



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VLIV KONCENTRACE NAPĚTÍ VE VRUBU NA NAPJATOST A DEFORMACI NA ČELE TRHLIN ZATÍŽENÝCH VE SMYKOVÝCH ZÁTĚŽNÝCH MÓDECH

INFLUENCE OF A NOTCH ON STRESS-STRAIN STATES AT THE FRONT OF CRACKS LOADED
BY SHEAR MODES

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Martin Ščotka

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Bc. Martin Ščotka**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce: **doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Vliv koncentrace napětí ve vrubu na napjatost a deformaci na čele trhlin zatížených ve smykových zátěžných módech

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Sestavení modelu vzorku s trhlinou v programovém prostředí ANSYS zatíženého ve smykových módech. Analýza výsledků výpočtu pole napětí a deformací v okolí čela trhliny, která se šíří z povrchu prizmatického prutu a trhliny, která se šíří z kořene vrubu.

Cíle diplomové práce:

Posouzení vlivu koncentrace napětí ve vrubu, ze kterého se šíří trhlina, na pole napětí a deformací v okolí čela trhliny při splnění podmínek lineárně elastické lomové mechaniky.

Seznam literatury:

Anderson T. L.: Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. CRC Press. Texas, 1995.

ANSYS verze 14.0. Users Manual. Houston, USA, 2012.

Pokluda J., Trattng G., Martinschitz C. a Pippan R.: Straightforward Comparison of Fatigue Crack Growth under Modes II and III. International Journal of Fatigue 30, (2008) 1498 - 1506.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 4. 11. 2016



prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Táto diplomová práca sa zaoberá vplyvom koncentrácie napätia vo vrube na napätosť a deformáciu na čele trhliny zaťažených v šmykových záťažných módoch. V úvode si uvedieme oboznámenie s lomovou mechanikou a jej členením, následne pojednáme o faktore intenzity napätia a budeme pokračovať v rozprave o jeho výpočte pomocou MKP. Výpočet je prevedený na hriadeli v ktorej sa nachádza vrub s trhlinou. Výpočet bol prevedený pre dva typy vrubu, U-vrub a V-vrub, oba tieto vruby boli modelované parametricky takže sa mohla meniť ich geometria a pre každú konfiguráciu bol spočítaný faktor intenzity napätia. Následne bol prevedený výpočet faktora intenzity napätia pre hriadeľ bez vrubu. V závere je vyhodnotený vplyv vrubu na faktor intenzity napätia. Na výpočet MKP bol použitý software ANSYS. Ostatné výpočty boli prevedené v matematickom software MATLAB.

KEÚČOVÉ SLOVÁ

napätosť, deformácia, čelo trhliny, šmykový mód, faktor intenzity napätia, vrub, metóda konečných prvkov, hriadeľ, ANSYS

ABSTRACT

This diploma thesis deals with influence of a notch on stress-strain states at the front of cracks by shear modes. Starting with fracture mechanics and its division, followed by stress intensity factor and calculate its by finite element method. Calculation is solved for two types of notches, U-notched and V-notched, both notches were modeled parametrically so their geometry was changeable and stress intensity factor were calculated for all configurations. Subsequently was solved next calculation of stress intensity factor but for shaft without notch. Finally, was evaluated influence of notch on stress intensity factor. Software for finite element method has been used ANSYS. Others calculation was provided in software MATLAB

KEY WORDS

stress, deformation, front of crack, shear mode, stress intensity factor, notch, finite element method, shaft, ANSYS

BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

ŠČOTKA, M. *Vliv koncentrace napětí ve vrubu na napjatost a deformaci na čele trhlin zatížených ve smykových zátěžných módech*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 55 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D..

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu spracoval samostatne len s odborným vedením vedúcej práce doc. Ing. Jany Horníkovej, Ph.D. a uviedol som všetku použitú literatúru.

V Brne 18. 2. 2017

.....

Martin Ščotka

POĎAKOVANIE

Týmto by som chcel poďakovať mojej vedúcej práce doc. Ing. Jane Horníkovej, Ph.D. za pripomienky, rady a trpezlivosť pri písaní tejto práce, ďalej rodičom a priateľke za trpezlivosť a podporu.

OBSAH

ABSTRAKT	2
BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA	3
ČESTNÉ PREHLÁSENIE	4
POĎAKOVANIE	5
OBSAH.....	8
ÚVOD, MOTIVÁCIA	11
1. FORMULÁCIA PROBLÉMU A CIELE RIEŠENIA.....	12
1.1. Typ problému a voľba metódy riešenia	12
1.1.1. Typ problému	12
1.1.2. Voľba metódy riešenia	12
2. DOPOSIAL' NADOBUDNUTÁ ÚROVEŇ POZNANIA.....	13
2.1. Griffithovo kritérium	13
2.2. Irwinova modifikácia Griffithovej teórie	13
2.3. Definícia Faktora intenzity napätia a vzájomný vzťah s G.....	14
2.4. Spôsob zaťažovania telesa s trhlinou.....	14
3. KONCEPCIA FAKTORU INTENZITY NAPÄTIA	16
3.1. Napätia na čele trhlinyMS	17
3.2. Typ napätosti na čele trhliny	19
3.3. Spôsoby získavania faktora intenzity napätia	20
3.3.1. Numerické metódy	20
4. FAKTOR INTENZITY NAPÄTIA METÓDOU MKP V ANSYSE.....	21
4.1. Modelovanie okolia čela trhliny	21

4.1.1. Sub-modeling	22
4.2. Určenie faktora intenzity napätia.	23
4.2.1. Metóda Interakcie integrálov	23
4.2.2. Metóda extrapolácie posuvov.	26
5. SYSTÉM PODSTATNÝCH VELIČÍN	28
6. POSTUP RIEŠENIA.....	30
7. TVORBA VÝPOČTOVÉHO MODELU	31
7.1. Model geometrie	31
7.2. Model materiálu.....	32
7.3. Model okrajových podmienok.....	32
7.4. Model zaťaženia.....	32
8. RIEŠENIE PROBLÉMU MKP	33
8.1. Tvorba sub-modelu	33
8.2. Voľba prvku.....	33
8.3. Tvorba konečno-prvkovej siete	34
8.4. Zaťaženie celého modelu a okrajové podmienky	37
8.5. Overenie zaťaženia a sub-modelingu.....	37
8.6. Nastavenie výpočtu faktor intenzity napätia	39
8.7. Konvergencia siete	40
8.8. Spracovanie výsledkov	41
9. VERIFIKÁCIA, ZHODNOTENIE A DISKUSIA VÝSLEDKOV	46
ZÁVER.....	48
POUŽITÁ LITERATÚRA	49
ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV	51

ZOZNAM OBRÁZKOV	53
ZOZNAM TABULIEK	55

ÚVOD, MOTIVÁCIA

Táto diplomová práca má za úlohu preskúmať pole napätia a deformácie na čele trhliny a určiť faktor intenzity napätia na hriadeli s vrubom. Trhlina sa šíri práve z tohto vrubu. Hlavnou úlohou tejto diplomovej práce je zistiť vplyv veľkosti a tvaru vrubu na faktor intenzity napätia na čele trhliny, pri zaťažení hriadeľa krutom, teda dochádza k tzv. módu III o čom bude pojednané neskôr. Riešením trhlín sa zaoberá vedný obor Lomová mechanika a práve jej znalosti budeme využívať na riešenie nášho problému. Z dôvodu tvarovej zložitosti nášho problému sa javí ako najvhodnejšou alternatívou na riešenie variačný prístup teda metóda konečných prvkov. V ďalších kapitolách sa pozrieme na spôsob riešenia problému softwarom ANSYS v prostredí Mechanical APDL.

Dôvod zadania tejto diplomovej práce je, že v praxi sa pri počítaní faktora intenzity napätia zanedbáva vrub a uvažuje sa len trhlina ktorá sa šíri z voľného povrchu hriadeľa. Práve z toho dôvodu je potreba zistiť aký vplyv má tvar a veľkosť vrubu, a ako sa bude pri menení geometrických parametrov vrubu meniť faktor intenzity napätia na čele trhliny. Následné vynesenie výsledkov do grafov pre lepšiu orientáciu a preskúmanie poľa napätia od vrubu bez trhliny v mieste kde sa za normálnych okolností nachádza čelo trhliny, nám umožní zdôvodniť naše výsledky a vyjadriť sa či má geometria vrubu vplyv na faktor intenzity napätia, trhliny ktorej sa z neho šíri.

Šmykové módy nie sú v dnešnej dobe ešte dostatočne dobre prebádané, ako je tomu pri normálovom móde. Keďže výpočty v tejto diplomovej práci sa dotýkajú len krútenia, čo je čistý šmykový mód, môže táto diplomová práca pomôcť k rozvoju lomovej mechaniky .

1. FORMULÁCIA PROBLÉMU A CIELE RIEŠENIA

Jedná sa o hriadeľ s vrubom, ktorý je zaťažovaný prostým krutom teda sa jedná o mód III. Geometria vrubu je modelovaná parametricky. Uvažujeme dva tvary vrubu a to U-vrub a V- vrub. Z tohto vrubu sa šíri do hriadeľa trhlinka. Koreň trhliny má vždy rovnakú vzdialenosť od povrchu hriadeľa a to bez ohľadu na tvar alebo veľkosť vrubu. Prostý krut v hriadeľi bol vygenerovaný takým spôsobom, že hriadeľ bol na jednej strane votknutý a na druhej zaťažovaný krúživým momentom.

Naším cieľom je posúdiť vplyv koncentrácie napätia vo vrube na pole napätia a deformácie v okolí čela trhliny a to za predpokladu splnenia podmienok lineárne elastickej lomovej mechaniky, tieto podmienky budú rozobraté v ďalšom texte. Ako bude ukázané, napätie v blízkosti čela trhliny pri statickom zaťažení je určené faktorom intenzity napätia. A práve z tohto dôvodu je naším cieľom určiť faktor intenzity napätia pre každú konfiguráciu vrubu na hriadeľi. Takisto prevedieme riešenie pre zaťaženie prostým ťahom ktorý je v dnešnej dobe výrazne viac prebádaný. Vo finále porovnáme a vyhodnotíme výsledky. Cieľom je zistiť či je doterajšie analytické riešenie vhodné alebo má koncentrácia napätia vo vrube vplyv na faktor intenzity napätia a teda aj na napätie a deformáciu v blízkosti čela trhliny.

1.1. Typ problému a voľba metódy riešenia

1.1.1. Typ problému

V našom prípade sa jedná o priamy problém. Vstupom do riešenia sú príčiny teda zaťaženie, geometria okolie atď. výstupom sú prejavy a to najmä faktor intenzity napätia.

1.1.2. Voľba metódy riešenia

Ako už bolo spomenuté riešením problémov s trhlinami sa venuje vedný obor Lomová mechanika, budeme teda postupovať s ohľadom na jej doposiaľ nadobudnuté poznatky. Ako samotný princíp riešenia sme si zvolili variačný princíp a teda na riešenie problému bola zvolená metóda výpočtového modelovania. Kvôli zložitosti výpočtového modelu sme sa rozhodli pre metódu konečných prvkov ďalej len MKP. Výpočtový program bol zvolený software ANSYS a prostredie Mechanical APDL a to hlavne z dôvodu prívetivosti pre parametrické modelovanie modelov.

2. DOPOSIALĽ NADOBUDNUTÁ ÚROVEŇ POZNANIA

Lomová mechanika je vedný obor, ktorý sa zaoberá porušovaním telies vplyvom trhlín pri statickom aj dynamickom zaťažovaní. „Trhlina v spojitom telese je plošný porušením spojitosti, v nezaťaženom stave obťažne rozoznateľná. Pri zaťažení sa prejaví tým, že lomové plochy sa od seba oddialia. Čelo trhliny je singularitou.“ [2] Práve táto singularita je dôvodom, že napätie na čele trhliny nemôže slúžiť ako stavová veličina pre popis stability trhliny. [3] Základné rozdelenie lomovej mechaniky je na lineárne elastickú lomovú mechaniku ďalej len LELM, lineárna ju nazývame z dôvodu, že predpokladáme lineárnu závislosť medzi napätím a deformáciou a teda platnosť Hookovho zákona v blízkosti koreňa trhliny a elasto-plastickú lomovú mechaniku ďalej len EPLM, kde uvažujeme aj závislosť nelineárnu. Hlavný vplyv na posudzovanie, či sa jedná o lineárne elastickú lomovú alebo elasto-plastickú lomovú mechaniku má plastická zóna na čele trhliny. V prípade, že je plastická zóna dostatočne malá používame lineárne elastickú lomovú mechaniku [3].

2.1. Griffithovo kritérium

„Griffith bol jedným z prvých priekopníkov ktorí skúmali chovanie telesa s trhlinou. Sformuloval kritérium pre posudzovanie stability trhliny v ideálne krehkom materiáli.“ [3] Jeho kritérium malo tvar:

$$\frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E} = 2\gamma \quad (2.1)$$

kde:

- γ je povrchová energia materiálu
- a je dĺžka trhliny

toto kritérium môžeme písať ako:

$$\sigma\sqrt{a} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi}} \quad (2.2)$$

rovnica 4.2 ukazuje, že šírenie trhliny v ideálne krehkom materiáli je ovplyvnené napätím, odmocninou z dĺžky trhliny a materiálovými vlastnosťami. [10]

2.2. Irwinova modifikácia Griffithovej teórie

Irwin navrhol pravú stranu rovnice 4.1 ako *rýchlosť uvoľňovania deformačnej energie* alebo jednoducho *hnacia sila trhliny* označovaná ako G . Pravá strana rovnice 4.1 prezentuje odpor materiálu proti šíreniu trhliny ktorý označujeme ako R . [10] Griffithova teória sa v praxi príliš neujala pretože bola navrhnutá na ideálne krehký materiál a neuvažovala vznik plastickej zóny na čele trhliny. Vznik plastickej zóny zvyšuje odpor materiálu proti šíreniu trhliny. Preto Irwin modifikoval Griffithovu teóriu aj pre materiály v stave húževnatom ako:

$$R = (\gamma + \gamma_{pl}) \quad (2.3)$$

pričom platí $\gamma_{pl} \gg \gamma$

2.3. Definícia Faktora intenzity napätia a vzájomný vzťah s G

„Súčiniteľ intenzity napätia definuje amplitúdu singularity u čela trhliny. Nezávisí na r a φ ani na elastických konštantách E a μ . Vždy ale závisí na veľkosti nominálneho napätia a odmocniny z dĺžky trhliny. Všetky napätia a deformácie v blízkosti čela trhliny sa menia v závislosti na ňom.“ [3]

Rozmerová analýza ukazuje že K musí byť lineárne závislé na napätí a priamo závislé na odmocniny z charakteristickej dĺžky. Rovnica 4.2 z Griffithovej teórie ukazuje že charakteristická dĺžka je dĺžka trhliny a z toho dostávame obecnú formu faktora intenzity napätia v tvare[10]:

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (2.4)$$

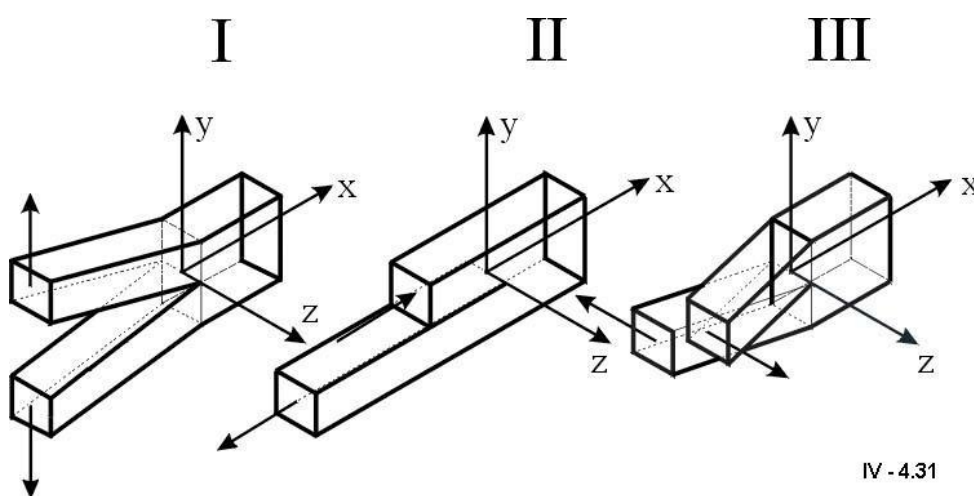
kde $f\left(\frac{a}{W}\right)$ je bezrozmerná tvarová funkcia. Pre nekonečnú dosku s centrálnou trhlinou o dĺžka $2a$ je tvarová funkcia rovná 1 a $K = \sigma\sqrt{\pi a}$ a pre tento istý prípad je $G = \frac{\sigma^2\pi a}{E}$. [10] Vzájomnou kombináciou týchto vzťahov dostávame:

$$G = \frac{K^2}{E} \quad (2.5)$$

Faktor intenzity napätia patrí ku klasickej jednoparametrovej lomovej mechanike. „Klasická (jednoparametrová) lomová mechanika uvažuje pri popise napätia a deformácie v okolí koreňa trhliny len jediný parameter a to súčiniteľ intenzity napätia K .“ [11]

2.4. Spôsob zaťažovania telesa s trhlinou[2]

„U telesa s trhlinou môžu nastať tri základné prípady, každý ďalší prípad je len superpozíciou týchto troch“ [2].



Obrázok 1 Spôsob zaťažovania trhliny[3]

Mód I: normálový, trhlina sa otvára v smere normály k ploche nespojitosti

Mód II: rovinný smykový, nespojitosť vzniká tak, že body lomových plôch trhliny sa posúvajú v jej rovine kolmo na priamku tvoriacu čelo trhliny

Mód III: antirovinný smykový, nespojitosť vzniká tak, že body lomových plôch trhliny sa posúvajú v jej rovine rovnobežne s priamkou tvoriacou čelo trhliny

3. KONCEPCIA FAKTORU INTENZITY NAPÄTIA[3]

Koncepcia faktora intenzity napätia je najrozšírenejšia a najprepracovanejšia koncepcia. Môže byť vyžitá ako pri statickej tak aj dynamickej iniciácii trhliny. Trhlina je významný koncentrátor napätia a deformácie. Analyticky je možné popísať pole deformácií a pole napätia iba v prípade elastického chovania materiálu (LELM). V reálnych prípadoch ale vzniká na čele trhliny istá plastická deformácia. Výsledky koncepcie faktora intenzity napätia môžeme považovať za vierohodné iba v prípade, že plastická oblasť v koreni vrubu je dostatočne malá. Takéto riešenie označujeme ako SSY riešenie odvodené od „small scale yielding“. Pre určenie napätosti v bezprostrednej blízkosti čela trhliny na základe množstva predpokladov odvodené analytické vzťahy (Westegaard). Z rovníc kompatibility, konštitutívnych vzťahov pre Hookovský materiál a diferenciálnych rovníc rovnováhy plynie[3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta(\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.1)$$

Rovnice rovnováhy možno splniť zavedením Airyho funkcie napätia F:

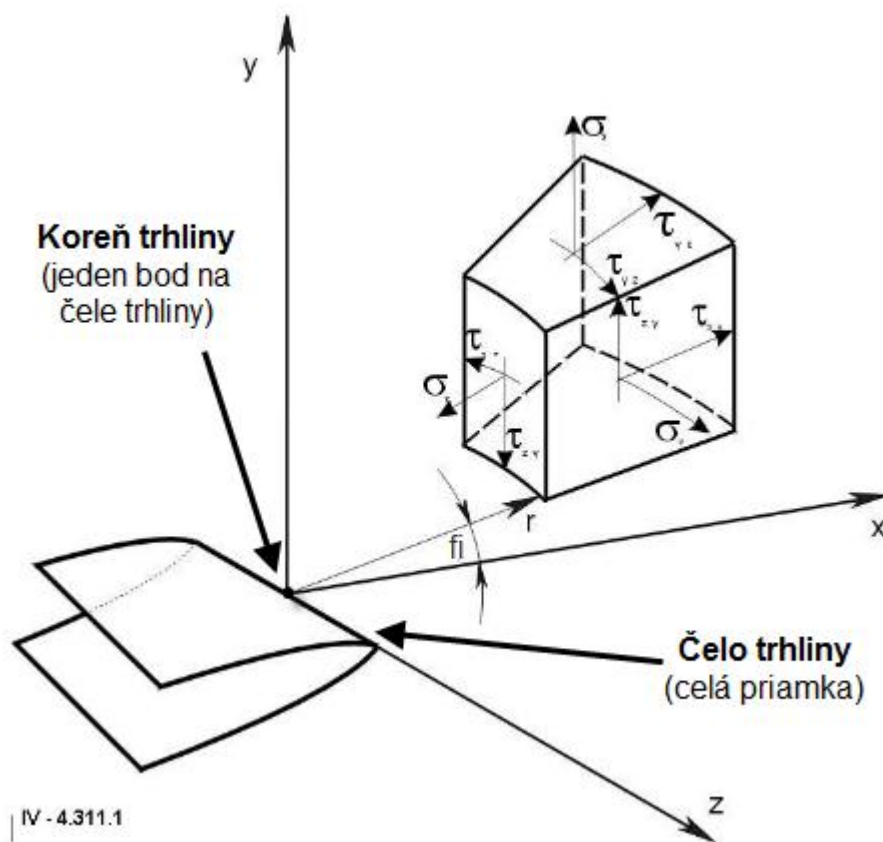
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.2)$$

A z rovníc kompatibility potom dostávame:

$$\nabla^4 = F \quad (3.3)$$

Westegaard dokázal, že v mnoho prípadoch možno vystačiť pri riešení rovinnnej úlohy s jednou holomorfnou funkciou komplexnej premennej, ktorá je zviazaná s Airyho funkciou istým vzťahom odlišným pre každý mód [3]. „Irwin pomocou Westergaardovho popisu ukázal, že pole napätia v okolí ostrej trhliny možno popísať pomocou jediného parametru.“ [13] Zásadným výsledkom týchto analytických riešení je zistenie, že pre dvojrozmerné úlohy možno vyjadriť pole posuvov a napätostí v okolí trhliny v jednotnom tvare. [2]

3.1. Napätia na čele trhliny MS



Obrázok 2 Napätie na čele trhliny[3]

„V tom istom čase popísal Williams pole napätia v okolí vrcholu trhliny pomocou nekonečného rozvoja s prvým singulárnym členom. Konštanta tohoto singulárneho člena je úmerná súčiniteľu intenzity napätia.“ [13] Polohu bodu telesa vzhľadom ku koreňu trhliny vyjadrujeme pomocou polárnych súradníc r, φ s počiatkom v bode čela trhliny. Obecné napätia σ_{ij} a posuvy u_i vyjadríme ako[2]:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{2\pi r} f_{ij}(\varphi) \quad (3.4)$$

$$u_i = \frac{2K(1 + \mu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\varphi, r) \quad (3.5)$$

Pričom $f_{ij}(\varphi)$ a $g_i(\varphi, r)$ sú tvarové funkcie ich hodnoty môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku:

FUNKCE	I	II	III
f_x	$\cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right]$	$-\sin \frac{\varphi}{2} \left[2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right]$	0
f_y	$\cos \frac{\varphi}{2} \left[1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right]$	$\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}$	0
f_{xy}	$\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}$	$\cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right]$	0
g_u	$\cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - 2\mu + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]$	$\sin \frac{\varphi}{2} \left[2 - 2\mu + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right]$	0
g_v	$\sin \frac{\varphi}{2} \left[2 - 2\mu - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right]$	$-\cos \frac{\varphi}{2} \left[-1 + 2\mu + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]$	0
g_w	0	0	$\sin \frac{\varphi}{2}$
f_{xz}	0	0	$-\sin \frac{\varphi}{2}$
f_{yz}	0	0	$\cos \frac{\varphi}{2}$

Obrázok 3 Hodnoty tvarových funkcií[2]

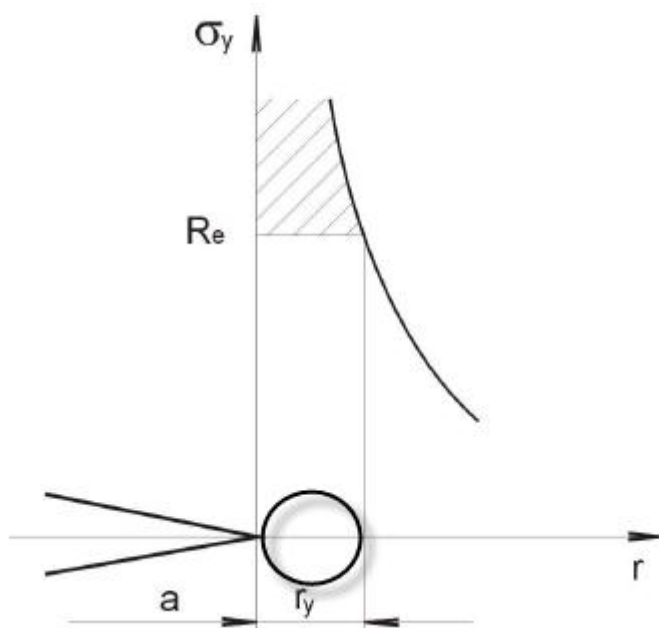
A teda pre mód III v rovine platí:

$$\tau_{xz} = \frac{K_{III}}{2\pi r} - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (3.6)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{2\pi r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (3.7)$$

$$u_w = \frac{2K_{III}(1 + \mu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (3.8)$$

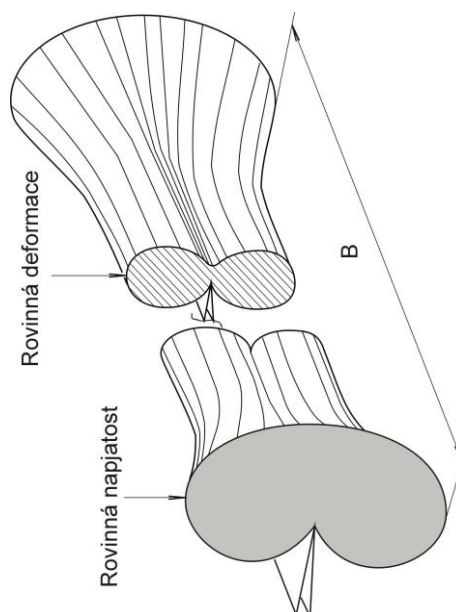
„Teda napätosť a deformácia v malom okolí čela trhliny v dvojrozmernom lineárne pružnom telese je pri statickom zaťažovaní určená faktorom intenzity napätia.“ [2] Vyššie zmienené výrazy môžeme použiť iba pre $r \ll a$ kde r je veľkosť plastickej zóny na čele trhliny a a je dĺžka trhliny.



Obrázok 4 Plastická zóna a napätie na čele trhliny[3]

3.2. Typ napätosti na čele trhliny

V lomovej mechanike sa stretávame s pojmami „rovinná deformácia“ a „rovinná napätosť“, tieto pojmy sa vzťahujú iba k oblasti relatívne blízko koreňa trhliny a teda nie k podmienkam celého prierezu telesa. Približný tvar a veľkosť plastickej zóny na čele trhliny pre tieto dva typy napätosti môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku, obrázok je iba ilustratívny pretože sa na ňom jedná o mód I ale jasne demonštruje vplyv napätosti na plasticкую zónu čo sa týka aj nášho prípadu pre mód III v priestore.



Obrázok 5 Vplyv napätosti na plasticкую zónu[3]

„Obecne tieto pomery na čele trhliny neplatia, dochádza tam k trojrozmernej napätosti a trojrozmernej deformácii“[3].

3.3. Spôsoby získavania faktora intenzity napätia

- **Analytické metódy**
- **Numerické metódy**
- **Experimentálne metódy**
- **Inžinierske metódy**

3.3.1. Numerické metódy[3]

V súčasnej dobe k numerickým metódam určovania súčiniteľa intenzity napätia patrí výlučne metóda konečných prvkov ďalej len MKP, a to z dôvodu vysokej náročnosti analytických výpočtov najmä pri smykových módoch. Túto metódu môžeme previesť dvoma spôsobmi a to:

- „Prístupy nevyžadujúce zásahy do programového systému MKP“, tento spôsob určovania faktora intenzity napätia funguje na základe výpočtov v postprocesore. Výhoda je, že ju možno použiť obecné bez ohľadu na programový systém. Nevýhodou je potreba hustejšej siete v blízkosti čela trhliny a teda zvyšuje sa časová náročnosť výpočtu.
- „Postup využívajúci špeciálne trhlinové prvky“, tieto prvky slúžia k tomu, že modelujú singularitu v okolí čela trhliny. Výhodou je, že aj pri hrubšej sieti dosahujeme presné výsledky, teda so znižujúcim sa počtom prvkov klesá aj časová náročnosť výsledku.

4. FAKTOR INTENZITY NAPÄTIA METÓDOU MKP V ANSYSSE

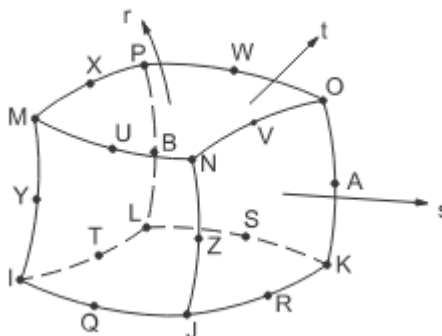
Výpočty faktora intenzity napätia veľmi úzko súvisia s presnosťou popisu napätia resp. deformačnej singularity na čele trhliny. Presnosť výpočtu je v MKP závislá na hustote siete. Čím je sieť hustejšia, tým sa dostávame k presnejším výsledkom. S hustotou siete narastá počet prvkov resp. uzlov, čo predlžuje čas výpočtu, ktorý môže byť u zložitých úloh obzvlášť v priestore limitujúcim faktorom[3].

4.1. Modelovanie okolia čela trhliny[4].

V oblasti čela trhliny vzniká veľký gradient napätia, určenie tohto napätia je závislé na materiáli, geometrii a iných faktoroch. Pre popis rýchlo sa meniaceho poľa napätia potrebujeme veľmi jemnú sieť v okolí čela trhliny. Pre LELM je pri singularite napätie na čele trhliny rovné $1/\sqrt{r}$. Na vytvorenie tejto singularity by mala sieť na čele trhliny spĺňať tieto podmienky:

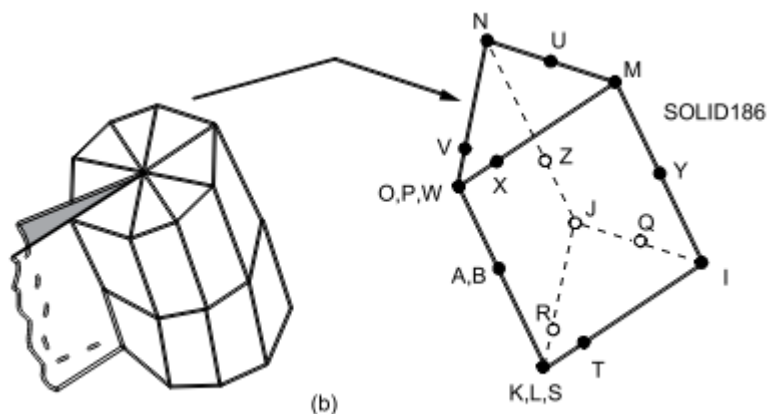
- Líce trhliny by mali byť zhodné.
- Prvky okolo čela trhliny by mali byť kvadratické, so stredným uzlom posunutým do 1/4 ku čelu trhliny. Tieto prvky nazývame singulárne prvky (špeciálne trhlínové prvky).

V prostredí ANSYS je takýmto singulárnym prvkom 20 uzlový SOLID186 zobrazený na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 6 SOLID 186[4].

Na popis singularity musí mať tento prvok klinový tvar, a teda plocha KLOP sa spojí v úsečku KO a stredné uzly sa posunú do 1/4 k tejto úsečke ktorá leží na čele trhliny. Takýto singulárny prvok môžeme vidieť na nadchádzajúcom obrázku.

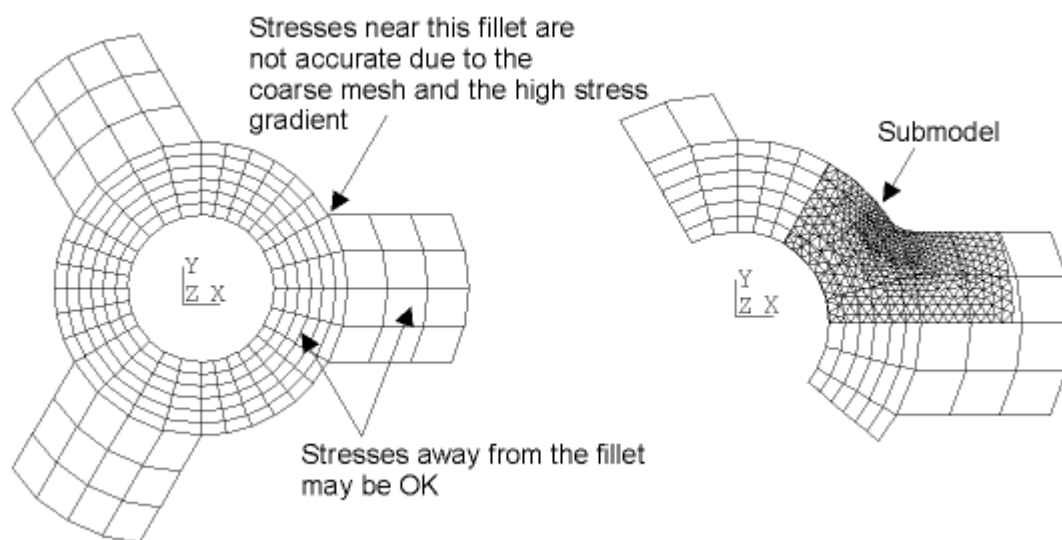


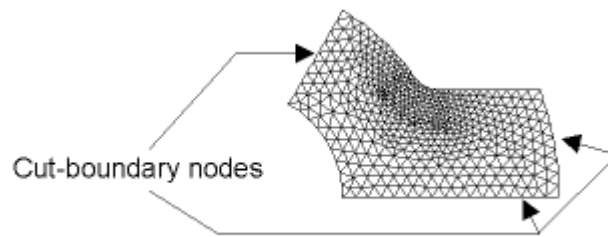
Obrázok 7 Singulárny prvok[4].

Veľkosť prvku ktorý tvorí čelo trhliny nesmie presiahnuť $a/8$ kde a je dĺžka trhliny. Tieto prvky sa môžu zväčšovať čím sú vzdialenejšie od čela trhliny ale pomer zväčšovania nesmie presiahnuť 1:4 vo všetkých smeroch. Uhol prvku pri hrane prvku KO by sa mal pohybovať od 15° do 30° . Všetky hrany prvku by mali byť rovné vrátane hrany ktorá tvorí čelo trhliny. To môže viesť obzvlášť pri krátkych trhlínach, bez možnosti využitia symetrie k veľmi vysokému počtu prvkov.

4.1.1. Sub-modeling[5].

Sub-modeling je technika v metóde konečných prvkov ktorá umožňuje dosiahnuť presnejších výsledkov v partikulárnej časti modelu, čo je pri analýze trhlín časť modelu v blízkosti trhliny. Táto metóda spočíva v tom, že v modeli ako takom nie je potreba výrazne hustej siete na rozdiel od oblasti kde môže byť koncentrácia napätia. Ilustračný príklad môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku.





Obrázok 8 Príklad submodelingu[5].

Na obrázku môžeme vidieť celý model ktorého sieť je „hrubá“ Sieť celého modelu v skutočnosti nemôže byť hrubá je hrubá iba v porovnaní so skúmanou oblasťou kde potrebujeme výrazne hustejšiu sieť ako je vo zvyšku modelu.

Sub-modeling je prevádzaný tak že najskôr sa vytvorí celý model s „hustou“ sieťou a patričným zaťažením. Tento celý model sa vyrieši. Následne sa vymodeluje sub-model ktorý ma zhodný vonkajší tvar s pôvodným modelom. A vnútorné hranice ľubovoľne zvolené ale tak aby boli v miestach modelu kde na popis stačí aj pôvodná „hrubá sieť“. Na vonkajšie hranice sú predpísané rovnaké okrajové podmienky ako u celého modelu. Na vnútorné hranice sa predpisujú posuvy z pôvodného celého modelu, ktoré sa prepočítajú na novú hustejšiu sieť sub-modelu. Takto zaťažený sub-model sa opäť vyrieši.

4.2. Určenie faktora intenzity napätia[4].

Ako už bolo vyššie zmienené, výpočet je možné previesť dvoma spôsobmi a to:

- **Metóda Interakcie integrálov** – Program prevádza určovanie faktoru intenzity napätia v časti riešenia (solution) a ukladá výsledky na spracovanie v postprocesore
- **Metóda extrapolácie posuvov** – Program prevádza určovanie faktoru intenzity napätia v postprocesore

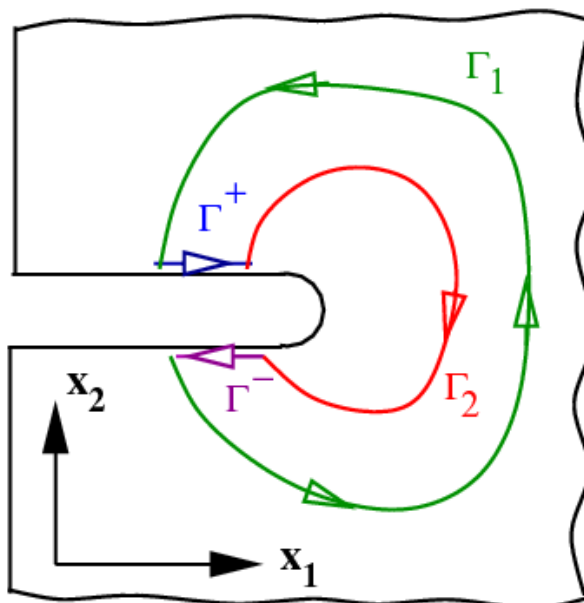
Pre oba spôsoby výpočtu musia byť dodržané podmienky LELM, a predpokladáme lineárne elastický, izotropný model materiálu.

4.2.1. Metóda Interakcie integrálov

4.2.1.1. Definícia I-integrálu

Medzi známe metódy riešenia kritických parametrov ktoré charakterizujú pole napätia a deformácii v blízkosti koreňa trhliny patrí J-integrál ,ktorý definoval roku 1968 Rice, má veľký význam a to z dôvodu nezávislosti integračných ciest v homogénnom materiáli[14].

Nezávislosť Integračnej cesty J-integrálu [16]:



Obrázok 9 Dôkaz nezávislosti integračných ciest[16]

Uvažujeme prípad, že kontúra $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma^+ + \Gamma^- + \Gamma_2$. Ak je táto kontúra uzavretá, tak J-integrál po tejto kontúre je rovný nule. A teda môžeme písať[16]:

$$J = J_1 + J^+ + J^- + J_2 \quad (4.1)$$

Predpokladajme že, integrál proti smeru hodinových ručičiek má kladné znamienko. Z obrázku je zrejmé, že líce trhliny sú rovnobežné s osou x_1 z čoho vyplýva, že normála n_1 je rovná nule, taktiež sú tieto povrchy bez tracie (nezaťažené) teda $\sigma_{1j} = 0$. Ako si neskôr ukážeme z týchto predpokladov vyplýva, že $J^+ = J^- = 0$. A teda môžeme písať, že platí[16]:

$$J_1 = J_2 \quad (4.2)$$

a z toho vyplýva, že J- integrál nie je závislý na integračnej ceste.

Problémom je, že J-integrál nerozlišuje medzi príspevkami v dôsledku otvorenia trhliny a taktiež tých, ktoré sú spôsobené strihom v problémoch s trhlínami v zmiešanom režime. Na oddelenie faktora intenzity napätia pre mód I a mód II bol vyvinutý interakčný integrál (I-integrál), ktorý pozostáva z krížových termínov J-integrálu ako superpozícia aktuálneho stavu a známeho pomocného stavu. I - integrál je efektívna a praktická metóda na určovanie faktora intenzity napätia materiálov s komplexným rozhraním, pretože nie je nutné držať integrálnu oblasť mimo rozhrania [14].

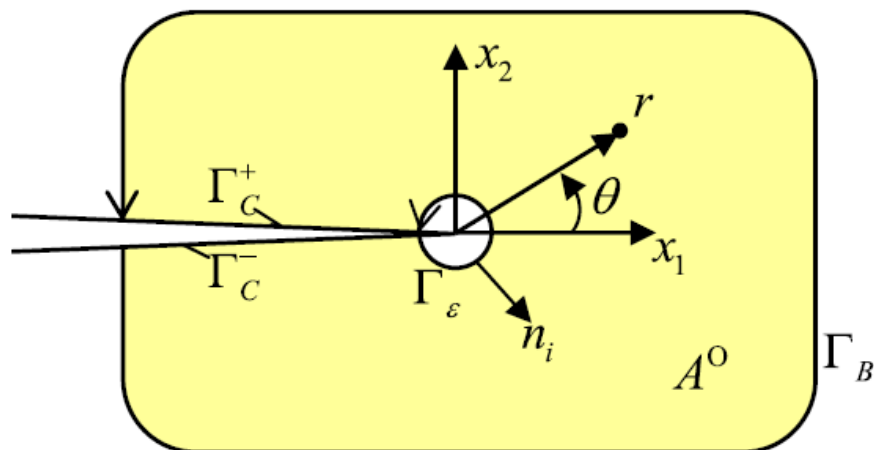
Definícia J-integrálu:

$$J = \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} (W \delta_{1i} - \sigma_{ij} u_{j,1}) n_i d\Gamma \quad (4.3)$$

kde:

$W = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} / 2$ je hustota deformačnej energie

- δ_{ij} je Kroneckerove delta
 n_i je jednotkový normálový vektor na kontúru
 $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_{ij}$ sú tenzory napätia, pretvorenia a posuvov,



Obrázok 10 Kontúry I-integrálu[15]

Superpozícia aktuálneho a pomocného stavu vedie na ďalší rovnovážny stav (stav S), J - integrál toho stavu je určený ako[14]:

$$J^S = \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \begin{bmatrix} 1/2(\sigma_{jk} + \sigma_{jk}^{aux})(\varepsilon_{jk} + \varepsilon_{jk}^{aux})\delta_{1j} \\ -(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{j,1} + u_{j,1}^{aux}) \end{bmatrix} n_i d\Gamma \quad (4.4)$$

kde:

$\sigma_{ij}^{aux}, \varepsilon_{ij}^{aux}, u_{ij}^{aux}$ sú tenzory napätia, pretvorenia a posuvov na pomocnom poli a

Rozšírením J-integrálu na:

$$J^S = J + J^{aux} + I \quad (4.5)$$

a následnou elimináciou J-integrálu generovaného aktuálnym stavom J dostávame rovnicu v tvare:

$$I = J^S - J^{aux} - J \quad (4.6)$$

Z čoho môžeme I-integrál vyjadriť ako [14]:

$$I = \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[\frac{1}{2}(\sigma_{jk}^{aux} \varepsilon_{jk} + \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{aux})\delta_{1j} - \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1} - \sigma_{ij} u_{j,1}^{aux} \right] n_i d\Gamma \quad (4.7)$$

4.2.1.2. Definícia I-integrálu v software ANSYS

Metóda interakcie integrálov používa na určenie faktora intenzity napätia pre 3D problémy objemovú integráciu a interakčný integrál (I-integrál) je definovaný ako[4]:

$$I = - \iiint q_{i,j} (\sigma_{kl} \varepsilon_{kl}^{aux} \delta_{ij} - \sigma_{kj}^{aux} u_{k,i} - \sigma_{kj} u_{k,i}^{aux}) dV / \iint \delta q_n dS \quad (4.8)$$

kde:

q_i je vektor predĺženia trhliny.

Tento integrál je prepojený s faktorom intenzity napätia nasledujúcim vzťahom[4].:

$$I = \frac{2}{E^*} (K_1 K_1^{aux} + K_2 K_2^{aux}) + \frac{1}{G} K_3 K_3^{aux} \quad (4.9)$$

kde

$K_i (i = 1,2,3)$ je faktor intenzity napätia pre mód I, II a III

$K_i^{aux} (i = 1,2,3)$ je pomocný faktor intenzity napätia pre mód I, II a III

$E^* = E$ pre rovinnú napätosť a $\frac{E}{(1-\mu)}$ pre rovinnú deformáciu

E je Youngov modul

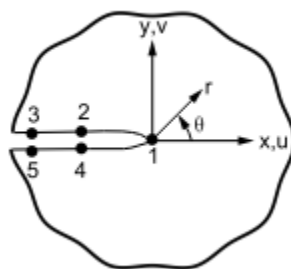
μ je poissonové číslo

G je modul pružnosti v šmyku.

Software ANSYS používa na riešenie faktora intenzity napätia metódou interakcie integrálov príkaz *CINT*. V prvom rade musia byť nadefinované informácie o trhlíne a to uzly na čele trhliny a normálovú rovinu trhliny. Následne musia byť nadefinované kontúry trhliny, prípadné podmienky symetrie trhliny. ANSYS počíta faktor intenzity napätia počas fázy riešenia výpočtu tzv. solution-u a ukladá výsledky do výsledkových súborov pre následný postprocessing.

4.2.2. Metóda extrapolácie posuvov[4].

Táto metóda určuje faktor intenzity napätia z extrapolácie posuvov v blízkosti čela trhliny. Software ANSYS používa na určenie faktora intenzity napätia touto metódou príkaz *KCALC*. Ako prvé musí byť nadefinovaný súradnicový systém ktorý leží v koreni trhliny. Osa x musí byť rovnobežná s lícami trhliny a osa y musí byť kolmá na líce trhliny ako budeme vidieť na nasledujúcom obrázku. Tento súradnicový systém musí byť počas výpočtu určovania aktívny, a taktiež tento súradnicový systém musí byť aktívny ako výsledkový súradnicový systém. Následne musí byť definovaná cesta trhlinou pričom prvý uzol cesty musí ležať v koreni trhliny. Cesta sa skladá celkovo z 5 uzlov. Rozloženie uzlov pozdĺž trhliny je zjavné z nasledujúceho obrázka.



Obrázok 11 Cesta trhlinou a súradnicový systém trhliny[4]

Na záver je už iba potreby vyplniť nastavenia príkazu *KCALC*, a to najmä či sa jedná o rovinnú napätosť alebo rovinnú deformáciu a prípadné podmienky symetrie. Príkaz je prístupný iba v postprocesore kde prebiehajú aj všetky výpočty určovania. Touto metódou sa nebudeme podrobnejšie zaoberať, a to z dôvodu, že náš problém budeme riešiť metódou interakcie integrálov.

5. SYSTÉM PODSTATNÝCH VELIČÍN

Keď už vieme akým spôsobom budeme postupovať a prebrali sme si podstatné znalosti potrebné pri riešení nášho problému sme schopný zostaviť systém podstatných veličín. Každý objekt má definovaný tvar, teda geometriu, má svoje a okolie a takisto topológiu, teda jednoznačne danú polohu v priestore. Objekt s okolím spojený pomocou väzieb ktoré ho ovplyvňujú a aktivujú. Aktivácia znamená, že na objekte sú vyvolané procesy. Tieto procesy vyvolané aktiváciou menia stavy objektu[1].

Všetky naše entity môžeme popísať nejakými konkrétnymi veličinami, tieto veličiny zaradiť do tried (S0-S8) a vytvoriť z nich systém podstatných veličín[1].

S0 – okolie sústavy

Hlavný vplyv na faktor intenzity napätia na čele trhliny je spôsob zaťaženia hriadele a veľkosť zaťaženia.

S1 – geometria a topológia sústavy

Geometria hriadele má zásadný vplyv na riešenie problému. Zo zadania vyplýva, že na hriadeli sa nachádza vrub z ktorého sa šíri trhlina. Poloha vrubu na hriadeli takisto ako rozmery celej hriadele sú presne dané a nemenné, čo sa ale mení je geometria vrubu ktorá nie je presne stanovená. Takisto nie je známy vplyv zmeny geometrie vrubu na riešenie problému. Pri našom probléme nehrá topológia objektu žiadny význam keďže sa jedná len o votknutú hriadeľ.

S2 – Väzby sústavy s okolím

Väzba medzi hriadeľom a okolím je modelovaná pomocou votknutia hriadele na jednom z jej koncov.

S3 – Aktivácia sústavy

Sústava je aktivovaná statickým zaťažením a to krúživým momentom na jednom z koncov hriadele.

S4 – Ovplyvnenie sústavy okolím

Sústava môžeme byť okolím ovplyvnená najmä teplotou a korozívnym prostredím ale sú to výnimočné prípady ktoré nie sú úplne bežné a preto ani jeden z týchto prípadov nebudeme pri modelovaní modelu uvažovať.

S5 – Vlastnosti sústavy

Sem patria materiálové vlastnosti sústavy.

S6 – Procesy a stavy sústavy

Hlavný procesom v sústave je jej statické zaťaženie.

S7 – Prejavy a stavy sústavy

Tieto procesy vedú k prejavom v systéme.

S8 – Dôsledky prejavov a chovanie sústavy

Uvažujeme napät'ové a deformačné medzné stavy. Najmä faktor intenzity napätia na čele trhliny.

6. POSTUP RIEŠENIA

Pri samotnom riešení je potreba najskôr vytvoriť geometriu a konečno-prvkový model hriadele. Čo spočíva vo vymodelovaní hriadele s parametrickým U-vrubom a V- vrubom, trhlinou ktorá sa z neho šíri, a následným „vysieťovaním“ tejto hriadele. Pre začiatok zvolíme konštantne hustú sieť s pomerne veľkým prvkom a to z toho dôvodu, že sa nachádzame v priestore, teda prípadné zjemňovanie celého modelu by bolo veľmi náročné na počet prvkov. Tento konečno-prvkový model zaťažíme prostým krutom aby sme riešili len mód III a to tak, že na jednej strane hriadele nadefinujeme votknutie, teda zamedzíme všetky stupne voľnosti, v našom prípade sa jedná o *SOLID186* teda len posuvy vo všetkých smeroch. Na druhom konci hriadele predpíšeme krúťivý moment a to pomocou kontaktných prvkov a tzv. pilotného uzlu[6]. Takto pripravený model necháme vyriešiť.

Toto riešenie je správne len v dostatočnej vzdialenosti od čela trhliny kvôli relatívne hustej sieti[5]. Z tohto dôvodu vytvoríme tzv. sub-model ktorý zaťažíme vypočítanými posuvmi, v dostatočnej vzdialenosti od čela trhliny, z pôvodného modelu. Takýto sub-model je podstatne menší oproti pôvodnému modelu a teda sme schopný sieť dostatočne zjemniť v okolí čela trhliny. Z tohto sub-modelu sme schopný určiť faktor intenzity napätia. Takéto riešenie prevedieme pre každú konfiguráciu vrubu. Takýmto istým spôsobom spočítame faktor intenzity napätia aj pre mód I. V prípade módu I zaťažíme naše modely posuvom, tak aby došlo k normálovému zaťaženiu trhliny.

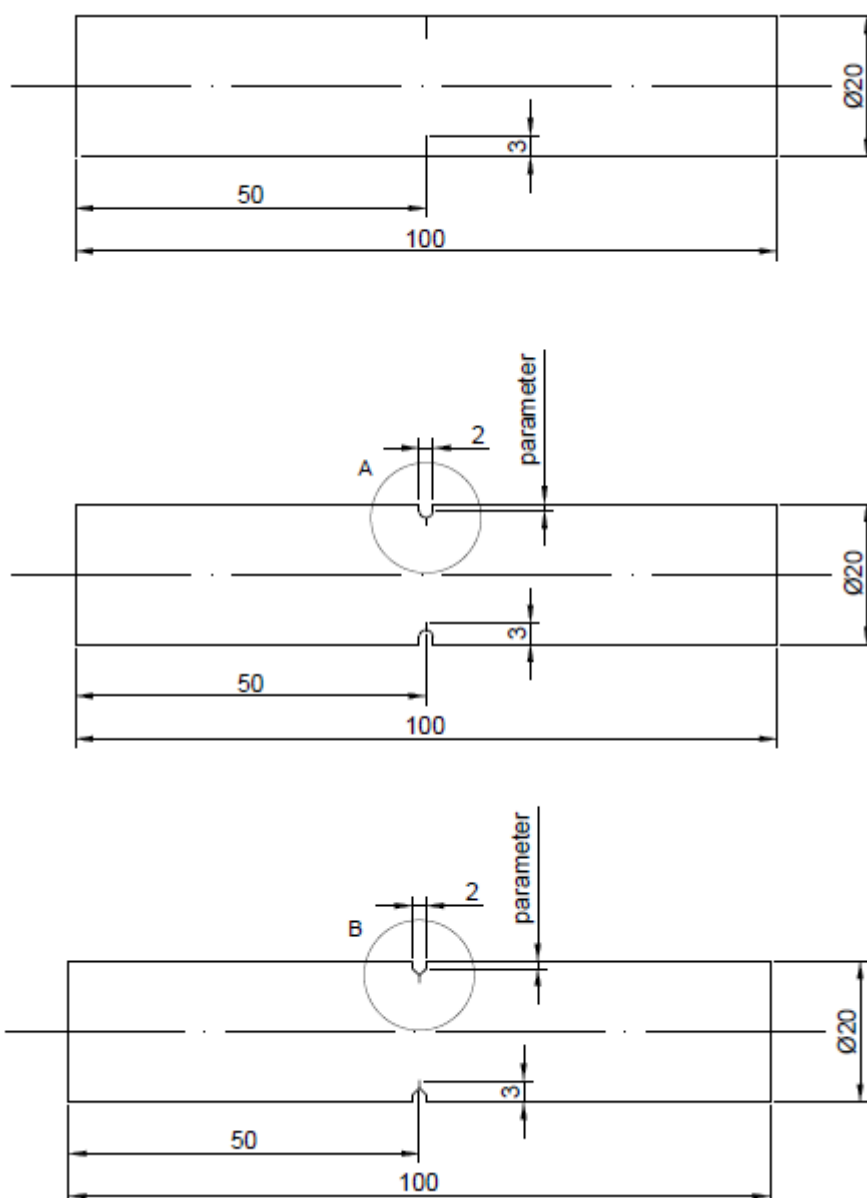
Po tom čo sme vypočítali faktor intenzity napätia pre mód III a mód I pre všetky konfigurácie, vytvoríme si všetky tieto modely bez trhliny len s vrubom. Následne spočítame napätie od vrubu v mieste kde sa nachádza čelo trhliny pri pôvodných modeloch. Toto napätia nám pomôže zdôvodniť a lepšie pochopiť napočítané výsledky.

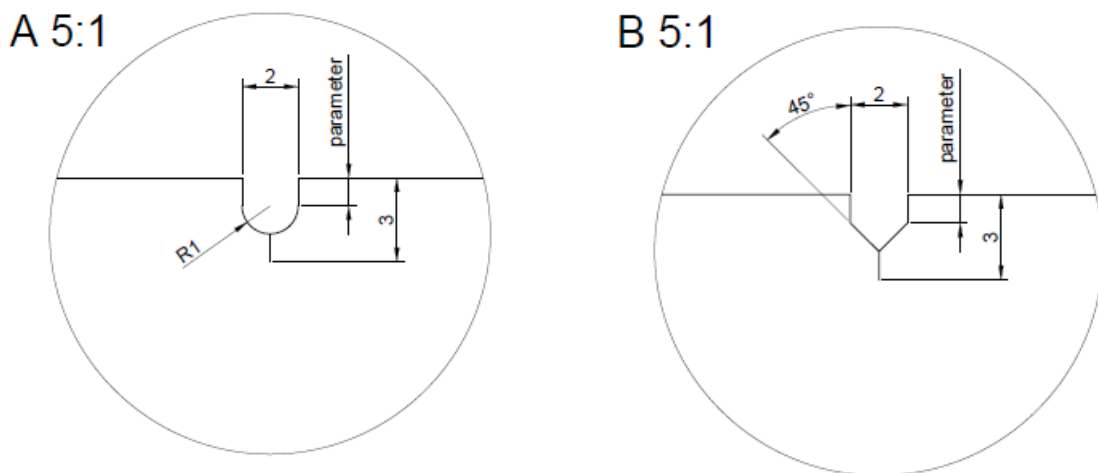
V závere pojednáme o tom či má koncentrácia napätia od vrubu vplyv na pole napätia a pretvorenia na čele trhliny alebo môžeme vrub naďalej pri výpočte zanedbávať prípadné zdôvodnenie výsledkov.

7. TVORBA VÝPOČTOVÉHO MODELU

7.1. Model geometrie

Geometria pozostáva z hriadele s priemerom 20 mm a dĺžkou 100 mm. V jej strede sa po celom obvode nachádza vrub z ktorého sa šíri trhlina. Geometria vrubu sa mení ako tvarovo U-vrub a V-vrub, tak aj rozmerovo pričom koreň trhliny šíriacej sa z vrubu má konštantnú vzdialenosť od povrchu hriadele a to 3 mm. Uvažujeme aj limitný prípad kedy sa trhlina šíri z voľného povrchu a teda hĺbka vrubu je nulová. Geometriu hriadele pre oba typy vrubu a limitný prípad môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku.





Obrázok 12 Model geometrie hriadel'ov

7.2. Model materiálu

Keďže pri výpočte faktora intenzity napätia sa nachádzame v LELM, ako výpočtový model materiálu uvažujeme, homogénny, izotropný, lineárne pružný materiál ako to po nás vyžaduje aj konečno-prvkový software ANSYS.

7.3. Model okrajových podmienok

Jedinou okrajovou podmienkou ktorú uvažujeme, je votknutie hriadele na jednom z koncov, čo docielime zamedzením všetkých stupňov voľnosti teda troch posuvov a troch natočení pretože sa jedná a priestorovú úlohu.

7.4. Model zaťaženia

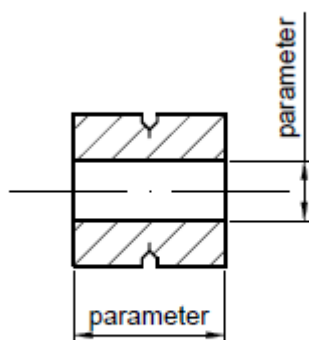
Model zaťaženia je realizovaný takým spôsobom, že na druhý voľný koniec hriadele aplikujeme zaťaženie krútvým momentom o veľkosti 10000Nmm prípadne posuvom v smere osy x o 0,05 mm. Zaťaženie je statické a rovnako veľké pre všetky konfigurácie vrubu na hriadelí.

8. RIEŠENIE PROBLÉMU MKP

Keďže v našom prípade sa jedná o krut, a teda neexistuje rovina symetrie, musíme riešiť celý model, čo je veľmi náročné na množstvo elementov. Z tohto dôvodu budeme riešiť úlohu metódou interakcie integrálov, keďže oproti metóde extrapolácie posuvov umožňuje výrazne hrubšiu sieť vďaka degenerovaným singulárnym prvkom ako bolo uvedené vyššie.

8.1. Tvorba sub-modelu

V oblasti koreňa vrubu, kde je naša skúmaná oblasť, je nevyhnutná veľmi hustá sieť ktorá je niekoľko násobne hustejšia ako v ostatnej časti hriadele ktorá pre nás nie je až tak podstatná. Z tohto dôvodu urobíme z pôvodného modelu geometrie sub-model, pričom hranice sub-modelu musíme zvoliť tak aby neboli ovplyvnené polom napätia a pretvorenia jak od vrubu tak on trhliny. Model geometrie sub-modelu môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 13 Geometria sub-modelu

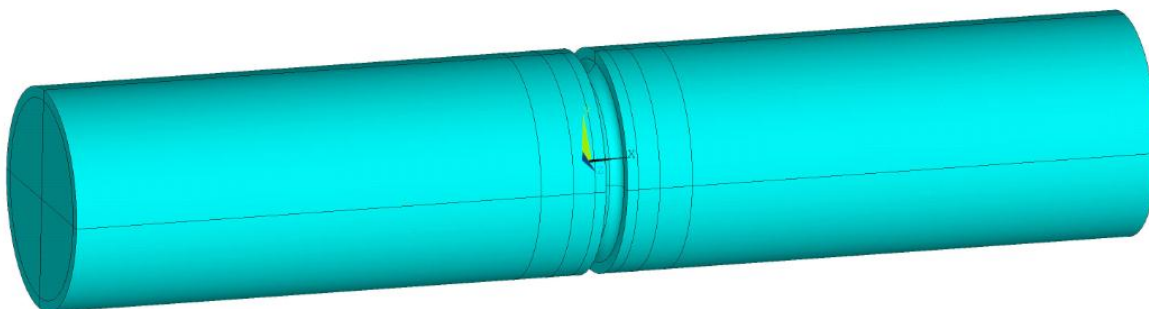
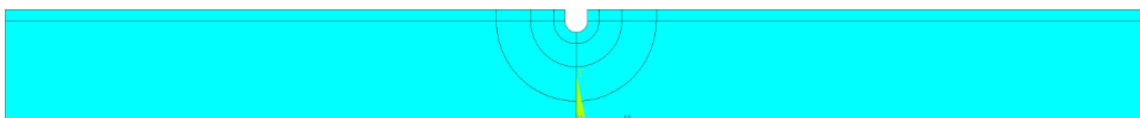
Na predchádzajúcom obrázku môžeme vidieť, že sa jedná o dutý valec, s výrazne menšou dĺžkou oproti celému modelu ktorý bol plný valec. Ďalej môžeme na obrázku vidieť vyznačené dva parametre ktoré označujú vnútornú hranicu sub-modelu, ako bolo už spomenuté tieto parametre nie sú žiadnym spôsobom pevne dané a volili sme si ich tak aby hranica sub-modelu bola mimo ovplyvnenú oblasť. O overení zvolených vnútorných hraníc sub-modelu budeme pojednávať neskôr.

8.2. Voľba prvku

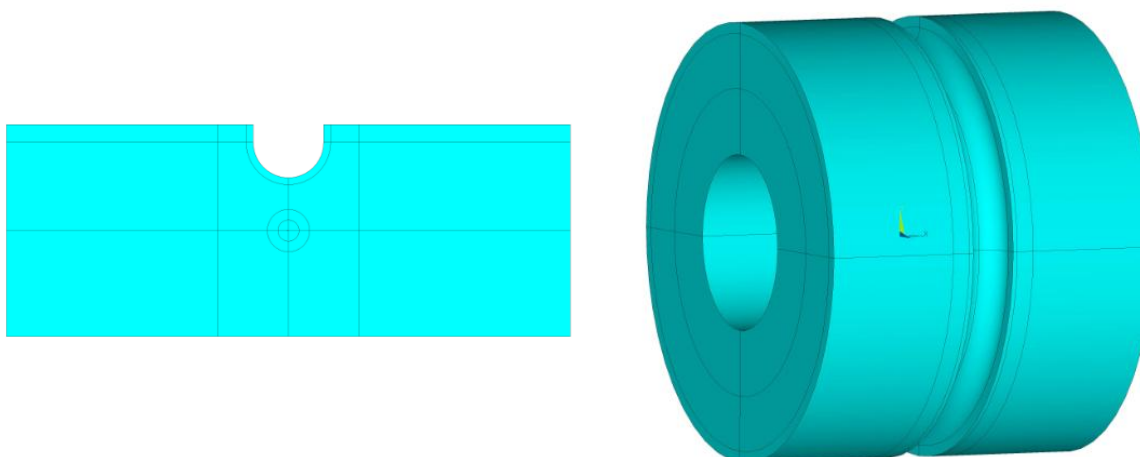
Ako už bolo vyššie zmienené najvhodnejším typom prvku na riešenie trhlín je degenerovaný prvok SOLID 186, ktorý lepšie popisuje singularitu na čele trhliny. Tento element je zobrazený na obrázku v kapitole 4.1. Tento degenerovaný prvok sme používali iba pri koreni trhliny, na zvyšok sme použili klasický 20 uzlový prvok SOLID 186 prípadne rovinný prvok SOLID 183 ktorý sme použili pri tvorbe siete konečných prvkov sub-modelu.

8.3. Tvorba konečno-prvkovej siete

Po tvorbe výpočtového modelu sa dostávame k tvorbe konečno prvkovej siete. Z dôvodu toho že, na čele trhliny a v okolí vrubu je vhodná mapovaná sieť, sme museli tvoriť konečno-prvkovú sieť pomocou podoblastí a to jak pre celý model tak aj pre sub-model. Najskôr sme si vytvorili základnú plochu so spomínanými podoblast'ami ktorú sme následne pomocou príkazu VROTAT orotovali na objem. Plochu s podoblast'ami a orotovaný objem môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku pre celý model aj pre sub-model.



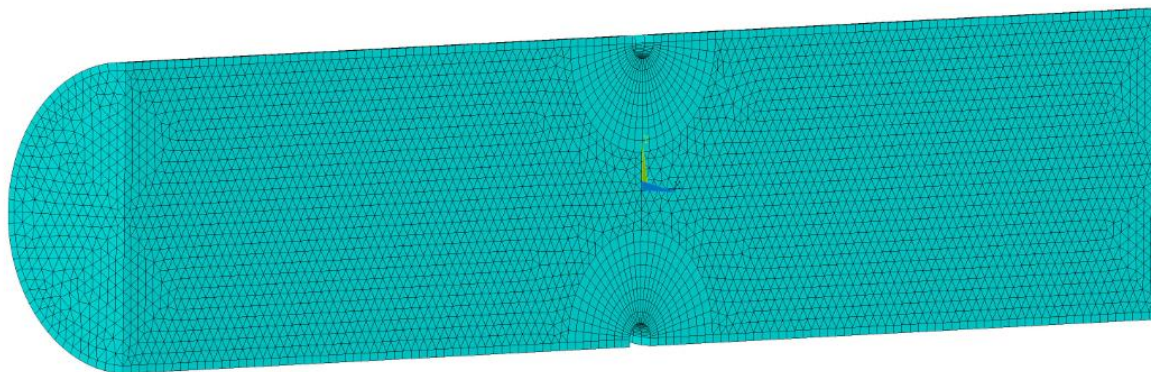
Obrázok 14 Základná plocha a objemy pre tvorbu siete celý model



Obrázok 15 Základné plochy a objemy pre tvorbu siete sub-model

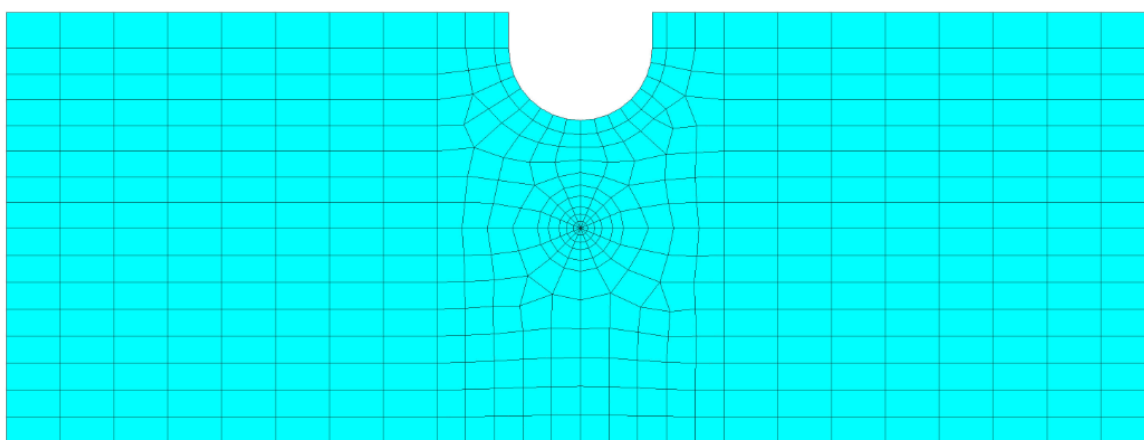
Na predchádzajúcom obrázku si môžeme všimnúť, že podoblasti na tvorbu siete nie sú v prípade celého modelu a sub-modelu zhodné a to je spôsobené tým, že v celom modeli neboli potrebné trhlinové prvky, pretože sme skúmali iba oblasť dostatočne vzdialenú od vrubu a trhliny. Z tohto dôvodu, a z dôvodu nepotrebnosti malých prvkov sme aj pri tvorbe siete

postupovali rôzne pri celom modeli a sub-modeli. V prípade celého modelu sme postupovali obvyklým spôsobom a teda sme „siet’ovali“ celé objemy, v blízkosti vrubu a trhliny mapovane. Siet’ v reze celého modelu môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku.

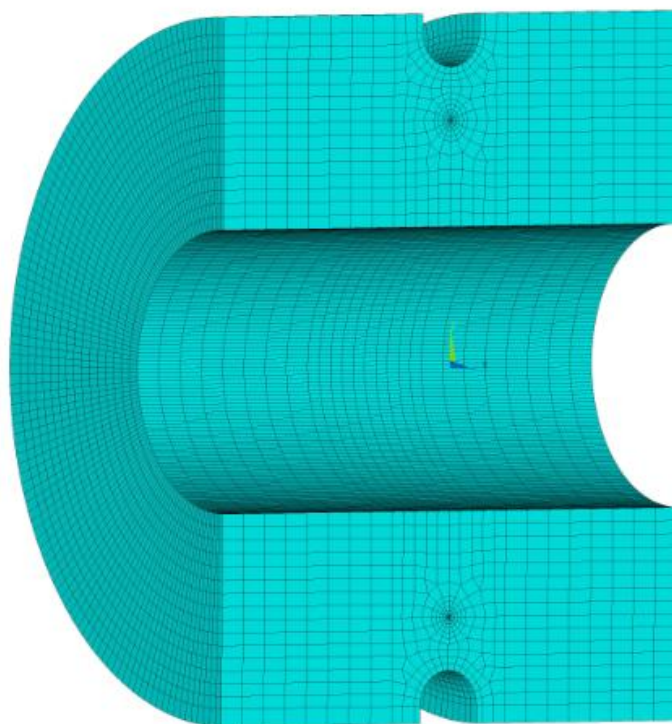


Obrázok 16 Siet’ celého modelu

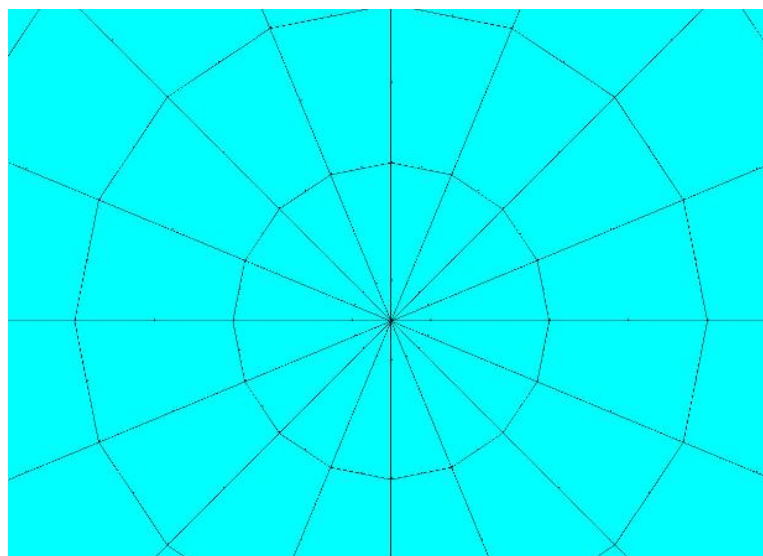
Pri tvorbe konečno prvkovej siete sub-modelu sme postupovali iným prístupom a to tak, že sme najskôr „vysiet’ovali“ základnú plochu rovinnými prvkami. Následne sme túto sieť konečných prvkov orotovali cez vopred pripravené objemy, ktoré boli vytvorené rovnako ako pri celom modeli, pomocou príkazu VSWEET do priestoru[7]. Tento spôsob „siet’ovania“ bol použitý z dôvodu potreby trhlinových prvkov v mieste koreňa trhliny. Ako bolo vyššie spomenuté trhlinové prvky majú posunutý stredný uzol do jednej štvrtiny steny bližšie ku koreňu trhliny. Táto tzv. koncentrácia uzlov u trhlinových prvkov sa prevádza pomocou príkazu KSCON[4] ktorý nie je dostupný v priestorových úlohách. Druhým dôvodom bol počet prvkov, keďže príkaz VSWEET na orotovanie štvoruholníkových prvkov používa prvok šesť hranný a na orotovanie trojuholníkových prvkov používa prvok klinový, čo ušetrí značné množstvo prvkov oproti klasickému spôsobu tvorby konečno prvkovej siete ktorý bol použitý u celého modelu. Rovinnú sieť zo základnej plochy následne zmažeme aby nevznikla vyššia tuhosť. Tvar siete základnej roviny, celú sieť sub-modelu ale aj detail trhlinových prvkov môžeme vidieť na nasledujúcich obrázkoch.



Obrázok 17 Siet’ základnej plochy sub-modelu



Obrázok 18 Sieť sub-modelu



Obrázok 19 Trhlinové prvky s uzlami

Na predchádzajúcich obrázkoch bola použitá geometria aj sieť konečných prvkov pre U-vrub s dĺžkou trhliny 1mm ale rovnakým spôsobom sme postupovali aj pri všetkých ostatných konfiguráciách len z rozdielom veľkosti elementov vzhľadom ku dĺžke trhliny, tak aby vyhovovali vyššie spomenutým požiadavkám. Vplyv veľkosti prvkov na výpočet bude spomenutý neskôr.

8.4. Zaťaženie celého modelu a okrajové podmienky

Ako bolo spomenuté v kapitolách 7.3 a 7.4. Jediné zaťaženie je krútiaci moment na jednej strane hriadele a votknutie na druhej strane hriadele týmto spôsobom zaťažíme aj sieť konečných prvkov celého modelu a pomocou prepočítaných posuvov prenesieme na sub-model.

Votknutie sme realizovali tak, že z plôch na jednom konci hriadele sme vybrali všetky uzly a zamedzili sme im všetky stupne voľnosti teda 3 pretože prvok SOLID 186 nemá rotačné stupne voľnosti[8].

Zaťaženie momentom bolo vygenerované pomocou kontaktných prvkov ktoré sme vytvorili na druhom konci hriadele a previazali sme ich s tzv. pilotným uzlom. Tento pilotný uzol sme následne zaťažili momentom 10000 Nmm. Keďže je pilotný uzol previazaný s uzlami na ploche konca hriadeľa prepočíta zaťaženie do každého jedného uzlu rovnomerne v závislosti od vzdialenosti k pilotnému uzlu [6]. Takéto zaťaženie vygeneruje kurtový moment. Takýto spôsob zaťaženia je potrebný z toho dôvodu, že prvky SOLID 186 nemajú rotačné stupne voľnosti a teda sa nedajú zaťažiť priamo momentom.

8.5. Overenie zaťaženia a sub-modelingu

Overenie zaťaženia celého modelu sme previedli takým spôsobom, že sme si zistili vypočítané smykové napätie vo votknutí vygenerované krutivým momentom. Hodnotu tohto napätia sme schopný určiť analyticky, a tak isto vieme aký priebeh napätia by mal byť v pričnom reze hriadele.

Pre analytické riešenie budeme považovať našu hriadeľ za prizmatický prút ktorý splňa prútové predpoklady, i keď sú mierne porušené predpoklady geometrické kde musí platiť $l \gg h_{\max}$ kde l je dĺžka hriadele a h_{\max} priemer[9], tento fakt nebudeme brať do úvahy pretože výpočty sú iba orientačné a tak malá nepresnosť nám nebude prekážať. Ďalšie zjednodušenie je že budeme skúmať oblasť neovplyvnenú vrubom a trhlinou kde prútové predpoklady neplatia. A teda môžeme smykové napätia určiť ako[9]:

$$\tau = \frac{M_k}{W_k} \quad (8.1)$$

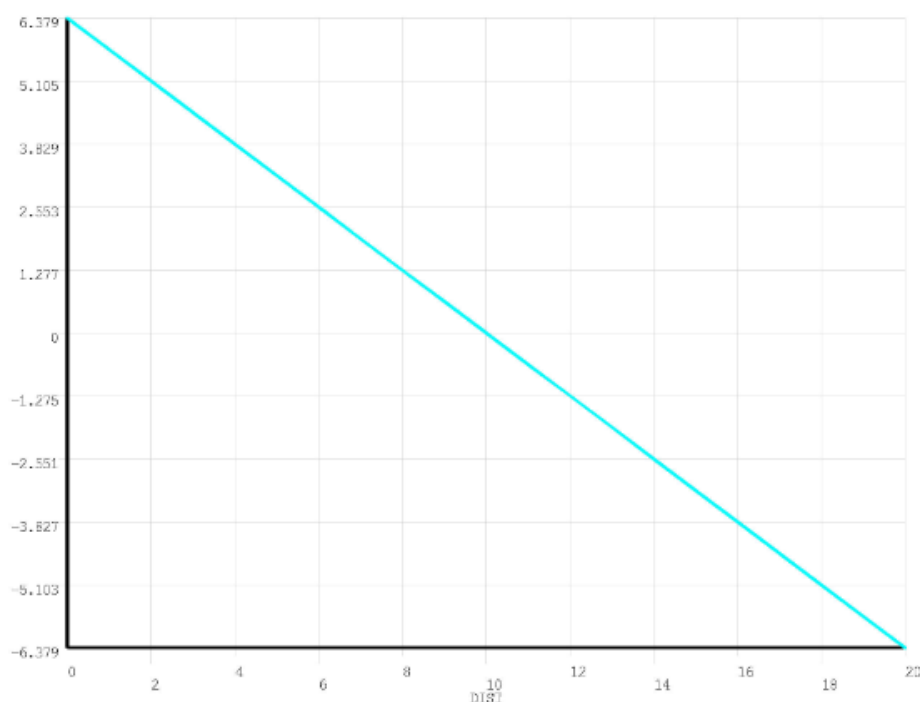
kde

$$W_k = \frac{\pi D^3}{16} \quad (8.2)$$

A teda maximálna hodnota napätia vo votknutí:

$$\tau = 6,37 \text{MPa} \quad (8.3)$$

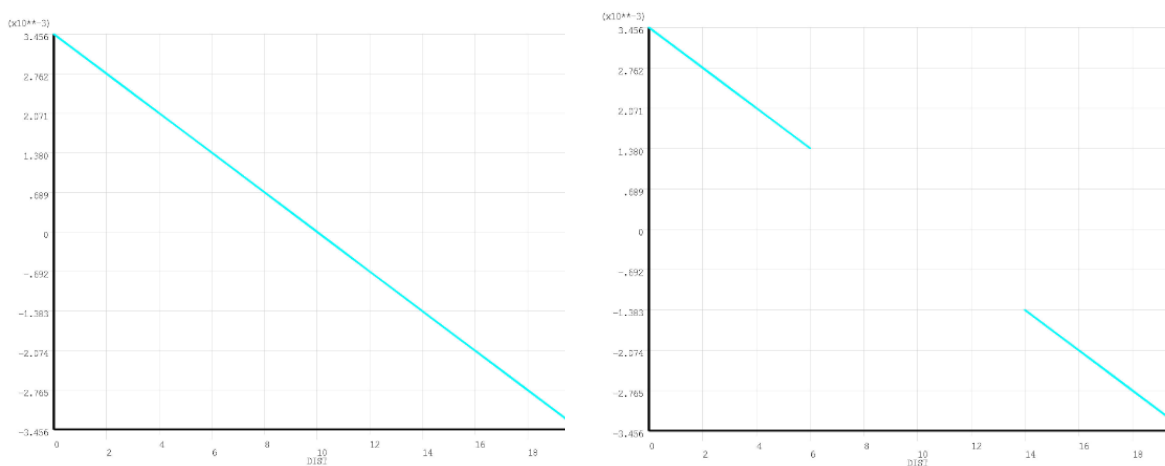
ďalej z teórie vieme, že priebeh smykového napätia od krutového momentu v pričnom priereze má lineárny priebeh a v prípade pravidelných uzavretých profilov, má na strednici nulovú hodnotu[9]. Priebeh nami spočítaného smykového napätia vo votknutí môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 20 Priebeh smykového napätia vo votknutí

Z prechádzajúceho obrázku vyplýva že maximálne smykové napätie je na povrchu hriadele a dosahuje hodnotu 6,379MPa čo je prijateľná zhoda s analytickým riešením, a takisto má v pričnom priereze lineárny priebeh čo súhlasí s teoretickými poznatkami a preto budeme tento spôsob zaťaženia považovať za vhodný.

Po tom ako sme si overili spôsob zaťažovania celého modelu musíme overiť aj korektnosť sub-modelingu. Keďže v kapitole 4.1.1 sme pojednávali o tom, že sub-modeling nám prepočíta posuvy z celého modelu na sub-model, overenie prevedieme tak, že si vyjadríme posuvy jak z celého modelu v mieste kde má sub-model hranice, tak aj z hraníc sub-modelu a porovnáme. Porovnanie môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku.

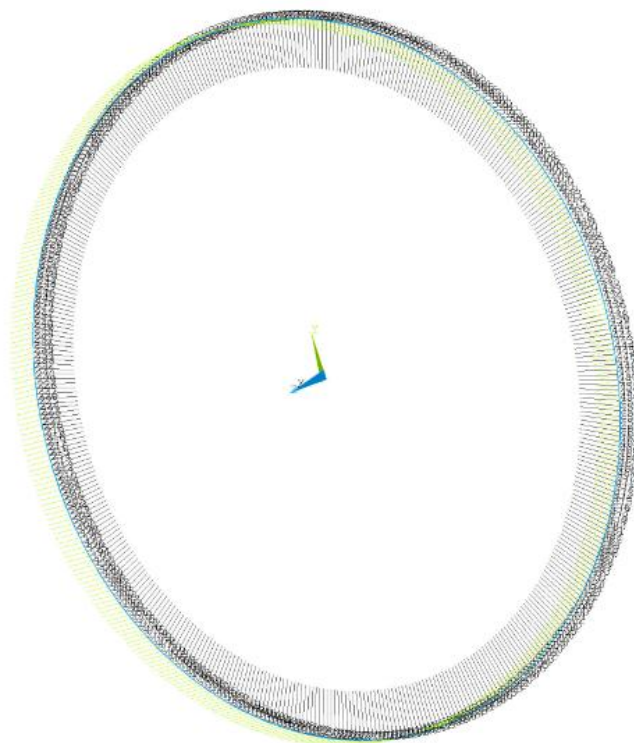


Obrázok 21 Posuvy na hranici sub-modelu

Na predchádzajúcom obrázku môžeme vidieť, vykreslené posuvy v smere osy y , vľavo pre celý model, vpravo pre sub-model. Posuvy boli vyjadrené na ľavej hranici sub-modelu pri nulovej y -novej súradnici. Z obrázku vyplýva, že hodnoty sa absolútne zhodujú s rozdielom, že sub-model má medzikruhový tvar čo je zrejme aj z obrázku. Opäť môžeme vidieť lineárny priebeh posuvov čo je v zhode s analytickými poznatkami a teda budeme ďalej predpokladať, že sub-modeling je prevedený správne.

8.6. Nastavenie výpočtu faktor intenzity napätia

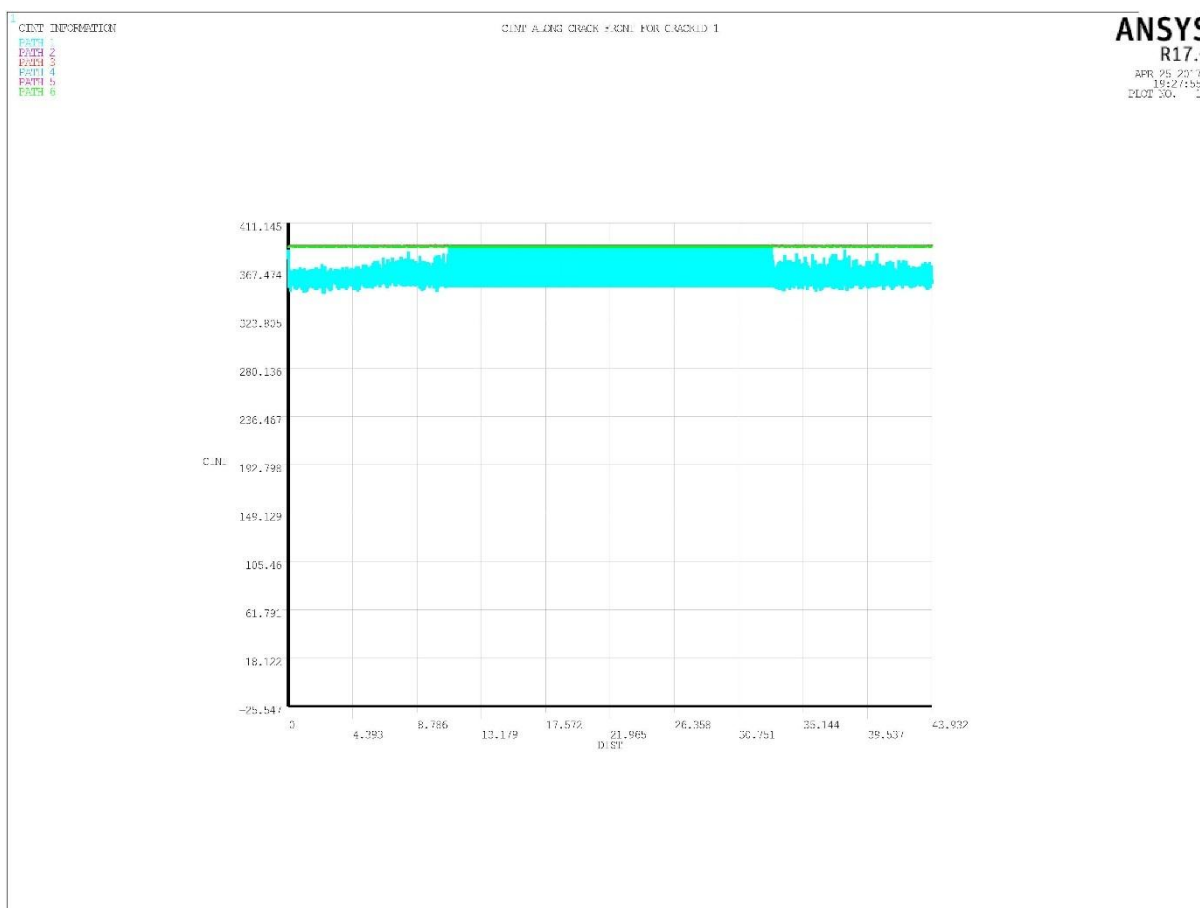
Keďže získavame faktor intenzity napätia cez príkaz CINT, musíme tomuto príkazu nadefinovať informácie o trhline a niekoľko ďalších potrebných informácií. Informácie o trhline nadefinujeme podpríkazom CENC[4]. Tento príkaz potrebuje nadefinovať uzol v koreni trhliny, do toho uzlu predpísaný súradnicový systém kde osa x smeruje v smere šírenia trhliny a osa y je kolmá na líce trhliny. Tento postup vykonáme pre každý uzol na čele trhliny. Z teórie nám je známe, že pokiaľ ide o prostý krut faktor intenzity by mal byť v každom bode rovnaký. Ďalej z teórie vieme, že pri prostom krute dochádza iba k módu III a teda faktor intenzity napätia pre mód I a mód II sú nulové. Týmto predpokladom sme sa snažili čo najviac priblížiť, najväčší vplyv na to má hustota siete. Najvhodnejšej hustote siete vzhľadom na kvalitu výpočtu a množstvu elementov sa budeme venovať neskôr v kapitole *Konvergencia siete*. Ďalšia informácia ktorú musíme zadať príkazu CINT, je tá či sa jedná o symetrickú úlohu a počet kontúr na ktorých bude počítaný faktor intenzity napätia. Hodnota faktora intenzity napätia by mala byť na všetkých kontúrach rovnaká, pretože ako už bolo vyššie zmienené hodnota faktora intenzity napätia nie je závislá na integračnej ceste.



Obrázok 22 Súradnicové systémy v uzloch na čele trhliny

8.7. Konvergencia siete

Táto podkapitola nie je pri riešení faktoru intenzity napätia na čele trhliny až tak dôležitá a to z dôvodu toho, že samotný software nám presne stanovuje ako má sieť pri koreni trhliny vyzerat', ako už bolo spomenuté. No keďže sa nám parametricky mení vrub a s ním dĺžka trhliny tak sa nám musí meniť aj veľkosť siete pri koreni trhliny. Na to aby sme boli schopný posúdiť vplyv a výpočty vzájomne porovnávať sme sa snažili aby bola sieť rovnaká pri všetkých konfiguráciách a to v pomere ku dĺžke trhliny. Teda v prípade bez vrubu kde je dĺžka trhliny 3mm mal element na čele trhliny 0,3mm a pri dĺžke trhliny 0,3mm mal element na čele trhliny 0,03mm. Keďže vrub sa nachádza v blízkosti čela trhliny, pri postupnom zväčšovaní elementov v predpísanom pomere je sieť stále dostatočne hustá aj v okolí vrubu. Pri vhodnej hustote siete na čele trhliny by mal mať faktor intenzity napätia v každom uzle nadobúdať rovnakých hodnôt, a takisto o vhodnosti siete vypovedá aj rozdiel v hodnotách v závislosti na ktorej kontúre bol počítaný. Pri správnej voľbe siete by mal mať rovnaké hodnoty na všetkých kontúrach. Na nasledujúcom obrázku môžeme vidieť hodnoty faktoru intenzity napätia v každom uzle a pre každú kontúru.

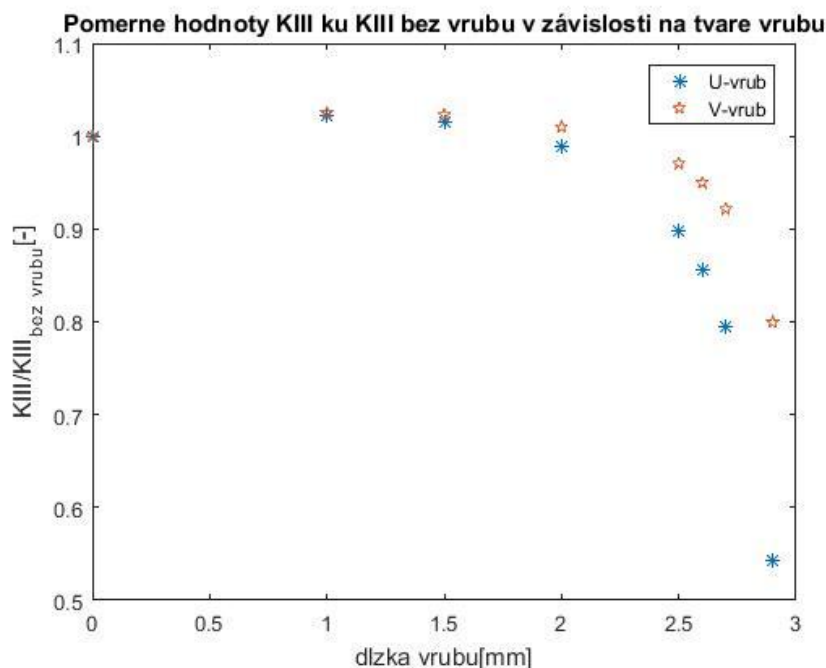


Obrázok 23 Faktor intenzity napätia na čele trhliny

Na obrázku môžeme vidieť, že hodnota faktoru intenzity napätia na čele trhliny je rovnaká v každom uzle a pre všetky kontúry okrem kontúry číslo jedna ktorej cesta nie je zrejme v dostatočnej vzdialenosti od čela trhliny a teda je značne ovplyvnená. Takto zvolenú sieť na čele trhliny môžeme považovať za vhodnú.

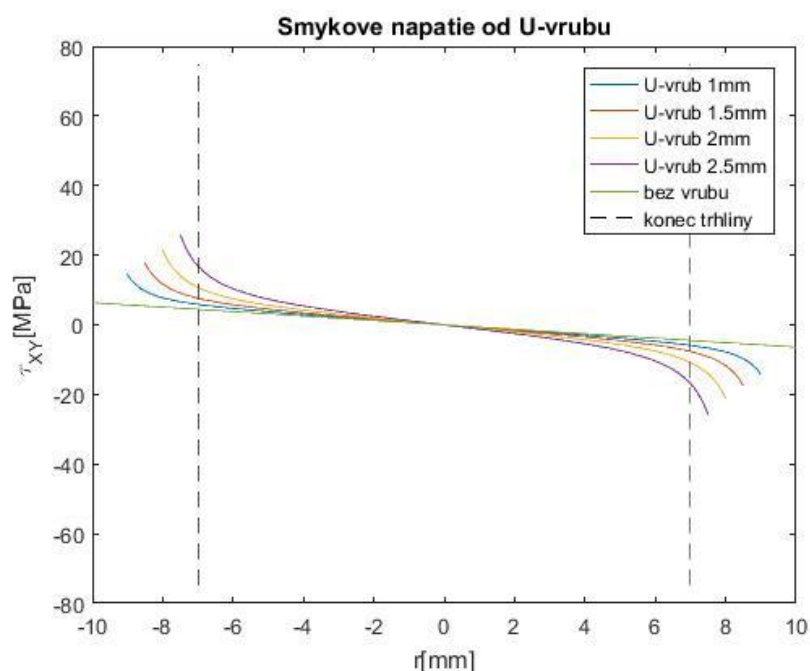
8.8.Spracovanie výsledkov

Na ďalších obrázkoch sú zobrazené napočítané pomerné hodnoty vzťahnuté ku hodnote intenzity napätia, trhliny ktorá sa nešíri z vrubu ale z voľného povrchu. Pre všetky napočítané konfigurácie tvarov vrubov.



Obrázok 24 Pomerné hodnoty K_{III}

Z obrázkov vyplýva, že hodnota faktoru intenzity klesá, pri klesajúcej dĺžke trhliny, teda pri zväčšovaní dĺžky vrubu. Hodnota K_{III} pri trhline šíriacej sa z povrchu nadobúda hodnotu $29,5 \text{ MPa}\cdot\text{mm}^{1/2}$. Pri predlžovaní vrubu spočiatku, zhruba do 2 mm, nemá tvar ani veľkosť vrubu na K_{III} nijaký významný vplyv, pričom dĺžka trhliny je v tej chvíli 1 mm. U ďalšieho predlžovania vrubu ale začne hodnota K_{III} klesať, výraznejšie klesá pri U vrube. Pri dĺžke vrubu 2,9 mm teda dĺžke trhliny 0,1 mm klesne až zhruba na 55% vzhľadom k pôvodnej hodnote u U-vrubu a na 80% u V-vrubu. Na lepšie preskúmanie toho čo sa deje v mieste koreňa trhliny sme si vypočítali smykové napätie od vrubov ale bez trhliny a porovnali sme ho s napätím v mieste kde sa nachádza u našich modelov koreň trhliny ale tentokrát bez vrubu aj bez trhliny. Priebeh toho napätia pre U-vrubby môžeme vidieť na ďalšom obrázku. Priebeh napätia pre V- vrubby sme nepočítali a to z toho dôvodu, že v koreni nebolo modelované zaoblenie a teda sa v koreni V-vrubu nachádza singularita.



Obrázok 25 Priebek smykového napätia od U-vrubov

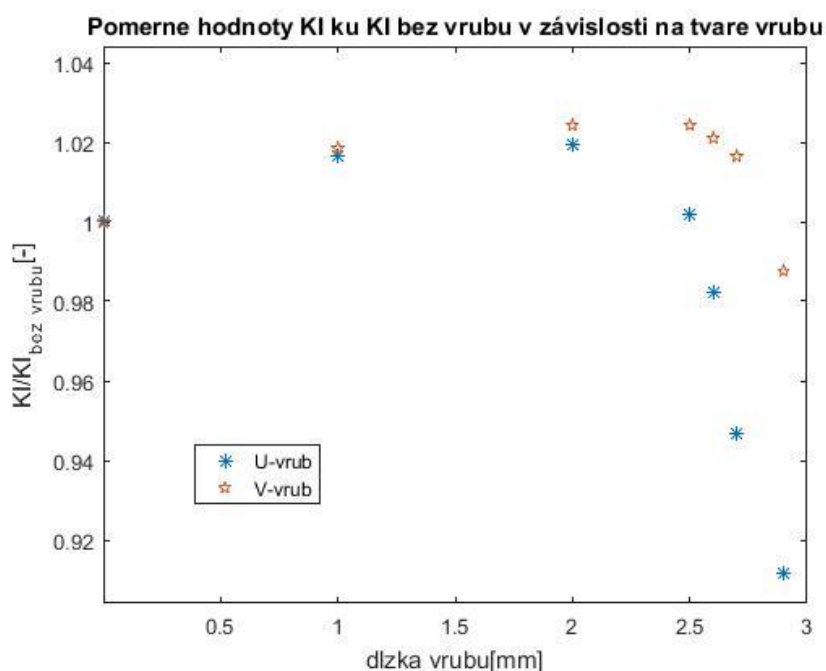
Na lepšiu orientáciu vo výsledkoch sme hodnotu smykového napätia v mieste koreňa trhliny vypísali do nasledujúcej tabuľky v závislosti na dĺžke U-vrubu.

Dĺžka vrubu[mm]	0	1	1,5	2	2,5
U-vrub [MPa]	4,47	5,87	7,65	10,82	16,92

Tabuľka 1 Hodnoty smykového napätia od vrubov

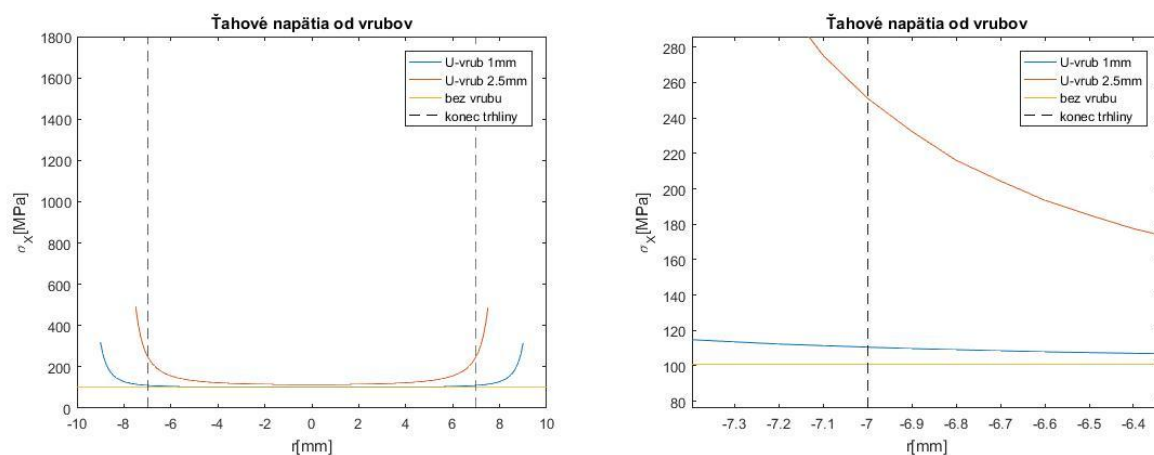
Z tabuľky je zrejmé, že hodnota smykového napätia je v mieste kde sa nachádza u modelov s trhlinou koreň trhliny jednoznačne vyššia ako pri modeli bez vrubu.

Na verifikáciu našich výsledkov sme spočítali hodnoty faktoru intenzity napätia pre mód I, keď sme náš model nezaťažili krutom ale ťahom. Verifikáciu myslíme tým spôsobom, že mód I je na rozdiel od módu III výrazne lepšie preskúmaný a teda po rešení sme schopný naše napočítané výsledky porovnať s výsledkami ktoré sú už napočítané od iných autorov. Pomerné hodnoty KI ku KI modelu bez vrubu môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 26 Pomerné hodnoty KI

Z prechádzajúcich obrázkov vyplýva, že ťah má oproti krutu výrazné menší vplyv na faktor intenzity napätia. Pri predlžovaní vrubu, pri ťahu je vidno spočiatku určitý nárast a následný pokles opäť výraznejší pri U-vrube, ale pomerné hodnoty sú skoro zanedbateľné keď pri dĺžke vrubu 2,9 mm je pri U-vrube pomerná hodnota vyjadrená v percentách 91% a pri V-vrube 99%. Narozdiel od krutu, kde pri dĺžke vrubu 2,9 mm dosahuje pomerná hodnota vyjadrená v percentách u U-vrubu 55% a u V-vrubu 80%. Následne sme si opäť spočítali napätie od vybraných vrubov pri modeloch bez trhliny a vyniesli do grafu podobne ako pri krute. V grafe nie sú vynesené všetky hodnoty, iba limitné prípady dĺžky U-vrubu 1 mm a 2,5 mm pre oba tvary vrubu.



Obrázok 27 Priebeh ťahového napätia od vrubov a detail (vpravo)

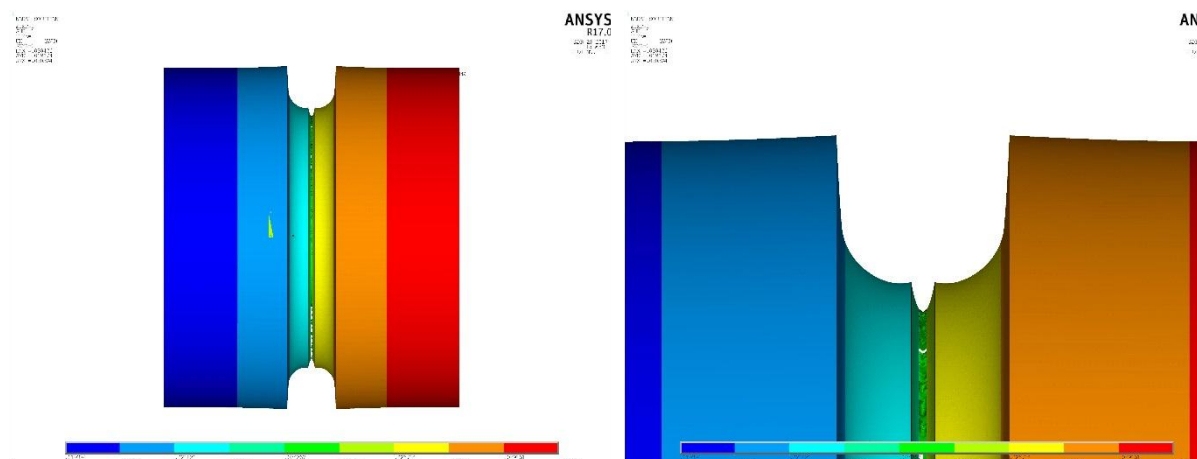
Pre lepšiu orientáciu vo výsledkoch sme zase hodnotu ťahového napätia v mieste koreňa trhliny vypísali do tabuľky v závislosti na dĺžke a tvare vrubu.

Dĺžka vrubu[mm]	0	1	2,5
U-vrub [MPa]	101,03	110,59	251,15

Tabuľka 2 Hodnoty ťahového napätia od vrubov

Môžeme vidieť, že napätie od U-vrubu je v mieste koreňa trhliny vyššie ako pri modeli bez vrubu pre obe dĺžky vrubu.

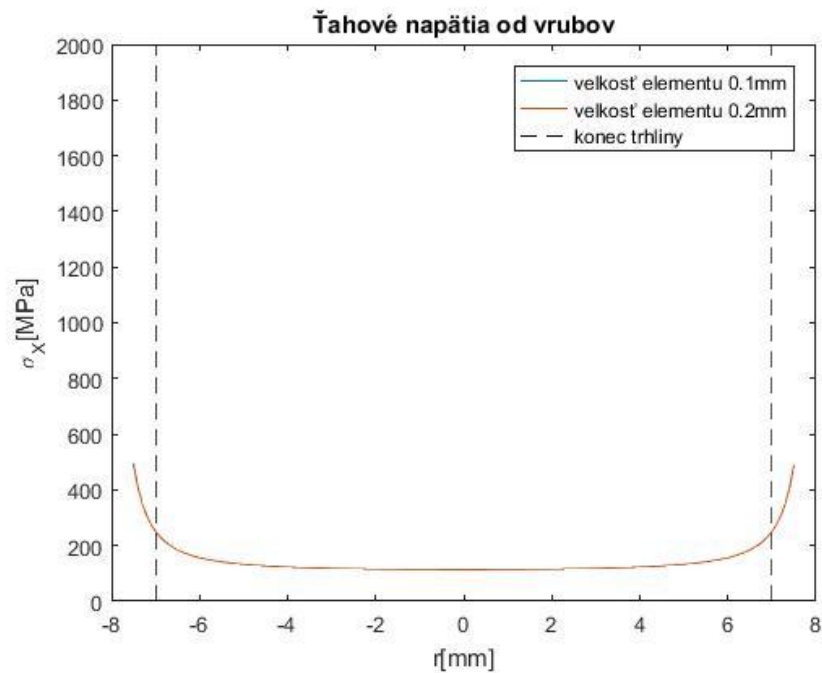
V prípade ťahu si môžeme jednoducho overiť tvorbu nášho modelu s trhlinou, a to tým spôsobom, že pri vykreslení zdeformovaného tvaru môžeme na rozdiel od krútenia jednoducho vidieť ako sa nám otvára trhlina a deformuje teleso. Zdeformovaný tvar telesa s vrubom a trhlinou môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 28 Posun v smere zaťaženia pre ťah s detailom na trhlinu

Z obrázku jasne vyplýva, že pri vykreslení posuvu v smere zaťaženia teda osy x, je model symetrický a trhlina sa roztvára rovnomerne, môžeme teda konštatovať, že náš model je vytvorený správne. Na obrázku sa nachádza sub-model a teda je zřejmé, že je správne prevedený aj sub-modeling. Rovnaké modely boli použité tak isto aj pre krútenie len s iným zaťažením. Overením zaťaženia a sub-modelingu pri krútení sme sa venovali v kapitole 8.5.

Konvergencia siete pre prípad bez trhliny bola prevádzaná iným spôsobom ako pri modeloch s trhlinou, keďže v tomto prípade nemáme predpísanú doporučenú hustotu siete ako tomu bolo pri modeloch s trhlinou. V našom prípade sa nám jednalo najmä o napätia v mieste kde sa nachádza koreň trhliny pre toto miesto sme robili aj konvergenciu siete. Konvergenciu sme prevádzali len na jednom s modelov a to pre U-vrub o dĺžke 2,5 mm. Postupovali sme takým spôsobom, že sme si zvolili počiatočnú hustotu siete o veľkosti elementu 0,2 mm v koreni vrubu a previedli ďalší výpočet kde sme zvolili polovičnú veľkosť elementu teda 0,1 mm. Výsledky sú na nasledujúcom obrázku.

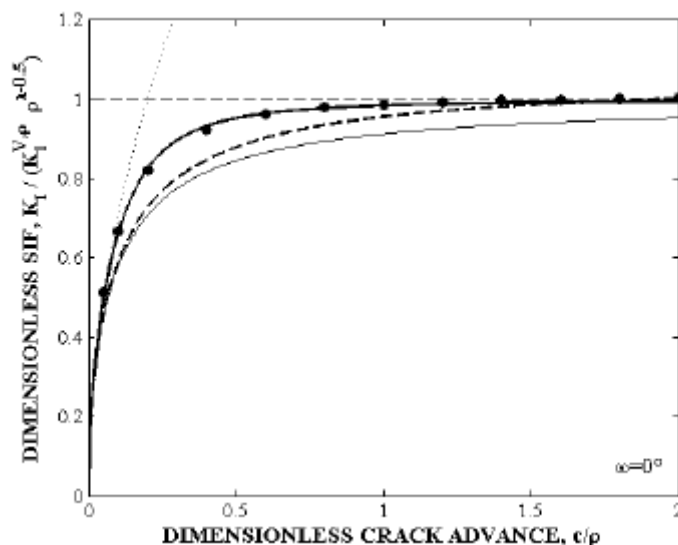


Obrázok 29 Napätia od vrubu pri overovaní konvergencie siete

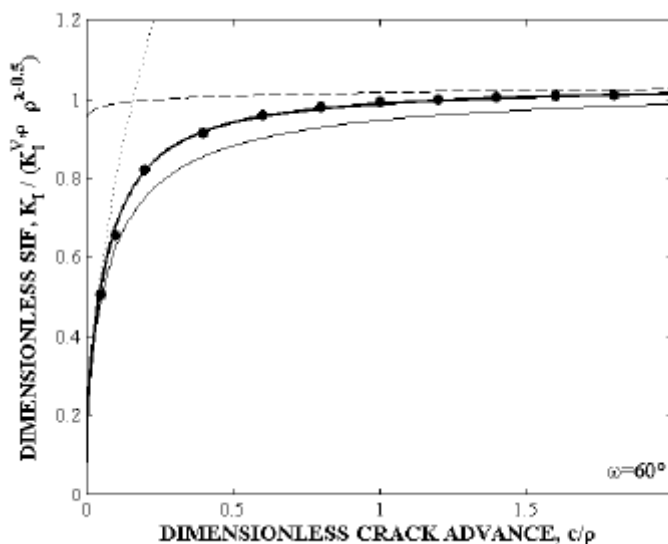
Z obrázku plynie skoro absolútna zhoda riešenia pri oboch veľkostiach elementoch a teda sme ďalej sieť s veľkosťou elementu 0,2 mm považovať za vhodnú. Aby sme boli schopný napätia od vrubov porovnávať používali sme rovnakú hustotu siete pre všetky konfigurácie výpočtov bez trhliny, ako pre krut tak aj pre ťah.

9. VERIFIKÁCIA, ZHODNOTENIE A DISKUSIA VÝSLEDKOV

Z nášho pohľadu najjednoduchším spôsobom ako overiť naše výsledky je porovnať nami spočítané výsledky s prácou od iných autorov. Veľmi podobným problémom sa zaoberali Carpinteri a spol. keď sa snažili analyticky riešiť faktor intenzity napätia pre zaoblený vrub ktorého geometria bola takisto parametrická. Tento problém bol veľmi príbuzný nášmu problému s rozdiel, že Carpinteri a spol. riešili dosku pre mód I. Výsledok Carpinteriho problému môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku:

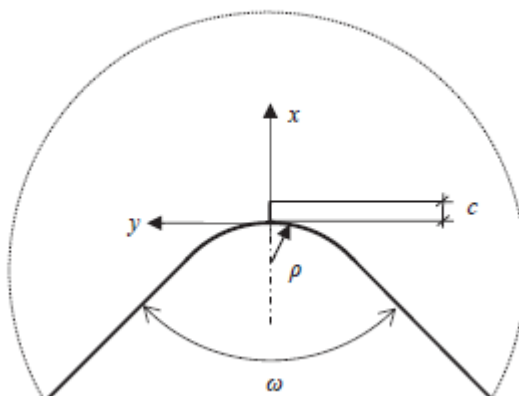


Obrázok 30 Výsledok Carpinteriho problému $\omega=0^\circ$ [12]



Obrázok 31 Výsledok Carpinteriho problému $\omega=60^\circ$ [12]

Hrubá čierna čiara s bodkami v prechádzajúcich výsledkoch predstavuje Carpinteriho MPK riešenie. Na lepšie pochopenie Carpinteriho výsledku musíme vidieť geometriu modelu:



Obrázok 32 Geometria Carpinteriho modelu[12]

Kde ω – uhol roztovrenia vrubu, ρ – zaoblenie vrubu a c – dĺžka trhliny.

Najskôr si spravíme paralelu medzi naším prípadom kde pri U-vrube môžeme povedať, že $\omega=0$, $\rho = 1$, a c = parameter ktorý budeme meniť. Tak isto aj pri V-vrube len s rozdielom, že $\omega=90^\circ$ $\rho = 0$ a c je opäť parameter. Keď sme dosadili naše paralelné hodnoty do Carpinteriho výsledkov môžeme vidieť, že faktor intenzity napätia sa pri konštantnej veľkosti zaoblenia a zmeňujúcej trhline zmeňuje rovnako tomu bolo aj v našom prípade. Ďalej môžeme vidieť, že v prípade keď dĺžka trhliny šíriacej sa z vrubu je 2-krát dlhšia ako polomer zaoblenia vrubu, nemá tvar ani veľkosť vrubu nijaký vplyv na faktor intenzity napätia. Tak tomu bolo aj v prípade nášho V-vrubu kde $\rho=0$ a faktor intenzity napätia sa v podstate nemenil. Tento jav je zapríčinený tzv. blízkosťou voľného povrchu. „Rýchlosť šírenia trhliny v blízkosti voľného povrchu telesa je obecnne iná než uprostred telesa.“ [13] Táto rozdielna rýchlosť šírenia trhliny má za následok zakrivenie čela trhliny. „V porovnaní s oblasťou uprostred telesa je na voľnom povrchu telesa vždy väčšia plastická zóna. Z tohoto dôvodu je efekt zatvárania trhliny na voľnom povrchu telesa výraznejší než uprostred telesa.“ [13] Tento fakt znamená, že pri krátkych trhlínach ktoré sa šíria z vrubu a ich dĺžka je menšia ako 2-krát polomer zaoblenie nám na popis poľa napätia a deformácie nestačí jednoparametrová lomová mechanika, prípadne musí byť pre každú dĺžku trhliny použitá iná tvarová funkcia, pretože geometria má veľmi veľký vplyv na výsledok.

ZÁVER

Cieľom tejto práce bolo zistiť vplyv geometrie vrubu na faktor intenzity napätia, v koreni trhliny ktorá sa z neho šíri, pre šmykové módy. Tohoto cieľa bolo dosiahnuté pre šmykový mód III. Riešenie bolo prevedené na dvoch typoch vrubov a to U-vrub a V-vrub. Čelo trhliny, ktorá sa šírila z vrubu, bolo od povrchu hriadele vždy rovnako vzdialené a menila sa len geometria vrubu. V tejto práci bolo preukázané, že faktor intenzity napätia klesá so skracujúcou sa dĺžkou trhliny. Výraznejšie klesá pri U-vrube a to z toho dôvodu, že V-vrub bol modelovaný bez zaoblenia na čele. Tento fakt je ovplyvnený tzv. blízkosťou voľného povrchu. Ukázali sme si že, vplyv zaoblenia vrubu má pri móde I veľký význam a to, že ak dĺžka trhliny je väčšia ako 2-krát zaoblenie vrubu, vplyv vrubu môžeme zanedbať. Pri móde III toto zistenie neplatí, aj napriek nulovému zaobleniu na čele V-vrubu, mala blízkosť voľného povrchu vplyv na faktor intenzity napätia. Faktor intenzity napätia klesal aj pri V-vrube ale výrazne pomalšie ako tomu bolo pri U- vrube. Pri celkovom zhodnotení môžeme konštatovať, že vrub má podstatne väčší význam pri móde III ako pri móde I a nemôžeme tento vplyv zanedbávať. Pri móde I môžeme vplyv vrubu zanedbať ale iba v prípade, že dĺžka trhliny je 2-krát väčšia ako zaoblenie vrubu, ak tomu tak nie je nemal by sa vplyv vrubu zanedbávať, aj keď vplyv je výrazne menší ako pri móde III.

POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: hledání souvislostí. Učební texty I.* Vyd. 1. Akademické nakladatelství CERM : VUTIUUM, 2007. ISBN 978-80-7204-555-6.
- [2] ONDRÁČEK, Emanuel; VRBKA, Jan; JANÍČEK, Přemysl a BURŠA Jiří. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II.* 4. přeprac. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM s.r.o., 2006, s. 185-195. ISBN 80-214-3260-8
- [3] VLK, Miloš; FLORIAN, Zdeněk. *Mezní stavy a spolehlivost.* Brno, 2007. Učební text. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky.
- [4] ANSYS® Mechanical APDL, Release 17.0, Help system, *Fracture analysis guide: Solving Fracture Mechanics Problems.* ANSYS, Inc.
- [5] ANSYS® Mechanical APDL, Release 17.0, Help system, *Advanced analysis guide: Submodeling.* ANSYS, Inc.
- [6] ANSYS® Mechanical APDL, Release 17.0, Help system, *Contact technology guide: Multipoint Constraints and Assemblies.* ANSYS, Inc.
- [7] ANSYS® Mechanical APDL, Release 17.0, Help system, *Modeling and meshing guide: Generating the mesh.* ANSYS, Inc.
- [8] ANSYS® Mechanical APDL, Release 17.0, Help system, *Theory reference: Element library.* ANSYS, Inc.
- [9] VRBKA, Jan. *Pružnost a pevnost I.* Brno, 2012. Učební text. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky.
- [10] JANSSEN, Michael; ZUIDEMA, Jan; WANHILL, Russell. *Fracture mechanics.* second edition, Spon Press, 2004. ISBN 0-415-34622-3.
- [11] VISZLAY, Viliam. *Numerická podpora pro analýzu únavového chování cementových kompozitů* [online]. Brno, 2015 [cit. 19. 5. 2017]. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=92075
- [12] CARPINTERI, Alberto; CORNETTI, Pietro; SAPORA, Alberto. *Analytical Stress Intensity Factors for cracks at blunted V-notches.* 2014, 20th European Conference on Fracture (ECF20).
- [13] ŠEVČÍK, Martin. *Vliv volného povrchu tělesa a gradientní změny materiálových vlastností na chování trhliny*[online]. Brno 2012 [cit. 19. 5. 2017]. Doktorská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=45534

- [14] YU, Hongjun; SUMIGAWA, Takashi; WU, Linzhi; TAKAYUKI, Kitamura. *Generalized domain-independent interaction integral for solving the stress intensity factors of nonhomogeneous materials*. 2015, International Journal of Solids and Structures
- [15] YU, Hongjun; WANG, Jie; SHIMADA, Takahiro; WU, Huaping; WU, Linzhi; KUNA, Meinhard; KITAMURA, Takayuki. *An I-integral method for crack-tip intensity factor variation due to domain switching in ferroelectric single-crystals*. 2016, Journal of the Mechanics and Physics of Solids
- [16] J-integral. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2014 [cit. 2017-05-24]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/J-integral>

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV

π	Ludolfovo číslo
σ	Nominálne napätie
a	Dĺžka trhliny
E	Modul pružnosti v ťahu
γ	Povrchová energia materiálu
G	Hnacia sila trhliny
K	Faktor intenzity napätia
R	Odpor materiálu proti šíreniu trhliny
F	Airyho funkcia
σ_{ij}	Obecné napätie
u_i	Obecný posuv
$f_{ij}; g_i$	Tvarová funkcia
r	Veľkosť plastickej zóny
φ	Uhol natočenia k čelu trhliny
ε_{ij}	Obecné pretvorenie
σ_{ij}^{aux}	Obecné napätie na pomocnom poli
ε_{ij}^{aux}	Obecné pretvorenie na pomocnom poli
u_{ij}^{aux}	Obecný posuv na pomocnom poli
q_i	Vektor predĺženia trhliny
I	I-integrál
K_i^{aux}	Faktor intenzity napätia na pomocnom poli
G	Modul pružnosti v šmyku
M_k	Krúťivý moment
W_k	Modul prierezu v krute
ω	Uhol roztvorenia vrubu
ρ	Zaoblenie vrubu
c	Dĺžka trhliny

Γ	Označenie kontúry
J	J-integrál
W	Hustota deformačnej energie
δ_{ij}	Kroneckerove delta
n_i	Jednotkový normálový vektor na kontúru

ZOZNAM OBRÁZKOV

Obrázok 1 Spôsob zaťažovania trhliny[3]	14
Obrázok 2 Napätie na čele trhliny[3]	17
Obrázok 3 Hodnoty tvarových funkcií[2]	18
Obrázok 4 Plastická zóna a napätie na čele trhliny[3]	19
Obrázok 5 Vplyv napätosti na plastickú zónu[3]	19
Obrázok 6 SOLID 186[4].	21
Obrázok 7 Singulárny prvok[4].	22
Obrázok 8 Príklad submodelingu[5].	23
Obrázok 9 Dôkaz nezávislosti integračných ciest[16]	24
Obrázok 10 Kontúry I-integrálu[15]	25
Obrázok 11 Cesta trhlinou a súradnicový systém trhliny[4]	27
Obrázok 12 Model geometrie hriadeľov	32
Obrázok 13 Geometria sub-modelu	33
Obrázok 14 Základná plocha a objemy pre tvorbu siete celý model	34
Obrázok 15 Základné plochy a objemy pre tvorbu siete sub-model	34
Obrázok 16 Sieť celého modelu	35
Obrázok 17 Sieť základnej plochy sub-modelu	35
Obrázok 18 Sieť sub-modelu	36
Obrázok 19 Trhlinové prvky s uzlami	36
Obrázok 20 Priebeh smykového napätia vo votknutí	38
Obrázok 21 Posuvy na hranici sub-modelu	38
Obrázok 22 Súradnicové systémy v uzloch na čele trhliny	39
Obrázok 23 Faktor intenzity napätia na čele trhliny	40
Obrázok 24 Pomerné hodnoty KIII	41
Obrázok 25 Priebeh smykového napätia od U-vrubov	42
Obrázok 26 Pomerné hodnoty KI	43
Obrázok 27 Priebeh ťahového napätia od vrubov a detail (vpravo)	43
Obrázok 28 Posun v smere zaťaženia pre ťah s detailom na trhlinu	44

Obrázok 29 Napätia od vrubu pri overovaní konverencie siete	45
Obrázok 30 Výsledok Carpinteriho problému $\omega=0^\circ$ [12]	46
Obrázok 31 Výsledok Carpinteriho problému $\omega=60^\circ$ [12]	46
Obrázok 32 Geometria Carpinteriho modelu[12]	47

ZOZNAM TABULIEK

Tabuľka 1 Hodnoty smykového napätia od vrubov	42
Tabuľka 2 Hodnoty ťahového napätia od vrubov	44