



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Diplomová práce

Vlastnosti vybraných rovinných křivek

Vypracovala: Lucie Kusová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Vlastnosti vybraných rovinných křivek jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

Poděkování

Dokončení této práce by se neobešlo bez podpory lidí, kterým bych ráda poděkovala. Děkuji vedoucímu mé diplomové práce prof. RNDr. Pavlovi Pechovi, CSc. za odborné vedení a poskytnutí pomoci s výběrem odborné literatury.

Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Haně Štěpánkové, Ph.D. za ochotu a pomoc při sepisování práce.

Anotace

Diplomová práce je zaměřena na vlastnosti vybraných rovinných křivek řádu vyššího než tři a jedné křivky transcendentní. U každé křivky je uveden přehled vlastností, které jsou následně odvozovány a detailněji popisovány. Všechny křivky jsou obohaceny o obrázky, které jsou vytvořeny pomocí matematického softwaru GeoGebra. Kromě těchto obrázků jsou v textu přiloženy odkazy přímo na GeoGebra, ve které jsou některé zajímavé vlastnosti popsány a demonstrovány.

Abstract

The thesis is focused on the properties of the selected plane curves of order higher than two and one transcendent curve. To each curve an overview of its properties which are then derived and described in detail is given. All curves are enriched with their images that are created in mathematical software GeoGebra. In addition, to these images the text links directly to GeoGebra are added, where some interesting features are described and demonstrated.

Obsah

Úvod.....	- 5 -
1 PŘÍMÁ STROFOIDA	- 6 -
1.1 Historie.....	- 6 -
1.2 Rovnice strofoidy	- 7 -
1.3 Základní geometrické vlastnosti	- 7 -
1.4 Parametrické rovnice.....	- 8 -
1.5 Polární rovnice	- 10 -
1.6 Plocha smyčky	- 11 -
1.7 Plocha smyčky – jiný pohled	- 14 -
1.8 Množina bodů	- 15 -
1.8.1 Strofoida jako ohniska elips, které vzniknou při řezu válce svazkem rovin.....	- 15 -
1.8.2 Strofoida jako průsečík výšek v rovnoramenném trojúhelníku.....	- 19 -
2 ASTEROIDA	- 21 -
2.1 Historie.....	- 21 -
2.2 Rovnice asteroidy.....	- 22 -
2.3 Základní geometrické vlastnosti	- 22 -
2.4 Implicitní rovnice.....	- 23 -
2.5 Parametrické rovnice.....	- 24 -
2.6 Polární rovnice	- 26 -
2.7 Plocha ohraničená křivkou.....	- 28 -
2.8 Délka křivky.....	- 29 -
2.9 Množina bodů	- 31 -
2.9.1 Asteroida jako množina pat kolmic na úhlopříčku kolmého rovnoběžníku	- 31 -
2.9.2 Asteroida jako hypocykloida.....	- 32 -
2.10 Asteroida jako obálka.....	- 33 -
2.10.1 Asteroida jako obálka úseček.....	- 33 -
2.10.2 Asteroida jako obálka elips	- 35 -
3 DELTOID	- 37 -
3.1 Historie.....	- 37 -
3.2 Rovnice deltoidu	- 38 -
3.3 Základní geometrické vlastnosti	- 39 -
3.4 Parametrické rovnice.....	- 39 -

3.5	Polární rovnice	- 42 -
3.6	Plocha ohraničená křivkou	- 43 -
3.7	Délka křivky	- 45 -
3.8	Množina bodů	- 47 -
3.8.1	Deltoid jako hypocykloida	- 47 -
3.9	Deltoid jako obálka	- 48 -
3.9.1	Deltoid jako obálka průměrů	- 48 -
4	KARDIOIDA	- 50 -
4.1	Historie	- 50 -
4.2	Rovnice kardioidy	- 51 -
4.3	Základní geometrické vlastnosti	- 52 -
4.4	Plocha ohraničená křivkou	- 52 -
4.5	Délka křivky	- 54 -
4.6	Množina bodů	- 55 -
4.6.1	Kardioida jako speciálním případ Pascalovy závitnice	- 55 -
4.6.2	Kardioida jako úpatnice	- 57 -
4.6.3	Kardioida jako epicykloida	- 59 -
4.6.4	Kardioida jako epicykloida s vnitřním dotykem (nazývána pericykloida)	- 60 -
5	NEFROIDA	- 62 -
5.1	Historie	- 62 -
5.2	Rovnice nefroidy	- 63 -
5.3	Základní geometrické vlastnosti	- 64 -
5.4	Plocha ohraničená křivkou	- 64 -
5.5	Délka křivky	- 66 -
5.6	Množina bodů	- 67 -
5.6.1	Nefroida jako epicykloida	- 67 -
5.7	Nefroida jako obálka	- 68 -
5.7.1	Nefroida jako obálka kružnic	- 68 -
6	KOPERNÍKOVA VĚTA	- 70 -
7	BERNOULLIHO LEMNISKÁTA	- 71 -
7.1	Historie	- 71 -
7.2	Rovnice Bernoulliho lemniskáty	- 72 -
7.3	Základní geometrické vlastnosti	- 72 -
7.4	Polární rovnice	- 72 -

7.5	Plocha ohraničená křivkou	- 73 -
7.6	Bernoulliho lemniskáta jako speciální případ Cassiniho oválů.....	- 74 -
8	CYKLOIDA.....	- 76 -
8.1	Historie.....	- 76 -
8.2	Rovnice cykloidy	- 77 -
8.3	Základní geometrické vlastnosti:	- 78 -
8.4	Plocha jednoho oblouku cykloidy.....	- 78 -
8.5	Délka jednoho oblouku	- 79 -
	Závěr.....	- 80 -
	Seznam použité literatury a ostatních zdrojů.....	- 81 -
	Literatura	- 81 -
	Internetové zdroje.....	- 81 -

Úvod

Cílem této diplomové práce je vytvořit základní přehled vlastností vybraných rovinných křivek vyššího řádu než tři. K těmto křivkám připojuji i cykloidu, která není algebraickou křivkou, ale transcendentní.

Práce je rozdělena do osmi kapitol, podle počtu vybraných křivek. Každou křivku popisují stejným způsobem. Nejprve představuji jednoduchou definici, názorný obrázek a zmínku o historii objevu dané křivky. Dále uvádím rovnici křivky v kartézské soustavě souřadnic, parametrické rovnice, polární rovnici a přehled základních geometrických vlastností. V následujících podkapitolách se věnuji křivce podrobněji. Odvozují některé vlastnosti a rovnice křivky, jiné pouze popisují. Je zajímavé, že křivky vyššího řádu než tři, které v této práci uvádím, mají i přes složité výpočty jednoduché ve většině případů celočíselné výsledky závislé jen na svém parametru. (např. délka asteroidy je $6a$ a plocha kardioidy je $6\pi a^2$)

V závěru se na každou křivku dívám z pohledu množiny bodů nebo obálky. Tuto část považuji za nejzajímavější a ke každému příkladu je přiložen odkaz na křivku vytvořenou v matematickém programu GeoGebra. Často využívám možnosti zobrazení „stopy“ bodu či vykreslení množiny daných bodů a krokování konstrukce.

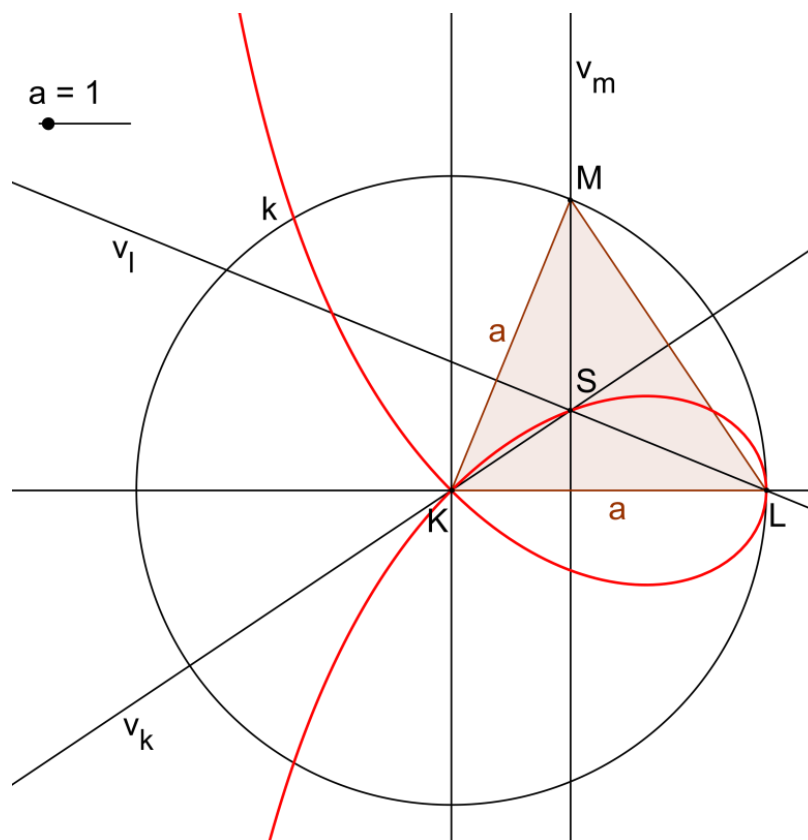
Všechny kapitoly jsou vytvořeny převážně na základě této literatury:

Loockwood E. H., A Book of curves, Shikin Eugene V., Handbook and Atlas of curves a internetových stránek www.mathcurve.com. Proto již přímo v textu na tuto literaturu neodkazuji a uvádím ji až zcela v závěru v seznamu použité literatury a jiných zdrojů.

Každá zde popsána křivka skrývá v sobě krásu a platnost řádu světa, kterou bychom mohli obdivovat a objevovat celý život. Tato diplomová práce je tedy jen zlomkem toho, co se o těchto křivkách můžeme dovědět, a doufám, že tímto čtenáře alespoň trochu nadchnu ke studiu křivek a ke geometrii samotné.

1 PŘÍMÁ STROFOIDA

Strofoida je rovinná křivka, která vznikne jako množina bodů průsečíků výšek v rovnoramenném trojúhelníku. (Obrázek 1)



Obrázek 1: Strofoida

Touto definicí strofoidy se budeme ještě podrobněji zabývat v podkapitole Množina bodů.

1.1 Historie

Strofoidu poprvé objevil při své práci *Isaac Barrow* (1630 – 1677), učitel *Isaac Newtona*, v roce 1670. Avšak italský fyzik a matematik *Evangelista Torricelli* (1608 – 1647) tuto křivku popsal ve svých dopisech již kolem roku 1645.

Název *strofoida* pochází z řeckého slova „*strophos*“ (ve významu „kroucený pás“) a navrhl jej *Montucci* v roce 1846.

1.2 Rovnice strofoidy

Strofoida je algebraická křivka třetího stupně, kterou můžeme popsat těmito rovnicemi:

kartézské souřadnice:

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$

parametrické vyjádření:

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$$

$$y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^2}$$

polární souřadnice:

$$r = a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$$

1.3 Základní geometrické vlastnosti

Osa souměrnosti: $y = 0$

Vertikální asymptota: $x = 2a$

Plocha smyčky: $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)a^2$

Plocha mezi křivkou a asymptotou: $\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)a^2$

Délka smyčky: $2a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 2\varphi}}{\cos^2 \varphi} d\varphi \approx 2,49a$

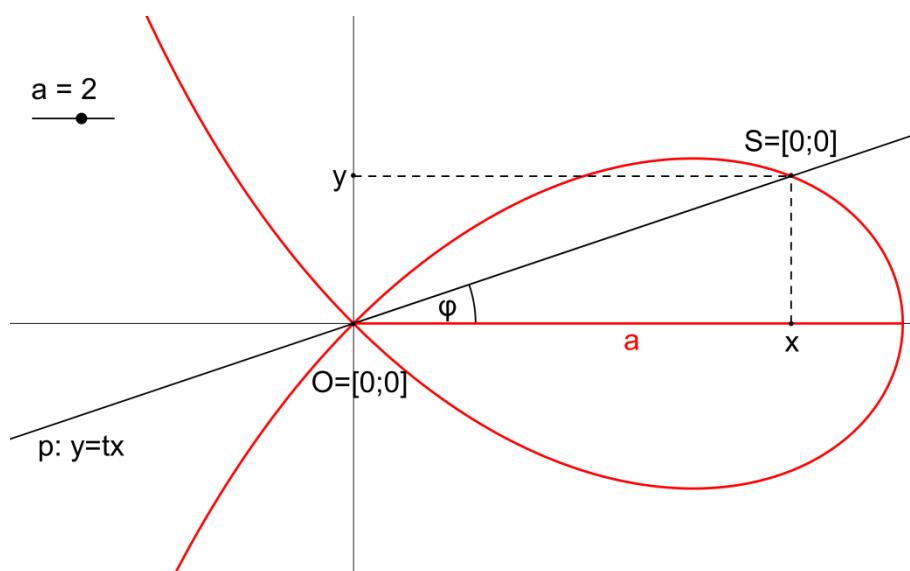
1.4 Parametrické rovnice

Mezi rovnicemi strofoidy jsme si uvedli i parametrické rovnice. Nyní si je odvodíme.

Zvolme si kartézskou soustavu souřadnic tak, aby libovolná přímka p protínající strofoidu ve dvou bodech procházela počátkem $O = [0;0]$ a bodem $S = [x; y]$, který leží na smyčce strofoidy. (Obrázek 2)

Rovnice přímky p je:

$$p: y = tx, \quad t = \operatorname{tg}\varphi$$



Obrázek 2: Strofoida – odvození parametrických rovnic

Obecná rovnice strofoidy je:

$$s: x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$$

Po jednoduché úpravě dostáváme rovnici ve tvaru:

$$s: y^2(a + x) - x^2(a - x) = 0$$

Parametrické rovnice získáme dosazením rovnice přímky $p: y = tx$ do rovnice strofoidy s .

$$(tx)^2(a + x) - x^2(a - x) = 0$$

$$t^2x^2a + t^2x^3 - ax^2 + x^3 = 0$$

$$ax^2(t^2 - 1) + x^3(t^2 + 1) = 0$$

Vytkneme dvojnásobný kořen x^2 a vypočítáme x – souřadnici.

$$x^2 [a(t^2 - 1) + x(t^2 + 1)] = 0$$

$$a(t^2 - 1) + x(t^2 + 1) = 0$$

$$x(t^2 + 1) = -a(t^2 - 1)$$

$$x(t^2 + 1) = a(1 - t^2)$$

$$x = a \frac{(1 - t^2)}{(1 + t^2)}$$

Stejně vypočítáme i y – souřadnici.

$$y^2 \left(a + \frac{y}{t} \right) - \left(\frac{y}{t} \right)^2 \left(a - \frac{y}{t} \right) = 0$$

$$ay^2 + \frac{y^3}{t} - a \frac{y^2}{t^2} + \frac{y^3}{t^3} = 0$$

$$at^3 y^2 + t^2 y^3 - aty^2 + y^3 = 0$$

$$aty^2(t^2 - 1) + y^3(t^2 + 1) = 0$$

$$y^2 [at(t^2 - 1) + y(t^2 + 1)] = 0$$

$$y(t^2 + 1) = at(1 - t^2)$$

$$y = at \frac{(1 - t^2)}{(1 + t^2)}$$

Parametrické rovnice strofoidy jsou:

$$s: \quad x = a \frac{(1 - t^2)}{(1 + t^2)}$$

$$y = at \frac{(1 - t^2)}{(1 + t^2)}$$

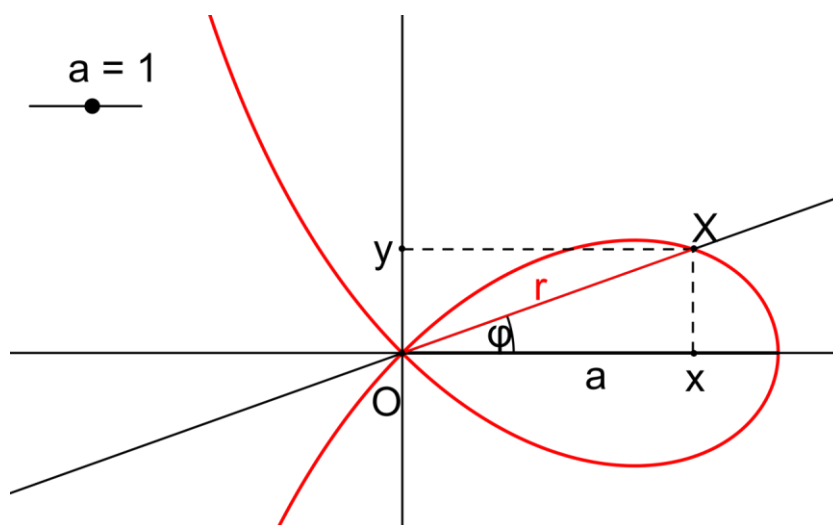
1.5 Polární rovnice

Nyní si odvodíme polární rovnici strofoidy. Každý bod X v kartézské soustavě souřadnic můžeme popsat pomocí polární soustavy souřadnic. První souřadnice udává vzdálenost bodu od počátku, druhá úhel spojnice bodu a počátku od osy x . (Obrázek 3)

$$X = [x; y] \rightarrow X = [r; \varphi]$$

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi, \quad r = [0; a], \varphi = [0; 2\pi]$$



Obrázek 3: Strofoida – odvození polární rovnice

Rovnice strofoidy v kartézské soustavě souřadnic je $s : y^2(a+x) = x^2(a-x)$.

Za x a y dosadíme polární souřadnice:

$$(r \cdot \sin \varphi)^2 \cdot (a + r \cdot \cos \varphi) = (r \cdot \cos \varphi)^2 \cdot (a - r \cdot \cos \varphi)$$

Rovnici upravujeme:

$$r^2(a \cdot \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cdot r \cos \varphi) = r^2(a \cdot \cos^2 \varphi - r \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi)$$

$$\sin^2 \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi = a \cdot \cos^2 \varphi - a \cdot \sin^2 \varphi$$

$$r \cdot \cos \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = a \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

Využijeme rovnosti: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$

Polární rovnice strofoidy s je

$$s : r = \frac{a \cdot \cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

1.6 Plocha smyčky

Plochu smyčky strofoidy jsme si uvedli již v úvodu mezi základními geometrickými vlastnostmi. Nyní si ukážeme, jak tuto plochu vypočítat pomocí integrálu.

Vzorec pro výpočet plochy zadané parametricky je $-\int_{\alpha}^{\beta} x'(t) \cdot y(t) dt$.ⁱ

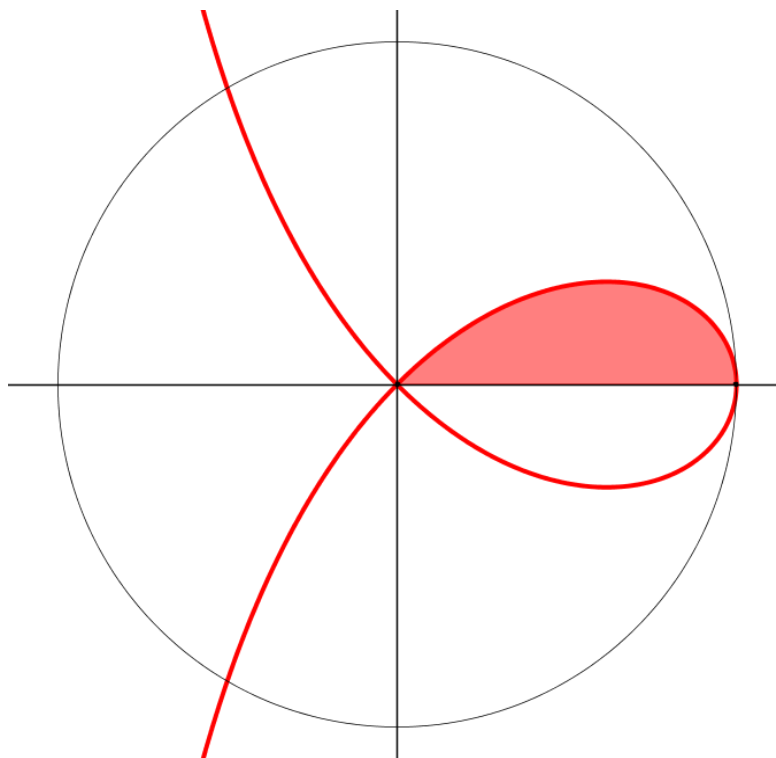
Parametrické rovnice strofoidy s jsme si již odvodili:

$$s: \quad x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$y = at \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Dále budeme potřebovat meze integrálu $t \in (0, 1)$ a derivaci $x(t)$:

$$x'(t) = a \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2} = a \frac{-2t - 2t^3 - 2t + 2t^3}{(1+t^2)^2} = -4a \frac{t}{(1+t^2)^2}$$

Abychom vypočítali celou plochu smyčky, musíme integrál násobit dvěma. (Obrázek 4)



Obrázek 4: Strofoida – plocha ½ smyčky

ⁱ homel.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf

$$2 \cdot \int_0^1 at \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \left(-\frac{4at}{(1+t^2)^2} \right) dt = 8a^2 \int_0^1 \frac{t^2 - t^4}{(1+t^2)^3} dt = -8a^2 \int_0^1 \frac{t^4 - t^2}{(1+t^2)^3} dt =$$

Pro výpočet tohoto integrálu použijeme metodu parciálních zlomků:

$$\frac{t^4 - t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{At+B}{(1+t^2)} + \frac{Ct+D}{(1+t^2)^2} + \frac{Et+F}{(1+t^2)^3}$$

$$t^4 - t^2 = (At+B)(1+t^2)^2 + (Ct+D)(1+t^2) + (Et+F)$$

$$t^4 - t^2 = At + 2At^3 + At^5 + B + 2B^2 + Bt^4 + Ct + Ct^3 + D + Dt^2 + Et + F$$

$$A = 0$$

$$B = 1$$

$$2A + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$2B + D = -1 \Rightarrow D = -3$$

$$A + C + E = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$B + D + F = 0 \Rightarrow F = 2$$

$$\begin{aligned} &= -8a^2 \left[\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - 3 \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt + 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^3} dt \right] = \\ &= -8a^2 \left[\arctg t - 3 \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt + 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^3} dt \right] = \end{aligned}$$

Než budeme integrovat, vypočítáme si samostatně tyto integrály:

1) integrál $\int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$ vypočítáme

$$\begin{aligned} \underline{\arctg t} &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+t^2)} dt \stackrel{\text{perpartes.}}{=} \left| \begin{array}{l} f = \frac{1}{1+t^2} \quad f' = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \\ g' = 1 \quad \quad \quad g = t \end{array} \right| = \frac{t}{1+t^2} + 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{(1+t^2)^2} dt = \\ &= \underline{\underline{\frac{t}{1+t^2} + 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt - 2 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt}} \end{aligned}$$

Nyní nám vznikla rovnice:

$$\underline{\underline{\arctg t = \frac{t}{1+t^2} + 2 \arctg t - 2 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt}}$$

$$2 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{t}{1+t^2} + \operatorname{arctg} t$$

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \underline{\underline{\frac{1}{2} \left(\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{arctg} t \right)}}$$

2) obdobně vypočítáme i integrál $\frac{1}{(1+t^2)^3} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} dt \stackrel{\text{per partes}}{=} \left| \begin{array}{l} f = \frac{1}{(1+t^2)^2} \quad f' = \frac{-2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \\ g' = 1 \quad \quad \quad g = t \end{array} \right| = \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^2} + 4 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{(1+t^2)^3} dt = \frac{t}{(1+t^2)^2} + 4 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt - 4 \int \frac{1}{(1+t^2)^3} dt \end{aligned}$$

Vznikla nám rovnice:

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{t}{(1+t^2)^2} + 4 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt - 4 \int \frac{1}{(1+t^2)^3} dt$$

$$4 \int \frac{1}{(1+t^2)^3} dt = \frac{t}{(1+t^2)^2} + 3 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^3} dt = \underline{\underline{\frac{1}{4} \left(\frac{t}{(1+t^2)^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{arctg} t \right) \right)}}$$

Nakonec doplníme do integrálu a vypočítáme:

$$\begin{aligned} &= -8a^2 \left[\operatorname{arctg} t - 3 \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{arctg} t \right) + 2 \frac{1}{4} \left(\frac{t}{(1+t^2)^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{arctg} t \right) \right) \right]_0^1 = \\ &= -8a^2 \left[\operatorname{arctg} t - \frac{3}{2} \cdot \frac{t}{1+t^2} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \frac{t}{(1+t^2)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{t}{1+t^2} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} t \right]_0^1 = \\ &= -8a^2 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - 0 \right) = -8a^2 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right) = a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

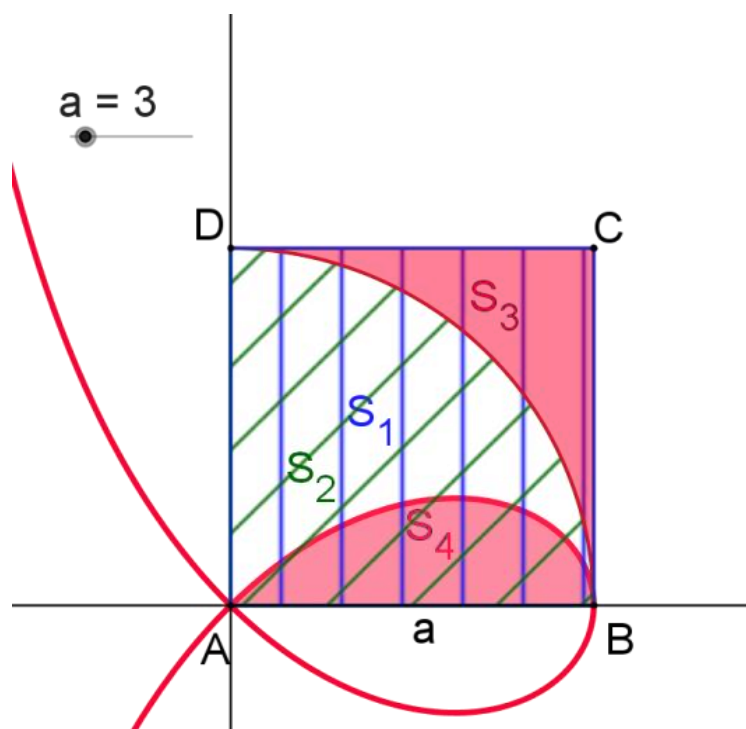
1.7 Plocha smyčky – jiný pohled

Výpočet plochy smyčky strofoidy jsme si již ukázali. Nyní se na tento výraz $a^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$ podíváme z jiného úhlu a to z pohledu obsahů ploch nám známých geometrických útvarů.

Nejdříve si výraz $a^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$ roznásobíme a pak vytkneme číslo 2.

$$a^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = 2a^2 - \frac{a^2\pi}{2} = 2 \cdot \left(a^2 - \frac{a^2\pi}{4}\right)$$

Po úpravě vidíme, že polovina této plochy se rovná rozdílu obsahu čtverce o straně a a obsahu čtvrtkruhu o poloměru a . (Obrázek 5)



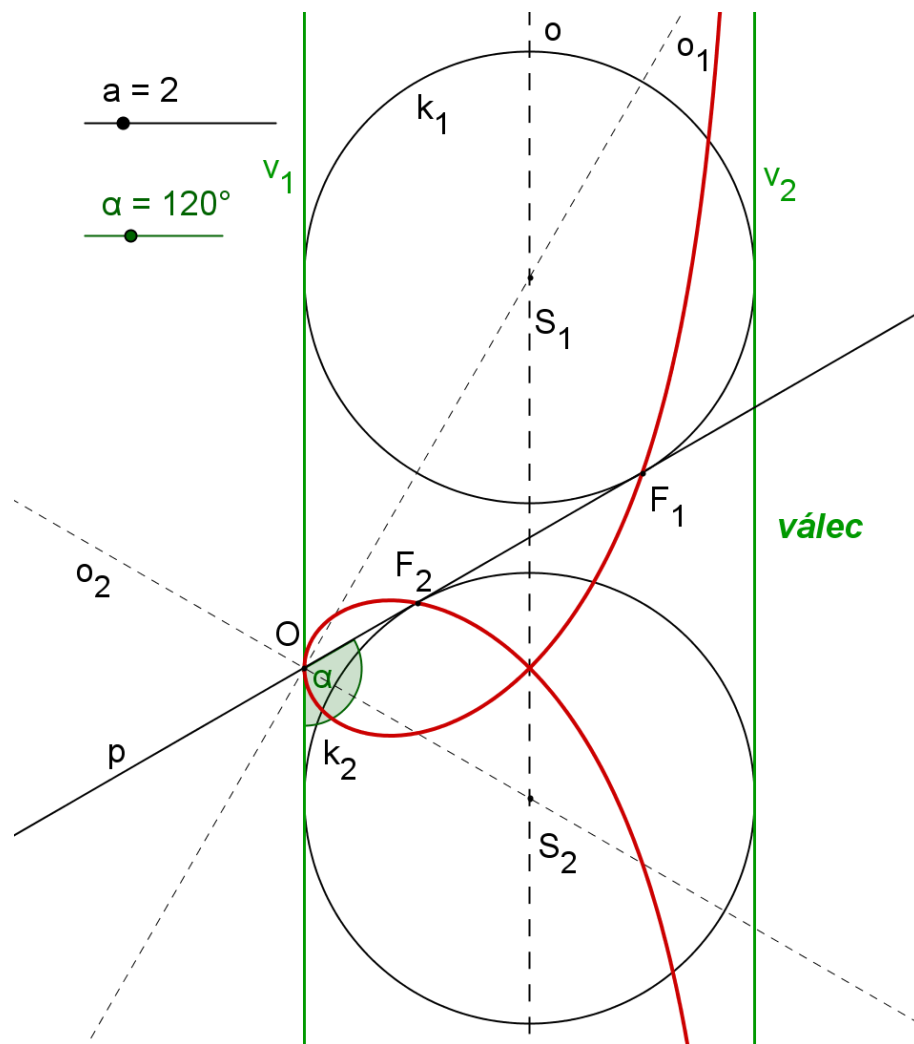
Obrázek 5: Strofoida – rozdíl ploch

V programu GeoGebra ([GeoGebra 1](#)) se můžeme přesvědčit, že tento rozdíl ploch platí pro jakoukoliv hodnotu parametru a .

1.8 Množina bodů

1.8.1 Strofoida jako ohniska elips, které vzniknou při řezu válce svazkem rovin.

Při řezu válce svazkem rovin, které jsou dány pevným bodem a tečnou, nám vznikne elipsa (popř. kružnice). Množina všech ohnisek elipsy (popř. kružnice) nám vytvoří strofoidu. (Obrázek 6)

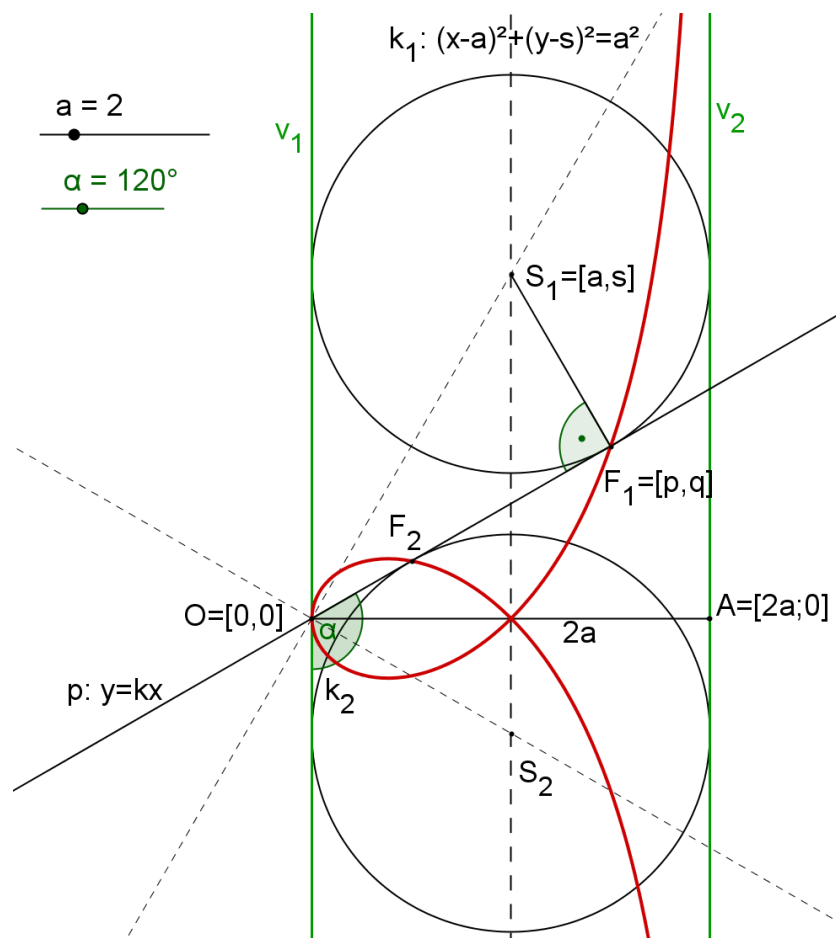


Obrázek 6: Strofoida – řez válce

Nyní si toto tvrzení popíšeme a dokážeme pomocí matematických programů GeoGebra a CoCoA.

V programu GeoGebra ([GeoGebra 2](#)) si tento obrázek vytvoříme v rovině a umístíme do kartézské soustavy souřadnic, tak aby pevný bod $O = [0; 0]$.

Dále popíšeme bod $S_1 = [a; s]$, ($S_1 \in o \cap o_1$, o – osa válce, o_1 – osa úhlu p, v_1),
 přímku $p: y = kx \Rightarrow kx - y = 0$, ($p \in O \cap R(x = 0, \alpha, O)$),
 kružnici $k_1: (x - a)^2 + (y - s)^2 = a^2$, ($k_1(S_1; a)$),
 bod $F_1 = [p; q]$ ($F_1 \in k_1 \cap p$),
 a vektor úsečky $|S_1 F_1|$: $F_1 - S_1 = (p - a; q - s)$. (Obrázek 7)



Obrázek 7: Strofoida – řez válce v kartézské soustavě souřadnic

Měníme-li úhel α , vidíme, že množinou všech ohnisek F_1 a F_2 je strofoida.

Nyní si dokážeme, že se opravdu jedná o strofoidu. Ohnisko elipsy F_1 náleží kružnici k_1 a přímce p :

$$F_1 \in k: (p - a)^2 + (q - s)^2 = a^2$$

$$F_1 \in p: kp - q = 0 \Rightarrow n_p = (k; -1) \perp n = (1; k)$$

Přímka p je kolmá na úsečku $|F_1S_1|$:

$$p \perp F_1S_1 : (a - p) \cdot 1 + (s - q) \cdot k = 0$$

Dostáváme soustavu tří rovnic:

$$(p - a)^2 + (q - s)^2 - a^2 = 0$$

$$kp - q = 0$$

$$(a - p) \cdot 1 + (s - q) \cdot k = 0$$

Nyní z těchto rovnic eliminujeme k a s . První rovnici upravíme, z druhé rovnice si

vyjádříme k $\left(k = \frac{q}{p}\right)$ a doplníme do třetí rovnice.

$$p^2 - 2ap + a^2 + q^2 - 2qs + s^2 - a^2 = 0$$

$$a - p + sk - qk = 0$$

Dále si z druhé rovnice vyjádříme s $\left(s = \frac{q^2 + p^2 - ap}{q}\right)$, doplníme do první rovnice.

$$p^2 - 2ap + q^2 - 2q \cdot \left(\frac{q^2 + p^2 - ap}{q}\right) + \left(\frac{q^2 + p^2 - ap}{q}\right)^2 = 0$$

Rovnici vynásobíme q^2 a upravujeme.

$$p^2q^2 - 2apq^2 + q^4 - 2q^4 - 2q^2p^2 + 2q^2ap + (q^2 + p^2 - ap)^2 = 0$$

$$-p^2q^2 - q^4 + (q^2 + p^2 - ap)^2 = 0$$

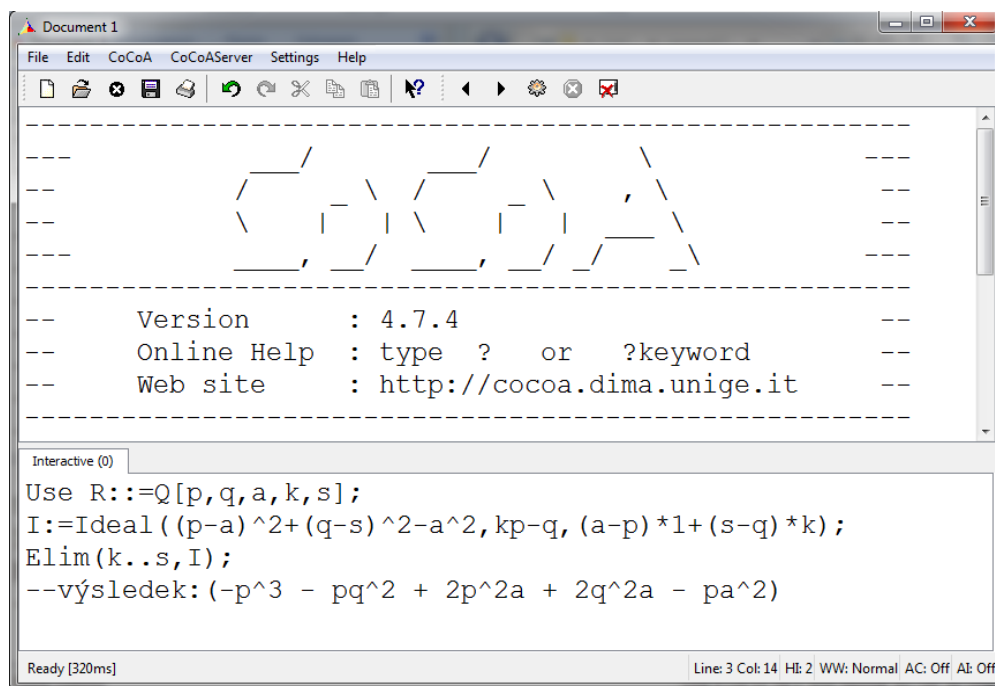
$$-p^2q^2 - q^4 + q^4 + p^2q^2 - apq^2 + p^2q^2 + p^4 - ap^3 - apq^2 - ap^3 + a^2p^2 = 0$$

$$p^4 - 2p^3a + p^2q^2 + p^2a^2 - 2apq^2 = 0$$

Nakonec vydělíme p .

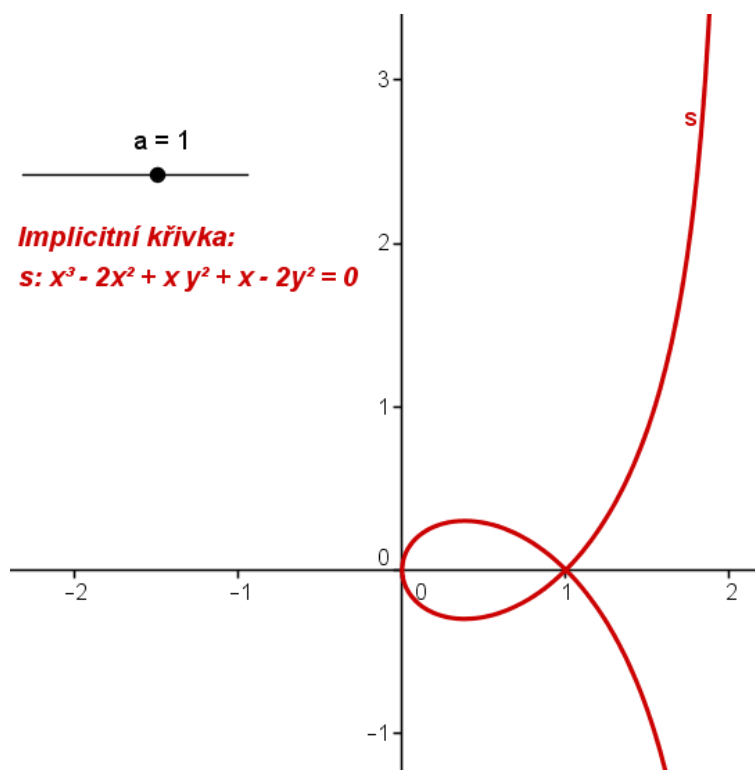
$$p^3 - 2p^2a + pq^2 + pa^2 - 2aq^2 = 0$$

Pro eliminaci (zvláště u obtížnějších příkladů) můžeme použít matematického programu CoCoA. (Obrázek 8)



Obrázek 8: Stropfoida – výpočet v programu CoCoA

V programu Geogebra si můžeme pomocí funkce *implicitní křivky* ukázat, zda se jedná o rovnici strofoidy. (Obrázek 9)

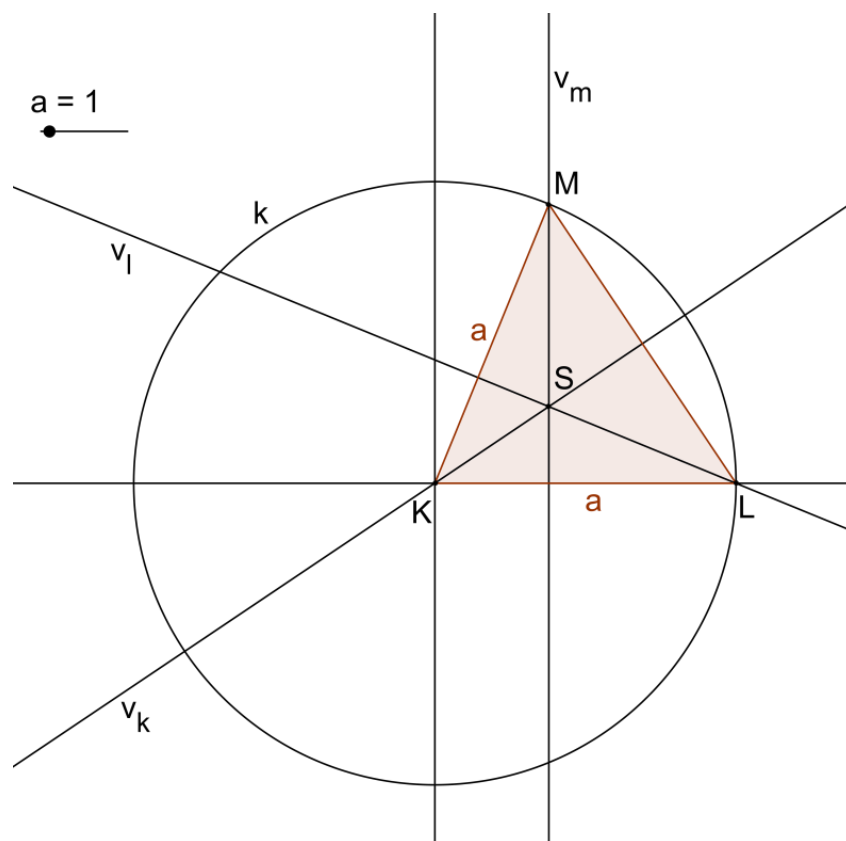


Obrázek 9: Strofoida – implicitní rovnice

1.8.2 Strofoida jako průsečík výšek v rovnoramenném trojúhelníku.

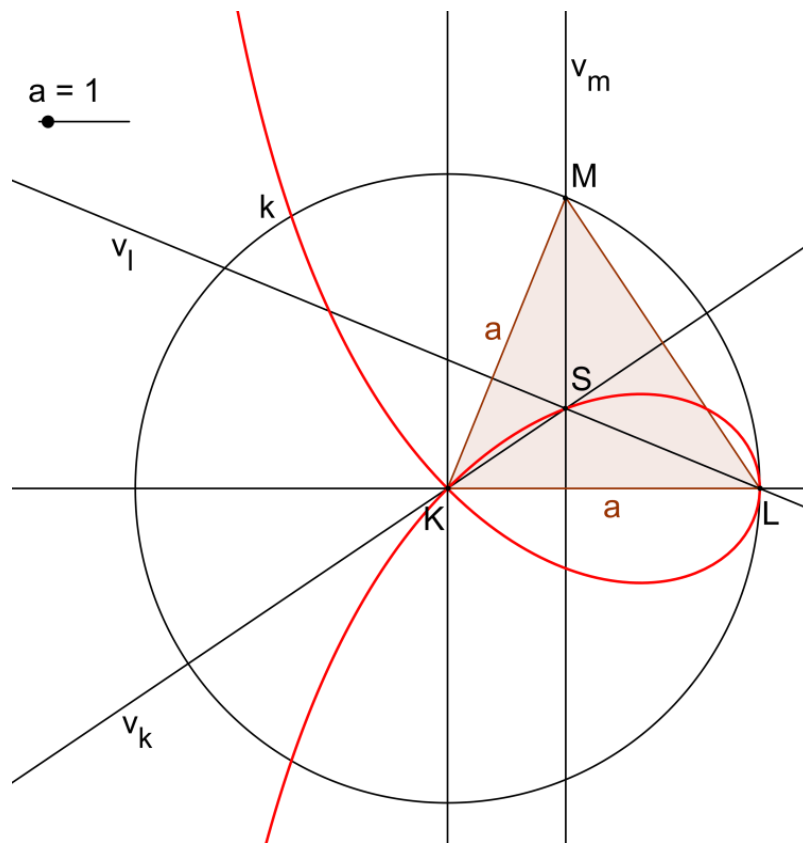
Množina průsečíků výšek všech možných rovnoramenných trojúhelníků nám vytvoří strofoidu.

Nechť existuje kružnice $k(K; a)$, úsečka $|KL| = a$. Sestrojíme libovolný rovnoramenný trojúhelník KLM tak, aby bod $M \in k$, $|KM| = |KL| = a$. Dále sestrojíme výšky v_k, v_l, v_m . Jejich průsečík nazveme S . (Obrázek 10)



Obrázek 10: Strofoida – střed výšek v rovnoramenném trojúhelníku

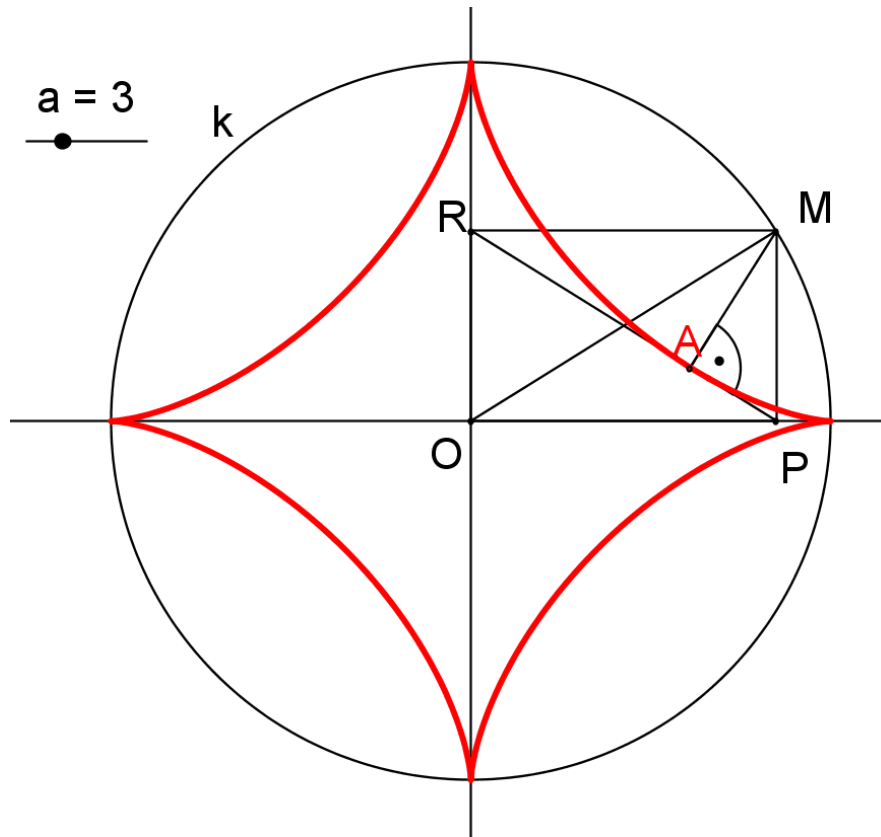
Posouváme-li bodem M po kružnici, můžeme se v programu GeoGebra ([GeoGebra 3](#)) přesvědčit, že množinou bodů všech průsečíků výšek S rovnoramenného trojúhelníka KLM je strofoida. (Obrázek 11)



Obrázek 11: Strofoida jako množina výšek v rovnoramenném trojúhelníku

2 ASTEROIDA

Asteroida je křivka, která vznikne jako množina bodů pat kolmic na úhlopříčku kolmého rovnoběžníku. (Obrázek 12)



Obrázek 12: Asteroida

Touto definicí asteroidy se budeme ještě podrobněji zabývat v podkapitole Množina bodů.

2.1 Historie

Asteroida patří mezi cykloidní křivky, které byly poprvé objeveny dánským astronomem *Olem Christensenem Rømerem* (1644 – 1710) roku 1674. V letech

1691 - 1692 studuje asteroidu švýcarský matematik *Johann Bernoulli* (1667 – 1748).
Zmínky o této křivce můžeme také nalézt v *G. W. von Leibnizově* (1646 – 1716)
korespondenci z roku 1715.

Název *asteroida* byl v literatuře poprvé použit roku 1836.

2.2 Rovnice asteroidy

Asteroida je algebraická křivka šestého stupně, kterou můžeme popsat těmito rovnicemi:

kartézské souřadnice:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= a \cos^3 t \\ y &= a \sin^3 t \end{aligned} \quad a > 0$$

polární souřadnice:

$$r = a \frac{|\sec \varphi|}{\left(1 + \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} \varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

implicitní rovnice:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27x^2y^2 = 0$$

2.3 Základní geometrické vlastnosti

Osy souměrnosti: $x=0$, $y=0$, $x-y=0$, $x+y=0$

Střed souměrnosti: $[0; 0]$

Singulární body: $[\pm a; 0]$, $[0; \pm a]$

Plocha ohraničená křivkou: $\frac{3}{8}\pi a^2$

Délka křivky: $6a$

2.4 Implicitní rovnice

Mezi rovnice asteroidy jsme si uvedli i implicitní rovnici. Tato rovnice se vyjadřuje ve tvaru $F(x, y) = 0$.

K odvození implicitní rovnice asteroidy použijeme rovnost $1 = \cos^2 t + \sin^2 t$, dvě substituce $c = \cos^2 t$, $s = \sin^2 t$ a parametrické rovnice

$$a: \quad x = a \cos^3 t$$

$$y = a \sin^3 t.$$

Dostáváme soustavu rovnic:

$$x = ac^3$$

$$y = as^3$$

$$1 = c^2 + s^2.$$

Nyní využijeme matematického programu CoCoA, ve kterém eliminujeme proměnné c , s . Výsledný polynom si označíme písmenem M . Dále napíšeme implicitní rovnici asteroidy a označíme ji písmenem O . Oba polynomy upravíme pomocí příkazu *Factor*. Upravený polynom M nyní nazveme N a upravený polynom O nazveme P . Odečteme-li tyto dva polynomy od sebe výsledek je 0 . Tímto jsme dokázali implicitní rovnici asteroidy. (Obrázek 13)

```

CoCoA 4.7.1:E.T/VYSOKÁ/DIPLOMKA/asteroida/Odvození implicitní rovnice CoCoA
File Edit CoCoA CoCoAServer Settings Help
Web site : http://cocoa.dima.unige.it
-----
Interactive (0)  Untitled (1)  Odvození implicitní rovnice CoCoA (1)
Use R:=Q[x,y,a,c,s];
I:=Ideal(x-ac^3,y-as^3,c^2+s^2-1);
Elim(c..s,I);
Ideal(-2/9x^6 - 2/3x^4y^2 - 2/3x^2y^4 - 2/9y^6 + 2/3x^4a^2 - 14/3x^2y^2a^2 + 2/3y^4a^2 - 2/3x^2a^4 - 2/3y^2a^4 + 2/9a^6)
-----
M:=(-2/9x^6 - 2/3x^4y^2 - 2/3x^2y^4 - 2/9y^6 + 2/3x^4a^2 - 14/3x^2y^2a^2 + 2/3y^4a^2 - 2/3x^2a^4 - 2/3y^2a^4 + 2/9a^6);
Factor(M);
[[x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - 3x^4a^2 + 21x^2y^2a^2 - 3y^4a^2 + 3x^2a^4 + 3y^2a^4 - a^6, 1], [-2/9, 1]]
-----
O:=(x^2+y^2-a^2)^3+27x^2y^2a^2;
Factor(O);
[[x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - 3x^4a^2 + 21x^2y^2a^2 - 3y^4a^2 + 3x^2a^4 + 3y^2a^4 - a^6, 1]]
-----
N:=(x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - 3x^4a^2 + 21x^2y^2a^2 - 3y^4a^2 + 3x^2a^4 + 3y^2a^4 - a^6);
P:=(x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - 3x^4a^2 + 21x^2y^2a^2 - 3y^4a^2 + 3x^2a^4 + 3y^2a^4 - a^6);
N-P;
0
-----
Line: 17 Col: 2, HI: 1, WW: Normal, AC: Off, AI: Off

```

Obrázek 13: Asteroida – odvození implicitní rovnice

2.5 Parametrické rovnice

Nyní si odvodíme parametrické rovnice.

Z obrázku (Obrázek 14) vidíme:

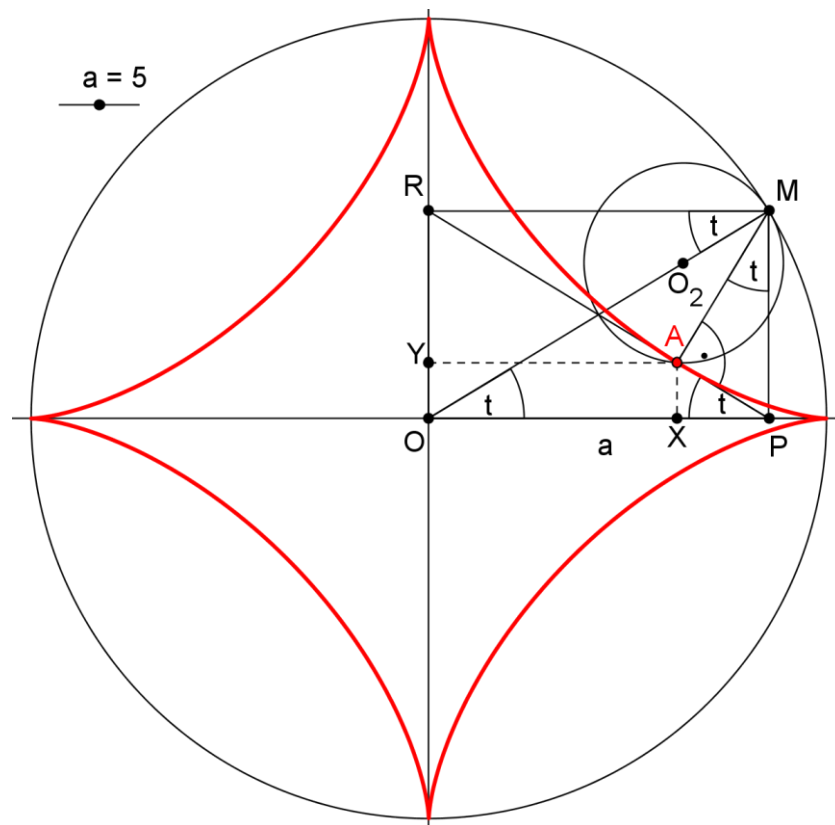
$$OM = a = PR \text{ (obdélník OPMR)}$$

$$MR = a \cdot \cos t \text{ (trojúhelník OMR)}$$

$$AR = MR \cdot \cos t = a \cdot \cos^2 t \text{ (trojúhelník RAM)}$$

$$x = OX = AY = AR \cos t = a \cdot \cos^3 t \text{ (trojúhelník YAR)}$$

$$x = a \cdot \cos^3 t$$



Obrázek 14: Asteroida – odvození parametrických rovnic

Podobně odvodíme i y – souřadnici:

$$PM = a \cdot \sin t \text{ (trojúhelník } PQR)$$

$$AP = PM \cdot a \sin t = a \cdot \sin^2 t \text{ (trojúhelník } APM)$$

$$y = OY = AX = AP \cdot \sin t = a \cdot \sin^3 t \text{ (trojúhelník } XPA)$$

$$y = a \cdot \sin^3 t$$

Parametrické rovnice asteroidy jsou:

$$a: \quad \begin{aligned} x &= a \cos^3 t \\ y &= a \sin^3 t \end{aligned} \quad a > 0$$

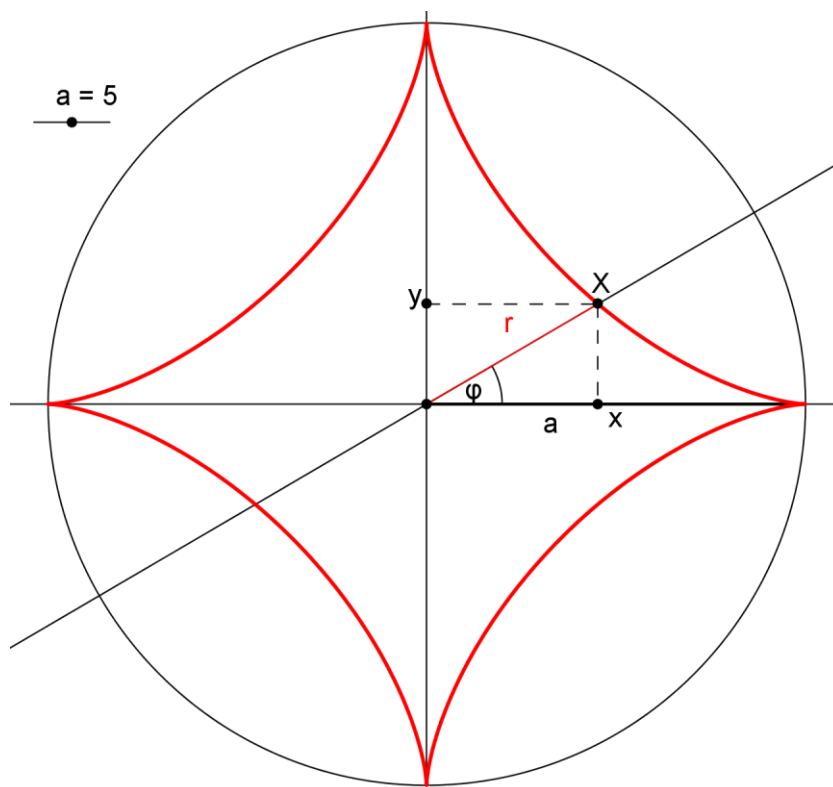
2.6 Polární rovnice

Asteroidu můžeme také popsat pomocí polárních rovnic, které si také odvodíme. Každý bod X popsaný kartézskou soustavou souřadnic můžeme přepsat do polární soustavy souřadnic. (Obrázek 15)

$$X = [x, y] \rightarrow X = [r, \varphi]$$

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi, \quad r = [0; a], \varphi = [0; 2\pi]$$



Obrázek 15: Asteroida – odvození polární rovnice

Rovnice asteroidy v kartézské soustavě souřadnic je $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

Nyní dosadíme za x a y polární souřadnice:

$$\sqrt[3]{r^2 \cdot \cos^2 \varphi} + \sqrt[3]{r^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \sqrt[3]{a^2}$$

Po úpravě dostáváme rovnici:

$$r = a \cdot \frac{1}{\left(\cos^{\frac{2}{3}} \varphi + \sin^{\frac{2}{3}} \varphi \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Využijeme rovnosti $1 = \frac{\cos^{\frac{2}{3}} \varphi}{\cos^{\frac{2}{3}} \varphi}$.

$$r = a \cdot \frac{1}{\left(\cos^{\frac{2}{3}} \varphi + \sin^{\frac{2}{3}} \varphi \cdot \frac{\cos^{\frac{2}{3}} \varphi}{\cos^{\frac{2}{3}} \varphi} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r = a \cdot \frac{1}{\left(\cos^{\frac{2}{3}} \varphi + \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} \varphi \cdot \cos^{\frac{2}{3}} \varphi \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Vytkneme $\cos^{\frac{2}{3}} \varphi$ a umocníme.

$$r = a \cdot \frac{1}{\left[\cos^{\frac{2}{3}} \varphi \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} \varphi \right) \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$r = a \cdot \frac{1}{\cos} \cdot \frac{1}{\left(1 + \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} \varphi \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Využijeme rovnosti $\cos \varphi = \frac{1}{\sec \varphi}$.

Polární rovnice asteroidy je $r = a \cdot \frac{|\sec \varphi|}{\left(1 + \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} \varphi \right)^{\frac{3}{2}}}$.

2.7 Plocha ohraničená křivkou

Stejně jako u strofoidy si nyní odvodíme plochu asteroidy pomocí integrálu.

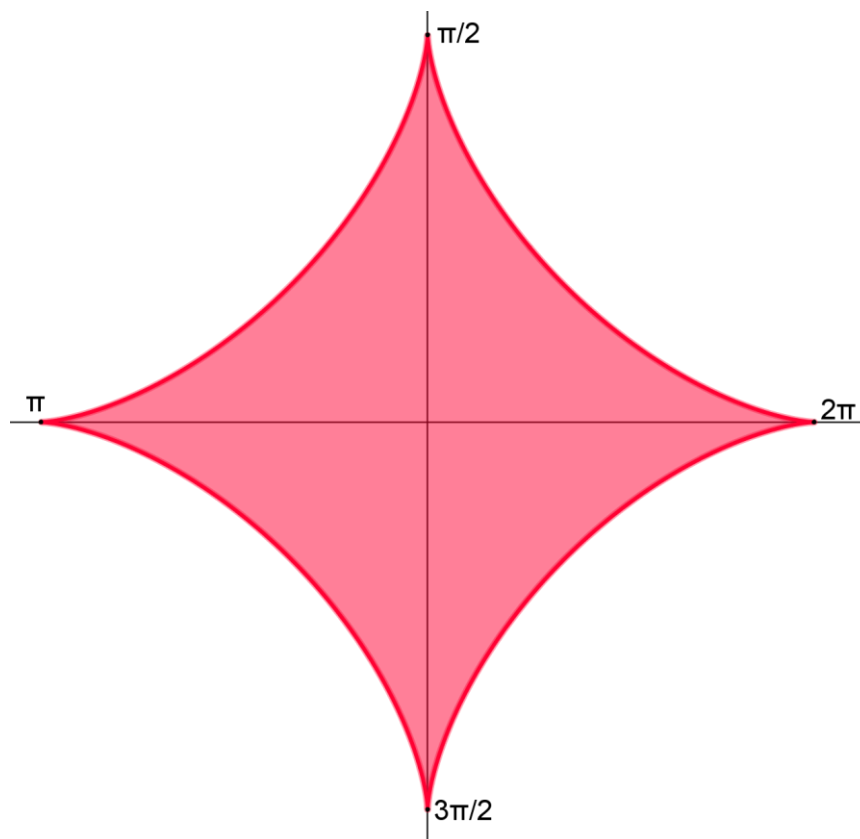
Vzorec pro výpočet plochy zadané parametricky je $\int_{\alpha}^{\beta} x \cdot y' dt$.ⁱ

Parametrické rovnice asteroidy jsme si již odvodili:

$$\begin{aligned}a: x &= a \cos^3 t \\ y &= a \sin^3 t\end{aligned}$$

Dále budeme potřebovat meze integrálu (Obrázek 16) $t \in (0, 2\pi)$ a derivaci y souřadnice

$$y' = 3a \sin^2 t \cos t.$$



Obrázek 16: Asteroida – plocha ohraničená křivkou

ⁱ home1.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf

Nyní můžeme dosadit do vzorce:

$$\int_0^{2\pi} a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t \, dt = 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \, dt =$$

Využijeme rovnosti: $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$$= 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 t - \cos^6 t \, dt =$$

Využijeme vzorce: $\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

$$= 3a^2 \cdot \left[\left[\frac{\cos^3 t \sin t}{4} \right]_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \left(\left[\frac{\cos t \sin t}{2} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^0 t \, dt \right) - \left[\frac{\cos^5 t \sin t}{6} \right]_0^{2\pi} - \frac{5}{6} \int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt \right] =$$

$$= 3a^2 \cdot \left(0 + 0 + \frac{6}{8} \pi - \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{8} \pi \right) = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

Plocha asteroidy je $\frac{3}{8} \pi a^2$, tedy $\frac{3}{8}$ obsahu kruhu o poloměru a .

2.8 Délka křivky

Délku asteroidy si odvodíme také pomocí integrálu. Vzorec pro výpočet délky

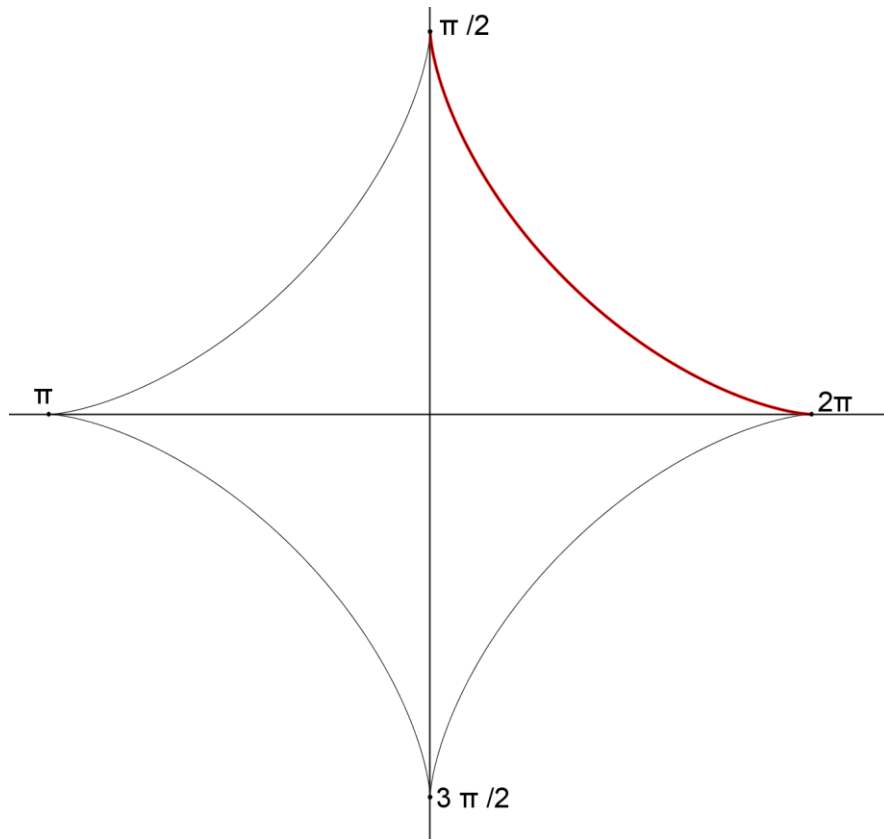
křivky zadané parametricky je $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt$.ⁱ

Pro dosazení do vzorce budeme potřebovat derivaci parametrické rovnice.

$$\begin{aligned} a: x &= a \cos^3 t & x' &= -3a \cos^2 t \sin t \\ y &= a \sin^3 t & y' &= 3a \sin^2 t \cos t \end{aligned}$$

Délka asteroidy se skládá ze čtyř stejně dlouhých částí. Využijeme-li této vlastnosti, můžeme si nejprve vypočítat čtvrtinu a výsledek následně vynásobit čtyřmi. Pro čtvrtinu délky asteroidy dosadíme meze integrálu $(0, \frac{\pi}{2})$. (Obrázek 17)

ⁱ home1.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf



Obrázek 17: Asteroidea – délka křivky

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)} dt =$$

Využijeme rovnosti: $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

$$= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \sin^2 t)(1 - \sin^2 t) \sin^2 t + \sin^4 t (1 - \sin^2 t)} dt =$$

$$= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t (1 - \sin^2 t)} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t} dt =$$

Využijeme rovnosti: $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$

$$= \frac{3}{2} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 2t} dt =$$

Využijeme vzorce: $\int \sin cx \, dx = -\frac{1}{c} \cos cx$

$$= -\frac{3}{4} a [\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} a$$

Vynásobíme čtyřmi:

$$4 \cdot \frac{3}{2} a = 6a$$

Délka asteroidy nám vychází $6a$, tedy jen o málo méně než obvod kružnice o poloměru a .

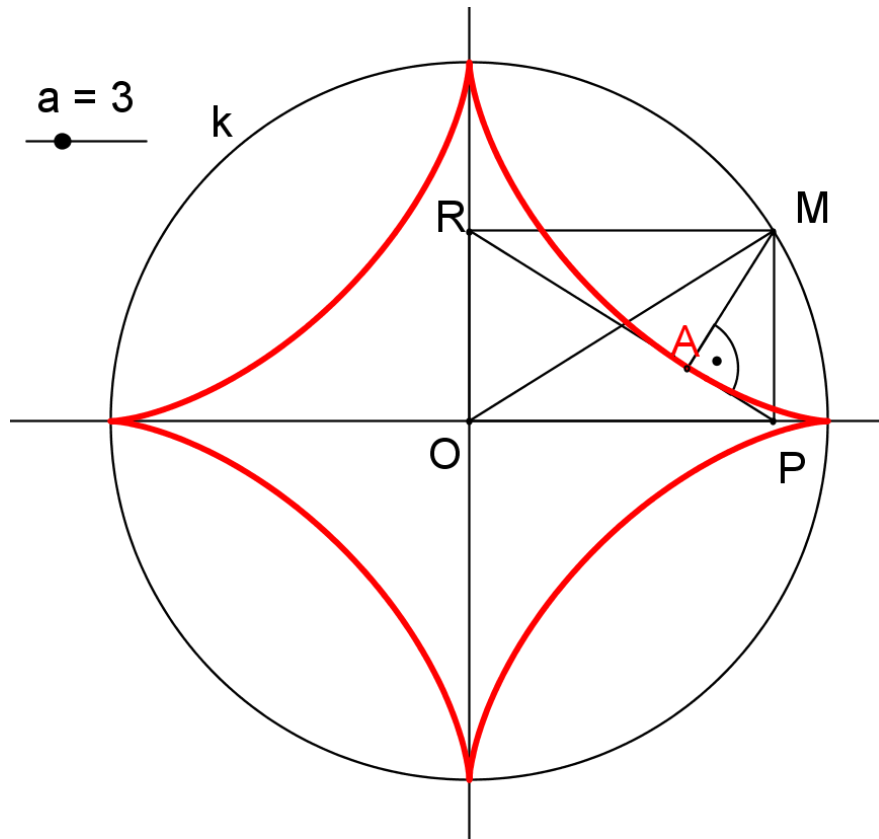
2.9 Množina bodů

2.9.1 Asteroida jako množina pat kolmic na úhlopříčku kolmého rovnoběžníku

Asteroida je křivka, která vznikne jako množina bodů pat kolmic na úhlopříčku kolmého rovnoběžníku.

Nechť existuje kružnice $k(O; a)$ a bod $M \in k$. Sestrojíme kolmý rovnoběžník $OPMR$ a jeho úhlopříčky $|OM| = |PR| = a$. Dále sestrojíme kolmici z bodu M na úhlopříčku $|PR|$ a jejich průsečík bod A . Posunujeme-li bodem M po kružnici k , množina všech pat kolmic na úhlopříčku rovnoběžníku $OPMR$ nám vytváří asteroidu. (Obrázek 18)

V programu GeoGebra ([GeoGebra 4](#)) můžeme posunovat bodem M po kružnici k či zvolit animaci bodu M . Pomocí stopy bodu A můžeme pozorovat zakreslení asteroidy.



Obrázek 18: Asteroida – pata kolmic na úhlopříčku kolmého rovnoběžníku

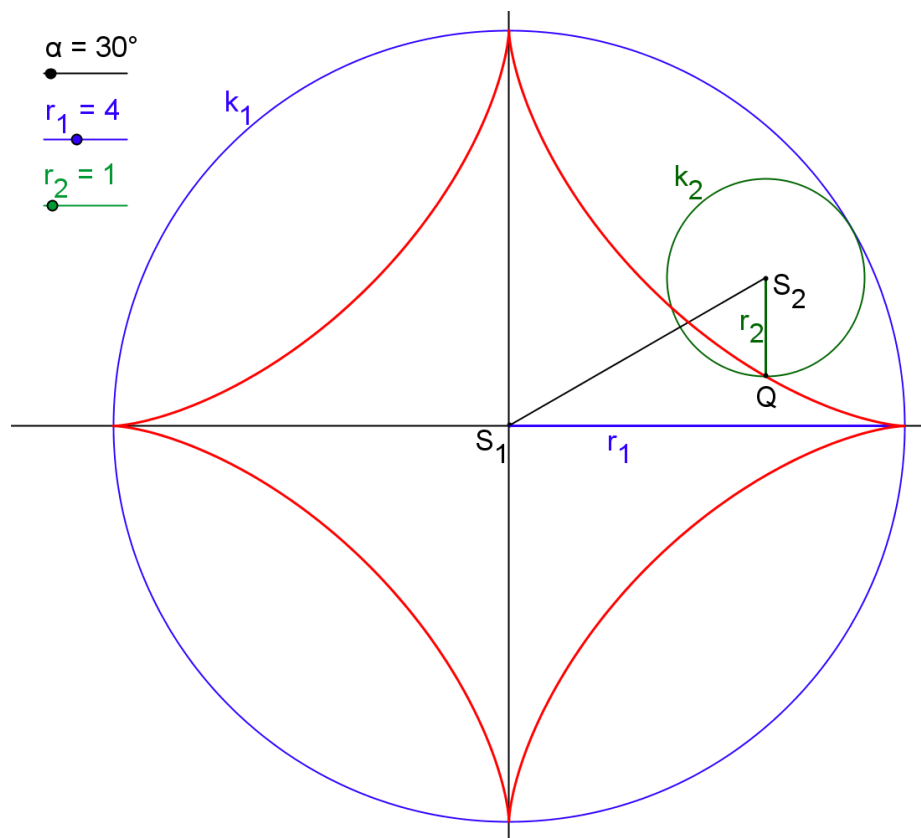
2.9.2 Asteroida jako hypocykloida

Hypocykloida je křivka, která vznikne jako trajektorie bodu při odvalování se jedné kružnice (kruhu) bez smýkání zevnitř po jiné pevné kružnici (kruhu).

Nechť existuje $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ a bod $Q \in k_2$. Kružnice k_1 a k_2 mají právě jeden vnitřní dotyk. Kružnici k_2 necháme odvalovat uvnitř po kružnici k_1 pomocí posuvníku α . Množinou všech bodů Q je hypocykloida.

Je-li $r_1 = 4 \cdot r_2$, jedná se o asteroidu. (Obrázek 19)

V programu GeoGebra ([GeoGebra 5](#)) se můžeme přesvědčit, že pokud je $r_1 = 4 \cdot r_2$, vznikne nám asteroida. Měníme-li velikosti posuvníku r_1 a r_2 dostaneme i jinou křivku, o které se ještě budeme zmiňovat. Je-li $r_1 = 3 \cdot r_2$, jedná se o deltoid.



Obrázek 19: Asteroida jako hypocykloida

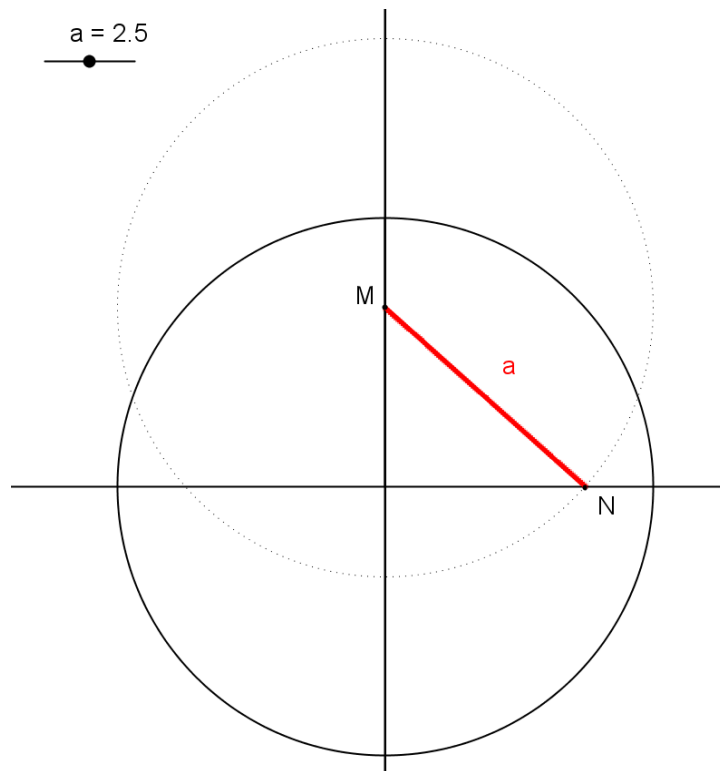
2.10 Asteroida jako obálka

2.10.1 Asteroida jako obálka úseček

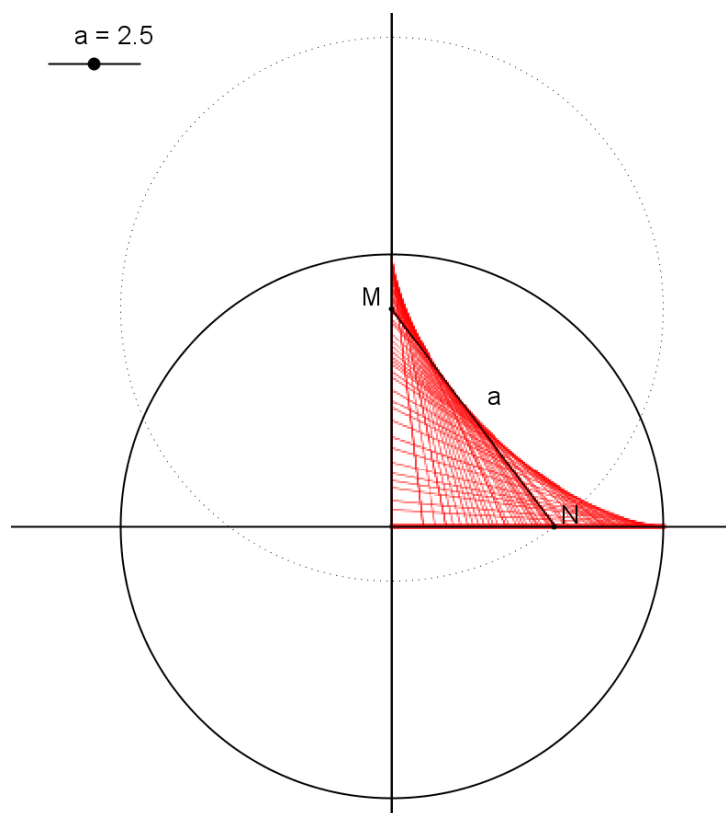
Obálkou všech úseček, které vzniknou pohybem dané úsečky délky a , jejíž krajní body se pohybují po souřadných osách, je asteroida. (Obrázek 20)

V programu GeoGebra ([GeoGebra 6](#)) si vytvoříme libovolnou kružnici se středem v počátku a úsečku délky a s krajními body na souřadných osách.

Pohybujeme-li bodem M , mění se nám poloha bodu N a tedy i úsečka a . Stopa úsečky a nám vytvoří asteroidu. (Obrázek 21)



Obrázek 20: Asteroida – úsečka a s krajními body na souřadných osách



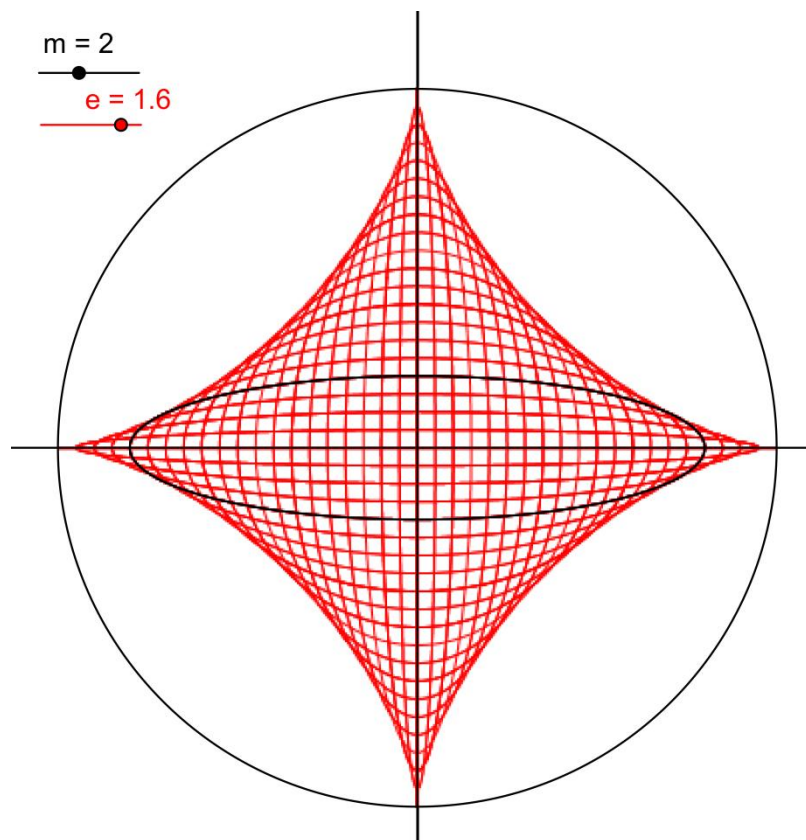
Obrázek 21: Asteroida – obálka úsečky a

2.10.2 Asteroida jako obálka elips

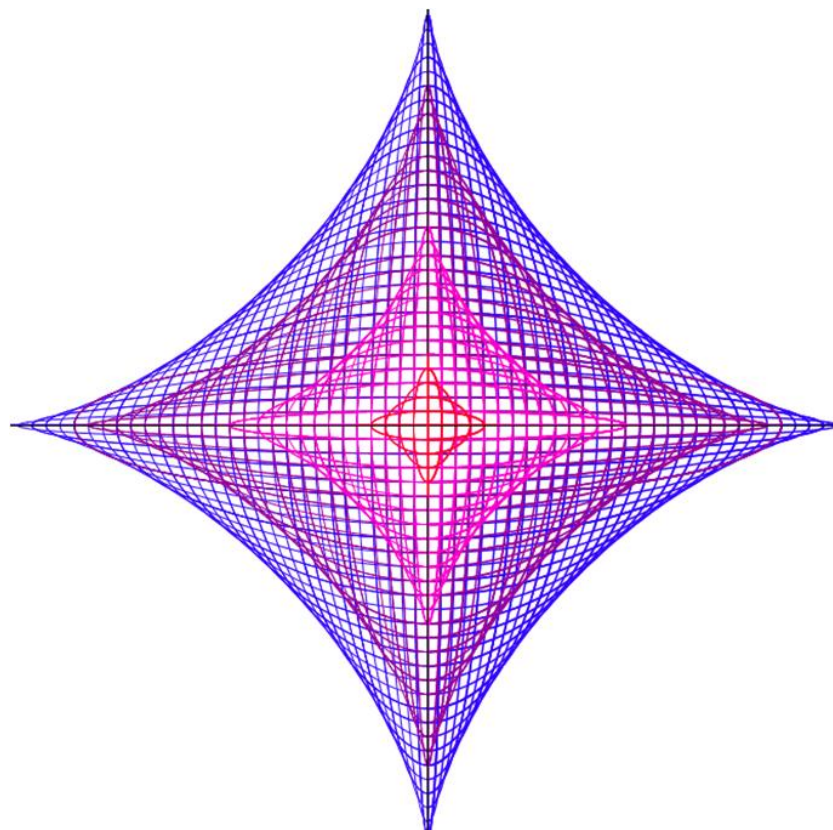
Obálkou všech elips, u kterých postupně měníme jejich excentricitu při předem dané maximální délky hlavní a vedlejší poloosy, je asteroida.

Na obrázku (Obrázek 22) vidíme asteroidu jako obálku elips. Stejně jako v předchozím případě můžeme v programu GeoGebra ([GeoGebra 7](#)) pomocí posuvníku měnit polohu elipsy. Posuvníkem e měníme excentricitu a posuvníkem m maximální délku dané poloosy. Stopa těchto elips nám vytvoří asteroidu.

Budeme-li měnit velikost elipsy pomocí posuvníku m a barvu jednotlivých stop elips, můžeme vytvořit takovýto krásný obrázek. (Obrázek 23)



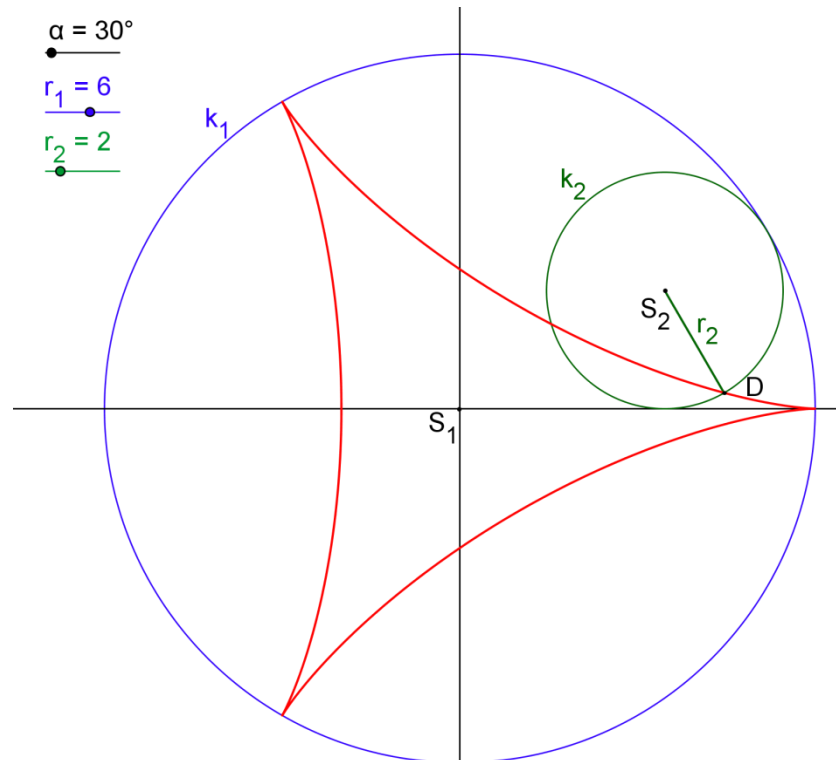
Obrázek 22: Asteroida jako obálka elips



Obrázek 23: Asteroidea - více obálek elips

3 DELTOID

Deltoid je křivka, která vznikne jako množina všech trajektorií bodu při odvalování se jedné kružnice k_2 bez smýkání zevnitř po jiné pevné kružnici k_1 , přičemž platí $r_1 = 3 \cdot r_2$. (Obrázek 24)



Obrázek 24: Deltoid

3.1 Historie

Poprvé byla tato křivka studována *Leonhardem Eulerem* (1707 – 1783) již v roce 1745 a dále *Jakobem Steinerem* (1796 – 1863) roku 1856. Křivka byla brzy rozpoznána jako hypocykloida, a proto je často označována jako *Steinerova hypocykloida*.

Název *deltoid* získala tato křivka díky svému tvaru připomínající řecké písmeno Δ (delta).

3.2 Rovnice deltoidu

Deltoid (Obrázek 25) je algebraická křivka čtvrtého stupně, kterou můžeme popsat těmito rovnicemi:

kartézské souřadnice:

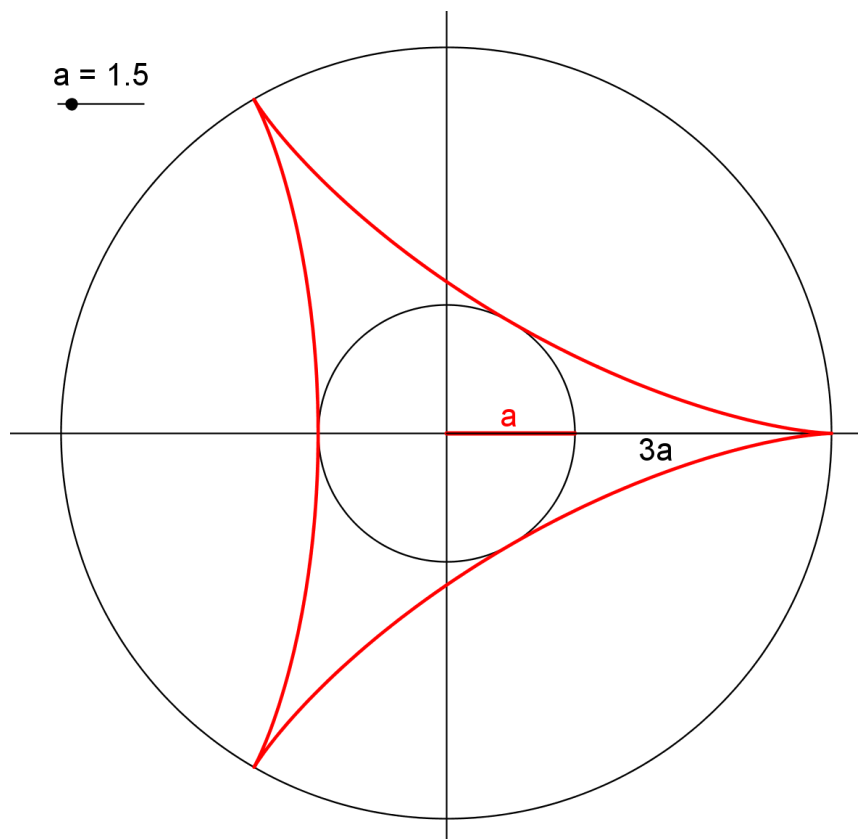
$$(x^2 + y^2)^2 + 8ax(3y^2 - x^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0$$

parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= a(2\cos t + \cos 2t) \\ y &= a(2\sin t - \sin 2t) \end{aligned} \quad a > 0$$

polární souřadnice:

$$r = a\sqrt{5 + 4\cos 3t}$$



Obrázek 25: Deltoid

3.3 Základní geometrické vlastnosti

Osy souměrnosti: $y = 0$, $\sqrt{3}x \pm y = 0$

Singulární body: body $[3a; 0]$, $\left[-\frac{3a}{2}; \pm 3\sqrt{3}a\right]$

Plocha ohraničená křivkou: $2\pi a^2$

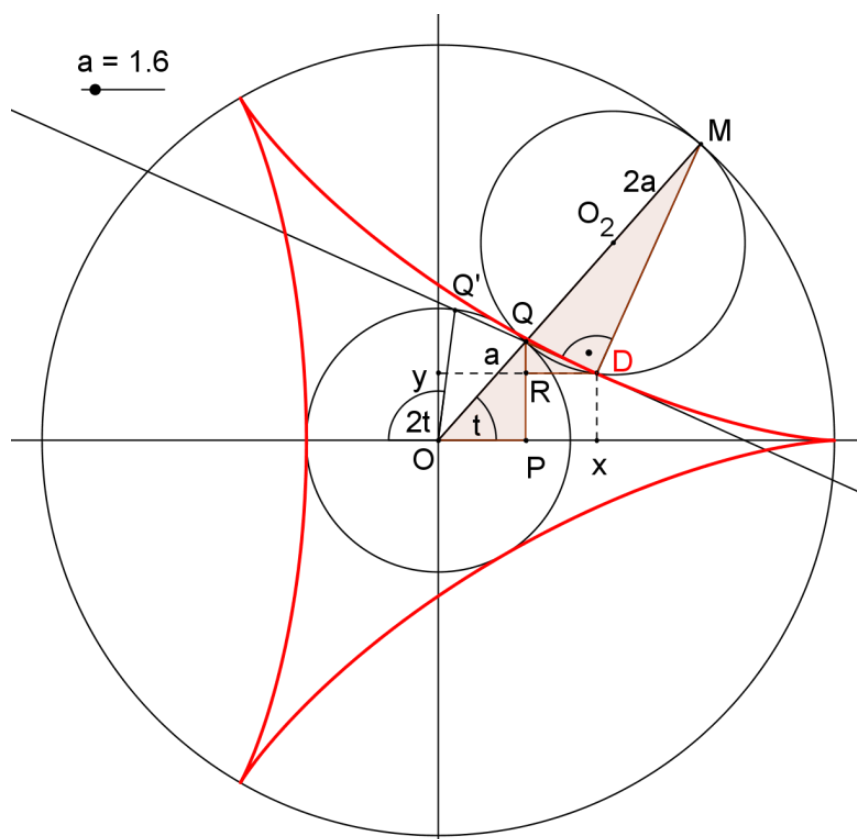
Délka křivky: $16a$

3.4 Parametrické rovnice

Stejně jako u předchozích křivek si nyní odvodíme parametrické rovnice.

Z obrázku (Obrázek 26) vidíme, že souřadnice bodu D jsou $D = [x, y]$ a dále

$$|OQ| = a = |QO_2|.$$



Obrázek 26: Deltoid – odvození parametrických rovnic

Pomocí tří trojúhelníků OPQ a QRD vyjádříme x – souřadnici:

$$x = OP + RD$$

Pro další úpravu potřebujeme znát velikosti úhlů $|\sphericalangle RDQ|$ a $|\sphericalangle DQM|$. (Obrázek 27)

K tomu využijeme vlastnosti středového a obvodového úhlu. Je-li středový úhel

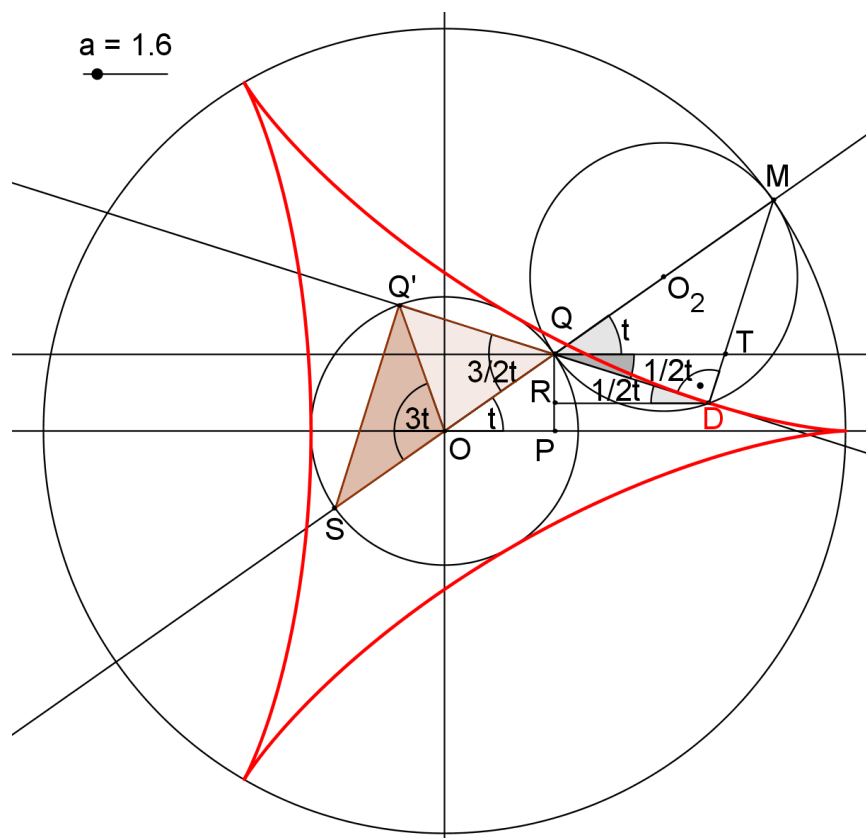
$|\sphericalangle SOQ| = 3t$, pak příslušný obvodový úhel je dvakrát menší: $|\sphericalangle SQQ| = \frac{3t}{2}$. Dále

využijeme vlastnosti dvojic úhlů:

vrcholové úhly: $|\sphericalangle SQQ| = |\sphericalangle DQM| = \frac{3}{2}t$

souhlasné úhly: $|\sphericalangle POQ| = |\sphericalangle TQM| = t$

střídavé úhly: $|\sphericalangle TQD| = |\sphericalangle RDQ| = \frac{1}{2}t$



Obrázek 27: Deltoid – úhly

Nyní již můžeme dále upravovat vyjádřenou x – souřadnici

$$x = OP + RD$$

$$x = OQ \cos t + QD \cos \frac{1}{2}t$$

$$x = a \cos t + 2a \cos \frac{3}{2}t \cdot \cos \frac{1}{2}t \quad (\text{trojúhelník } QDM)$$

Využijeme vzorce: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

$$x = a \cos t + 2a \cos \left(\frac{2t + t}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{2t - t}{2} \right)$$

$$x = a \cos t + a \cos 2t + a \cos t$$

$$x = a \cos 2t + 2a \cos t$$

$$x = a(2 \cos t + \cos 2t)$$

Stejně budeme pokračovat i pro y – souřadnici:

$$y = PQ - RQ$$

$$y = OQ \sin t - QP \sin \frac{1}{2}t$$

$$y = a \sin t - 2a \cos \frac{3}{2}t \cdot \sin \frac{1}{2}t$$

Využijeme vzorce: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

$$y = a \sin t - 2a \cos \left(\frac{2t + t}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{2t - t}{2} \right)$$

$$y = a \sin t - a \sin 2t + a \sin t$$

$$y = 2a \sin t - a \sin 2t$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

Parametrická rovnice deltoиду d :

$$d : x = a(2 \cos t + \cos 2t)$$

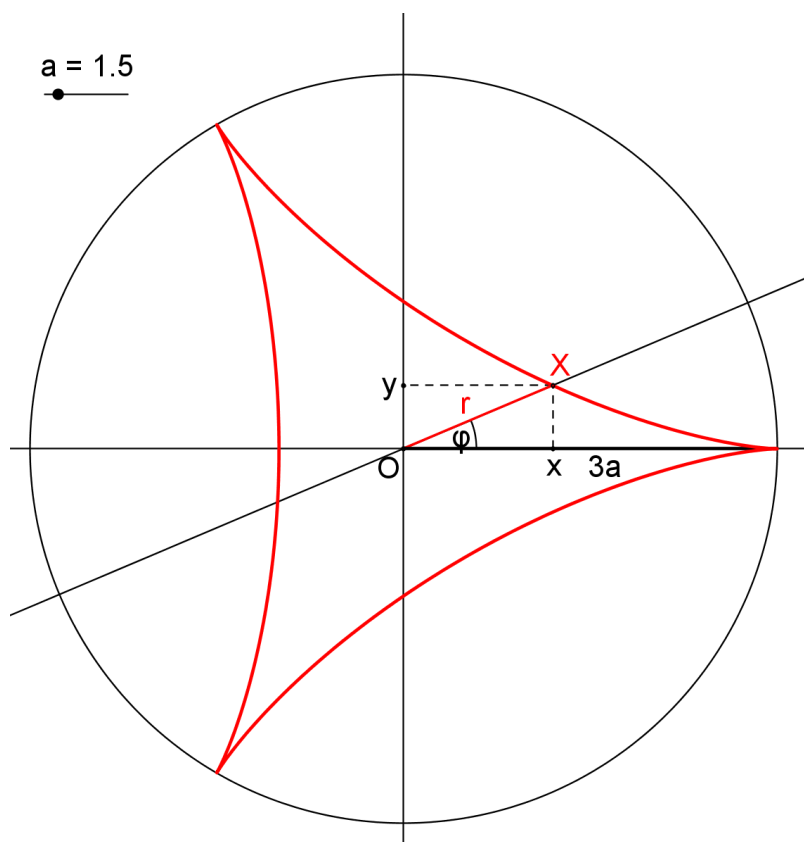
$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

3.5 Polární rovnice

Odvodíme si polární rovnici deltoidu.

Každý bod X popsaný kartézskou soustavou souřadnic můžeme popsat i pomocí polární rovnice. (Obrázek 28)

$$X = [x, y] \rightarrow X = [r, \varphi]$$
$$x = r \cdot \cos \varphi$$
$$y = r \cdot \sin \varphi, \quad r = [0; 3a], \quad \varphi = [0; 2\pi]$$



Obrázek 28: Deltoid – polární rovnice

Pro odvození polární rovnice využijeme parametrických rovnic:

$$x = a(2 \cos t + \cos 2t)$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

Položíme $t = \varphi$.

$$x = a(2 \cos \varphi + \cos 2\varphi)$$

$$y = a(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$$

Umocníme a sečteme.

$$x^2 = a^2 (4 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)$$

$$y^2 = a^2 (4 \sin^2 \varphi - 4 \sin \varphi \sin 2\varphi + \sin^2 2\varphi)$$

$$x^2 + y^2 = a^2 (4 + 4 \cos \varphi \cos 2\varphi - 4 \sin \varphi \sin 2\varphi + 1)$$

Dále dle Pythagorovy věty platí $x^2 + y^2 = r^2$.

$$r^2 = a^2 (4 + 4 \cos \varphi \cos 2\varphi - 4 \sin \varphi \sin 2\varphi + 1)$$

Využijeme součtového vzorce: $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$$r^2 = a^2 (5 - 4 \cos(\varphi + 2\varphi))$$

$$r^2 = a^2 (5 - 4 \cos 3\varphi)$$

$$r = a\sqrt{5 - 4 \cos 3\varphi}$$

3.6 Plocha ohraničená křivkou

Pro odvození výpočtu plochy deltoidu zadaného parametricky budeme

potřebovat jeden z těchto vzorců: $-\int_{\alpha}^{\beta} y \cdot x' dt$ nebo $\int_{\alpha}^{\beta} x \cdot y' dt$.ⁱ Pro náš výpočet

použijeme prvního vzorce.

Parametrické rovnice deltoidu jsme si již odvodili:

$$d : x = a(2 \cos t + \cos 2t)$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

Dále budeme potřebovat meze integrálu (Obrázek 29), které jsou $(0, 2\pi)$ a derivaci

x - souřadnice

$$x' = a(-2 \sin t - 2 \sin 2t).$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce:

$$-\int_0^{2\pi} a(2 \sin t - \sin 2t) \cdot a(-2 \sin t - 2 \sin 2t) dt =$$

ⁱ home1.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf

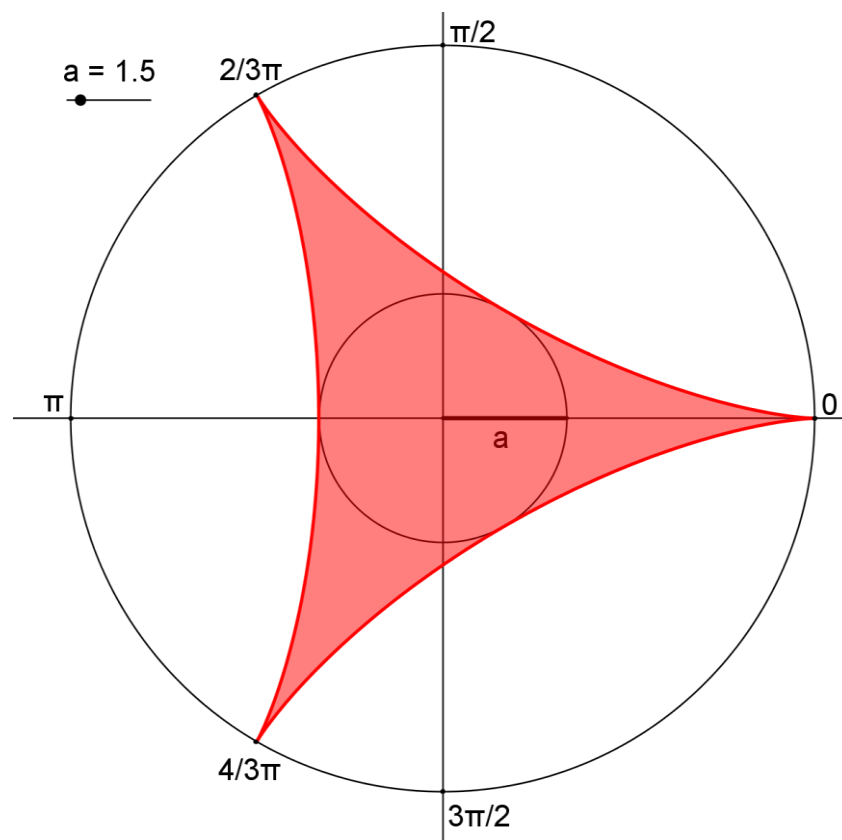
$$= -a^2 \int_0^{2\pi} (2\sin t - \sin 2t) \cdot (-2\sin t - 2\sin 2t) dt =$$

Využijeme vzorce: $\sin 2t = 2\cos t \sin t$

$$= -a^2 \int_0^{2\pi} (2\sin t - 2\cos t \sin t) \cdot (-2\sin t - 4\cos t \sin t) dt =$$

Dále vynásobíme a vytkneme.

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos t \sin^2 t - 2\cos^2 t \sin^2 t dt =$$



Obrázek 29: Deltoid - plocha

Využijeme rovnosti: $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos t \sin^2 t - 2\sin^2 t + 2\sin^4 t dt =$$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} \frac{2\cos t \sin^2 t}{2} - \sin^2 t + 2\sin^4 t dt =$$

Opět využijeme vzorce: $2 \cos t \sin t = \sin 2t$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin 2t \cdot \frac{\sin t}{2} - \sin^2 t + 2 \sin^4 t \, dt =$$

Pro integraci $\sin^4 t$ využijeme vzorce: $\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$

$$= 4a^2 \cdot \left[\left[-\frac{1 \cos 2t \sin t}{4} - \frac{\cos t \sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} - \left[-\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2} t \right]_0^{2\pi} + 2 \left[-\frac{\sin^3 t \cos t}{4} - \frac{3 \sin t \cos t}{8} + \frac{3}{8} t \right]_0^{2\pi} \right] =$$

$$= 4a^2 \cdot \left(0 - \pi + \frac{3}{2} \pi \right) = 2\pi a^2 .$$

Plocha deltoidu je $2\pi a^2$. Srovnáme-li tento výraz se vzorcem pro obsah kruhu o poloměru a , je plocha deltoidu dvakrát větší.

3.7 Délka křivky

Stejně jako u asteroidy si nyní odvodíme délku deltoidu. Vzorec pro výpočet

délky křivky zadané parametricky je $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt$.ⁱ

Pro dosazení do vzorce budeme potřebovat derivaci parametrických rovnic.

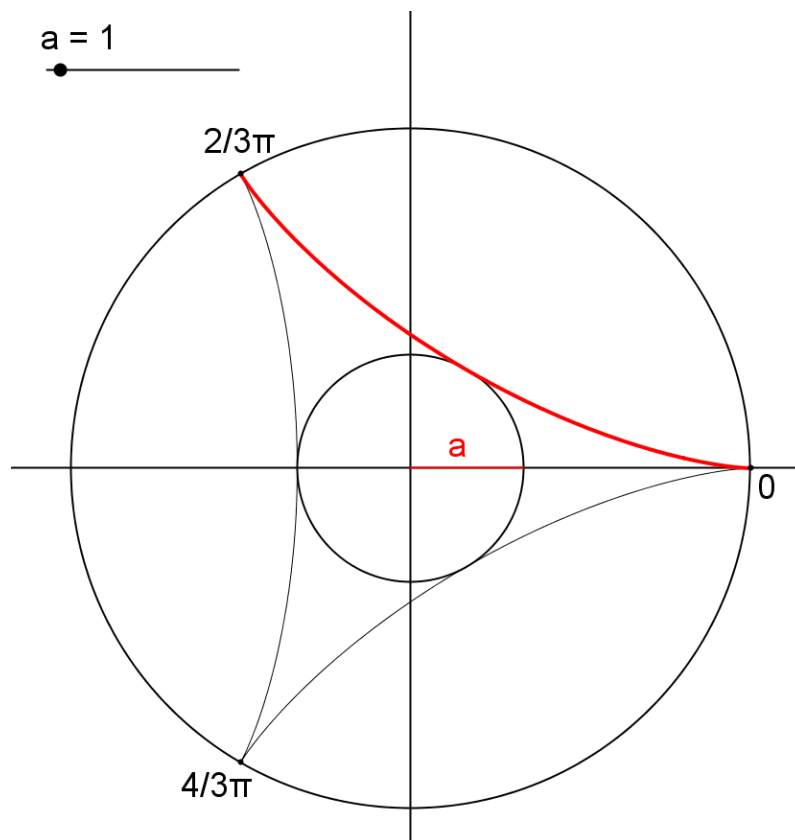
$$\begin{aligned} d : x &= a(2 \cos t + \cos 2t) & x' &= a(-2 \sin t - 2 \sin 2t) \\ y &= a(2 \sin t - \sin 2t) & y' &= a(2 \cos t - 2 \cos 2t) \end{aligned}$$

Délka deltoidu se skládá ze tří stejně dlouhých částí. Využijeme-li této vlastnosti,

vypočítáme nejprve třetinu délky pro $t \in (0, \frac{2}{3}\pi)$ a výsledek poté vynásobíme třemi.

(Obrázek 30)

ⁱ home1.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf



Obrázek 30: Deltoid – délka 1/3 křivky

$$\begin{aligned} \frac{L}{3} &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{a^2(-2\sin t - 2\sin 2t)^2 + a^2(2\cos t - 2\cos 2t)^2} dt = \\ &= a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{(4\sin^2 t + 8\sin t \sin 2t + 4\sin^2 2t) + (4\cos^2 t - 8\cos t \cos 2t + 4\cos^2 2t)} dt = \\ &= 2a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{(\sin^2 t + 2\sin t \sin 2t + \sin^2 2t) + (\cos^2 t - 2\cos t \cos 2t + \cos^2 2t)} dt = \end{aligned}$$

Využijeme rovnosti: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos^2 2t + \sin^2 2t = 1$

$$= 2a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2 - 2(\cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t)} dt =$$

Využijeme součtového vzorce: $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$$= 2a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2 - 2\cos 3t} \, dt = 2\sqrt{2}a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{1 - \cos 3t} \, dt =$$

Využijeme vzorce: $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

$$= 2\sqrt{2}a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos 3t}}{\sqrt{2}} \, dt = 4a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin \frac{3t}{2} \, dt = 4a \left[-\frac{2}{3} \cos \frac{3t}{2} \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{8}{3}a(1 + 1) = \frac{16}{3}a$$

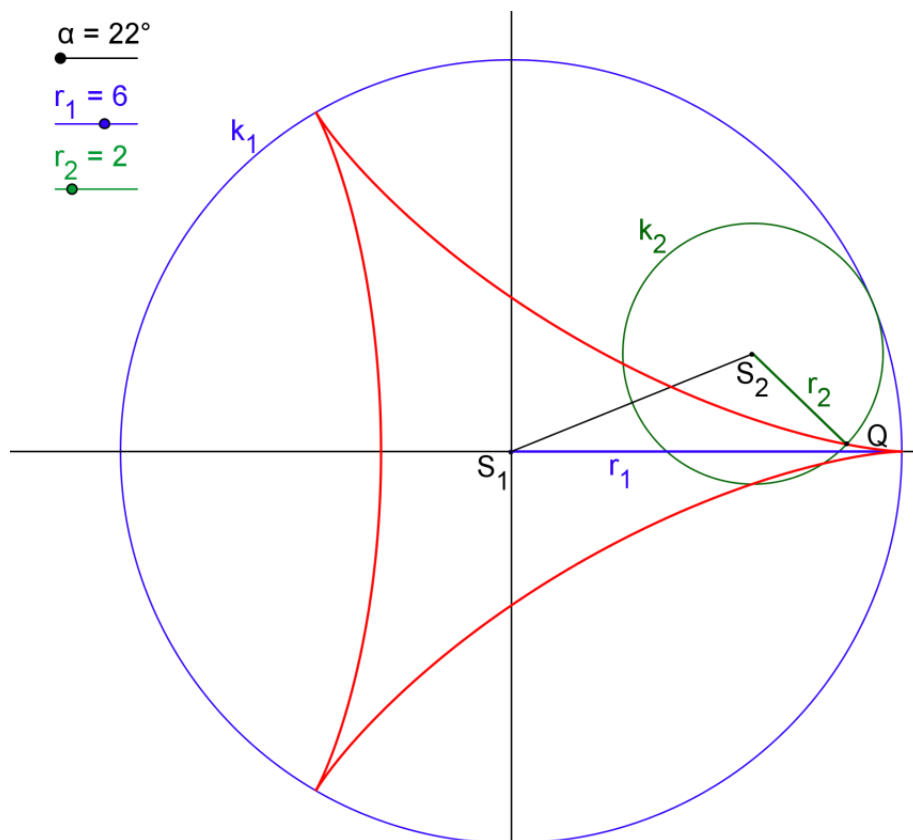
Délka celé křivky je: $3 \cdot \frac{16}{3}a = 16a$

3.8 Množina bodů

3.8.1 Deltoid jako hypocykloida

Hypocykloida je křivka, která vznikne jako trajektorie bodu při odvalování se jedné kružnice (kruhu) bez smýkání zevnitř po jiné pevné kružnici (kruhu).

Nechť existuje $k_1 (S_1; r_1)$ a $k_2 (S_2; r_2)$ a bod $Q \in k_2$. Kružnice k_1 a k_2 mají právě jeden vnitřní dotyk. Kružnici k_2 necháme odvalovat uvnitř po kružnici k_1 pomocí posuvníku α . Množinou všech bodů Q je hypocykloida. Je-li $r_1 = 3 \cdot r_2$, jedná se o deltoid. (Obrázek 31)



Obrázek 31: Deltoid jako hypocykloida

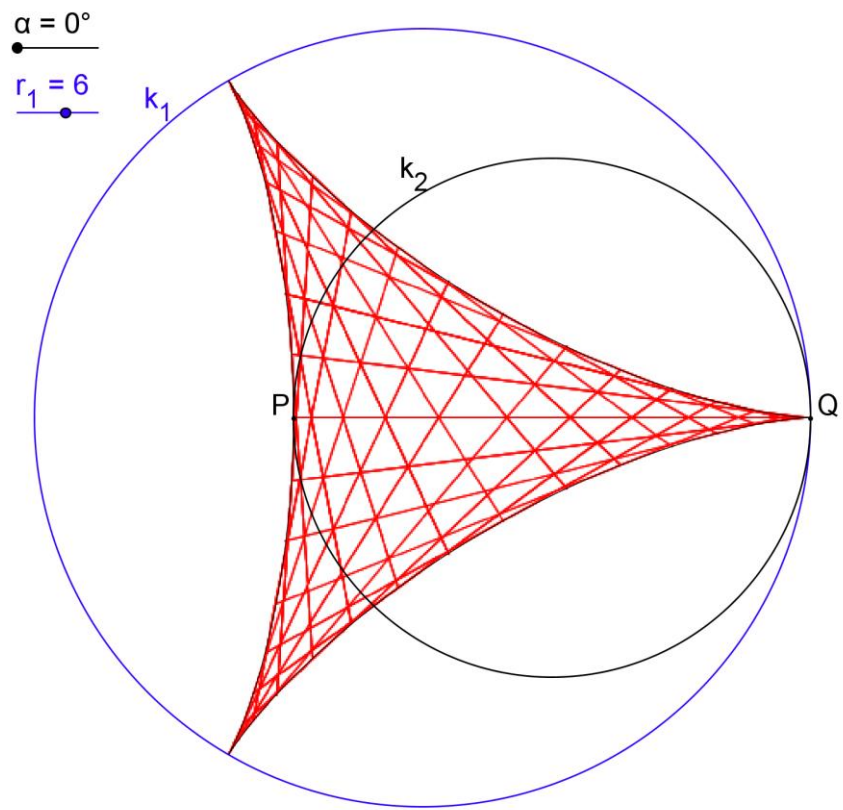
V programu GeoGebra ([GeoGebra 8](#)) se můžeme přesvědčit, že pokud je $r_1 = 3 \cdot r_2$, vznikne nám deltoid. Měníme-li velikosti posuvníku r_1 a r_2 můžeme dostat křivku asteroidu. ($r_1 = 4 \cdot r_2$)

3.9 Deltoid jako obálka

3.9.1 Deltoid jako obálka průměrů

Obálkou všech průměrů PQ kružnice k_2 , která se odvaluje bez smýkání zevnitř po jiné pevné kružnici k_1 , a o jejich poloměrech platí $r_2 = \frac{2}{3} r_1$, je deltoid. (Obrázek 32)

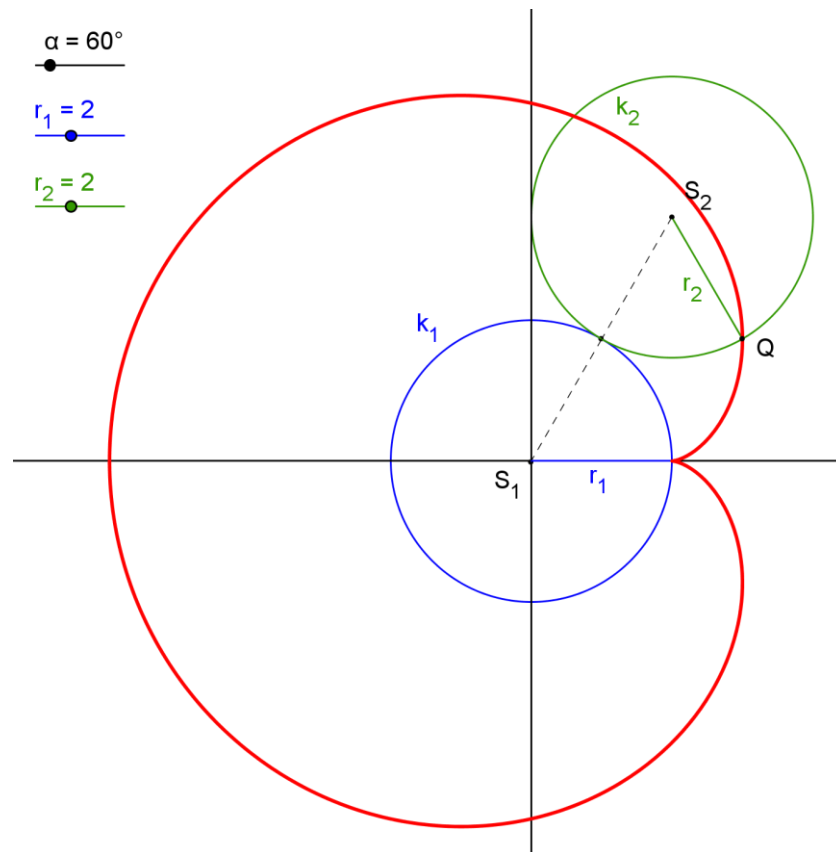
V programu Geogebra ([GeoGebra 9](#)) si tyto kružnice k_1 a k_2 s průměrem PQ můžeme vytvořit. Pomocí *stopy* v GeoGebře nám průměr PQ , při odvalování kružnice k_2 posuvníkem α , vytvoří deltoid.



Obrázek 32: Deltoid – MB – obálka průměrů

4 KARDIOIDA

Kardioida je křivka, která vznikne jako množina všech trajektorií bodu při odvalování se jedné kružnice k_2 bez smýkání zvenku po jiné pevné kružnici k_1 , přičemž platí $r_1 = r_2$. (Obrázek 33)



Obrázek 33: Kardioida

Touto definicí kardioidy se budeme ještě podrobněji zabývat v podkapitole Množina bodů.

4.1 Historie

Kardioida byla studována již v 15. století dánským matematikem a astronomem *Olem Christensenem Rømerem* (1644 – 1710) a matematikem *Vaumeslem* (1678). Roku

1708 francouzský matematik *Philippe de La Hire* (1640 – 1718) stanovil délku této křivky.

Název *kardioida* („ve tvaru srdce“) byl poprvé použit matematikem *Johannem Castillonem* (*Giovanni Francesco Salvemini Melciorre*, 1704 - 1791) roku 1741.

4.2 Rovnice kardioidy

Kardioida (Obrázek 34) je algebraická křivka čtvrtého stupně, kterou můžeme popsat těmito rovnicemi:

kartézské souřadnice:

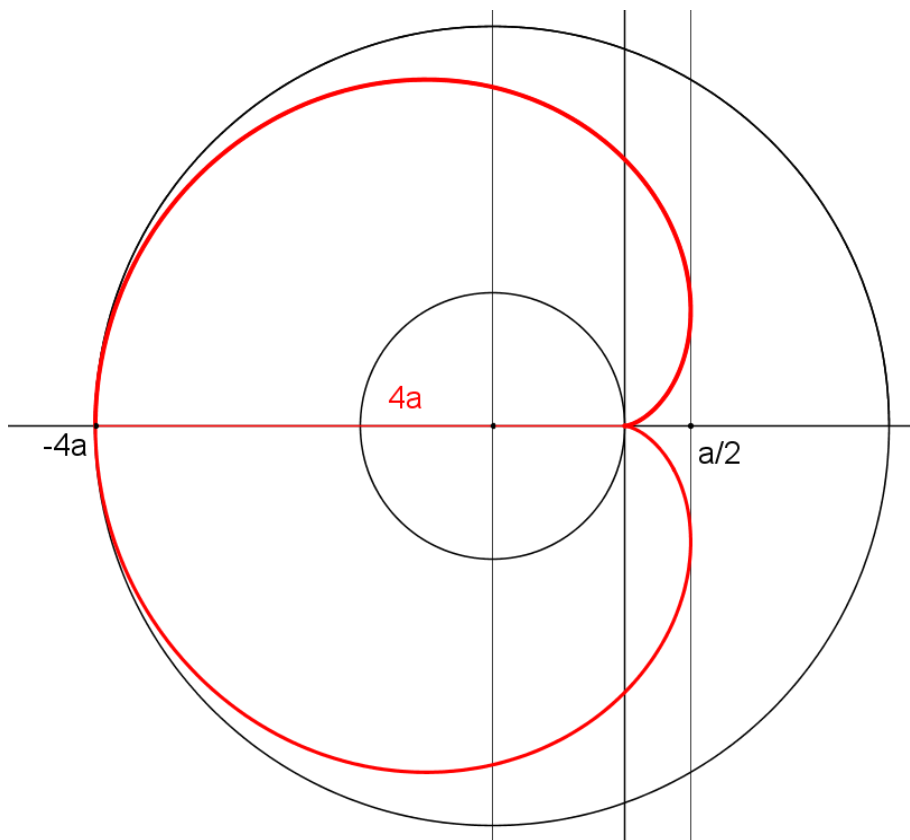
$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= a(2\cos t - \cos 2t) \\ y &= a(2\sin t - \sin 2t) \end{aligned} \quad a > 0$$

polární souřadnice:

$$r = 2a(1 - \cos t)$$



Obrázek 34: Kardioida

4.3 Základní geometrické vlastnosti

Osa souměrnosti: $y = 0$

Singulární bod: $[0; 0]$

Plocha ohraničená křivkou: $6\pi a^2$

Délka křivky: $16a$

4.4 Plocha ohraničená křivkouⁱ

Pro odvození plochy kardioidy využijeme vzorce $-\int_{\alpha}^{\beta} x' \cdot y \, dt$ ⁱⁱ.

Parametrické rovnice kardioidy jsou:

$$k : x = a(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

Z obrázku vidíme, že je křivka souměrná podle osy x , její obsah spočítáme jako dvojnásobek obsahu pro $t \in (0, \pi)$. (Obrázek 35)

Derivace x souřadnice je

$$x' = a(-2 \sin t + 2 \sin 2t).$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce:

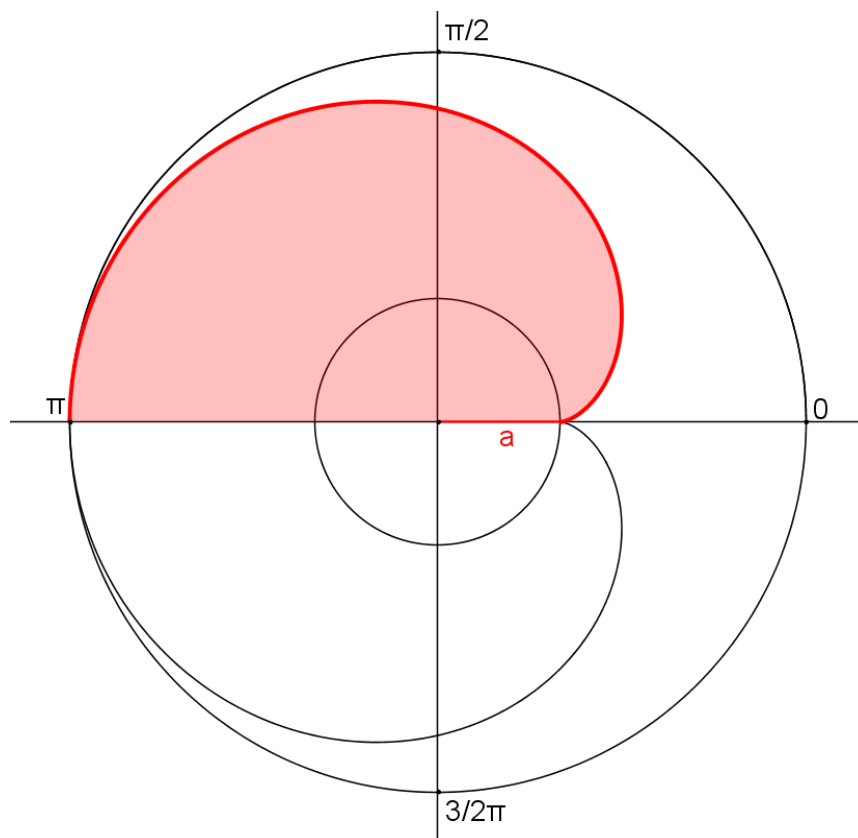
$$\begin{aligned} \frac{P}{2} &= -\int_0^{\pi} a(-2 \sin t + 2 \sin 2t) \cdot a(2 \sin t - \sin 2t) dt = \\ &= -a^2 \int_0^{\pi} (-4 \sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t + 2 \sin 2t \sin t - 2 \sin^2 2t) dt = \end{aligned}$$

Využijeme vzorce: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$= -a^2 \int_0^{\pi} -4 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + 4 \sin 2t \sin t - 2 \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} dt =$$

ⁱ <http://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i21.html>

ⁱⁱ home1.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf



Obrázek 35: Kardioida - plocha $\frac{1}{2}$

Rozdělíme na tři sčítající se integrály a vytkneme.

$$= 2a^2 \int_0^{\pi} 1 - \cos 2t dt - 4a^2 \int_0^{\pi} \sin 2t \sin t dt + a^2 \int_0^{\pi} 1 - \cos 4t dt =$$

Využijeme vzorce: $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$

$$= 2a^2 \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} + a^2 \left[t - \frac{\sin 4t}{2} \right]_0^{\pi} - 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos t dt =$$

Poslední integrál vypočítáme pomocí substituce.

$$\int \sin^2 t \cos t dt = \left. \begin{array}{l} \sin t = u \\ \cos t dt = du \end{array} \right| = \int u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right] = \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]$$

Dosadíme:

$$\begin{aligned} &= 2a^2 \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} + a^2 \left[t - \frac{\sin 4t}{2} \right]_0^{\pi} - 8a^2 \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{\pi} = \\ &= 2a^2(\pi - 0) + a^2(\pi - 0) - 8a^2(0 - 0) = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

Vynásobíme dvěma:

$$2 \cdot 3\pi a^2 = 6\pi a^2$$

Plocha kardioidy ($6\pi a^2$) je tedy obsah 6 kruhů o poloměru a . Ve srovnání s plochou deltoidu ($2\pi a^2$), je plocha kardioidy třikrát větší.

4.5 Délka křivky

Délku kardioidy si odvodíme také pomocí integrálu. Vzorec pro výpočet délky

křivky zadané parametricky je $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$.ⁱ

Pro dosažení do vzorce budeme potřebovat derivaci parametrických rovnic.

$$\begin{aligned} k : x &= a(2 \cos t - \cos 2t) & x' &= a(-2 \sin t + 2 \sin 2t) \\ y &= a(2 \sin t - \sin 2t) & y' &= a(2 \cos t - 2 \cos 2t) \end{aligned}$$

Délka kardioidy se skládá ze dvou stejně dlouhých částí. Využijeme-li této vlastnosti, vypočítáme nejprve polovinu délky pro $t \in (0, \pi)$ a výsledek vynásobíme dvěma.

(Obrázek 36)

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(-2 \sin t + 2 \sin 2t)^2 + a^2(2 \cos t - 2 \cos 2t)^2} dt = \\ &= a \int_0^{\pi} \sqrt{(4 \sin^2 t - 8 \sin 2t \sin t + 4 \sin^2 2t) + (4 \cos^2 t - 8 \cos 2t \cos t + 4 \cos^2 2t)} dt = \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin^2 t - 2 \sin 2t \sin t + \sin^2 2t) + (\cos^2 t - 2 \cos 2t \cos t + \cos^2 2t)} dt = \end{aligned}$$

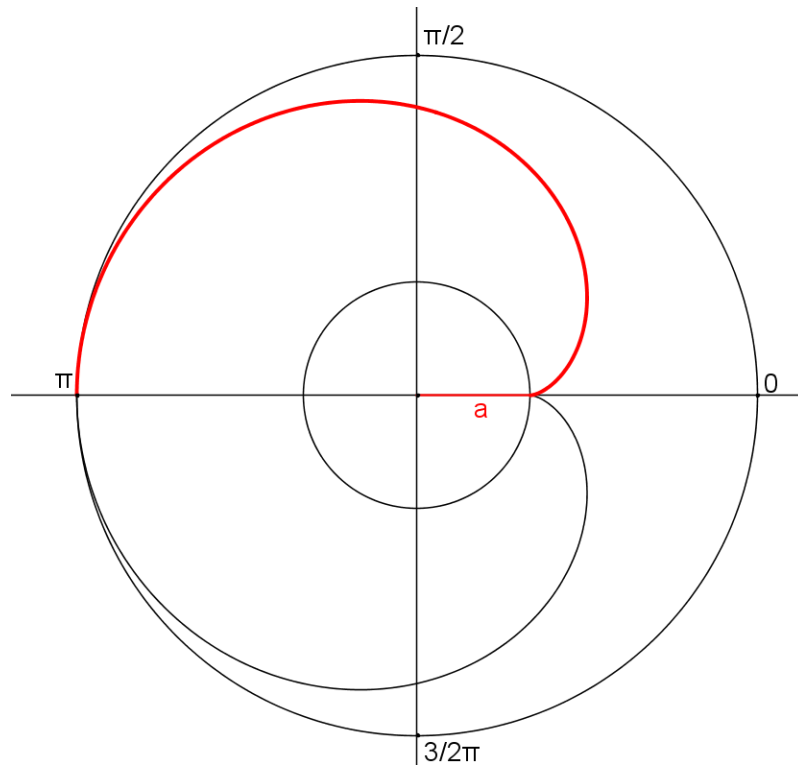
Využijeme rovnosti: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos^2 2t + \sin^2 2t = 1$

$$= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2(\cos 2t \cos t + \sin 2t \sin t)} dt =$$

Využijeme součtového vzorce: $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

$$= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt =$$

ⁱ home1.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf



Obrázek 36: Kardioida – délka ½ křivky

Využijeme vzorce: $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

$$= 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{\sqrt{2}} dt = 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{1}{2} t dt = 4a \left[-2 \cos \frac{1}{2} t \right]_0^{\pi} = 8a(-0 + 1) = 8a$$

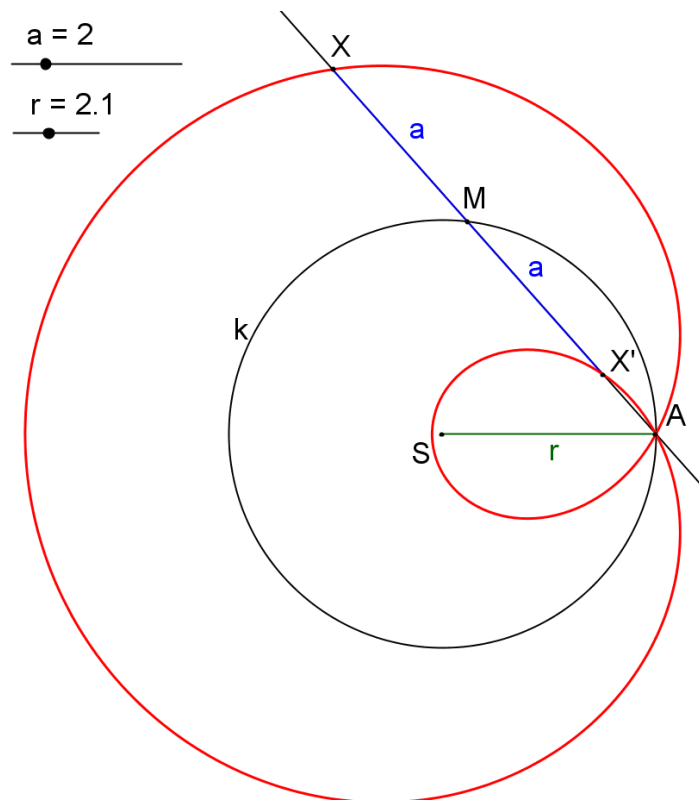
Délka celé křivky je: $2 \cdot 8a = 16a$

Délka kardioidy je stejná jako délka deltoidu.

4.6 Množina bodů

4.6.1 Kardioida jako speciálním případem Pascalovy závitnice.

Nechť existuje kružnice $k(S; r)$. Na kružnici k zvolíme pevný bod A a pohyblivý bod M . Bodem M a bodem A povedeme přímku. Na této přímce zvolíme dva body X a X' tak, aby $|MX| = |MX'| = a$. (Obrázek 37)

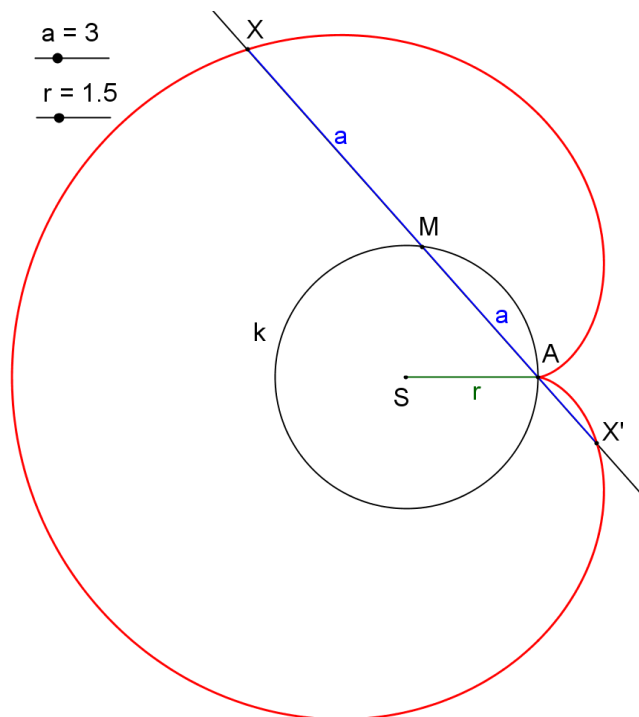


Obrázek 37: Pascalova závitnice

Posouváme-li bodem M , množinou všech bodů X a X' je křivka, kterou nazýváme Pascalova závitnice.

Speciálním případem Pascalovy závitnice je kardioida. Tato křivka nám vznikne tehdy, je-li vzdálenost $|MX| = |MX'| = a = 2r$. (Obrázek 38)

Toto vše můžeme pozorovat v programu GeoGebra ([GeoGebra 10](#)), kde si můžeme libovolně měnit posuvníky poloměr kružnice k a vzdálenost bodů $|MX|, |MX'|$.



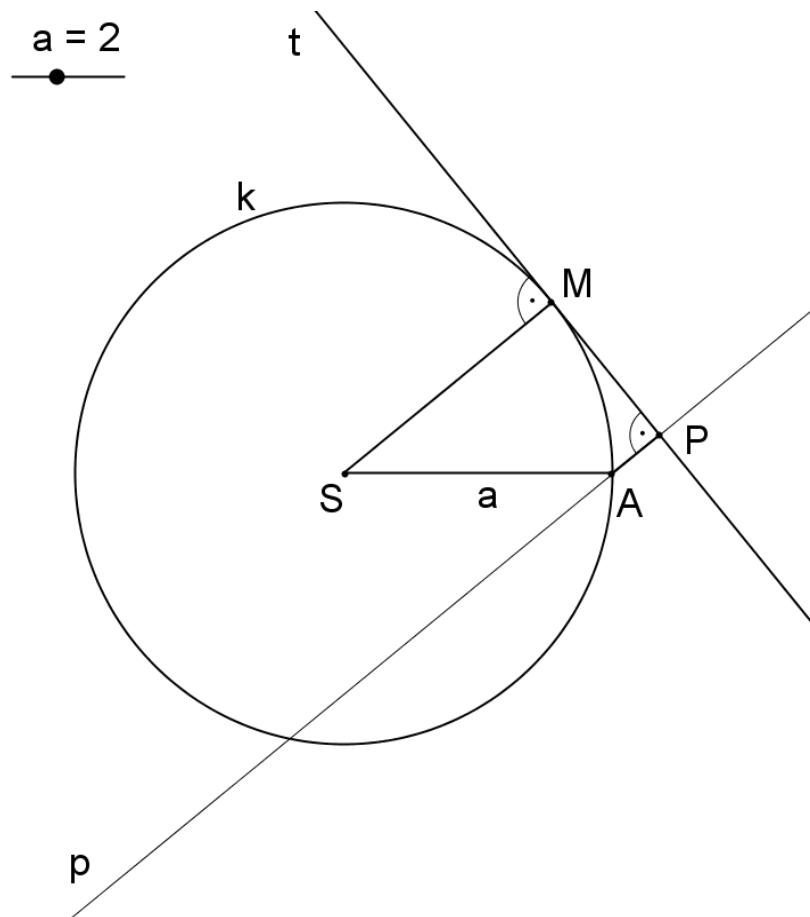
Obrázek 38: Kardioida – speciální případ Pascalovy závitnice

4.6.2 Kardioida jako úpatnice

Množinu všech pat kolmic spuštěných na tečny dané rovinné křivky z daného bodu (pólu) nazýváme úpatnicí.ⁱ

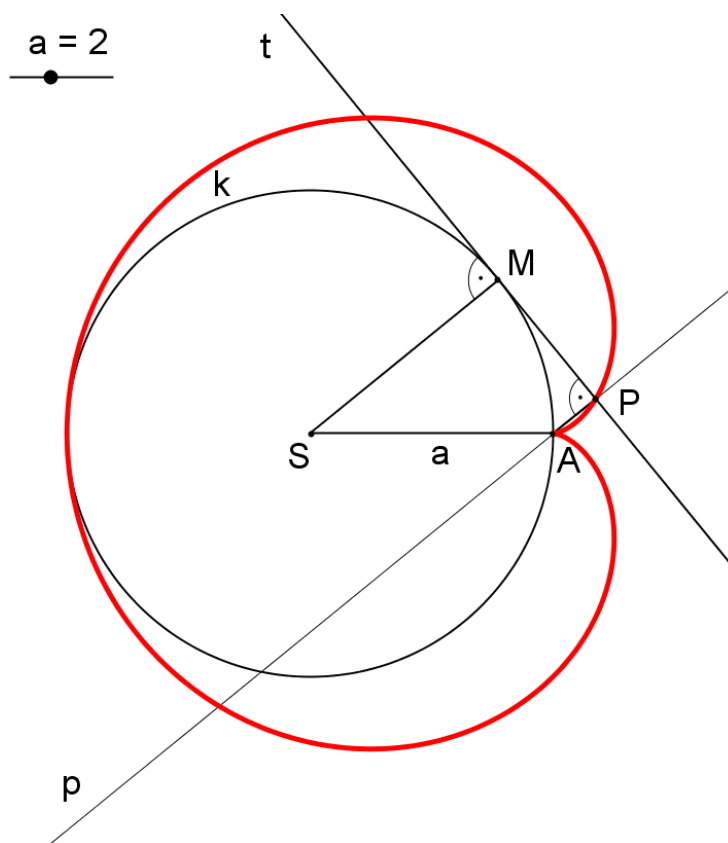
Nechť existuje kružnici $k(S; a)$, pevný bod $A \in k$ (pól) a pohyblivý bod $M \in k$. Sestrojíme tečnu $t \in M$. Dále sestrojíme kolmici p na tečnu t z bodu A (pólu) a nově vzniklý průsečík nazveme P . ($P \in t \cap p$) (Obrázek 39)

ⁱ <http://www.matematika.cz/content/rovinne-krivky/?dir=upatnice>



Obrázek 39: Kardioida – sestrojení úpatnice

Pohybujeme-li bodem M , stopa bodu P nám vykreslí křivku kardioidu. V programu GeoGebra ([GeoGebra 11](#)) můžeme též využít zakreslení množiny bodů. (Obrázek 40)



Obrázek 40: Kardioida jako úpatnice

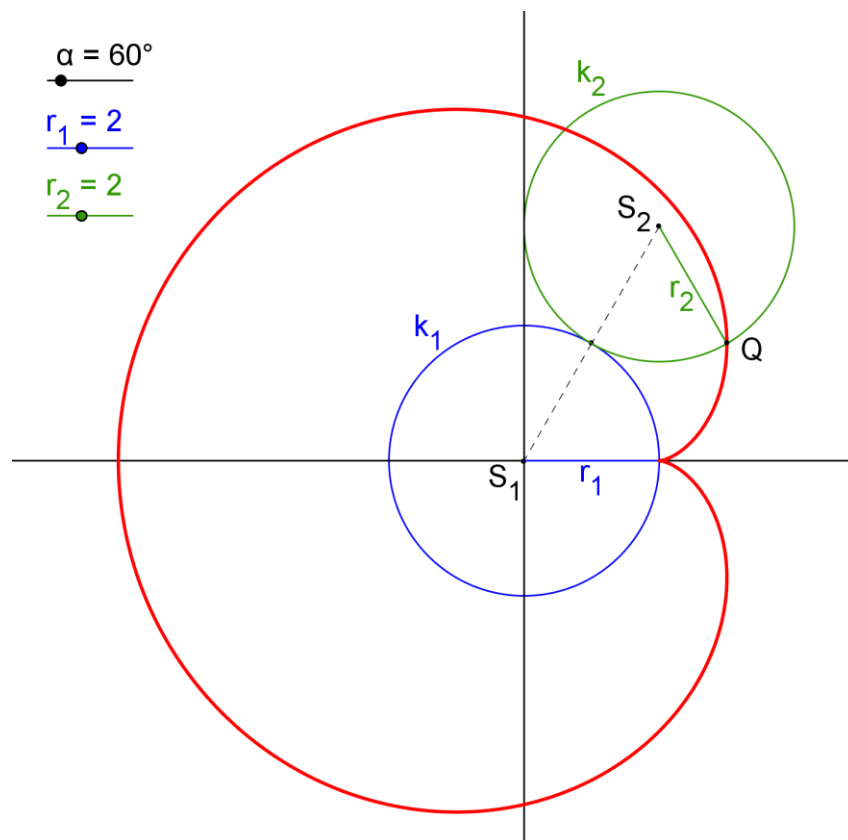
4.6.3 Kardioida jako epicykloida

Epicykloida je křivka, která vznikne jako trajektorie bodu při odvalování se jedné kružnice (kruhu) bez smýkání zvenku po jiné pevné kružnici (kruhu).

Nechť existuje $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ a bod $Q \in k_2$. Kružnice k_1 a k_2 mají právě jeden vnitřní dotyk. Kružnici k_2 necháme odvalovat zvenku po kružnici k_1 pomocí posuvníku α . Množinou všech bodů Q je epicykloida.

Je-li $r_1 = r_2$, jedná se o kardioida. (Obrázek 41)

V programu GeoGebra ([GeoGebra 12](#)) máme vytvořenou epicykloidu. Posuvníky r_1 a r_2 můžeme libovolně měnit a nastavit tak, aby $r_1 = r_2$. Opět pomocí stopy či množiny bodů vykreslíme křivku, která se nazývá kardioida. Pokud $r_1 = 2 \cdot r_2$, jedná se o nefroidu, o které se ještě později zmíníme.



Obrázek 41: Kardioida jako epicykloida

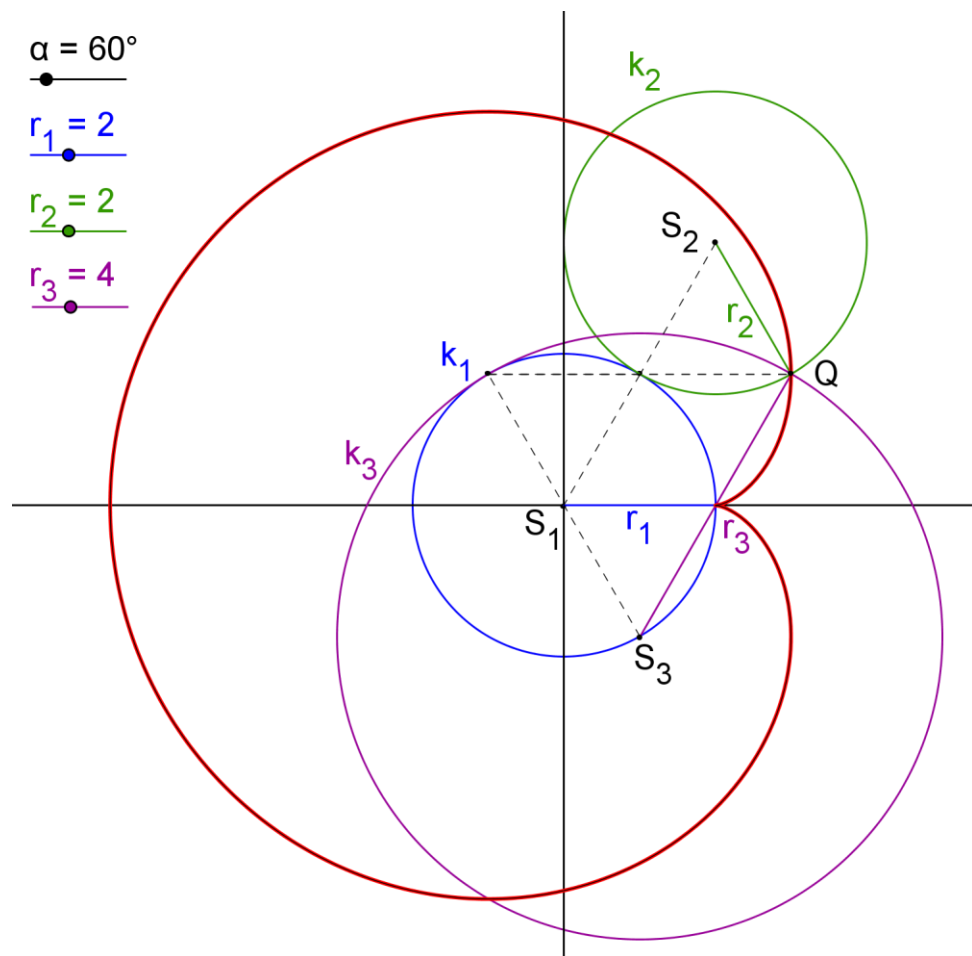
4.6.4 Kardioida jako epicykloida s vnitřním dotykem (nazývána pericykloida)

Pericykloida je křivka, která vznikne jako trajektorie bodu pevně spojeného s kružnicí kutálející se svým vnitřním obvodem po vnějším obvodu druhé kružnice.

Nechť existuje $k_1(S_1; r_1)$ a $k_3(S_3; r_3)$ a bod $Q \in k_3$. Kružnice k_1 a k_3 mají právě jeden vnitřní dotyk. Kružnici k_3 necháme odvalovat uvnitř po kružnici k_1 pomocí posuvníku α . Množinou všech bodů Q je epicykloida.

Je-li $r_3 = 2 \cdot r_1$, jedná se o kardioida. (Obrázek 42)

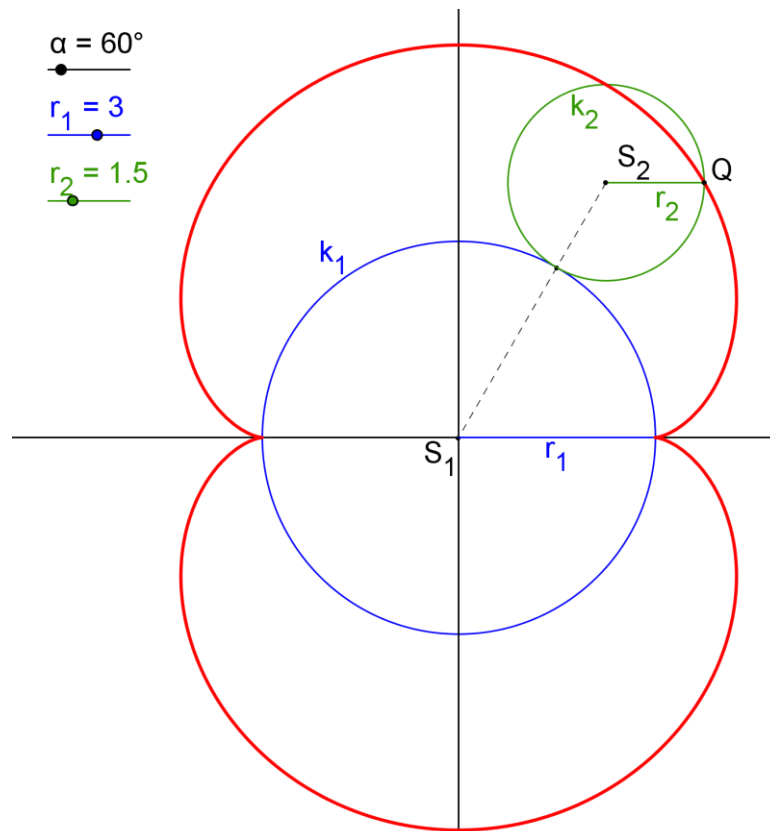
V programu GeoGebra ([GeoGebra 13](#)) máme kružnici k_3 s vnitřním dotykem kružnice k_1 vytvořenou. Posuvníky r_1 a r_3 můžeme libovolně měnit a nastavit tak, aby $r_3 = 2 \cdot r_1$. Nakonec pomocí stopy či množiny bodů vykreslíme křivku.



Obrázek 42: Kardioida jako epicykloida s vnitřním dotykem

5 NEFROIDA

Nefroida je křivka, která vznikne jako množina všech trajektorií bodu při odvalování se jedné kružnice k_2 bez smýkání zvenku po jiné pevné kružnici k_1 , přičemž platí $r_1 = 2r_2$. (Obrázek 43)



Obrázek 43: Nefroida

Touto definicí kardioidy se budeme ještě podrobněji zabývat v podkapitole Množina bodů.

5.1 Historie

Názvem *nefroida* byla nejprve pojmenovaná dvou vrcholová epicykloida *Proctorem* roku 1878, o rok později *Freeth* použil stejný název pro křivku poněkud

komplikovanější.

Nefroida si vysloužila svůj název díky svému tvaru podobnému ledvině. Tato křivka byla studována již v 17. století nejprve *Christiaanem Huygensem* (1629 – 2695), *Ehrenfriedem Waltherem von Tschirnhausem* (1651 – 1708) a také *Jacobem Bernoulliem* (1654 – 1705) a jeho synovcem *Danielem* (1700 – 1782).

5.2 Rovnice nefroidy

Nefroida (Obrázek 44) je algebraická křivka šestého stupně, kterou můžeme popsat těmito rovnicemi:

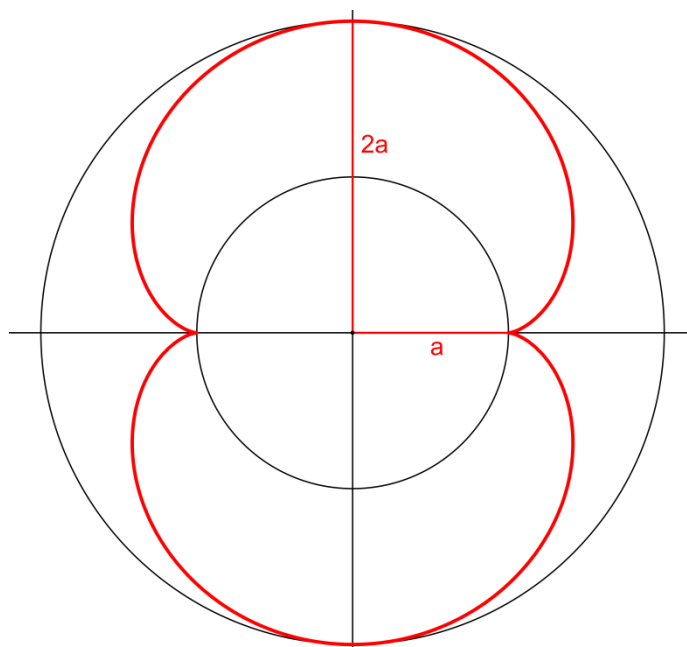
kartézské souřadnice:

$$4(x^2 + y^2 - a^2)^3 - 27a^4 y^2 = 0$$

parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= a(3 \cos t - \cos 3t) \\ y &= a(3 \sin t - \sin 3t) \end{aligned} \quad a > 0$$

polární souřadnice: $r = a^{\frac{2}{3}} \left(\cos^{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{2} + \sin^{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$



Obrázek 44: Nefroida

5.3 Základní geometrické vlastnosti

Osa souměrnosti: $y = 0$

Plocha ohraničená křivkou: $12\pi a^2$

Délka křivky: $12a$

5.4 Plocha ohraničená křivkou

Pro odvození plochy ohraničené nefroidou, která je zadaná parametricky,

použijeme tento vzorec $-\int_{\alpha}^{\beta} x' \cdot y \, dt$.ⁱ

Parametrické rovnice nefroidy jsou:

$$n : x = a(3 \cos t - \cos 3t)$$

$$y = a(3 \sin t - \sin 3t)$$

Z obrázku vidíme, že je křivka souměrná podle osy x , její obsah spočítáme jako dvojnásobek obsahu pro $t \in (0, \pi)$. Derivace x – souřadnice je

$$x' = a(-3 \sin t + 3 \sin 3t).$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce:

$$\begin{aligned} \frac{P}{2} &= -\int_0^{\pi} a(-3 \sin t + 3 \sin 3t) \cdot a(3 \sin t - \sin 3t) dt = \\ &= -a^2 \int_0^{\pi} (-9 \sin^2 t + 3 \sin t \sin 3t + 9 \sin 3t \sin t - 3 \sin^2 3t) dt = \end{aligned}$$

Využijeme vzorce: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$= -a^2 \int_0^{\pi} -9 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + 12 \sin 3t \sin t - 3 \cdot \frac{1 - \cos 6t}{2} dt =$$

Rozdělíme na tři sčítající se integrály a vytkneme.

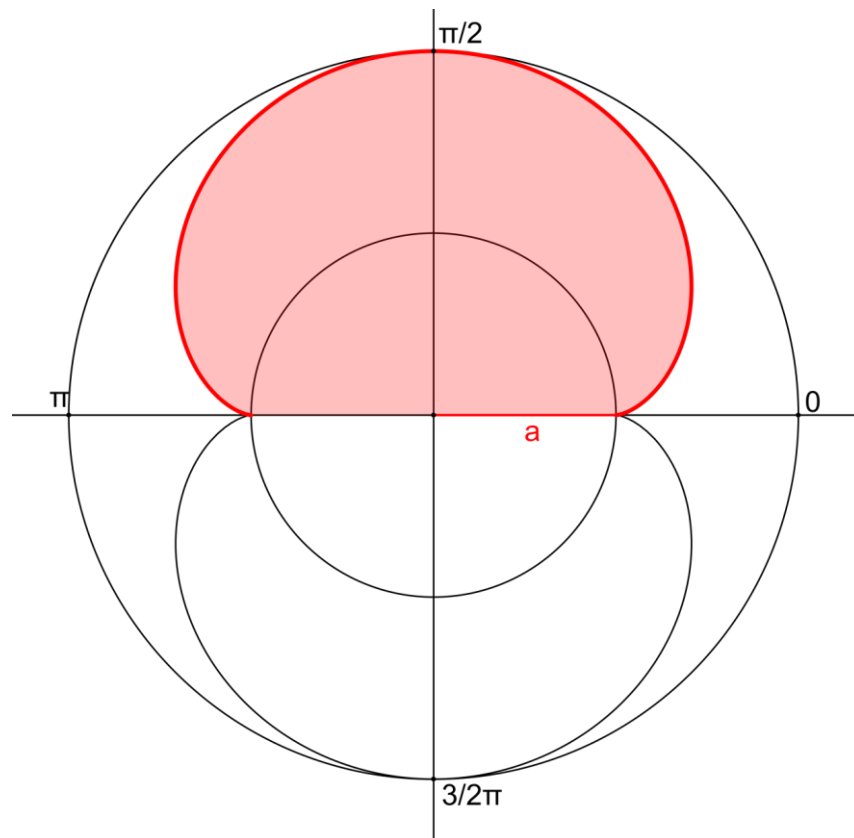
$$= \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\pi} 1 - \cos 2t \, dt - 12a^2 \int_0^{\pi} \sin 3t \sin t \, dt + \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\pi} 1 - \cos 6t \, dt =$$

ⁱ home1.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf

Využijeme vzorce: $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{9}{2}a^2 \int_0^\pi 1 - \cos 2t \, dt - 6a^2 \int_0^\pi \cos 2t \, dt + 6a^2 \int_0^\pi \cos 4t \, dt + \frac{3}{2}a^2 \int_0^\pi 1 - \cos 6t \, dt = \\
 &= \frac{9}{2}a^2 \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^\pi - 6a^2 \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^\pi + 6a^2 \left[\frac{\sin 4t}{4} \right]_0^\pi + \frac{3}{2}a^2 \left[t - \frac{\sin 6t}{2} \right]_0^\pi = \\
 &= \frac{9}{2}a^2(\pi - 0) - 6a^2(0 - 0) + 6a^2(0 - 0) + \frac{3}{2}a^2(\pi - 0) = 6\pi a^2
 \end{aligned}$$

Plocha ohraničená křivkou je $2 \cdot 6\pi a^2 = 12\pi a^2$, což je dvakrát větší plocha než u kardioidy.



Obrázek 45: Nefroida – ½ plochy

5.5 Délka křivky

Vzorec pro výpočet délky křivky zadané parametricky je $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$.

Nyní si pomocí tohoto vzorce a parametrických rovnic nefroidy odvodíme její délku.

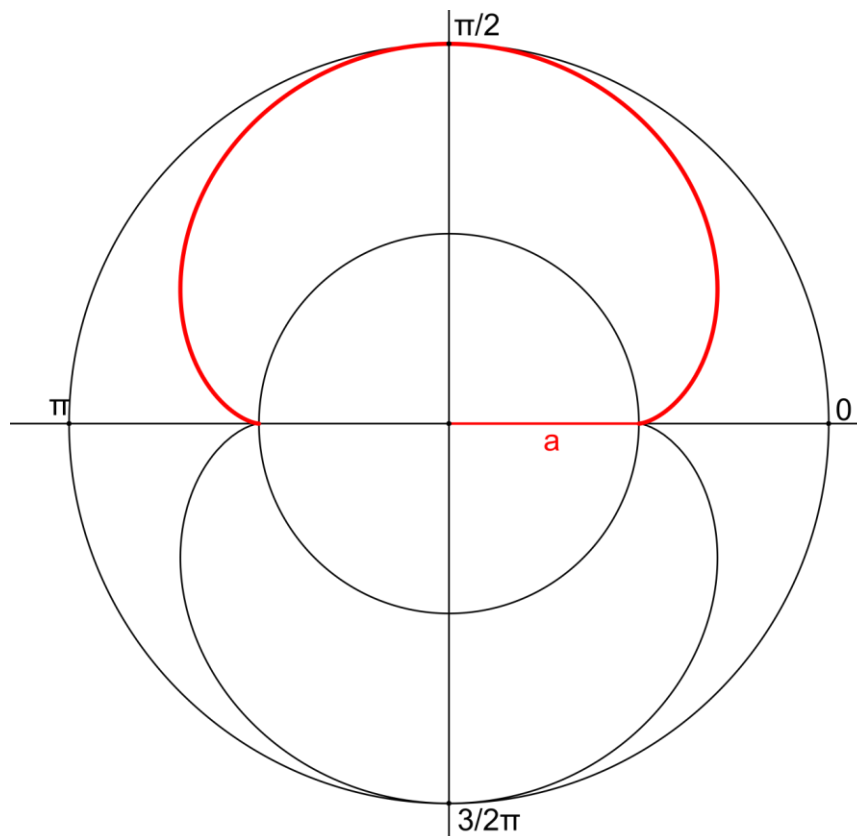
Nejprve si zapíšeme parametrické rovnice a vytvoříme jejich derivaci.

$$\begin{aligned} n : x &= a(3 \cos t - \cos 3t) & x' &= a(-3 \sin t + 3 \sin 3t) \\ y &= a(3 \sin t - \sin 3t) & y' &= a(3 \cos t - 3 \cos 3t) \end{aligned}$$

Délka nefroidy se skládá ze dvou stejně dlouhých částí, neboť je souměrná podle osy x .

Využijeme-li této vlastnosti, vypočítáme nejprve polovinu délky pro $t \in (0, \pi)$

a výsledek vynásobíme dvěma. (Obrázek 46)



Obrázek 46: Nefroida – délka $\frac{1}{2}$ křivky

$$\frac{L}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(-3 \sin t + 3 \sin 3t)^2 + a^2(3 \cos t - 3 \cos 3t)^2} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= a \int_0^{\pi} \sqrt{(9 \sin^2 t - 18 \sin 2t \sin t + 9 \sin^2 3t) + (9 \cos^2 t - 18 \cos 2t \cos t + 9 \cos^2 3t)} dt = \\
&= 3a \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin^2 t - 2 \sin 2t \sin t + \sin^2 3t) + (\cos^2 t - 2 \cos 2t \cos t + \cos^2 3t)} dt =
\end{aligned}$$

Využijeme rovnosti: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos^2 3t + \sin^2 3t = 1$

$$= 3a \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2(\cos 3t \cos t + \sin 3t \sin t)} dt =$$

Využijeme součtového vzorce: $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

$$= 3a \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2 \cos 2t} dt = 3\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2t} dt =$$

Využijeme vzorce: $\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$

$$= 3\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos 2t}}{\sqrt{2}} dt = 6a \int_0^{\pi} \sin t dt = 6a \left[-\frac{1}{2} \cos t \right]_0^{\pi} = 3a(-(-1) + 1) = 6a$$

Délka celé křivky je: $2 \cdot 6a = 12a$

5.6 Množina bodů

5.6.1 Nefroida jako epicykloida

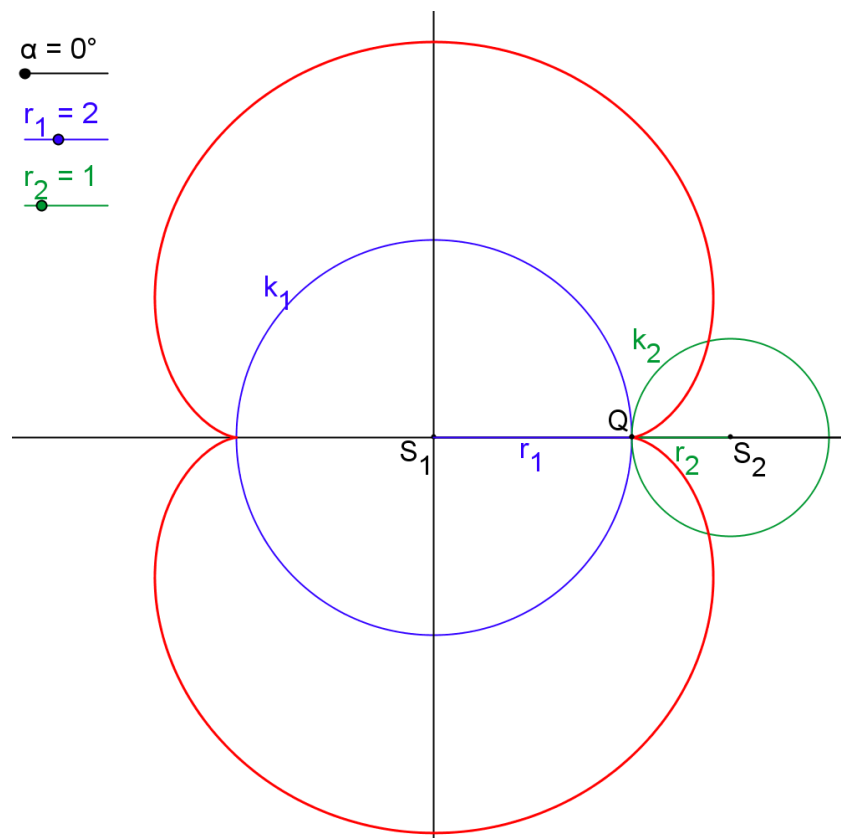
Epicykloida je křivka, která vznikne jako trajektorie bodu při odvalování se jedné kružnice (kruhu) bez smýkání zvenku po jiné pevné kružnici (kruhu).

Nechť existuje $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ a bod $Q \in k_2$. Kružnice k_1 a k_2 mají právě jeden vnitřní dotyk. Kružnici k_2 necháme odvalovat zvenku po kružnici k_1 pomocí posuvníku α . Množinou všech bodů Q je epicykloida.

Je-li $r_1 = 2 \cdot r_2$, jedná se o nefroidu. (Obrázek 47)

V programu GeoGebra ([GeoGebra 14](#)) máme vytvořenou epicykloidu.

Posuvníky r_1 a r_2 můžeme libovolně měnit a nastavit tak, aby $r_1 = 2 \cdot r_2$. Opět pomocí stopy či množiny bodů vykreslíme křivku, která se nazývá nefroida. Pokud $r_1 = r_2$, jedná se o kardioidu, o které se jsme se již zmiňovali.



Obrázek 47: Nefroida jako epicykloida

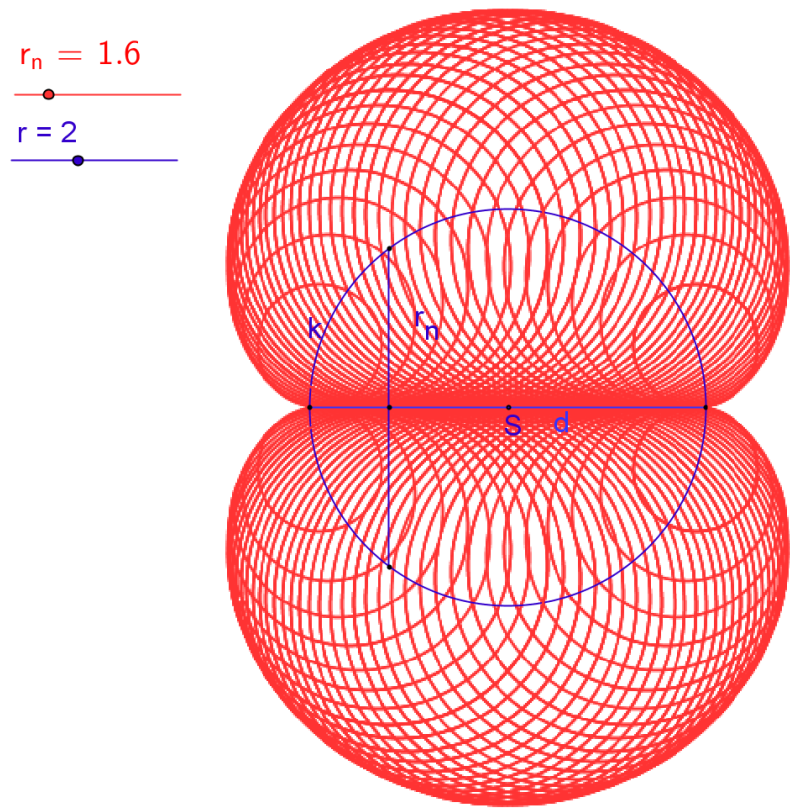
5.7 Nefroida jako obálka

5.7.1 Nefroida jako obálka kružnic

Nechť máme kružnici $k(S; r)$. Na kružnici k si vyznačíme průměr. Poté si vytvoříme libovolnou kružnici tak, aby její střed náležel kružnici k a dotýkal se jejího průměru.

Posuvníkem r_n měníme poloměry těchto libovolných kružnic. Z obrázku (Obrázek 48) vidíme, že obálkou takovýchto kružnic je nefroida.

V programu Geogebra ([GeoGebra 15](#)) máme vytvořenou kružnici k i libovolnou kružnici dotýkající se průměru kružnice k . Pomocí *stopy* můžeme pozorovat, zda se nám vykreslí nefroida.



Obrázek 48: Nefroida jako obálka kružnic

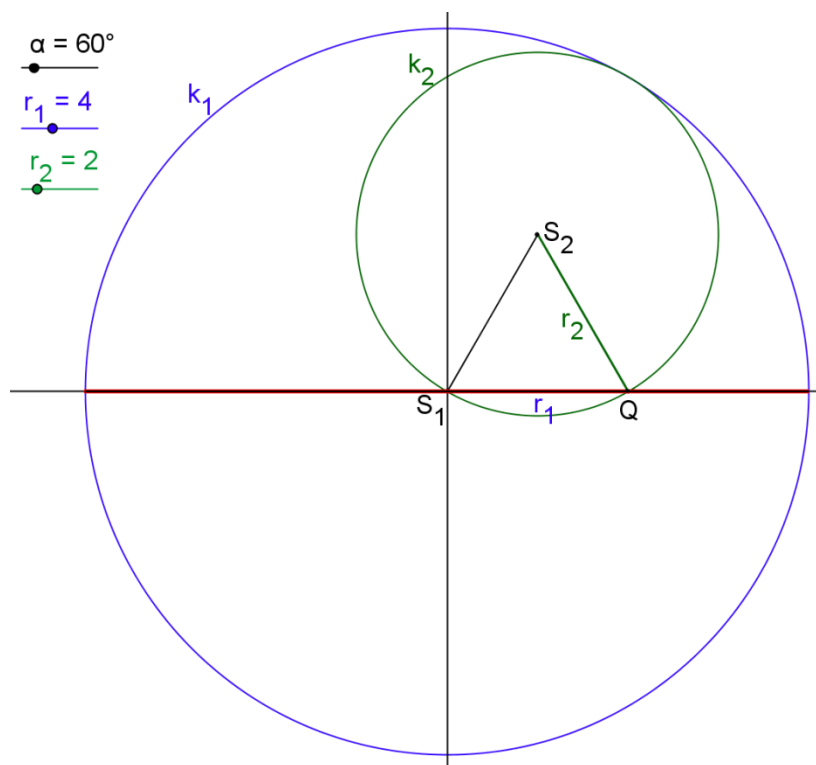
6 KOPERNÍKOVA VĚTA

Hypocykloida je křivka, která vznikne jako trajektorie bodu při odvalování se jedné kružnice (kruhu) bez smýkání zevnitř po jiné pevné kružnici (kruhu).

Nechť existují dvě kružnice $k_1 (S_1; r_1)$ a $k_2 \left(S_2; \frac{1}{2} r_1 \right)$ a bod $Q \in k_2$. Kružnice k_2 má poloviční poloměr. Kružnice k_1 a k_2 mají právě jeden vnitřní dotyk. Kružnici k_2 necháme odvalovat uvnitř po kružnici k_1 . Množinou všech bodů Q by měla být hypocykloida.

Koperníkova věta nám však uvádí překvapivý výsledek. Bod Q na obvodu kružnice k_2 opisuje úsečku – průměr kružnice k_1 . (Obrázek 49) Jedná se tedy o převod pohybu otáčivého na pohyb přímý.

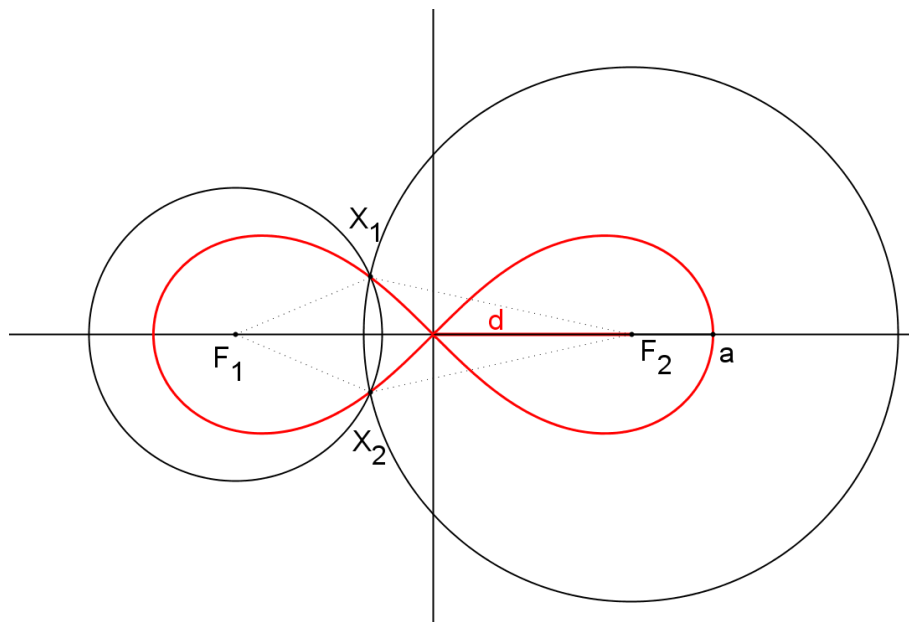
Toto vše si ukážeme i v programu GeoGebra ([GeoGebra 16](#)), ve kterém si můžeme libovolně nastavovat poloměry kružnic r_1 a r_2 a pomocí posuvníku α odvalovat kružnici k_1 po kružnici k_2 .



Obrázek 49: Koperníkova věta

7 BERNOULLIHO LEMNISKÁTA

Bernoulliho lemniskáta je křivka, která vznikne jako množina bodů, jejichž součin vzdáleností od daných bodů F_1, F_2 je konstantní. (Obrázek 50)



Obrázek 50: Bernoulliho lemniskáta

7.1 Historie

Již v roce 1694 *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705) publikoval článek v *Acta Eruditorum* o této křivce. Nazval ji latinským slovem *lemniscus* (závěsná stuha, pentle). Nebyl si vědom, že tato křivka je zvláštní případ *Cassiniova oválu*. Zabýval se hlavně vyšetřováním délky oblouku křivky a položil tak základy eliptických funkcí.

7.2 Rovnice Bernoulliho lemniskáty

Bernoulliho lemniskáta je algebraická křivka čtvrtého stupně, kterou můžeme popsat těmito rovnicemi:

kartézské souřadnice:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= a \left(\frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} \right) \\ y &= a \left(\frac{\sin t \cos t}{1 + \cos^2 t} \right) \end{aligned} \quad a > 0$$

polární souřadnice:

$$r^2 = a^2 \cos 2t$$

7.3 Základní geometrické vlastnosti

Osy souměrnosti: $y = 0$, $x = 0$

Singulární bod: $(0, 0)$ - střed symetrie

Plocha ohraničená křivkou: a^2

7.4 Polární rovnice

Křivku můžeme popsat pomocí polárních rovnic, které si nyní odvodíme. Každý bod X popsaný kartézskou soustavou souřadnic můžeme přepsat do polární soustavy souřadnic. (viz obr)

$$X = [x, y] \rightarrow X = [r, \varphi]$$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi, \quad r = [0; a], \varphi = [0; 2\pi] \end{aligned}$$

Rovnice Bernoulliho lemniskáty v kartézské soustavě souřadnic je

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Nyní dosadíme za x a y polární souřadnice:

$$(r^2 \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^2 = a^2(r^2 \cdot \cos^2 \varphi - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)$$

$$[r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)]^2 = a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

Využijeme vzorce: $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$, $1 = \cos^2 t + \sin^2 t$

$$r^4 = a^2 r^2 \cos 2t$$

$$r^2 = a^2 \cos 2t$$

Polární rovnice Bernoulliho lemniskáty je:

$$r = a\sqrt{\cos 2t}$$

7.5 Plocha ohraničená křivkouⁱ

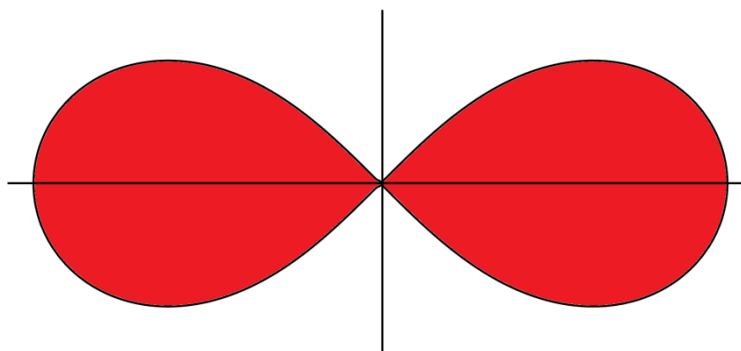
Pro odvození plochy ohraničené Bernoulliho lemniskátou využijeme vzorce

$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$.ⁱⁱ Pro dosazení do vzorce budeme potřebovat polární rovnici.

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

Z obrázku (Obrázek 51) vidíme, že nám bude stačit vypočítat obsah pro

$\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ a výsledek vynásobíme 4.



Obrázek 51: Bernoulliho lemniskáta – plocha

ⁱ <http://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i21.html>

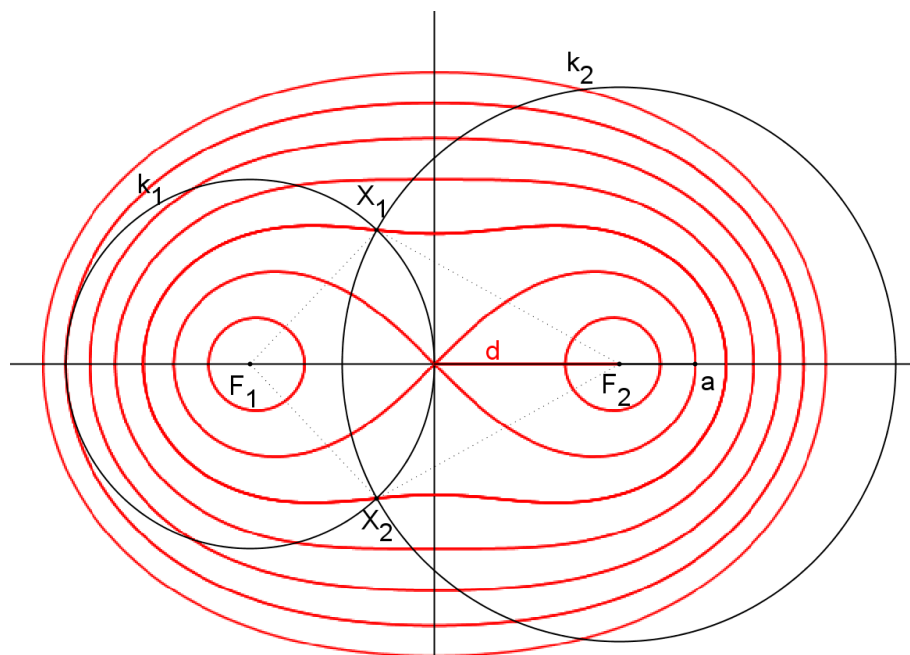
ⁱⁱ homel.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} a^2 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{a^2}{4}$$

$$S = 4 \cdot \frac{a^2}{4} = a^2.$$

7.6 Bernoulliho lemniskáta jako speciální případ Cassiniho oválů

Cassiniho ovály jsou definovány jako množina všech bodů X v rovině takových, že součin vzdáleností od dvou pevně zvolených bodů F_1, F_2 (ohnisek) je konstantní a je roven k^2 , platí $|F_1X| \cdot |F_2X| = k^2$.ⁱ (Obrázek 52)



Obrázek 52: Cassiniho ovály

ⁱ <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>

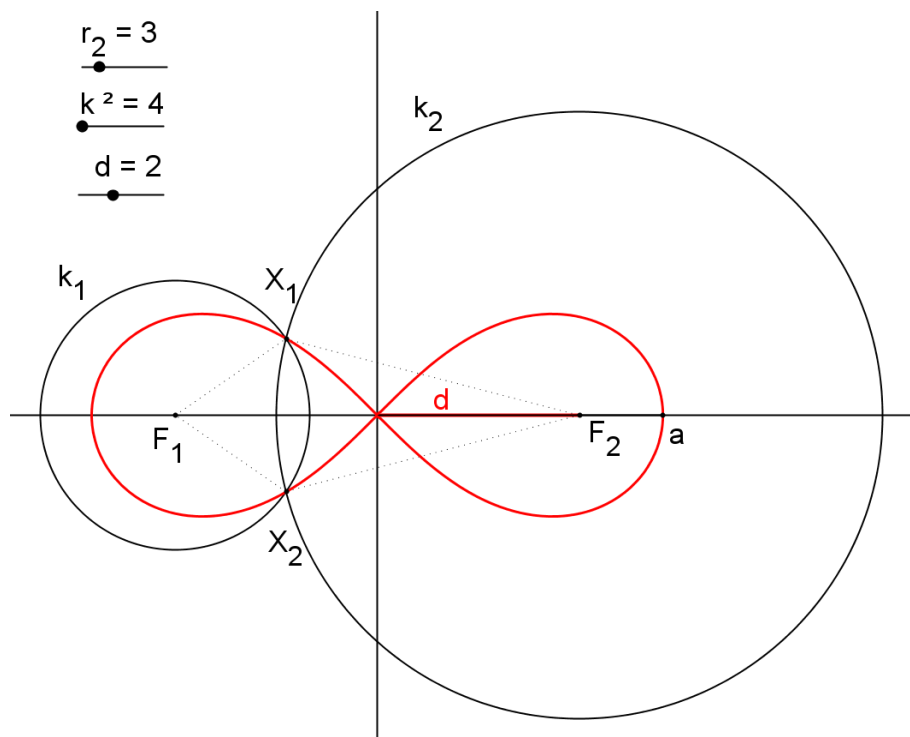
Nechť máme dvě kružnice k_1, k_2 a konstantu k . Vzdálenost středů dvou kružnic $k_1\left(F_1; \frac{k}{r_2}\right)$ a $k_2(F_2; r_1)$ je rovna $2d$. V programu GeoGebra máme toto vymodelováno a pomocí posuvníku můžeme řešit situace $k = d$, $k < d$ nebo $k > d$. ([GeoGebra 17](#))

Posuvníkem r_2 a k^2 měníme poloměry kružnic, posuvníkem d vzdálenost $|F_1F_2|$.

Je-li $k = d$, jedná se o Bernoulliho lemniskátu. (Obrázek 53)

Je-li $k < d$, jedná se o Cassiniho ovály.

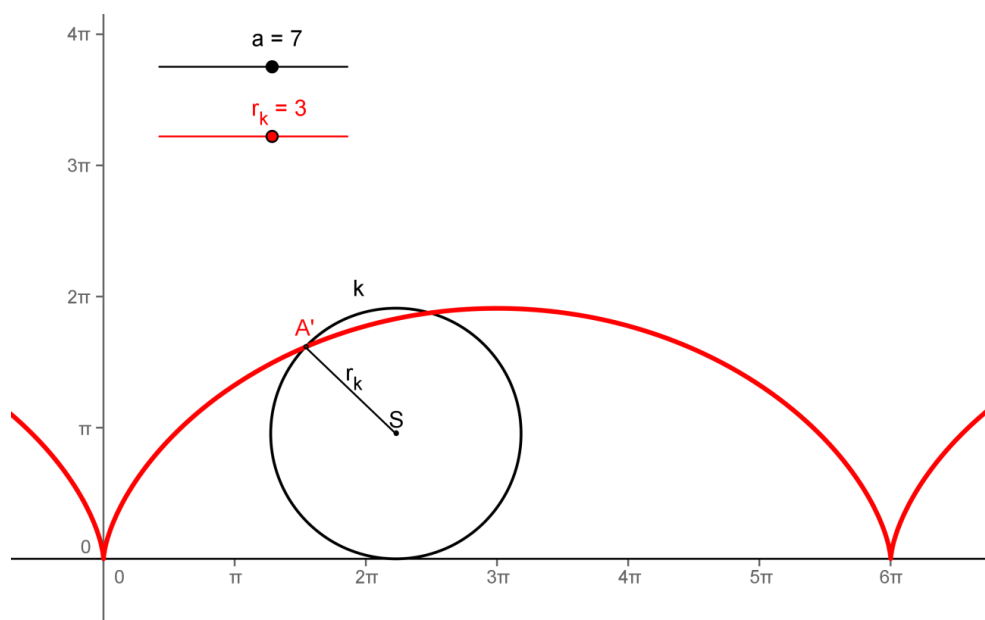
Je-li $k > d$, jedná se o Cassiniho ovály.



Obrázek 53: Cassiniho ovál – Bernoulliho lemniskáta

8 CYKLOIDA

Cykloida je dráha bodu kružnice při jejím valení po přímce.ⁱ (Obrázek 54)



Obrázek 54: Cykloida

8.1 Historie

Historie cykloidy je spjata s mnoho legendami. Jednou z nich je pokus hledání plochy *Galilea Galileem* (1564 – 1642). Přesnou plochu však našel až jeho žák *Evangelista Torricelli* (1608 – 1647) a také matematici *Pierre de Fermat* (1601 – 1665), *Gilles Personne de Roberval* (1602 – 1675) a *René Descartes* (1596 – 1650).

Křivka byla ale studována již roku 1501 *Charlesem de Bovellesem* (1475 – 1566) a také *Marinem Mersennem* (1588 – 1648). Název cykloida pravděpodobně poprvé použil *Galileo Galilei* z řeckého názvu „kuklos“ znamenající kruh, kolo nebo také cyklus.

ⁱ <http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/CYKLOIDY/>

Délku jednoho oblouku cykloidy našli *Gilles Personne de Roberval* a *Christopher Wren* (1632 - 1723). V roce 1658 nabídl *Blaise Pascal* (1623 – 1662) cenu pro řešení řady problémů spojených s „*La Roulette*“ (z francouzského pojmenování cykloidy „*roulette de Pascal*“).

Izochronní a tautochronní vlastnosti této křivky objevil dánský matematik a přírodovědec *Christiaan Huygens*. V roce 1696 *Johann Bernoulli* (1667 – 1748) představil v časopise *Acta Eruditorum* křivku *brachistochronu*, která je částí cykloidy.

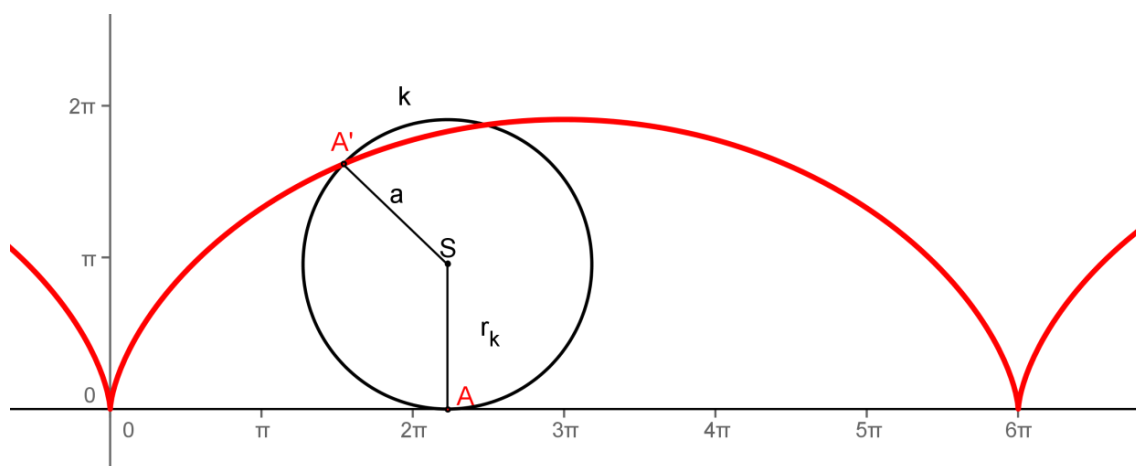
První kyvadlové hodiny, vynalezené *Huygensem*, opisovali cykloidní oblouk. Již také v 17. století navrhl *Girard Desargues* (1521 – 1661) cykloidní zuby na ozubených kolech.

8.2 Rovnice cykloidy

Cykloida (Obrázek 55) je nealgebraická křivka, která lze popsat jen pomocí transcendentní funkce, kterou můžeme vyjádřit těmito rovnicemi:

parametrické vyjádření:

$$c : \begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \quad a > 0$$



Obrázek 55: Cykloida

8.3 Základní geometrické vlastnosti:

Plocha jednoho oblouku: $3\pi a^2$

Délka jednoho oblouku: $8a$

8.4 Plocha jednoho oblouku cykloidyⁱ

Vzorec pro výpočet plochy zadané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$,

$$y = \psi(t), \text{ pro } t \in \langle \alpha, \beta \rangle \text{ je } \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt \right|.$$

Parametrické rovnice cykloidy jsou:

$$\begin{aligned} c : x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \quad a > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Derivace x souřadnice je

$$x' = a(1 - \cos t).$$

Nyní spočítáme obsah jednoho oblouku cykloidy pro $t \in (0, 2\pi)$.

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt \right| = \left| a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \right| = \\ &= \left| a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \right| = \end{aligned}$$

Využijeme vzorce: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$\begin{aligned} &= \left| a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \right| = \left| a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} dt \right| = \\ &= \left| a^2 \int_0^{2\pi} -2\cos t + \frac{3}{2} + \frac{\cos 2t}{2} dt \right| = \left| a^2 \left(\int_0^{2\pi} -2\cos t dt + \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2t dt \right) \right| = \\ &= \left| a^2 \left[-2\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{2\pi} \right| = |a^2(0 + 3\pi + 0)| = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

ⁱ <http://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i21.html>

8.5 Délka jednoho oblouku

Nyní si odvodíme výpočet délky jednoho oblouku cykloidy. Vzorec pro výpočet

délky křivky zadané parametricky je $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$.ⁱ

Pro dosazení do vzorce budeme potřebovat derivaci parametrických rovnic.

$$\begin{aligned} a : x &= a(t - \sin t) & x' &= a(1 - \cos t) \\ y &= a(1 - \cos t) & y' &= a \sin t \end{aligned}$$

Parametr je $t \in (0, 2\pi)$.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{\sqrt{2}} dt = \end{aligned}$$

Využijeme rovnosti: $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

$$2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left[-2 \cos \frac{1}{2} t \right]_0^{2\pi} = 2a(2 + 2) = 8a$$

ⁱ homel.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf

Závěr

V této diplomové práci jsem se snažila vytvořit přehled vlastností vybraných rovinných křivek. Některé vlastnosti jsem odvozovala a dokazovala, na jiné jsem pouze poukazovala a popisovala je. Pro nadšené čtenáře se tímto naskytuje příležitost k hlubšímu studiu.

Křivky vyššího řádu než tři se běžně na školách nevyučují, proto si myslím, že řešení některých vlastností pomocí programů GeoGebra či CoCoA svou názorností mnohé objasní a tím povzbudí ve studiu.

Tato práce mě obohatila o nové poznatky a ujistila v tom, že čím více úhlů pohledu (nejen na křivky) poznám, tím více budu moci žasnout nad rozmanitostí, jednoduchostí a krásou.

Seznam použité literatury a ostatních zdrojů

Literatura

- [1] LOCKWOOD, E.H. Book of curves. Reprint. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0521044448.
- [2] SHIKIN, E. Handbook and atlas of curves. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 1995, xiv, 545 p. ISBN 0849389631.

Internetové zdroje

- [1] FERRÉOL, Robert a Jacques MANDONNET MANDONNET. ENCYCLOPÉDIE DES FORMES MATHÉMATIQUES REMARQUABLES. STROPHOÏDE DROITE (ou STROPHOÏDE DE NEWTON) [online]. 2011 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/strophoiddroite/strophoiddroite.shtml>
- [2] FERRÉOL, Robert a Jacques MANDONNET MANDONNET. ENCYCLOPÉDIE DES FORMES MATHÉMATIQUES REMARQUABLES. ASTROÏDE [online]. 2006 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/astroid/astroid.shtml>
- [3] FERRÉOL, Robert a Jacques MANDONNET MANDONNET. ENCYCLOPÉDIE DES FORMES MATHÉMATIQUES REMARQUABLES. DELTOÏDE [online]. 2010 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/deltoid/deltoid.shtml>
- [4] FERRÉOL, Robert a Jacques MANDONNET MANDONNET. ENCYCLOPÉDIE DES FORMES MATHÉMATIQUES REMARQUABLES. CARDIOÏDE [online]. 2012 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/cardioid/cardioid.shtml>
- [5] FERRÉOL, Robert a Jacques MANDONNET MANDONNET. ENCYCLOPÉDIE DES FORMES MATHÉMATIQUES REMARQUABLES. NÉPHROÏDE [online]. 2012 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/nephroid/nephroid.shtml>

- [6] FERRÉOL, Robert a Jacques MANDONNET MANDONNET. ENCYCLOPÉDIE DES FORMES MATHÉMATIQUES REMARQUABLES. LEMNISCATE DE BERNOULLI [online]. 2011 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/lemniscate/lemniscate.shtml>
- [7] FERRÉOL, Robert a Jacques MANDONNET MANDONNET. ENCYCLOPÉDIE DES FORMES MATHÉMATIQUES REMARQUABLES. CYCLOÏDE [online]. 2012 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/cycloid/cycloid.shtml>
- [8] WASSENAAR, Jan. Mathematical curves [online]. 2013 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.2dcurves.com>
- [9] BOGOMOLNY, Alexander. Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. Copernicus' Theorem [online]. 2015 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Copernicus.shtml>
- [10] JAREŠOVÁ, Miroslava a Ivo VOLF. MATEMATIKA KŘÍVEK [online]. Rok vydání není uveden [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>
- [11] SCHLESINGEROVÁ, Eva. Diplomová práce Web k tématu: Integrální počet. Geometrické aplikace určitého integrálu [online]. 2009 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i21.html>
- [12] NIKODÝM, Marek. Seznam vzorců pro výpočet obsahů, délek, objemů a povrchů pomocí integrálu. Integrál Vrozcce [online]. Rok neuveden [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: homel.vsb.cz/~nik01/IntegralVzorce.pdf
- [13] VYDAVATELSTVÍ NOVÁ MÉDIA, S. R. O. Pravoúhlá úpatnice [online]. 2014 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.matematika.cz/content/rovinne-krivky/?dir=upatnice>
- [14] VRBA, Antonín. CYKLOIDY. Pravoúhlá úpatnice [online]. 2006 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/CYKLOIDY/>

- [15] Příspěvatelé Wikipedie, Polární soustava souřadnic [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2015, Datum poslední revize 27. 02. 2015, 21:37 UTC, [citováno 26. 06. 2015]
<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Pol%C3%A1rn%C3%AD_soustava_sou%C5%99adnic&oldid=12304293>
- [16] Příspěvatelé Wikipedie, Goniometrická funkce [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2015, Datum poslední revize 28. 02. 2015, 11:08 UTC, [citováno 26. 06. 2015]
<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Goniometrick%C3%A1_funkce&oldid=12306849>
- [17] O'CONNOR, John a Edmund F. ROBERTSON. MacTutor historie archivu matematiky. Famous Curves Index [online]. 2015 [cit. 2015-06-26]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Curves/Curves.html>