\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{c}, \bar{x})$. Protože $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, bude znaménko $\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{c}, \bar{x})$ stejné jako znaménko $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$ pro (\bar{c}, \bar{x}) dostatečně blízko $(0, 0)$.

Tedy v okolí hyperbolického kritického bodu se fázový portrét pro malé odchylky c od 0 nemění. Tedy lokální bifurkace nemůže nastat. \square

Důležitým pojmem, který se váže k bifurkaci, je **bifurkační diagram**. Bifurkační diagram zobrazuje kritické body x v závislosti na parametru c . Diagram nás tedy informuje o počtu kritických bodů pro danou hodnotu parametru c a také dává informaci o stabilitě daných bodů. Stabilní kritické body jsou vykresleny plnou čarou a nestabilní kritické body přerušovaně. Tuto stabilitu určujeme dle hodnoty $F_x(c, x)$ v daném bodě dle následující věty 2.2. Tato věta je vlastně jen obměnou věty 1.3 s tím rozdílem, že na pravé straně diferenciální rovnice se nevyskytuje funkce $f(x)$, ale funkce závislá na parametru c , tj. $F(c, x)$.

Věta 2.2. *Nechť bod \bar{x} je kritickým bodem diferenciální rovnice $x' = F(c, x)$ pro $c = \bar{c}$, tj. $F(\bar{c}, \bar{x}) = 0$. Pak je-li $F_x(\bar{c}, \bar{x}) < 0$, je daný kritický bod \bar{x} asymptoticky stabilní. Je-li naopak $F_x(\bar{c}, \bar{x}) > 0$, je daný kritický bod \bar{x} nestabilní.*

Důkaz: Dosadíme do věty 1.3 za $f(x)$ funkci $F(\bar{c}, x)$, kde \bar{x} je kritický bod pro $c = \bar{c}$. Tedy dosazením dostáváme předpoklad věty 1.3, tj. $f(\bar{x}) = F(\bar{c}, \bar{x}) = 0$.

Pak jen v tvrzení dosadíme $f'(\bar{x}) = F_x(\bar{c}, \bar{x})$ a tím je věta dokázána. \square

2.1.1 Sedlová bifurkace

Je to nejčastější typ bifurkace. Nastává, pokud platí nutná podmínka (12) a

$$\frac{\partial F}{\partial c}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \neq 0. \quad (13)$$

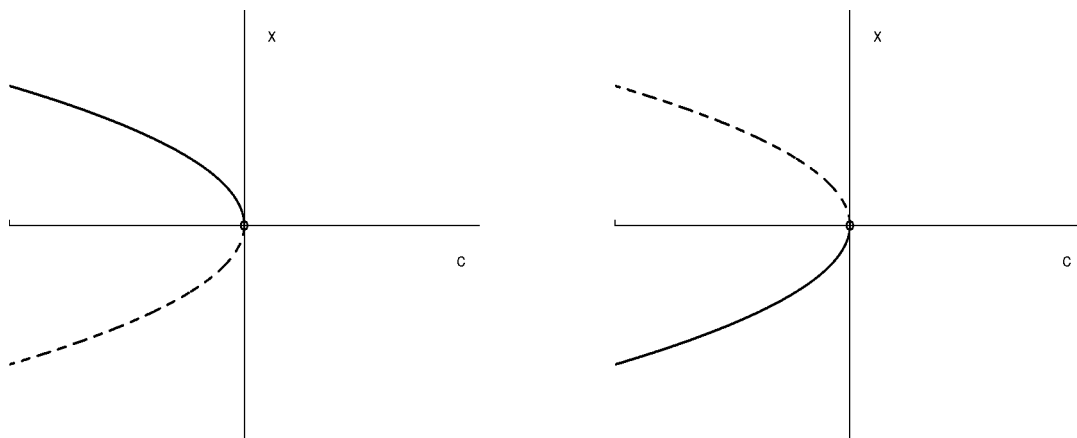
Dle Věty o implicitní funkci 1.4 lze vyjádřit c jako funkci proměnné x : $c = \psi(x)$ v okolí $(0,0)$, neboť platí předpoklady této věty tj. $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial c}(0,0) \neq 0$.

Dále protože platí $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$ a $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$, má funkce $c = \psi(x)$ v bodě $x = 0$ ostrý lokální extrém.

Věta 2.3. *Nechť platí podmínky (12) a (13). Pak má diferenciální rovnice (11) v bodě $(0,0)$ sedlovou bifurkaci a má jeden z následujících čtyř bifurkačních diagramů:*

1) $F_{xx}(0,0) < 0$ a $F_c(0,0) < 0$

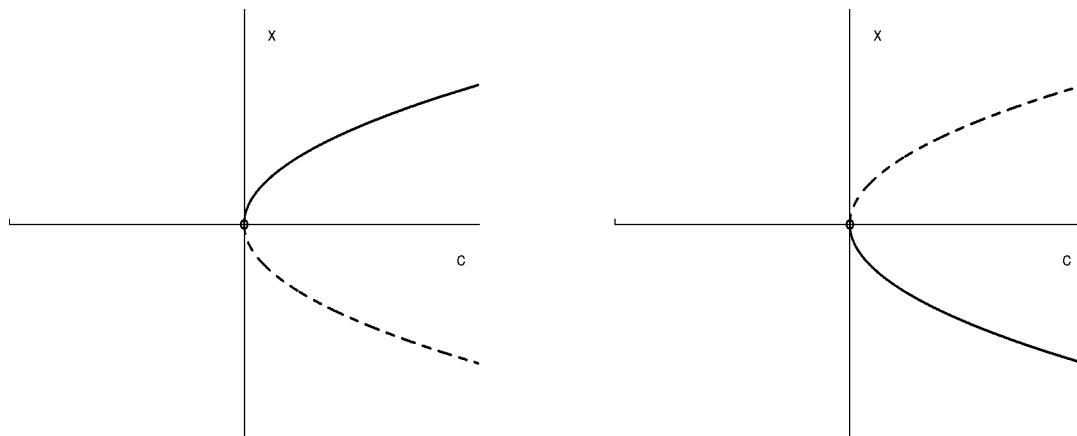
2) $F_{xx}(0,0) > 0$ a $F_c(0,0) > 0$



Obrázek 3

3) $F_{xx}(0,0) < 0$ a $F_c(0,0) > 0$

4) $F_{xx}(0,0) > 0$ a $F_c(0,0) < 0$



Obrázek 4

Důkaz: Příklad 1. Nechť platí podmínky za $F_{xx}(0,0) < 0$ a $F_c(0,0) < 0$. Protože $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$, tak první i druhá parciální derivace funkce F mají v dostatečně malém okolí bodu $(0,0)$ stejné znaménko jako v bodě $(0,0)$. Dle Věty o implicitní funkci 1.4 lze vyjádřit c jako funkci proměnné x : $c = \psi(x)$ mající spojitou druhou derivaci v okolí 0. Funkce $c = \psi(x)$ má v bodě $x = 0$ ostré lokální maximum. Platí totiž dle (10)

$$\psi'(x) = -\frac{F_x(\psi(x), x)}{F_c(\psi(x), x)}, \quad (14)$$

a odtud dle nutné podmínky (12) platí

$$\psi'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_c(0,0)} = 0. \quad (15)$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \psi''(x) = & \frac{-F_c(\psi(x), x)(F_{xc}(\psi(x), x) \cdot \psi'(x) + F_{xx}(\psi(x), x))}{(F_c(\psi(x), x))^2} + \\ & + \frac{F_x(\psi(x), x)(F_{cc}(\psi(x), x) \cdot \psi'(x) + F_{cx}(\psi(x), x))}{(F_c(\psi(x), x))^2}. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\psi''(0) &= \frac{-F_c(0,0)(F_{xc}(0,0) \cdot \psi'(0) + F_{xx}(0,0))}{(F_c(0,0))^2} + \\ &+ \frac{F_x(0,0)(F_{cc}(0,0) \cdot \psi'(0) + F_{cx}(0,0))}{(F_c(0,0))^2} = -\frac{F_{xx}(0,0)}{F_c(0,0)}.\end{aligned}$$

Díky podmínkám $F_{xx}(0,0) < 0$ a $F_c(0,0) < 0$, dostáváme

$$\psi''(0) = -\frac{F_{xx}(0,0)}{F_c(0,0)} < 0. \quad (16)$$

Odtud dostáváme tvar křivky $c = \psi(x)$ v okolí 0 a tím také máme určen typ bifurkačního diagramu.

Nyní vyšetříme stabilitu kritických bodů určených křivkou $c = \psi(x)$.

Zvolme (\bar{c}, \bar{x}) na grafu křivky $c = \psi(x)$, přičemž $\bar{x} > 0$ leží v dostatečně malém okolí 0. Z (16) plyne, že ψ' je klesající na okolí 0 a z (15) odtud dostáváme $\psi'(\bar{x}) < 0$. Tedy podle (14) je

$$-\frac{F_x(\bar{c}, \bar{x})}{F_c(\bar{c}, \bar{x})} = \psi'(\bar{x}) < 0. \quad (17)$$

Podle předpokladu je $F_c(\bar{c}, \bar{x}) < 0$, a proto musí být

$$F_x(\bar{c}, \bar{x}) < 0. \quad (18)$$

Aplikujeme-li nyní větu 2.2 na diferenciální rovnici (11) dostáváme, že kritický bod $\bar{x} > 0$ s parametrem $\bar{c} = \psi(\bar{x})$ je asymptoticky stabilní. Proto část křivky $c = \psi(x)$ odpovídající těmto kritickým bodům je na obrázku 3 (případ 1) vyznačena plnou čarou.

Nyní zvolme (\bar{c}, \bar{x}) na grafu křivky $c = \psi(x)$, přičemž $\bar{x} < 0$ leží v dostatečně malém okolí 0. Již víme, že ψ' je klesající na okolí 0, a tedy z (15) odtud dostáváme $\psi'(\bar{x}) > 0$. Tedy dle (17) a předpokladu $F_c(\bar{c}, \bar{x}) < 0$ musí platit

$$F_x(\bar{c}, \bar{x}) > 0. \quad (19)$$

Nyní dle věty 2.2 dostáváme, že kritický bod $\bar{x} < 0$ s parametrem $\bar{c} = \psi(\bar{x})$ je nestabilní. Proto část křivky $c = \psi(x)$ odpovídající těmto kritickým bodům je na obrázku 3 (případ 1) vyznačena přerušovanou čarou.

Dostáváme tedy obrázek 3 případ 1.

Ostatní případy 2,3,4 by se dokázaly analogicky. □

Ukažme příklad sedlové bifurkace u diferenciální rovnice tvaru $x' = c - x^2$.

Příklad 2.1. Nechť je dána autonomní diferenciální rovnice $x' = c - x^2$, kde $c \in \mathbb{R}$. Zjistěte, zda je diferenciální rovnice v bodě $(0, 0)$ v bifurkaci, tj. $c = 0$ je bifurkační hodnota a v okolí bodu $x = 0$ dochází k lokální bifurkaci. Nakreslete fázové portréty pro různé hodnoty parametru c . Jestliže lokální bifurkace nastane, nakreslete bifurkační diagram.

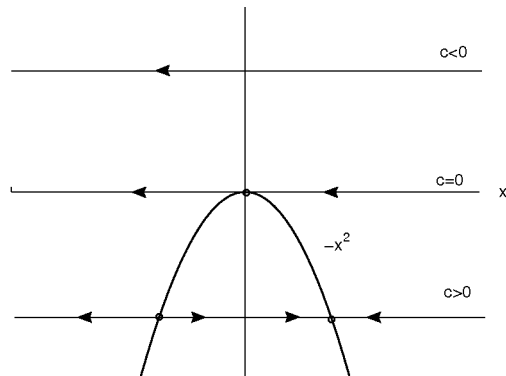
Nejprve ověříme, zda platí nutná podmínka pro existenci lokální bifurkace, tj.

$$F(0, 0) = 0 - 0^2 = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = -2 \cdot 0 = 0.$$

Nutná podmínka je tedy splněna. Nyní ověříme podmínky sedlové bifurkace, tj.

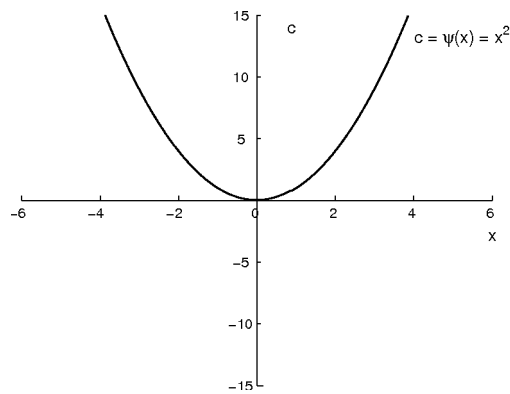
$$\frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) = 1 \neq 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = -2 \neq 0.$$

Tedy diferenciální rovnice $x' = c - x^2$ má v bodě $(0, 0)$ sedlovou bifurkaci. Nyní nakreslíme fázové portréty pro různé hodnoty parametru c . Z předpisu pravé strany $F(c, x) = c - x^2$ je zřejmé, že parametr c způsobuje posunutí grafu funkce $F(0, x) = -x^2$ vertikálně právě o vzdálenost c . Proto lze všechny tři typy fázových portrétů, tj. pro $c < 0$, $c = 0$ a $c > 0$, zakreslit do jednoho obrázku tak, že vykreslíme graf $F(0, x) = -x^2$ a poté vertikálně posouváme osu x . Dostáváme tedy následující obrázek 5.



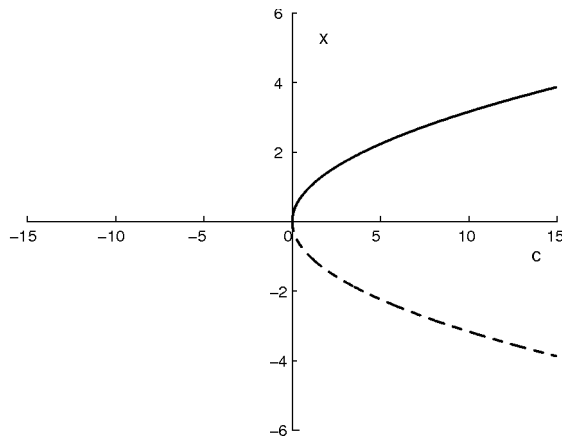
Obrázek 5

Díky Větě o implicitní funkci, můžeme c vyjádřit jako funkci x , tj. $c = \psi(x) = x^2$. Když vykreslíme její graf a poté ho otočíme tak, aby vodorovná osa byla osa c a svislá osa byla osa x , dostaneme bifurkační diagram. Graf $\psi(x)$ je vykreslen na následujícím obrázku 6.



Obrázek 6

Nyní už úpravou dostáváme bifurkační diagram na obrázku 7.



Obrázek 7

Stabilitu větve $x > 0$ a $c > 0$ jsme určili výběrem bodu $(\psi(1), 1)$ a dosadili do derivace dle x , tj. $F_x(\psi(1), 1) = -2 \cdot 1 < 0$. Tedy tato větev je asymptoticky stabilní dle věty 2.2 a proto je vykreslena plnou čarou. Naopak pro druhou větev, tj. $x < 0$ a $c < 0$, jsme zvolili bod $(\psi(-1), -1)$ a dostali jsme $F_x(\psi(-1), -1) = -2 \cdot (-1) > 0$, a tedy tato větev je nestabilní dle věty 2.2 a je vykreslena čárkovaně. \diamond

Vytvořila jsem pro ilustraci sedlové bifurkace ještě další příklad, který demonstruje lokálnost sedlové bifurkace. Tedy, že diferenciální rovnice je v bifurkaci (sedlové) opravdu pouze v určitém okolí bifurkačního bodu $(0, 0)$.

Příklad 2.2. Nechť je dána autonomní diferenciální rovnice $x' = x \sin(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Zjistěte, zda je diferenciální rovnice v bodě $(0, 0)$ v bifurkaci, tj. $c = 0$ je bifurkační hodnota a v okolí bodu $x = 0$ dochází k lokální bifurkaci. Nakreslete fázové portréty pro různé hodnoty parametru c . Jestliže lokální bifurkace nastane, nakreslete bifurkační diagram.

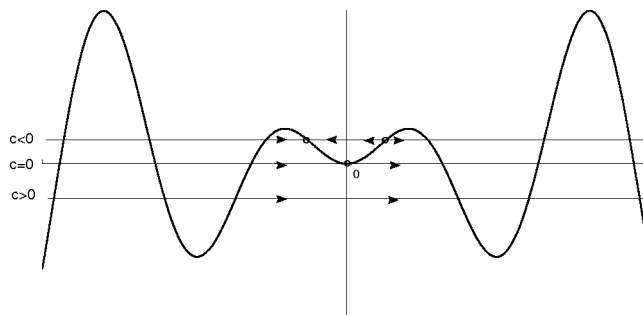
Nejprve ověříme, zda platí nutná podmínka pro existenci lokální bifurkace, tj.

$$F(0, 0) = 0 \cdot \sin(0) + 0 = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) = 0.$$

Nutná podmínka je tedy splněna. Nyní ověříme podmínky sedlové bifurkace, tj.

$$\frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) = 1 \neq 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = 2\cos(0) - 0 \cdot \sin(0) = 2 \neq 0.$$

Tedy diferenciální rovnice $x' = x\sin(x) + c$ má v bodě $(0, 0)$ sedlovou bifurkaci. Nyní nakreslíme fázové portréty pro různé hodnoty parametru c . Z předpisu pravé strany $F(c, x) = x\sin(x) + c$ je zřejmé, že parametr c způsobuje posunutí grafu funkce $F(0, x) = x\sin(x)$ vertikálně právě o vzdálenost c . Proto lze všechny tři typy fázových portrétů, tj. pro $c < 0$, $c = 0$ a $c > 0$, zakreslit do jednoho obrázku tak, že vykreslíme graf $F(0, x) = x\sin(x)$ a poté vertikálně posouváme osu x . Dostáváme tedy následující obrázek 8.



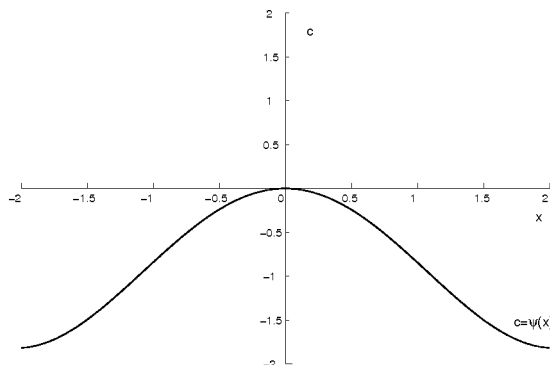
Obrázek 8

Na tomto obrázku je jasně vidět, že sedlová bifurkace nastává pouze na určitém okolí bodu $x = 0$ a pouze pro malá c v okolí 0. Kritické body v tomto okolí jsou zvýrazněny kolečky. Je zřejmé, že v tomto okolí má diferenciální rovnice pro $c < 0$ pouze 2 kritické body (jeden asymptoticky stabilní a druhý nestabilní), dále pro $c = 0$ má jeden kritický bod (nestabilní) a pro $c > 0$ nemá žádný kritický bod. Nastává tedy lokální sedlová bifurkace v okolí bodu $x = 0$.

Toto okolí určíme tak, že nalezneme body x , ve kterých nabývá funkce $F(0, x) = x\sin(x)$ lokálních maxim v okolí bodu 0. Z obrázku 8 je zřejmé, že pokud vezmeme interval, jehož krajní body jsou právě body, ve kterých má funkce $F(0, x) = x\sin(x)$ tyto lokální extrémy, pak tento interval je hledaným okolím x .

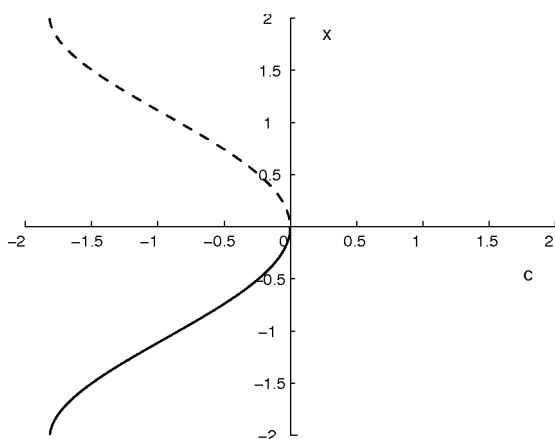
Dále tedy vykreslíme bifurkační diagram sedlové bifurkace, samozřejmě pouze pro $x \in [-2.0288, 2.0288]$ vypočtené dle předchozích úvah.

Díky Větě o implicitní funkci 1.4, můžeme c vyjádřit jako funkci x , tj. $c = \psi(x) = -x \sin(x)$. Graf $\psi(x)$ je vykreslen na následujícím obrázku 9.



Obrázek 9

Nyní když vykreslíme graf $\psi(x)$ a otočíme ho tak, aby vodorovná osa byla osa c a svislá osa byla osa x , dostaneme bifurkační diagram na obrázku 10.



Obrázek 10

Stabilitu větve $x > 0$ a $c < 0$ jsme určili výběrem bodu $(\psi(1), 1)$ a dosadili do derivace dle x , tj. $F_x(\psi(1), 1) = \sin(1) + \cos(1) \doteq 1,3818 > 0$. Tedy tato větev je nestabilní dle věty 2.2 a proto je vykreslena čárkovaně. Naopak pro druhou větev, tj. $x < 0$ a $c < 0$, jsme zvolili bod $(\psi(-1), -1)$ a dostali jsme $F_x(\psi(-1), -1) \doteq -1,3818 < 0$, a tedy tato větev je asymptoticky stabilní. \diamond

2.1.2 Transkritická bifurkace

Tato bifurkace nastává, pokud jsou obě první parciální derivace funkce $F(c, x)$ v bodě $(0, 0)$ nulové, tj. derivace podle x i derivace podle c , a nelze tedy vyjádřit x jako funkci proměnné c nebo c jako funkci proměnné x dle Věty o implicitní funkci 1.4, neboť nejsou splněny její předpoklady.

Věta 2.4. *Nechť platí (12) a navíc*

$$\frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0, \quad \det(HF(0, 0)) < 0. \quad (20)$$

Pak má diferenciální rovnice (11) v bodě $(0, 0)$ transkritickou bifurkaci, která se skládá ze dvou větví kritických bodů protínajících se v $(0, 0)$ a měnící při přechodu bodem $(0, 0)$ stabilitu.

Důkaz: Na funkci $F(c, x)$ použijeme v okolí $(0, 0)$ Taylorův vzorec, tedy dostáváme:

$$F(c, x) = F(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial F}{\partial c}(0, 0)c + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial c}(0, 0)cx + \frac{\partial^2 F}{\partial c^2}(0, 0)c^2 \right) + r(c, x). \quad (21)$$

Pro zbytek $r(c, x)$ platí, že $\lim_{(c,x) \rightarrow (0,0)} \frac{r(c,x)}{x^2+c^2} = 0$, tedy pro body (c, x) dostatečně blízko bodu $(0, 0)$ lze $r(c, x)$ zanedbat. Tedy dostáváme:

$$F(c, x) \doteq \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta cx + \gamma c^2). \quad (22)$$

Nulové body funkce $\alpha x^2 + 2\beta cx + \gamma c^2$ aproximují kritické body diferenciální rovnice $x' = F(c, x)$. Řešíme tedy rovnici $\alpha x^2 + 2\beta cx + \gamma c^2 = 0$ a dostáváme následující kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-2\beta c \pm \sqrt{4\beta^2 c^2 - 4\alpha\gamma c^2}}{2\alpha} = \frac{(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})c}{\alpha}. \quad (23)$$

Dále z předpokladu $\det(HF(0, 0)) < 0$, platí:

$$\det(HF(0, 0)) = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\gamma - \beta^2 < 0 \Rightarrow \beta^2 - \alpha\gamma > 0. \quad (24)$$

Neboť je tedy determinant kladný, dostáváme předpisy pro 2 přímky které aproximují $\psi_1(c)$ a $\psi_2(c)$, tj. křivky kritických bodů.

$$\begin{aligned}x &= \frac{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})}{\alpha}c \doteq \psi_1(c) \\x &= \frac{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})}{\alpha}c \doteq \psi_2(c)\end{aligned}\tag{25}$$

Tedy bifurkační diagram má opravdu dvě větve. Stabilita jednotlivých částí větví v bifurkačním diagramu se určí ze znaménka derivace $\frac{\partial F}{\partial x}(c, x) \doteq \alpha x + \beta c$ dle věty 2.2. Do této derivace budeme dosazovat body (c, x) z větví:

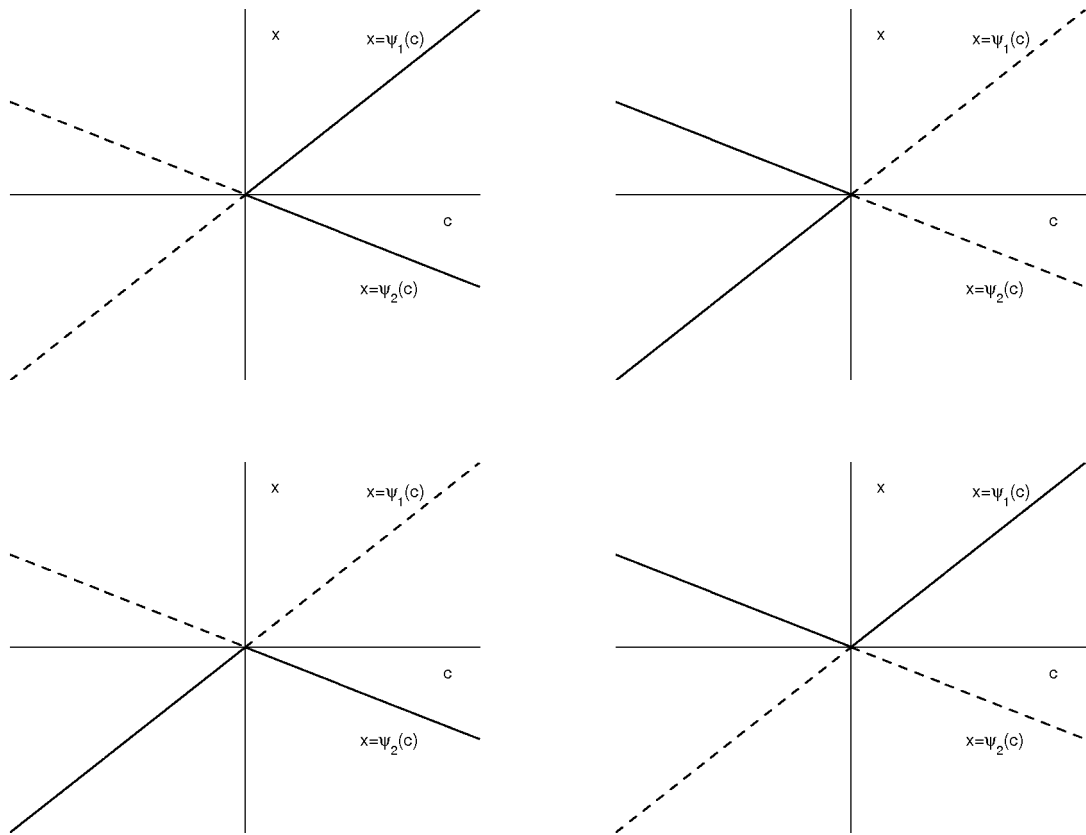
$$\begin{aligned}c > 0 : x = \psi_1(c) , & \quad c < 0 : x = \psi_1(c), \\x = \psi_2(c) , & \quad x = \psi_2(c).\end{aligned}$$

Ze vztahů (25) je zřejmé, že jedna z přímek aproximujících skutečnou větev kritických bodů má tvar $x = \psi(c) = kc$, kde $k \in \mathbb{R}$. Derivaci podle proměnné x funkce F lze dle předchozího aproximovat takto $\frac{\partial F}{\partial x}(c, x) \doteq \alpha x + \beta c$. Nyní když dosadíme do této derivace bod přímky $x = \psi(c) = kc$ dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c, kc) \doteq \alpha kc + \beta c = (\alpha k + \beta)c,$$

kde $(\alpha k + \beta)$ je konstanta. Tedy znaménko derivace $\frac{\partial F}{\partial x}(c, x)$ v daném bodě přímky se mění pouze se změnou znaménka c . Tedy větev aproximovaná danou přímkou $x = \psi(c) = kc$ při průchodu bodem $(0, 0)$ skutečně mění stabilitu, neboť mění znaménko $\frac{\partial F}{\partial x}(c, x)$ a to dle věty 2.2 znamená změnu stability.

Nyní vykreslíme bifurkační diagram. Stabilita na částech větví se může lišit podle zadání. Zde jsme proto vykreslili všechny čtyři možnosti stability.



Obrázek 11

□

Poznámka 2.2. Stabilitu bodů na jednotlivých větvích kritických bodů určíme ze znaménka ve výrazu $\frac{\partial F}{\partial x}(c, x)$ pomocí věty 2.2 dosazením konkrétních hodnot na větvích.

Ukažme příklad transkritické bifurkace u diferenciální rovnice $x' = cx - x^2$.

Příklad 2.3. Necht' je dána autonomní diferenciální rovnice $x' = cx - x^2$, kde $c \in \mathbb{R}$. Zjistěte, zda je diferenciální rovnice v bodě $(0, 0)$ v bifurkaci, tj. $c = 0$ je bifurkační hodnota a v okolí bodu $x = 0$ dochází k lokální bifurkaci. Nakreslete fázové portréty pro různé hodnoty parametru c . Jestliže lokální bifurkace nastane, nakreslete bifurkační diagram.

Nejprve ověříme, zda platí nutná podmínka pro existenci lokální bifurkace, tj.

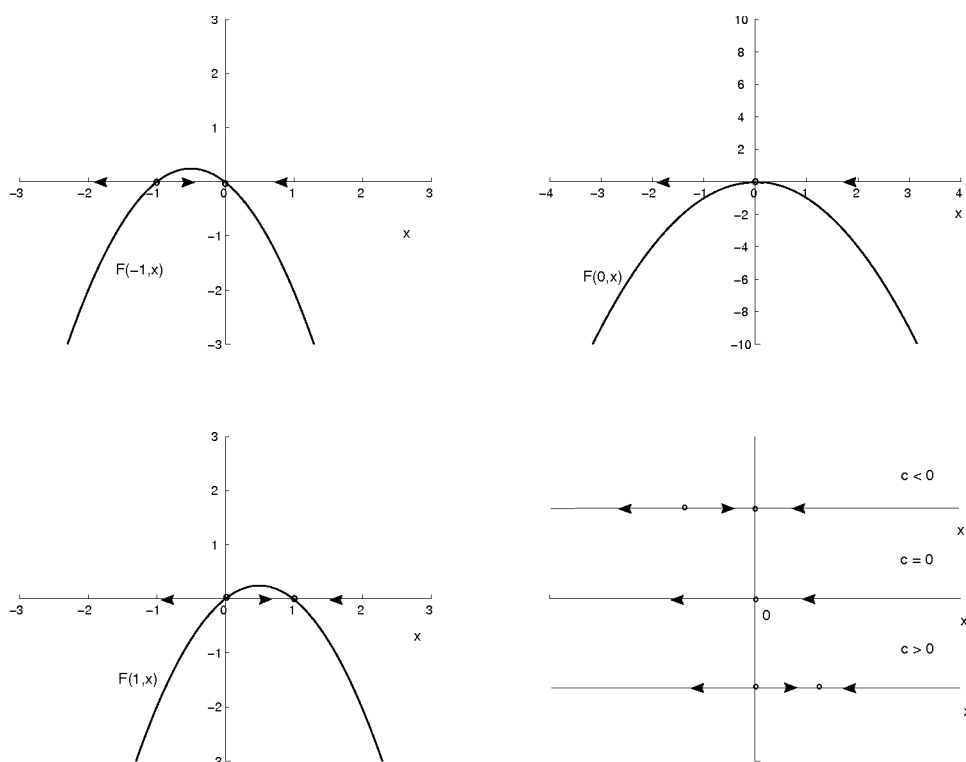
$$F(0,0) = 0 \cdot 0 - 0^2 = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0 - 2 \cdot 0 = 0.$$

Nutná podmínka je tedy splněna. Nyní ověříme podmínky transkritické bifurkace, tj.

$$\frac{\partial F}{\partial c}(0,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = -2 \neq 0,$$

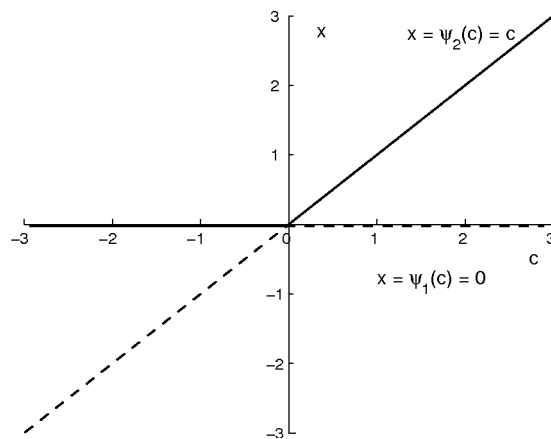
$$\det(HF(0,0)) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Tedy diferenciální rovnice $x' = cx - x^2$ má v bodě $(0,0)$ transkritickou bifurkaci. Nyní nakreslíme fázové portréty i spolu s funkcemi $F(c,x)$ pro konkrétní hodnoty parametru c . Poté vykreslíme typy fázových portrétů pro $c \in \mathbb{R}$.



Obrázek 12

Nyní určíme bifurkační diagram. Nejdříve řešíme rovnici $cx - x^2 = 0$, tj. $x[c - x] = 0$, a tedy řešení jsou $x = 0$ a $x = c$. Označíme $\psi_1(c) = 0$ a $\psi_2(c) = c$. Na obrázku 13 vykreslen bifurkační diagram, jehož větve jsou právě tyto funkce. Stabilita větví se určí dle věty 2.2. Pro bod $(-1, 0)$ je $F_x(-1, 0) = -1 < 0$, a tedy větev je asymptoticky stabilní. Dále pro bod $(1, 0)$ je $F_x(1, 0) = 1 > 0$, a tedy větev je nestabilní. Pro bod $(1, 1)$ je $F_x(1, 1) = -1 < 0$, a tedy větev je asymptoticky stabilní a pro bod $(-1, -1)$ je $F_x(-1, -1) = 1 > 0$, a tedy větev je nestabilní.



Obrázek 13

◇

Vytvořila jsem pro ilustraci transkritické bifurkace ještě další příklad, který demonstruje lokálnost transkritické bifurkace. Tedy, že diferenciální rovnice je v bifurkaci (transkritické) opravdu pouze v určitém okolí bifurkačního bodu $(0, 0)$.

Příklad 2.4. Nechť je dána autonomní diferenciální rovnice $x' = x \sin(x) + cx$, kde $c \in \mathbb{R}$. Zjistěte, zda je diferenciální rovnice v bodě $(0, 0)$ v bifurkaci, tj. $c = 0$ je bifurkační hodnota a v okolí bodu $x = 0$ dochází k bifurkaci. Nakreslete fázové portréty pro různé hodnoty parametru c . Jestliže lokální bifurkace nastane, nakreslete bifurkační diagram.

Nejprve ověříme, zda platí nutná podmínka pro existenci lokální bifurkace, tj.

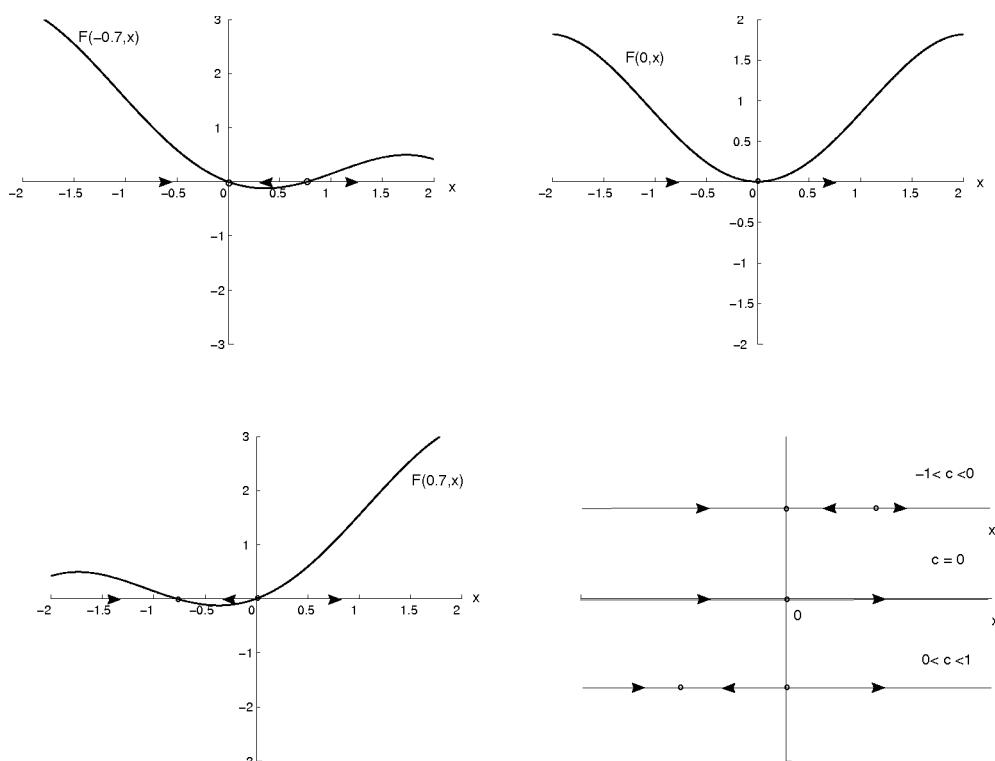
$$F(0, 0) = 0 \cdot \sin(0) + 0 = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) + 0 = 0.$$

Nutná podmínka je tedy splněna. Nyní ověříme podmínky transkritické bifurkace, tj.

$$\frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = 2\cos(0) - 0 \cdot \sin(0) = 2 \neq 0,$$

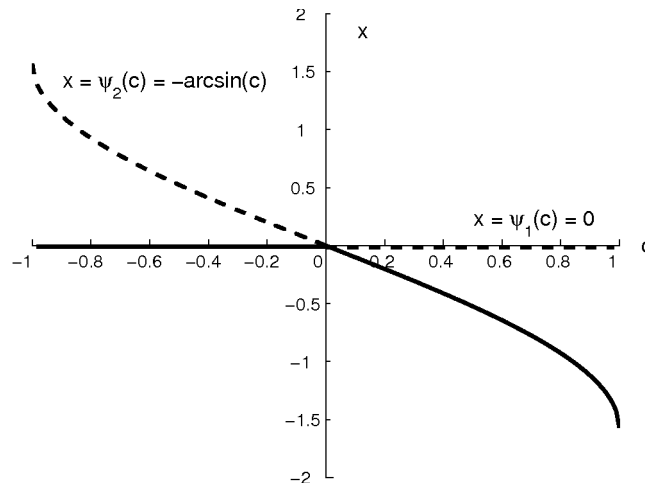
$$\det(HF(0,0)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Tedy diferenciální rovnice $x' = x\sin(x) + cx$ má v bodě $(0, 0)$ transkritickou bifurkaci. Nyní nakreslíme fázové portréty i spolu s funkcemi $F(c, x)$ pro konkrétní hodnoty parametru c . Záměrně volíme $c \in (-1, 1)$, neboť c má být malé v okolí 0, ale ten hlavní důvod této volby bude ukázán až dále v příkladu.



Obrázek 14

Nyní určíme bifurkační diagram. Nejdříve řešíme rovnici $x\sin(x) + cx = 0$, tj. $x[\sin(x) + c] = 0$, a tedy řešení jsou $x = 0$ a $x = -\arcsin(c)$. Označíme $\psi_1(c) = 0$ a $\psi_2(c) = -\arcsin(c)$. Na obrázku 15 vykreslen bifurkační diagram, jehož větve jsou právě tyto funkce. Stabilita větví je určena dle věty 2.2 dosazením bodů z konkrétních větví do derivace $\frac{\partial F}{\partial x}(c, x) = \sin(x) + x\cos(x) + c$ stejně jako v předchozích příkladech.



Obrázek 15

Je zřejmé, že okolí, na kterém nastává transkritická bifurkace je $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Odtud hodnoty c , pro které nastává lokální transkritická bifurkace, jsou $c \in (-1, 1)$. Je tomu tak, protože v bodech $(1, -\frac{\pi}{2})$ a $(-1, \frac{\pi}{2})$ platí $\frac{\partial F}{\partial x}(1, -\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}\cos(-\frac{\pi}{2}) + 1 = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial x}(-1, \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}) - 1 = 0$, a tedy větu 2.2 o stabilitě nelze pro tyto body použít. Nelze tedy říci, zda stabilita těchto bodů odpovídá stabilitě na větvích bifurkačního diagramu na obrázku 15. Proto tyto body již nepatří do okolí bodu $(0,0)$, na kterém nastává transkritická bifurkace.

◇

2.1.3 Vidlová bifurkace

Na následujících obrázcích 16 a 17 jsou vykresleny typické bifurkační diagramy vidlové bifurkace. Vždy pro malá $c < 0$ nebo $c > 0$ má diferenciální rovnice 3 kritické body, pro opačnou poloosu tj. malá $c > 0$ nebo $c < 0$ má vždy pouze 1 kritický bod. Bifurkační diagram připomíná vidle, proto se užívá název vidlová bifurkace.

Následující věta uvádí podmínky, za kterých nastává speciální typ vidlové bifurkace.

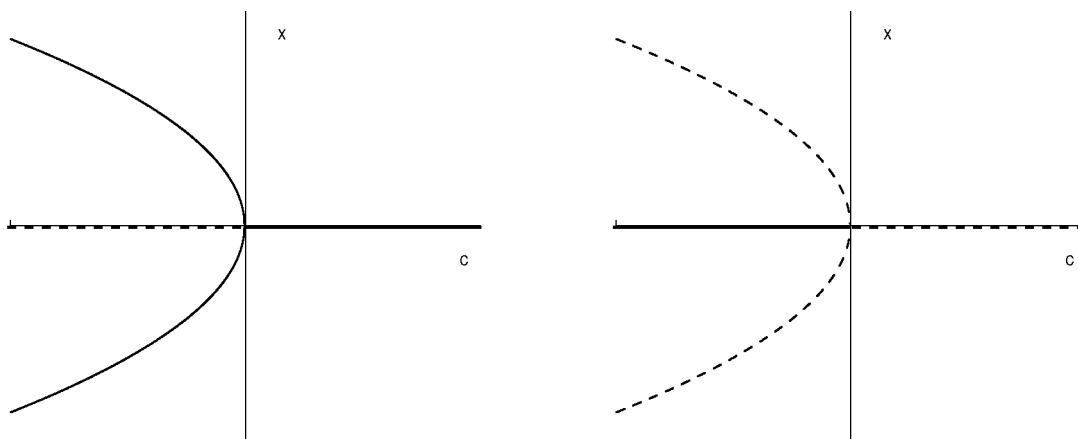
Věta 2.5. *Nechť platí podmínky (12) a (13). Pak má diferenciální rovnice*

$$x' = xF(c, x) \quad (26)$$

v bodě $(0, 0)$ vidlovou bifurkaci a má jeden ze čtyř bifurkačních diagramů uvedených na obrázcích 16 a 17.

1) $F_{xx}(0, 0) < 0$ a $F_c(0, 0) < 0$

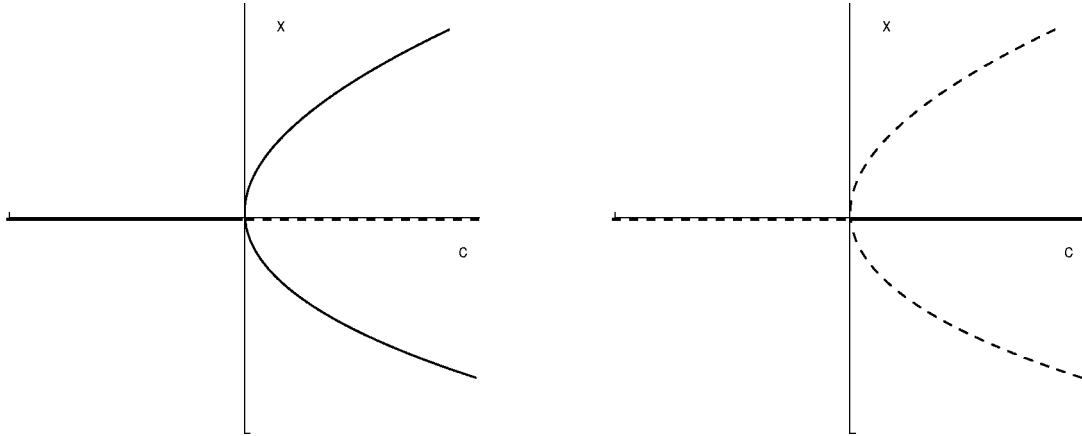
2) $F_{xx}(0, 0) > 0$ a $F_c(0, 0) > 0$



Obrázek 16

$$3) F_{xx}(0,0) < 0 \text{ a } F_c(0,0) > 0$$

$$4) F_{xx}(0,0) > 0 \text{ a } F_c(0,0) < 0$$



Obrázek 17

Důkaz: Kritické body rovnice (26) určíme z rovnice

$$xF(c, x) = 0.$$

Z rovnice $x = 0$ plyne, že kritickému bodu $x = 0$ odpovídá libovolná reálná hodnota parametru c . Proto osa c na obrázcích 16 a 17 je částí bifurkačního diagramu.

Další kritické body x a k nim příslušné hodnoty c dostaneme z rovnice $F(c, x) = 0$.

Případ 1. Nechť platí podmínky $F_{xx}(0,0) < 0$ a $F_c(0,0) < 0$. Stejně jako v důkazu věty 2.3 dostáváme funkci $c = \psi(x)$, jejíž graf má přibližně tvar paraboly s vrcholem v počátku - viz obrázek 16. Tato parabola je druhou částí bifurkačního diagramu.

Vyšetříme nyní stabilitu kritických bodů určených oběma částmi bifurkačního diagramu.

Nejprve zvolme bod (\bar{c}, \bar{x}) na křivce $c = \psi(x)$ v dostatečně malém okolí počátku. Stejně jako v důkaze věty 2.3 odvodíme pro $\bar{x} > 0$ nerovnost (18) a pro $\bar{x} < 0$ nerovnost (19). Tedy platí

$$\begin{aligned} \bar{x} > 0 &\Rightarrow F_x(\bar{c}, \bar{x}) < 0, \\ \bar{x} < 0 &\Rightarrow F_x(\bar{c}, \bar{x}) > 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Nyní na rozdíl od důkazu věty 2.3, aplikujeme větu 2.2 na diferenciální rovnici (26) a tedy dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x}(xF(c, x)) = F(c, x) + x\frac{\partial F}{\partial x}(c, x). \quad (28)$$

Pro uvažovaný bod (\bar{c}, \bar{x}) platí $F(\bar{c}, \bar{x}) = 0$, a tedy po dosazení tohoto bodu do (28) dostáváme vzhledem k (27)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{x}F(\bar{c}, \bar{x})) = \bar{x}F_x(\bar{c}, \bar{x}) < 0.$$

Podle věty 2.2 jsou proto kritické body \bar{x} určené funkcí $c = \psi(x)$ asymptoticky stabilní a celý graf křivky $c = \psi(x)$ je vyznačen plnou čarou. Závěrem zvolme bod $(\bar{c}, 0)$ na ose c v dostatečně malém okolí počátku. Protože $F_c(0, 0) < 0$, je funkce $F(\cdot, 0)$ klesající v proměnné c v okolí počátku. Jelikož $F(0, 0) = 0$, platí

$$\begin{aligned} \bar{c} > 0 &\Rightarrow F(\bar{c}, 0) < 0, \\ \bar{c} < 0 &\Rightarrow F(\bar{c}, 0) > 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Dosadíme-li bod $(\bar{c}, 0)$ do (28), dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x}(xF(c, x))_{(\bar{c}, 0)} = F(\bar{c}, 0),$$

což vzhledem k (29) znamená, že kritický bod $\bar{x} = 0$ s parametrem $\bar{c} > 0$ je asymptoticky stabilní, zatímco kritický bod $\bar{x} = 0$ s parametrem $\bar{c} < 0$ je nestabilní. Proto v bifurkačním diagramu je kladná část osy c vykreslena plnou čarou a záporná část osy c je čárkovaná. Bifurkační diagram je tedy na obrázku 16 vlevo (případ 1). Ostatní případy 2,3,4 by se dokázaly analogicky. \square

V následujícím příkladě ukážu vidlovou bifurkaci v bodě $(0, 0)$.

Příklad 2.5. Nechť je dána diferenciální rovnice $x' = G(c, x) = cx + x^3$, kde $c \in \mathbb{R}$. Zjistěte, zda je diferenciální rovnice v bodě $(0, 0)$ v bifurkaci, tj. $c = 0$ je bifurkační hodnota a v okolí bodu $x = 0$ dochází k lokální bifurkaci. Nakreslete fázové portréty pro různé hodnoty parametru c . Jestliže lokální bifurkace nastane, nakreslete bifurkační diagram.

Nejprve ověříme, zda platí nutná podmínka (12) pro existenci lokální bifurkace, tj.

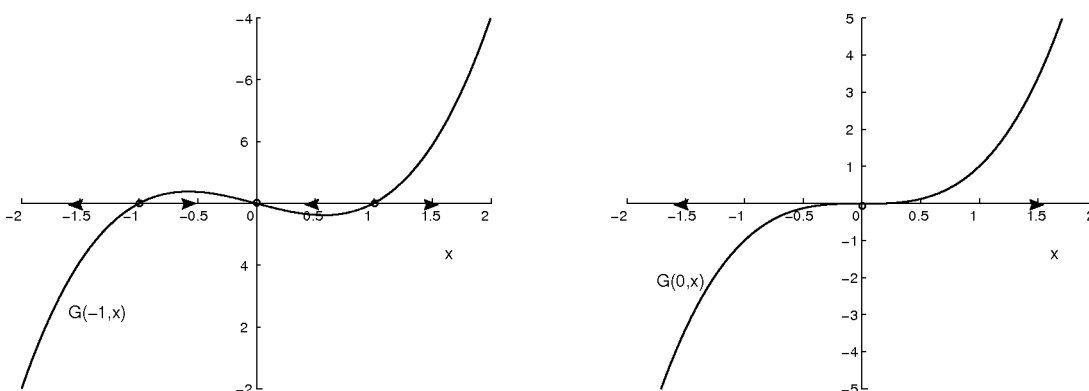
$$G(0,0) = 0 \cdot 0 + 0^3 = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(0,0) = 0 + 3 \cdot 0^2 = 0.$$

Nyní ověříme, zda platí předpoklady věty 2.5, a zda tedy nastává v bodě $(0,0)$ vidlová bifurkace. Rovnici $x' = cx + x^3$ lze zapsat ve tvaru $x' = x(c + x^2)$. Funkce $F(c, x)$ z věty 2.5, pro kterou budeme ověřovat podmínky věty, je tvaru $F(c, x) = c + x^2$. Ověřme tedy podmínky (12) a (13), tj.

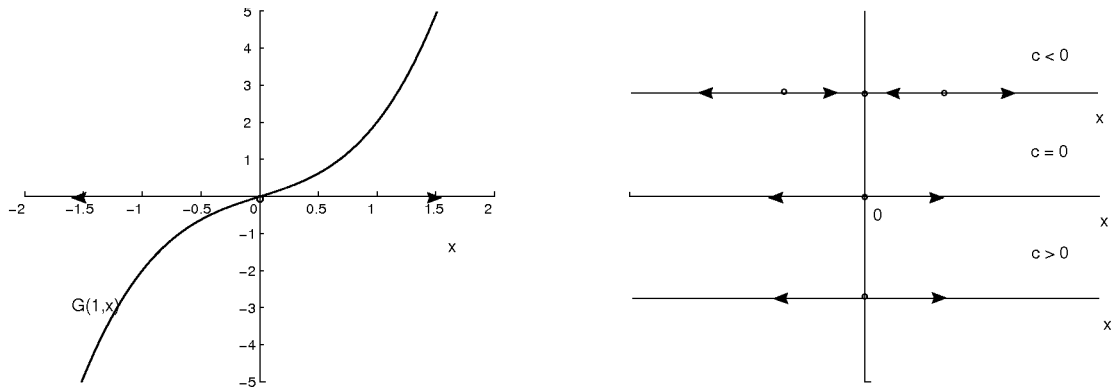
$$F(0,0) = 0 + 0^2 = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0 + 2 \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial c}(0,0) = 1 + 0^2 = 1 \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 2 \neq 0.$$

Tedy diferenciální rovnice $x' = cx + x^3$ má v bodě $(0,0)$ vidlovou bifurkaci. Nyní pro názornost nakreslíme fázové portréty i spolu s funkcemi $G(c, x)$ pro konkrétní hodnoty parametru c . Poté vykreslíme typy fázových portrétů pro $c \in \mathbb{R}$.



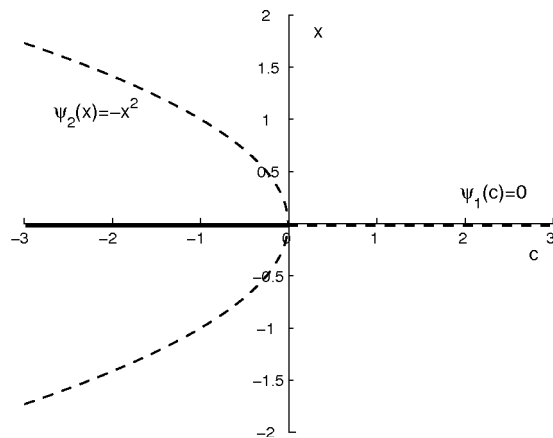
Obrázek 18



Obrázek 19

Nyní určíme bifurkační diagram. Protože jsou splněny podmínky případu 2 věty 2.5, tj. $F_{xx}(0,0) = 2 > 0$ a $F_c(0,0) = 1 > 0$, bifurkační diagram bude typově odpovídat obrázku 16 vpravo (případ 2). Ověříme, zda je tomu opravdu tak.

Nejdříve řešíme rovnici $cx + x^3 = 0$, tj. $x[c + x^2] = 0$, a tedy řešení jsou $x = 0$ a $c = -x^2$. Označíme $x = \psi_1(c) = 0$ a $c = \psi_2(x) = -x^2$. Na obrázku 20 vykreslen bifurkační diagram, jehož větve jsou právě tyto funkce. Stabilita větví se určí dle věty 2.2. Pro bod $(-1,0)$ je $G_x(-1,0) = -1 < 0$, a tedy větev je asymptoticky stabilní. Dále pro bod $(1,0)$ je $G_x(1,0) = 1 > 0$, a tedy větev je nestabilní. Pro bod $(-1,1)$ je $G_x(-1,1) = -1 + 3 = 2 > 0$, a tedy větev je nestabilní.



Obrázek 20

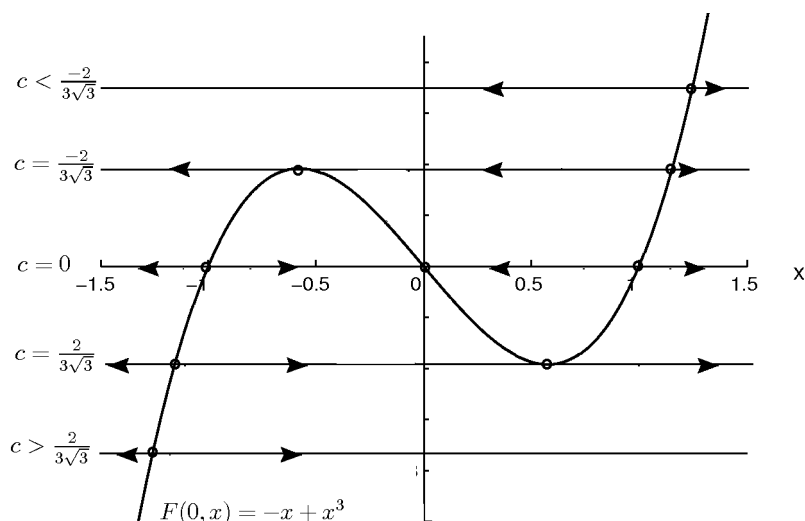
◇

2.1.4 Hystereze

V reálných modelech se často vyskytuje jev nazývaný **hystereze**. Nejlépe se tento jev dá vysvětlit na příkladu.

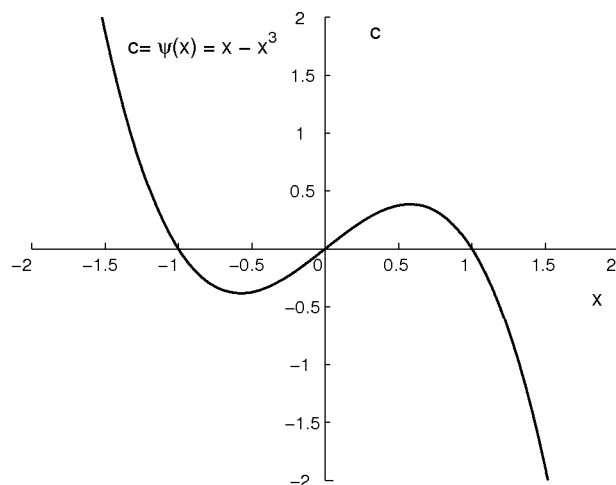
Příklad 2.6. Nechť je dána diferenciální rovnice tvaru $x' = c - x + x^3$, kde $c \in \mathbb{R}$. Vykreslete fázové portréty, pro různé hodnoty c . Najděte kritické body a určete bifurkační hodnoty, jestliže nastává lokální bifurkace, v tomto případě dále vykreslete bifurkační diagram. Vyšetřete typy bifurkací pro dané bifurkační hodnoty.

Díky Větě o implicitní funkci 1.4 lze c vyjádřit jako funkci x , tj. $c = \psi(x) = x - x^3$. Body, v nichž má tato funkce extrém, najdeme tak, že první derivaci položíme rovnu nule, tj. $1 - 3x^2 = 0$. Tato funkce má tedy extrém v bodech $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dále z předpisu pravé strany $F(c, x) = c - x + x^3$ je zřejmé, že parametr c způsobuje posunutí grafu funkce $F(0, x) = -x + x^3$ vertikálně právě o vzdálenost c . Proto lze všechny typy fázových portrétů zakreslit do jednoho obrázku tak, že vykreslíme graf $F(0, x) = -x + x^3$ a poté vertikálně posouváme osu x . Hraniční hodnoty c zde budou $0, \frac{2}{3\sqrt{3}}$ a $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, tyto c jsou extrém funkce $\psi(x) = x - x^3$. Dostáváme tedy následující obrázek 21.



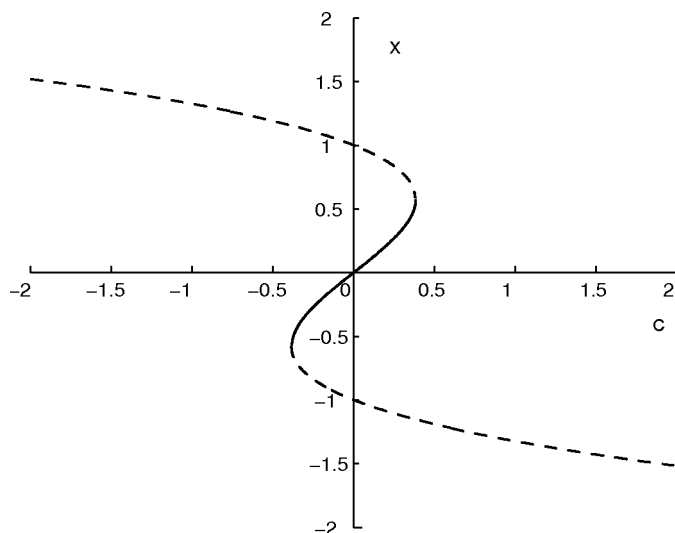
Obrázek 21

Nyní vykreslíme bifurkační diagram. Vypočítáme kritické body, tj. položíme pravou stranu rovnice rovnu nule. Tedy z $c - x + x^3 = 0$ dostáváme rovnost $c = \psi(x) = x - x^3$. Je tedy zřejmé, že c lze vyjádřit jako funkci proměnné x . Její graf je vykreslen na obrázku 22.



Obrázek 22

Nyní stačí tedy vykreslit graf $\psi(x)$ a poté ho otočit tak, aby vodorovná osa byla osa c a svislá osa byla osa x , tím dostaneme bifurkační diagram, který je vykreslen na obrázku 23.



Obrázek 23

Stabilita větví se určí dle věty 2.2. Budeme zkoumat stabilitu tří částí bifurkačního diagramu a to $x \in (-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$, kde právě body $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ a $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ jsou body, ve kterých má funkce $\psi(x)$ extrém. Nyní tedy vybereme body z těchto částí bifurkačního diagramu a dosadíme do derivace $F_x(c, x) = -1 + 3x^2$. Pro bod $(\frac{15}{8}, \frac{-3}{2})$ je $F_x(\frac{15}{8}, \frac{-3}{2}) = \frac{23}{4} > 0$, a tedy větev je nestabilní. Pro bod $(0, -1)$ je $F_x(0, -1) = 2 > 0$, a tedy větev je nestabilní. Pro bod $(0, 0)$ je $F_x(0, 0) = -1 < 0$, a tedy větev je asymptoticky stabilní. Pro bod $(0, 1)$ je $F_x(0, 1) = 2 > 0$, a tedy větev je nestabilní a pro bod $(\frac{-15}{8}, \frac{3}{2})$ je $F_x(\frac{-15}{8}, \frac{3}{2}) = \frac{23}{4} > 0$, a tedy větev je také nestabilní.

Z bifurkačního diagramu je zřejmé, že pro hodnoty $c \in (-\infty, \frac{-2}{3\sqrt{3}})$ má diferenciální rovnice 1 nestabilní kritický bod. Pro $c = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$ a $c = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ má diferenciální rovnice 2 nestabilní kritické body. Pro $c \in (\frac{-2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$ má rovnice 3 kritické body, z nichž dva jsou nestabilní a jeden asymptoticky stabilní. Pro $c \in (\frac{2}{3\sqrt{3}}, \infty)$ má rovnice opět pouze 1 nestabilní kritický bod. Je tedy zřejmé, že zde jsou bifurkačními hodnotami $c_1 = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$ a $c_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

a) Nyní se zaměříme na bifurkační hodnotu $c_1 = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$. Zjistíme, jaký typ bifurkace nastává v bodě (c_1, x_1) , tj. $(\frac{-2}{3\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$. Postupujeme tak, že zavedeme substituci $y = x - x_1 = x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $a = c - c_1 = c + \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Dostáváme

$$\begin{aligned} x' = y' &= F\left(a - \frac{2}{3\sqrt{3}}, y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = a - \frac{2}{3\sqrt{3}} - y + \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \\ &= a - y + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \left(y^3 - \sqrt{3}y^2 + y - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = a - \sqrt{3}y^2 + y^3 = G(a, y) \end{aligned}$$

Tedy platí $G(0, 0) = 0$, tj. 0 je kritický bod rovnice $y' = a - \sqrt{3}y^2 + y^3$ pro $a = 0$. Ověříme nutné podmínky pro existenci lokální bifurkace, tj.

$$G(0, 0) = 0 - \sqrt{3} \cdot 0^2 + 0^3 = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial G}{\partial y}(0, 0) = -2\sqrt{3} \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 = 0.$$

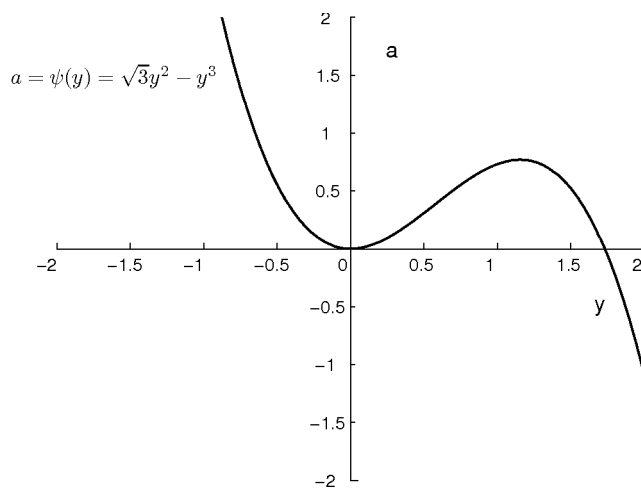
Nutná podmínka je tedy splněna. Nyní se podíváme, jestli nejsou splněny pod-

mínky sedlové bifurkace, tj.

$$\frac{\partial G}{\partial a}(0, 0) = 1 \neq 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(0, 0) = -2\sqrt{3} + 6 \cdot 0 = -2\sqrt{3} \neq 0.$$

Jsou tedy splněny podmínky sedlové bifurkace. Jedná se o lokální bifurkaci. Okolí, na kterém k lokální sedlové bifurkaci dochází je určeno dále.

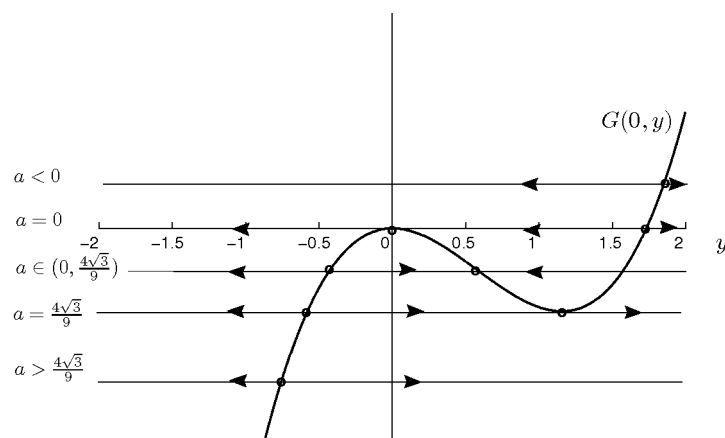
Na obrázku 24 je vykreslen graf funkce $a = \psi(y) = \sqrt{3}y^2 - y^3$. Je zřejmé, že tato funkce nabývá svého lokálního maximu v bodě $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ a jeho hodnota je $a = \frac{4\sqrt{3}}{9}$, toto získáme výpočtem $\psi'(y) = 2\sqrt{3}y - 3y^2 = 0$ a dosazením. Sedlová bifurkace nastává pouze v okolí bodu $(0, 0)$ a to pro $a \in [0, \frac{4\sqrt{3}}{9})$ a v y , které těmto a odpovídají, tj. přibližně $y \in (-0.5774, \frac{2\sqrt{3}}{3})$. Pokud bychom totiž vzali hodnoty $a > \frac{4\sqrt{3}}{9}$, dostali bychom již pouze jeden kritický bod, pro hodnoty $a \in (0, \frac{4\sqrt{3}}{9})$ bychom dostali tři kritické body pro $y \in \mathbb{R}$ a pro $a < 0$ bychom dostali jeden kritický bod. Tedy určitě by se pro hodnoty a a y mimo zjištěné okolí nejednalo o sedlovou bifurkaci. Toto je vidět na obrázku 24



Obrázek 24

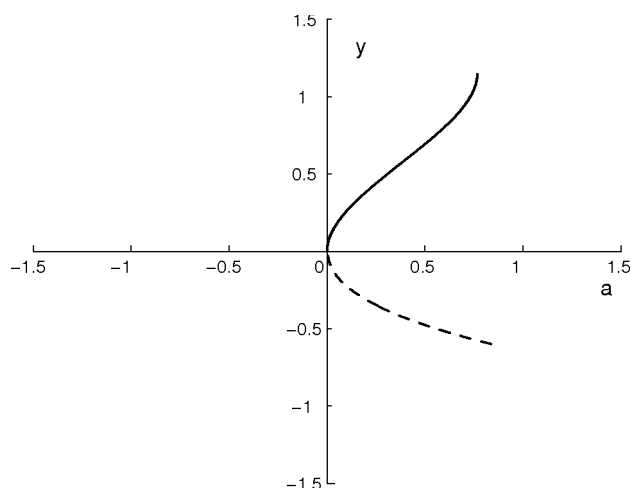
Nyní vykreslíme graf funkce $G(0, y)$. Rovnou do obrázku 25 vykreslíme fázové portréty pro různá a . Parametr a zde způsobuje posunutí grafu funkce $G(0, y) = -\sqrt{3}y^2 + y^3$ právě o hodnotu a . Schválně pro názornost nebudeme

respektovat zjištěné okolí, na kterém nastává sedlová bifurkaci.



Obrázek 25

Nyní vykreslíme bifurkační diagram. Ten bude vlastně podobný jako bifurkační diagram původní rovnice v okolí bodu $(\frac{-2}{3\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$ s tím rozdílem, že bude tento bod posunut do $(0, 0)$, neboť jsme užili substituce. Na obrázku 26 je vykreslen bifurkační diagram, který dostaneme vykreslením funkce $a = \psi(y) = \sqrt{3}y^2 - y^3$ a poté přetočením tak, aby vodorovná osa byla osa c a svislá osa byla osa x . Bereme $a \in [0, \frac{4\sqrt{3}}{9})$ a $y \in (-0.5774, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, což je okolí bodu $(0, 0)$, na kterém nastává sedlová bifurkace.



Obrázek 26

b) Nyní se zaměříme na bifurkační hodnotu $c_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Zjistíme, jaký typ bifurkace nastává v bodě kritickém bodě (c_2, x_2) , tj. $(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Postupujeme tak, že zavedeme substituci $y = x - x_1 = x - \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $a = c - c_1 = c - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ a dostáváme $y' = G(a, y) = a + \sqrt{3}y^2 + y^3$.

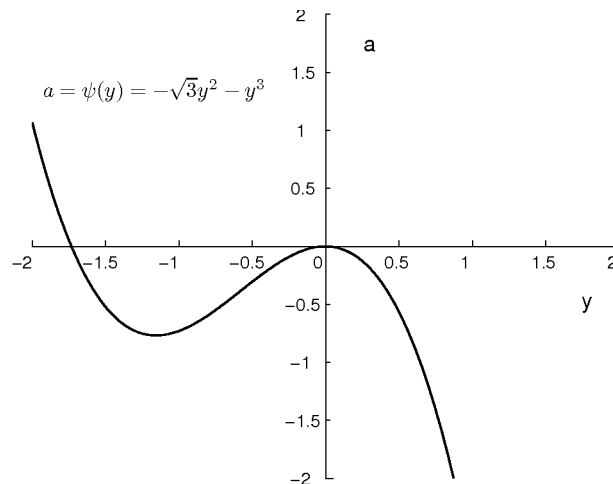
Tedy platí $G(0, 0) = 0$, tj. $(0, 0)$ je kritický bod rovnice $y' = a + \sqrt{3}y^2 + y^3$. Dále ověříme nutné podmínky pro existenci lokální bifurkace, tj.

$$G(0, 0) = 0 + \sqrt{3} \cdot 0^2 + 0^3 = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial G}{\partial y}(0, 0) = 2\sqrt{3} \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 = 0.$$

Nutná podmínka je tedy splněna. Nyní se podíváme, jestli nejsou splněny podmínky sedlové bifurkace, tj.

$$\frac{\partial G}{\partial a}(0, 0) = 1 \neq 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(0, 0) = 2\sqrt{3} + 6 \cdot 0 = 2\sqrt{3} \neq 0.$$

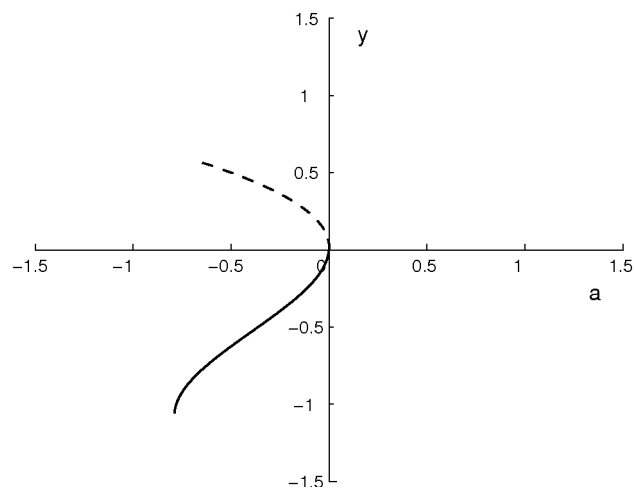
Jsou tedy splněny podmínky sedlové bifurkace. Dále postupujeme stejně jako v předchozím zadání a). Lze vyjádřit a jako funkci proměnné y takto $a = \psi(y) = -\sqrt{3}y^2 - y^3$. Její graf je vykreslen na obrázku 27.



Obrázek 27

Okolí, na kterém nastává lokální sedlová bifurkace získáme obdobnými úvahami jako v zadání a). Dostáváme tedy okolí $y \in (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0.5774)$ a $a \in (-\frac{4\sqrt{3}}{9}, 0]$.

Na následujícím obrázku 28 je vykreslen bifurkační diagram. Stabilita na větvích je opět určena pomocí věty 2.2.



Obrázek 28

◇

2.2 Skalární diferenciální rovnice se dvěma reálnými parametry

Reálné modely obvykle obsahují více parametrů, na kterých je jejich chování závislé. V předchozí podkapitole 2.1 jsme uvažovali závislost pouze na jednom reálném parametru. Nyní se podíváme na případ, kdy bude pravá strana diferenciální rovnice generující dynamický systém závislá na dvou reálných parametrech.

Budeme tedy uvažovat diferenciální rovnici závislou na reálných parametrech c a d , tj.

$$x' = F(c, d, x), \text{ kde } F \in C^k(\mathbb{R}^3), k \geq 2. \quad (30)$$

V literatuře se tento případ ilustruje pouze konkrétními příklady, neboť je zřejmé, že pokud fixujeme jeden z parametrů rovnice (30), dostáváme opět případ (11), protože na pravé straně diferenciální rovnice dostáváme funkci závislou na jednom reálném parametru, neboť ten druhý fixujeme. Dynamický systém generovaný diferenciální rovnicí (30) by bylo možné vyšetřovat tímto způsobem, tj. fixací jednoho parametru a vyšetřováním diferenciální rovnice závislé na jednom reálném parametru jako v podkapitole 2.1. To by bylo ale prakticky nemožné realizovat, neboť možností by bylo nekonečně mnoho.

Postupujeme tedy tak, že položíme $F(c, d, x) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial x}(c, d, x) = 0$. Z těchto rovnic eliminujeme x a vyvodíme závislost parametrů c a d na sobě. Získaná rovnice závislosti c a d je rovnice takzvaného **vrcholu** (anglicky **cusp**). Pokud vykreslíme graf dle získané rovnice, tj. osy budou c a d , jedná se o graf vrcholu. Tento graf nám dělí rovinu (c, d) na oblasti, ve kterých má daný dynamický systém stejné vlastnosti, tj. stejný počet kritických bodů a jejich stabilitu. Při přechodu hodnot c a d přes vrchol dochází k bifurkaci.

Pokud bychom chtěli vykreslit bifurkační diagram rovnice (30), konstruovali bychom ho v prostoru (c, d, x) z rovnice $F(c, d, x) = 0$.

Předpokládejme nyní, že pro fixovaný parametr c nastane určitý typ bifurkace dle podkapitoly 2.1. Pokud nyní uděláme řez bifurkačním diagramem $F(c, d, x) = 0$ pro tuto pevnou hodnotu parametru c , získáme bifurkační diagram daného

typu bifurkace. Stejně tak, pokud nastává určitý typ bifurkace pro určitou pevnou hodnotu parametru d , opět řezem bifurkačního diagramu v prostoru (c, d, x) dostáváme bifurkační diagram daného typu bifurkace.

Pro pochopení předchozích poznatků a postupů uvádím následující příklad, na kterém budu ilustrovat rozbor dynamického systému generovaného diferenciální rovnicí závislou na dvou reálných parametrech c a d , tj. tvaru (30).

Příklad 2.7. Nechtě je dána diferenciální rovnice

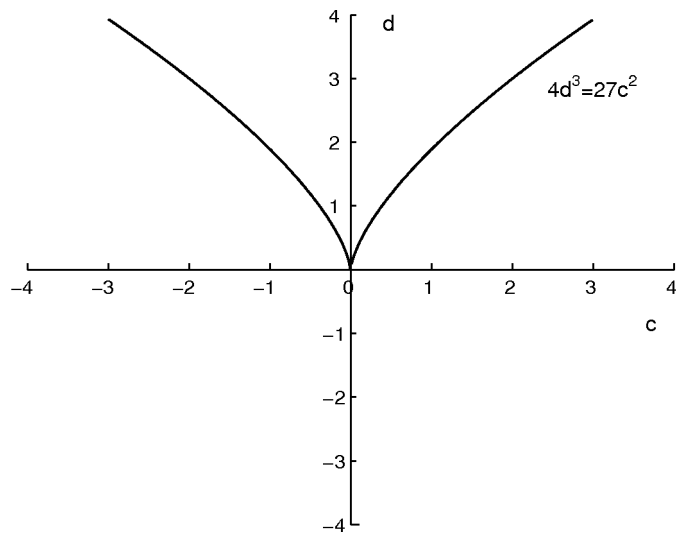
$$x' = c - dx + x^3, \quad c \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Určete rovnici vrcholu a vykreslete jeho graf. Dále vykreslete bifurkační diagram a určete typy bifurkace pro určité pevně zvolené hodnoty parametrů c a d z bifurkačního diagramu řezem v daných hodnotách parametrů.

Nejprve určíme, pro jaké hodnoty c a d má diferenciální rovnice $x' = c - dx + x^3$ nehyperbolické kritické body. Víme dle věty 2.1, že toto je nutná podmínka pro existenci lokální bifurkace - daný kritický bod musí být nehyperbolický. Dosadíme do dané diferenciální rovnice a dostáváme soustavu rovnic

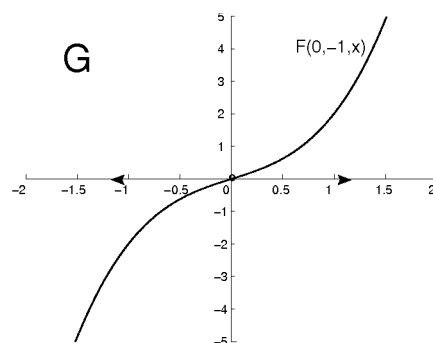
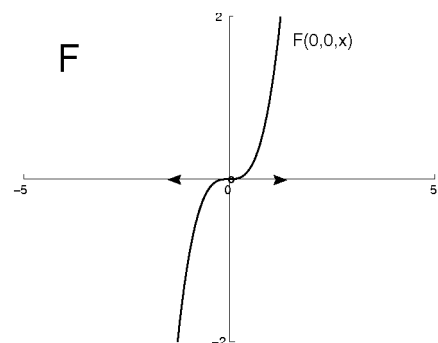
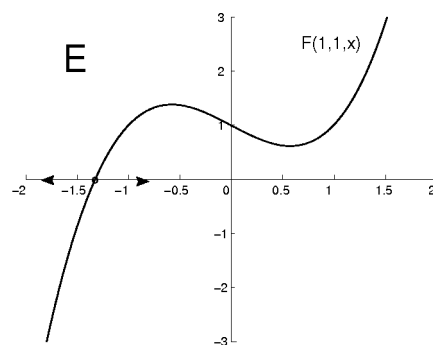
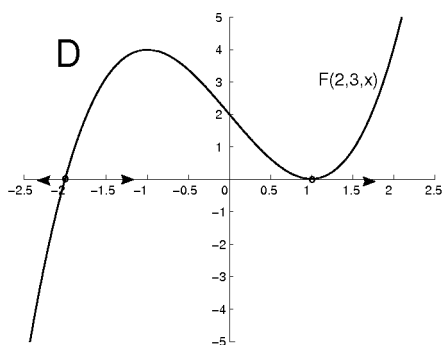
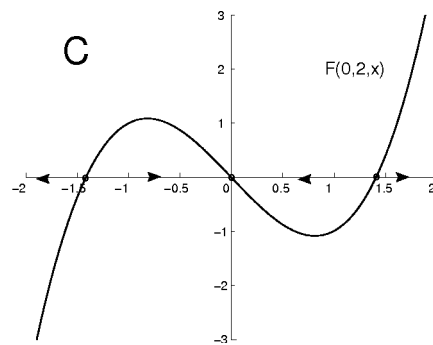
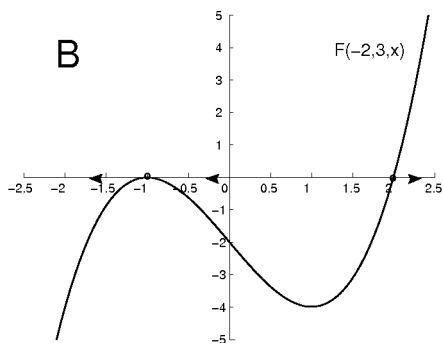
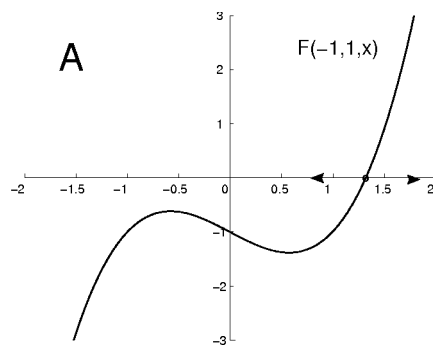
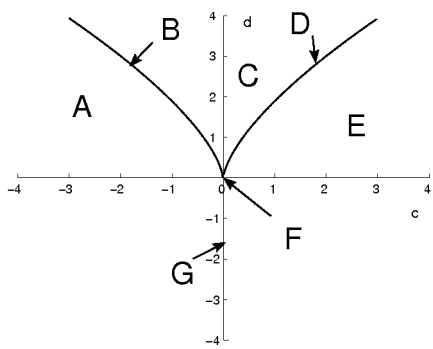
$$c - dx + x^3 = 0 \quad \text{a} \quad -d + 3x^2 = 0.$$

Z druhé rovnice dostáváme $d = 3x^2$. Nyní d dosadíme do první rovnice, tj. $c - 3x^3 + x^3 = 0$, a dostáváme $c = 2x^3$. Když nyní umocníme $d = 3x^2$ na třetí a $c = 2x^3$ na druhou, dostaneme $d^3 = 27x^6$ a $c^2 = 4x^6$. Odtud po eliminaci x , tj. položíme z předchozích rovnic $x^6 = x^6$ pomocí parametrů c a d , dostáváme rovnici vrcholu $4d^3 = 27c^2$. Na obrázku 29 je vykreslen graf vrcholu.



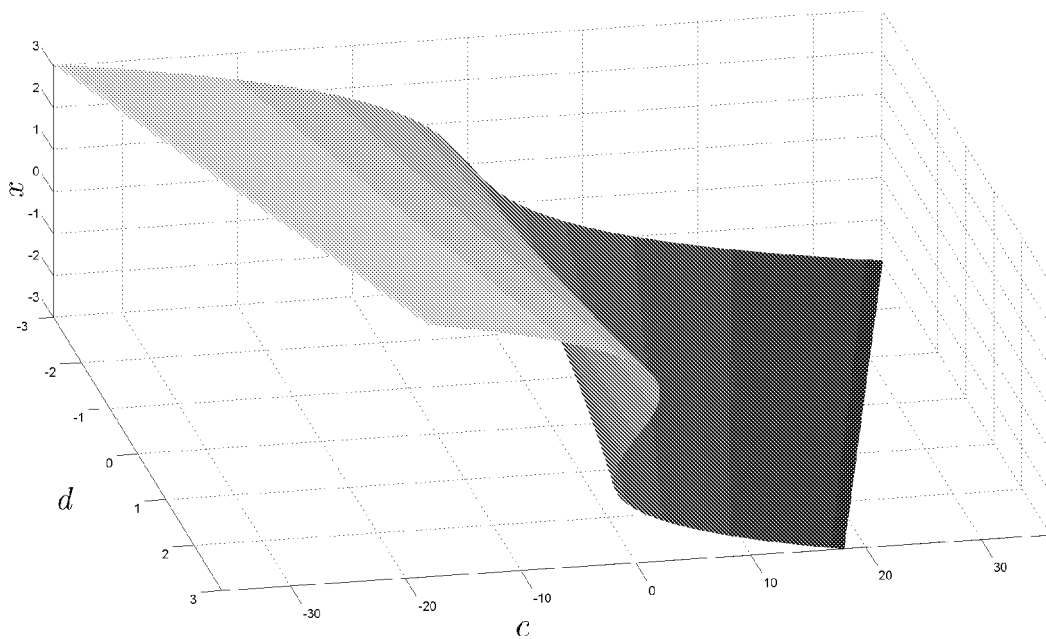
Obrázek 29

Víme, že při přechodu hodnot parametrů c a d přes hodnoty dané vrcholem může nastat bifurkace, neboť je tam splněna nutná podmínka pro vznik lokální bifurkace. Vykreslíme nyní fázové portréty pro oblasti roviny (c, d) , na které nám tuto rovinu rozdělil graf vrcholu. Na následujících obrázcích je vidět, že fázové portréty pro různé oblasti roviny (c, d) jsou různé. Hodnoty c a d dané vrcholem jsou tedy bifurkační hodnoty.

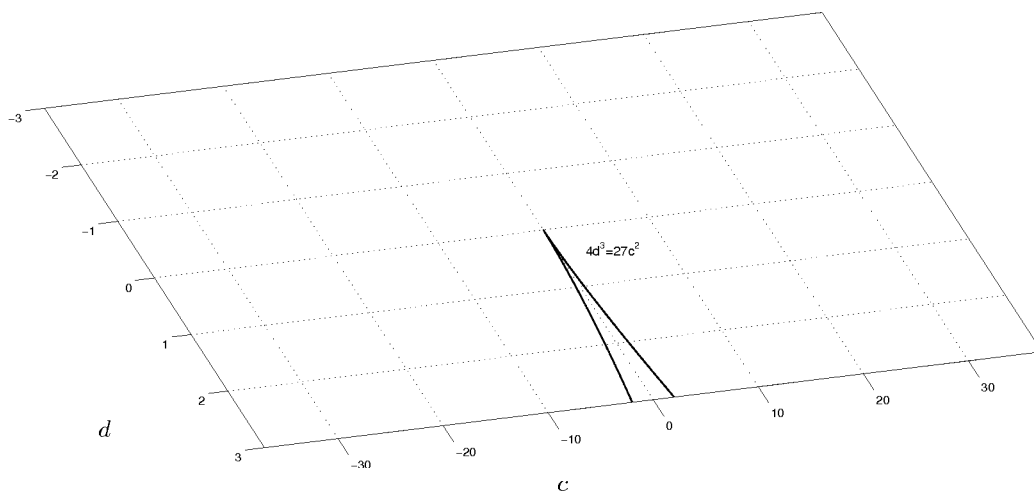


Obrázek 30

Nyní vykreslíme bifurkační diagram v prostoru (c, d, x) . Bude to vykreslení řešení rovnice $F(c, d, x) = 0$. Všimněme si „překlady“ v grafu. Hodnoty c a d v této části grafu jsou ohraničeny vrcholem $4d^3 = 27c^2$. Pro představu je vrchol vykreslen na obrázku 32.



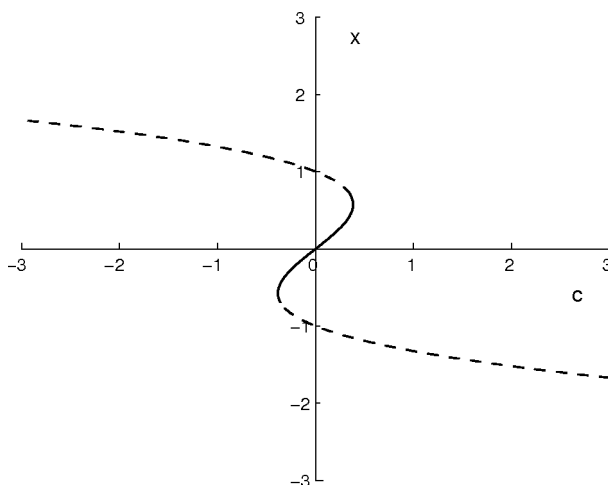
Obrázek 31



Obrázek 32

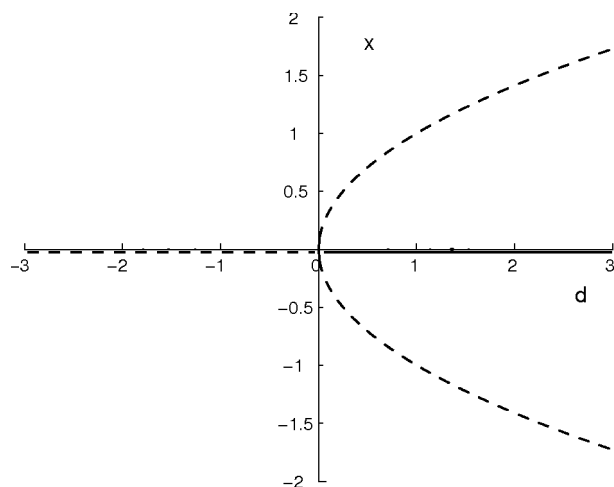
Z bifurkačního diagramu na obrázku 31 je tedy zřejmé, že při přechodu hodnot c a d přes hodnoty vrcholu $4d^3 = 27c^2$ se bude měnit počet kritických bodů. To již víme, neboť jsme vykreslili fázové portréty pro dané oblasti, tímto jsme si tuto úvahu pouze potvrdili. Další analýza z hlediska určení typů bifurkací je složitější než pro diferenciální rovnici s jedním parametrem. Pro různé hodnoty c a d mohou nastat různé typy bifurkace.

Pohledem na bifurkační diagram 31 lze některé typy bifurkací předpokládat. Například „překlad“ grafu bifurkačního diagramu svým tvarem připomíná bifurkační diagram hysterese pro pevnou kladnou hodnotu d . Opravdu, pokud zvolíme $d = 1$, dostáváme pro tuto hodnotu následující bifurkační diagram 33. Stabilita je určena opět dle věty 2.2 dosazením bodů do derivace $\frac{\partial F}{\partial x}(c, 1, x) = -1 + 3x^2$.



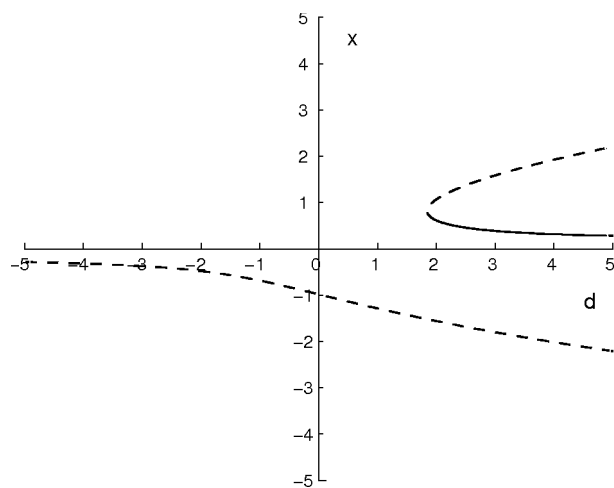
Obrázek 33

Další typy bifurkací již nejsou na první pohled postřehnutelné. Obvykle postupujeme tak, že volíme dle grafu vrcholu $4d^3 = 27c^2$ různé řezy, tj. bereme hodnoty c resp. d , pro které hodnoty d resp. c přechází hodnoty vrcholu. V předchozím případě jsme zvolili řez bodem $d = 1$. Nyní se zaměříme na další významnou hodnotu, což je $c = 0$. Dostáváme pro $c = 0$ bifurkační diagram 34 a je zřejmé, že zde nastává vidlová bifurkace. Stabilitu jsme opět určili dle věty 2.2 dosazením bodů do derivace $\frac{\partial F}{\partial x}(0, d, x) = -d + 3x^2$.



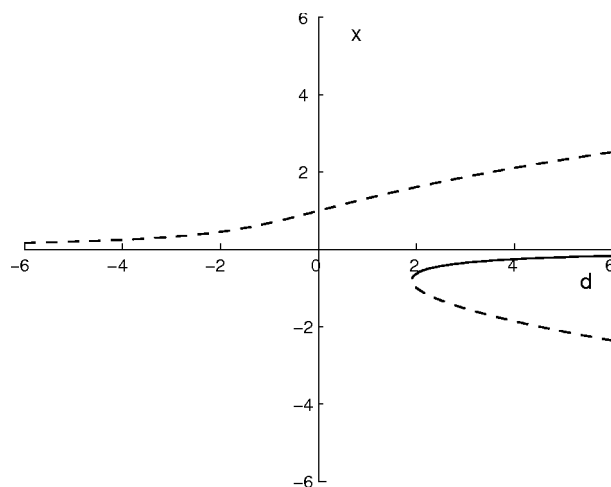
Obrázek 34

Dále provedeme řez hodnotou $c = 1$ a dostáváme následující bifurkační diagram 35, jehož část v prvním kvadrantu poukazuje na lokální sedlovou bifurkaci.



Obrázek 35

Pro volbu $c = -1$ dostáváme opět bifurkační diagram vedoucí k existenci lokální sedlové bifurkace.



Obrázek 36



Takto bychom tedy postupovali při vyšetřování modelu zadaného diferenciální rovnicí se dvěma reálnými parametry. Samozřejmě záleží vždy na konkrétním modelu, jaké hodnoty parametrů budou pro vyšetřování lokální bifurkace klíčové.

3 Simulace pohybu hydroplánu

V této kapitole se budeme věnovat simulaci pohybu hydroplánu, což je letadlo uzpůsobené tak, že vzlétá a přistává na vodní hladině. Uvedeme si základní předpoklady a diferenciální rovnici pro rychlost hydroplánu. Ukážeme, jak se bude hydroplán chovat pro různé hodnoty tahu motoru. Tedy hodnota tahu motoru bude v diferenciální rovnici modelu parametrem. Nakonec vykreslíme bifurkační diagram a určíme, o jaký typ bifurkace se jedná.

3.1 Zadání modelu

Základní předpoklady:

Zrychlení hydroplánu závisí na tahu motoru T , na hmotnosti m a na odporu prostředí W . Nechť pro tah motoru platí $T(v) \equiv c$, kde $c \in \mathbb{R}_0^+$. Nechť odpor prostředí je funkcí rychlosti tj. $W(v)$. Pro rychlost v uvažujeme pouze nezáporné hodnoty. Zrychlení $v'(t)$ je derivací rychlosti, přičemž pro rychlost platí, že roste se zvětšujícím se tahem motoru a klesá se zvětšujícím se odporem prostředí a zvětšující se hmotností, tj.

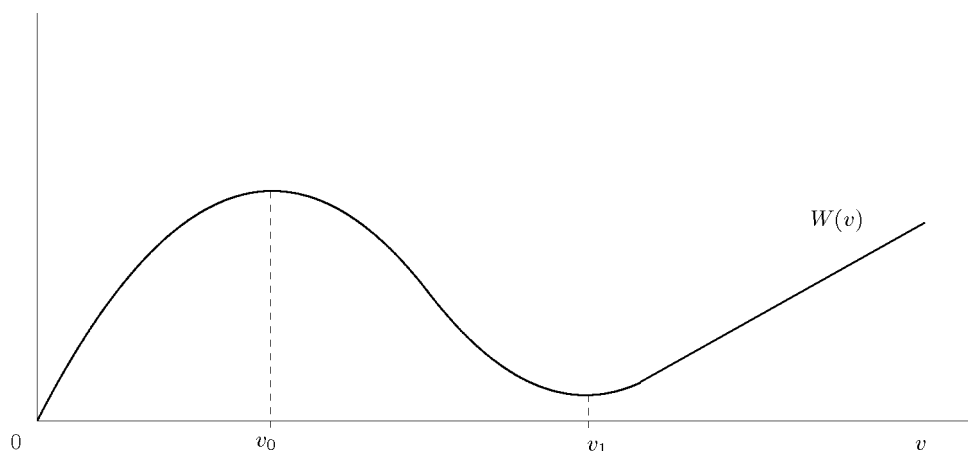
$$v' = \frac{1}{m}(c - W(v)). \quad (31)$$

Rychlost hydroplánu je řízena diferenciální rovnicí (31) s parametrem c .

Nyní si popíšeme pohyb hydroplánu v závislosti na rychlosti.

Při rychlosti $v \in (0, v_0)$ jede hydroplán po vodní ploše a funkce odporu prostředí $W(v)$ roste. Pro $v = v_0$ se hydroplán začne odlepovat od vody a pro $v > v_0$ se čím dál méně dotýká vodní hladiny, a proto funkce odporu prostředí $W(v)$ klesá. Dále existuje rychlost $v_1 > v_0$ taková, že pro $v \in (v_0, v_1)$ funkce odporu prostředí $W(v)$ klesá a pro rychlost $v > v_1$ funkce odporu $W(v)$ opět roste.

Tedy tvar grafu funkce odporu prostředí $W(v)$ je dle předchozího rozboru vykreslen na následujícím obrázku 37.



Obrázek 37

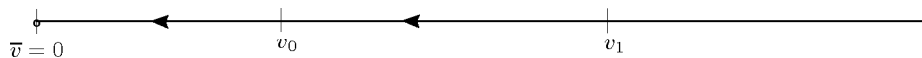
3.2 Vyšetřování modelu

Nyní diskutujeme možné scénáře pohybu hydroplánu v závislosti na tahu motoru c . Pro názornost si vždy pro určité hodnoty parametru c vykreslíme fázový portrét a pomocí něj popíšeme chování hydroplánu v určité rychlosti v při daném tahu motoru c . Poté vykreslíme bifurkační diagram a určíme typ bifurkace.

Označme $F(c, v) = \frac{1}{m}(c - W(v))$, pak rovnici (31) lze zapsat ve tvaru

$$v' = F(c, v), \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}_0^+.$$

1.) Nechť tah motoru c je roven 0, tj. $c = \bar{c} = 0$. Pro tuto nulovou hodnotu \bar{c} má rovnice (31) jeden kritický bod $\bar{v} = 0$, neboť když položíme $F(c, v) = \frac{1}{m}(-W(v)) = 0$, dostáváme $W(v) = 0$ a řešením je bod 0. To je zřejmé z obrázku 37. Protože platí $v' = \frac{1}{m}(-W(v)) < 0$, je zřejmé, že má-li hydroplán v daném okamžiku t_0 rychlost $v(t_0) > 0$, pro $t > t_0$ tato rychlost klesá a konverguje k $\bar{v} = 0$. Fázový portrét je vykreslen na obrázku 38.



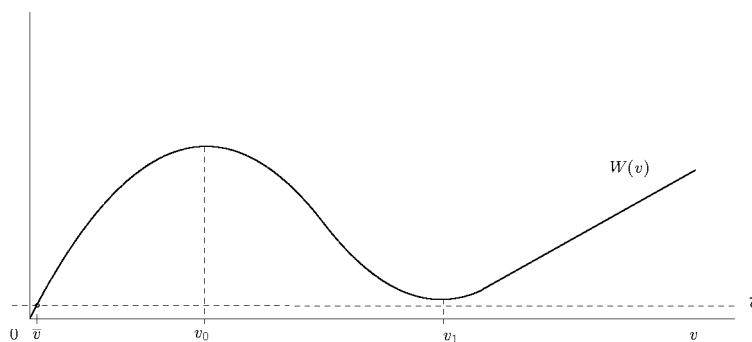
Obrázek 38

1_a) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (0, v_0)$, hydroplán jede po hladině, jeho rychlost stále klesá, až hydroplán zastaví.

1_b) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in [v_0, v_1]$, hydroplán se slabě dotýká hladiny, jeho rychlost klesá, jede po hladině, až se zastaví.

1_c) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) > v_1$, hydroplán letí, jeho rychlost klesá, přistává, jede po hladině a zastaví se.

2.) Nechť tah motoru c je menší než odpor prostředí při rychlosti v_1 , tj. nechť $c = \bar{c} \in (0, W(v_1))$. Tato situace je vykreslena na obrázku 39.



Obrázek 39

Je zřejmé, že pro tuto hodnotu parametru $\bar{c} \in (0, W(v_1))$ má diferenciální rovnice (31) jeden kritický bod $\bar{v} \in (0, v_0)$. Fázový portrét je vykreslen na obrázku 40.



Obrázek 40

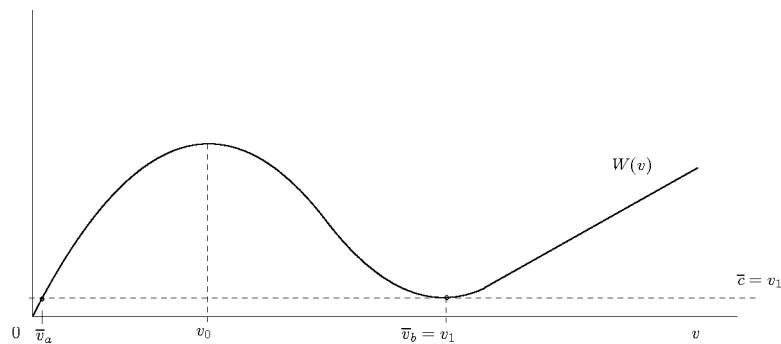
2_a) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (0, \bar{v})$, hydroplán jede po hladině, jeho rychlost stále roste a konverguje k \bar{v} , tato rychlost ale není dostatečně velká na to, aby hydroplán vzlétnul, ten tedy jede dál po hladině rychlostí \bar{v} .

2_b) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (\bar{v}, v_0)$, hydroplán jede po hladině, jeho rychlost stále klesá a konverguje k rychlosti \bar{v} .

2_c) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in [v_0, v_1]$, hydroplán se slabě dotýká hladiny, jeho rychlost klesá a konverguje k \bar{v} . Hydroplán dále jede po hladině rychlostí \bar{v} .

2_d) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) > v_1$, hydroplán letí, jeho rychlost klesá a konverguje k \bar{v} . Hydroplán přistává a jede po hladině rychlostí \bar{v} .

3.) Nechť tah motoru c je roven odporu prostředí při rychlosti v_1 , tj. nechť $c = \bar{c} = W(v_1)$. Tato situace je vykreslena na obrázku 41.

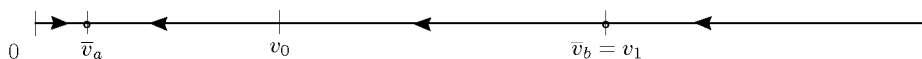


Obrázek 41

Je zřejmé, že pro tuto hodnotu parametru $\bar{c} = W(v_1)$ má diferenciální rovnice

(31) dva kritické body a to $\bar{v}_a \in (0, v_0)$ a $\bar{v}_b = v_1$.

Fázový portrét je vykreslen na obrázku 42. Bod \bar{v}_a je asymptoticky stabilní a bod \bar{v}_b je nestabilní.



Obrázek 42

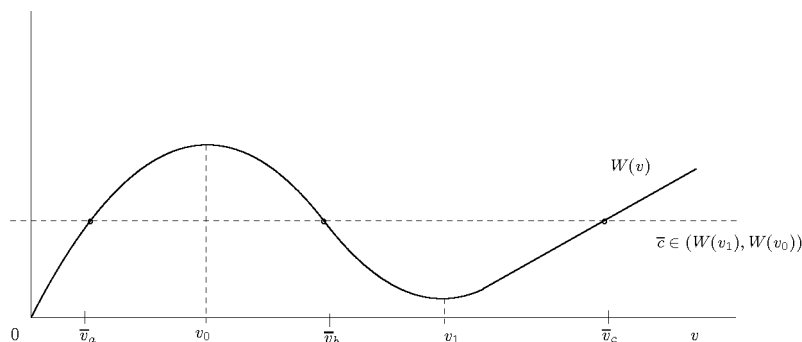
3_a) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (0, \bar{v}_a)$, hydroplán jede po hladině, jeho rychlost stále roste a konverguje k \bar{v}_a , tato rychlost ale není dostatečně velká na to, aby hydroplán vzlétnul, ten tedy jede dál po hladině rychlostí \bar{v}_a .

3_b) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (\bar{v}_a, v_0)$, hydroplán jede po hladině, jeho rychlost stále klesá a konverguje k rychlosti \bar{v}_a .

3_c) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in [v_0, \bar{v}_b]$, hydroplán se slabě dotýká hladiny, jeho rychlost klesá a konverguje k \bar{v}_a . Hydroplán jede po hladině rychlostí \bar{v}_a .

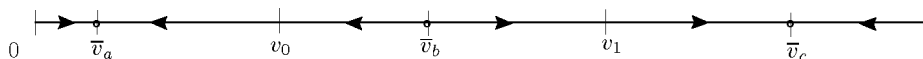
3_d) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) > \bar{v}_b = v_1$, hydroplán letí, jeho rychlost klesá a konverguje k \bar{v}_b . Hydroplán se dotýká hladiny, dále se pohybuje rychlostí \bar{v}_b , ale nevzlétne.

4.) Necht' pro tah motoru c platí $c = \bar{c} \in (W(v_1), W(v_0))$. Tato situace je vykreslena na obrázku 43.



Obrázek 43

Je zřejmé, že pro tuto hodnotu parametru $\bar{c} \in (W(v_1), W(v_0))$ má diferenciální rovnice (31) tři kritické body a to $\bar{v}_a \in (0, v_0)$ a $\bar{v}_b \in (v_0, v_1)$ a $\bar{v}_c > v_1$. Fázový portrét je vykreslen na obrázku 44. Body \bar{v}_a a \bar{v}_c jsou asymptoticky stabilní a bod \bar{v}_b je nestabilní.



Obrázek 44

4_a) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (0, \bar{v}_a)$, hydroplán jede po hladině, jeho rychlost stále roste a konverguje k \bar{v}_a , tato rychlost ale není dostatečně velká na to, aby hydroplán vzlétnul, ten tedy jede dál po hladině rychlostí \bar{v}_a .

4_b) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (\bar{v}_a, v_0)$, hydroplán jede po hladině, jeho rychlost stále klesá a konverguje k rychlosti \bar{v}_a .

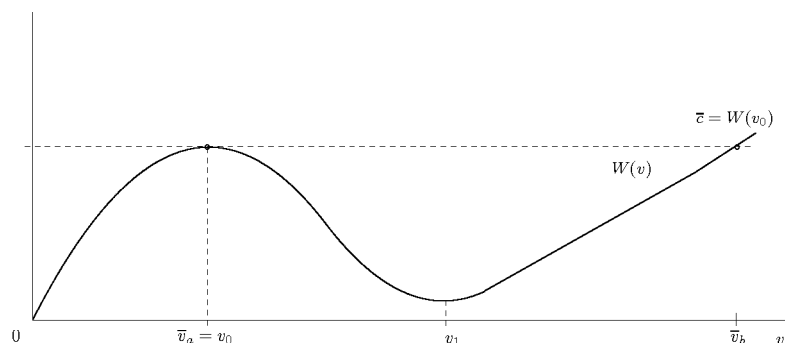
4_c) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in [v_0, \bar{v}_b)$, hydroplán se slabě dotýká hladiny, jeho rychlost klesá a konverguje k \bar{v}_a . Hydroplán jede po hladině rychlostí \bar{v}_a .

4_d) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (\bar{v}_b, v_1]$, hydroplán se slabě dotýká hladiny, jeho rychlost roste a konverguje k \bar{v}_c . Hydroplán vzlétá a dále letí rychlostí \bar{v}_c .

4_e) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (v_1, \bar{v}_c)$, hydroplán letí, jeho rychlost roste a konverguje k \bar{v}_c . Hydroplán letí rychlostí \bar{v}_c .

4_f) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) > \bar{v}_c$, hydroplán letí, jeho rychlost klesá a konverguje k \bar{v}_c . Hydroplán dále letí rychlostí \bar{v}_c .

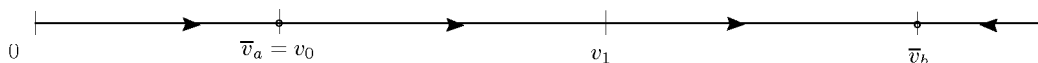
5.) Nechť tah motoru c je roven odporu prostředí při rychlosti v_0 , tj. nechť $c = \bar{c} = W(v_0)$. Tato situace je vykreslena na obrázku 45.



Obrázek 45

Je zřejmé, že pro tuto hodnotu parametru $\bar{c} = W(v_0)$ má diferenciální rovnice (31) dva kritické body a to $\bar{v}_a = v_0$ a $\bar{v}_b > v_1$.

Fázový portrét je vykreslen na obrázku 46. Bod \bar{v}_a je nestabilní a bod \bar{v}_b je asymptoticky stabilní.



Obrázek 46

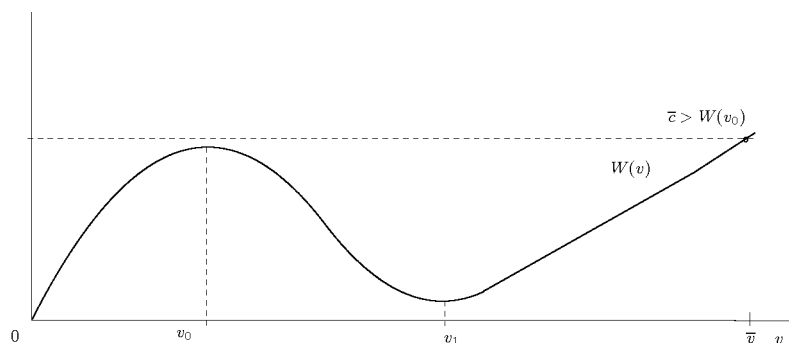
5_a) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (0, \bar{v}_a)$, hydroplán jede po hladině, jeho rychlost stále roste a konverguje k \bar{v}_a , tj. hydroplán se dotýká lehce hladiny a dále se pohybuje rychlostí \bar{v}_a , ale nevzlétne.

5_b) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (\bar{v}_a, v_1]$, hydroplán se slabě dotýká hladiny, jeho rychlost stále roste a konverguje k \bar{v}_b , tj. hydroplán vzlétne a dále letí rychlostí \bar{v}_b .

5_c) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (v_1, \bar{v}_b)$, hydroplán letí, jeho rychlost roste a konverguje k \bar{v}_b . Hydroplán dále letí rychlostí \bar{v}_b .

5_d) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) > \bar{v}_b$, hydroplán letí, jeho rychlost klesá a konverguje k \bar{v}_b . Hydroplán dále letí rychlostí \bar{v}_b .

6.) Nechť tah motoru c je větší než odpor prostředí při rychlosti v_0 , tj. nechť $c = \bar{c} > W(v_0)$. Tato situace je vykreslena na obrázku 47.



Obrázek 47

Je zřejmé, že pro tuto hodnotu parametru $\bar{c} > W(v_0)$ má diferenciální rovnice (31) jeden kritický bod $\bar{v} > v_1$. Fázový portrét je vykreslen na obrázku 48.



Obrázek 48

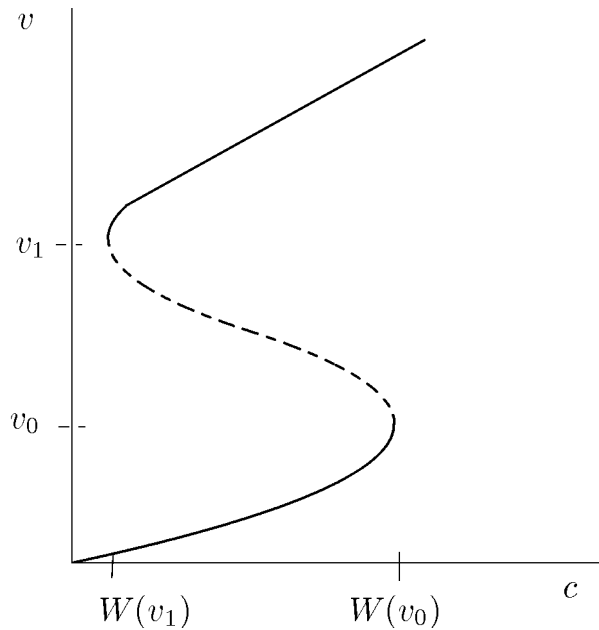
6_a) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in (0, v_0)$, hydroplán jede po hladině, jeho rychlost stále roste a konverguje k \bar{v} . Hydroplán tedy jede po hladině, vzlétá a nakonec letí rychlostí \bar{v} .

6_b) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in [v_0, v_1)$, hydroplán se slabě dotýká hladiny, jeho rychlost stále roste a konverguje k \bar{v} . Hydroplán tedy vzlétá a dále letí rychlostí \bar{v} .

6_c) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) \in [v_1, \bar{v})$, hydroplán letí, jeho rychlost roste a konverguje k \bar{v} . Hydroplán dále letí rychlostí \bar{v} .

6_d) Pokud je v daný okamžik t_0 rychlost $v(t_0) > \bar{v}$, hydroplán letí, jeho rychlost klesá a konverguje k \bar{v} . Hydroplán dále letí rychlostí \bar{v} .

Nyní přejdeme k určení bifurkačního diagramu. Ten získáme tak, že položíme pravou stranu rovnice (31) rovnu nule, tj. $\frac{1}{m}(c - W(v)) = 0$, a vykreslíme kritické body v v závislosti na parametru c . Dostáváme tvar řešení $c = W(v)$. Víme, že rychlost v i tah motoru c nabývají pouze nezáporných hodnot. Bifurkační diagram je vykreslen na obrázku 49.



Obrázek 49

Stabilita na jednotlivých částech bifurkačního diagramu byla určena dle předchozího vyšetřování fázových portrétů. Lze ji také určit dle věty 2.2 tak, že vypočteme parciální derivaci funkce $F(c, v)$ a dle jejího znaménka určíme stabilitu, tj. $F_v(c, v) = \frac{-W'(v)}{m}$. Pro $v \in (0, v_0)$ a $v > v_1$ platí $W'(v) > 0$, tudíž pro $F_v(c, v)$ platí $F_v(c, v) < 0$ pro tato v , a tedy tyto větve jsou asymptoticky stabilní. Naopak pro $v \in (v_0, v_1)$ je $W'(v) < 0$, tedy platí $F_v(c, v) > 0$ pro tato v a tato větev je tudíž nestabilní.

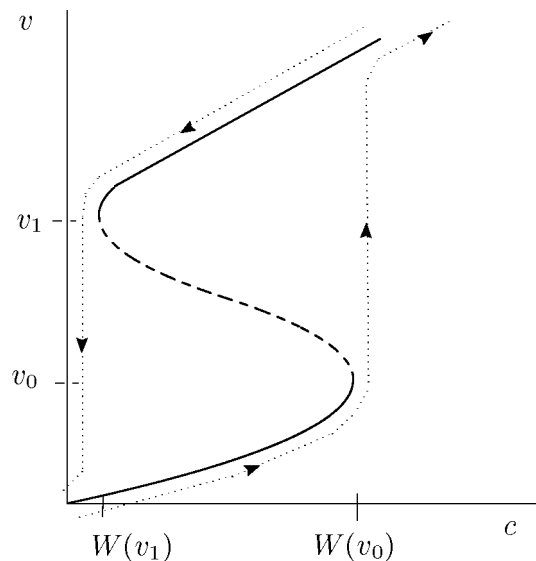
V bodech $(W(v_1), v_1)$ a $(W(v_0), v_0)$ je tedy diferenciální rovnice (31) v bifurkaci. V obou případech se jedná o bifurkaci sedlovou. Podle kapitoly 2.1.4 zde proto dochází k hysterezi.

V realitě je ale pohyb hydroplánu poněkud odlišný od předchozího popisu. Nastává totiž jev zvaný **hysterezní smyčka**. Tento jev je popsán dále.

Předpokládejme, že $c \in (W(v_1), W(v_0))$ a hydroplán má v čase t_0 rychlost blízkou $\bar{v}_a \in (0, v_0)$, což je asymptoticky stabilní kritický bod. Zvyšujeme-li nyní tah motoru tak, že c se blíží $W(v_0)$. Potom kritický bod \bar{v}_a se blíží k v_0 . V okamžiku, kdy $c = W(v_0)$ a zároveň $\bar{v}_a = v_0$ se tento kritický bod stává nestabilním. Systém pak „skočí“ do nejbližšího stabilního kritického bodu $\bar{v}_b > v_1$. V našem případě to znamená, že hydroplán se nepohybuje dlouhodobě rychlostí $\bar{v}_a = v_0$, ale velmi rychle zvýší svou rychlost na \bar{v}_b a letí. Přitom tah motoru c se nemění, je stále roven $W(v_0)$.

Podobně lze popsat „skok“ systému pro c klesající k hodnotě $W(v_1)$. Předpokládejme tedy, že tah motoru $c > v_1$ a hydroplán má v čase t_0 rychlost blízkou $\bar{v}_b > v_1$, což je asymptoticky stabilní kritický bod takový, že $\bar{v}_b < c$. Snižujeme-li nyní tah motoru tak, že c se blíží $W(v_1)$. Potom kritický bod \bar{v}_b se blíží k v_1 . V okamžiku, kdy $c = W(v_1)$ a zároveň $\bar{v}_b = v_1$ se tento kritický bod stává nestabilním. Systém pak „skočí“ do nejbližšího stabilního kritického bodu $\bar{v}_a < v_0$. V našem případě to znamená, že hydroplán se nepohybuje dlouhodobě rychlostí $\bar{v}_b = v_1$, ale velmi rychle sníží svou rychlost na \bar{v}_a , tedy přistane a dále jede po hladině rychlostí \bar{v}_a . Přitom tah motoru c se nemění, je stále roven $W(v_1)$.

Hysterezní smyčka je vykreslena na obrázku 50 tečkovaně.



Obrázek 50

Závěr

Cílem této práce bylo nastudovat problematiku elementárních bifurkací a zpracovat teorii potřebnou k vyšetřování jednoduchých modelů, dále práci doplnit příklady. Dle mého názoru bylo tohoto cíle dosaženo. Byla definována skalární diferenciální rovnice s jedním reálným parametrem a byla uvedena teorie k jejímu vyšetřování vzhledem k různým typům lokálních bifurkací. Podkapitoly byly věnovány sedlové, transkritické, vidlové a hysterezní bifurkaci. Ke každému typu byly uvedeny podmínky, za kterých daný typ lokální bifurkace nastává a každý typ bifurkace byl demonstrován na příkladu. Dále byla skalární diferenciální rovnice rozšířena o druhý reálný parametr a byl uveden možný postup vyšetřování z hlediska elementárních bifurkací. Poslední kapitola byla věnována reálnému modelu a to simulaci pohybu hydroplánu. Byla zde uvedena diferenciální rovnice pro rychlost hydroplánu a vyšetřování chování hydroplánu při různých hodnotách tahu motoru. Bylo zjištěno, že v tomto modelu dochází k hysterezi.

Při psaní této práce jsem získala spoustu nových znalostí a zkušeností. Naučila jsem se, jak vyšetřovat danou skalární diferenciální rovnici modelu, co znamená pojem lokální bifurkace a jak určit typ lokální bifurkace, pokud nastává. Na modelu simulace pohybu hydroplánu jsem si tyto nově nabyté znalosti ověřila. Rovněž jsem se zlepšila v práci s typografickým softwarem \TeX .

Literatura

- [1] Jack. K. Hale, Hüseyin Koçak: *Dynamics and bifurcations*, Springer, New York, 1991.
- [2] D.W. Jordan, P. Smith: *Nonlinear ordinary differential equations*, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [3] K.J. Palmer: *Bifurcations, chaos and fractals*, ve "Nonlinear Dynamics and Chaos" strany 91-134, World Scientific, Singapore, 1992.
- [4] L. Rachůnek, I. Rachůnková: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 1994.