UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Úloha komplementarity a její aplikace

Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Horymír Netuka, Ph.D.
Rok odevzdání: 2010

Vypracovala:
Bc. Miroslava Martináková
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Horymíra Netuky, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 8. dubna 2010

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především svému vedoucímu diplomové práce panu RNDr. Horymíru Netukovi, Ph.D., že měl se mnou dostatek trpělivosti, aby mi pomohl dovést tuto práci ke zdárnému konci. Také bych ráda poděkovala paní Mgr. Evě Bohanesové, Ph.D., která mi pomohla s aplikačními příklady, a své rodině a přátelům, že mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Úvod

Cílem této práce je nastudovat problematiku úlohy komplementarity. Seznámíme se s tvary úlohy lineární i nelineární komplementarity. Zaměříme se na metody řešení především úlohy lineární komplementarity a vyzkoušíme si je na aplikačních příkladech. Součástí práce bude také programová realizace algoritmů. Využijeme program Matlab.

V první kapitole uvádíme základní pojmy, které jsou potřebné k pochopení následujícího výkladu.

Ve druhé kapitole se zabýváme jednotlivými tvary komplementarity. V první části se věnujeme úloze lineární komplementarity a jejím speciálním tvarům jako je smíšená, horizontální a vertikální lineární komplementarita. Standardní tvar úlohy linearní komplementarity označujeme symbolem **LCP**. Ukážeme si převody speciálních tvarů na standardní tvar, ve kterém hledáme dva vektory $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$ a $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ tak, že vyhovují vztahům $\mathbf{w} = \mathbf{M}\mathbf{z} - \mathbf{q}$, $\mathbf{w}^T\mathbf{z} = 0$ a $\mathbf{w}, \mathbf{z} \geq 0$. Podmínku $\mathbf{w}^T\mathbf{z} = 0$ nazýváme komplementární. Odtud název celé úlohy. Vstupními daty jsou matice $\mathbf{M}$ a vektor $\mathbf{q}$. V úloze nelineární komplementarity máme nelineární funkci $F(\mathbf{x})$ a úkolem je nalézt vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ tak, že $F(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \geq 0$ a $\mathbf{x}^T F(\mathbf{x}) = 0$. Zde mají být proměnné nezáporné. V praxi se ale často objevují variančí nerovnice, kde mají proměnné dolní nebo horní hranici nebo obě současně. V úloze smíšené nelineární komplementarity jsou základní podmínky ve tvaru nelineárních rovností a komplementární podmínky jsou aplikovány pouze na některé proměnné a funkce.

Úloha **LCP** může mít jednoznačné řešení, nekonečně mnoho řešení, prázdnou množinu přípustných řešení nebo komplementární, ale ne přípustné řešení. Při řešení úlohy bude hrát důležitou roli tvar matice $\mathbf{M}$.

Pivotovací metody pro úlohu **LCP** jsou popsány ve čtvrté kapitole. Konkrétně Lemkeho metoda a hlavní pivotovací metoda, které využívají simplexovou tabulku. V Lemkeho metodě zavádíme umělou proměnnou $\mathbf{z}_0$, která nám hned v prvním kroku zajistí kladné hodnoty vektoru $\mathbf{q}$. Cílem je během metody dosáhnout toho, že $\mathbf{z}_0 = 0$. Stěžejní v celé metodě je výběr hlavního prvku, nebo-li pivota, kterého vybíráme pomocí podílového kritéria. Použití tohoto kritéria nám vždy nemusí zajistit konečnost metody, proto podílové kritérium nahradíme lexikografickým pravidlem.

V hlavní pivotovací metodě umělou proměnnou nezavádíme. V případě, že v některé fázi vybereme pivota rovno nule, potom tato metoda není schopna nalézt řešení.

Iterační metody a jejich konvergence popisujeme v páté kapitole. Uvádíme zde dvě: pro symetrickou matici $\mathbf{M}$ a pro obecnou matici $\mathbf{M}$. Tyto metody jsou snadné na programování.

Další metoda pro řešení úlohy **LCP** je metoda vnitřních bodů.

V poslední kapitole si uvádíme aplikace úlohy **LCP**. Nejdříve si ukážeme řešení úloh lineárního a kvadratického programování a to převodem na úlohu **LCP** na základě Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek. Dedikované portfolio, swapové portfolio a Markowitzův model reprezentují aplikační příklady. U dedikovaného portfolia předpokládáme, že se finanční toky a splátky ze závazků musejí v jednotlivých okamžicích rovnat. Optimalizačním kritériem je minimalizace výdajů na pořízení portfolia obligací. Principem swapového portfolia je nákup nových a prodej držených obligací tak, že chceme maximalizovat rozdíl mezi příjmy z prodaných a výdaji nakupovaných obligací. Markowitzův model je formulován jako stochastický model, který minimalizuje riziko portfolia a zároveň požadujeme určitou výši očekávaného výnosu portfolia.

Programy jsou přiloženy na CD.

1. Základní definice

Definice 1. Čtvercová matice $\mathbf{M}$ typu $n \times n$ se nazývá pozitivně definitní, pokud platí

$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} > 0,$$

pro $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Definice 2. Čtvercová matice $\mathbf{M}$ typu $n \times n$ se nazývá pozitivně semidefinitní, pokud platí

$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} \geq 0,$$

pro $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Definice 3. Čtvercová matice $\mathbf{M}$ typu $n \times n$ se nazývá kopozitivní, pokud platí

$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} \geq 0,$$

pro $\forall\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Definice 4. Čtvercová matice $\mathbf{M}$ typu $n \times n$ se nazývá ostře kopozitivní, pokud platí

$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} > 0,$$

pro $\forall\ \mathbf{x} > \mathbf{0}$.

Definice 5. Čtvercová matice $\mathbf{M}$ typu $n \times n$ se nazývá kopozitivní plus, pokud je kopozitivní a pokud $(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pro $\forall\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ tak, že

$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} = 0 \ \text{ a } \ \mathbf{M}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Lemma 1. Nechť $\mathbf{M}$ je pozitivně semidefinitní matice, potom $\mathbf{M}$ je kopozitivní plus.

Důkaz: $\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} \geq 0\ \forall\ \mathbf{x},$ tedy i $\forall\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$,
$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} = 0,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow (\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)\mathbf{x} = 0.$ □

Definice 6. Čtvercová matice $\mathbf{M}$ typu $n \times n$ se nazývá P-matice, pokud jsou všechny její hlavní minory kladné.

Důsledek 1. Je-li matice $\mathbf{M}$ P-matice, potom je $det(\mathbf{M}) > 0$ a $m_{ii} > 0 \ \forall \ i$ $i = 1, \ldots, n$.

Věta 1. Matice $\mathbf{M}$ je P-matice právě tehdy, když pro $\forall \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ existuje i, $i = 1, \ldots, n$ tak, že $x_i(Mx)_i > 0$.

Důkaz: [12], str. 26

2. Úlohy komplementarity

Úlohy komplementarity dělíme na lineární a nelineární. Ukážeme si zde jejich standardní a speciální tvary.

2.1. Standardní tvar úlohy lineární komplementarity

V této části si podrobněji popíšeme úlohu lineární komplementarity. Budeme využívat stručné označení **LCP**, které je sestaveno z prvních písmen anglického názvu "Linear Complementarity Problem". Jedná se o nejjednodušší typ komplementarity. Úloha **LCP** vychází z disciplíny matematického programování. V této disciplíně se vyskytují úlohy minimalizovat nebo maximalizovat danou účelovou funkci za daných omezujících podmínek. Podněty pro vznik těchto úloh přicházely z oblasti fyziky, technických věd a především z oblasti ekonomie. Jejich speciální struktury umožnily navrhnout efektivnější algoritmy na jejich řešení. Patří mezi ně právě úloha **LCP**. Pomocí ní můžeme řešit úlohy lineárního programování, kvadratického programování, úlohy zlomkového programování, úlohy separovatelné a úlohy geometrického programování.

Definice 7. Nechť $\mathbf{M}$ je čtvercová matice typu $n \times n$ a $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ je libovolný sloupcový vektor. Úkolem je najít vektory $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$ a $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ tak, aby splňovaly následující vztahy:

$$\mathbf{w} = \mathbf{Mz} + \mathbf{q} \tag{1}$$

$$\mathbf{w}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \tag{2}$$

$$\mathbf{w}^T\mathbf{z} = 0. \tag{3}$$

Vstupní data této úlohy jsou matice $\mathbf{M}$ a vektor $\mathbf{q}$, proto se v literatuře můžeme setkat i se zápisem $\mathbf{LCP}(\mathbf{q}, \mathbf{M})$. Pokud je matice $\mathbf{M}$ pozitivně semidefinitní, potom úlohu **LCP** nazýváme monotónní. Úloha **LCP** není optimalizační problém, protože neobsahuje žádnou účelovou funkci, ale s optimalizací úzce souvisí. Jedná se nám o vyřešení soustavy (1)-(3), která je díky podmínce (3) nelineární.

Vztah $\mathbf{w}^T\mathbf{z} = 0$ je ekvivalentní zápisu $\sum_{i=1}^{n} w_i z_i = 0$, tj. $w_i z_i = 0 \; \forall \; i = 1, \ldots, n$ za platnosti podmínky (3).

Podmínku $w_i z_i = 0 \; \forall \; i = 1, \ldots, n$ nazýváme *komplementární podmínkou.* Pro nějaké i, $i = 1, \ldots, n$ se $z_i = 0$ pokud $w_i > 0$ nebo $w_i = 0$ a $z_i > 0$. Může také nastat $z_i = w_i = 0$.

Řešení splňující rovnici (1) a podmínku (2) se nazývá *přípustné řešení.* Množina $K = \{(w, z) : \mathbf{w} = \mathbf{Mz} + \mathbf{q}, \; kde \; \mathbf{w}, \mathbf{z} \geq 0\}$ je *množina přípustných řešení.*

Řešení splňující rovnici (1) a podmínku (3) nazýváme *komplementární řešení.*

Pár (w_j, z_j) nazýváme j - tý *komplementární pár* proměnných a každá proměnná v tomto páru se nazývá *komplement* (doplňek) té druhé. V úloze **LCP** řádu n je n komplementárních párů číslovaných od 1 do n.

Vektor n proměnných nazýváme *komplementární vektor*, pokud j-tá proměnná $\forall \; j$ je z j-tého komplementárního páru.

Komplementární matice je čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž j-tý sloupcový vektor je tvořen j-tým komplementárním párem pro každé j.

Komplementární báze je komplementární matice, která je regulární. V případě úlohy **LCP** budeme brát jednotkovou matici $\mathbf{I}$ typu $n \times n$.

Komplementární bazický vektor je komplementární vektor proměnných spojený s komplementární bází.

Komplementární přípustná báze je komplementární báze, která je přípustnou bází úlohy **LCP**.

Komplementární přípustný bazický vektor je komplementární bazický vektor, který je přípustný.

Řešení úlohy **LCP** je zároveň přípustné a zároveň komplementární. Pokud jsou složky vektoru $\mathbf{q}$ nezáporné, tj. $q_i \geq 0 \; \forall \; i = 1, \ldots, n$, potom dostáváme triviální řešení úlohy **LCP** ve tvaru $\mathbf{w} = \mathbf{q}$ a $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

K řešení se používají pivotovací metody, iterační metody nebo metody vnitřních bodů. Tyto metody budou popsány později.

2.2. Speciální tvary úlohy lineární komplementarity

Transformací rozumíme permutaci řádků, sloupců, záměnu proměnných, prostřednictvím invertovatelné matice omezujících podmínek. Tyto tansformace označíme symbolem $\mathcal{T}$.

Lemma 2. S každou úlohou tvaru lineární komplementarity je spojena transformace $\tau \in \mathcal{T}$, která redukuje tento problém do standardního tvaru.

Důkaz: [2], str. 379

2.2.1. Úloha smíšené lineární komplementarity

Pokud mírně zobecníme úlohu **LCP**, dostáváme smíšenou komplementaritu, kterou značíme **MLCP**. Zkratku tvoří počáteční písmena anglického názvu "Mixed Linear Complementarity Problem".

Definice 8. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$, $\mathbf{B}$ je matice typu $m \times m$, $\mathbf{C}$ je matice typu $n \times m$, $\mathbf{D}$ je matice typu $m \times n$, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ jsou sloupcové vektory. Úkolem je najít vektory $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$ a $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)^T$ tak, aby splňovaly následující vztahy:

$$\mathbf{a} + \mathbf{Au} + \mathbf{Cv} = \mathbf{0} \tag{4}$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{Du} + \mathbf{Bv} \geq \mathbf{0} \tag{5}$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0} \tag{6}$$

$$\mathbf{v}^T(\mathbf{b} + \mathbf{Du} + \mathbf{Bv}) = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Můžeme si zde všimnout kombinace úlohy **LCP** a systému lineárních rovnic, které odpovídají volné proměnné $\mathbf{u}$.
Pokud je matice $\mathbf{A}$ regulární, můžeme (4) přepsat ve tvaru $\mathbf{u} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{a} + \mathbf{Cv})$ a dostáváme tak úlohu $\mathbf{LCP}(\mathbf{b} - \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{B} - \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{C})$.
Úloha **MLCP** je monotónní, pokud je matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

pozitivně semidefinitní.

2.2.2. Úloha horizontální lineární komplementarity

Stručně tuto úlohu označujeme **HLCP**, opět je tato zkratka tvořena z počátečních písmen "Horizontal Linear Complementarity Problem".

Definice 9. Nechť $\mathbf{M}$ je čtvercová matice typu $n \times n$, $\mathbf{N}$ je čtvercová matice typu $n \times n$ a $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ je libovolný sloupcový vektor. Úkolem je najít vektory $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$ a $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ tak, aby splňovaly následující vztahy:

$$\begin{aligned} \mathbf{Nw} - \mathbf{Mz} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{w}, \mathbf{z} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{w}^T\mathbf{z} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Je-li $\mathbf{N} = \mathbf{I}$, dostáváme ihned úlohu **LCP**. Pokud je matice $\mathbf{N}$ regulární, tak je tato úloha ekvivalentní úloze $\mathbf{LCP}(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{q}, \mathbf{N}^{-1}\mathbf{M})$. Pokud pro každé dva body (w^1, z^1)a (w^2, z^2) vyhovující (8) platí $(w^1 - w^2)'(z^1 - z^2) \geq 0$, potom je úloha **HLCP** monotónní.

2.2.3. Úloha vertikální lineární komplementarity

Počáteční písmena z anglického názvu "Verical Linear Complementarity Problem" nám dají zkratku **VLCP**. Jedná se o další zobecnění úlohy **LCP**.

Definice 10. Nechť pro $\forall\ i = 1, \dots, n$ je m_i kladné celé číslo, pro které platí

$$\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Dále nechť matice $\mathbf{M}$ je typu $m \times n$ a $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^m$, kde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{M}^n \end{pmatrix}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^n \end{pmatrix},$$

kde pro $\forall\ i = 1, \dots, n$ je matice $\mathbf{M}^i$ typu $m_i \times n$, $\mathbf{q}^i \in \mathbf{R}^{m_i}$. Úkolem je najít vektor $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ splňující vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{Mz} + \mathbf{q} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{z} &\geq \mathbf{0} \\ z_i \prod_{j=1}^{m_i} (\mathbf{M}^i \mathbf{z} + \mathbf{q}^i)_j &= 0,\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Jestliže bude $m_i = 1 \ \forall \ i = 1, \ldots, n$, dostaneme úlohu **LCP**.

2.3. Úloha nelineární komplementarity

Tento základní typ komplementarity je definován nelineární funkcí $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Úkolem je najít vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ splňující následující vzahy:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T F(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Zkráceně tuto úlohu označujeme symbolem **NCP** z "Nonlinear Complementarity Problem". Pokud funkce $F(\mathbf{x})$ bude afinní, tj. $F(\mathbf{x}) = \mathbf{Mz} + \mathbf{q}$, hovoříme o úloze lineární komplementarity, **LCP**.
Vztah $\mathbf{x}^T F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i(x)$ tj.

$$x_i F_i(x) = 0,\ \forall \ i = 1, \ldots, n.$$

Díky komplementární podmínce je buď x_i nebo $F_i(x)$ rovno nule. Je zřejmé, že **NCP** je ekvivalentní k nalezení řešení nehladké rovnice

$$\min(\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) = \mathbf{0},$$

tj. po složkách

$$\min(x_i, F_i(x)) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

2.3.1. Variační nerovnice v $\mathbf{R}^n$

Výše jsme si uvedli typy úloh, pro které byly proměnné nezáporné. Nyní si ukážeme úlohy, jejichž proměnné mají dolní nebo horní nebo dolní a horní hranici. Tento typ úlohy je zobecnění úlohy **NCP**.

Definice 11. Je dáno zobrazení $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Úkolem je najít vektor $\mathbf{x} \in [\mathbf{l}, \mathbf{u}]$ tak, že

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T F(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall\, \mathbf{y} \in [\mathbf{l}, \mathbf{u}],$$

kde $\mathbf{l} \in \mathbf{R}^n,\ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ s $l_i \in [-\infty, \infty)$ a $u_i \in (l_i, \infty]\ \forall\, i = 1, \ldots, n$ a

$$[\mathbf{l}, \mathbf{u}] \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}.$$

Označíme ji symbolem $\mathbf{VI}(F, [\mathbf{l}, \mathbf{u}])$.
Pokud položíme $l_i = 0$ a $u_i = \infty\ \forall\, i = 1, \ldots, n$, tj. $\mathbf{VI}(F, [\mathbf{0}, \infty])$, dostáváme úlohu nelineární komplementarity.

2.3.2. Úloha smíšené nelineární komplementarity

V mnoha aplikacích se základní podmínky vyskytují jako nelineární rovnice a komplementární podmínky jsou aplikovány pouze na nějaké proměnné a funkce. Příslušné proměnné mohou být volné nebo nezáporné. To vede na úlohu smíšené nelineární komplementarity, zkráceně **MCP**:

Definice 12. Úkolem je najít $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ takové, že

$$\begin{aligned} F_I(\mathbf{x}) &= \mathbf{0},\ \mathbf{x}_I \text{ je volná proměnná} \\ F_J(\mathbf{x}) &\geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}_J &\geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}_J^T F_J(\mathbf{x}) &= 0, \end{aligned}$$

kde I, J jsou tvořeny z množiny $\{1, \ldots, n\}$ tak, že platí $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$ a $I \cap J = \emptyset$.

Tato definice je uvedena v literatuře [7]. Pokud budou funkce F_I a F_J afinní, dostáváme úlohu **MLCP**.
Úloha **MCP** je speciálním případem $\mathbf{VI}(F, [\mathbf{l}, \mathbf{u}])$, položíme-li hranice $l_i = -\infty$, $u_i = \infty$ pro $\forall$ nezávislé proměnné $x_i,\ i \in I$ a $l_i = 0,\ u_i = \infty$ pro $i \in J$.
Tento zápis hranic $\mathbf{l}, \mathbf{u}$ proměnných nepřímo definuje podmínky spojené s funkcí F.
Speciální případ smíšené nelineární komplementarity nastává, když jsou všechny proměnné volné a všechny ohraničení jsou ve tvaru rovnic. Jedná se o soustavu nelineárních rovnic, zkráceně označované **NE**, tedy

$$F(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in I = \{1, \dots, n\}.$$

V literatuře se také vyskytuje i následující formulace úlohy smíšené nelineární komplementarity, kterou jsme převzali z [6].

Definice 13. Nechť jsou dány funkce $G : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}_+^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_1}$ a $H : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}_+^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$. Úkolem je najít pár vektorů $(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2}$ tak, že platí

$$\begin{aligned} G(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \mathbf{0} \quad \mathbf{w} \text{ je volná proměnná} \\ H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Pokud jsou funkce G a H afinní, dostáváme úlohu **MLCP**.

Věta 2. Definice 12 je ekvivalentní definici 13.

Důkaz: Ekvivalence definice 12 a 13 je zřejmá.

3. Existence řešení úlohy LCP

Úloha **LCP** může mít:

- jednoznačné řešení,
- nekonečně mnoho řešení,
- prázdnou množinu přípustných řešení,
- komplementární řešení, ale ne přípustné řešení.

Důležitou roli pro existenci a jednoznačnost řešení bude hrát tvar matice $\mathbf{M}$ typu $n \times n$.

Věta 3. Úloha **LCP** má pro každou pravou stranu $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ právě jedno řešení právě tehdy, když $\mathbf{M}$ je P-matice.

Důkaz: [12], str. 30

Věta 4. Pokud je matice $\mathbf{M}$ pozitivně definitní, potom má úloha **LCP** jednoznačné řešení pro každý vektor $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$.

Důkaz: [3], str. 141

Věta 5. Matice $\mathbf{M}$ je P-matice pokud a pouze pokud má úloha **LCP** jednoznačné řešení pro všechny vektory $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$.

Důkaz: [3], str. 149

Věta 6. Pokud je matice $\mathbf{M}$ striktně kopozitivní, potom pro každý vektor $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ má úloha **LCP** řešení.

Důkaz: [3], str. 178

Věta 7. Nechť je matice $\mathbf{M}$ kopozitivní a nechť vektor $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$. Pokud platí implikace

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{M}\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{x} = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{q} \geq \mathbf{0},$$

potom má úloha **LCP** řešení.

Důkaz: [3], str. 179

4. Pivotovací metody

Uvažujme následující systém lineárních rovnic.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

kde matice $\mathbf{A}$ je typu $n \times m$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ a $n < m$. Předpokládejme rozdělení matice $\mathbf{A}$ na tvar $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$ a příslušný vektor $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_S)$.
Matici $\mathbf{B}$, která je regulární a je typu $n \times n$, budeme nazývat bází. V případě úlohy **LCP** bude báze $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice typu $n \times n$.
Matice $\mathbf{N}$ je typu $n \times (m - n)$.
Bazické řešení s bází $\mathbf{B}$ je dáno jako

$$\begin{aligned} \mathbf{Bx}_R &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_S &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde R je množina indexů sloupců matice $\mathbf{B}$ a S je množina indexů sloupců matice $\mathbf{N}$.
Proměnné $x_i,\ i \in R$ nazýváme bazické proměnné.
Proměnné $x_i,\ i \in S$ nazýváme nebazické proměnné.
Bazické řešení je nedegenerované, jestliže všechny bazické proměnné mají nenulové hodnoty. Jinak je řešení degenerované.

4.1. Lemkeho metoda

Jedná se zřejmě o nejznámější metodu pro řešení úlohy **LCP**, využívající simplexovou tabulku. Spočívá v tom, že zavedeme umělou proměnnou z_0, která do soustavy vstupuje spolu se sloupcovým vektorem $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{d} > 0$, který si zvolíme libovolně. Pro nějaký vektor $\mathbf{d}$ může mít úloha **LCP** řešení a pro jiný vektor $\mathbf{d}$ může stejná úloha skončit s řešením na polopřímce. Na otázku, jak správně volit vektor $\mathbf{d}$, není známá odpověď. Nejčastěji se používá volba vektoru $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)^T$, kde $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n$.

Budeme se zabývat modifikovaným problémem původní úlohy:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{M}\mathbf{z} + z_0\mathbf{e} + \mathbf{q} \\ \mathbf{w}, \mathbf{z} &\geq \mathbf{0} \\ z_0 &\geq 0 \\ \mathbf{w}^T\mathbf{z} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Po převodu všech proměnných rovnice (9) na levou stranu dostáváme

$$\mathbf{w} - \mathbf{M}\mathbf{z} - z_0\mathbf{e} = \mathbf{q},$$

takže počáteční tabulka bude vypadat takto:

B	w	z_0	z	
	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{e}$	$-\mathbf{M}$	$\mathbf{q}$

. (10)

Sloupec B je sloupec indexů bazických proměnných. Počáteční tabulka odpovídá počátečnímu řešení $\mathbf{w} = \mathbf{q}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, $z_0 = 0$. V bázi jsou počáteční proměnné $w_1, \ldots, w_n$. Označme: $\mathbf{A} = (\mathbf{I}, -\mathbf{e}, -\mathbf{M})$.

Díky umělé proměnné dostaneme hned v prvním kroku algoritmu nezáporné hodnoty vektoru $\mathbf{q}$ na pravé straně tabulky. Cílem je získat $z_0 = 0$, tím dostaneme řešení původní úlohy **LCP** (1)-(3).

Lemkeho metoda postupuje po skoro komplementárních bázích.

Definice 14. Přípustné řešení $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$ modifikované soustavy je skoro úplné komplementární řešení, pokud existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že

- $\forall$ j $\neq$ k je právě jedna z proměnných w_j, z_j v bázi, $j = 1, \ldots, n$
- w_k ani z_k nejsou v bázi,
- z_0 je v bázi.

Tím je zaručeno splnění podmínky $\mathbf{w}^T\mathbf{z} = 0$.

Proměnná z_i, resp. w_i, se nazývá bazickou proměnnou, pokud $z_i \geq 0$, resp. $w_i \geq 0$. Pokud z_i, resp. w_i, je nebazická proměnná, potom $z_i = 0$, resp. $w_i = 0$.

Definice 15. Řešení $(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ úlohy **LCP** nazýváme přípustné komplementární řešení, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ je přípustným řešením
- právě jedna komplementární proměnná (w_i, z_i) je bazická proměnná pro $\forall$ $i = 1, \ldots, n$.

Stěžejní v celé metodě je výběr pivota, který provádíme na základě podílového kritéria nebo lexikografického pravidla:

a) Podílové kritérium (typické pro simplexovou metodu)

$$\frac{q_r}{a_{rs}} = \min_i \{ \frac{q_i}{a_{is}} : a_{is} > 0, \ i = 1, \ldots, n \}.$$

V s-tém sloupci vybereme řádek r, pro který je výše uvedený podíl minimální. Dělit budeme pouze kladným číslem. V případě, že nemůžeme žádný takový prvek vybrat, končíme s řešením na polopřímce.
Pivotní krok je degenerovaný, pokud je minimální podíl roven nule. Bazický vektor se změní, ale bazické přípustné řešení zůstává stejné.
Pivotní krok je nedegenerovaný, jestliže je minimální podíl kladný a konečný. Přípustné řešení se změní.
Toto pravidlo slouží k udržení nezápornosti pravého sloupce. Při použití u Lemkeho metody může někdy v tomto místě dojít k zacyklení a nemáme tedy zaručenou konečnost algoritmu.

b) Lexikografické pravidlo
Konečnost Lemkeho metody zajistíme pomocí Lexikografického pravidla, kterým nahradíme podílové kritérium.
Pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, definujme $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, jestliže platí $x_k < y_k$, kde $k = \min\{j : x_j \neq y_j\}$. Toto uspořádání se nazývá lexikografické. Je zřejmé, že pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ nastává právě jedna z možností $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}, \ \mathbf{y} \prec \mathbf{x}, \ \mathbf{x} = \mathbf{y}$, takže každá konečná množina $X \subset \mathbf{R}^n$ obsahuje v tomto uspořádání nejmenší prvek, který značíme lexmin X.

V tabulce Lemkeho metody označme symbolem β_j j - tý řádek rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{q})$, tj.

$$\beta_j = (a_{j1}, \dots, a_{j,2n+1}, q_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

r určíme ze vzorce

$$\frac{\beta_r}{a_{rs}} = lexmin\{\frac{\beta_j}{a_{js}};\ a_{js} > 0\},\ a_{rs} > 0.$$

Transformaci tabulky provedeme pomocí **Jordanovy eliminace**:
Označme hlavní prvek a_{sk} rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{q})$.

1. v i - tém řádku ($\forall\ i = 1, \dots, n,\ i \neq s$)
   $a_{ij} := a_{ij} - a_{sj}a_{ik}/a_{sk}, \quad j = 1, \dots, 2n+1$
   $q_i := q_i - q_s a_{ik}/a_{sk}$

2. v s - tém řádku
   $a_{sj} := a_{sj}/a_{sk}, \quad j = 1, \dots, 2n+1$
   $q_s := q_s/a_{sk}$.

Máme dvě možnosti, jak může být metoda ukončena:

1. z_0 vystoupí z báze nebo bude $z_0 = 0$ v přípustném řešení, potom úloha **LCP** končí s aktuálním řešením

2. pivotní sloupec má všechny složky záporné nebo rovné nule, potom úloha **LCP** končí s řešením na polopřímce.

Lemkeho metoda nám tedy dává konkrétní řešení nebo selhává. V případě ukončení metody polopřímkou může mít úloha **LCP** řešení, ale nebylo touto metodou nalezeno.

Algoritmus:
Pokud $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ dostáváme ihned triviální řešení $\mathbf{w} = \mathbf{q},\ \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Budeme předpokládat, že $\mathbf{q} \ngeq \mathbf{0}$. Po sestavení počáteční tabulky určíme s tak, že

$$q_s = \min_i \{q_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

Pivot se nachází v řádku s a sloupci odpovídající proměnné z_0. Tato proměnná vstupuje do báze, kde bude společně s proměnnými w_j, $j = 1, \ldots, n$, $j \neq s$. V této fázi z_0 nazýváme vstupující proměnnou (přichází do báze) a w_s vystupující proměnnou (opouští bázi). Prostřednictvím vybraného pivota provedeme Jordanovu eliminaci. Položíme $y_s = z_s$ a přejdeme na krok 1.

1. Nechť a_s je s - tý sloupec matice $\mathbf{A}$ odpovídající proměnné y_s.

   Jestliže je $a_s \leq 0$ přejdeme na krok 4, jinak určíme r pomocí podílového kritéria
   $$\frac{q_r}{a_{rs}} = \min_i \{\frac{q_i}{a_{is}} : a_{is} > 0, i = 1, \ldots, n\}.$$
   Jestliže je v r - tém řádku v bázi proměnná z_0, přejdeme na krok 3.

   Jinak pokračujeme krokem 2.

2. V bázi je v r - tém řádku buď proměnná w_k nebo z_k pro $k \neq s$.

   Proměnnou y_s zavedeme do báze a tabulku eliminujeme pomocí pivota v řádku r a sloupci y_s.

   Jestliže bázi opouští proměnná w_k, položíme $y_s = z_k$.

   Jestliže bázi opouští proměnná z_k, položíme $y_s = w_k$.

   Vrátíme se na krok 1.

3. Proměnná y_s vstupuje do báze a z_0 ji opouští.

   Po provedené eliminaci máme úplné bazické přípustné řešení. Algoritmus ukončíme.

4. Končíme s řešením na polopřímce.

Polopřímka je definována takto: $R = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0) + \alpha d : \alpha \geq 0\}$, kde d je směr definovaný tak, že obsahuje 1 v pozici odpovídající y_s , $-a_s$ v pozicích odpovídajících aktuální bázové proměnné a 0 všude jinde.

Věta 8. Při použití lexikografického pravidla platí:

1. v každém kroku je výběr r jednoznačný,

2. v každém kroku platí $0 \prec \beta_j$ pro všechna j,

3. jestliže s vstoupí do báze a k vystoupí z báze, potom zavedeme-li v dalším kroku k do báze, potom s opět vystoupí z báze a tabulka se vrátí do původního stavu.

Důkaz: [12] str. 31

Věta 9. Lemkeho metoda s použitím lexikografického pravidla je konečná (tj. po konečně mnoha krocích buď dává řešení úlohy **LCP**, nebo selhává i přesto, že úloha **LCP** může mít řešení).

Důkaz: [12] str. 34

Věta 10. Nechť je matice **M** kopozitivní plus, potom platí: jestliže

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{q}$$
$$\mathbf{w}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$$

má řešení, potom i úloha **LCP** má řešení, které nalezne Lemkeho metoda v konečném počtu kroků.

Důkaz: [12] str. 35

Ilustrační příklad 1.

Pomocí Lemkeho metody najděte řešení úlohy **LCP** s těmito vstupními daty.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nejdříve si sestavíme počáteční tabulku:

B	w_1	w_2	w_3	z_0	z_1	z_2	z_3	q
w_1	1	0	0	**-1**	-2	1	-1	-3
w_2	0	1	0	-1	1	-2	-1	0
w_3	0	0	1	-1	1	1	0	2

Určíme s tak, aby $q_s = \min_i\{q_i : 1 \leq i \leq n\}$. V našem případě je nejmenší prvek $q_1 = -3$, tj. $s = 1$. Pivot je tedy v prvním řádku a ve sloupci příslušející proměnné z_0. V průběhu výpočtu budeme zvýrazňovat pivota tučně.

V tuto chvíli z_0 vstupuje do báze a w_1 z báze vystupuje. Provedeme Jordanovu eliminaci.

B	w_1	w_2	w_3	z_0	z_1	z_2	z_3	q
z_0	-1	0	0	1	2	-1	1	3
w_2	-1	1	0	0	**3**	-3	0	3
w_3	-1	0	1	0	3	0	1	5

Protože z báze vystoupila proměnná w_1, bude do báze nyní vstupovat její komplement z_1. V tomto sloupci určíme pivota podle podílového kritéria, tj. $\min\{\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{3}\}$. Minimum máme ve druhém řádku, tj. $r = 2$. Pivota jsme našli ve druhém řádku a ve sloupci proměnné z_1. Eliminujeme.

B	w_1	w_2	w_3	z_0	z_1	z_2	z_3	q
z_0	$-1/3$	$-2/3$	0	1	0	1	1	1
z_1	$-1/3$	$1/3$	0	0	1	-1	0	1
w_3	0	-1	1	0	0	**3**	1	2

Z báze vystoupila w_2 a vstupující proměnná bude z_2. Podílové kritérium nám opět určí pivota ve sloupci proměnné z_2, tj. $\min\{1, \frac{2}{3}\}$ (do podílového kritéria vstupují pouze prvky slouce z_2, které jsou větší než nula), $r = 3$. Pivota jsme našli ve třetím řádku vstupující proměnné. S tímto pivotem eliminujeme.

B	w_1	w_2	w_3	z_0	z_1	z_2	z_3	q
z_0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	1	0	0	**2/3**	$1/3$
z_1	$-1/3$	0	$1/3$	0	1	0	$1/3$	$5/3$
z_2	0	$-1/3$	$1/3$	0	0	1	$1/3$	$2/3$

Nyní do báze vstoupí proměnná z_3. Podílovým pravidlem jsme našli pivota v prvním řádku, tj. $\min\{\frac{1}{2}, 3, 2\}$.

B	w_1	w_2	w_3	z_0	z_1	z_2	z_3	q
z_3	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$3/2$	0	0	1	$1/2$
z_1	$-1/6$	$1/6$	$1/2$	$-1/2$	1	0	0	$3/2$
z_2	$1/6$	$-1/6$	$1/2$	$-1/2$	0	1	0	$1/2$

Bázi opoustila proměnná z_0, tj. $z_0 = 0$. Nyní máme řešení původní úlohy **LCP**.

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ilustrační příklad 2.

Uvažujeme následující případ, kdy v některé fázi algoritmu dostaneme tuto tabulku. Předpokládejme, že vstupující proměnná bude z_1.

B	w_1	w_2	w_3	z_0	z_1	z_2	z_3	q
z_0	-1	0	0	1	-2	-1	1	3
w_2	-1	1	0	0	-3	-3	0	3
w_3	-1	0	1	0	-3	0	1	5

Pivotní splooupec má všechny prvky záporné $z_1 = (-2, -3, -3)^T$. Aktuální téměř komplementární bazický vektor je $(w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3, z_0) = (0, 3, 5, 0, 0, 0, 3)$. Řešením je polopřímka $R = \{0, 3 + 3\alpha, 5 + 3\alpha, \alpha, 0, 0, 3 + 2\alpha : \alpha \geq 0\}$.

4.2. Hlavní pivotovací metoda

Uvažujme pro úlohu **LCP** řádu n následující tabulku:

B	w	z	
	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{M}$	$\mathbf{q}$

(11)

$$\mathbf{w}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{w}^T\mathbf{z} = 0.$$

Nebudeme zde zavádět umělou proměnnou. Metoda pracuje pouze s hlavním pivotovacím krokem a končí, když získáme komplementární přípustný bazický vektor. Počáteční komplementární bazický vektor na začátku metody je $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$.

Položme vektor $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ získaný v obecném kroku.

Pokud $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$, potom končíme s aktuálním komplementárním bazickým vektorem a aktuálním bazickým přípustným řešením.

Pokud $\mathbf{q} \not\geq \mathbf{0}$, potom určíme index r tak, že

$$r = max\{i : q_i < 0, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

V pozici r vyměníme aktuální bazickou proměnnou v komplementárním páru (w_r, z_r) jejím komplementem. Pokud je pivotovací prvek rovný nule, metoda není schopna nalézt řešení. V opačném případě se pivotovací krok uskuteční a metoda pokračuje dalším krokem.

Věta 11. Nechť **M** je P-matice. Hlavní pivotovací metoda aplikovaná na úlohu **LCP** končí s komplementárním bazickým vektorem v konečném počtu kroků. Komplementární bazický vektor, který se již v průběhu této metody objevil, se v dalších krocích nevyskytne.

Důkaz: [10], str. 256

Ilustrační příklad 3:

Pomocí hlavní pivotovací metody vyřešíme úlohu **LCP** s těmito vstupními daty.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; q = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Sestavíme si počáteční tabulku.

B	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	q
w_1	1	0	0	− 1	0	0	− 8
w_2	0	1	0	− 2	− 1	0	− 12
w_3	0	0	1	− 2	− 2	**-1**	− 14

Prvky vektoru **q** jsou všechny záporné. Vybereme maximální index, tj. $r = 3$. Komplementární bazický vektor je $w = (w_1, w_2, w_3)$. Do báze bude vstupovat proměnná z_3. Pivot je označen v tabulce tučně, tj. -1. Provedeme eliminaci.

B	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	q
w_1	1	0	0	− 1	0	0	− 8
w_2	0	1	0	− 2	**-1**	0	− 12
z_3	0	0	− 1	2	2	1	14

Opět najdeme maximální index, pro který je $q_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$, tj. $r = 2$. Z báze vystupuje proměnná w_2 a do báze vstupuje proměnná z_2 s pivotem -1.

B	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	q
w_1	1	0	0	-1	0	0	-8
z_2	0	-1	0	2	1	0	12
z_3	0	2	**-1**	-2	0	1	-10

Maximální index je $r = 3$. Z báze vystoupí proměnná z_3 a vstupovat bude w_3 s pivotem -1.

B	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	q
w_1	1	0	0	**-1**	0	0	-8
z_2	0	-1	0	2	1	0	12
w_3	0	-2	1	2	0	-1	10

V tomto kroku z báze vystupuje proměnná w_1 a vstupuje z_1 s pivotem -1.

B	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	q
z_1	-1	0	0	1	0	0	8
z_2	2	-1	0	0	1	0	-4
w_3	2	-2	1	0	0	**-1**	-6

Vstupující proměnná je z_3, z báze vystoupí w_3. Pivotem je prvek -1.

B	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	q
z_1	-1	0	0	1	0	0	8
z_2	2	**-1**	0	0	1	0	-4
z_3	-2	2	-1	0	0	1	6

Vstupující proměnná je w_2, z báze vystoupí z_2. Pivotem je prvek -1.

B	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	q
z_1	-1	0	0	1	0	0	8
w_2	-2	1	0	0	-1	0	4
z_3	2	0	**-1**	0	2	1	-2

Vstupující proměnná je w_3, z báze vystoupí z_3. Pivotem je prvek -1.

B	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	q
z_1	-1	0	0	1	0	0	8
w_2	-2	1	0	0	-1	0	4
w_3	-2	0	1	0	-2	-1	2

V této fázi metodu ukončíme, protože všechny prvky vektoru $\mathbf{q}$ jsou kladné. Řešení je

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Iterační metody

Obecně nám tyto metody nedají řešení v konečném počtu kroků. Jsou snadné na programování.

5.1. Iterační metoda úlohy LCP pro obecnou symetrickou maticí

Uvažujme úlohu **LCP**, ve které bude matice **M** symetrická. Předpokládejme vektor $\mathbf{q} \ngeq 0$, jinak $\mathbf{w} = \mathbf{q}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ bude řešením úlohy **LCP**. Tuto matici **M** můžeme rozepsat jako součet tří matic $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{G} + \mathbf{U}$, kde

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & m_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ 0 & 0 & m_{23} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L je ostře dolní trojúhelníková část, **G** je diagonální část a **U** je ostře horní trojúhelníková část dané čtvercové matice **M**. Pokud je **M** symetrická matice, potom platí $\mathbf{L}^T = \mathbf{U}$.

Položme $\mathbf{z} = (x_j) \in \mathbf{R}^n$. Dále označme $\mathbf{x}^+ = (x_j^+)$, kde $x_j^+ = max\{0, x_j\}$ pro $\forall\ j = 1, \dots, n$.

5.1.1. Iterační schéma

Libovolně si zvolíme počáteční bod $\mathbf{z}^0 \geq \mathbf{0}$. Iterační metoda je definována vztahem

$$\mathbf{z}^{r+1} = \lambda(\mathbf{z}^r - \omega\mathbf{E}^r(\mathbf{M}\mathbf{z}^r + \mathbf{q} + \mathbf{K}^r(\mathbf{z}^{r+1} - \mathbf{z}^r)))^+ + (1-\lambda)\mathbf{z}^r \tag{12}$$

pro $r = 0, 1, \ldots$, kde si libovolně zvolíme parametry $\lambda,\ \omega$, pro které platí $0 < \lambda \leq 1$, $\omega > 0$. Pro $\forall\ r$ je $\mathbf{K}^r$ ostře dolní nebo ostře horní trojúhelníková matice a $\mathbf{E}^r$ je diagonální matice s kladnými prvky, které vyhovují podmínkám

$$\mathbf{E}^r > \alpha\mathbf{I}$$

$$\mathbf{y}^T((\lambda\omega\mathbf{E}^r)^{-1} + \mathbf{K}^r - \frac{\mathbf{M}}{2})\mathbf{y} \ > \ \gamma\|\mathbf{y}\|^2,\ \forall\ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n,$$

pro nějaká kladná čísla $\alpha,\ \gamma$. $\{\mathbf{E}^r : r = 0, 1, \ldots\}, \{\mathbf{K}^r : r = 0, 1, \ldots\}$ jsou ohraničené posloupnosti matic.

Pro $\mathbf{K}^r$ ostře dolní trojúhelníkovou matici se vztah (12) upraví na

$$z_1^{r+1} = \lambda(z_1^r - \omega E_{11}^r(M_{1.}z^r + q_1))^+ + (1-\lambda)z_1^r,$$

$$z_j^{r+1} = \lambda(z_j^r - \omega E_{jj}^r(M_{j.}z^r + q_j + \sum_{l=1}^{j-1} K_{jl}^r(z_l^{r+1} - z_l^r)))^+ + (1-\lambda)z_j^r,\ j = 2, \ldots, n,$$

kde E_{jj}^r je j-tý diagonální prvek diagonální matice $\mathbf{E}^r$ a K_{jl}^r je (j,l)-tý prvek matice $\mathbf{K}^r$.

Pokud je $\mathbf{K}^r$ ostře horní trojúhelníková matice, vztah (12) se upraví na

$$z_n^{r+1} = \lambda(z_n^r - \omega E_{nn}^r(M_{n.}z^r + q_n))^+ + (1-\lambda)z_n^r,$$

$$z_j^{r+1} = \lambda(z_j^r - \omega E_{jj}^r(M_{j.}z^r + q_j + \sum_{l=j+1}^{n} K_{jl}^r(z_l^{r+1} - z_l^r)))^+ + (1-\lambda)z_j^r,\ j = n-1, \ldots, 1.$$

5.1.2. Volba parametrů ve vztahu (12)

1. Volíme-li $\mathbf{K}^r = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}^r = \mathbf{E}$ pro $\forall\, r$, kde $\mathbf{E}$ je diagonální matice s kladnými diagonálními prvky, potom vztah (12) bude vypadat následovně:
   počáteční bod $\mathbf{z}^0 \geq \mathbf{0}$,
   $$\mathbf{z}^{r+1} = \lambda(\mathbf{z}^r - \omega\mathbf{E}(\mathbf{M}\mathbf{z}^r + \mathbf{q}))^+ + (1-\lambda)\mathbf{z}^r,\ r = 0, 1, \ldots,$$
   kde $0 < \lambda \leq 1$, $\omega > 0$ jsou brány tak, že splňují vlastnost, že matice $(2(\lambda\omega\mathbf{E})^{-1} - \mathbf{M})$ je pozitivně definitní.

2. Volíme-li $\mathbf{K}^r = \mathbf{L}$ nebo $\mathbf{U}$, $\mathbf{E}^r = \mathbf{E}$ pro $\forall\, r$, kde $\mathbf{E}$ je diagonální matice s kladnými diagonálními prvky, potom vztah (12) bude vypadat takto:
   počáteční bod $\mathbf{z}^0 \geq \mathbf{0}$,
   $$\mathbf{z}^{r+1} = \lambda(\mathbf{z}^r - \omega\mathbf{E}(\mathbf{M}\mathbf{z}^r + \mathbf{q} + \mathbf{K}^r(\mathbf{z}^{r+1} - \mathbf{z}^r)))^+ + (1-\lambda)\mathbf{z}^r,\ r = 0, 1, \ldots,$$
   kde $0 < \lambda \leq 1$, $\omega > 0$, s vlastností
   $$\lambda\omega \ < \ 2/max\{G_{jj}E_{jj} : j \text{ takové } G_{jj} > 0\}, \tag{13}$$
   kde $\mathbf{G}$ je diagonální část matice $\mathbf{M}$ a G_{jj} je j-tý diagonální prvek $\mathbf{G}$, pokud množina $\{j : j \text{ takové, že } G_{jj} > 0, j = 1, \ldots, n\}$ je neprázdná.

3. Volíme-li střídavě $\mathbf{K}^r = \mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$, $\mathbf{E}^r = \mathbf{E}$ pro $\forall\, r$, kde $\mathbf{E}$ je diagonální matice s kladnými diagonálními prvky a splňuje vlastnost (13), potom se vztah (12) upraví na:
   počáteční bod $\mathbf{z}^0 \geq \mathbf{0}$,
   $$\mathbf{z}^{r+1} = \lambda(\mathbf{z}^r - \omega\mathbf{E}(\mathbf{M}\mathbf{z}^r + \mathbf{q} + \mathbf{L}(\mathbf{z}^{r+1} - \mathbf{z}^r)))^+ + (1-\lambda)\mathbf{z}^r,\ r = 0, 2, 4, \ldots,$$
   $$\mathbf{z}^{r+1} = \lambda(\mathbf{z}^r - \omega\mathbf{E}(\mathbf{M}\mathbf{z}^r + \mathbf{q} + \mathbf{U}(\mathbf{z}^{r+1} - \mathbf{z}^r)))^+ + (1-\lambda)\mathbf{z}^r,\ r = 1, 3, 5 \ldots,$$
   kde $0 < \lambda \leq 1$, $\omega > 0$.

5.1.3. Konvergence metody

Věta 12. Nechť matice $\mathbf{E}$ je diagonální matice s kladnými diagonálními prvky. Potom $(\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{z}} + \mathbf{q}, \overline{\mathbf{z}})$ je řešením úlohy **LCP**, pokud $\overline{\mathbf{z}}$ splňuje

$$(\mathbf{z} - \mathbf{w}\mathbf{E}(\mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{q}))^+ - \mathbf{z} = \mathbf{0},$$

pro nějaké nebo všechny $\omega > 0$.

Důkaz: [10], str. 368

Věta 13. Nechť $\mathbf{E}$ je diagonální matice s kladnými diagonálními prvky a nechť $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$. Potom

$$(\mathbf{z}^+ - \mathbf{z})^T \mathbf{E}^{-1}(\mathbf{z}^+ - \mathbf{y}) \leq 0,$$

pro $\forall$ $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

Důkaz: [10], str. 368

Věta 14. Nechť $\{\mathbf{z}^r : r = 1, 2, \ldots\}$ je posloupnost bodů získána z iteračního vztahu (12). Pokud $\overline{\mathbf{z}}$ je bod z této posloupnosti, potom $(\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{z}} + \mathbf{q}, \overline{\mathbf{z}})$ je řešením úlohy **LCP**.

Důkaz: [10], str. 369, 370

Věta 15. Nechť $\mathbf{M}$ je symetrická a kopozitivní matice typu $n \times n$. Předpokládejme ohraničenou posloupnost $\{\mathbf{z}^s : r = 1, 2, \ldots\}$ (tj., $\lim_{s\to\infty} \|\mathbf{z}^s\| = \infty$) vyhovující podmínkám $\mathbf{z}^s \geq 0$, $f(\mathbf{z}^s) \leq \alpha$ pro $\forall$ $s = 1, 2, \ldots$, kde α je konstanta. Potom existuje posloupnost $\{\mathbf{z}^{s_t} : t = 1, 2, \ldots\}$ taková, že posloupnost $\{\mathbf{y}^{s_t} : \mathbf{y}^{s_t} = \frac{\mathbf{z}^{s_t}}{\|\mathbf{z}^{s_t}\|}, t = 1, 2, \ldots\}$ konverguje k bodu $\overline{\mathbf{y}}$, který splňuje vlastnosti $\overline{\mathbf{y}} > \mathbf{0}$,
$\overline{\mathbf{y}}^T \mathbf{M}\overline{\mathbf{y}} = 0$, $\mathbf{q}^T\overline{\mathbf{y}} \leq \mathbf{0}$. Pokud je navíc matice $\mathbf{M}$ kopozitivní plus, potom $\overline{\mathbf{y}}$ také splňuje podmínku $\mathbf{M}\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, a buď vztah (14) nebo vztah (15) nemá řešení $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{q} > \mathbf{0} \tag{14}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{z} > 0. \tag{15}$$

Důkaz: [10], str. 370, 371

Věta 16. Předpokládejme buď

1. matice $\mathbf{M}$ je symetrická ostře kopozitivní

   nebo

2. matice $\mathbf{M}$ je symetrická ostře kopozitivní plus splňující vlastnost, že buď (14) nebo (15) má přípustné řešení $\mathbf{z}$.

Potom posloupnost $\{\mathbf{z}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\}$ získána iteračním vztahem (12) je ohraničená a má bod, který vede k řešení úlohy **LCP**.

Důkaz: [10], str. 371

Důsledek 2. Pokud je matice $\mathbf{M}$ symetrická, nezáporná a má kladné diagonální prvky, posloupnost $\{\mathbf{z}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\}$ získána z iteračního vztahu (12) je ohraničené a každý bod této posloupnosti vede k řešení úlohy **LCP**.

Důkaz: [10], str. 371

Důsledek 3. Pokud je matice $\mathbf{M}$ symetrická, kopozitivní plus a buď (14) nebo (15) má přípustné řešení $\mathbf{z}$, potom úloha **LCP** má řešení. V případě, když je Lemkeho metoda použita na řešení úlohy **LCP** a není ukončena na přímce, je ukončena s řešením úlohy.

Důkaz: [10], str. 371

Věta 17. Pokud posloupnost $\{\mathbf{x}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\} \in \mathbf{R}^n$ je ohraničená, $\lim_{r\to\infty} \|\mathbf{x}^{r+1} - \mathbf{x}^r\| = 0$ a pokud množina bodů $\{\mathbf{x}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\}$ není spojitá, potom $\{\mathbf{x}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\}$ konverguje.

Důkaz: [10], str. 372

Věta 18. Předpokládejme, že matice $\mathbf{M}$ je symetrická, kopozitivní plus a nedegenerovaná. Potom posloupnost $\{\mathbf{z}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\}$ získána z iteračního vztahu (12) konverguje k řešení úlohy **LCP**.

Důkaz: [10], str. 372

Důsledek 4. Pokud je matice $\mathbf{M}$ symetrická a pozitivně definitní, potom posloupnost $\{\mathbf{z}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\}$ získána z iteračního vztahu (12) konverguje k bodu $\bar{\mathbf{z}}$, který vede k řešení úlohy **LCP**.

5.2. Iterační metoda LCP pro obecnou čtvercovou maticí

Zde se budeme zabývat úlohou **LCP**, kde matice $\mathbf{M}$ typu $n \times n$ nemusí být nutně symetrická.

Věta 19. Nechť $g(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - \omega \mathbf{E}(\mathbf{Mz} + \mathbf{q}))^+, \ \ \omega > 0$ and $\mathbf{E}$ je diagonální matice s kladnými diagonálními prvky. $(\mathbf{w} = \mathbf{Mz} + \mathbf{q}, \mathbf{z})$ je řešením úlohy **LCP** pokud $g(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$.

Důkaz: [10], str. 381

5.2.1. Iterační schéma

Zvolíme si počáteční bod $\mathbf{z}^0 \geq \mathbf{0} \ \ \in \ \ \mathbf{R}^n$. Iterační vztah je následující

$$\mathbf{z}^{r+1} = (\mathbf{z}^r - \omega \mathbf{E}(\mathbf{Mz}^r + \mathbf{q} + \mathbf{K}(\mathbf{z}^{r+1} - \mathbf{z}^r)))^+ \tag{16}$$

pro $r = 0, 1, 2, \ldots$, kde $\omega > 0$, $\mathbf{E}$ je diagonální matice s kladnými diagonálními prvky a $\mathbf{K}$ je buď striktně horní trojúhelníková matice nebo striktně dolní trojúhelníková matice. Tato iterační formule je speciálním případem (12).

5.2.2. Konvergence metody

Věta 20. Vektory v posloupnosti $\{\mathbf{z}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\}$ získané z (16) splňují pro $\forall \ r = 1, 2, \ldots$

$$|\mathbf{z}^{r+1} - \mathbf{z}^r| \leq (\mathbf{I} - \omega \mathbf{E}|\mathbf{K}|)^{-1} |\mathbf{I} - \omega \mathbf{E}(\mathbf{M} - \mathbf{K})| |\mathbf{z}^r - \mathbf{z}^{r-1}|.$$

Důkaz: [10], str. 382

Věta 21. Předpokládejme iterační parametry ω, $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$ a matici vyhovující $\rho = ||\mathbf{Q}|| < 1$, kde $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{E}|\mathbf{K}|)^{-1}(|\mathbf{I} - \omega\mathbf{E}(\mathbf{M} - \mathbf{K})|)$. Potom posloupnost bodů $\{\mathbf{z}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\}$ vytvořena (16) konverguje k bodu $\overline{\mathbf{z}}$, kde $(\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{z}} + \mathbf{q}, \overline{\mathbf{z}})$ je řešením úlohy **LCP**.

Důkaz: [10], str. 382

Věta 22. Nechť $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{U}$ jsou v tomto pořadí striktně dolní trojúhelníková, diagonální a striktně horní trojúhelníková část matice $\mathbf{M}$. Nechť $\mathbf{K}$ je $\mathbf{L}$ nebo $\mathbf{U}$ nebo $\mathbf{0}$. Nechť $\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{E}|\mathbf{K}|)$, $\mathbf{C} = |\mathbf{I} - \omega\mathbf{E}(\mathbf{M} - \mathbf{K})|$, $\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$. Pokud $\mathbf{A}$ je P-matice, potom posloupnost bodů $\{\mathbf{z}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\}$ vytvořena (16) konverguje k bodu $\overline{\mathbf{z}}$, kde $(\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{z}} + \mathbf{q}, \overline{\mathbf{z}})$ je řešením úlohy **LCP**.

Důkaz: [10], str. 383

Věta 23. Pokud $\mathbf{D} - |\mathbf{L} + \mathbf{U}|$ je P-matice, potom posloupnost $\{\mathbf{z}^r : r = 0, 1, 2, \ldots\}$ vytvořena (16) s $\mathbf{K}$ je $\mathbf{L}$ nebo $\mathbf{U}$ nebo $\mathbf{0}$ a $0 < \omega < 1/max\{M_{jj}E_{jj} : j = 1, \ldots, n\}$, kde M_{jj}, E_{jj} jsou j-té diagonální prvky matic $\mathbf{M}, \mathbf{E}$, konverguje k řešení $\overline{\mathbf{z}}$, kde řešením úlohy **LCP** je $(\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{z}} + \mathbf{q}, \overline{\mathbf{z}})$.

Důkaz: [10], str. 383

6. Metody vnitřních bodů

Problematika metody vnitřních bodů a určení počátečního přípustného řešení je velmi rozsáhlá a přesahuje oblast této práce. My ji proto nebudeme podrobně studovat a uvedeme si pouze algoritmus k výpočtu úlohy **LCP**, který nevyžaduje přípustný počáteční bod. Vycházeli jsme z vědeckého článku [9].

Uvažujme úlohu **LCP** (1),(2),(3).
Množina všech přípustných řešení je

$$K = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}^{2n} : \mathbf{w} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{q},\ \text{kde } \mathbf{w}, \mathbf{z} \geq 0\}.$$

Množina striktně přípustných bodů je

$$K_{int} = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in K : \mathbf{w}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}.$$

Množina řešení úlohy **LCP** je

$$K(LCP) = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in K : \mathbf{w}^T\mathbf{z} = \mathbf{0}\}.$$

V této kapitole budeme předpokládat, že:

- $K_{int} \neq \emptyset$
- **M** je pozitivně semidefinitní matice.

Tato metoda začíná s počátečním bodem $(\mathbf{w}^0, \mathbf{z}^0) > \mathbf{0}$ a řeší systém nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{ZWe} &= \mu\mathbf{e} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{Mz} + \mathbf{q} \\ \mathbf{w}, \mathbf{z} &> \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{Z} = diag(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\mathbf{W} = diag(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ a $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)^T$, $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n$.

Aplikací Newtonovy metody k řešení systému nelineárních rovnic dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{W}\Delta\mathbf{z} + \mathbf{Z}\Delta\mathbf{w} &= \mathbf{ZWe} - \mu\mathbf{e} \\ \Delta\mathbf{w} - \mathbf{M}\Delta\mathbf{z} &= \mathbf{w} - \mathbf{Mz} - \mathbf{q}, \end{aligned} \tag{17}$$

k jejich vyřešení můžeme použít například Gussovu eliminační metodu. Získáme tak dvojici $(\Delta\mathbf{w}, \Delta\mathbf{z})$.

Další iterační bod je $(\mathbf{w}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) = (\mathbf{w}^k, \mathbf{z}^k) - \alpha(\Delta\mathbf{w}^k, \Delta\mathbf{z}^k)$.

Zavedeme účelovou funkci definovanou jako

$$\phi(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \mathbf{w}^T\mathbf{z} + ||\mathbf{Mz} + \mathbf{q} - \mathbf{w}||,$$

kde $||.||$ značí euklidovskou normu.

Volba parametru α:

$$\alpha = min(\alpha_w, \alpha_z)$$

$$\alpha_w = \begin{cases} min\frac{w_i}{\Delta w_i} & \text{pokud } \Delta w_i > 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\alpha_z = \begin{cases} min\frac{z_i}{\Delta z_i} & \text{pokud } \Delta z_i > 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

Algoritmus:

Nechť $\varepsilon > 0$ je míra přesnosti a $\gamma \in (0, 1)$ je omezující faktor. Zvolíme si počáteční bod $(\mathbf{w}^0, \mathbf{z}^0) > \mathbf{0}$, $\mu^0 > 0$, $k = 0$ a vypočítáme $\phi(w^0, y^0) = \phi^0$. Výpočet ukončíme, když $\phi^0 < \varepsilon$.

Pro $k = 1, 2, \ldots$

Krok 1: Vypočítáme $\mu^k = \gamma\frac{(\mathbf{w}^k)^T\mathbf{z}^k}{n}$.

Krok 2: Vyřešením soustavy (17) dostaneme $(\Delta\mathbf{w}^k, \Delta\mathbf{z}^k)$.

Krok 3: Nová iterace $(\mathbf{w}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) = (\mathbf{w}^k, \mathbf{z}^k) - \alpha(\Delta\mathbf{w}^k, \Delta\mathbf{z}^k)$, $k = k + 1$.

Krok 4: Výpočet ukončíme, když $\phi^k < \varepsilon$.

7. Porovnání metod

Uvedeme si zde příklad, který vypočítáme všemi výše zmíněnými metodami. Na příklad aplikujeme námi vytvořené algoritmy, které jsou uvedeny v části Přílohy.

Ilustrační příklad 4:
Řešme úlohu **LCP** s těmito vstupními daty:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; q = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Postupně si tento příklad vyřešíme Lemkeho metodou, hlavní pivotovací metodou, iterační metodou pro symetrickou matici **M**, iterační metodou pro obecnou matici **M** a metodou vnitřích bodů.

```
řešení: w = 0     0     2
        z = 1     2     0
```

Metoda	Počet iterací
Lemkeho metoda	2
hlavní pivotovací metoda	4
iterační metoda pro symetrickou **M**	21
iterační metoda pro obecnou **M**	14
metoda vnitřních bodů	8

Z tabulky je vidět, že pivotovací metody a metoda vniřních bodů jsou nejrychlejší. Počet iterací u iteračních metod závisí na počáteční volbě parametrů.

8. Aplikace úlohy lineární komplementarity

8.1. Lineární programování

Úloha lineárního programování ve standardním tvaru je dána takto:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\longrightarrow min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\geq b_i,\ i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0,\ j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

kde $a_{ij},\ b_i,\ c_j$ jsou reálná čísla pro všechny $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$. Cílem je tedy minimalizovat lineární funkci $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ za daných omezujících lineárních podmínek. Nyní přepíšeme tuto metodu maticově.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\longrightarrow min \\ \mathbf{Ax} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{18}$$

kde $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ je vektor pravých stran a $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ je vektor koeficientů účelové funkce. Matice $\mathbf{A}$ i vektory $\mathbf{b},\ \mathbf{c}$ jsou dané. Úkolem je najít vektor neznámých $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$.

Budeme tuto úlohu označovat symbolem **LP** z anglického názvu "Linear Progrmming".

Omezující podmínky v rovnicovém tvaru můžeme převést na nerovnicový tvar následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} \text{rovnostní podmínku} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \text{převedeme na dvojici podmínek} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & -\mathbf{Ax} \geq -\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Definice 16. Lagrangeovou funkcí úlohy (18) nazveme funkci

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{y}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) - \mathbf{u}^T\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ jsou Lagrangeovy multiplikátory.

Věta 24. (Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky) Předpokládejme, že $\mathbf{x}$ je lokální minimum úlohy (18), $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, $g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$, $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ jsou spojitě diferencovatelné, potom existují Lagrangeovy multiplikátory $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ takové, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{s} \\ \mathbf{u}^T\mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{s}^T\mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{19}$$

kde $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^m$.

Důkaz: [15] str. 35
Zkráceně tyto podmínky budeme označovat symbolem KKT. Zapíšeme si je ve tvaru úlohy **LCP**.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{q}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}^T\mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{s}^T\mathbf{y} &= 0 \\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{u} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{20}$$

Řešení této úlohy je ekvivalentní řešení úlohy **LP**.

Ilustrační příklad 5.
Našim úkolem bude vyřešit úlohu **LP** převedením na úlohu **LCP**.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &\longrightarrow min \\
x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &\leq 7 \\
-2x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 12 \\
-4x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\leq 10 \\
3x_1 + x_3 &\leq 2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Nejdříve si všechny podmínky upravíme na stejné tvary nerovností.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &\longrightarrow min \\
-x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 &\geq -7 \\
2x_2 - 4x_3 - x_4 &\geq -12 \\
4x_2 - 3x_3 - 8x_4 &\geq -10 \\
-3x_1 - x_3 &\geq -2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Takhle upravenou úlohu si přepíšeme v maticové zápisu.

$$
\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longrightarrow min
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -8 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &\geq \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

kde

$$
\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}_{4\times 1}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_{4\times 1}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -8 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}_{4\times 1}.
$$

Sestavíme KKT podmínky podle vztahů (19)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -8 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}$$

$$u_j x_j = 0$$

$$s_i y_i = 0$$

$$u_j, x_j \geq 0 \;\; \forall\; j = 1, 2, 3, 4,$$

$$s_i, y_i \geq 0 \;\; \forall\; i = 1, 2, 3, 4.$$

Vstupními daty pro úlohu **LCP** bude matice $\mathbf{M}$ a vektor $\mathbf{q}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 8 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{8\times 8}, \; \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 2 \\ 7 \\ 12 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}_{8\times 1}$$

Matice $\mathbf{M}$ je nesymetrická a kopozitivní plus, tuto vlastnost jsme ověřili v Matlabu. K řešení použijeme Lemkeho metodu a metodu vnitřních bodů. K výpočtům použijeme vytvořené algoritmy *lemke_LP.m* a *interior_LP.m* v tomto pořadí.

```
lemke_LP
počet kroků: k = 6

reseni: w = 17    0    0    4    0    10    16    0
        z =  0    3    2    0    1     0     0    5
```

```
interior_LP

pocet kroku: k = 14


reseni: w = 17    0    0    4    0    10    16    0
        z =  0    3    2    0    1     0     0    5
```

Optimální řešení původní úlohy **LP** je $\mathbf{x} = (0, 3, 2, 0)$.

8.2. Kvadratické programování

Nejdříve si připomeneme úlohu kvadratického programování, která je definována takto:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i s_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \;\geq\; b_k,\; k = 1,\ldots,m$$

$$x_j \;\geq\; 0,\; j = 1,\ldots,n,$$

kde a_{kj}, b_k, c_j jsou reálná čísla pro všechny $k = 1,\ldots,m$ a $i, j = 1,\ldots,n$. Maticový zápis je následující

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\longrightarrow min \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{21}$$

kde je dána matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ a $\mathbf{S}$ je symetrická matice typu $n \times n$. Úkolem je nalézt vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
Účelová funkce je kvadratická a omezující podmínky jsou lineární. Pokud je matice $\mathbf{S}$ pozitivně semidefinitní, potom je účelová funkce konvexní a mluvíme o konvexním kvadratickém programování. Pokud je matice $\mathbf{S}$ pozitivně definitní, potom je účelová funkce striktně konvexní. Tuto úlohu budeme označovat symbolem **QP** z anglického názvu "Quadratic Programming".

Definice 17. Lagrangeovou funkcí úlohy (21) nazveme funkci

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \mathbf{u}^T\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ jsou Lagrangeovy multiplikátory.

Věta 25. (Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky) Předpokládejme, že $\mathbf{x}$ je lokální minimum úlohy (21), $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x}$, $g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$, $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ jsou spojitě diferencovatelné, potom existují Lagrangeovy multiplikátory $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ takové, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{s} \\ \mathbf{u}^T\mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{s}^T\mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{22}$$

kde $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^m$.

Důkaz: [15] str. 35

Na základě Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek můžeme kvadratické programování převést na úlohu lineární komplementarity:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{q}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}^T\mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{s}^T\mathbf{y} &= 0 \\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{u} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Věta 26. Pokud matice $\mathbf{S}$ je pozitivně semidefinitní, potom matice $\mathbf{M}$ je pozitivně semidefinitní a tudíž kopozitivní plus.

Důkaz: [8] str. 17

Ilustrační příklad 6.

Našim úkolem bude vyřešit úlohu **QP** převedením na úlohu **LCP**.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 13 \longrightarrow min \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nejdříve si omezující podmínku převedeme na podmínku ve tvaru nerovnosti $\geq$.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 13 &\longrightarrow min \\ -x_1 - x_2 &\geq -3 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Úlohu přepíšeme pomocí matic.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 13 \longrightarrow min$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

kde

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}_{2\times 1}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{2\times 1}, \ \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2},$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 2}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}.$$

Sestavíme KKT podmínky podle vztahů (22)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \end{pmatrix}$$
$$u_j x_j = 0$$
$$sy = 0$$
$$u_j, x_j \geq 0 \ \ \forall \ j = 1, 2$$
$$s, y \geq 0$$

Vstupními daty pro úlohu **LCP** bude matice **M** a vektor **q**

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}, \ \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1}.$$

Matice $\mathbf{S}$ je pozitivně semidefinitní, matice $\mathbf{M}$ je také pozitivně semidefinitní a proto kopozitivní plus. Na řešení této úlohy můžeme využít Lemkeho metodu a metodu vnitřních bodů. K vyřešení použijeme postupně algoritmy *lemke_QP.m*, *interior_QP.m*.

```
lemke_QP
počet kroků: k = 3
řešení: w = 0     0     0
        z = 2     1     2

interior_QP
počet kroků: k = 7
řešení: w = 1.0e-005 *
            0.0580    0.1161    0.0580
        z = 2.0000    1.0000    2.0000
```

Optimální řešení úlohy $\mathbf{QP}$ je $\mathbf{x} = (2; 1)^T$.

8.3. Dedikované portfolio

Strategie dedikovaného portfolia, také označována jako párování hotovosti, je založena na předpokladu, že v jednotlivých okamžicích se finanční toky z portfolia obligací (aktiv) musejí rovnat splátkám za závazků (pasiv). Optimalizačním kritériem této pasivní strategie je minimalizace výdajů na pořízení portfolia obligací. Z hlediska vstupních údajů řadíme tuto strategii mezi deterministické úlohy.

Tržní cena obligace, nebo-li hrubá cena, se vypočítá jako součet čisté ceny obligace a alikvotního úrokového výnosu, tj.

$$TCO = \text{čistá cena} + \text{AÚV}.$$

Alikvotní úrok je naběhlý úrok od poslední výplaty kupónu. Čistá cena nemusí být dána přímo, ale pomocí čistého kurzu, tedy procentního podílu čisté ceny na nominální hodnotě (NH) obligace.

$$\text{čistá cena} = \text{čistý kurz} * \frac{NH}{100}.$$

Tržní cenu obligace tedy spočítáme takto:

$$TCO = \text{čistý kurz} * \frac{NH}{100} + \text{AÚV}.$$

8.3.1. Příklad

Manažer portfolia má vybrat optimální portfolio obligací. Kupónová sazba, čistý kurz, alikvotní úrokový výnos a rok splatnosti jsou uvedeny níže. Manažer se rozhoduje 1. ledna roku T1 na období 5 let. V letech T1 až T5 musí být zajištěny tyto finanční částky na splátky věřitelům: 5 000 p.j., 20 000 p.j., 40 000 p.j., 1 000 p.j. a 10 000 p.j. Uvažuje se možnost zapůjčovat na konci roku volné peněžní prostředky na jeden rok s úrokem 7 % p.a. Kvůli zjednodušení zanedbáme zdanění a transakční náklady. Nominální cena obligace je 1 000 p.j. a všechny platby se uskutečňují v jeden den v roce. Množství obligací nemusí být celočíselné.

Úkolem bude určit optimální skladbu portfolia a struktury zápůjček při minimálních výdajích na jeho pořízení. V roce T0 bylo zapůjčeno 300 p.j.

obligace	kupón (%)	čistý kurz	alikvotní úrok	splatnost (rok)
B_1	10	95,0	50	T2
B_2	14	95,5	20	T3
B_3	12	94,0	10	T4
B_4	9	99,0	11	T5
B_5	8	102,0	12	T2

Matematická formulace:

Účelová funkce

$$\sum_{k=1}^{5} P_k B_k \longrightarrow min$$

omezující podmínky

$$\sum_{k=1}^{5} CF_{k,t} B_k + (1+r)S_{t-1} = L_t + S_t \qquad t = 1, \ldots, 5 \tag{23}$$

$$B_k, S_t \geq 0 \qquad k = 1, \ldots, 5, \quad t = 1, \ldots, 5 \tag{24}$$

$$S_{T0} = 300.$$

Účelová funkce vyjadřuje minimalizaci výdajů na pořízení portfolia. P_k je tržní cena k-té obligace a B_k je množství k-té obligace. Složka $\sum_{k=1}^{5} CF_{k,t} B_k$ tvoří příjmy z portfolia obligací, $CF_{k,t}$ jsou příjmy z k-té obligace v roce t. Složka $(1+r)S_{t-1}$ vyjadřuje příjmy ze zápůjček poskytnutých v loňském roce za úrokovou sazbu r. L_t jsou splátky věřitelům v daném roce. $S_{T0} = 300$ je výchozí podmínka, udávající vliv minulých rozhodnutí, která se promítají do rozhodovacího období. Zde se jedná o půjčku v roce $T0$. Podmínka (24) vyjadřuje nezápornost.

Sestavení úlohy:

V podmínce (23) si všechny neznámé proměnné převedeme na levou stranu.

Dostáváme úlohu

$$\begin{aligned}
1000B_1 + 975B_2 + 950B_3 + 1001B_4 + 1032B_5 &\longrightarrow min \\
100B_1 + 140B_2 + 120B_3 + 90B_4 + 80B_5 - 1S_1 &= 4679 \\
1100B_1 + 140B_2 + 120B_3 + 90B_4 + 1080B_5 + 1,07S_1 - 1S_2 &= 20000 \\
1140B_2 + 120B_3 + 90B_4 + 1,07S_2 - 1S_3 &= 40000 \\
1120B_3 + 90B_4 + 1,07S_3 - 1S_4 &= 1000 \\
1090B_4 + 1,07S_4 &= 10000 \\
B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, S_1, S_2, S_3, S_4 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Maticový zápis

$$\big(1000;\ 975;\ 950;\ 1001;\ 1032;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\big) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \longrightarrow min$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 140 & 120 & 90 & 80 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1100 & 140 & 120 & 90 & 1080 & 1.07 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1140 & 120 & 90 & 0 & 0 & 1.07 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1120 & 90 & 0 & 0 & 0 & 1.07 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1090 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.07 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4679 \\ 20000 \\ 40000 \\ 1000 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

$$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0.$$

Označme

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}_{9\times 1}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 975 \\ 950 \\ 1001 \\ 1032 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{9\times 1}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4679 \\ 2000 \\ 40000 \\ 1000 \\ 10000 \end{pmatrix}_{5\times 1},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 100 & 140 & 120 & 90 & 80 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1100 & 140 & 120 & 90 & 1080 & 1.07 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1140 & 120 & 90 & 0 & 0 & 1.07 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1120 & 90 & 0 & 0 & 0 & 1.07 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1090 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.07 \end{pmatrix}_{5\times 9}.$$

Dostali jsme úlohu **LP** s omezujícími podmínkami ve tvaru rovností. Převedeme si je na nerovnosti a dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\longrightarrow min \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ -\mathbf{A}\mathbf{x} &\geq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\longrightarrow min \\ \mathbf{C}\mathbf{x} &\geq \mathbf{d} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}_{10\times 9}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}_{10\times 1}.$$

Sestavíme KKT podmínky

$$\begin{aligned} \mathbf{c} - \mathbf{C}^T\mathbf{y} &= \mathbf{u} \\ \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{d} &= \mathbf{s} \\ \mathbf{u}^T\mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{s}^T\mathbf{y} &= 0 \\ \mathbf{u},\ \mathbf{s},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y} &\geq 0. \end{aligned}$$

Vstupními daty úlohy **LCP** jsou matice $\mathbf{M}$ a vektor $\mathbf{q}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{19\times 19}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ -\mathbf{d} \end{pmatrix}_{19\times 1}.$$

Z kapacitních důvodů zde nebudeme matici $\mathbf{M}$ a vektor $\mathbf{q}$ vyčíslovat. Pomocí programu *lemke_ded.m* končíme s řešením na polopřímce. K nalezení řešení použijeme program *interior_ded.m*, který nám dává optimální řešení

$$\mathbf{x} = \big(10.6;\ 34.1;\ 9.2;\ 0;\ 0;\ 2268.2;\ 0;\ 0;\ 9345.8\big)^T$$

Interpretace:

Optimální skladba portfolia je 10,6ks obligace B_1, 34,1ks obligace B_2 a 9,2ks obligace B_3. V roce T0 bylo zapůjčeno 300 p.j., v roce T1 2268,2 p.j. a v roce T4 9345,8 p.j. Hodnota účelové funkce 52 588 p.j. udává výdaje na pořízení optimálního portfolia obligací.

8.4. Swapové portfolio

Strategie swapového portfolia řadíme mezi aktivní strategie. Investor má v držení určité portfolio obligací a snaží se provést takovou revizi portfolia, tj. nákup nových, prodej dosud držených obligací, aby finanční toky z nového složení obligací byly v jednotlivých letech alespoň tak velké jako z původního portfolia. Cílem je na této revizi vydělat, tedy dosáhnout v době revize co největšího rozdílu mezi příjmy z prodaných obligací a výdaji na nákup nových obligací. Stejně jako u dedikovaného portfolia je i swapové portfolio řazeno mezi deterministické úlohy.

8.4.1. Příklad

Manažer portfolia drží tři druhy obligací BS_1, BS_2 a BS_3 v množství 20, 40 a 30 kusů. Zvažuje na začátku roku T1 na 4 období možnost revize portfolia nákupem obligací BB_1, BB_2 a BB_3 a prodejem dosud držených obligací. Kupónová sazba, čistý kurz, alikvotní úrokový výnos a rok splatnosti nakupovaných obligací jsou uvedeny níže. Cash flow z revidovaného portfolia nesmí být nižší než ze současného portfolia. Dále se uvažuje s možností půjčovat volné peněžní prostředky s úrokem 7 % p.a. na jeden rok. V jednotlivých letech se omezuje zapůjčování částkou 5 000 p.j. a v posledním roce není zapůjčování dovoleno. Měl by nakoupit alespoň 20 kusů obligací. Kvůli zjednodušení zanedbáme zdanění a transakční náklady. Nominální cena obligace je 1 000 p.j. a všechny platby se uskutečňují v jeden den v roce. Připouštíme, že množství obligací nemusí být celočíselné.

Úkolem bude určit optimální revizi portfolia obligací, jestliže manažer chce maximalizovat rozdíl mezi příjmy za prodej a výdaji na nákup obligací.

obligace	kupón (%)	čistý kurz	alikvotní úrok	splatnost (rok)
BS_1	13	100	14	T5
BS_2	12	101	35	T2
BS_3	11	103	21	T1
BB_1	12,8	97	4	T3
BB_2	13,5	99	11	T1
BB_3	13,9	101	22	T5

Matematická formulace:

Účelová funkce

$$\sum_{j=1}^{3} PS_j BS_j - \sum_{k=1}^{3} PB_k BB_k \longrightarrow max$$

omezující podmínky

$$\sum_{k=1}^{3} CF_{k,t} BB_k + (1+r) S_{t-1} \geq \sum_{j=1}^{3} CF_{j,t} BS_j + S_t \quad t = 1, \ldots, 4 \tag{25}$$

$$BS_j, BB_k, S_t \geq 0 \quad j,k = 1, \ldots, 3, \quad t = 1, \ldots, 4 \tag{26}$$

$$BS_j \leq H_j \quad j = 1, \ldots, 3 \tag{27}$$

$$\sum_{k=1}^{3} BB_k \leq 20 \tag{28}$$

$$S_t \leq 5000 \quad t = 0, 1, 2, 3. \tag{29}$$

Účelová funkce vyjadřuje maximalizaci rozdílů mezi příjmy z prodeje starých a výdaje na nové obligace. PS_j je tržní cena prodávané j-té obligace a BS_j je množství prodávané j-té obligace, PB_k je tržní cena nakupované k-té obligace a BB_k je množství nakupované k-té obligace. Podmínky (25) vyjadřují, že příjmy z portfolia obligací po revizi musejí být větší nebo rovno příjmům z původního portfolia. Složka $\sum_{k=1}^{3} CF_{k,t} BB_k$ tvoří příjmy z nově nakoupených obligací, $CF_{k,t}$ jsou přijmy z k-té obligace v roce t. Složka $(1+r)S_{t-1}$ vyjadřuje příjmy ze zápůjček poskytnutých v loňském roce za úrokovou sazbu r. Složka $\sum_{j=1}^{3} CF_{j,t} BS_j$ udává cash flow z prodaných obligací. S_t vyjadřuje poskytnuté půjčky. Podmínky (26) jsou podmínky nazápornosti. Podmínka (27) říká, že není možné prodat více obligací, než kolik je drženo. H_j udává počet j-té držené obligace. Podmínka (28) udává minimální počet obligací, které by se měly nakoupit. Poslední podmínka vyjadřuje omezení v zapůjčované částce v jednotlivých letech.

Sestavení úlohy:

Úlohu nejdříve převedeme na úlohu minimalizace a všechny podmínky na tvar nerovnosti $\geq$.

$$1014BB_1 + 1045BB_2 + 1051BB_3 - 974BS_1 - 1001BS_2 - 1032BS_3 \longrightarrow min$$

$$\begin{gathered}
130BB_1 + 120BB_2 + 1100BB_3 - 128BS_1 - 1135BS_2 - 139BS_3 + 1.07S_0 - 1S_1 \geq 0 \\
130BB_1 + 1120BB_2 - 128BS_1 - 139BS_3 + 1.07S_1 - 1S_2 \geq 0 \\
130BB_1 - 1128BS_1 - 139BS_3 + 1.07S_2 - 1S_3 \geq 0 \\
130BB_1 - 139BS_3 + 1.07S_3 - 1S_4 \geq 0 \\
-BS_1 \geq -20 \\
-BS_2 \geq -40 \\
-BS_3 \geq -30 \\
-S_0 \geq -5000 \\
-S_1 \geq -5000 \\
-S_2 \geq -5000 \\
-S_3 \geq -5000 \\
BB_1 + BB_2 + BB_3 \geq 20 \\
BS1, BS2, BS3, BB1, BB2, BB3, S0, S1, S2, S3 \geq 0
\end{gathered}$$

Budeme řešit úlohu lineárního programování

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} &\longrightarrow min \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0},
\end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{x} = \left(BB_1;\ BB_2;\ BB_3;\ BS_1;\ BS_2;\ BS_3;\ S_0;\ S_1;\ S_2;\ S_3;\ S_4 \right)^T_{11\times 1},$$

$$\mathbf{c} = \left(1014;\ 1045;\ 1051;\ -974;\ -1001;\ -1032;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0 \right)^T_{11\times 1},$$

$$\mathbf{b} = \left(0;\ 0;\ 0;\ 0;\ -20;\ -40;\ -30;\ -5000;\ -5000;\ -5000;\ -5000;\ -20 \ \right)^T_{12\times 1},$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
130 & 120 & 1100 & -128 & -1135 & -139 & 1.07 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
130 & 1120 & 0 & -128 & 0 & -139 & 0 & 1.07 & -1 & 0 & 0 \\
130 & 0 & 0 & -1128 & 0 & -139 & 0 & 0 & 1.07 & -1 & 0 \\
130 & 0 & 0 & 0 & 0 & -139 & 0 & 0 & 0 & 1.07 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}_{12\times 11}.
$$

Vstupními daty úlohy **LCP** jsou matice $\mathbf{M}$ a vektor $\mathbf{q}$

$$
\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{23\times 23}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}_{23\times 1},
$$

které jsme získali z KKT podmínek (19). Vyčíslovat si je zde z kapacitních důvodů nebudeme. K nalezení optimálního řešení využijeme námi sestavený program *lemke_sw.m*.

$$
\mathbf{x} = \big(\, 10.8;\ 6.9;\ 2.3;\ 0;\ 5.2;\ 30;\ 5000;\ 0;\ 5000;\ 2584.5;\ 0 \,\big)^T
$$

Interpretace:

Hodnota účelové funkce je 15 524 p.j., tedy na revizi portfolia lze vydělat a doporučíme revizi provést. Optimální rozhodnutí je nakoupit 10,8ks BB_1, 6,9ks BB_2 a 2,3ks BB_3. Dále prodat 5,2ks BS_2 a 30ks BS_3. V roce T0 a T2 se má zapůjčit 5000 p.j. a v roce T3 2584,5 p.j.

8.5. Markowitzův model

Akcie patří mezi nejrizikovější finanční nástroje, proto je i tento model formulován za rizika jako stochastický, tzn. vstupní data lze stanovit jako rozdělení pravděpodobnosti. Výnos z akcie bereme jako náhodnou veličinu s normálním rozdělením se střední hodnotou m, která značí očekávaný výnos, a rozptylem σ^2. Směrodatná odchylka měří riziko, že očekávaného výnosu nebude dosaženo. Předpokládáme, že budeme investovat pouze do rizikových aktiv a není dovolen krátký prodej. Investování do bezrizikových aktiv není povoleno. Dále předpokládejme averzi k riziku. V tomto modelu minimalizujeme riziko portfolia a zároveň požadujeme určitou výši očekávaného výnosu portfolia.

8.5.1. Příklad

Manažer akciového portfolia má k dispozici osm akcií $x_1, \ldots, x_8$. Známe jejich očekávané střední hodnoty $m_j,\ j = 1, \ldots, 8$ a kovarianční matici $\mathbf{S}$ typu 8×8.
Vstupní údaje:

$$\mathbf{m} = \big(0,0093;\ 0,0741;\ 0,1919;\ 0,1865;\ 0,0676;\ 0,0016;\ 0,1178;\ 0,0674;\big)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0,1756 & 0,0641 & 0,1462 & 0,0093 & 0,0057 & -0,0531 & -0,0632 & -0,0068 \\ 0,0641 & 0,2177 & 0,1041 & 0,0808 & 0,0596 & 0,0179 & -0,0275 & 0,0898 \\ 0,1462 & 0,1041 & 0,3556 & -0,0134 & 0,0133 & -0,0116 & 0,0640 & 0,0056 \\ 0,0093 & 0,0808 & -0,0134 & 0,3189 & -0,0520 & -0,0452 & -0,0348 & 0,0752 \\ 0,0057 & 0,0596 & 0,0133 & -0,0520 & 0,0768 & 0,0355 & -0,0071 & -0,0004 \\ -0,0531 & 0,0179 & -0,0116 & -0,0452 & 0,0355 & 0,0859 & 0,0695 & 0,0060 \\ -0,0632 & -0,0275 & 0,0640 & -0,0348 & -0,0071 & 0,0695 & 0,1787 & 0,0053 \\ -0,0068 & 0,0898 & 0,0056 & 0,0752 & -0,0004 & 0,0060 & 0,0053 & 0,1619 \end{pmatrix}$$

Úkolem manažera je na základě Markowitzova modelu stanovit optimální relativní složení portfolia.

Matematická formulace:
Účelová funkce

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} x_i s_{ij} x_j \longrightarrow min$$

omezující podmínky

$$\sum_{j=1}^{8} m_j x_j = \pi \tag{30}$$

$$\sum_{j=1}^{8} x_j = 1 \tag{31}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 8. \tag{32}$$

Úloha slouží k nalezení optimálního portfolia pro předem stanovenou hodnotu očekávaného výnosu portfolia. Účelová funkce vyjadřuje minimální rozptyl. Podmínka, že součet všech relativních podílů x_j je roven jedné znamená, že je možné investovat pouze tolik prostředků, kolik je k dispozici. Podmínky (32) jsou podmínky nezápornosti, protože není dovolen krátký prodej. Podmínka (30) zajišťuje, že očekávaný výnos optimálního portfolia bude odpovídat požadované střední hodnotě výnosu π stanovené předem.

Sestavení úlohy:

Jedná se o úlohu kvadratického programování, maticový zápis

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} &\longrightarrow min \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,0093; & 0,0741; & 0,1919; & 0,1865; & 0,0676; & 0,0016; & 0,1178; & 0,0674 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 8},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,16 \\ 1 \end{pmatrix}_{2\times 1}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}_{8\times 1}.$$

Omezující podmínky převedeme na nerovnosti a sestavíme KKT podmínky

$$\begin{aligned} 2\mathbf{S}\mathbf{x} - \mathbf{C}^T\mathbf{y} &= \mathbf{u} \\ \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{d} &= \mathbf{s} \\ \mathbf{u}^T\mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{s}^T\mathbf{y} &= 0 \\ \mathbf{u},\ \mathbf{s},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y} &\geq 0, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}_{4\times 8},\ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}_{4\times 1}.$$

Vstupními daty úlohy **LCP** jsou matice $\mathbf{M}$ a vektor $\mathbf{q}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{S} & -\mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{12\times 12}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{d} \end{pmatrix}_{12\times 1}.$$

I zde z kapacitních důvodů vynecháme vyčíslení matice $\mathbf{M}$ a vektoru $\mathbf{q}$. Pomocí programu *lemke_mar.m* dostáváme optimální řešení.

$$\mathbf{x} = \big(0;\ 0;\ 0,2896;\ 0,3892;\ 0,1195;\ 0;\ 0,2017;\ 0\big)^T$$

Interpretace:

Investor očekává výnos 16 %, musí podstoupit riziko 28,5%. Podle Markowitzova modelu doporučíme investorovi vložit do akciového portfolia takto: do akcie x_3 28,96%, do akcie x_4 38,92%, do akcie x_5 11,95% a do akcie x_7 20,17%.

Závěr

V práci jsou popsány jednotlivé typy úloh lineární i nelineární komplementarity. Dále také metody k řešení úloh lineární komplementarity. Studium metod k řešení úloh nelineární komplemtarity je velmi rozsáhlé, proto jsme se zde touto problematikou blíže nezabývali.

Závěrem si porovnáme jednotlivé metody k řešení úlohy **LCP**, které jsme v této práci uvedli. Lemkeho metoda výše zmíněné ilustrační i aplikační příklady řeší v nejmenším počtu iterací. U iteračních metod počet iterací závisí na zvolení parametrů a diagonální matice.

V této práci jsme se zaměřili na řešení úloh lineární komplementarity. Například znalosti metody vnitřních bodů, kterou jsme uvedli jen okrajově, by bylo zajímavé studovat hlouběji.

Při psaní této diplomové práce jsem získala mnoho zkušeností se čtením především anglických matematických textů, jejich zpracováním a následným sepsáním. Zároveň jsem si prohloubila znalosti s programovacím jazykem Matlab, který jsem dříve znala jen z části. Věřím, že úsilí věnované této práci mi pomůže v budoucí praxi.

Literatura

[1] Billups, S. C., Murty, K. G.: Complementarity Problems, UCD/CCM Report, No. 147, 1999.

[2] Bonnans, J. F., Gilbert, J. Ch., Lemaréchal, C., Sagastizábal, C. A.: Numerical optimization, Springer, 2006.

[3] Cottle, R. W., Pang, J. S., Stone, R. E.: The Linear Complementarity Problem, Academic Press, Boston, 1992.

[4] Cornuejols, G., Tütüncü, R.: Optimization Methods in Finance, Cambrige University Press, 2007.

[5] Červenák, J.: Úvod do problému lineární komplementarity, ČVUT, Praha, 1997.

[6] Facchinei, F., Pang, J. S.: Finite-Dimensional Variatonal Inequalities and Complementarity Problems, Springer, 2003.

[7] Ferris, M. C., Pang, J. S.: Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems, SIAM Review, Volume 39, Issue 4, pp. 669 - 713, 1997.

[8] Friedman, J.: Linear Complementarity and Mathematical (Non-linear) Programming, Department of Mathematical, UBC, 1998.

[9] Kebbiche, Z., Keraghel, A., Yassine, A.: An Infeasible Interior Point Method for the Monotone Linear Complementarity Problem, Int. Journal of Math. Analysis, Volume 1, no. 17, 841-849, 2007.

[10] Murty, K. G.: Linear complementarity, Linear and Nonlinear Programming, Helderman-Verlag, Berlin, 1998.

[11] Perůtka, K.: MATLAB - Základy pro studenty automatizace a informačních technologií, Učební texty vysokých škol, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2005.

[12] Rohn, J.: Lineární a nelineární programování, Učební text, 1997. http://uivtx.cs.cas.cz/ rohn/ucebnitexty/linnelinprog.pdf

[13] Yassine, A.: Comparative Study Between Lemke's Method and the Interior Point Method for Monotone Linear Complementarity Problem, Volume LIII, No. 3, 2008.

[14] Zmeškal, Z. a kolektiv, Finanční modely, Ekonomická fakulta, Vysoká škola báňská - Technická univerzita, Ostrava, 2002.

[15] Ženčák, P.: Texty k přednáškám z lineárního programování, Univerzita Palackého v Olomouci, 2008

Přílohy

Příloha 1: Programová realizace algoritmu Lemkeho metody

```
%Lemkeho metoda
clear

load M.txt
load q.txt

[n] = size(q);
[n,l] = size(M);
B=eye(n);
y=2*l+1;
b=[1:n]';
z0=ones(n,1);
A=[B -z0 -M];
x=q;
zz=zeros(1,2*n+1);

% triviální řešení
if all(q>=0)
   disp('triviální řešení:')
    q
break;
end

[h,s]=min(q);

%počáteční pivotace
for i=1:s-1
x(i)=x(i)-x(s)*A(i,(l+1))/A(s,(l+1));
end
for i=s+1:n
x(i)=x(i)-x(s)*A(i,(l+1))/A(s,(l+1));
end
x(s)=x(s)/A(s,(l+1));

for j=1:y
    for i=1:s-1
     A(i,:)=A(i,:)-A(s,:)*A(i,(l+1))/A(s,(l+1));
  end
```

```
      A(s,:)=A(s,:)/A(s,(l+1));
  for i=s+1:n
      A(i,:)=A(i,:)-A(s,:)*A(i,(l+1))/A(s,(l+1));
  end
end
lv=b(s); %vystupující proměnná
b(s)=l+1;

%hlavni pivotace
for k=1:50
if lv<l+1
for i=1:n
    a(i)=A(i,l+1+lv);
    if a(i)<=0;
        v(i)=inf;
        else
      v(i)=x(i)/a(i);
    end
    end
ev=l+1+lv; %vstupující proměnná
elseif lv>l+1
  for i=1:n
      a(i)=A(i,lv-l-1);
    if a(i)<=0;
        v(i)=inf;
        else
  v(i)=x(i)/a(i);
    end
  end
ev=lv-l-1;  %vstupující proměnná
end

if all(v==inf)
    error ('konec na polopřímce')
end

sl=find(v==min(v));
p=length(sl);
%výběr prvku pomocí lexikografického pravidla
if length(sl)~=1
for i=1:p
    for j=1:2*l
        f(i,j)=A(sl(i),j)/A(sl(i),ev);
```

```
    end
end

for j=1:2*l+1
    t=f(i,j);
    h=find(t==min(t));
    if length(h)==1 break;
    end
end

r=sl(h);
%výběr prvku pomocí podílového kritéria
else r=sl;
end

if b(r)==l+1
    for i=1:r-1
x(i)=x(i)-x(r)*A(i,(ev))/A(r,(ev));
    end
    for i=r+1:n
x(i)=x(i)-x(r)*A(i,(ev))/A(r,(ev));
    end
x(r)=x(r)/A(r,(ev));
for j=1:y
    for i=1:r-1
     A(i,:)=A(i,:)-A(r,:)*A(i,(ev))/A(r,(ev));
    end
     A(r,:)=A(r,:)/A(r,(ev));
    for i=r+1:n
     A(i,:)=A(i,:)-A(r,:)*A(i,(ev))/A(r,(ev));
    end
end
b(r)=ev;
break
end


if b(r)~=l+1
  for i=1:r-1
x(i)=x(i)-x(r)*A(i,(ev))/A(r,(ev));
    end
    for i=r+1:n
x(i)=x(i)-x(r)*A(i,(ev))/A(r,(ev));
```

```
    end
x(r)=x(r)/A(r,(ev));
for j=1:y
    for i=1:r-1
     A(i,:)=A(i,:)-A(r,:)*A(i,(ev))/A(r,(ev));
    end
       A(r,:)=A(r,:)/A(r,(ev));
       for i=r+1:n
      A(i,:)=A(i,:)-A(r,:)*A(i,(ev))/A(r,(ev));
       end
end
lv=b(r);
b(r)=ev;
end

if x(s)==0
    break;
end
end

zz(b)=x;
zz=zz(1:2*n+1);
w=zz(1:n);
z=zz(n+2:2*n+1);

disp ('počet kroků:')
k
disp('řešení:')
w
z
```

Příloha 2: Programová realizace algoritmu Hlavní povotovací metody

```
%Hlavní pivotovací metoda
clear

load M.txt
load q.txt

[n] = size(q);
[n,l] = size(M);
```

```
B=eye(n);
y=2*l;
b=[1:n]';
A=[B -M];
zz=zeros(1,2*n);

% triviální řešení
if all(q>=0)
   disp('triviální řešení:')
   w=q
break;
end

%hlavní iterace
for k=1:20
   r=max(find(q<0));
   lv=b(r);
if b(r)<=l
    ev=lv+l;
    if A(r,ev)==0
        break;
    end
    for i=1:r-1
q(i)=q(i)-q(r)*A(i,ev)/A(r,ev);
    end
    for i=r+1:n
q(i)=q(i)-q(r)*A(i,ev)/A(r,ev);
    end
q(r)=q(r)/A(r,ev);
for j=1:y
   for i=1:r-1
     A(i,:)=A(i,:)-A(r,:)*A(i,ev)/A(r,ev);
   end
     A(r,:)=A(r,:)/A(r,ev);
   for i=r+1:n
     A(i,:)=A(i,:)-A(r,:)*A(i,ev)/A(r,ev);
   end
end
b(r)=ev;

else
     ev=lv-l;
     if A(r,ev)==0
```

```
        break;
    end
       for i=1:r-1
q(i)=q(i)-q(r)*A(i,ev)/A(r,ev);
    end
    for i=r+1:n
q(i)=q(i)-q(r)*A(i,ev)/A(r,ev);
    end
q(r)=q(r)/A(r,ev);
for j=1:y
  for i=1:r-1
    A(i,:)=A(i,:)-A(r,:)*A(i,ev)/A(r,ev);
  end
    A(r,:)=A(r,:)/A(r,ev);
  for i=r+1:n
    A(i,:)=A(i,:)-A(r,:)*A(i,ev)/A(r,ev);
  end
end
b(r)=ev;
end

if q>=0
    break;
end
end

zz(b)=q;
zz=zz(1:2*n);
w=zz(1:n);
z=zz(n+1:2*n);

disp ('počet kroků:')
k
disp('řešení:')
w
z
```

Příloha 3: Programová realizace algoritmu iterační metody pro symetrickou matici M

```
%iterační metoda pro symetrickou matici
clear
```

```
load M.txt
load q.txt

a=0.5;
w=0.9;

n=length(q);
E=eye(n);
z0=eye(1,n);

%L dolní trojúhelníková matice
for i=1:n
    for j=1:i-1
        L(i,j)=M(i,j);
    end
    for j=i:n
        L(i,j)=0;
    end
end

%G diagonální matice
for i=1:n
    for j=1:i-1
        G(i,j)=0;
    end
   for j=i+1:n
        G(i,j)=0;
    end
    G(i,i)=M(i,i);
end
D=G*E;
s=max(max(D));

if a*w>2/s
    error ('chyba ve volbě parametrů')
end

for k=1:10000
for j=1
 z(j)=a*max(0,(z0(j)-w*E(j,j)*(M(j,:)*z0(:)+q(j))))+(1-a)*z0(j);
end
for j=2:n
```

```
for l=1:j-1
 z(j)=a*max(0,(z0(j)-w*E(j,j)*(M(j,:)*z0(:)+q(j)+...
      L(j,l)*(z(l)-z0(l)))))+(1-a)*z0(j);
end
end
 zn=z0-z;

 if norm(zn) < 0.000001; break;
 end
  z0=z;
end
w=(M*z'+q)';

disp ('počet kroků:')
k
disp('řešení:')
w
z
```

Příloha 4: Programová realizace algoritmu iterační metody pro obecnou matici M

```
%iterační metoda pro obecnou matici
clear

load M.txt
load q.txt

n = length(q);
E=eye(n);
z0=ones(1,n);
w=0.5;

%L dolní trojúhelníková matice
for i=1:n
    for j=1:i-1
        L(i,j)=M(i,j);
    end
    for j=i:n
        L(i,j)=0;
    end
end
```

```
for k=1:300000
 z(1)=max(0,(z0(1)-w*E(1,1)*(M(1,:)*z0(:)+q(1))));
for j=2:n
for l=1:j-1
 z(j)=max(0,(z0(j)-w*E(j,j)*(M(j,:)*z0(:)+q(j)+...
      L(j,l)*(z(l)-z0(l)))));
end
end
 zn=z0-z;

if norm(zn) < 0.0000001
   break
end
  z0=z;
end
w=(M*z'+q)';

disp ('počet kroků:')
k
disp('řešení')
w
z
```

Příloha 5: Programová realizace algoritmu metody vnitřních bodů

```
%metoda vnitřních bodů
clear

load M.txt
load q.txt

n=length(q);
z0=ones(n,1);
w0=ones(n,1);
e=ones(n,1);
I=eye(n);
gama=0.1;
for k=1:10000

    ni=gama*((w0'*z0)/n);
```

```
    Z=diag(z0);
    W=diag(w0);
    X=Z*W*e-ni*e;
    XX=w0-M*z0-q;
    A=[W Z;-M I];
    b=[X; XX];
    dzz=A\b;
    dz=dzz(1:n);
    dw=dzz(n+1:2*n);
    az=z0./dz;
    aw=w0./dw;
    az(az==inf)=1;
    aw(aw==inf)=1;
    az(az<=0)=1;
    aw(aw<=0)=1;
    [hz,r]=min(az);
    [hw,r]=min(aw);
    a=min(hz,hw);
    z=z0-a*dz;
    w=w0-a*dw;

   if ((z0'*w0+ norm(M*z0+q-w0))<0.0001)
       break;
   end

   z0=z;
   w0=w;

end
w=w';
z=z';

disp ('počet kroků:')
k
disp('řešení:')
w
z
```