Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Komplexní čísla

Diplomová práce

Autor:	Bc. Martin Budina
Studijní program:	N0114A170005 Učitelství matematiky a chemie pro střední školy
Vedoucí práce :	RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.
Oponent:	doc. RNDr. Jaroslav Seibert, Csc.

Hradec Králové 2024

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání diplomové práce

Autor: **Bc. Martin Budina**

Studium: S22MA004NP

Studijní program: N0114A170005 Učitelství matematiky a chemie pro střední školy

Studijní obor:

Název diplomové práce: **Komplexní čísla**

Název diplomové práce AJ: Complex Numbers

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Cílem práce je popsat historický vývoj komplexních čísel, konstrukci tělesa komplexních čísel a vytvořit sbírku příkladů.

Blažek, J. a kol.: Algebra a teoretická aritmetika. Praha, 1983.

Ráb, M.: Komplexní čísla v elementární matematice. Brno MU, 1996.

Kořínek, V. Základy algebry. Praha, 1956.

Zadávající pracoviště: Katedra matematiky,
Přírodovědecká fakulta

Vedoucí práce: RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Oponent: doc. RNDr. Jaroslav Seibert, CSc.

Datum zadání závěrečné práce: 8.11.2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny prameny, ze kterých jsem vycházel.

V Hradci Králové Bc. Martin Budina

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval *RNDr. Jitce Kühnové, Ph.D.* nejenom za její ochotu, věnovaný čas a trpělivost, ale také za přínosné rady a velmi cenné připomínky, které mi pomohly k vypracování této práce.

Anotace

BUDINA, Martin. *Komplexní čísla*. Hradec Králové, 2024. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce
RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Cílem práce je popsat historický vývoj komplexních čísel, konstrukci tělesa komplexních čísel a vytvořit sbírku příkladů.

Klíčová slova

Komplexní číslo, těleso, algebraický tvar, Gaussova rovina, imaginární jednotka

Annotation

BUDINA, Martin. *Complex numbers*. Hradec Králové, 2024. Diploma Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Diploma Thesis Supervisor RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

The aim of this thesis is to describe the historical development of complex numbers, the construction of the solid of complex numbers and to create a collection of examples.

Keywords

Complex number, body, algebraic form, Gauss plane, imaginary unit

Obsah

Úvod

Diplomová práce se zabývá především vytvořením sbírky příkladů z komplexních čísel. V první kapitole je popsána historie komplexních čísel. Druhá kapitola se věnuje konstrukci tělesa komplexních čísel včetně uvedení jejich základních vlastností. Také je stručně charakterizován geometrický model tělesa komplexních čísel a geometricky interpretovány operace s komplexními čísly. Diplomová práce se na konci této kapitoly věnuje také binomickým, kvadratickým a kubickým rovnicím a snaží se tak nastínit důvody, proč je výhodné konstruovat obor komplexních čísel. Třetí kapitolu zaujímá sbírka řešených příkladů. Samotné příklady ve sbírce jsou čerpány z uvedené literatury, přičemž bylo převzato zadání i řešení (odkaz na literaturu je uveden na konci řešení), nebo pouze zadání (odkaz na literaturu je uveden na konci zadání). U zbylých příkladů je zadání i řešení autorské. Poslední část diplomové práce obsahuje sbírku neřešených příkladů s výsledky.

Kapitola 1

Historie komplexních čísel

V této části diplomové práce si představíme stručný historický vývoj komplexních čísel. V této kapitole bylo čerpáno z publikací [1], [3], [13].

V době, kdy matematici začínali pracovat s komplexními čísly, tak v nich někteří viděli něco, "co není z tohoto světa". Tehdy také vznikl název "imaginární číslo", který naznačoval, že se jedná o čísla pomyslná, zdánlivá. Dnes imaginární čísla považujeme za body roviny, které leží mimo přímku zobrazující čísla reálná, a nic tajemného a neskutečného v nich nevidíme, ani nehledáme. V matematice samotná komplexní čísla umožnila nejenom vznik nových odvětví, ale přispěla i k pochopení souvislostí mezi partiemi zdánlivě nijak nesouvisejícími.

Prvním Evropanem, který stál u zrodu komplexních čísel byl **Leonardo da Pisa** (1170-1250) známý dnes jako **Fibonacci**. Tvrdil, že kubickou rovnici nelze řešit algebraicky, ale pouze geometricky. Dokázal však, že například rovnici $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ nelze řešit pouze pomocí pravítka a kružítka. Ke konci 14. století bylo známo, že kubickou rovnici $x^3+ax^2+bx+c = 0$ lze redukovat na jednodušší formu $x^3+px+q = 0$ a jsou-li koeficienty a hodnota neznámé kladná čísla, lze rozlišit tři základní typy kubické rovnice:

$$(1)\, x^3 + px = q$$

$$(2)\, x^3 = px + q$$

$$(3)\, x^3 + q = px.$$

Okruh hledání vzorce pro řešení kubických rovnic se zúžil pouze na tyto tři typy kubických rovnic.

Historie komplexních čísel dále pokračovala v 15. století v Itálii opět v souvislosti s hledáním kořenů kubických rovnic. Jako první objevil řešení těchto rovnic italský matematik

Scipio dal Ferro a **Niccolo Fontana**, který prozradil řešení těchto rovnic lékaři **Gerolamu Cardanovi** (1501-1576). Hlavním motivem pro zkoumání komplexních čísel byly odmocniny ze záporných čísel. Tato čísla, budoucí komplexní čísla, se objevují i u kvadratických rovnic, jak si správně Cardano všiml. Komplexní čísla se vůbec poprvé objevila v jeho knize *Ars Magna* (1545) v úloze, která vedla na kvadratickou rovnici.

$$x(10-x) = 40.$$

Cardano dospěl k řešení $5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$, číslo $\sqrt{-15}$ nazýval číslem formálním (*quantitas sophistica*). Cardano v této knize publikoval metodu řešení kubických rovnic včetně vzorců pro řešení těchto rovnic a dále v něm shrnul poznatky o řešení rovnic prvního až čtvrtého stupně, které objevil jeho žák **Lodovicco Ferrari**. U kubických rovnic uvedl vzorce dnes známé jako *Cardanovy*. Jejich nevýhodou je skutečnost, že některé reálné kořeny vyjadřují pomocí čísel imaginárních, které nelze žádnými algebraickými úpravami převést na čísla reálná. Tento problém se označuje jako *casus irreducibilis* a je dalším důležitým motivem pro studium komplexních čísel. Jedná se o případ, kdy má kubická rovnice tři reálné kořeny a kdy se v Cardanově vzorci vyskytují odmocniny ze záporného čísla.

Italský matematik **Rafael Bombelli** (1526-1572) dospěl ve své knize při počítání s komplexními čísly podstatně dále než Gerolamo Cardano. Ve své knize uvedl výpočet odmocnin pomocí řetězových zlomků, pravidla pro počítání se zápornými čísly a pro počítání s odmocninami ze záporných čísel, která označoval za čísla neužitečná. Dále usoudil, že odmocněním záporného čísla nedostaneme ani kladné, ani záporné číslo. Napsal tedy před odmocninu z absolutní hodnoty tohoto čísla *piú di meno*, když ji přičítal, resp. *meno di meno*, když ji odčítal (jednalo se o slovní označení pro pozdější symbol i, resp. $-i$). Ve své práci rozlišil čísla $+\sqrt{-1}$ a $-\sqrt{-1}$ a pro počítání s takovýmito čísly formuloval osm pravidel, v nichž se pracuje s komplexní jednotkou:

$$\begin{array}{cccc} (+1)(+i) = +i & (-1)(+i) = -i & (+1)(-i) = -i & (-1)(-i) = +i \\ (+i)(+i) = -1 & (+i)(-i) = +1 & (-i)(+i) = +1 & (-i)(-i) = -1 \end{array}$$

Bombelli mimo jiné zkoumal také Cardanovy vzorce. Velkou pozornost věnoval situaci *casus irreducibilis*, kdy se pokoušel počítat třetí odmocniny komplexních čísel, které v Cardanových vzorcích figurují. Zjistil přitom, že třetí odmocniny komplexně sdružených čísel jsou opět komplexně sdružená čísla.

V 17. století pracovalo s komplexními čísly stále více matematiků. Francouzský matematik **René Descartes** je uplatnil zejména při rozšiřování číselných oborů. Sám často pracoval se zápornými čísly a s komplexními čísly, která nazýval *imaginaire*. Odmítl uznat tato čísla jako plnohodnotné řešení rovnic a považoval je za neřešitelný problém. Prvním, kdo se více zabýval pochopením komplexních čísel, byl anglický matematik **John Wallis** (1616-1703), který interpretoval kladná a záporná čísla pomocí pohybů na opačné strany. Ovšem uspořádání číselné osy neměl zcela jasnou představu. Jako první naznačil geometrickou interpretaci imaginárních čísel. Odmocninu ze záporného čísla uvažoval ve tvaru $\sqrt{-b \cdot c}$, kde $-b$, c jsou čísla kladná, která reprezentoval opačně orientovanými úsečkami se společným počátečním bodem P. Podle *Euklidovy věty o výšce* lze veličinu $\sqrt{-b \cdot c}$ znázornit úsečkou s počátečním bodem P, která je kolmá k přímce, na níž leží úsečky $-b$, c. Tato interpretace komplexních čísel, která byla pouze naznačena, neměla veliký ohlas. S komplexními čísly se rovněž setkali **Isaac Newton** (1643-1727), **Johann Bernoulli** (1667-1748), či **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), ačkoliv s nimi pracovali, nechápali podstatu komplexních čísel ani jejich význam. Leibniz o nich dokonce tvrdil, že jsou "netvorem světa". Jinak tomu bylo u výzkumu francouzského vědce **Abrahama de Moivre** (1667-1754). V roce 1722 zveřejnil formuli, dnes známou jako *Moivreův vzorec*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Číslo n užité v této formuli mohlo být podle Moivrea pouze kladné celé.

V 18. století pracoval s komplexními čísly zejména **Leonhard Euler** (1707-1783), který použil prvního písmene slova *imaginaire* pro označení komplexní jednotky $i = \sqrt{-1}$. Tento matematik se kromě Moivreovy formule zabýval také problémy s algoritmy. Euler svými výpočty odvodil vztah mezi exponenciálou, logaritmem a goniometrickými funkcemi. Stanovil, že funkce

$$y = 2\cos x \qquad \text{a} \qquad y = e^{ix} + e^{-ix}$$

náleží téže diferenciální rovnici a musí si být rovny. Toto pozorování zveřejnil ve formě vzorců:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$$

Je téměř jisté, že již v padesátých letech 18. století chápal komplexní číslo $x + yi$ jako bod roviny s kartézskými souřadnicemi x, y. Nikde to však výslovně nenapsal. Komplexní čísla vyjadřoval i v goniometrickém tvaru

$$x + yi = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

a chápal je jako body roviny s kartézskými souřadnicemi x, y. Kořeny rovnice $z^n = 1$ reprezentoval jako jako vrcholy pravidelného n-úhelníka. Uvažoval rozklad

$$1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

a vztah

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Eulerovy práce vedly k rozvoji teorie funkcí komplexní proměnné. Koncem 18. století se komplexní čísla užívala v matematické analýze např. při řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Ke geometrické interpretaci komplexních čísel jako bodů roviny dospěl na přelomu 18. a 19. století **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855). Geometrických představ o komplexních čísel využil ve své disertační práci při důkazu *základní věty algebry*. Pod výrazným Gaussovým vlivem postupně došlo k všeobecnému rozšíření představy o komplexních číslech jako bodech roviny, proto se později ujal termín *Gaussova rovina*.

Aritmetickou teorii komplexních čísel vytvořil počátkem třicátých let 19. století **William Rowan Hamilton**. V první části své práce se věnoval problematice čísel kladných a záporných, ve druhé části předložil novou teorii komplexních čísel. Komplexní čísla chápal jako uspořádané dvojice reálných čísel, jejichž sčítání a násobení definoval vztahy

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Znal také vzorec

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2,$$

kterému říkal *zákon modulů*. Modul komplexního čísla $\alpha = (a_1, a_2)$ definoval vztahem $|\alpha| = a_1^2 + a_2^2$, zákon modulů má tedy tvar

$$|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|,$$

kde $\alpha = a_1 + b_1 i$ a $|\alpha| = a^2 + b^2$.

Pro matematické vyjádření fyzikálních dějů, které se vyznačují harmonickým průběhem, je někdy výhodné užít komplexních čísel a početních výkonů s nimi k vyjádření příslušných vektorů. Poloha vektoru závisí na čase, je určena směrovým úhlem, který je argumentem komplexního čísla. Toto užití komplexních čísel je časté v elektrotechnice k vyjádření veličin střídavého proudu.

Geometrická interpretace komplexních čísel a způsob, jakým jsou komplexní čísla vytvořena z čísel reálných, inspirovaly některé matematiky jednak k pokusům o rozšiřování oboru komplexních čísel na větší číselný obor, jednak k obecnějším úvahám o strukturách vícesložkových čísel. Později se zrodila tzv. teorie *hyperkomplexních čísel* a historie *kvaternionů*. Chceme-li zkoumat historii kvaternionů, je třeba se vrátit sto let před Hamiltona, kterému je objev kvaternionů připisován. Základní myšlenku kvaternionového násobení totiž znal už Euler, který popsal skládání čtveřic reálných čísel odpovídající násobení kvaternionů. Hamilton publikoval roku 1837 práci, v níž byla komplexní čísla $a + bi$ reprezentována dvojicemi (a, b) reálných čísel. V následujících letech se opakovaně vracel k problému nalézt rozumný vzorec pro násobení trojic reálných čísel (a, b, c), resp. trojsložkových čísel $a + bi + cj$. Zachoval přirozenou definici pro jejich sčítání, definici modulu $|a + bi + cj| = a^2 + b^2 + c^2$ a velké úsilí věnoval hledání vhodného vzorce pro násobení těchto trojsložkových čísel, které by bylo distributivní vzhledem ke sčítání a navíc splňovalo zákon modulů. Stále mu však vycházely struktury, které obsahovaly netriviální dělitele nuly, tj. nenulové prvky, jejichž součin je roven nule. V takovéto struktuře nelze bez omezení dělit. Hamilton se tedy pokoušel vytvořit čísla z bodů prostoru podobným způsobem, jakým jsou z bodů roviny konstruována čísla komplexní. V momentě, kdy řešil problém pro čtveřice $a + bi + cj + dk$, současně ho napadl vzorec pro násobení čtyř základních jednotek $1, i, j, k$:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Z těchto vztahů už snadno doplnil tabulku pro násobení základních jednotek $1, i, j, k$:

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Hamilton tak roku 1843 sestrojil obor čtyřsložkových hyperkomplexních čísel $a + bi + cj + dk$, který nazval kvaterniony. S výjimkou komutativity má násobení kvaternionů všechny rozumné vlastnosti: je asociativní, oboustranně distributivní vzhledem ke sčítání, existuje jednotkový prvek a ke každému nenulovému kvaternionu $\alpha = a + bi + cj + dk$ existuje *inverzní* kvaternion, který má tvar

$$\alpha^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

tj. každým nenulovým kvaternionem je možno oboustranně dělit. Kvaterniony tedy tvoří nekomutativní těleso, které rozšiřuje těleso čísel komplexních. Kromě komutativity násobení v něm platí všechny aritmetické zákony, které známe z klasických číselných oborů. Kvaternion $\overline{\alpha} = a - bi - cj - dk$ se nazývá *sdružený* ke kvaternionu α, výraz $|\alpha| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ je tzv. *modul* kvaternionu α. Pro libovolné kvaterniony α, β je

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\beta} \cdot \overline{\alpha},$$

$$\overline{\alpha} \cdot \alpha = \alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha|$$

a dále

$$|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|.$$

I pro kvaterniony tedy platí zákon modulů.
Hamilton se domníval, že kvaterniony jsou systémem hyperkomplexních čísel, který je nejbližší číslům komplexním. Očekával od nich alespoň stejně důležité výsledky jako od komplexních čísel, ty se však nenaplnily. Význam kvaternionů se významu komplexních čísel nevyrovnal, i když byly nalezeny vzorce vyjadřující pomocí kvaternionů řadu jevů v geometrii a ve fyzice.

Pomocí kvaternionů však Hamilton dospěl k základům vektorového počtu. Kvaternion $\alpha = a + bi + cj + dk$ rozdělil na tzv. *skalární část* a, kterou nazval krátce *skalár* a tzv. *vektorovou část*, kterou nazval *vektor*; tu lze chápat jako vektor v trojrozměrném prostoru. Při sčítání resp. odčítání kvaternionů se sčítají resp. odčítají nezávisle na sobě skalární a vektorové části. Při násobení dvou skalárních kvaternionů dostaneme opět skalár, při násobení skalárního a vektorového kvaternionu získáme skalární násobek vektoru. Hamilton úspěšně aplikoval svůj vektorový počet ve fyzice. Vektorovými rovnicemi vyjádřil podmínky rovnováhy soustavy sil působících v daných bodech; pomocí vektorů popsal jak polohu uvažovaných bodů, tak velikost a směr působících sil. Zavedl a vyšetřoval tzv. *vektorové pole*, což je zobrazení, které každému bodu prostoru přiřazuje určitý vektor. Dále zavedl a pojmenoval diferenciální operátor *nabla* a použil jej k definici gradientu a skalárního pole, který reprezentuje velikost a směr největšího přírůstku funkce. Brzy se ukázalo, že pomocí kvaternionů lze efektivně popsat rotace trojrozměrného a čtyřrozměrného prostoru. Pomocí takového popisu rotací se dá ukázat, že složení dvou rotací kolem os procházejících počátkem, je opět rotace kolem osy procházející počátkem.

Kapitola 2

Zavedení a základní vlastnosti komplexních čísel

Cílem této kapitoly je zkoumat těleso komplexních čísel, seznámit s možnými způsoby zápisu komplexních čísel a prováděním operací s nimi. Zavedení komplexních čísel v matematice nám umožňuje řešit problémy, které jsou v oboru reálných čísel neřešitelné. Například v oboru reálných čísel nelze určit kořeny kvadratické rovnice se záporným diskriminantem, ani kořeny některých algebraických rovnic vyšších řádů. Příkladem takové úlohy je například hledání řešení rovnice $x^n - a = 0$ pro n sudá a $a \in \mathbb{R}, a < 0$. V této kapitole bylo čerpáno zejména z publikací [2], [5], [10], [15], [18].

Rovnice

$$x^n - a = 0,$$

kde a je libovolné nenulové reálné číslo, n je libovolné kladné přirozené číslo, se nazývá *binomická*.

Víme, že tato rovnice má pro každé nezáporné číslo a a kladné přirozené číslo n v množině reálných čísel jediné nezáporné řešení.

Snadno se ukáže, že daná rovnice pro reálná čísla $a < 0$ a kladná sudá přirozená čísla n v tělese reálných čísel řešení nemá.

Opravdu:

Předpokládejme, že existuje takové reálné číslo b, že je řešením rovnice $x^n - a = 0$, tj. že platí $b^n - a = 0$. Protože n je kladné sudé přirozené číslo, můžeme psát $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$. Položíme-li $c = b^k$, pak $c \neq 0$ (protože $a \neq 0$) a platí

$$a = b^n = b^{2k} = c^2 \wedge c^2 > 0.$$

To je ovšem spor s předpokladem, že $a < 0$.

Nejjednodušší taková rovnice, která nemá reálný kořen, je rovnice

$$x^2 + 1 = 0.$$

Proto se pojem čísla rozšíří tím, že se těleso reálných čísel vnoří do nového tělesa, ve kterém už rovnice

$$x^n - a = 0$$

bude mít řešení pro libovolné $n \in Z^+,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Položme

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dále definujme:

$$(\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}) \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \wedge (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Věta 2.1. *Struktura* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *je komutativní těleso.*

Důkaz.

1. $(\mathbb{C}, +)$ je abelovská grupa:

   - Nechť $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ jsou libovolné prvky. Pak $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tj. $a+c, b+d \in \mathbb{R}$, a tedy $(a + c, b + d) = (a, b) + (c, d) \in \mathbb{C}$ a množina $\mathbb{C}$ je uzavřená vzhledem k operaci „+“.
   - Nechť $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$ jsou libovolné prvky. Pak

     $$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f) =$$
     $$= (a+(c+e), b+(d+f)) = (a, b)+[(c+e)+(d+f)] = (a, b)+[(c, d)+(e, f)],$$

     tedy struktura $(\mathbb{C}, +)$ je asociativní.
   - To, že je struktura $(\mathbb{C}, +)$ komutativní bychom ukázali analogicky.
   - Nechť $(a, b) \in \mathbb{C}$ je libovolný prvek, $(0, 0) \in \mathbb{C}$. Pak

     $$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b),$$

     což znamená, že $(0, 0)$ je nulový prvek $(\mathbb{C}, +)$.

- Nechť $(a, b) \in \mathbb{C}$ je libovolný prvek. Pak také $(-a, -b) \in \mathbb{C}$ a platí

$$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0),$$

 což znamená, že $(-a, -b) = -(a, b)$ je opačný prvek k prvku (a, b).

2. $(\mathbb{C}, \cdot)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem:

- Nechť $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ jsou libovolné prvky. Pak $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tj. $ac, bd, ad, bc \in \mathbb{R}$, a tedy také $ac - bd, ad + bc \in \mathbb{R}$, neboli $(ac - bd, ad + bc) = (a, b) \cdot (c, d) \in \mathbb{C}$ a množina $\mathbb{C}$ je uzavřená vzhledem k operaci „$\cdot$“.
- Nechť $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$ jsou libovolné prvky. Pak

$$\begin{aligned}
[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) = \\
&= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) = \\
&= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) = \\
&= (a(ce - df) - b(de + cf), a(cf + de) + b(ce - df)) = \\
&= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)],
\end{aligned}$$

 tedy struktura $(\mathbb{C}, \cdot)$ je asociativní.
- To, že je struktura $(\mathbb{C}, \cdot)$ komutativní bychom ukázali analogicky.
- Nechť $(a, b) \in \mathbb{C}$ je libovolný prvek, $(1, 0) \in \mathbb{C}$. Pak

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a - 0, 0 + b) = (a, b),$$

 což znamená, že $(1, 0)$ je jednotkový prvek v $(\mathbb{C}, \cdot)$.

3. Struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je $(+, \cdot)$- distributivní:

 Nechť $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$ jsou libovolné prvky. Pak

$$\begin{aligned}
[(a, b) + (c, d)] \cdot (e, f) &= (a + c, b + d) \cdot (e, f) = \\
&= ((a + c)e - (b + d)f, (a + c)f + (b + d)e) = \\
&= (ae + ce - bf - df, af + cf + de + be) = \\
&= (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) = (a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f),
\end{aligned}$$

 což znamená, že struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je $(+, \cdot)$-distributivní.

 Dokázali jsme tak, že struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativní okruh s jednotkovým prvkem.

4. Zbývá ukázat, že ke každému nenulovému prvku z $\mathbb{C}$ existuje vzhledem k operaci „$\cdot$“ v množině $\mathbb{C}$ prvek inverzní:

   Nechť $(a,b) \in \mathbb{C}$ je libovolný prvek takový, že $(a,b) \neq (0,0)$, tj. $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

   Hledáme prvek $(x,y) \in \mathbb{C}$ takový, že

$$(a,b) \cdot (x,y) = (1,0).$$

   Pak

$$(ax - by, ay + bx) = (1,0), \text{ tj. } ax - by = 1 \wedge ay + bx = 0.$$

   Jestliže první rovnici vynásobíme $-b$ a druhou a a obě rovnice sečteme, dostaneme

$$y = \frac{-b}{a^2+b^2} \quad \wedge \quad a^2 + b^2 \neq 0\,(a \neq 0 \vee b \neq 0).$$

   Po dosazení y do druhé rovnice máme

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \wedge \quad a^2 + b^2 \neq 0\,(a \neq 0 \vee b \neq 0).$$

   Tedy ke každému prvku $(a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ existuje v $(\mathbb{C}, \cdot)$ prvek inverzní, tj.

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \in \mathbb{C}.$$

□

Věta 2.2. *Těleso reálných čísel lze izomorfně vnořit do tělesa* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Důkaz. Nechť

$$\mathbb{C}' = \{(a,b) \in \mathbb{C};\, b = 0\} = \{(x,0) \in \mathbb{C};\, x \in \mathbb{R}\},\ \mathbb{C}' \subseteq \mathbb{C}.$$

Definujeme na množině $\mathbb{C}'$ restrikce operací „+“ a „$\cdot$“ takto:

$$(\forall (x,0),(y,0) \in \mathbb{C}') \quad (x,0) + (y,0) = (x+y, 0) \quad \wedge \quad (x,0) \cdot (y,0) = (xy, 0).$$

Struktura $(\mathbb{C}', +, \cdot)$ je podstrukturou struktury $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
Opravdu:

- $\emptyset \neq \mathbb{C}' \subseteq \mathbb{C}$, protože například $(0,0) \in \mathbb{C}'$
- $(\forall (x,0),(y,0) \in \mathbb{C}') \quad (x,0) - (y,0) = (x-y, 0) \in \mathbb{C}'$

- $(\forall (x,0),(y,0) \in \mathbb{C}') \quad (y,0) \neq (0,0)$, tj. $y \neq 0$:
  $(x,0)\cdot(y,0)^{-1} = (x,0)\cdot\Big(\frac{1}{y},0\Big) = \Big(\frac{x}{y},0\Big) \in \mathbb{C}'$

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}'$ je zobrazení takové, že

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = (x,0).$$

Ukážeme, že f je izomorfismus $(\mathbb{R},+,\cdot)$ na $(\mathbb{C}',+,\cdot)$:

- Z definice je zřejmé, že zobrazení f je surjekce.
- f je prosté zobrazení (opravdu: nechť $x,y \in \mathbb{R}$ jsou libovolná taková čísla, že $f(x) = f(y)$, pak $(x,0) = (y,0)$, což ovšem znamená, že $x = y$).
- Nechť x,y jsou libovolná reálná čísla. Pak

$$f(x+y) = (x+y,0) = (x+y,0+0) = (x,0)+(y,0) = f(x)+f(y)$$

$$f(xy) = (xy,0) = (x,0)\cdot(y,0) = f(x)\cdot f(y).$$

Tedy $(\mathbb{R},+,\cdot) \cong (\mathbb{C}',+,\cdot)$, zároveň $(\mathbb{C}',+,\cdot) \subseteq (\mathbb{C},+,\cdot)$, to ovšem znamená, že $(\mathbb{R},+,\cdot)$ lze izomorfně vnořit do $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

$\square$

Poznámka. Protože zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}'$ je izomorfismus, můžeme ztotožnit vzory a obrazy, tj. můžeme psát

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x = (x,0).$$

Věta 2.3. *Rovnice $x^2+1=0$ je v tělese $(\mathbb{C},+,\cdot)$ řešitelná.*

Důkaz.
Nechť $x \in \mathbb{C}$, tj. $x = (a,b) \in \mathbb{C}$.
Podle výše uvedené Poznámky můžeme psát $1 = (1,0) \in \mathbb{C}, 0 = (0,0) \in \mathbb{C}$, tj. daná rovnice má tvar

$$(a,b)^2 + (1,0) = (0,0).$$

Protože $(\mathbb{C},+,\cdot)$ je těleso, máme:

$$(a,b)\cdot(a,b) = (-1,0), \text{ pak } (a^2-b^2, 2ab) = (-1,0), \text{ tedy } a^2-b^2 = -1 \wedge 2ab = 0.$$

Z $2ab = 0$ plyne, že $a = 0$ nebo $b = 0$.

- Kdyby bylo $b = 0$, pak by z $a^2 - b^2 = -1$ plynulo, že $a^2 = -1$. Zároveň ale $a \in \mathbb{R}$, což není možné.

- Tedy $a = 0$. To znamená, že $-b^2 = -1$, tj. $b^2 = 1$, a proto $b = 1$ nebo $b = -1$.

V tělese $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tedy existují dva prvky $(0, 1)$ a $(0, -1)$, které jsou řešením dané rovnice, což znamená, že rovnice $x^2 + 1 = 0$ je v $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ řešitelná a má právě dvě řešení.

$\square$

Definice 2.1. Těleso $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, které obsahuje jako svou část podtěleso izomorfní s tělesem reálných čísel a které obsahuje alespoň jeden kořen rovnice $x^2 + 1 = 0$, se nazývá **těleso komplexních čísel** a jeho prvky se nazývají **komplexní čísla**.
Komplexní číslo $(0, 1)$ se značí písmenem i a nazývá se **imaginární jednotka**.

Poznámka. Z definice sčítání a násobení v tělese $\mathbb{C}$ a z Poznámky za Větou 2.2 plyne:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = (a, 0) + (b, 0) \cdot i = a + bi$$

Definice 2.2. Vyjádření komplexního čísla $z = (a, b)$ ve tvaru $z = a + bi$ se nazývá **algebraický tvar** komplexního čísla z. Reálné číslo a se nazývá **reálná část** komplexního čísla z, píšeme $Re\, z$, reálné číslo b se nazývá **imaginární část** komplexního čísla z, píšeme $Im\, z$. Je-li $z = a + bi$ komplexní číslo takové, že $b \neq 0$, pak říkáme, že číslo z je **imaginární** komplexní číslo. Pokud je navíc $a = 0$, pak říkáme, že číslo z je **ryze imaginární** komplexní číslo.

Poznámka. Z předchozích úvah bezprostředně vyplývá několik důležitých poznatků:

1. Pro imaginární jednotku i platí

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

2. Z definice komplexních čísel jako dvojic reálných čísel a z definice rovnosti uspořádaných dvojic reálných čísel plyne, že *dvě komplexní čísla v algebraickém tvaru se rovnají, právě když se rovnají jejich reálné části a imaginární části*, tj.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

3. Z definice operací sčítání, odčítání a násobení komplexních čísel plyne, že sčítání a násobení dvou komplexních čísel v algebraickém tvaru se provádí stejným způsobem jako sčítání a násobení dvojčlenů (s využitím toho, že $i^2 = -1$), tj. platí

   - $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$
   - $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

4. Z důkazu Věty 2.1 víme, že k libovolnému nenulovému komplexnímu číslu $z = a + bi$ existuje číslo inverzní

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

   Tedy v $\mathbb{C}$ můžeme dělit nenulovým komplexním číslem

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi) \cdot (c + di)^{-1} = (a + bi) \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.$$

Příklad 2.1. Odvoďte pravidlo pro výpočet mocniny i^n, kde i je imaginární jednotka a $n \in \mathbb{Z}$.

Řešení:

$$i^2 = -1,$$

odtud plyne

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i,$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí:

$$i^n = i^{4k+q} = (i^4)^k \cdot i^q = i^q, \quad 0 \leq q < 4$$

Věta 2.4. *Těleso komplexních čísel* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *nelze uspořádat.*

Důkaz. V tělese komplexních čísel $\mathbb{C}$ neexistuje lineární uspořádání $\leq$ takové, aby platila základní početní pravidla, na které jsme zvyklí z množiny reálných čísel. Tím máme na mysli, aby pro každé $z, v, w \in \mathbb{C}$ platilo:

(1) $z < v \Rightarrow z + w < v + w$,

(2) $w > 0,\ z < v \Rightarrow z \cdot w < v \cdot w$.

Muselo by totiž potom platit, že $i > 0$ nebo $-i > 0$, což by znamenalo, že $i^2 > 0$ a také $i^4 > 0$. Dostali bychom pak $-1 > 0$ a současně $1 > 0$, což není možné.

□

Definice 2.3. Nechť je dáno komplexní číslo $z = a + bi$. Pak komplexní číslo $\overline{z} = a - bi$ se nazývá **číslo komplexně sdružené** k číslu z.

Věta 2.5. *Nechť z a v jsou libovolná komplexní čísla. Pak platí:*

(1) $\overline{z+v} = \overline{z} + \overline{v}$

(2) $\overline{z-v} = \overline{z} - \overline{v}$

(3) $\overline{zv} = \overline{z} \cdot \overline{v}$

(4) $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(5) $\overline{\left(\frac{z}{v}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{v}},\ \ v \neq 0$

(6) $z + \overline{z} = 2\, Re\, z$

(7) $z - \overline{z} = 2\, Im\, zi$

(8) $z\overline{z} = (Re\, z)^2 + (Im\, z)^2$

Důkaz. Nechť $z = a + bi,\ v = c + di \in \mathbb{C}$ jsou libovolné. Pak

(1) $\overline{z+v} = \overline{a+bi+c+di} = \overline{a+c+(b+d)i} = a+c-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z}+\overline{v}$

(2) $\overline{z-v} = \overline{a+bi-c-di} = \overline{a-c+(b-d)i} = a-c-(b-d)i = (a-bi)-(c-di) = \overline{z}-\overline{v}$

(3) $\overline{zv} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+cb)i} = (ac-bd)-(ad+cb)i$

$\overline{z} \cdot \overline{v} = \overline{(a+bi)} \cdot \overline{(c+di)} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd)+(-ad-cb)i =$

$= (ac-bd)-(ad+cb)i,$

tedy $\overline{zv} = \overline{z} \cdot \overline{v}$

(4) Opakovaným využitím tvrzení (3) pro $z = v$ a $n \in \mathbb{Z}^+$.

(5) Využijeme Poznámku 4. za Definicí 2.2

$$\overline{\left(\frac{z}{v}\right)} = \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{(a+bi)\cdot\frac{c-di}{c^2+d^2}} = \overline{\left(\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}\right)} = \\ = \overline{\left(\frac{ac+bd+(cb-ad)i}{c^2+d^2}\right)} = \frac{ac+bd-(cb-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{\overline{z}}{\overline{v}} = \frac{\overline{(a+bi)}}{\overline{(c+di)}} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{(a-bi)(c+di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+(ad-cb)i}{c^2+d^2} = \\ = \frac{ac+bd-(cb-ad)i}{c^2+d^2},$$

tedy $\overline{\left(\frac{z}{v}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{v}}$.

(6) $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\,Re\,z$

(7) $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2\,Im\,zi$

(8) $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = (Re\,z)^2 + (Im\,z)^2.$

□

Definice 2.4. Nechť $z = a + bi$ je libovolné komplexní číslo. Nezáporné reálné číslo

$$\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

se nazývá **absolutní hodnota** komplexního čísla z a značí se $|z|$.

Komplexní číslo s takové, že $|s| = 1$, se nazývá **komplexní jednotka**.

Věta 2.6. *Nechť z, v jsou libovolná komplexní čísla. Pak platí*

(1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$

(3) $|z + v| \leq |z| + |v|$

(4) $|z \cdot v| = |z| \cdot |v|$

(5) $\left|\dfrac{z}{v}\right| = \dfrac{|z|}{|v|}, \;\; v \neq 0$

(6) $|z - v| \geq |z| - |v|$

(7) $|z|^2 = z\overline{z}$

(8) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}, \;\; z \neq 0$

Důkaz.

(1) Tvrzení je zřejmé.

(2) Nechť $z = a + bi$, potom $-z = -a - bi$ a $\overline{z} = a - bi$. Dostáváme

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

(3) Toto tvrzení dokážeme sporem. Nechť $z = a + bi, v = c + di$. Dále předpokládejme, že $|z + v| > |z| + |v|$, pak

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} > \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Protože na obou stranách nerovnosti jsou nezáporná reálná čísla, můžeme obě strany umocnit. Dostáváme

$$\begin{aligned}(a+c)^2 + (b+d)^2 &> a^2 + b^2 + 2 \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} + c^2 + d^2\\ a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 &> a^2 + b^2 + 2 \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} + c^2 + d^2\\ 2 \cdot (ac + bd) &> 2 \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}\end{aligned}$$

Po vykrácení obou stran dvěma a umocnění máme

$$a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 > a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

Pak

$$0 > a^2c^2 - 2abcd - b^2d^2, \text{ tj.}$$

$$0 > (ac - bd)^2$$

a to je spor s tím, že pro $(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 \geq 0$.

(4) Nechť $z = a + bi,\ v = c + di$ jsou libovolná komplexní čísla. Pak je

$$\begin{aligned}|z \cdot v| = |(a+bi) \cdot (c+di)| = |(ac-bd) + (ad+bc)i| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} =\\ = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} = \sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} =\\ = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = |z| \cdot |v|.\end{aligned}$$

(5) Nechť $v \neq 0$. Pak s využitím tvrzení (4) máme

$$|z| = \left|z \cdot \frac{v}{v}\right| = \left|\frac{z}{v} \cdot v\right| = \left|\frac{z}{v}\right| \cdot |v|,$$

a tedy $\dfrac{|z|}{|v|} = \left|\dfrac{z}{v}\right|$.

(6) Důkaz analogický (3).

(7) a (8) jsou zřejmé.

□

Poznámka.

(1) $n-$tá mocnina komplexního čísla z pro $n \in \mathbb{N}$ se definuje stejně, jako $n-$tá mocnina reálného čísla:

- $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n}$, pro každé $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}^+$
- $z^0 = 1$, pro každé $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$
- $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, pro každé $z \in \mathbb{C}, z \neq 0, n \in \mathbb{Z}^+$

(2) Na základě komutativnosti a asociativnosti sčítání a násobení komplexních čísel lze ukázat, že pro mocniny komplexních čísel s celočíselnými exponenty platí stejná pravidla jako pro mocniny čísel reálných.

Pro libovolná komplexní čísla z, z_1, z_2 a všechna celá čísla n, m platí

$$z^m \cdot z^n = z^{m+n}, \qquad (z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n, \qquad (z^m)^n = z^{mn},$$

$$z_1^n : z_2^n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n, \; z_2 \neq 0 \qquad z^m : z^n = z^{m-n}, \; z \neq 0.$$

2.1 Geometrický model tělesa komplexních čísel

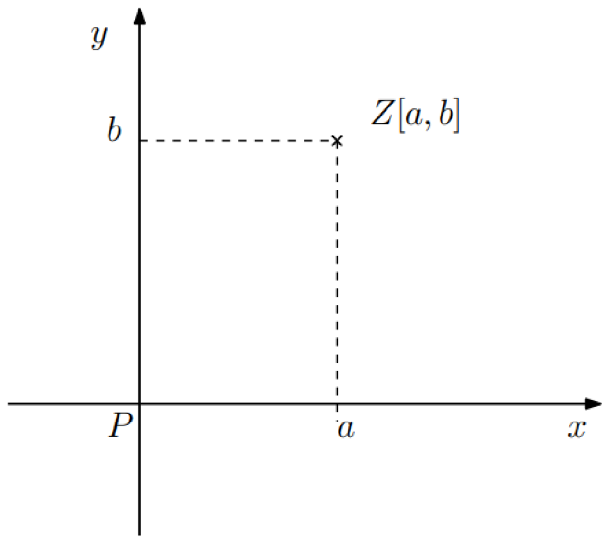
Na přelomu 18. a 19. století dospěl **Carl Friedrich Gauss** ke geometrickým představám o komplexních čísel jako bodech roviny, proto se později ujal termín *Gaussova rovina*.

Definice 2.5. Rovina komplexních čísel neboli **Gaussova rovina** je rovina, jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel.

(1) Gaussovu rovinu si představujeme takto:

- V dané rovině máme zvoleny dvě navzájem kolmé osy x, y reálných čísel.
- Osa x se nazývá **reálná osa**, osa y se nazývá **imaginární osa**. Jejich průsečík se nazývá **počátek** a označuje se jako bod P.

(2) Každé komplexní číslo $z = (a, b) = a + bi$ je znázorněno jako bod o souřadnicích $[a, b]$. Přitom každému komplexnímu číslu je uvedeným způsobem přiřazen právě jeden bod Gaussovy roviny a naopak, každému bodu Gaussovy roviny odpovídá jediné komplexní číslo.



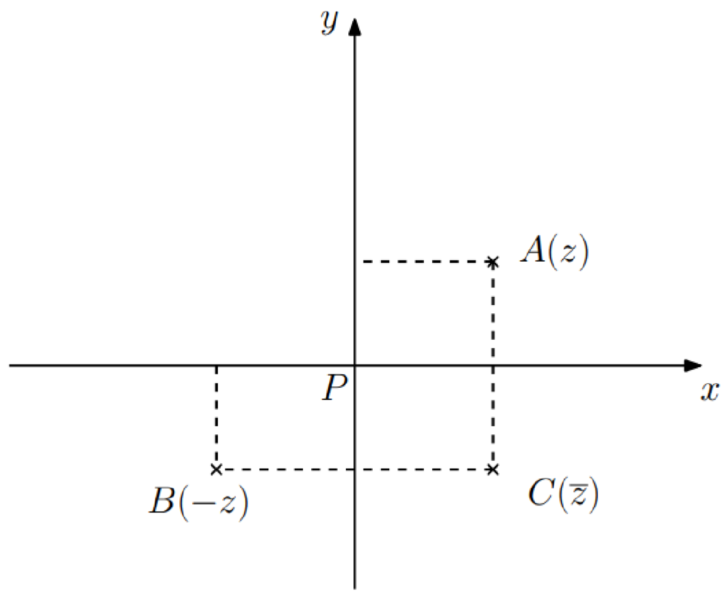
(3) Protože vzdálenost obrazu reálného čísla a od počátku je $|a|$ a vzdálenost obrazu ryze imaginárního čísla bi od počátku je $|b|$, tak z geometrického znázornění čísla $z = a+bi$ vyplývá na základě Pythagorovy věty, že vzdálenost obrazu čísla $z = a+bi$ od počátku je rovna

$$\sqrt{|a|^2 + |b|^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

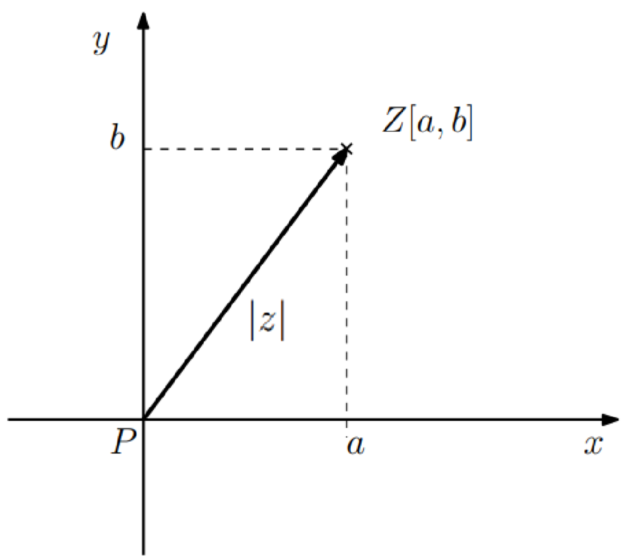
Absolutní hodnota komplexního čísla je tedy rovna vzdálenosti jeho obrazu v Gaussově rovině od počátku soustavy souřadnic.

(4) Nechť $z = a + bi$ je komplexní číslo, pak

- Obrazem opačného čísla $-z = -a - bi$ je bod B souměrně sdružený podle počátku s obrazem A čísla z
- Obrazem komplexně sdruženého čísla $\overline{z} = a - bi$ je bod C souměrně sdružený s obrazem A čísla z podle reálné osy.

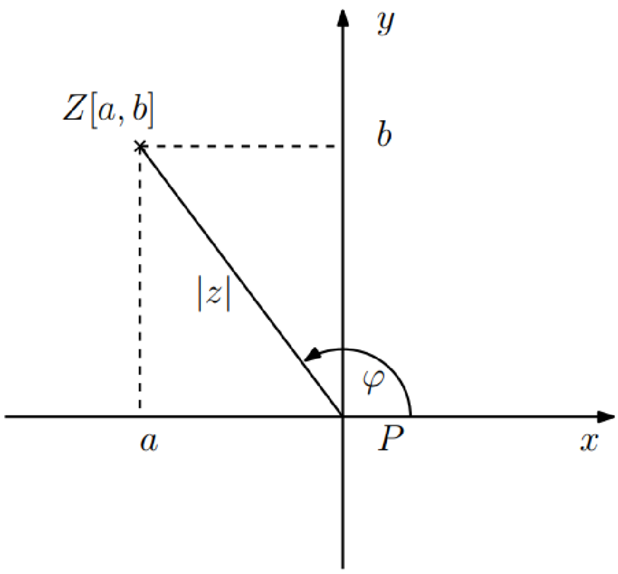


(5) Spojnice počátku P s obrazem Z komplexního čísla $z = a + bi$, $z \neq 0$, se nazývá **průvodič** nebo také **polohový vektor** (s počátkem v bodě P a s koncem v obrazu čísla z, tj. v bodě Z) a jeho délka je $|z|$.



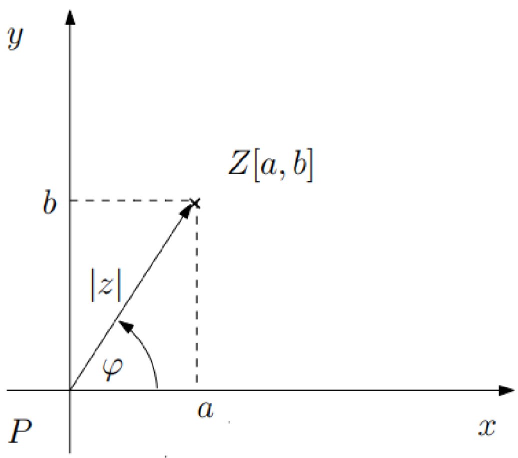
Komplexní čísla tedy můžeme znázorňovat nejenom jako body v Gaussově rovině, ale také jako vektory, kde počáteční bod je v počátku soustavy souřadnic P a koncový bod je obrazem komplexního čísla.

(6) Orientovaný úhel φ s počátečním ramenem v kladné části reálné poloosy a s koncovým ramenem v průvodiči se nazývá **argument** (neboli **amplituda**) komplexního čísla $z = a + bi$, píšeme Arg φ (Am φ).



- Nechť $z = a + bi$ je komplexní číslo. Bod $Z = [a, b] \neq P$ můžeme v Gaussově rovině jednoznačně určit pomocí jeho vzdálenosti $|z|$ od počátku P souřadné soustavy a velikosti orientovaného úhlu φ.
- Má-li komplexní číslo $z \neq 0$ argument φ, pak má též argument $\varphi + k \cdot 2\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Zřejmě tedy argument není definován jednoznačně. Omezíme-li se např. na interval $0 \leq \varphi < 2\pi$, pak ovšem argument jednoznačně určen je.

2.2 Goniometrický tvar komplexního čísla



Z obrázku jde vidět, že pro komplexní číslo $z = a + bi$ platí:

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{|z|}.$$

Tedy

$$b = |z|\sin\varphi, \qquad a = |z|\cos\varphi,$$

tj.

$$z = a + bi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde

$$\varphi = \operatorname{Arg} z$$

Definice 2.6. Zápis nenulového komplexního čísla z ve tvaru

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

se nazývá **goniometrický tvar** komplexního čísla z.

Poznámka.

1. Dvě komplexní čísla vyjádřená v goniometrickém tvaru se rovnají, právě když se rovnají jejich absolutní hodnoty a jejich argumenty se liší o $k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   Opravdu:

   Nechť

   $$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
   $$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

   Můžeme se omezit pouze na nenulová komplexní čísla.

   „⇒“ Je-li $z_1 = z_2$, musí se rovnat reálné a imaginární části obou komplexních čísel, tj. musí platit

   $$|z_1|\cos\varphi_1 = |z_2|\cos\varphi_2 \quad \text{a} \quad |z_1|\sin\varphi_1 = |z_2|\sin\varphi_2. \tag{2.1}$$

   Obě rovnice umocníme a sečteme. Dostaneme

   $$|z_1|^2(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) = |z_2|^2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)$$

   a to znamená $|z_1|^2 = |z_2|^2$. Protože absolutní hodnoty z čísel z_1, z_2 jsou nezáporná reálná čísla, tak $|z_1| = |z_2|$.

   Protože $z_1, z_2 \neq 0$, můžeme obě strany rovností (2.1) vydělit číslem $|z_1| = |z_2|$.

Dostaneme

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \quad \text{a} \quad \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2. \tag{2.2}$$

$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ platí, je-li $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ nebo $\varphi_1 = -\varphi_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Kdyby platil vztah $\varphi_1 = -\varphi_2 + 2k\pi$, dostaneme dosazením do rovnice (2.2) $\sin(-\varphi_2 + 2k\pi) = \sin\varphi_2$. Protože $\sin(-\varphi_2 + 2k\pi) = -\sin\varphi_2$, plyne odtud $-\sin\varphi_2 = \sin\varphi_2$. To však platí jen pro $\sin\varphi_2 = 0$, tj. $\varphi_2 = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Potom $\varphi_1 = -n\pi + 2k\pi = n\pi + 2\cdot(k-n)\pi = \varphi_2 + 2k_1\pi,\ k_1 \in \mathbb{Z}$.

Platí tedy i potom $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k_1\pi$.

„$\Leftarrow$" Jestliže $|z_1| = |z_2|$ a liší-li se argumenty čísel z_1, z_2 jen o celý násobek 2π, pak ovšem také $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ a $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$.

Pak $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = z_2$.

2. Komplexní číslo z je komplexní jednotkou, právě když $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

   Opravdu:

   „$\Rightarrow$" Je-li $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplexní jednotka, pak $|z| = 1$, a tedy $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

   „$\Leftarrow$" Jestliže $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, pak $|z| = \sqrt{\cos^2\varphi + i\sin^2\varphi} = 1$ a číslo z je komplexní jednotka.

3. Množina obrazů všech komplexních jednotek vyplní v Gaussově rovině jednotkovou kružnici se středem v počátku.

4. Pomocí zápisu komplexního čísla v goniometrickém tvaru se snadno vyjádří součin a podíl komplexních čísel. Pro daná nenulová komplexní čísla

$$z = |z|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad v = |v|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

   platí

   (1)
$$z\cdot v = |z|\cdot|v|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

   (2)
$$\frac{z}{v} = \frac{|z|}{|v|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Opravdu:

Využijeme známé goniometrické vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

Tedy

(1)

$$\begin{aligned} z \cdot v &= |z| \cdot |v| (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= |z| \cdot |v| \Big((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) \Big) = \\ &= |z| \cdot |v| \Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \Big) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{z}{v} &= \frac{|z|}{|v|} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} \cdot \frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} = \\ &= \frac{|z|}{|v|} \cdot \frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \\ &= \frac{|z|}{|v|} \cdot \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1} = \frac{|z|}{|v|} \Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \Big) \end{aligned}$$

2.3 Moivreova věta

Věta 2.7. ***Moivreova***

Nechť $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Pak pro každé celé číslo* n *platí*

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Důkaz.

1. Nechť nejprve $n \in \mathbb{Z}^+$. Tvrzení dokážeme *matematickou indukcí* vzhledem k n.
   (a) pro $n = 1$ tvrzení evidentně platí.
   (b) Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna přirozená čísla m, $2 \leq m \leq n-1$. Dokážeme nyní dané tvrzení pro přirozené číslo n.

      Použijeme-li postupně definici mocniny, indukční předpoklad a součtové vzorce pro sinus a kosinus, dostáváme

$$z^n = z \cdot z^{n-1} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|z|^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi) =$$
$$= |z|^n[\cos\varphi\cos(n-1)\varphi - \sin\varphi\sin(n-1)\varphi + i(\cos\varphi\sin(n-1)\varphi + \sin\varphi\cos(n-1)\varphi)] =$$
$$= |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

2. Pro $n = 0$ máme

$$z^0 = 1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0) = |z|^0(\cos(0\cdot\varphi) + i\sin(0\cdot\varphi)).$$

3. Nechť tedy nakonec $n \in \mathbb{Z}^-$. Využijeme toho, že $-n \in \mathbb{Z}^+$ a že tvrzení podle 1. platí pro libovolná kladná přirozená čísla. Pak

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{|z|^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi))} = |z|^n\frac{1}{(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi))} =$$
$$= |z|^n\frac{1}{(\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi))}\cdot\frac{(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))}{(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))} = |z|^n\frac{(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))}{(\cos^2(n\varphi) + \sin^2(n\varphi))} =$$
$$= |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

□

Poznámka. Dosadíme-li do Věty 2.7 $n = -1$, dostaneme

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\cdot(\cos(-\varphi) + i\cdot sin(-\varphi)) = |z|^{-1}\cdot(\cos\varphi - i\sin\varphi), z \neq 0.$$

Věta 2.8. *Pro každé celé číslo n platí*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Příklad 2.2. Užitím Věty 2.8 vyjádřete $\sin 4x$ a $\cos 4x$ pomocí mocnin $\sin x$ a $\cos x$.

Řešení: Podle Věty 2.8 je

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x,$$

podle binomické věty je

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x.$$

Porovnáním reálných částí pravých stran obou rovností dostaneme

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$$

a porovnáním částí imaginárních

$$\sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x.$$

[3]

2.4 Geometrická interpretace operací s komplexními čísly

Komplexní čísla můžeme znázorňovat nejenom jako body Gaussovy roviny, ale také jako vektory. Geometrické znázornění komplexních čísel pomocí polohových vektorů je výhodné při znázorňování operací mezi komplexními čísly.
V následujících úvahách si postupně ukážeme, jak aritmetickým operacím s komplexními čísly odpovídají příslušné operace s vektory.
Nechť obrazem komplexního čísla $z = a + bi$ je bod A, obrazem komplexního čísla $v = c + di$ je bod B.

- Obrazem součtu těchto komplexních čísel, tj. obrazem čísla $z + v$, je bod $S = [a + c, b + d]$, neboť

$$z + v = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

- Posuneme-li celou rovinu tak, aby bod ležící v počátku přešel do bodu o souřadnicích c, d (a ponecháme-li přitom soustavu souřadnic beze změny), zvětší se souřadnice x bodu $[x, y]$ o c a souřadnice y o d, takže bod $[x, y]$ přejde tímto posunutím do bodu $[x + c, y + d]$.

  Můžeme tedy říci, že obraz součtu $z + v$, jímž je bod $S = [a + c, b + d]$, vznikne z obrazu čísla z, jímž je bod $A = [a, b]$, takovým posunutím, které převádí počátek P v obraz čísla v, jímž je bod $B = [c, d]$. Protože sčítání komplexních čísel je komutativní, můžeme také říci, že obraz součtu $z + v$ dostaneme z obrazu čísla v takovým posunutím, které převádí počátek P v obraz čísla z.

- Obraz Z rozdílu $z - v$ komplexních čísel z, v je totožný s obrazem součtu $z + (-v)$. Tento bod vznikne z obrazu čísla z, tj. bodu A, posunutím, které převádí počátek do obrazu čísla $-v$ (a také obraz čísla v do počátku).

Tedy

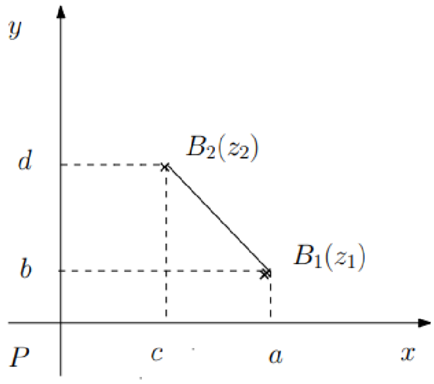
- Přičtení komplexního čísla v ke komplexnímu číslu z, se geometricky interpretuje jako posunutí vektoru $\vec{z}$ o polohový vektor $\vec{v}$.
- Odečtení komplexního čísla v od komplexního čísla z, se geometricky interpretuje jako posunutí vektoru $\vec{z}$ o polohový vektor $-\vec{v}$.

Věta 2.9. *V Gaussově rovině je vzdálenost obrazů B_1, B_2 dvou komplexních čísel z_1, z_2 rovna absolutní hodnotě jejich rozdílu, tedy platí*

$$d(B_1, B_2) = |z_1 - z_2|.$$

Důkaz.

Nechť $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ jsou libovolná komplexní čísla, $B_1,\ B_2$ jsou jejich obrazy v Gaussově rovině.



Pak

- $z_1 - z_2 = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$, tedy $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$
- $B_1 = [a, b],\ B_2 = [c, d]$, tedy $d(B_1, B_2) = \sqrt{(a-c)^2 + (d-b)^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

$\square$

Věta 2.10. *Nechť $u = \cos\varphi + i\sin\varphi$ je komplexní jednotka a nechť S je zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takové, že*

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \qquad S(z) = uz.$$

Zobrazení S se v Gaussově rovině geometricky interpretuje jako shodné zobrazení se samodružným bodem v počátku P.
Je-li $u \neq 1$, má zobrazení jediný samodružný bod a je to tedy otočení kolem tohoto bodu (počátku). Úhel otočení je roven φ, což je amplituda komplexní jednotky u.

Důkaz.

- Nechť body B_1, B_2 jsou obrazy komplexních čísel z_1, z_2 v Gaussově rovině, nechť komplexní čísla $S(z_1), S(z_2)$ jsou obrazy čísel z_1, z_2 v zobrazení S a nakonec nechť body B_1', B_2' jsou obrazy komplexních čísel $S(z_1), S(z_2)$ v Gaussově rovině.

  Pak podle Věty 2.9 a podle definice zobrazení S máme

  $$d(B_1', B_2') = |S(z_1) - S(z_2)| = |uz_1 - uz_2| = |u||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2| = d(B_1, B_2).$$

  Zobrazení S (přesněji jeho geometrická interpretace) zachovává vzdálenost, a tedy je to shodné zobrazení.

- Při hledání samodružných bodů uvažujeme všechna komplexní čísla z taková, že $S(z) = z$. To znamená, že $uz = z$, neboli že $uz - z = z(u-1) = 0$, zároveň podle předpokladu je $u \neq 1$, tedy máme jedinou možnost a to $z = 0$. To znamená, že pro komplexní jednotku $u \neq 1$ je jediným samodružným bodem obraz komplexního čísla 0, tj. počátek P.

- Shodné zobrazení s jediným samodružným bodem je otočení okolo tohoto bodu, tj. počátku.

- Obrazem čísla 1 v zobrazení S je číslo $S(1) = u \cdot 1 = u$, tj. číslo u. Je proto amplituda φ komplexní jednotky u rovna úhlu tohoto otočení.

$\square$

Důsledek 1: Nechť $u = \cos\varphi + i \sin\varphi$ je komplexní jednotka a nechť S je zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takové, že

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad S(z) = uz.$$

Pak obrazem každého komplexního čísla z, $z \neq 0$, v zobrazení S je komplexní číslo uz, které má stejnou absolutní hodnotu jako číslo z a jehož amplituda je o úhel φ větší, než je amplituda čísla z.

Důsledek 2 (Moivreův vzorec): Součin dvou komplexních jednotek s amplitudami φ_1, φ_2 je komplexní jednotka s amplitudou $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, tj.

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Věta 2.11. *Nechť a je libovolné nenulové reálné číslo, nechť H je zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takové, že*

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad H(z) = az.$$

Pak

(1) *Je-li $a > 0$, zachovává zobrazení H amplitudu komplexního čísla, tj.*

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z \neq 0 \Rightarrow Arg\, H(z) = Arg\, z.$$

(2) *Je-li $a < 0$, platí*

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z \neq 0 \Rightarrow Arg\, H(z) = Arg\, z + \pi.$$

(3) $(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |H(z)| = |a| \cdot |z|.$

(4) *V Gaussově rovině se zobrazení H interpretuje jako stejnolehlost se středem v počátku P a koeficientem stejnolehlosti a.*

Důkaz.

(1) Nechť $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Pak $a = |a|(\cos 0 + i\sin 0)$ a

$$H(z) = az = |a|(\cos 0 + i\sin 0)\cdot|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |a|\cdot|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

tedy

$$Arg\, H(z) = Arg\, z.$$

(2) Nechť $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, nechť $a \in \mathbb{R}, a < 0$. Pak $a = |a|(\cos\pi + i\sin\pi)$ a

$$H(z) = az = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|a|(\cos\pi + i\sin\pi) = |a|\cdot|z|(\cos(\varphi+\pi) + i\sin(\varphi+\pi)),$$

tedy

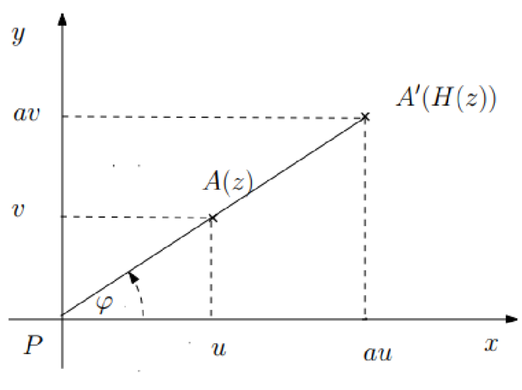
$$Arg\, H(z) = Arg\, z + \pi.$$

(3) $(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |H(z)| = |az| = |a|\cdot|z|.$

(4) Nechť $z = u + vi$ je libovolné komplexní číslo a bod A je jeho obraz v Gaussově rovině, nechť komplexní číslo $H(z) = az = (au) + (av)i$ je obraz čísla z v zobrazení H a bod A' je obraz čísla $H(z)$ v Gaussově rovině.

- Je-li $a > 0$, pak $Arg\, H(z) = Arg\, z$, a tedy body P, A, A' leží v téže přímce a platí

$$d(PA') = |H(z) - 0| = |H(z)| = |az| = |a|\cdot|z| = |a|\cdot|z - 0| = |a|\cdot d(PA).$$



- Je-li $a < 0$, pak $Arg\, H(z) = Arg\, z + \pi$, a tedy body P, A, A' leží v téže přímce, bod A' leží na polopřímce opačné k polopřímce PA, a platí

$$d(PA') = |H(z) - 0| = |H(z)| = |az| = |a|\cdot|z| = |a|\cdot|z - 0| = |a|\cdot d(PA).$$

To ovšem znamená, že zobrazení H (resp. jeho geometrická interpretace) je stejnolehlost se středem v počátku P a koeficientem stejnolehlosti a.

□

Věta 2.12. *Nechť v je libovolné nenulové komplexní číslo. Potom se zobrazení $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definované*

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad T(z) = vz,$$

v Gaussově rovině interpretuje jako podobné zobrazení, které se dá složit z otočení okolo počátku s úhlem otočení shodným s amplitudou čísla v a ze stejnolehlosti se středem v počátku a koeficientem stejnolehlosti rovným číslu $|v|$.

Důkaz.

$$(\forall z \in \mathbb{C}),\ T(z) = v \cdot z = \frac{v}{|v|} \cdot |v| \cdot z,$$

kde $\dfrac{v}{|v|}$ je komplexní jednotka a $|v|$ je nenulové reálné číslo.

□

2.5 Exponenciální tvar komplexního čísla

1. Každou reálnou funkci $y = f(x)$, která je v některém bodě $x = a$ spojitá a má v tomto bodě derivace všech řádů, lze rozvinout v *Taylorovu řadu*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \cdots$$

2. Speciálně pro $a = 0$ a pro funkce $\sin x, \cos x, e^x$ dostáváme

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

3. Pak

$$\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\Big) + i\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\Big) = \\ &= 1 + i \cdot \frac{x}{1!} + i^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + i^3 \cdot \frac{x^3}{3!} + i^4 \cdot \frac{x^4}{4!} + i^5 \cdot \frac{x^5}{5!} + \cdots = \\ &= 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots = e^{ix}. \end{aligned}$$

4. Rovnost
$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$
se nazývá **Eulerův vzorec**.

5. Pro libovolné komplexní číslo $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ užitím Eulerova vzorce dostáváme vztah
$$z = |z| \cdot e^{i\varphi},$$
což je **exponenciální tvar** komplexního čísla z.

Poznámka. Vyjádření komplexního čísla v goniometrickém tvaru lze spojit s vyjádřením komplexního čísla v exponenciálním tvaru.

1. $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,\ \varphi \in \mathbb{R}$
2. $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi,\ \varphi \in \mathbb{R}$.

Dále pro libovolná dvě komplexní čísla $z = |z| \cdot e^{i\varphi}, v = |v| \cdot e^{i\delta}$ zapsaná v exponenciálním tvaru a pro $\varphi, \delta \in \mathbb{R}$ platí

1. $z \cdot v = |z| \cdot |v| \cdot e^{i(\varphi+\delta)}$
2. $\dfrac{z}{v} = \dfrac{|z|}{|v|} \cdot e^{i(\varphi-\delta)},\ v \neq 0$
3. $|e^{i\varphi}| = 1$
4. $e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{e^{i\varphi}}$
5. $Arg(e^{i\varphi}) = \varphi$

2.6 Binomické rovnice

Definice 2.7. Rovnice tvaru
$$x^n - a = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+, a \in \mathbb{C}, a \neq 0, \tag{2.3}$$
se nazývá **binomická rovnice**. Její řešení se nazývají $n-$**té odmocniny z komplexního čísla** a a píšeme $\sqrt[n]{a}$.

Poznámka. Pro $a = 0$ má tato rovnice zřejmě jediné řešení, a to $x = 0$.

Věta 2.13. *Binomická rovnice*
$$x^n - a = 0$$
má v množině komplexních čísel právě n navzájem různých řešení.

Důkaz. Lze nalézt například v [2].

Poznámka.

Ukážeme, jak lze nalézt řešení dané rovnice.

Komplexní číslo a vyjádříme v goniometrickém tvaru, tj.

$a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha), 0 < \alpha < 2\pi$. Nechť komplexní číslo x je kořenem rovnice $x^n - a = 0$.

Také číslo x vyjádříme v goniometrickém tvaru, tj.

$x = |x|(\cos\varphi + i\sin\varphi), 0 \geq \varphi \geq 2\pi$.

Podle Věty 2.7 pak máme

$$|x|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Porovnáním absolutních hodnot a amplitud obou komplexních čísel máme

- $|x|^n = |a| \Rightarrow |x| = \sqrt[n]{|a|}$
- $n\varphi = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Tedy

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}\Big(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(a) Dosazením se snadno přesvědčíme, že čísla x_k jsou kořeny dané rovnice pro libovolné celé číslo k.

(b) Uvažujeme-li celá čísla k a $k+n$, pak

$$\cos\frac{\alpha + 2\pi(k+n)}{n} = \cos\Big(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + 2\pi\Big) = \cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n}$$

a

$$\sin\frac{\alpha + 2\pi(k+n)}{n} = \sin\Big(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + 2\pi\Big) = \sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}.$$

Je tedy zřejmé, že se některá řešení opakují.

Volíme-li např. $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, pak dostáváme právě n navzájem různých řešení.

Poznámka.

1. Řešení

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}\Big(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

   rovnice $x^n - a = 0$ nazýváme **komplexní n-té odmocniny z komplexního čísla** a.

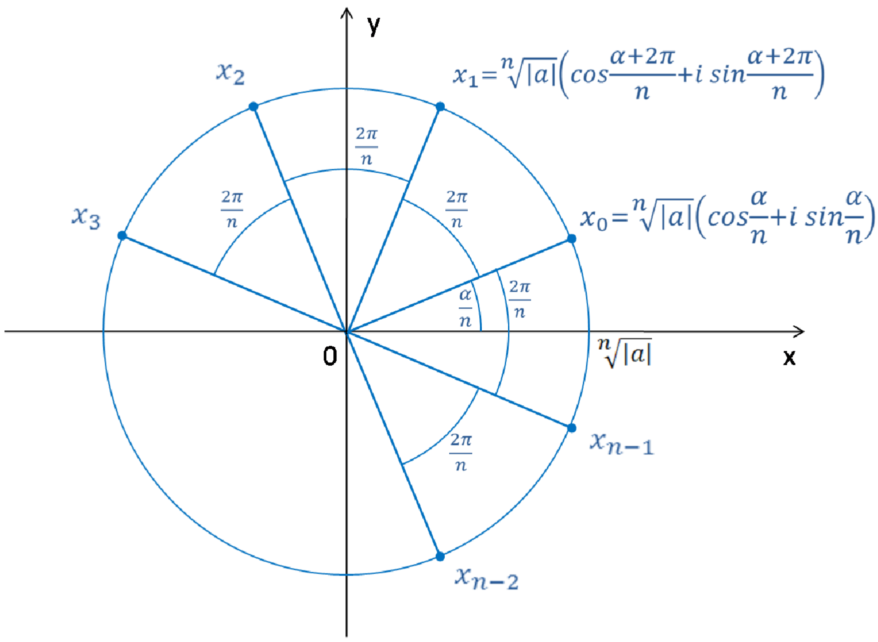
2. Obrazy kořenů rovnice $x^n - a = 0$ tvoří v *Gaussově rovině* vrcholy pravidelného $n-$úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$.

Opravdu:

- Všechny kořeny $x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ dané rovnice mají stejnou vzdálenost $\sqrt[n]{|a|}$ od počátku, tedy obrazy těchto kořenů leží na kružnici se středem v počátku P a poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$.
- Argumenty sousedních kořenů se liší vždy o $\frac{2\pi}{n}$:

$$\begin{aligned}
Arg\, x_0 &= \frac{\alpha}{n} \\
Arg\, x_1 &= \frac{\alpha + 2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} \\
Arg\, x_2 &= \frac{\alpha + 4\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \\
&\vdots \\
Arg\, x_{n-1} &= \frac{\alpha + (n-1)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}.
\end{aligned}$$

To ovšem znamená, že polohové vektory obrazů kořenů rovnice dělí úhel 2π právě na n stejných částí.



Zdroj: [3]

Důsledek 1: Rovnice $x^n - 1 = 0$ má v množině komplexních čísel právě n různých kořenů, které lze zapsat ve tvaru

$$x_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

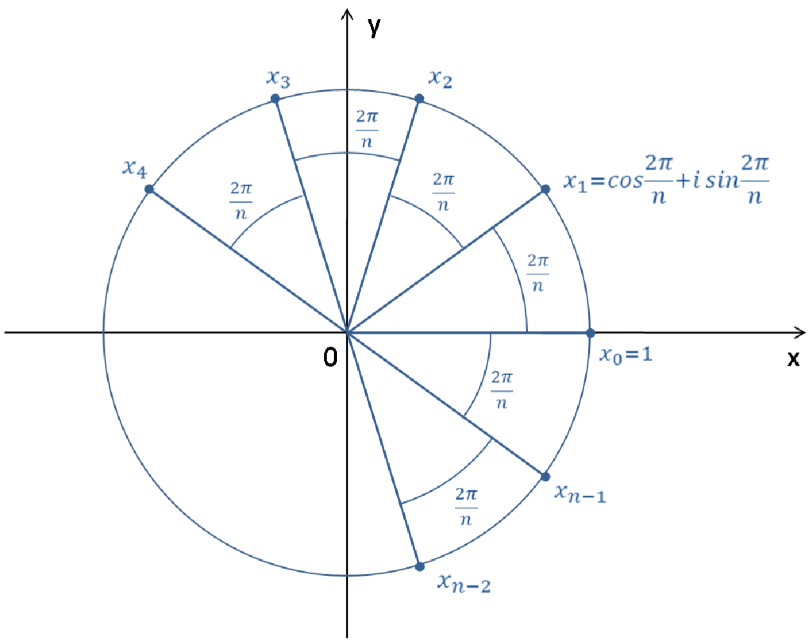
Důsledek 2: Obrazy kořenů rovnice $x^n - 1 = 0$ tvoří v *Gaussově rovině* vrcholy pravidelného $n-$úhelníka vepsaného do jednotkové kružnice se středem v počátku.

Poznámka.

1. Je zřejmé, že je-li $G = \{x \in \mathbb{C};\, x^n - 1 = 0,\, n \in \mathbb{Z}^+\}$, pak $(G, \cdot)$ je abelovská grupa.

2. Nechť
$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \quad k = 1$$
je kořenem binomické rovnice $x^n - 1 = 0$. Pak podle Věty 2.7 je také
$$x_1^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = x_k, \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$
kořenem této rovnice.

   Platí tedy
$$x_0 = x_1^0, \quad x_1 = x_1^1, \quad x_2 = x_1^2, ..., \quad x_{n-1} = x_1^{n-1},$$
a tedy $(G, \cdot)$ je cyklická grupa generovaná prvkem x_1.



Zdroj:[3]

2.7 Kvadratické rovnice

Věta 2.14. *Každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.*

Důkaz. Lze nalézt například v [8] na straně 354.

Věta 2.15. *Každá algebraická rovnice* 2. *stupně je v* $\mathbb{C}$ *řešitelná.*

Důkaz plyne z předchozí Věty.

Nechť je daná kvadratická rovnice

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0.$$

Víme, že pro kořeny dané rovnice platí známé vztahy

$$x_1 = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a_0} \tag{2.4}$$

kde $D = a_1^2 - 4a_0a_2$ je diskriminant dané kvadratické rovnice.

(I) Uvažujme nejprve rovnici

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0.$$

Pak platí

(1) rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen, právě když $D = 0$

(2) jestliže $D > 0$, pak má rovnice dva různé reálné kořeny

(3) jestliže $D < 0$, pak má rovnice dva imaginární komplexně sdružené kořeny.

Důkaz.

(1) Důkaz tvrzení plyne ze vztahů (2.4).

(2) Protože daná rovnice má reálné koeficienty, je $D \in \mathbb{R}$. Předpokládejme nyní, že $D > 0$. Podle definice druhé odmocniny reálného čísla existuje jednoznačně určená $\sqrt{D}$ a zároveň $\sqrt{D} > 0$. Pak jsou ovšem čísla $\sqrt{D}$ a $-\sqrt{D}$ navzájem různá, a tedy také kořeny $x_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + \frac{\sqrt{D}}{2}$ a $x_1 = -\frac{a_1}{2a_0} - \frac{\sqrt{D}}{2}$ dané rovnice jsou různé.

(3) Předpokládejme, že $D < 0, D \in \mathbb{R}$. Pak $\sqrt{D} = \pm\, i\,\sqrt{|D|}$, a tedy kořeny $x_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + \frac{i\sqrt{|D|}}{2}$ a $x_1 = -\frac{a_1}{2a_0} - \frac{i\sqrt{|D|}}{2}$ dané rovnice jsou imaginární komplexně sdružené kořeny.

□

Poznámka.

Opravdu: Je-li $D < 0$, $D \in \mathbb{R}$ pak

$$D = |D|\Big(\cos\pi + i\sin\pi\Big)$$

$$(\sqrt{D})_1 = \sqrt{|D|}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \sqrt{|D|}\cdot i$$
$$(\sqrt{D})_2 = \sqrt{|D|}\Big(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\Big) = -\sqrt{|D|}\cdot i$$

Tedy

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{i\sqrt{|D|}}{2a_0}$$

(II) Nechť nyní

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0.$$

Pro diskriminant D této rovnice může nastat právě jedna ze dvou možností:

(1) Jestliže $D \in \mathbb{R}$, pak platí

- je-li $D = 0$, rovnice má v $\mathbb{C}$ dvojnásobný kořen
- je-li $D \neq 0$, rovnice má v $\mathbb{C}$ dva různé kořeny.

(2) Předpokládejme dále, že $D \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tedy $D = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0.$

Chceme-li danou rovnici vyřešit, musíme nalézt $\sqrt{D} = \sqrt{a+bi}$.

Můžeme postupovat dvěma způsoby

(a) Algebraicky.

Nalezneme reálná čísla u, v tak, že

$$\sqrt{a+bi} = u + vi.$$

Po umocnění obou stran dostaneme

$$a + bi = u^2 - v^2 + 2uvi.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí obou čísel dostaneme

$$a = u^2 - v^2, \qquad b = 2uv. \tag{2.5}$$

Z toho plyne

$$a = u^2 + (-v^2), \qquad -\frac{1}{4}b^2 = u^2(-v^2). \tag{2.6}$$

Tedy čísla $u^2, -v^2$ vyhovují rovnici $t^2 - at - \frac{b^2}{4} = 0$.

Kořeny této rovnice jsou čísla

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Protože $u^2 \geq 0,\ -v^2 \leq 0,\ \sqrt{a^2+b^2} > |a|$, je zřejmé, že

$$t_1 = u^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$t_2 = -v^2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + b^2})$$

Odtud dostáváme

$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})},$$
$$v = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}.$$

Pro čísla u, v musí platit vztah (2.5), tj. $b = 2uv$.

Zvolíme-li za číslo u jednu z obou možných hodnot, označíme ji například u_1, pak dostaneme jednoznačně určenou hodnotu čísla $v_1 = \dfrac{b}{2u_1}$.

Získáme tak hodnoty odmocniny z diskriminantu

$$(\sqrt{D})_1 = (\sqrt{a + bi})_1 = u_1 + v_1 i,$$

$$(\sqrt{D})_2 = (\sqrt{a + bi})_2 = -(u_1 + v_1 i).$$

(b) Goniometricky.

Nalezneme dvě komplexní druhé odmocniny z D.

Je-li $D = |D|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, pak

$$(\sqrt{D})_1 = \sqrt{|D|}\Big(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\Big)$$
$$(\sqrt{D})_2 = \sqrt{|D|}\Big(\cos\Big(\frac{\alpha}{2} + \pi\Big) + i\sin\Big(\frac{\alpha}{2} + \pi\Big)\Big).$$

Protože ale

$$\cos\Big(\frac{\alpha}{2} + \pi\Big) = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\pi - \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\pi = -\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\sin\Big(\frac{\alpha}{2} + \pi\Big) = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\pi + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\pi = -\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Dostáváme

$$(\sqrt{D})_2 = -\sqrt{|D|}\Big(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\Big).$$

Pak pro kořeny dané rovnice platí

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{\sqrt{|D|}\Big(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\Big)}{2a_0}.$$

2.8 Kubické rovnice

Věta 2.16. *Každá algebraická rovnice třetího stupně je v $\mathbb{C}$ řešitelná.*

Poznámka. Tvrzení plyne z Věty 2.14.

Uvažujme rovnici

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0. \tag{2.7}$$

Položme $x = y - \frac{1}{3}a_1$.

Po dosazení do rovnice 2.7 a úpravě, dostáváme tzv. *redukovaný tvar* dané rovnice, tj. rovnici

$$x^3 + px + q = 0, \tag{2.8}$$

kde p, q jsou komplexní čísla.

Číslo

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108\Big(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\Big)$$

se nazývá diskriminant rovnice (2.8).

Věta 2.17. *Nechť p, q jsou komplexní čísla. Pak množina všech řešení rovnice (2.8) v tělese komplexních čísel je rovna množina $\{x_1, x_2, x_3\}$, kde*

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad x_2 = \varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta, \qquad x_3 = \varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta, \tag{2.9}$$

Přitom $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ značí některou pevně zvolenou druhou odmocninu z komplexního čísla $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, dále α značí některou pevně zvolenou třetí odmocninu z čísla $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, tedy

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad \alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3}.$$

Důkaz. Lze nalézt například v [10] na straně 74.

Poznámka.

1. Číslo ε značí některou pevně zvolenou třetí odmocninu z 1 různou od 1.
2. Číslo ε je rovno buď číslu $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ nebo číslu $\varepsilon = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Vztahům (2.9) se říká **Cardanovy vzorce**.

Vztahy (2.9) můžeme také přepsat ve tvaru

- $x_1 = \alpha + \beta$
- $x_2 = \varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta = \Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\alpha + \Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\beta = -\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)$
- $x_3 = \varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta = \Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\alpha + \Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\beta = -\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)$

Tvrzení 2.1. *Nechť M je množina všech řešení kubické rovnice*

$$x^3 + px + q = 0$$

s komplexními koeficienty p, q nad tělesem komplexních čísel a $D = -108\Big(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\Big)$ je její diskriminant.
Pak platí

1. *M je tříprvková množina $\Leftrightarrow D \neq 0$,*
2. *M je dvouprvková množina $\Leftrightarrow D = 0, q \neq 0$,*
3. *M je jednoprvková množina $\Leftrightarrow D = 0, q = 0$.*

Důkaz. Lze nalézt například v [10] na straně 75.

Poznámka. V případě 3. je pak jediné řešení rovno 0.

Věta 2.18. *Nechť $x^3 + px + q = 0$ je kubická rovnice s reálnými koeficienty p, q nad tělesem komplexních čísel. Nechť dále D značí diskriminant této rovnice.*
Pak platí

1. *$D > 0 \Rightarrow$ rovnice má 3 různé reálné kořeny,*
2. *$D < 0 \Rightarrow$ rovnice má jeden reálný a 2 komplexně sdružené kořeny,*
3. *$D = 0,\ q \neq 0 \Rightarrow$ rovnice má 2 různé reálné kořeny,*
4. *$D = 0,\ q = 0 \Rightarrow$ rovnice má jediný kořen rovný 0.*

Důkaz. Lze nalézt například v [10] na straně 76.

Kapitola 3

Sbírka příkladů

Hlavními zdroji pro tuto kapitolu jsou [3], [6], [9], [14], [17].

Příklad 3.1. Vypočítejte

$$2i^{100} + 3i^{-50} + 6i^{75} + i^{-65}$$

Řešení:

$$2i^{100} + 3i^{-50} + 6i^{75} + i^{-65} = 2i^{4\cdot 25+0} + 3i^{4\cdot(-13)+2} + 6i^{4\cdot 18+3} + i^{4\cdot(-17)+3} =$$
$$= 2i^0 + 3i^2 + 6i^3 + i^3 = 2 - 3 - 6i - i = -1 - 7i$$

Také

$$i^{-65} = \frac{1}{i^{65}} = \frac{1}{i^{4\cdot 16+1}} = \frac{1}{i} = -i \quad \text{a} \quad 3i^{-50} = \frac{3}{i^{50}} = \frac{3}{i^{4\cdot 12+2}} = \frac{3}{i^2} = -3$$

Příklad 3.2. Vypočtěte absolutní hodnotu komplexního čísla

$$z = \frac{5+12i}{8-6i}. \qquad [16]$$

Řešení:

$a)$

$$z = \frac{5+12i}{8-6i} = \frac{(5+12i)(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)} = \frac{40+30i+96i+72i^2}{64-36i^2} = \frac{-32+126i}{100} =$$
$$= \frac{2\cdot(-16+63i)}{100} = \frac{-16+63i}{50} = -\frac{16}{50} + \frac{63}{50}i = -\frac{8}{25} + \frac{63}{50}i$$
$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(-\frac{8}{25}\right)^2 + \left(\frac{63}{50}\right)^2} = \frac{13}{10}$$

$b)$ Podle Věty 2.6 (5) můžeme postupovat takto:

$$|z| = \left|\frac{5+12i}{8-6i}\right| = \frac{|5+12i|}{|8-6i|} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{100}} = \frac{13}{10}$$

Příklad 3.3. Vypočítejte

1.
$$\frac{\left|\frac{3-4i}{5i}\right|+\left|\frac{2+i}{1-2i}\right|}{1+2i}=$$

[3]

2.
$$\left|\frac{|\sqrt{3}-i|\cdot(i-1)}{|i\cdot(i-1)|-2i}\right|=$$

[14]

<u>*Řešení:*</u>

1.
$$\frac{\left|\frac{3-4i}{5i}\right|+\left|\frac{2+i}{1-2i}\right|}{1+2i}=\frac{\frac{|3-4i|}{|5i|}+\frac{|2+i|}{|1-2i|}}{1+2i}=\frac{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}}{\sqrt{5^2}}+\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}}{1+2i}=$$
$$=\frac{\frac{5}{5}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}{1+2i}=\frac{2}{1+2i}=\frac{2(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2-4i}{5}=\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$$

2.
$$\left|\frac{|\sqrt{3}-i|\cdot(i-1)}{|i\cdot(i-1)|-2i}\right|=\left|\frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\cdot(i-1)}{|i|\cdot|i-1|-2i}\right|=\left|\frac{2\cdot(i-1)}{1\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2}-2i}\right|=$$
$$=\left|\frac{2i-2}{\sqrt{2}-2i}\right|=\frac{|2i-2|}{|\sqrt{2}-2i|}=\frac{\sqrt{(-2)^2+2^2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Příklad 3.4. Vypočítejte

1.
$$\frac{\frac{i}{2-i}+\frac{1}{i}}{1+\frac{1}{2i+1}}=$$

[14]

2.
$$-\frac{i-1}{2}-\frac{i}{i-1}\cdot i+1=$$

[14]

Řešení:

1.

$$\frac{\frac{i}{2-i}+\frac{1}{i}}{1+\frac{1}{2i+1}}=\frac{\frac{i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}}{1+\frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}}=\frac{\frac{2i-1}{5}-i}{1+\frac{1-2i}{5}}=\frac{\frac{-3i-1}{5}}{\frac{6-2i}{5}}=\frac{-3i-1}{6-2i}\cdot\frac{6+2i}{6+2i}=$$
$$=\frac{-20i}{40}=-\frac{1}{2}i$$

2.

$$-\frac{i-1}{2}-\frac{i}{i-1}\cdot i+1=\frac{1-i}{2}-\frac{-1}{i-1}+1=\frac{1-i}{2}-\frac{-1}{i-1}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}+1=$$
$$=\frac{1-i}{2}-\frac{1+i}{2}+1=-i+1$$

Příklad 3.5. Určete taková reálná čísla a, b, že platí

$$(1+5i)a+(1-5i)b=1-5i$$

Řešení:

$$a+5ai+b-5bi=1-5i$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí komplexních čísel na obou stranách rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} a+\ \ b &= \ \ 1 \\ 5a-5b &= -5, \end{aligned}$$

tedy

$$a=0, \qquad b=1.$$

Příklad 3.6. Řešte v $\mathbb{C}$ soustavu rovnic

$$(3-i)z+(4+2i)v=2+6i$$
$$(4+2i)z-(2+3i)v=5+4i$$

Řešení: Vynásobením první rovnice číslem $2+3i$, druhé rovnice číslem $4+2i$ a sečtením obou rovnic máme

$$(2+3i)(3-i)z+(2+3i)(4+2i)v=(2+3i)(2+6i)$$
$$(4+2i)(4+2i)z-(4+2i)(2+3i)v=(4+2i)(5+4i),$$

dále úpravou

$$(9+7i)z+(2+16i)v=-14+18i$$
$$(14+16i)z-(2+16i)v=12+26i$$

dostaneme

$$9z+7zi=-14+18i$$
$$14z+16zi=12+26i,$$

a tedy

$$23z+23zi=-2+44i$$
$$z(23+23i)=-2+44i$$
$$z=\frac{-2+44i}{23+23i}=\frac{-2+44i}{23+23i}\cdot\frac{23-23i}{23-23i}=\frac{1058\cdot(1+i)}{1058}=1+i.$$

Dále pak

$$(2+3i)v=(4+2i)z-5-4i$$
$$(2+3i)v=(4+2i)(1+i)-5-4i$$
$$(2+3i)v=-3+2i$$
$$v=\frac{-3+2i}{2+3i}=\frac{-3+2i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{13i}{13}=i.$$

Příklad 3.7. Řešte v $\mathbb{C}$ rovnice

$a)$ $|z|-z=1+2i$

$b)$ $|z|-\overline{z}=3-i$

$c)$ $\overline{z}\cdot(z-1)=|z-1|^2$

Řešení: Položme $z=x+yi$.

$a)$

$$|z|-z=1+2i$$
$$\sqrt{x^2+y^2}-(x+yi)=1+2i.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí obou komplexních čísel máme

$$\sqrt{x^2+y^2}-x=1$$
$$-y=2\Rightarrow y=-2.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+4}-x &= 1\\
\sqrt{x^2+4} &= x+1\\
x^2+4 &= x^2+2x+1\\
x &= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Provedeme zkoušku

$$L: \sqrt{\frac{9}{4}+4}-\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1,$$

tedy $L=P$.
Pak $z=\frac{3}{2}-2i$.
$b)$

$$\begin{aligned}
|z|-\overline{z} &= 3-i\\
\sqrt{x^2+y^2}-(x-yi) &= 3-i,
\end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2}-x &= 3\\
y &= -1.
\end{aligned}$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1}-x &= 3\\
\sqrt{x^2+1} &= x+3\\
x^2+1 &= x^2+6x+9\\
x &= -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Provedeme zkoušku

$$L: \sqrt{\frac{16}{9}+1}+\frac{4}{3}=\sqrt{\frac{25}{9}}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=3,$$

tedy $L=P$.
Pak $z=-\frac{4}{3}-i$.

$c)$

$$\overline{z} \cdot (z-1) = |z-1|^2$$
$$(x-yi)(x+yi-1) = |x+yi-1|$$
$$x^2 + xyi - x - xyi - y^2i^2 + yi = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$
$$x^2 + y^2 - x + yi = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2},$$

tedy

$$x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}$$
$$y = 0.$$

Dostaneme

$$x^2 - x = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$
$$(x^2 - x)(x^2 - x) = x^2 - 2x + 1$$
$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1) = (x-1)^2$$
$$x^2 \cdot (x-1)^2 - (x-1)^2 = 0$$
$$(x-1)^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_{1,2,3} = 1,\ x_4 = -1.$$

Provedeme zkoušku

- $x_1 = 1$

  $L = 1 - 1 = 0$

  $P = \sqrt{1 - 2 + 1} = 0,$

  tedy $L = P$.

- $x_2 = -1$

  $L = 1 + 1 = 2$

  $P = \sqrt{1 + 2 + 1} = \sqrt{4} = 2,$

  tedy $L = P$.

Pak $z_1 = 1,\ z_2 = -1.$

Příklad 3.8. Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo

$$2\Big(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\Big)$$

Řešení:

$$2\Big(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\Big)= 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big)= \sqrt{3} + i$$

Příklad 3.9. Vyjádřete v goniometrickém tvaru číslo $z = -5 + 5i$.

[3]

Řešení: Platí

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2},$$

pak

$$\cos\varphi = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Dostaneme tak

$$z = 5\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi).$$

Příklad 3.10. Dokažte, že číslo z je komplexní jednotka, jestliže

(1)

$$z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

(2)

$$z = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (1 + \sqrt{3} - i\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

Řešení:

(1)

$$|z| = \left|\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i\right| = \sqrt{\Big(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\Big)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{16} + \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16}} = 1$$

Jelikož $|z| = 1$, tak se jedná o komplexní jednotku.

(2)

$$|z| = \left|\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(1+\sqrt{3}-i\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right| = \left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-i\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right| =$$

$$= \left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right| = \left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\cdot\Big(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\Big)\right| =$$

$$= \sqrt{\Big(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\Big)^2+\Big(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\Big)^2} = \sqrt{\frac{2+2\sqrt{12}+6}{16}+\frac{2-2\sqrt{12}+6}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16}} = 1$$

Jelikož $|z| = 1$, tak se jedná o komplexní jednotku.

Příklad 3.11. Vypočítejte

$$(-1+i)^{66} - i(1+i)^{80}$$

[3]

<u>*Řešení:*</u>

$a)$ $(-1+i)^{66}-i(1+i)^{80} = ((i-1)^2)^{33}-i((1+i)^2)^{40} = (-2i)^{33}-i(2i)^{40} = -2^{33}\cdot i^{33}-i\cdot 2^{40}\cdot i^{40} =$

$$= -2^{33}\cdot i - i\cdot 2^{40} = -2^{33}\cdot i\cdot(1+2^7) = -2^{33}\cdot 129\cdot i$$

$b)$ Můžeme také postupovat užitím Věty 2.7:

$$(-1+i)^{66} = \Big[\sqrt{2}\cdot\Big(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\Big)\Big]^{66} = (\sqrt{2})^{66}\cdot\Big(\cos\frac{198}{4}\pi + i\sin\frac{198}{4}\pi\Big) =$$

$$= 2^{33}\Big[\cos\Big(48\pi+\frac{6}{4}\pi\Big)+i\sin\Big(48\pi+\frac{6}{4}\pi\Big)\Big] = 2^{33}\Big(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\Big) =$$

$$= 2^{33}\cdot(0-i) = -2^{33}\cdot i$$

$$(1+i)^{80} = \Big[\sqrt{2}\cdot\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big)\Big]^{80} = (\sqrt{2})^{80}\cdot\Big(\cos\frac{80}{4}\pi + i\sin\frac{80}{4}\pi\Big) =$$

$$= 2^{40}\cdot(\cos 20\pi + i\sin 20\pi) = 2^{40}\cdot(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{40}$$

Tedy

$$(-1+i)^{66} - i(1+i)^{80} = -2^{33}\cdot i - 2^{40}\cdot i = -2^{33}\cdot i - 2^{40}\cdot i = -129\cdot 2^{33}\cdot i$$

Příklad 3.12. Vypočítejte

$$\Big(1+\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\Big)^{12}.$$

[3]

Řešení:

$a)$ Užitím vztahů

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha, \qquad \sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$$

dostáváme

$$1+\cos\frac{1}{3}\pi = 2\cos^2\frac{1}{6}\pi, \qquad \sin\frac{1}{3}\pi = 2\sin\frac{1}{6}\pi\cos\frac{1}{6}\pi,$$

a tedy

$$1+\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi = 2\cos\frac{1}{6}\pi\Big(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\Big).$$

Umocněním dostaneme

$$\Big(1+\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\Big)^{12} = \Big[2\cdot\cos\frac{1}{6}\pi\Big(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\Big)\Big]^{12} =$$
$$= 2^{12}\cdot\cos^{12}\frac{1}{6}\pi\Big(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\Big) = 2^{12}\cdot\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{12}(1+0i) = 3^6$$

$b)$ Můžeme postupovat také takto:

$$1+\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i)$$

$$\Big(1+\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big)^{12} = \Big[\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\sqrt{3}+i)\Big]^{12} = \frac{3^6}{2^{12}}\cdot 2^{12}\cdot\Big(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\Big)^{12} = 3^6$$

Příklad 3.13. Dokažte, že platí rovnost

$$\Big(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^6 + \Big(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\Big)^6 = 2$$

[14]

Řešení:

$$\Big(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^6 = \Big[\frac{2\cdot(\cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi)}{2}\Big]^6 = \Big[1\cdot\Big(\cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\Big)\Big]^6 =$$
$$= (\cos 4\pi + i\cdot\sin 4\pi) = 1$$

$$\Big(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\Big)^6 = \Big[\frac{2\cdot(\cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi)}{2}\Big]^6 = \Big[1\cdot\Big(\cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi\Big)\Big]^6 =$$
$$= (\cos 8\pi + i\cdot\sin 8\pi) = 1$$

Tedy $1+1=2$ a rovnost platí.

Můžeme postupovat také takto:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left[(-1+i\sqrt{3})^3\right]^2+\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left[(-1-i\sqrt{3})^3\right]^2=$$
$$=\frac{1}{2^6}\cdot\left[-1+3i\sqrt{3}+3\cdot3-3i\sqrt{3}\right]^2+\frac{1}{2^6}\cdot\left[-1-3i\sqrt{3}+3\cdot3+3i\sqrt{3}\right]^2=$$
$$=\frac{1}{2^6}\cdot 8^2+\frac{1}{2^6}\cdot 8^2=2$$

Příklad 3.14. Užitím Věty 2.7 vypočítejte

$$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{25}$$

a výsledek zapište v algebraickém tvaru. [3]

<u>*Řešení:*</u> Číslo $1+i$ vyjádříme v goniometrickém tvaru

$$|z|=\sqrt{2}$$

a

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pro $\varphi\in\langle 0,\frac{\pi}{2})$ je $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Dostaneme tak

$$1+i=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big).$$

Číslo $1-i$ vyjádříme v goniometrickém tvaru

$$|z|=\sqrt{2}$$

a

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Řešením pro $\varphi\in(\frac{3}{2}\pi,2\pi)$ je $\varphi=\frac{7}{4}\pi$. Dostaneme tak

$$1-i=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\Big).$$

Tedy

$$z=\frac{[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})]^{25}}{[\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)]^{25}}=\frac{\cos\frac{25}{4}\pi+i\sin\frac{25}{4}\pi}{\cos\frac{175}{4}\pi+i\sin\frac{175}{4}\pi}=$$
$$=\cos\Big(\frac{25}{4}\pi-\frac{175}{4}\pi\Big)+i\sin\Big(\frac{25}{4}\pi-\frac{175}{4}\pi\Big)=\cos\Big(-\frac{75}{2}\pi\Big)+i\sin\Big(-\frac{75}{2}\pi\Big)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

Poznámka. Při výpočtu můžeme také postupovat pouze algebraicky

$$a) \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{25} = \left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{25} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{25} = i^{25} = i$$

$$b) \qquad \left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2}\right]^{12} \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^{12} \cdot \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = 1 \cdot \frac{2i}{2} = i$$

Příklad 3.15. Určete součin zv a podíl $\frac{z}{v}$ komplexních čísel

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right), \qquad v = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right).$$

<u>*Řešení:*</u> Využijeme *Poznámku* 4. za Definicí 2.6.

$$zv = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right) \cdot \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) =$$
$$= 4\left[\cos\left(\frac{1}{6}\pi + \frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\pi + \frac{5}{6}\pi\right)\right] = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$$

$$\frac{z}{v} = \frac{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)} = 2\left[\cos\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi\right)\right] =$$
$$= 2\left[\cos\left(-\frac{4}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{4}{6}\pi\right)\right] = 2\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right] = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) =$$
$$= 2\left[-\frac{1}{2} + -i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -1 - i\sqrt{3}$$

Příklad 3.16. Vypočítejte

1. $\sum\limits_{k=1}^{4}(1+i)^k$
2. $\sum\limits_{k=1}^{4}\frac{1+ki}{1-ki}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{3}\frac{ki}{1-(k+1)i}$
4. $\prod\limits_{k=1}^{3}\frac{ki}{1-(k+1)i}$

[15]

<u>*Řešení:*</u>

1.

$$\sum_{k=1}^{4}(1+i)^k = (1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4 = (1+i)\cdot[1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3] =$$
$$= (1+i)\cdot[1+(1+i)+(1+2i+i^2)+(1+3i+3i^2+i^3)] = (1+i)\cdot 5i = -5+5i$$

2.

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{1+ki}{1-ki}=\sum_{k=1}^{4}\frac{1+ki}{1-ki}\cdot\frac{1+ki}{1+ki}=\sum_{k=1}^{4}\frac{(1+ki)^2}{1-k^2i^2}=\sum_{k=1}^{4}\frac{1+2ki+k^2i^2}{1+k^2}=\sum_{k=1}^{4}\frac{1-k^2+2ki}{1+k^2}=$$
$$=\frac{2i}{2}+\frac{-3+4i}{5}+\frac{-8+6i}{10}+\frac{-15+8i}{17}=\Big(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}-\frac{15}{17}\Big)+\Big(1+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{8}{17}\Big)i=-\frac{194}{85}+\frac{244}{85}i$$

3.

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{ki}{1-(k+1)i}=\sum_{k=1}^{3}\frac{ki}{1-(k+1)i}\cdot\frac{1+(k+1)i}{1+(k+1)i}=\sum_{k=1}^{3}\frac{ki\cdot[1+(k+1)i]}{[1-(k+1)i]\cdot[1+(k+1)i]}=$$
$$=\sum_{k=1}^{3}\frac{ki+ki\cdot(k+1)i}{1-(k+1)^2\cdot i^2}=\sum_{k=1}^{3}\frac{ki-k^2-k}{1+(k+1)^2}=\frac{i-2}{5}+\frac{i-6}{10}+\frac{i-12}{17}=$$
$$=\Big(-\frac{2}{5}-\frac{6}{10}-\frac{12}{17}\Big)+\Big(\frac{1}{5}+\frac{2}{10}+\frac{3}{17}\Big)i=-\frac{29}{17}+\frac{49}{85}i$$

Můžeme postupovat takto:

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{ki}{1-(k+1)i}=\frac{i}{1-2i}+\frac{2i}{1-3i}+\frac{3i}{1-4i}=\frac{i(1+2i)}{5}+\frac{2i(1+3i)}{10}+\frac{3i(1+4i)}{17}=$$
$$=\frac{-5+2i}{5}+\frac{-12+3i}{17}=-\frac{145}{85}+\frac{49}{85}i=-\frac{29}{17}+\frac{49}{85}i$$

4.

$$\prod_{k=1}^{3}\frac{ki}{1-(k+1)i}=\frac{i}{1-2i}\cdot\frac{2i}{1-3i}\cdot\frac{3i}{1-4i}=\frac{6i^3}{(-5-5i)\cdot(1-4i)}=\frac{-6i}{(-25+15i)}=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{6i}{5-3i}=\frac{1}{5}\cdot\frac{6i}{5-3i}\cdot\frac{5+3i}{5+3i}=\frac{1}{5}\cdot\frac{-18+30i}{34}=\frac{-9+15i}{85}=-\frac{9}{85}+\frac{3}{17}i$$

Příklad 3.17. Řešte binomickou rovnici a její kořeny znázorněte v Gaussově rovině

$$x^6-1-i\sqrt{3}=0.$$

Řešení: Kořeny binomické rovnice $x^6=1+i\sqrt{3}$ budeme hledat podle Poznámky za Větou 2.13 ve tvaru

$$x_k=\sqrt[6]{|a|}\Big(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\Big),\quad k=0,1,2,...,5,$$

kde $a=1+i\sqrt{3}$.

Tedy

$$|a|=1+i\sqrt{3}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2.$$

Dále pak

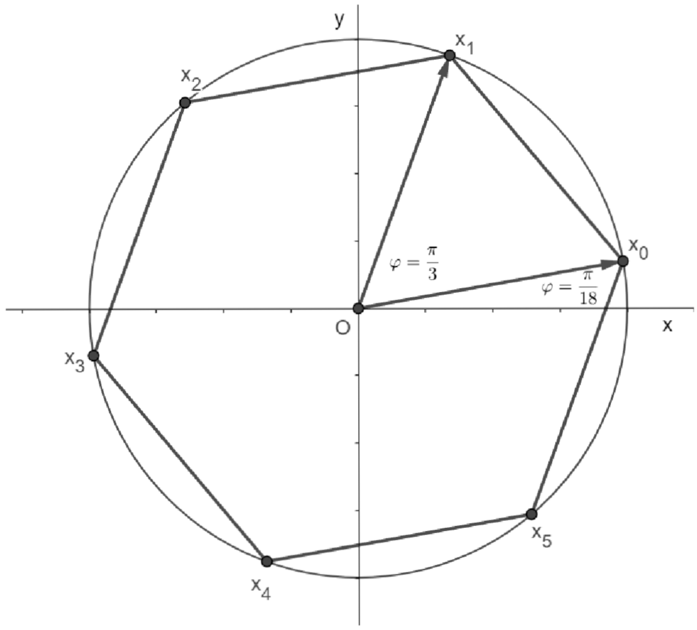
$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\quad\text{a}\quad\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad\text{tedy}\quad\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Pak

$$x^6=1+i\sqrt{3}=2\cdot(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi)$$

a kořeny dané rovnice jsou čísla

- $x_0 = \sqrt[6]{2}\Big(\cos\dfrac{1}{18}\pi + i\sin\dfrac{1}{18}\pi\Big)$
- $x_1 = \sqrt[6]{2}\Big(\cos\dfrac{7}{18}\pi + i\sin\dfrac{7}{18}\pi\Big)$
- $x_2 = \sqrt[6]{2}\Big(\cos\dfrac{13}{18}\pi + i\sin\dfrac{13}{18}\pi\Big)$
- $x_3 = \sqrt[6]{2}\Big(\cos\dfrac{19}{18}\pi + i\sin\dfrac{19}{18}\pi\Big)$
- $x_4 = \sqrt[6]{2}\Big(\cos\dfrac{25}{18}\pi + i\sin\dfrac{25}{18}\pi\Big)$
- $x_5 = \sqrt[6]{2}\Big(\cos\dfrac{31}{18}\pi + i\sin\dfrac{31}{18}\pi\Big)$



Obrazy kořenů dané rovnice v *Gaussově rovině* tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku vepsaného kružnici se středem v počátku a poloměrem $r = \sqrt[6]{2}$.

Příklad 3.18. Řešte algebraicky rovnici

$$x^8 - 16 = 0.$$

<u>*Řešení:*</u> Položme $x = \sqrt[8]{16} \cdot z$. Pak $16z^8 - 16 = 0$, tj. $z^8 - 1 = 0$, a tedy $(z^4 - 1) \cdot (z^4 + 1) = 0$

1. $z^4 - 1 = 0 \Rightarrow (z^2 + 1) \cdot (z^2 - 1) = 0$

   - $z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 1,\ z_2 = -1$
   - $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_3 = i,\ z_4 = -i,$

   a tedy

   $$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}, \quad x_3 = i\sqrt{2}, \quad x_4 = -i\sqrt{2}$$

2. $z^4 + 1 = 0$

   Rovnici budeme řešit jako reciprokou rovnici. Obě strany rovnice vydělíme z^2 a dostaneme

   $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = 0.$

   Dále položme $y = z + \dfrac{1}{z}$, tj. $y^2 - 2 = z^2 + \dfrac{1}{z^2}.$

   Pak $y^2 - 2 = 0$ a $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

- $y_1 = \sqrt{2}$

  $\sqrt{2} = z + \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0 \Rightarrow z_{5,6} = \dfrac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$

- $y_2 = -\sqrt{2}$

  $-\sqrt{2} = z + \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 + z\sqrt{2} + 1 = 0 \Rightarrow z_{7,8} = \dfrac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$

Tedy

$$x_5 = \sqrt{2} \cdot \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Big) = 1 + i, \qquad x_6 = 1 - i,$$

$$x_7 = \sqrt{2} \cdot \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Big) = -1 + i, \qquad x_8 = -1 - i.$$

Příklad 3.19. Nalezněte všechny šesté odmocniny z čísla

$$z = \frac{(1-i)^{19}}{\left| 9i - \dfrac{i^{12} + i^9}{1-i} \right|}.$$

<u>*Řešení:*</u> Vypočítejme

$$9i - \frac{i^{12} + i^9}{1-i} = 9i - \frac{i^9 \cdot (i^3 + 1)}{1-i} = 9i - \frac{i^9 \cdot (1-i)}{1-i} = 8i$$

a dostaneme tak $z = \dfrac{(1-i)^{19}}{|8i|} = \dfrac{(1-i)^{19}}{8}$. Tedy

$$z = \frac{\left[\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) \right]^{19}}{2^3} = 2^6 \sqrt{2} \cdot \Big(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \Big)$$

Pak

$$z_0 = 2\sqrt[12]{2} \Big(\cos \frac{5}{24}\pi + i \sin \frac{5}{24}\pi \Big), \quad z_1 = 2\sqrt[12]{2} \cdot \Big(\cos \frac{13}{24}\pi + i \sin \frac{13}{24}\pi \Big),$$

$$z_2 = 2\sqrt[12]{2} \cdot \Big(\cos \frac{7}{8}\pi + i \sin \frac{7}{8}\pi \Big), \qquad z_3 = 2\sqrt[12]{2} \cdot \Big(\cos \frac{29}{24}\pi + i \sin \frac{29}{24}\pi \Big),$$

$$z_4 = 2\sqrt[12]{2} \cdot \Big(\cos \frac{37}{24}\pi + i \sin \frac{37}{24}\pi \Big), \quad z_5 = 2\sqrt[12]{2} \cdot \Big(\cos \frac{15}{8}\pi + i \sin \frac{15}{8}\pi \Big).$$

Příklad 3.20. V *Gaussově rovině* určete graficky komplexní čísla

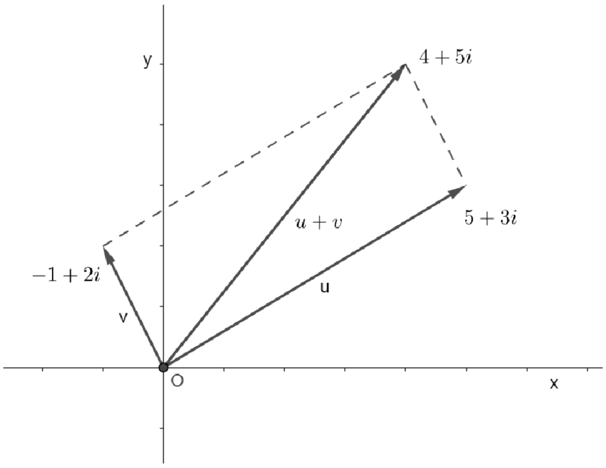
1. $(5 + 3i) + (-1 + 2i)$

2. $(5 + 3i) - (-1 + 2i)$

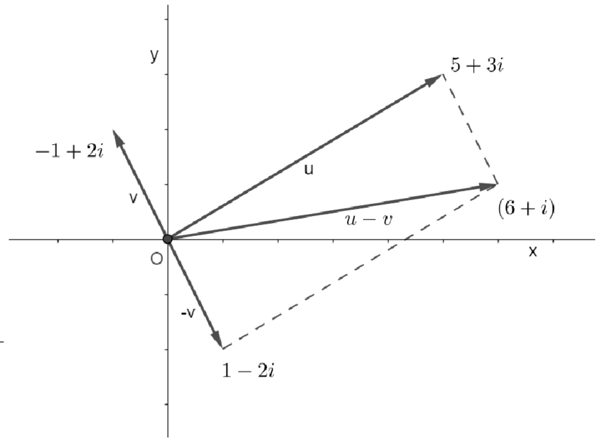
3. $2 \cdot (5 + 3i)$; $-\dfrac{1}{2} \cdot (5 + 3i)$

<u>*Řešení:*</u> Nechť $\vec{u} = (5,3), \vec{v} = (-1,2)$.

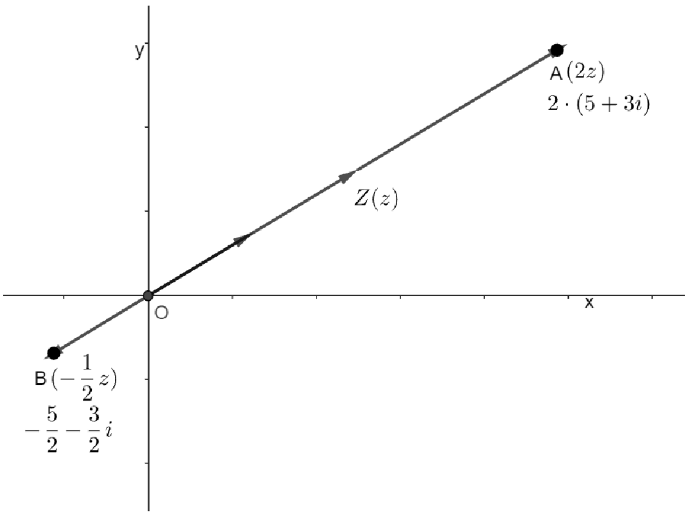
1.



2.



3.



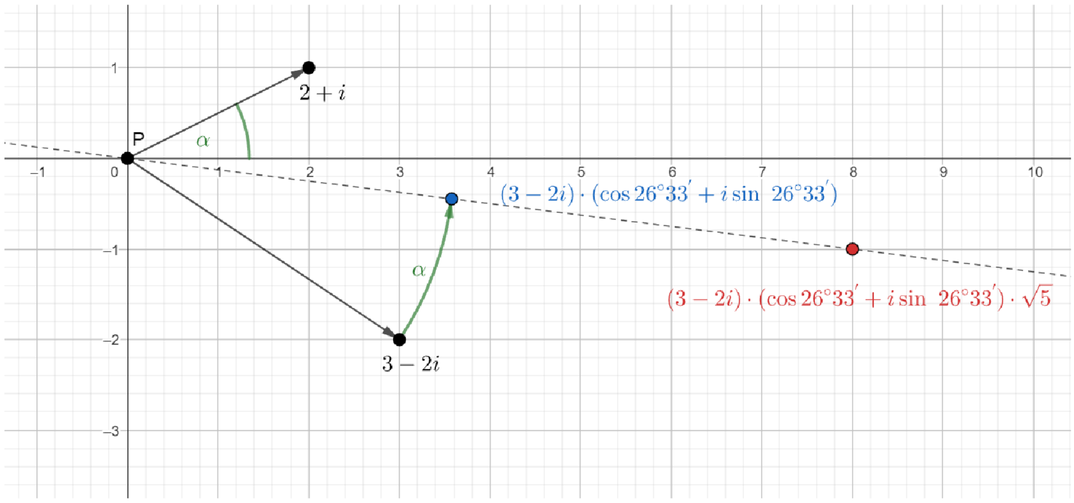
Podle Věty 2.11. Součin az reálného čísla $a \neq 0$ a komplexního čísla z je obrazem čísla z ve *stejnolehlosti* se středem v počátku a koeficientem a.

Nechť Z je obraz komplexního čísla $z = 5 + 3i$. Pak bod A je obrazem komplexního čísla $2 \cdot z = 2 \cdot (5+3i)$ ve *stejnolehlosti* se středem v počátku a koeficientem 2 a bod B je obrazem komplexního čísla $-\frac{1}{2} \cdot z = -\frac{1}{2} \cdot (5+3i)$ ve *stejnolehlosti* s týmž středem, ale s koeficientem rovným $-\frac{1}{2}$.

Příklad 3.21. Určete graficky $(3-2i)(2+i)$. [3]

<u>*Řešení:*</u> Polohový vektor obrazu komplexního čísla $3 - 2i$ otočíme okolo počátku o argu-

ment čísla $2 + i$, tedy o $\alpha = 26°33'$. Hledaný součin pak dostaneme jako obraz tohoto čísla ve stejnolehlosti se středem v počátku a s koeficientem $\sqrt{5}$. Výpočtem se můžeme přesvědčit, že je $(2 + i)(3 - 2i) = 8 - i$.



Příklad 3.22. Určete graficky $\dfrac{3-2i}{3+i}$. [3]

<u>*Řešení:*</u> Dělit komplexním číslem $z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ znamená násobit číslem

$$\frac{1}{z(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{z}\cdot[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)].$$

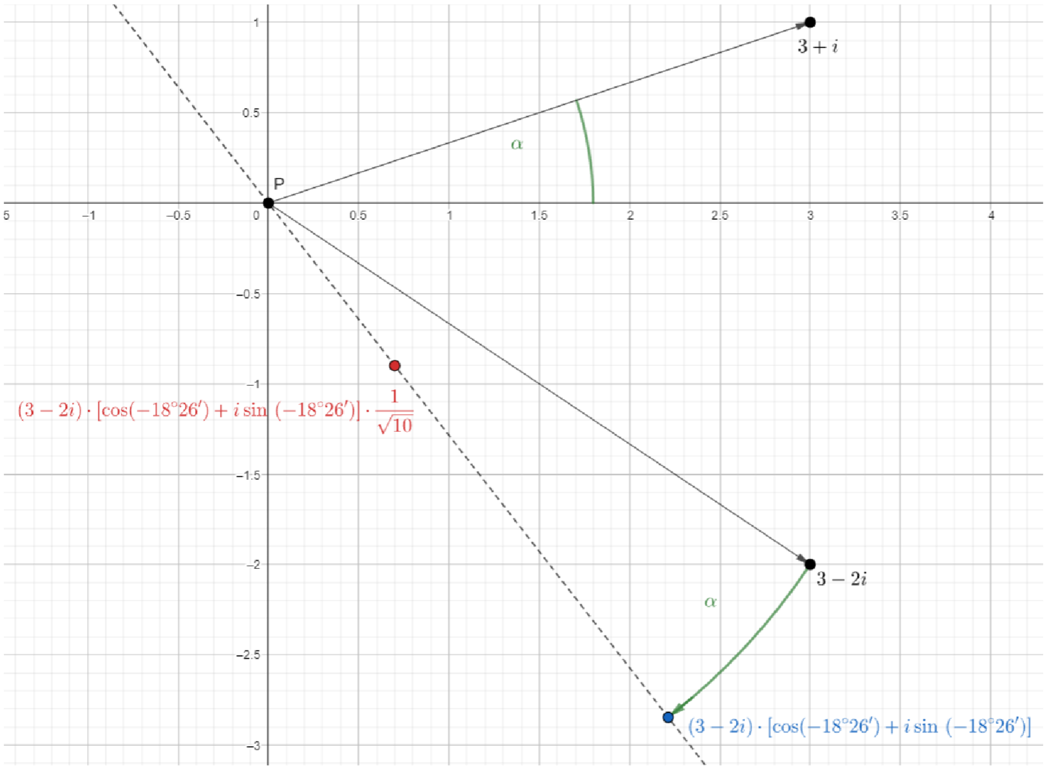
Převedením podílu na součin dostaneme

$$\frac{3-2i}{3+i} = \frac{3-2i}{\sqrt{10}\cdot(\cos 18°26' + i\sin 18°26')} = (3-2i)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot[\cos(-18°26') + i\sin(-18°26')].$$

Sestrojíme nejprve součin

$$(3-2i)\cdot[\cos(-18°26') + i\sin(-18°26')],$$

hledaný podíl pak dostaneme jako obraz tohoto čísla ve stejnolehlosti se středem v počátku a s koeficientem $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Výpočtem se můžeme přesvědčit, že $\dfrac{3-2}{3+i} = 0,7 - 0,9i$.



Příklad 3.23. Nalezněte kvadratickou rovnici, která má kořeny

1. $2 + i$, $2 - i$
2. $1 + 2i$.

<u>*Řešení:*</u>

1. (a) Kvadratická rovnice, která má kořeny u, v, se dá napsat ve tvaru součinu kořenových činitelů $(x - u)(x - v) = 0$. Tedy

   $[x - (2 + i)][x - (2 - i)] = 0,$

   $x^2 - 4x + 5 = 0$

   (b) Můžeme využít také Vietovy vzorce

   $x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 \cdot x_2 = q,$

   tedy máme

   $2 + i + 2 - i = 4 = -p, \qquad (2 + i) \cdot (2 - i) = 5 = q,$

   $x^2 - 4x + 5 = 0$

2. (a) $[x - (1 + 2i)]^2 = 0,$

   $x^2 - (2 + 4i)x + (-3 + 4i) = 0$

(b) $1+2i+1+2i = 2+4i = -p, \quad (1+2i)(1+2i) = -3+4i = q,$

$x^2 - (2+4i)x + (-3+4i) = 0.$

[5]

Příklad 3.24. V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici

$$ix^2 + (3-2i)x - 6 = 0.$$

[3]

<u>*Řešení:*</u> Kvadratickou rovnici vyřešíme algebraicky s využitím úvah v sekci 2.8.

$$D = (3-2i)^2 - 4i \cdot (-6) = 9 - 12i + 4i^2 + 24i = 5 + 12i$$

Položíme

$$\sqrt{5+12i} = a + bi.$$

Po umocnění máme

$$5 + 12i = a^2 + 2abi - b^2.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí obou čísel dostáváme

$$5 = a^2 - b^2, \qquad 12 = 2ab$$

1. Budeme postupovat užitím vztahů (2.6)

$$\begin{aligned} 5 &= a^2 + (-b)^2 \\ -36 &= a^2 \cdot (-b^2), \end{aligned}$$

kde $a^2, -b^2$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - 5t - 36 = 0,$$

tedy

$$(t-9) \cdot (t+4) = 0.$$

Pro kořeny t_1, t_2 této rovnice platí

$$\begin{aligned} t_1 &= 9 = a^2 \\ t_2 &= -4 = -b^2. \end{aligned}$$

Pak

$$\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = \pm(3+2i).$$

2. Můžeme také uvažovat takto:

$$a^2 - b^2 = 5$$
$$2ab = 12 \Rightarrow b = \frac{6}{a}$$

Tedy

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = 5$$
$$a^4 - 5a^2 - 36 = 0$$
$$(a^2 - 9)(a^2 + 4) = 0$$

Tedy

- $a^2 = 9 \Rightarrow a_{1,2} = \pm 3 \Rightarrow b = \pm 2$
- $a^2 = -4 \wedge a \in \mathbb{R} \rightarrow$ nelze.

Tedy $\sqrt{D} = \pm(3 + 2i)$.

Pak

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(3 - 2i) + 3 + 2i}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(3 - 2i) - 3 - 2i}{2i} = \frac{-6}{2i} = 3i$$

Příklad 3.25. Řešte v $\mathbb{C}$

$$2x - y = 1 + 3i$$
$$xy = 2$$

Řešení: Dosazením $y = \dfrac{2}{x}$ do první rovnice dostaneme
$2x - \dfrac{2}{x} = 1 + 3i \Rightarrow 2x^2 - (1 + 3i)x - 2 = 0.$
Potom $D = (1 + 3i)^2 + 16 = 8 + 6i.$
Položíme $\sqrt{8 + 6i} = u + vi \Rightarrow 8 + 6i = u^2 + 2uvi - v^2$
Užitím vztahů (2.6) dostaneme

$$8 = u^2 + (-v^2)$$
$$-9 = u^2 \cdot (-v^2),$$

kde $u^2, -v^2$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - 8t - 9 = 0$$
$$(t - 9)(t + 1) = 0.$$

Potom $u^2 = 9 \Rightarrow u_{1,2} = \pm 3$ a $-v^2 = -1 \Rightarrow v_{1,2} = \pm 1$, a tedy $\sqrt{D} = \pm(3+i)$.

Dostaneme tak

$$x_{1,2} = \frac{1+3i \pm (3+i)}{4} \Rightarrow x_1 = 1+i,\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

a tedy

- $y_1 = 2 \cdot (1+i) - 1 - 3i = 1 - i$
- $y_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}(-1+i) - 1 - 3i = -2 - 2i$

Příklad 3.26. V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnice

$a)\quad x^2 = \Big(\dfrac{4}{-1+i\sqrt{3}}\Big)^{12}$

$b)\quad x^2 - \dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i \cdot (1+i)^{98}} = 0$

[3]

Řešení:

$a)$ Nechť

$$z = \frac{4}{-1+i\sqrt{3}}.$$

Číslo z převedeme nejprve na algebraický tvar

$$z = \frac{4}{-1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{-1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (-1-\sqrt{3})}{4} = -1 - i\sqrt{3}.$$

Následně číslo z vyjádříme v goniometrickém tvaru

$$z = 2 \cdot \Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big).$$

Platí tedy

$$z^{12} = \Big[2 \cdot \Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big)\Big]^{12} = 2^{12} \cdot (\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 2^{12}.$$

To znamená, že $x^2 = z^{12} = 2^{12} \Rightarrow x_{1/2} = \pm\, 2^6$.

$b)$

- $$(1+i)^{100} = \Big[|\sqrt{2}| \cdot \Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big)\Big]^{100} = 2^{50} \cdot (\cos 25\pi + i\sin 25\pi) =$$
$$= 2^{50} \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = 2^{50} \cdot (-1+0) = -2^{50}$$

- $$(1-i)^{96} = \left[|\sqrt{2}| \cdot \left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)\right]^{96} = 2^{48} \cdot (\cos 168\pi + i\sin 168\pi) =$$
$$= 2^{48} \cdot (\cos 0 + i\sin 0) = 2^{48}$$

- $$i \cdot (1+i)^{98} = i \cdot \left[|\sqrt{2}| \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{98} = i \cdot \left[2^{49} \cdot \left(\cos\frac{49}{2}\pi + i\sin\frac{49}{2}\pi\right)\right] =$$
$$= i \cdot \left[2^{49} \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})\right] = -2^{49}$$

Opět můžeme postupovat algebraicky

- $(1+i)^{100} = ((1+i)^2)^{50} = (2i)^{50} = -2^{50}$
- $(1-i)^{96} = ((1-i)^2)^{48} = (-2i)^{48} = 2^{48}$
- $i \cdot (1+i)^{98} = i \cdot ((1+i)^2)^{49} = i \cdot (2i)^{49} = -2^{49}$

Tedy

$$\begin{aligned}
x^2 - \frac{-2^{50}}{2^{48} + 2^{49}} &= 0 \\
x^2 + \frac{2^{50}}{2^{48} + 2^{49}} &= 0 \\
x^2 + \frac{2^{50}}{2^{48} \cdot (1+2)} &= 0 \\
x^2 + \frac{4}{3} &= 0 \\
x^2 &= -\frac{4}{3} \\
x_{1,2} &= \pm\frac{2}{\sqrt{3}}i \\
x_{1,2} &= \pm\frac{2}{3} \cdot i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Příklad 3.27. V $\mathbb{C}$ řešte rovnici s neznámou x a komplexním parametrem p

$$(3+4i)x - (2+2i)x = 3 - 5i + px.$$

[3]

Řešení:

$$\begin{aligned}
(3+4i)x - (2+2i)x &= 3 - 5i + px \\
x \cdot (3 + 4i - 2 - 2i - p) &= 3 - 5i \\
x \cdot (1 + 2i - p) &= 3 - 5i
\end{aligned}$$

- Je-li $1+2i-p \neq 0$, tj. $p \neq 1+2i$, pak má rovnice v $\mathbb{C}$ právě jedno řešení $x = \dfrac{3-5i}{1+2i-p}$.
- Je-li $1+2i-p = 0$, tj. $p = 1+2i$, pak rovnice nemá v $\mathbb{C}$ řešení.

Příklad 3.28. V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici

$$x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 24x - 32 = 0.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 24x - 32 &= 0 \\
(x^5 - 32) + 3x(x^3 - 8) + 2x^2(x-2) &= 0 \\
(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) + 3x(x-2)[(x^2 + 2x + 4)] + 2x^2(x-2) &= 0 \\
(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + 3x^3 + 6x^2 + 12x + 2x^2) &= 0 \\
x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 20x + 16 &= 0 \\
x^2 + 5x + 12 + \frac{20}{x} + \frac{16}{x^2} &= 0 \\
\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + 5 \cdot \left(x + \frac{4}{x}\right) + 12 &= 0
\end{aligned}$$

Položme $y = x + \dfrac{4}{x}$ a $y^2 - 8 = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$, pak

$$\begin{aligned}
y^2 - 8 + 5y + 12 &= 0 \\
y^2 + 5y + 4 &= 0 \\
(y+1)(y+4) &= 0 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = -4.
\end{aligned}$$

Dostaneme následující kořeny rovnice

- $x_1 = 2$
- $y_1 = -1:$

$$\begin{aligned}
x + \frac{4}{x} &= -1 \\
x^2 + x + 4 = 0 &\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}
\end{aligned}$$

- $y_2 = -4$:

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x} &= -4 \\ x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ (x+2)^2 &= 0 \Rightarrow x_{4,5} = -2 \end{aligned}$$

Příklad 3.29. V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici

$$3x^3 + 26x^2 + 52x + 24 = 0.$$

<u>*Řešení:*</u>

$$\begin{aligned} 3x^3 + 26x^2 + 52x + 24 &= 0 \\ (3x^3 + 24) + 26 \cdot (x+2) &= 0 \\ 3 \cdot (x+2)(x^2 - 2x + 4) + 26x(x+2) &= 0 \\ (x+2)(3x^2 - 6x + 12 + 26x) &= 0 \\ (x+2)(3x^2 + 20x - 12) &= 0 \end{aligned}$$

Dostaneme následující kořeny rovnice

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = -6 \qquad x_3 = -\frac{2}{3}.$$

Příklad 3.30. V *Gaussově rovině* zobrazte všechna komplexní čísla z, pro něž platí

$$\left| z + \frac{i}{1+i} \right| > |z - 1|.$$

[3]

<u>*Řešení:*</u>

$$\frac{i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{i+1}{2}$$

(a) Využijeme Větu 2.9.

Pak

$$\begin{aligned} \left| z + \frac{1+i}{2} \right| &> |z-1| \\ \left| z - \frac{-1-i}{2} \right| &> |z-1| \\ \left| z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right| &> |z-1|. \end{aligned}$$

Hledáme tedy množinu všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od bodu $B_1 = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ je větší, než vzdálenost od bodu $B_2 = [1, 0]$.

Řešením je polorovina, jejíž hraniční přímka bude osa úsečky B_1B_2.

Střed úsečky B_1B_2 je $S = \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right]$.

$$\vec{u} = \vec{n} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + c = 0$$

Tedy

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}.$$

Nalezneme tak rovnici hledané osy úsečky

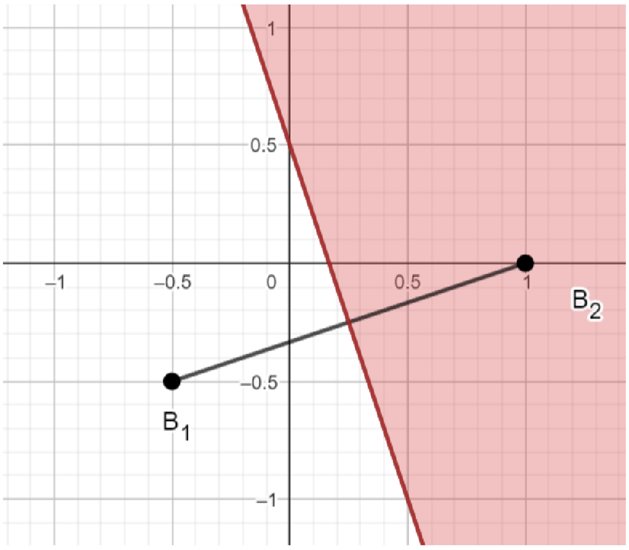
$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} &= 0 \\
3x + y - \frac{1}{2} &= 0 \\
y &= -3x + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Řešením je polorovina obsahující bod $B_2 = [1, 0]$, a tedy $y > -3x + \frac{1}{2}$.

(b) Položme $z = x + yi$.

Pak

$$\begin{aligned}
\left|x + yi + \frac{1+i}{2}\right| &> |x + yi - 1| \\
\left|\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)i\right| &> |(x - 1) + yi| \\
\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} &> \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\
x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} &> x^2 - 2x + 1 + y^2 \\
y &> -3x + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$



Příklad 3.31. V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z, pro něž platí

$$\left|z - \frac{1-i}{2}\right| < |z|.$$

<u>*Řešení:*</u>

(a) Opět využijeme Větu 2.9.

Pak

$$\left|z - \frac{1-i}{2}\right| < |z|$$
$$\left|z - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| < |z|.$$

Hledáme tedy množinu všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od bodu $B_1 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ je menší, než vzdálenost od bodu $B_2 = [0, 0]$.

Střed úsečky B_1, B_2 je $S = \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right]$.

$$\vec{u} = \vec{n} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + c = 0$$

Tedy

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$

Nalezneme tak rovnici hledané osy úsečky

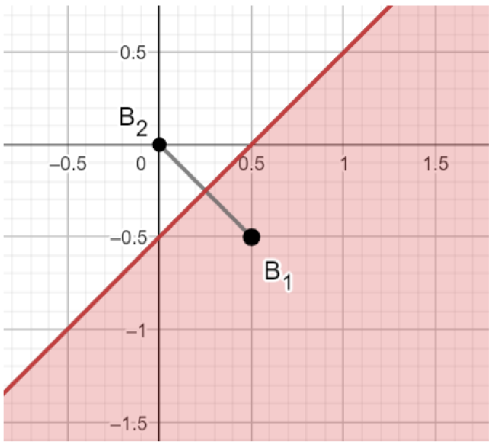
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = 0$$
$$x - y - \frac{1}{2} = 0$$
$$y = x - \frac{1}{2}$$

Řešením je polorovina obsahující bod $B_1 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ a tedy $y < x - \frac{1}{2}$.

(b) Položme $z = x + yi$.

Pak

$$\begin{aligned}
\left|x + yi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| &< |x + yi| \\
\left|\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)\right| &< |x + yi| \\
\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} &< \sqrt{x^2 + y^2} \\
-x + y + \frac{1}{2} &< 0 \\
y &< x - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$



Příklad 3.32. Nalezněte množinu M všech obrazů komplexních čísel z takových, že $Re\,\frac{1}{z} = a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pro která čísla a náleží obraz komplexního čísla $z = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{12}$ do uvažované oblasti M?

<u>*Řešení:*</u> Položme $z = x + yi$, pak $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi}$. Dále

$$\frac{1}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2}i,$$

tedy

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = a; \quad a \neq 0 \Rightarrow x \neq 0;\ x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}
a \cdot (x^2 + y^2) &= x \\
\left(x^2 - \frac{x}{a}\right) + y^2 &= 0 \\
\left(x - \frac{1}{2a}\right) + (y - 0)^2 &= \frac{1}{4a^2}
\end{aligned}$$

Nalezli jsme rovnici kružnice, která má střed v bodě $S = \left[\frac{1}{2a}, 0\right]$ a poloměr $r = \frac{1}{2|a|}$.

Položme $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, pak $x = 1 \cdot \left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$.

Dostaneme $x^{12} = (\cos 20\pi + i\sin 20\pi)$, a tedy $x^{12} = 1$.

Pak $z = 2$, a tedy pro číslo $a = \frac{1}{2}$ náleží obraz čísla z do uvažované oblasti M.

Příklad 3.33. Je-li komplexní číslo u kořenem algebraické rovnice s reálnými koeficienty, je kořenem téže rovnice i číslo $\overline{u}$ komplexně sdružené k u. Dokažte toto tvrzení.

Řešení: Algebraická rovnice se dá zapsat ve tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kde n je přirozené číslo, $a_0 \neq 0$. Podle našeho předpokladu je

$$a_0u^n + a_1u^{n-1} + ... + a_{n-1}u + a_n = 0$$

a všechny koeficienty této rovnice $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ jsou reálná čísla. Dosadíme-li do levé strany rovnice číslo komplexně sdružené ke kořenu u, dostaneme komplexní číslo

$$a_0\overline{u}^n + a_1\overline{u}^{n-1} + ... + a_{n-1}\overline{u} + a_n.$$

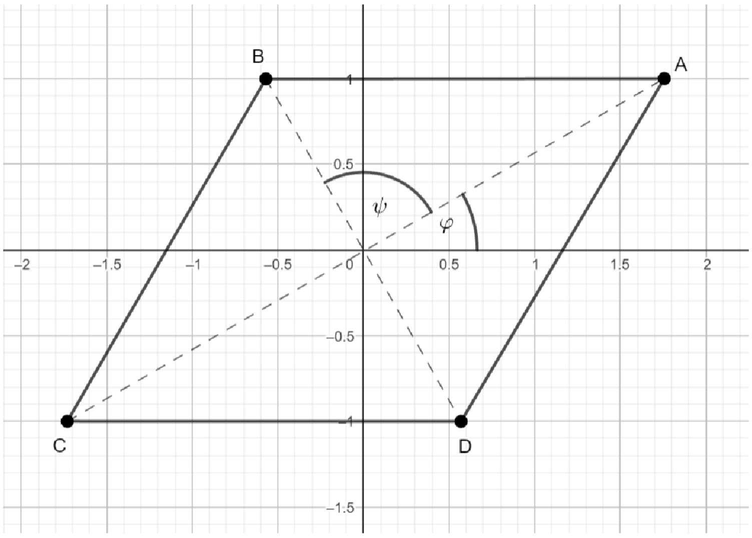
Podle Věty 2.5 dostáváme

$$\begin{aligned} a_0\overline{u}^n + a_1\overline{u}^{n-1} + ... + a_{n-1}\overline{u} + a_n &= \overline{a}_0\overline{u}^n + \overline{a}_1\overline{u}^{n-1} + ... + \overline{a}_{n-1}\overline{u} + \overline{a}_n = \\ &= \overline{a_0u^n} + \overline{a_1u^{n-1}} + ... + \overline{a_{n-1}u} + \overline{a}_n = \overline{a_0u^n + a_1u^{n-1} + ... + a_n} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Protože číslo u je podle předpokladu kořenem dané rovnice, je také $\overline{u}$ kořenem této rovnice. [5]

Příklad 3.34. Nalezněte komplexní čísla, jejichž obrazy tvoří vrcholy kosočtverce $ABCD$ se středem v počátku P, víte-li, že vrchol A tohoto kosočtverce je obrazem komplexního čísla $a = \sqrt{3} + i$ a strana AB je rovnoběžná s osou x.

Řešení: Nechť B je obrazem komplexního čísla $b = b_1 + b_2i$.
Jelikož $a = \sqrt{3} + i$ a $AB \parallel o_x$, pak $b = b_1 + i$.



Je-li $Arg\, a = \varphi$, pak $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sin\varphi = \dfrac{1}{2}$, a tedy $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

Nechť $Arg\, b = \psi$. Protože uhlopříčky v kosočtverci jsou navzájem kolmé, tak $\psi = \varphi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{3}\pi$.

Dostaneme

$$\sin\psi = \frac{b_2}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{b_2}{\sin\psi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\psi = \frac{b_1}{|b|} \Rightarrow b_1 = |b|\cos\psi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tedy $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} + i$.

Nechť C a D jsou obrazy komplexních čísel c, d. Do bodu C, resp. do bodu D, se dostaneme otočením bodu A, resp. bodu B, okolo počátku o úhel π, tedy (podle Důsledku 1 Věty 2.10) máme

$$c = a \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = -a = -\sqrt{3} - i$$

$$d = b \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = -b = \frac{\sqrt{3}}{3} - i.$$

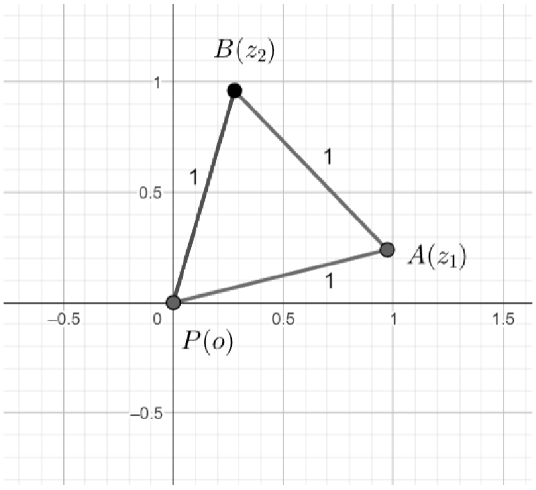
Příklad 3.35. V Gaussově rovině tvoří obrazy komplexních čísel o, z_1, z_2 vrcholy rovnostranného trojúhelníka o délce strany 1. Dokažte, že platí

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} = 1.$$

[12]

<u>*Řešení:*</u>

a) Nechť PAB je rovnostranný trojúhelník takový, že P, A, B jsou po sobě obrazy komplexních čísel o, z_1, z_2.



Pak $d(PA) = |z_1| = 1$, $d(PB) = |z_2| = 1$.
Protože trojúhelník PAB je rovnostranný, je $\left|\measuredangle APB = \dfrac{\pi}{3}\right|$. Z vrcholu A se tedy do vrcholu B dostaneme otočením okolo počátku P o 60°. Podle důsledku Věty 2.10, jestliže $z_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$, pak

$$z_2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$$

Tedy

$$\begin{aligned} z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\left[\cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{3}\right)\right] + \\ &+ \left[\cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1) = \\ &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\left[\cos\left(-\varphi_1 - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\varphi_1 - \frac{\pi}{3}\right)\right] + \\ &+ \left[\cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot(\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)) = \end{aligned}$$

$$= \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] + \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

b) Nechť $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Pak $|z_1|^2 = a^2 + b^2 = 1$, $|z_2|^2 = c^2 + d^2 = 1$, tedy

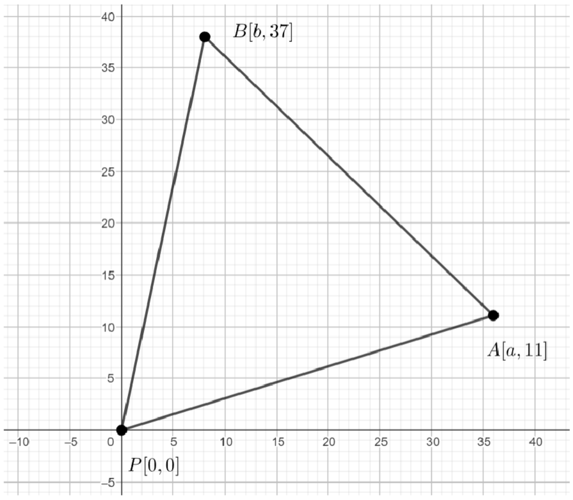
- $z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} = (a + bi)\cdot(c - di) + (c + di)\cdot(a - bi) = 2\cdot(ac + bd)$
- $|z_1 - z_2|^2 = 1$, pak

  $|z_1 - z_2|^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2 = (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 2\cdot(ac + bd) = 1.$

To znamená, že
$1 + 1 - 2\cdot(ac + bd) = 1$, tj. $2\cdot(ac + bd) = 1$, a tedy $z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} = 1$.

Příklad 3.36. Body $P[0, 0]$, $A[a, 11]$, $B[b, 37]$ v Gaussově rovině jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka PAB. Určete čísla a, b.

Řešení:



Úlohu budeme řešit dvěma způsoby:

1. Položme $x = a + 11i$, $y = b + 37i$. Bod A, obraz čísla x, otočíme do bodu B, obrazu čísla y, o $\frac{\pi}{3}$. Dostaneme

$$y = (a + 11i) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (a + 11i) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

   tedy

$$y = b + 37i = \left(\frac{1}{2}a - \frac{11}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{11}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)i$$

   a

$$b = \frac{1}{2}a - \frac{11}{2}\sqrt{3}$$
$$37 = \frac{11}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

   Dostaneme

$$74 = 11 + a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{63}{3}\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$$
$$b = \frac{21}{2}\sqrt{3} - \frac{11}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3},$$

   a tedy $ab = 315$.

2. Protože PAB je rovnostranný trojúhelník, pak $d(PA) = d(PB) = d(AB)$. Máme

   $\sqrt{a^2 + 11^2} = \sqrt{b^2 + 37^2} = \sqrt{(a - b)^2 + (11 - 37)^2}$, tj. $a^2 + 121 = b^2 + 1369 = (a - b)^2 + 676$.

   - $a^2 + 121 = b^2 + 1369 \Rightarrow a^2 = b^2 + 1248$

- $a^2 - 2ab + b^2 + 676 = a^2 + 121 \Rightarrow b^2 = 2ab - 555$

  $a^2 - 2ab + b^2 + 676 = b^2 + 1369 \Rightarrow a^2 = 2ab + 693.$

Dostáváme tak

$$b^2 + 1248 = 2b \cdot \sqrt{b^2 + 1248} + 693$$
$$b^4 + 1110b^2 + 308025 = 4b^4 + 4992b^2$$
$$3b^4 + 3882b^2 - 308025 = 0$$
$$(3b^2 - 225)(b^2 + 1369) = 0.$$

Pak

$3b^2 = 225$, tj. $b = 5\sqrt{3}$ a $a = \sqrt{1323} = 21 \cdot \sqrt{3}$. Tedy $ab = 315$.

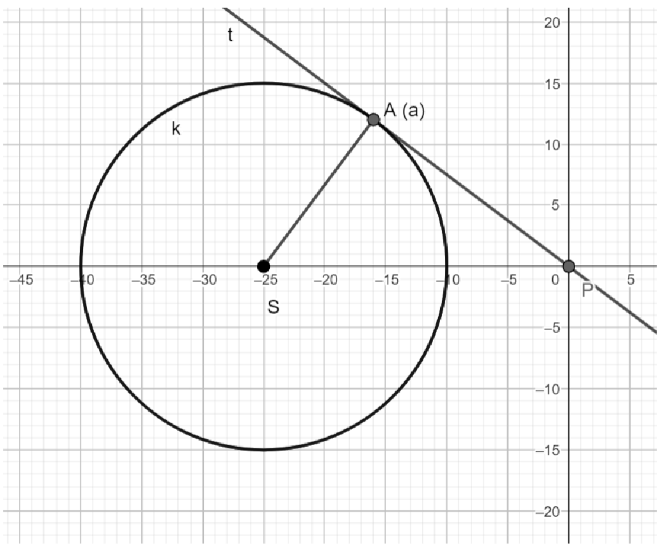
Příklad 3.37. Určete všechna komplexní čísla, která ze všech čísel splňující podmínku $|z + 25| \leq 15$ mají

$a)$ největší absolutní hodnotu

$b)$ nejmenší argument.

[3]

<u>*Řešení:*</u> Položme $z = x + yi$. Pak $|z + 25| \leq 15$, což znamená, že $|(x + 25) + yi| \leq 15$ a to je právě když $(x + 25)^2 + y^2 \leq 225$. Tedy obrazy všech takových bodů tvoří vnitřek kruhu $k(S, r)$, kde $S = [-25, 0]$ a $r = 15$.



$a)$ Je zřejmé, že největší absolutní hodnotu má číslo $z = -40$.

$b)$ Nejmenší argument má číslo a, jehož obraz, tedy bod A, je bodem dotyku tečny ke kružnici k vedené z počátku P a kružnice k.

Platí $|a| = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{625 - 225} = 20$.

Protože $a \in k \wedge |a| = 20 \wedge a = x + yi$, dostáváme

$$\begin{aligned} (x+25)^2 + y^2 &= 225 \\ x^2 + y^2 &= 400, \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} x^2 + 50x + 625 + y^2 &= 225 \\ x^2 + y^2 &= 400. \end{aligned}$$

Pak $50x = -800$. To znamená, že $x = -16$ a $y^2 = 400 - 256$, tj. $y^2 = 144$ a $y = \pm 12$.

Tedy nejmenší argument má číslo $a = -16 + 12i$.

Příklad 3.38. Určete obsah čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou v Gaussově rovině čísla $z, zi, -z, -zi$, kde z je dané komplexní číslo.

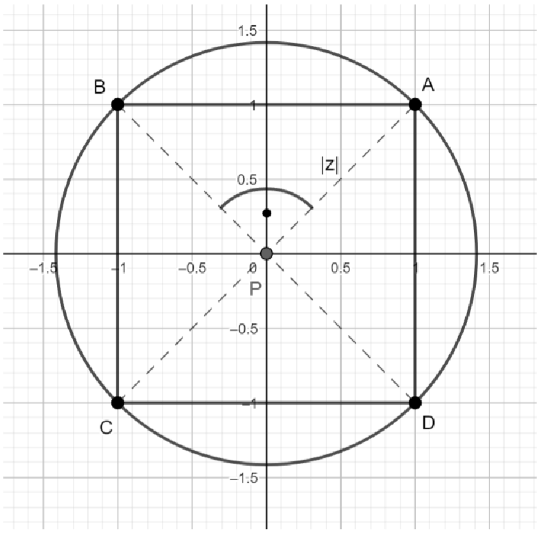
[3]

<u>*Řešení:*</u>

- A je obraz čísla $z = x + yi$.
- B je obraz čísla $zi = -y + xi = z \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$. Bod B tedy získáme z bodu A otočením o $\frac{\pi}{2}$.
- C je obraz čísla $-z = -x - yi = (zi) \cdot i$, a tedy bod C získáme z bodu B otočením o $\frac{\pi}{2}$.
- D je obraz čísla $-zi = y - xi$. Bod D získáme z C otočením o $\frac{\pi}{2}$.

Útvarem je tedy čtverec $ABCD$.

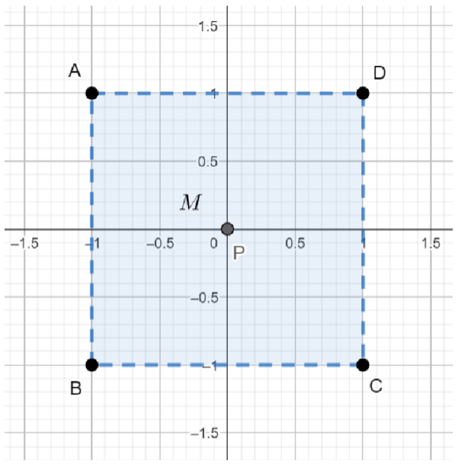
$$S_{\Delta PAB} = \frac{|z|^2}{2}. \quad \text{To znamená, že} \quad S_{\square ABCD} = 4 \cdot \frac{|z|^2}{2} = 2 \cdot |z|^2.$$



Příklad 3.39. V Gaussově rovině zobrazte množinu M všech komplexních čísel z, pro která platí $|Re\,z| < 1 \wedge |Im\,z| < 1$ a rozhodněte, zda obrazy kořenů rovnice $x^2 - (3 - i)x + 2 + 3i = 0$ náleží množině M.

Řešení:

a) Položme $z = x + yi$. Pak $Re\,z = x$ a $Im\,z = y$ a $|Re\,z| = |x| < 1$, $|Im\,z| = |y| < 1$.
Tedy $x \in (-1, 1), y \in (-1, 1)$.



Obrazy všech komplexních čísel z tedy tvoří vnitřek čtverce o straně délky 1 a se středem v počátečním bodě P.

b) Budeme řešit rovnici $x^2 - (3 - i)x + 2 + 3i = 0$, kdy
$D = 8 - 6i - 8 - 12i = -18i$.
Položíme $\sqrt{D} = \sqrt{-18i} = a + bi$. Pak $-18i = a^2 + 2abi - b^2$,
a tedy $a^2 - b^2 = 0, \;\; a^2 \cdot (-b)^2 = -81$.
Odpovídající kvadratická rovnice má tvar $t^2 - 81 = 0$.

Dostáváme tak $t_1 = a^2 = 9$ a $t_2 = b^2 = 9$.
Pak $\sqrt{D} = \pm(3 - 3i)$ a $x_{1,2} = \dfrac{3 - i \pm (3 - 3i)}{2}$,
tedy $x_1 = 3 - 2i$, $x_2 = i$, a proto ani jeden kořen nepatří do množiny M.

Kapitola 4

Neřešené příklady s výsledky

Příklad 4.1. Vypočítejte

$$\frac{\left|\frac{3-4i}{5i}\right| \cdot \left|\frac{1+i}{3-i}\right|}{|2i-1|+|-i|}$$

<u>*Řešení:*</u> $\dfrac{5-\sqrt{5}}{20}$ [14]

Příklad 4.2. Určete reálná čísla a, b taková, že platí

$$(1+2i)a + (3-6i)b = -\frac{2+10i}{2}$$

<u>*Řešení:*</u> $a = -\dfrac{7}{4}, \qquad b = \dfrac{1}{4}$

Příklad 4.3. Řešte v $\mathbb{C}$ soustavu rovnic

$$(1+2i)z + 2v = 2$$

$$iz + (1-2i)v = 1$$

Příklad 4.4. Vyjádřete v goniometrickém tvaru komplexní číslo

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$$

<u>*Řešení:*</u> $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos\dfrac{1}{3}\pi + i\sin\dfrac{1}{3}\pi)$

Příklad 4.5. Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$$

<u>*Řešení:*</u> $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ [16]

Příklad 4.6. Vypočítejte

$$\prod_{k=1}^{4} \frac{1+ki}{1-ki}$$

<u>*Řešení:*</u> $-\frac{15}{17}+\frac{8}{17}i$ [15]

Příklad 4.7. Řešte v $\mathbb{C}$ soustavu rovnic

$$(1+i)\cdot z - 3v = -8+7i$$
$$2z + (2+i)\cdot v = 3i.$$

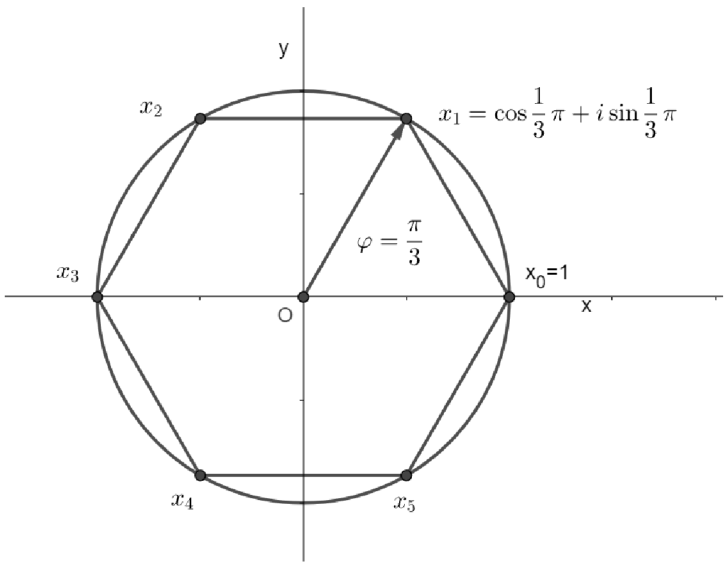
<u>*Řešení:*</u> $z = -2+3i, \quad v = 1-2i$

Příklad 4.8. Řešte binomickou rovnici a její kořeny znázorněte v Gaussově rovině

$$x^6 - 1 = 0.$$

<u>*Řešení:*</u>

- $x_0 = 1,$
- $x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$
- $x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$
- $x_3 = -1,$
- $x_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$
- $x_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



Poznámka. Rovnici $x^6 - 1 = 0$, můžeme řešit také algebraicky rozkladem levé strany na součin takto:

$$x^6 - 1 = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1).$$

Jejím řešením jsou tak kořeny rovnic

$$x-1=0, \quad x+1=0, \quad x^2+x+1=0, \quad x^2-x+1=0,$$

tedy čísla

$$1, \quad -1, \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

[3]

Příklad 4.9. V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici

$$x^4 = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

<u>*Řešení:*</u> $x_k = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3$

Příklad 4.10. Řešte binomickou rovnici a její kořeny znázorněte v Gaussově rovině

$$x^8 - 1 = 0.$$

<u>*Řešení:*</u> Kořeny binomické rovnice budeme hledat ve tvaru

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, ..., 7.$$

Kořeny této rovnice jsou čísla

$$x_0 = 1, \qquad x_2 = i, \qquad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1+i), \qquad x_4 = -1$$
$$x_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1-i), \qquad x_6 = -i, \qquad x_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1-i).$$

Obrazy těchto čísel v Gaussově rovině tvoří vrcholy pravidelného osmiúhelníku.

Příklad 4.11. V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z, pro něž platí

$$\left|z - \frac{1-2i}{i}\right| \leq \left|z + \frac{1-2i}{i}\right|.$$

<u>*Řešení:*</u>

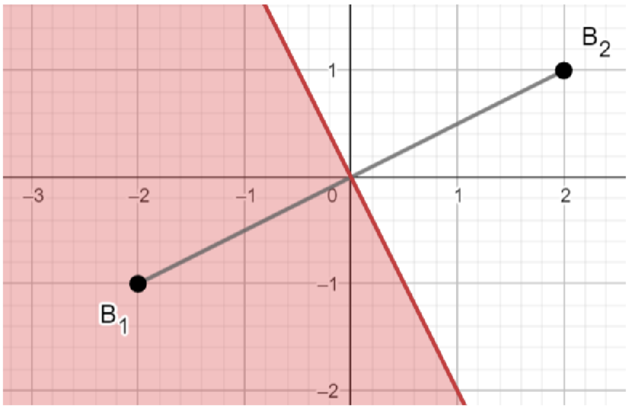
Příklad 4.12. V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici

$$x^3 + \frac{(1-i)^{48}}{(1+i)^{44} + i \cdot (1-i)^{46}} = 0.$$

<u>*Řešení:*</u>

$$x_k = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}\right), \; k = 0, 1, 2.$$

[3]



Příklad 4.13. V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Řešení: $x_1 = 1, \qquad x_2 = 3, \qquad x_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{2}$

Závěr

V době, kdy matematici začínali pracovat s komplexními čísly, v nich někteří vidělo něco, co není z tohoto světa. Tehdy také vznikl název imaginární číslo, který naznačoval, že se jedná o čísla pomyslná. V dřívějších dobách se rovněž zdálo, že komplexní čísla nemohou mít žádné praktické využití. Ovšem dnes existuje celá řada technických oborů, ve kterých komplexní čísla hrají důležitou a nezastupitelnou roli. V matematice samotná komplexní čísla umožnila nejen vznik nových odvětví, ale přispěla i k pochopení souvislostí mezi partiemi zdánlivě nijak nesouvisejícími.

Samotná práce pro mě byla velikým přínosem, neboť jsem měl možnost řešit příklady, se kterými jsem se doposud nesetkal.

Literatura

[1] BEČVÁŘ, Jindřich. *Z historie lineární algebry: komplexní a hyperkomplexní čísla, lineární algebry* [online]. Praha: Matfyzpress, 2007. Dostupné z: <https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400929/DejinyMat_35-2007-1_10.pdf>. [cit. 2023-01-27].

[2] BLAŽEK, Jaroslav, Emil CALDA a Blanka KUSSOVÁ. *Algebra a teoretická aritmetika*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983.

[3] CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia: komplexní čísla*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2020. ISBN 987-80-7196-364-6.

[4] DOSTÁLOVÁ, Marie a kol. *Základy matematiky* [online]. Ostrava: Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava, 2006. Dostupné z: <https://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Zaklady_matematiky/zm.pdf>. [cit. 2023-06-07].

[5] JARNÍK, Jiří. *Komplexní čísla a funkce. Praha: Mladá fronta*, 1967.

[6] JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. 2. část. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN: 80-04-21341-3.

[7] KABELE, Jiří. *Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1964.

[8] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*. Praha: ČSAV, 1956.

[9] KRIEGELSTEIN, Eduard. *Sbírka úloh z matematiky pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy.* 9.vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1980.

[10] KUČERA, Radan a SKULA, Ladislav. *Číselné obory.* Brno: Masarykova univerzita, 1998. ISBN: 80-210-1965-4.

[11] KÜHNOVÁ, Jitka. Dostupné z: síťový disk: sw(\\ proteus.uhk.cz)(N:UKAZKY\). *Seminar_SS_matematiky1_2019*.[online]. [cit. 2023-01-04].

[12] Matematická olympiáda [online]. Masarykova univerzita, © 2024. Dostupné z:<https://www.matematickaolympiada.cz/>. [cit. 2024-03-15].

[13] MERINO, Orlando. *A Short History of Complex Numbers* [online]. University of Rhode Island, 2006. Dostupné z: <https://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf>. [cit. 2023-02-06].

[14] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2022. ISBN:978-80-7196-487-2.

[15] RÁB, Miloš. *Komplexní čísla v elementární matematice*. 2. přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1996. ISBN: 80-210-1475-X.

[16] SCHMIDTMAYER, Josef a kol. *Základní požadavky ze středoškolské matematiky pro studium na vysokých školách technického směru*. Praha: ČVUT, 1974.

[17] VEJSADA, František a TALAFOUS, František. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969.

[18] ZEDNÍK, Josef. *Algebra a teoretická aritmetika II*. Olomouc: Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého, 1986.