



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**ANALÝZA NELINEÁRNÍCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ
VYKAZUJÍCÍCH CHAOTICKÉ CHOVÁNÍ S ATRAKTOREM
TYPU "DVOJITÝ SVITEK"**

ANALYSIS OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS EXHIBITING CHAOTIC BEHAVIOR WITH A DOUBLE-
SCROLL TYPE ATTRACTOR

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jana Tancjurová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	Jana Tancjurová
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analýza nelineárních dynamických systémů vykazujících chaotické chování s atraktorem typu "dvojitý svitek"

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Některé (i poměrně jednoduché) dynamické systémy vykazují zvláštní chování, které je známo pod názvem deterministický chaos. To je charakterizováno tím, že trajektorie řešení se v delším časovém horizontu nepřibližují ani k bodu rovnováhy, ani k periodickému orbitu; ve skutečnosti jsou ale přitahovány komplikovanou množinou, tzv. podivným atraktorem. Navíc, systém je velmi citlivý na poruchy v počátečních podmínkách. Prototypem chaotického systému, který obsahuje atraktor typu "dvojitý svitek" je Chuův elektrický obvod.

Cíle bakalářské práce:

- Popis chaotických systémů s atraktorem typu "dvojitý svitek", zejména Chuova systému;
- analýza kvalitativních vlastností uvažovaných systémů (bifurkace, stabilita, chaos);
- numerická (grafická) simulace obdržených teoretických výsledků.

Seznam doporučené literatury:

KENNEDY, M. P. Three steps to chaos - Part II: A Chua's circuit primer. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 1993, roč. 40, s. 657-674.

PIVKA, L. Chua's oscillator: A compendium of chaotic attractor phenomena. Journal of The Franklin Institute. 1994, roč. 331B, s. 705-741. ISSN: 0016-0032.

STROGATZ, S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos, 2nd ed., Westview Press, 2015. ISBN 9780813349107.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá zkoumáním stabilního a chaotického chování nelineárních dynamických systémů. Konkrétně se zaměřuje na Chuaův elektrický obvod. K vyšetření stability systému jsou využity Hartman–Grobmanova věta a Routh–Hurwitzovo kritérium. Práce je doplněna bifurkačním diagramem, na kterém je popsáno mimo jiné i chaotické chování Chuova systému.

Abstract

This thesis analyzes stable and chaotic behavior of nonlinear dynamic systems. It is focused on Chua's electric circuit. The Hartman–Grobman theorem and the Routh–Hurwitz criterion are used to assess the stability of this system. Furthermore, the thesis also includes a bifurcation diagram which describes the chaotic behavior of Chua's circuit.

Klíčová slova

Dynamický systém, bifurkace, Chuaův obvod, chaotické chování, atraktor, „dvojitý svitek“

Keywords

Dynamic system, bifurcation, Chua's circuit, chaotic behaviour, attractor, double scroll

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Analýza nelineárních dynamických systémů vykazujících chaotické chování s atraktorem typu „dvojitý svitek“* vypracovala samostatně pod vedením doc. Ing. Luďka Nechvátala, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jana Tancjurová

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému školiteli doc. Ing. Lud'kovi Nechvátalovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace a cenné rady při psaní této práce.

Jana Tancjurová

Obsah

Úvod	12
1 Matematický aparát	13
1.1 Autonomní dynamický systém	13
1.2 Topologicky ekvivalentní trajektorie	15
1.3 Linearizace	15
1.4 Stabilita rovnovážných bodů	16
1.5 Klasifikace rovnovážných bodů v \mathbb{R}^3	17
1.6 Atraktor	18
1.7 Bifurkace	19
1.8 Routh–Hurwitzovo kritérium	19
2 Sestavení matematického modelu Chuova obvodu	21
2.1 Základní rovnice ideálních pasivních prvků	22
2.2 Kirchhoffovy zákony pro elektrické obvody	22
2.3 Matematický model Chuova obvodu	23
3 Analýza stability Chuova obvodu	25
3.1 Rovnovážné body	25
3.2 Stabilita rovnovážného bodu S_1	26
3.3 Stabilita rovnovážných bodů S_2 a S_3	27
4 Grafická interpretace teoretických výsledků	29
Závěr	34
Reference	35

Úvod

Deterministický chaos označuje velmi složitý typ chování dynamického systému. Úvodem je třeba říci, že zde nemluvíme o chaosu v běžném pojetí, nejedná se tedy o chování náhodné. Systém, který vykazuje chaotické chování, je charakterizován extrémní citlivostí vzhledem k počátečním podmínkám. Nelze tedy předpovědět, jak se systém bude vyvíjet, pokud dojde k poruše v počátečním stavu, byť známe původní řešení. Vedle citlivosti na počáteční podmínky je dalším typickým rysem těchto systémů existence tzv. podivného atraktoru, kterým jsou přitahovány trajektorie řešení.

V této práci se budeme zabývat dynamickými systémy, jejichž trajektorie jsou za určitých podmínek přitahovány atraktorem známým jako „dvojitý svitek“ (z angličtiny *double scroll*). Takové chování se může projevat u některých i poměrně jednoduchých dynamických systémů, jež obsahují nelineární prvek. V této práci se zaměříme na Chuův elektrický obvod, který je pojmenován po vědci a vynálezci tohoto obvodu – Leonu O. Chuovi. Jedná se o oscilační obvod skládající se z několika lineárních částí a z jednoho nelineárního prvku, známého jako Chuova dioda.

Práce je členěna do čtyř kapitol. První část je věnována teoretickému úvodu, kde budou vysvětleny pojmy jako jsou dynamický systém, atraktor či bifurkace. Dále se budeme zabývat způsoby posuzování stability rovnovážných bodů, konkrétně uvedeme Ljapunovovu větu, Hartman–Grobmanovu linearizační větu a Routh–Hurwitzovo kritérium stability. Následuje sestavení matematického modelu Chuova obvodu, kde pomocí známých fyzikálních zákonů odvodíme soustavu nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Omezíme se přitom na nejjednodušší možný model Chuova obvodu. V další části se budeme věnovat analýze tohoto nelineárního dynamického systému. Cílem bude nalézt rovnovážné body a určit jejich stabilitu v závislosti na několika parametrech. Dále se pokusíme určit kritické bifurkační parametry, při jejichž překročení dochází ke kvalitativním změnám chování. Na tuto kapitolu navážeme numerickou, respektive grafickou simulací obdržených teoretických výsledků. Vykreslíme fázové portréty pro různé hodnoty parametrů i počáteční podmínky a pomocí bifurkačního diagramu se pokusíme popsat jednotlivé oblasti chování systému.

1 Matematický aparát

Než přejdeme k samotné analýze Chuova obvodu, uvedeme teorii potřebnou ke zkoumání vlastností nelineárního dynamického systému. V následujících odstavcích zavedeme pojem dynamického systému a budeme se zabývat podmínkami existence a jednoznačnosti řešení nelineární soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Dále zavedeme pojem autonomní soustavy, topologicky ekvivalentní trajektorie, aj.

Protože obecně nejsme schopni řešit soustavu nelineárních diferenciálních rovnic, vyslovíme Hartman–Grobmanovu větu, respektive Ljapunovovu větu, pomocí nichž je možné získat informace o lokálním chování systému v okolí rovnovážného bodu \mathbf{x}^* . Důležitými pojmy z oblasti dynamických systémů budou také bifurkace nebo atraktor. Na závěr této kapitoly uvedeme Routh–Hurwitzovo kritérium, díky kterému jsme schopni posoudit stabilitu systému.

Poznamenejme také, že se v následujícím textu setkáme se zkratkou ODR, která bude vždy označovat obyčejné diferenciální rovnice. Pojmy a věty uvedené v této kapitole lze nalézt například v [2], [3], [7], [8] nebo [9].

1.1 Autonomní dynamický systém

Pojem dynamického systému se pojí nejčastěji s fyzikálními systémy, které se určitým způsobem vyvíjejí v čase. Přesněji, stav těchto systémů je možné za určitých předpokladů v každém časovém okamžiku t popsat n -ticí reálných proměnných $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, tzv. stavových veličin. Okamžitý stav systému zcela určuje jeho vývoj v čase, tedy určitému stavu v přítomnosti můžeme přiřadit konkrétní stav v minulosti i budoucnosti (viz [10]). Dynamický systém je tedy způsob, jak matematicky popsat vývoj tohoto systému. V následující definici zavedeme rigorózně tento pojem.

Definice 1.1. (*Spojité dynamické systémy*) dynamickým systémem nazveme dvojici (φ, Ω) , kde zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ je spojitě a pro $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ splňuje:

1. $\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$,
2. $\varphi_s(\varphi_t(\mathbf{x})) = \varphi_{s+t}(\mathbf{x})$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

Používáme zde přitom obvyklé značení $\varphi_t(\mathbf{x}) \equiv \varphi(t, \mathbf{x})$.

Poznámka. Množina stavů Ω se v literatuře označuje pojmem *stavový prostor*. V dalších kapitolách budeme stavovým prostorem Ω rozumět vždy prostor \mathbb{R}^n .

V této práci se budeme zabývat výhradně dynamickými systémy, které jsou dány jako řešící funkce soustavy *autonomních diferenciálních rovnic*.

Definice 1.2. Soustavu rovnic $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ nezveme *autonomní*, jestliže nezávisí na nezávislé proměnné t . Tedy platí $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Nejčastěji jako proměnnou t uvažujeme čas. Jedná se tedy o jevy, pro které se s časem nemění data úlohy – pro nelineární ODR se tedy nemění pravá strana rovnice $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Zavedme nyní počáteční úlohu soustavy autonomních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.2)$$

kde $\mathbf{f} \equiv (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Řešením soustavy (1.1) na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je každá vektorová funkce $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, která po dosazení do $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dává identickou rovnost pro $\forall t \in I$.

Označme řešení počáteční úlohy (1.1)–(1.2) na intervalu $I(\mathbf{x}_0)$ jako $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$. Pak podle [9] je tok diferenciálních rovnic definován následovně.

Definice 1.3. Nechť Ω je otevřená podmnožina \mathbb{R}^n a nechť $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$. Dále nechť pro $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ je $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ řešením dané počáteční úlohy (1.1)–(1.2) definované na maximálním intervalu¹ existence řešení $I(\mathbf{x}_0)$. Pak pro $t \in I(\mathbf{x}_0)$ nazveme zobrazení φ_t definované jako

$$\varphi_t(\mathbf{x}_0) = \varphi(t, \mathbf{x}_0)$$

tok diferenciálních rovnic nebo *tok definovaný diferenciálními rovnicemi*. Často se můžeme setkat i s označením *tok vektorového pole* \mathbf{f} .

Definice 1.4. *Grafem řešení* $\mathbf{x}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka $\{(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in I\}$.

Vzhledem k tomu, že v prostorech třetí (nebo vyšší) dimenze nelze zobrazit graf řešení, budou nás zajímat tzv. *trajektorie řešení*. Jedná se o průmět řešení počáteční úlohy do prostoru hodnot řešení, tj. do stavového prostoru.

Definice 1.5. *Trajektorie řešení* $\mathbf{x}(t)$ soustavy diferenciálních rovnic (1.1) splňující (1.2) je křivka $\{(x_1(x), \dots, x_n(x)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\}$. Šipka označující orientaci křivek popisuje pohyb hodnoty řešení po trajektorii při rostoucím čase t .

Soubor trajektorií řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (1.1) ve stavovém prostoru pro různé počáteční podmínky označíme pojmem *fázový portrét*. Stavový prostor označujeme také jako *fázový prostor*.

Definice 1.6. Bod $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *rovnovážný bod* soustavy (1.1) nebo také *singulární, stacionární* či *kritický bod*, jestliže $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Nyní si uvedeme analogii Picardovy věty, tedy větu o existenci a jednoznačnosti řešení autonomních soustav ODR prvního řádu. Předtím, než tuto větu vyslovíme, definujeme podmínku *lipschitzovskosti*.

Definice 1.7. Nechť Ω je otevřená podmnožina \mathbb{R}^n a nechť $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je vektorové pole. Řekněme, že \mathbf{f} splňuje Lipschitzovskou podmínku na Ω , jestliže existuje kladná konstanta L taková, že pro všechna $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ platí

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|. \quad (1.3)$$

¹Maximálním intervalem řešení $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ soustavy diferenciálních rovnic rozumíme takový interval, který nelze rozšířit tak, aby na tomto rozšířeném intervalu bylo $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ opět řešením.

Poznámka. Podmínka lipschitzovskosti je mnohdy nahrazována předpokladem spojitosti parciálních derivací vektorového pole \mathbf{f} podle všech proměnných $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$, z něhož už plyne lokální lipschitzovskost. Tedy pokud existují parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, které jsou spojité na Ω pro všechna $i, j = 1, \dots, n$, pak vektorové pole \mathbf{f} je lokálně lipschitzovské², [3].

Věta 1.8 (O existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť každá složka vektorového pole \mathbf{f} je spojitá v okolí bodu \mathbf{x}_0 . Pak existuje okolí bodu t_0 , na kterém existuje řešení počáteční úlohy (1.1)–(1.2). Nechť vektorové pole \mathbf{f} je navíc i lipschitzovské v okolí bodu \mathbf{x}_0 . Potom řešení $\mathbf{x}(t)$ počáteční úlohy (1.1)–(1.2) je určeno jednoznačně.*

Ideu důkazu této věty nalezneme například v [3]. Tvrzení zůstane v platnosti i v případě lokální lipschitzovskosti vektorového pole \mathbf{f} .

Věta 1.9. *Uvažujme autonomní soustavu ODR s lipschitzovským polem $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Potom trajektorie úplného řešení $\mathbf{x}(t)$ (tj. řešení, které nelze prodloužit na větší interval) jsou následujících tří typů:*

1. *singulární bod – řešení $\mathbf{x}(t)$ jsou konstantní,*
2. *cyklus, periodický orbit – uzavřená křivka, řešení $\mathbf{x}(t)$ je periodické,*
3. *otevřená neprotínající se křivka – trajektorie řešení představuje prosté zobrazení otevřeného intervalu $I = (a, b)$ (včetně případů $a = -\infty$ nebo $b = \infty$) do fázového prostoru.*

1.2 Topologicky ekvivalentní trajektorie

V následujících kapitolách se budeme zabývat systémy, jejichž trajektorie jsou si v jistém smyslu podobné – mají stejný počet rovnovážných bodů, stejného typu stability, přičemž existuje nějaké spojitě zobrazení, které trajektorie prvního systému převádí na trajektorie druhého systému. Takové trajektorie označujeme pojmem *topologicky ekvivalentní trajektorie*. Tento pojem si proto nyní korektně zavedeme.

Definice 1.10. Dynamický systém (φ, \mathbb{R}^n) nazveme *topologicky ekvivalentní* se systémem (ψ, \mathbb{R}^n) , jestliže existuje homeomorfismus³ $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, který zobrazuje trajektorie prvního systému na trajektorie druhého systému, přičemž zachovává směr plynutí času. Tedy jestliže je trajektorie prvního dynamického systému orientována z bodu \mathbf{x}_1 do bodu \mathbf{x}_2 , pak trajektorie druhého systému musí být orientována z bodu $h(\mathbf{x}_1)$ do bodu $h(\mathbf{x}_2)$.

Poznámka. Větou 1.8 máme zaručenu pouze lokální řešitelnost úlohy (1.1)–(1.2), avšak u každé soustavy s C^1 -vektorovým polem lze „přeškálovat“ čas tak, že nově vzniklá soustava už má řešení na celé reálné ose a příslušná vektorová pole jsou topologicky ekvivalentní, details lze nalézt v monografii [9]. V tomto smyslu lze tedy každou autonomní soustavu s C^1 -vektorovým polem \mathbf{f} považovat za dynamický systém.

1.3 Linearizace

Obecně nejsme schopni řešit nelineární ODR, ovšem je možné lokálně popsat chování nelineárního systému v okolí tzv. *hyperbolického rovnovážného bodu* pomocí určité lineární soustavy.

²Vektorové pole \mathbf{f} je lokálně lipschitzovské, jestliže podmínka (1.3) je splněna na nějakém okolí libovolného bodu $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$.

³Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ nazveme homeomorfismus, jestliže je spojitě, bijektivní a inverzní zobrazení f^{-1} je také spojitě.

Poznámka. V následující definici využijeme vlastní čísla *Jacobiho matice*

$$\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla Jacobiho matice určíme jako kořeny charakteristického polynomu

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Definice 1.11. Rovnovážný bod \mathbf{x}^* soustavy (1.1) nazveme *hyperbolický*, jestliže žádné z vlastních čísel matice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ nemá nulovou reálnou část.

V dalších odstavcích si ukážeme, že kvalitativní chování soustavy (1.1) je v okolí hyperbolického rovnovážného bodu určeno soustavou lineárních diferenciálních rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

kde matice $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. Tuto soustavu rovnic nazveme *linearizací* soustavy (1.1) a $\mathbf{A}\mathbf{x}$ nazveme *lineární částí \mathbf{f} v bodě \mathbf{x}^** .

V dostatečně blízkém okolí hyperbolického rovnovážného bodu \mathbf{x}^* má nelineární systém stejnou kvalitativní strukturu jako lineární systém. Jsme tak schopni vyšetřit typ a stabilitu tohoto hyperbolického bodu, viz následující věta.

Věta 1.12 (Hartman–Grobmanova). *Předpokládejme, že \mathbf{x}^* je rovnovážným bodem soustavy (1.1) a matice linearizace $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ má všechna vlastní čísla s nenulovými reálnými částmi. Pak existuje okolí $\mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$ takové, že na $\mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$ je dynamický systém (1.1) topologicky ekvivalentní se systémem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.*

Důkaz této věty nalezneme například v [9].

1.4 Stabilita rovnovážných bodů

Stabilita řešení ODR vyjadřuje citlivost řešení na změnu dat. Systém je tedy stabilní, jestliže malá změna dat vyvolá malou změnu řešení.

Definice 1.13. Řešení $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ počáteční úlohy (1.1)–(1.2) nazveme stabilní na intervalu $I = \langle t_0, \infty \rangle$ vzhledem k počáteční podmínce, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (1.1) platí následující implikace:

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \tilde{\mathbf{x}}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in I.$$

Definice 1.14. Řešení $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ počáteční úlohy (1.1)–(1.2) nazveme atraktivní pro $t \rightarrow \infty$ vzhledem k počáteční podmínce, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (1.1), které splňuje

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \tilde{\mathbf{x}}(t_0)\| < \delta, \quad \text{platí} \quad \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow \infty.$$

Hyperbolické body mají tu vlastnost, že jsou buď asymptoticky stabilní (tj. zároveň stabilní i atraktivní), nebo nestabilní. Stabilitu hyperbolických bodů můžeme snadno určit pomocí vlastních čísel matice příslušné linearizace. Z Hartman–Grobmanovy věty plyne následující tvrzení:

Věta 1.15. Má-li matice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$

- všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí, je rovnovážný bod \mathbf{x}^* asymptoticky stabilní,
- alespoň jedno vlastní číslo s kladnou reálnou částí, je rovnovážný bod \mathbf{x}^* nestabilní,
- alespoň jedno z vlastních čísel s nulovou reálnou částí, jedná se o nehyperbolický bod a v takovém případě o stabilitě nemůžeme rozhodnout.

Oproti tomu nehyperbolické body mohou být stabilní, asymptoticky stabilní, nebo nestabilní. O jejich stabilitě však nemůžeme rozhodnout pomocí vlastních čísel matice. Pro vyšetření stability tedy využíváme následující větu.

Věta 1.16 (Ljapunov). Uvažujme soustavu (1.1) s rovnovážným stavem $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ a necht' existuje okolí \mathcal{O} rovnovážného stavu \mathbf{x}^* a skalární funkce $V : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje

1. $V(\mathbf{x}^*) = 0$,
2. $V(\mathbf{x}) > 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathcal{O} \setminus \{\mathbf{x}^*\}$.

Pak platí následující tvrzení:

1. Je-li $\dot{V} \leq 0$ na $\mathcal{O} \setminus \{\mathbf{x}^*\}$, rovnovážný stav \mathbf{x}^* je stabilní.
2. Je-li $\dot{V} < 0$ na $\mathcal{O} \setminus \{\mathbf{x}^*\}$, rovnovážný stav \mathbf{x}_0 je asymptoticky stabilní.

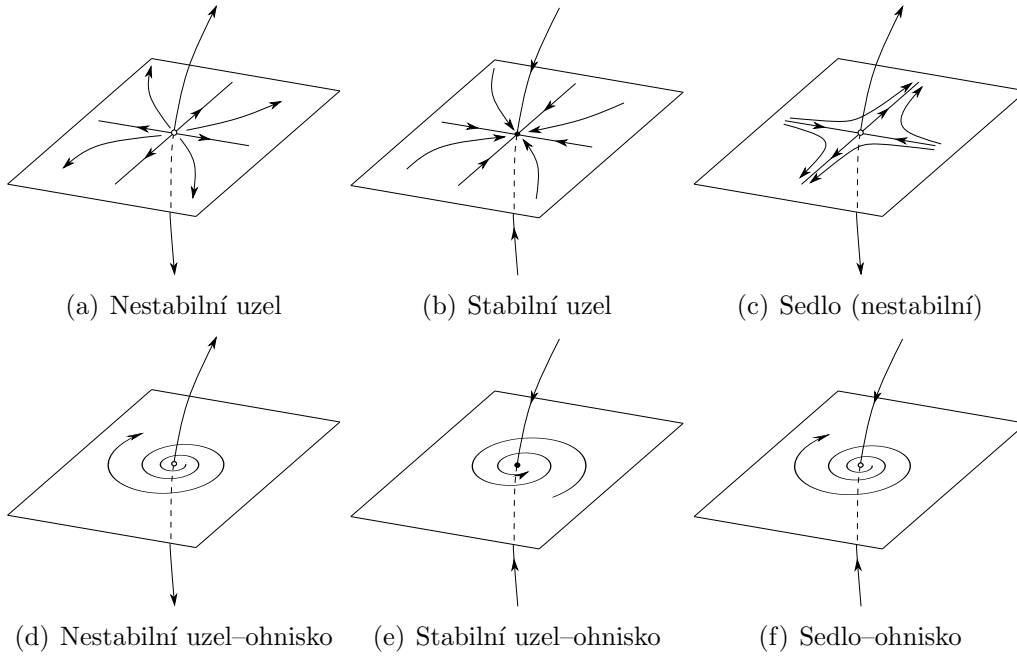
Symbolem $\dot{V}(\mathbf{x})$ rozumíme $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla V(\mathbf{x})$, kde $\nabla V(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$.

Poznámka. Nalezení takové funkce V však bývá často velmi obtížné, neboť neexistuje obecný postup, jak tuto funkci získat.

1.5 Klasifikace rovnovážných bodů v \mathbb{R}^3

V této podkapitole uvedeme základní typy hyperbolických rovnovážných bodů v prostoru \mathbb{R}^3 a vykreslíme typické fázové portréty. Typ rovnovážného bodu určíme pomocí vlastních čísel Jacobiho matice $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$.

- *Uzel:* všechna vlastní čísla Jacobiho matice jsou reálná a mají stejné znaménko. Pokud jsou všechna tato vlastní čísla záporná, jedná se o *stabilní uzel* a naopak, pokud jsou všechna kladná, označujeme hyperbolický bod jako *nestabilní uzel*.
- *Sedlo:* všechna vlastní čísla Jacobiho matice jsou reálná a jedno má opačné znaménko než dvě zbývající. Sedlo je vždy nestabilní.
- *Uzel–ohnisko:* Jacobiho matice má dvojici komplexně sdružených čísel a jedno vlastní číslo reálné, přičemž reálné části těchto vlastních čísel mají stejné znaménko. Pokud jsou reálné části těchto vlastních čísel záporné, jedná se o *stabilní uzel–ohnisko* a naopak, pokud jsou všechny reálné části vlastních čísel kladné, označujeme hyperbolický bod jako *nestabilní uzel–ohnisko*.
- *Sedlo–ohnisko:* Jacobiho matice má dvojici komplexně sdružených čísel a jedno vlastní číslo reálné, přičemž reálná část tohoto vlastního čísla má opačné znaménko než reálné části dvojice komplexně sdružených vlastních čísel. Sedlo–ohnisko je vždy nestabilní.



Obrázek 1: Typické fázové portréty v okolí hyperbolických bodů v prostoru \mathbb{R}^3

1.6 Atraktor

Pod pojmem atraktor rozumíme množinu, kterou jsou přitahovány všechny trajektorie z určitého okolí atraktoru. Trajektorie dynamického systému mohou být přitahovány singulárními body, periodickými orbity nebo jinými, komplikovanějšími množinami.

Zvláštním případem atraktoru je *podivný atraktor*, který může vzniknout u soustavy alespoň tří nelineárních diferenciálních rovnic.

Definice 1.17. Mějme trajektorii Γ odpovídající řešení $\varphi(t, \mathbf{x})$ soustavy (\mathbf{x} nyní tedy považujeme za pevné). Jestliže existuje posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

pak bod \mathbf{y} nazveme ω -limitním bodem trajektorie Γ . Množinu všech ω -limitních bodů nazveme ω -limitní množinou trajektorie Γ a označíme ji $\omega(\Gamma)$.

Definice 1.18. Podobně, jestliže existuje posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{z},$$

pak bod \mathbf{z} nazveme α -limitním bodem trajektorie Γ . Množinu všech α -limitních bodů nazveme α -limitní množinou trajektorie Γ a označíme ji $\alpha(\Gamma)$.

Definice atraktoru není jednotná. Obecně je atraktorem uzavřená množina $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ splňující následující vlastnosti:

1. Množina \mathcal{A} je *invariantní*, tedy každá trajektorie řešení, která v množině \mathcal{A} začíná, v ní zůstává.
2. Má tzv. *oblast přitažlivosti*, tedy existuje otevřená množina $\mathcal{O} \supset \mathcal{A}$ taková, že pro všechna $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ je $\omega(\Gamma_{\mathbf{x}}) \subset \mathcal{A}$. Tedy každá trajektorie z této množiny se pro $t \rightarrow \infty$ blíží k \mathcal{A} .

3. Je *nerozložitelná*, tj. neexistuje taková podmnožina \mathcal{A} , která by splňovala předchozí vlastnosti.

Poznámka. V literatuře se můžeme setkat s dalšími doplňujícími podmínkami. Jedna z nich předpokládá, že existuje trajektorie, která je v \mathcal{A} hustá.

Definice 1.19. Pokud je limitní množinou dynamického systému uzavřená křivka, pak tuto množinu nazveme *limitní cyklus*.

1.7 Bifurkace

Bifurkace je pojem, který označuje změnu vlastností systému v závislosti na parametru, respektive skupině parametrů. Mějme dynamický systém, který je závislý na parametru α

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha),$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Změnou parametru α dostáváme nové dynamické systémy, které mohou být topologicky ekvivalentní s původním systémem nebo se jejich topologie změni.

S bifurkací úzce souvisí pojem *strukturální stabilita*. Volně řečeno, vektorové pole je strukturálně stabilní, jestliže je topologicky ekvivalentní s každým blízkým vektorovým polem. Pokud vektorové pole není strukturálně stabilní, pak ani dynamický systém není strukturálně stabilní a dochází k *bifurkaci*.

Definice 1.20. Řekneme, že vektorové pole $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, je *strukturálně stabilní*, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\mathbf{g} \in C^1(\Omega)$, pro které platí

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| < \varepsilon,$$

jsou \mathbf{f} a \mathbf{g} topologicky ekvivalentní na Ω .

Při zkoumání vlastností Chuova obvodu se setkáme především s *Hopfovou bifurkací*. K tomuto typu bifurkace dochází, jestliže příslušná linearizace má dvojici ryze komplexních čísel a žádné další vlastní číslo nemá nulovou reálnou část. Rozlišujeme přitom dva druhy Hopfovy bifurkace, a to bifurkaci *subkritickou* a *nadkritickou*.

- *Subkritická bifurkace:* při překročení kritické hodnoty bifurkačního parametru se mění stabilita rovnovážného bodu a vzniká nestabilní limitní cyklus.
- *Nadkritická bifurkace:* při překročení kritické hodnoty bifurkačního parametru se mění stabilita rovnovážného bodu a vzniká stabilní limitní cyklus.

1.8 Routh–Hurwitzovo kritérium

Podle věty 1.15 je řešení v okolí hyperbolického bodu stabilní, jestliže všechna vlastní čísla Jacobiho matice mají zápornou reálnou část, tedy leží v levé komplexní polorovině. V některých případech (zejména u soustav 5 a více rovnic) nejsme schopni určit přesně hodnoty vlastní čísel. V takových situacích využíváme *Routh–Hurwitzovo kritérium*.

Věta 1.21. Mějme polynom $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$, kde a_i jsou reálné konstanty, $i = 0, \dots, n$. Dále definujme Hurwitzovu matici

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

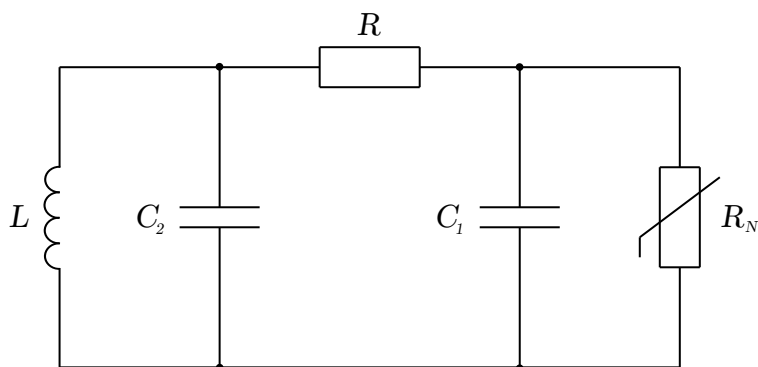
(koeficienty s indexem větším než n klademe rovny nule). Pokud jsou hlavní rohové minory⁴ $|\mathbf{H}_i|$, $i = 1, \dots, n$, kladné, pak všechny kořeny polynomu $P(\lambda)$ mají záporné reálné části.

⁴Hlavní rohový minor $|\mathbf{A}_i|$ matice \mathbf{A} řádu $n \times n$ je determinant matice $i \times i$ vytvořené z prvních i řádků a prvních i sloupců matice \mathbf{A} .

2 Sestavení matematického modelu Chuova obvodu

Chuův obvod je matematicky popsán soustavou tří nelineárních diferenciálních rovnic. V této kapitole popíšeme princip odvození této soustavy ODR. Jelikož fyzikální popis jednotlivých prvků není předmětem našeho zkoumání, omezíme se při sestavování matematického modelu Chuova obvodu pouze na známé fyzikální vztahy a zákony. Konkrétně to budou prvkové rovnice ideálních pasivních prvků a Kirchhoffovy obvodové zákony. Odvození těchto zákonů i jednotlivé pojmy zmíněné v této kapitole lze nalézt v publikacích uvedených v seznamu literatury, konkrétně v [4] a [5].

Jak již bylo řečeno v úvodu této práce, Chuův obvod je jednoduchý elektrický obvod skládající se ze čtyř lineárních prvků, kterými jsou v ideálním případě dva kapacitory s kapacitami C_1 a C_2 , induktor s indukčností L a rezistor s odporem R . Tyto lineární prvky jsou popsány prvkovými rovnicemi. Nejdůležitějším prvkem tohoto obvodu je tzv. Chuova dioda, která se dále skládá z několika rezistorů, operačních zesilovačů a diod. Právě tato součástka vnáší do modelu Chuova obvodu nelinearitu. Pro naše potřeby si vystačíme s voltampérovou charakteristikou této diody, která graficky popisuje závislost mezi elektrickým proudem a napětím.



Obrázek 2: Schéma Chuova elektrického obvodu

Poznámka. V obrázku 2 je pro znázornění Chuovy diody použit symbol nelineárního rezistoru s označením R_N . Indexem N budeme dále označovat veličiny související s Chuovou diodou (tedy napětí u_N značí napětí na Chuově diodě a proud i_N značí proud touto diodou procházející).

Veličinu označenou malým písmenem budeme dle běžné konvence považovat za závislou. Ve všech případech budou takto označené veličiny závislé na čase t .

Označení jednotlivých veličin je následující:

- u_1 ... napětí na kapacitoru s kapacitou C_1 ,
- u_2 ... napětí na kapacitoru s kapacitou C_2 ,
- i_3 ... proud procházející induktorem s indukčností L ,
- $G_{a,b}$... vodivosti popisující chování Chuovy diody.

Model je dále do jisté míry zjednodušen zanedbáním odporu cívky, tedy předpokládáme, že v obvodu je zapojen ideální induktor. Toto zjednodušení nemá zásadní vliv na chování Chuova obvodu.

2.1 Základní rovnice ideálních pasivních prvků

1. Prvková rovnice induktoru

Prvková rovnice induktoru popisuje lineární závislost magnetického indukčního toku Φ na proudu i

$$\Phi = L \cdot i. \quad (2.1)$$

Indukčnost L je jediným konstantním parametrem lineárního induktoru a je vždy kladná.

2. Prvková rovnice kapacitoru

Prvková rovnice kapacitoru vyjadřuje lineární závislost mezi nábojem q a napětím u

$$q = C \cdot u. \quad (2.2)$$

Jediným konstantním parametrem kapacitoru je kapacita C , která je závislá pouze na geometrii elektrod kondenzátoru a je vždy kladná.

3. Prvková rovnice rezistoru

Dále uveďme prvkovou rovnici rezistoru známou jako Ohmův zákon

$$u = R \cdot i. \quad (2.3)$$

Zde je jediným konstantním parametrem kladný odpor R .

Nyní uvedeme další dva potřebné vztahy. V obvodu střídavého proudu se kolem induktoru vytváří proměnné magnetické pole. Toto pole pak dle *Faradayova indukčního zákona* vytváří v induktoru elektromotorické napětí (viz například [4]). Toto napětí můžeme určit jako

$$u = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Dosazením prvkové rovnice (2.1) do tohoto vztahu získáme závislost indukovaného napětí na proudu, který prochází induktorem,

$$u = -L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Závislost proudu na velikosti přeneseného náboje je dána vztahem

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Pomocí tohoto vztahu a prvkové rovnice (2.2) dostáváme vztah mezi napětím a proudem na kapacitoru

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}.$$

2.2 Kirchhoffovy zákony pro elektrické obvody

V dalším budeme používat Kirchhoffovy zákony pro elektrické obvody, uveďme tedy jejich slovní formulaci:

1. Smyčkové pravidlo

Algebraický součet úbytků napětí při průchodu libovolnou uzavřenou smyčkou elektrického obvodu je nulový.

2. Uzlové pravidlo

Součet proudů vstupujících do uzlu je roven součtu proudů, které z uzlu vystupují.

2.3 Matematický model Chuova obvodu

Pomocí smyčkového pravidla a Kirchhoffova zákona o proudech v uzlu a ze vztahů uvedených v podkapitole 2.1 snadno odvodíme soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{u_2}{C_1 R} - \frac{u_1}{C_1 R} - \frac{1}{C_1} g(u_1), \quad (2.4)$$

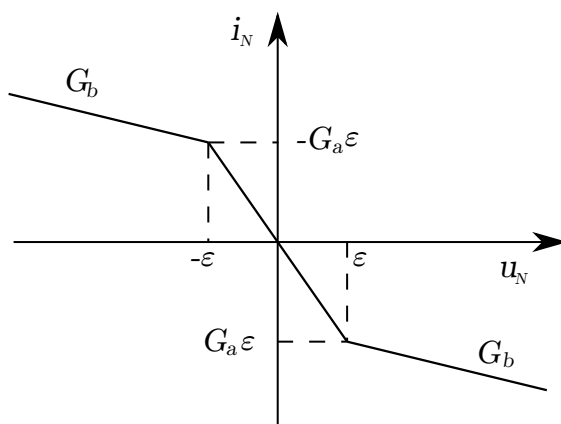
$$\frac{du_2}{dt} = \frac{i_3}{C_2} - \frac{u_2}{C_2 R} + \frac{u_1}{C_2 R}, \quad (2.5)$$

$$\frac{di_3}{dt} = -\frac{u_2}{L}. \quad (2.6)$$

Jak již bylo řečeno dříve, funkce $g(u_1)$ je zadána pomocí voltampérové charakteristiky nelineárního prvku. Voltampérová charakteristika je grafickým vyjádřením závislosti napětí na proudu. V případě Chuovy diody se jedná o charakteristiku po částech lineární. Tu můžeme popsat funkcí $g(u_1)$

$$g(u_1) = \begin{cases} G_b u_1 + (G_b - G_a)\varepsilon, & u_1 < -\varepsilon, \\ G_a u_1, & -\varepsilon \leq u_1 \leq \varepsilon, \\ G_b u_1 - (G_b - G_a)\varepsilon, & \varepsilon < u_1. \end{cases}$$

Poznámka. Běžně ve fyzice symbolem G označujeme vodivost, tedy převrácenou hodnotu odporu R (odpor R nabývá vždy kladných hodnot). V tomto případě však dodržíme značení použité v [6] a hodnoty G_a respektive G_b uvažujeme záporné.



Obrázek 3: Voltampérová charakteristika Chuovy diody

Nyní zavedeme substituce, které převedou předchozí soustavu diferenciálních rovnic na zjednodušený tvar, který je běžně uváděn v literatuře, viz např. [1], [6]. Tyto substituce mají tvar

$$\begin{aligned} x &= \frac{u_1}{\varepsilon}, & \tau &= \frac{t}{RC_2}, & m_0 &= 1 + RG_a, \\ y &= \frac{u_2}{\varepsilon}, & \alpha &= \frac{C_2}{C_1}, & m_1 &= 1 + RG_b, \\ z &= \frac{i_3}{\varepsilon} R, & \beta &= \frac{R^2 C_2}{L}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že nově zavedené proměnné x , y , z , τ , α , β , m_0 a m_1 jsou bezrozměrné. Získali jsme tedy autonomní soustavu tří diferenciálních rovnic, která je po částech lineární, s derivacemi podle proměnné τ

$$x' = \alpha(y - h(x)), \quad (2.7)$$

$$y' = x - y + z, \quad (2.8)$$

$$z' = -\beta y. \quad (2.9)$$

Funkce $h(x)$ je rovněž po částech lineární,

$$h(x) = \begin{cases} xm_1 + (m_1 - m_0), & x < -1, \\ xm_0, & -1 \leq x \leq 1, \\ xm_1 - (m_1 - m_0), & 1 < x. \end{cases}$$

Tato soustava diferenciálních rovnic je závislá na bezrozměrných parametrech α , β , m_0 , m_1 , které jsou navzájem závislé. Podívejme se nyní blíže na znaménka těchto parametrů. Z uvedené substituce a dříve uvedených vlastností parametrů jednotlivých ideálních pasivních prvků je zřejmé, že α a β jsou kladné. O m_0 a m_1 nemůžeme bez znalosti G_a a G_b rozhodnout.

3 Analýza stability Chuova obvodu

V předchozí kapitole jsme sestavili matematický model Chuova elektrického obvodu. Získali jsme tak soustavu tří diferenciálních rovnic se čtyřmi parametry. Z fyzikálního hlediska je nejpřirozenější zabývat se případem, kdy je řídicím prvkem proměnný odpor R . V této práci však zvolíme alternativní přístup a budeme vyšetřovat stabilitu upraveného systému Chuova obvodu (2.7)–(2.9). Řídicím prvkem bude v tomto případě kapacita C_1 . Jediným parametrem, který je na C_1 závislý, je α . Tedy stabilitu Chuova obvodu budeme posuzovat právě vzhledem k tomuto parametru. Konkrétní hodnoty kapacit C_1, C_2 , odporu R a indukčnosti L zde nyní nebudeme uvádět. V následujících oddílech však zmíníme rozdíl mezi těmito dvěma přístupy.

V případech, kdy vyšetřování stability vzhledem ke čtyřem parametrům je příliš složité, zvolíme hodnoty dvou parametrů pevně. Konkrétně to budou m_0 a m_1 , které volíme jako $m_0 = -1/7$ a $m_1 = 2/7$.

3.1 Rovnovážné body

V první řadě určíme rovnovážné body autonomního systému, který modeluje Chuův obvod, a to tak, že derivace tohoto systému položíme rovny nule. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0 &= \alpha(y - h(x)), \\0 &= x - y + z, \\0 &= -\beta y.\end{aligned}$$

Funkce $h(x)$ je po částech lineární, tudíž se tato soustava rozpadá na tři části. Pro $-1 \leq x \leq 1$ řešíme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}0 &= \alpha(y - m_0x), \\0 &= x - y + z, \\0 &= -\beta y.\end{aligned}$$

Z předchozí kapitoly víme, že koeficienty α, β jsou kladné. Jestliže je m_0 nenulové, pak jediným řešením je nulové řešení, tj. máme $S_1 = (0, 0, 0)$.

Dále řešíme soustavu pro $x > 1$, respektive $x < -1$,

$$\begin{aligned}0 &= \alpha(y - m_1x \pm (m_1 - m_0)), \\0 &= x - y + z, \\0 &= -\beta y.\end{aligned}$$

Opět, jestliže je koeficient m_1 nenulový, pak řešením této soustavy jsou symetrické rovnovážné body S_2 a S_3 . Nalezli jsme tedy tři rovnovážné body, a to

$$S_1 = (0, 0, 0), \quad S_2 = \left(-\frac{m_0 - m_1}{m_1}, 0, \frac{m_0 - m_1}{m_1}\right), \quad S_3 = \left(\frac{m_0 - m_1}{m_1}, 0, -\frac{m_0 - m_1}{m_1}\right).$$

Bod S_2 je definován pouze pro $x > 1$, podobně bod S_3 je definován pouze pro $x < -1$. Pro existenci bodů S_2 a S_3 je nutné, aby parametry m_0 a m_1 měly opačná znaménka.

Pro hodnoty m_0 a m_1 uvedené na začátku této kapitoly získáváme $S_1 = (0, 0, 0)$, $S_2 = (-1.5, 0, 1.5)$, a $S_3 = (1.5, 0, -1.5)$.

Nyní se podívejme, jak by vypadaly rovnovážné body, pokud bychom analyzovali neupravenou soustavu diferenciálních rovnic Chuova systému (2.4)–(2.6). Stejnou analýzou jako v předchozí části bychom dospěli ke třem rovnovážným bodům

$$S_1^* = (0, 0, 0), \quad S_2^* = \left(\frac{R(G_b - G_a)\varepsilon}{1 + RG_b}, 0, -\frac{(G_b - G_a)\varepsilon}{1 + RG_b} \right),$$

$$S_3^* = \left(-\frac{R(G_b - G_a)\varepsilon}{1 + RG_b}, 0, \frac{(G_b - G_a)\varepsilon}{1 + RG_b} \right).$$

Vidíme, že tyto body jsou závislé na odporu R , tj. při změně odporu R se mění poloha rovnovážných bodů S_2^* a S_3^* .

3.2 Stabilita rovnovážného bodu S_1

Nyní se budeme zabývat stabilitou řešení v okolí rovnovážného bodu S_1 . K tomu nám poslouží *Hartman–Grobmanova lineární věta* (viz Matematický aparát, věta 1.12). Sestrojíme *Jacobiho matici* \mathbf{J} , která je tvořena derivacemi funkcí podle jednotlivých proměnných, tj.

$$\mathbf{J} = D\mathbf{f}(S_1) = \begin{pmatrix} -m_0\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Příslušnou linearizaci soustavy (2.7)–(2.9) pak můžeme zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(y - m_0x), \\ y' &= x - y + z, \\ z' &= -\beta y. \end{aligned}$$

Jak bylo uvedeno dříve (viz Matematický aparát, věta 1.15), lze stabilitu soustavy diferenciálních rovnic posoudit pomocí vlastních čísel příslušné Jacobiho matice. Vlastní čísla λ určíme jako kořeny charakteristické rovnice

$$P_1(\lambda) = \det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$\lambda^3 + \lambda^2(m_0\alpha + 1) + \lambda(m_0\alpha - \alpha + \beta) + \beta\alpha m_0 = 0.$$

Protože vyjádření vlastních čísel kubického polynomu v závislosti na parametrech α a β bylo příliš složité, sestavme Hurwitzovu matici polynomu $P_1(\lambda)$ (viz Matematický aparát, věta 1.21)

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} m_0\alpha + 1 & 1 & 0 \\ \beta\alpha m_0 & m_0\alpha + \beta - \alpha & m_0\alpha + 1 \\ 0 & 0 & \beta\alpha m_0 \end{pmatrix}.$$

Aby bylo řešení v okolí hyperbolického rovnovážného bodu stabilní, musí podle věty 1.21 platit

$$m_0\alpha + 1 > 0, \quad (3.1)$$

$$(m_0\alpha + 1)(m_0\alpha + \beta - \alpha) > \beta\alpha m_0, \quad (3.2)$$

$$\beta\alpha m_0 > 0. \quad (3.3)$$

Připomeňme, že parametry α , β jsou vždy kladné. Tedy pro $m_0 = -1/7$ není nerovnice (3.3) splněna pro žádnou dvojici přípustných parametrů α , β . Singulární bod $S_1 = (0, 0, 0)$ tedy není stabilní.

3.3 Stabilita rovnovážných bodů S_2 a S_3

Analogicky jako v případě vyšetřování stability rovnovážného bodu S_1 budeme vyšetřovat stabilitu rovnovážných bodů S_2 a S_3 . Sestavíme tedy Jacobiho matici, která má pro oba body S_2 a S_3 tvar

$$\mathbf{J} = D\mathbf{f}(S_{2,3}) = \begin{pmatrix} -m_1\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále opět sestrojíme charakteristickou rovnici Jacobiho matice

$$P_{2,3}(\lambda) = \det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = 0,$$

kterou upravíme do tvaru

$$\lambda^3 + \lambda^2(m_1\alpha + 1) + \lambda(m_1\alpha - \alpha + \beta) + \beta\alpha m_1 = 0,$$

a sestavíme Hurwitzovu matici

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} m_1\alpha + 1 & 1 & 0 \\ \beta\alpha m_1 & m_1\alpha + \beta - \alpha & m_1\alpha + 1 \\ 0 & 0 & \beta\alpha m_1 \end{pmatrix}.$$

Podle věty 1.21 musí platit

$$m_1\alpha + 1 > 0, \quad (3.4)$$

$$(m_1\alpha + 1)(m_1\alpha + \beta - \alpha) > \beta\alpha m_1, \quad (3.5)$$

$$\beta\alpha m_1 > 0. \quad (3.6)$$

Tyto tři nerovnice budeme řešit s hodnotou $m_1 = 2/7$. Nerovnice (3.4) je pro danou hodnotu m_1 splněna pro každé kladné α . Podobně nerovnice (3.6) je splněna pro libovolnou dvojici (kladných) parametrů α a β . Z nerovnice (3.5) dostáváme úpravou kvadratickou nerovnici

$$\alpha^2 + \frac{7}{2}\alpha - \frac{49}{10}\beta < 0.$$

Její řešení získáme interval hodnot α :

$$\left(-\frac{7}{4} - \frac{7}{4}\sqrt{1 + \frac{8}{5}\beta}, \quad -\frac{7}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{1 + \frac{8}{5}\beta} \right), \quad \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Vidíme, že stabilita rovnovážných bodů S_2 a S_3 je pro dané hodnoty m_0 a m_1 zaručena pouze pokud

$$\alpha \in \left(0, -\frac{7}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{1 + \frac{8}{5}\beta} \right), \quad \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Označme $\alpha^* = -\frac{7}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{1 + \frac{8}{5}\beta}$.

Pro konkrétní volbu $\beta = 15$ je parametr $\alpha^* = 7$. Pokud tato čísla dosadíme do příslušné charakteristické rovnice $P_{2,3}(\lambda) = 0$, získáme tři vlastní čísla – dvojici ryze imaginárních vlastních čísel a jedno nenulové reálné vlastní číslo. Tedy $\alpha^* = 7$ je kritickým bifurkačním parametrem.

Ukažme nyní, že pro libovolné kladné β je α^* kritickým parametrem, tedy příslušná Jacobiho matice $J(S_{2,3})$ bude mít při $\alpha = \alpha^*$ vždy dvojici ryze imaginárních vlastních čísel.

Budeme předpokládat, že kořenem charakteristického polynomu $P_{2,3}(\lambda)$ je ryze imaginární číslo ωi . Protože polynom $P_{2,3}(\lambda)$ nemá nulový kořen, lze psát $\omega \neq 0$. Nyní dosadíme do polynomu $P_{2,3}(\lambda)$ za λ číslo ωi , čímž dostaneme

$$-\omega^3 i - \omega^2 (m_1 \alpha + 1) + \omega i (m_1 \alpha - \alpha + \beta) + m_1 \beta \alpha = 0.$$

Zřejmě platí: jestliže $a + bi = 0$, pak nutně $a = 0 \wedge b = 0$. Separací imaginární a reálné části získáme soustavu nelineárních rovnic o dvou neznámých α a ω

$$-\omega^3 + \omega (m_1 \alpha - \alpha + \beta) = 0,$$

$$-\omega^2 (m_1 \alpha + 1) + m_1 \beta \alpha = 0.$$

Jelikož je $\omega \neq 0$, můžeme první rovnici podělit ω a vyjádřené ω^2 pak dosadit do druhé rovnice. Několika úpravami pak získáme hledanou hodnotu α :

$$\alpha = \alpha^* = -\frac{7}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{1 + \frac{8}{5}\beta}.$$

Zpětným dosazením $\alpha = \alpha^*$ do $P_{2,3}(\lambda)$ dostáváme dvojici reálných čísel $\pm |\omega|$. Získali jsme tedy dvojici ryze komplexních vlastních čísel

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{1 + \frac{8}{5}\beta} + \beta}.$$

Nyní použijeme např. *Viètovy věty* pro dopočítání zbývajících vlastních čísel λ_3 ,

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8}{5}\beta}.$$

Tedy pouze při hodnotě $\alpha = \alpha^*$ má $P_{2,3}(\lambda)$ dvě ryze imaginární vlastní čísla $\lambda_{1,2}$ a jedno nenulové reálné vlastní číslo λ_3 , α^* je tedy *bifurkačním parametrem*. Pomocí Routh–Hurwitzova kritéria jsme ukázali, že pro $0 < \alpha < \alpha^*$ mají všechna vlastní čísla Jacobiho matice zápornou reálnou část, tudíž rovnovážné body S_2 a S_3 jsou pro tyto hodnoty α typu stabilní uzel–ohnisko, při překročení α^* dojde k *Hopfově bifurkaci* a řešení přejde ve stabilní limitní cykly, jak uvidíme v následující kapitole. Rovnovážné body $S_{2,3}$ jsou pro $\alpha > \alpha^*$ typu sedlo–ohnisko.

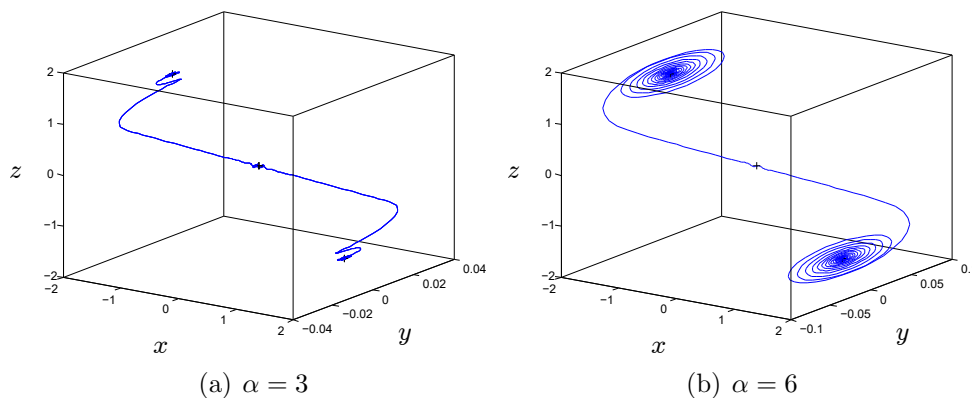
4 Grafická interpretace teoretických výsledků

V předchozí části jsme se věnovali analýze stability Chuova obvodu. Zkoumáním vlastních čísel jsme určili interval hodnot parametru $\alpha \in (0, \alpha^*)$, pro které jsou rovnovážné body S_2 a S_3 stabilní. Dále jsme také zjistili, že pro hodnotu $\alpha = \alpha^*$ nejsou S_2 a S_3 hyperbolickými body, neboť dvě z vlastních čísel mají nulovou reálnou část. Zde dochází k takzvané *Hopfově bifurkaci*.

V tomto oddíle se budeme snažit graficky interpretovat výsledky teoretické analýzy. Nejprve vykreslíme případ, kdy body rovnováhy S_2 a S_3 jsou stabilní. Dále se zaměříme na chování systému při překročení α^* , které jsme předchozí analýzou nebyli schopni odhalit. K tomu využijeme bifurkační diagram, na němž si blíže popíšeme vznik limitních cyklů a chaotické chování Chuova systému. Zároveň také vykreslíme trajektorie řešení pro $\alpha > \alpha^*$.

Při vykreslování trajektorií využíváme již zmíněných běžně užívaných hodnot parametrů $m_0 = -1/7$, $m_1 = 2/7$ a navíc také parametr β zvolíme pevně, $\beta = 15$. Pro tyto parametry jsou rovnovážné body dány jako $S_1 = (0, 0, 0)$, $S_2 = (-1.5, 0, 1.5)$ a $S_3 = (1.5, 0, -1.5)$.

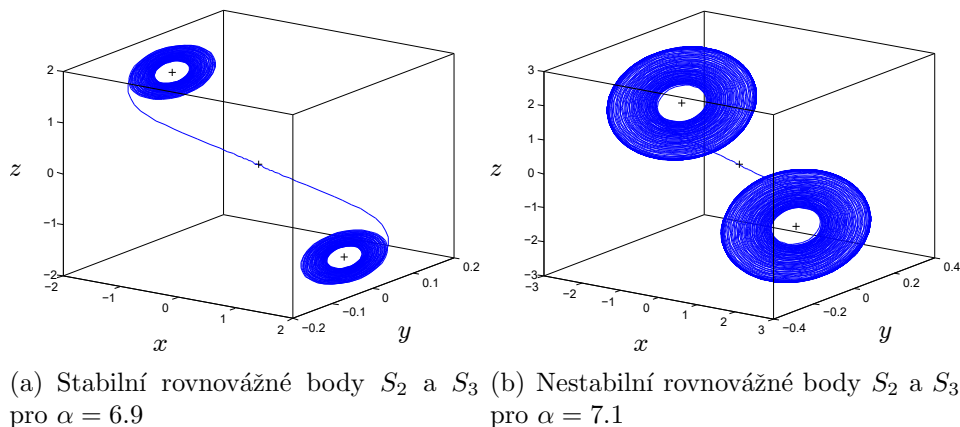
Následující obrázky byly vytvořeny s pomocí skriptovacího jazyka MATLAB. Použita byla implementovaná metoda ode45, která využívá Runge–Kuttovy metody 4. a 5. řádu s řízením délky kroku. Protože funkce $h(x)$ vyjadřující nelinearitu systému je symetrická vzhledem k počátku (je lichá), každá trajektorie v okolí rovnovážného bodu S_2 má svůj zrcadlový obraz v okolí rovnovážného bodu S_3 a naopak. Následující obrázky tedy zobrazují dvojice trajektorií s počátečními podmínkami $P_1 = (0.01, 0, 0)$ a $P_2 = (-0.01, 0, 0)$.



Obrázek 4: Stabilní rovnovážné body S_2 , S_3 pro $\alpha < 7$

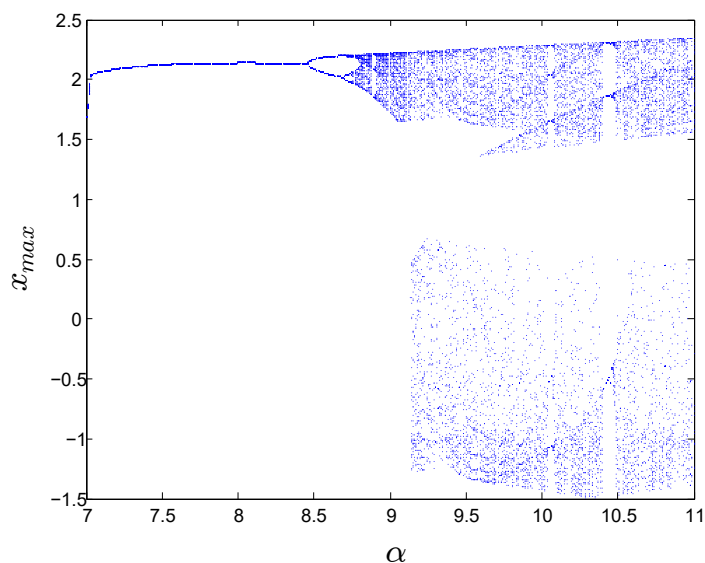
Pro volbu parametru $\alpha < 7$ očekáváme – dle předchozí analýzy – že řešení v rovnovážném bodě S_1 bude nestabilní, zatímco trajektorie z okolí S_2 a S_3 budou do těchto bodů přitahovány. Skutečně, jak vidíme na obr. 4, rovnovážný bod S_1 se projeví jako (nestabilní) sedlo–ohnisko. Rovnovážné body S_2 a S_3 jsou typu stabilní uzel–ohnisko.

Nyní se podívejme na hodnotu parametru $\alpha = 7$. Při této hodnotě – jak již bylo uvedeno dříve – má dojít k *Hopfově bifurkaci* (viz Matematický aparát, podkapitola 1.7), neboť zde existuje dvojice ryze komplexních vlastních čísel a jedno reálné nenulové. Rovnovážné body S_2 a S_3 ztrácí stabilitu a vzniká stabilní limitní cyklus. Na následujícím obrázku (obr. 5) můžeme pozorovat ztrátu stability bodů rovnováhy S_2 a S_3 .



Obrázek 5: Ztráta stability rovnovážných bodů při překročení α^*

Toto chování lze dobře popsat prostřednictvím bifurkačního diagramu. Bifurkační diagram nám umožňuje vizualizovat chování systému v závislosti na řídicím parametru. V našem případě se konkrétně jedná o závislost amplitudy stavové veličiny x na parametru α (stejně tak lze vyjádřit závislost amplitud stavových veličin y a z). Je zde přitom využita tzv. *brute force* metoda (neboli metoda hrubou silou), tedy po ustálení systému pro každé α (respektive pro hodnoty α , které získáme jako uzly při rovnoměrném dělení na požadovaném intervalu) zaznamenáme v diagramu lokální maxima stavové veličiny x . Typ chování se pak z bifurkačního diagramu určuje takto: jestliže pro danou hodnotu

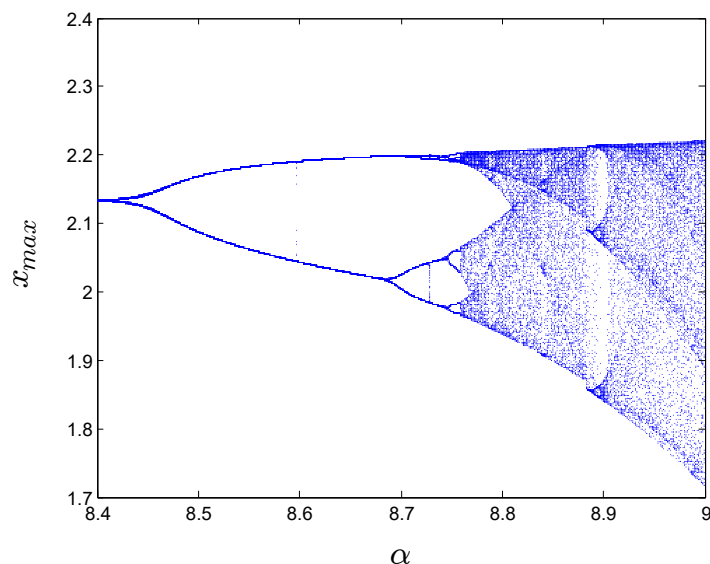


Obrázek 6: Bifurkační diagram (x_{max} označuje amplitudu stavové veličiny x)

α získáme jediný bod, jedná se o jednoduchý cyklus, nebo je tento bod atraktivním bodem rovnováhy. Dvěma bodům pak odpovídá zdvojený cyklus, neboli 2-periodický cyklus, podobně čtyřem bodům odpovídá 4-periodický cyklus, osmi bodům 8-periodický cyklus apod. Postupně tímto zdvočováním period získáme „nesouvislou“ množinu bodů, která signalizuje kvaziperiodické nebo chaotické chování systému. V oblasti chaotického chování pak můžeme pozorovat tzv. periodická „okna“ (z angličtiny *periodic windows*), která odpovídají limitním cyklům (nejedná se tedy o chaotické chování). Tento charakteristický jev můžeme pozorovat i u jiných chaotických systémů. Bifurkační diagramy byly vytvořeny

rovněž v prostředí MATLAB s použitím klasické Runge–Kuttovy metody 4. řádu (nyní s pevnou délkou kroku).

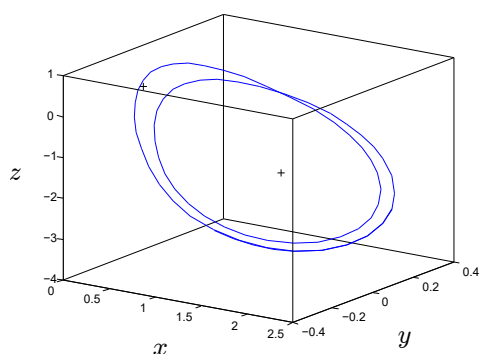
Poznámka. Vzhledem k tomu, že při konstrukci bifurkačního diagramu používáme vždy stejný počet amplitud, mohou se v diagramu objevovat nepřesnosti způsobené vykreslením bodů před dosažením „ustáleného“ chování.



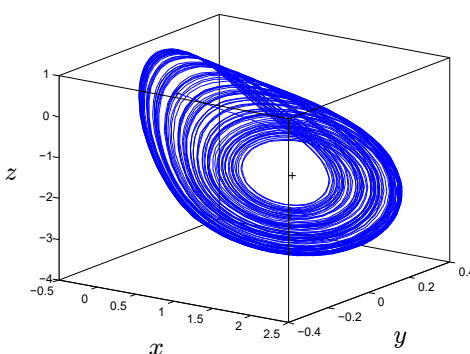
Obrázek 7: Bifurkační diagram – zdvojení period a přechod k chaotickému chování

Na obr. 5 můžeme vidět trajektorii, která je přitahována jednoduchým limitním cyklem. Pro hodnotu $\alpha = 7.1$ v bifurkačním diagramu (obr. 6) skutečně získáváme jediný bod, který značí právě jednoduchý limitní cyklus.

Obr. 7 pak představuje výřez z bifurkačního diagramu pro hodnoty $\alpha \in (8.4, 9)$. Na tomto obrázku můžeme blíže zkoumat zdvojení period. Např. pro hodnotu $\alpha = 8.5$ bychom měli získat 2-periodický cyklus. Tomu odpovídá i následující obrázek (obr. 8).

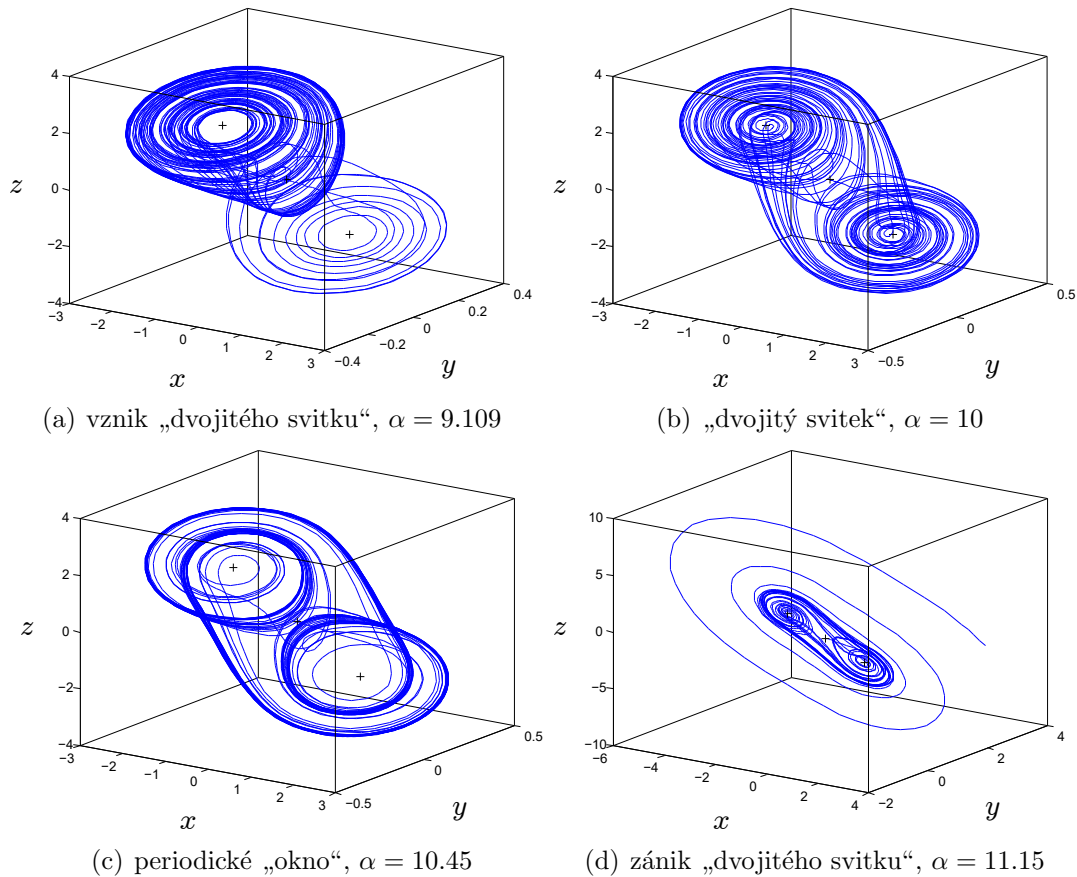


Obrázek 8: 2-periodický limitní cyklus pro $\alpha = 8.5$



Obrázek 9: Chaotické chování při $\alpha = 9$

Dalším zvyšováním α pak vznikají 4, 6, 8-periodické cykly, dokud řešení nepřejde do chaotického stavu. Tehdy se objeví chaotický atraktor (obr. 9), který je velmi podobný chaotickému atraktoru *Rösslerova dynamického systému*, proto se v literatuře občas setkáváme (viz např. [1]) s (chybným) označením *Rösslerův atraktor*.



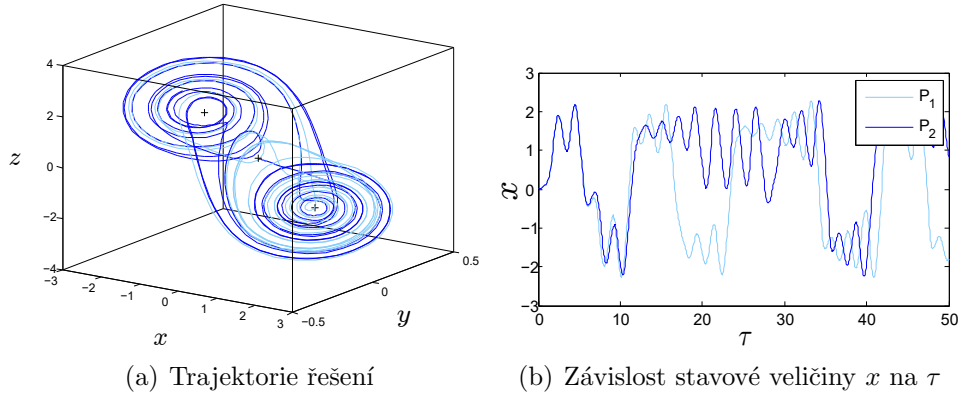
Obrázek 10: Typické chování „dvojitého svitku“ při různých hodnotách α

Dosud se jednalo vždy o cykly pouze v okolí bodu S_2 nebo S_3 . Pokud však budeme α nadále zvyšovat, začne vznikat takzvaný „dvojitý svitek“ – obr. 10(a) a 10(b). Chování dvojitého svitku můžeme popsat takto: nejprve se trajektorie řešení vyskytuje pouze v okolí jednoho z bodů S_2 nebo S_3 , následně se od tohoto bodu odkloní ke druhému a po několika obězích se vrací zpět. Počet oběhů přitom nelze predikovat a neexistuje zde žádná pravidelnost.

Vznik „dvojitého svitku“ můžeme dobře pozorovat i v bifurkačním diagramu na obr. 6. Všimněme si, že od určité hodnoty α se v bifurkačním diagramu objevují i záporné hodnoty x_{max} . Od této hodnoty ($\alpha \approx 9.109$) se trajektorie nevyskytují pouze v okolí bodu S_2 , ale střídavě obíhají kolem rovnovážných bodů S_2 a S_3 .

Při hodnotě $\alpha = 10.45$ si pak v bifurkačním diagramu můžeme všimnout periodického „okna“, které je vykresleno i na obr. 10(c), trajektorie řešení je zde přitahována 3-periodickým limitním cyklem. Při dalším zvyšování α trajektorie opustí invariantní limitní množinu. Tento stav pak označujeme jako zánik „dvojitého svitku“, obr. 10(d).

Nyní připomeňme podstatnou vlastnost deterministického chaosu. Dynamický systém vykazující toto chování je charakterizován extrémní citlivostí na poruchy v počátečních podmínkách. Závislost na počátečních podmínkách je znázorněna na obr. 11. Počáteční stavy jsou dány jako $P_1 = (0.0100, 0, 0)$ a $P_2 = (0.0101, 0, 0)$. Pro názornost je na obr. 11(b) vykreslena také závislost stavové veličiny x na nezávislé proměnné τ . Trajektorie takového systému jsou přitahovány invariantní limitní množinou, tzv. podivným atraktorem, který jsme mohli vidět na obr. 10.



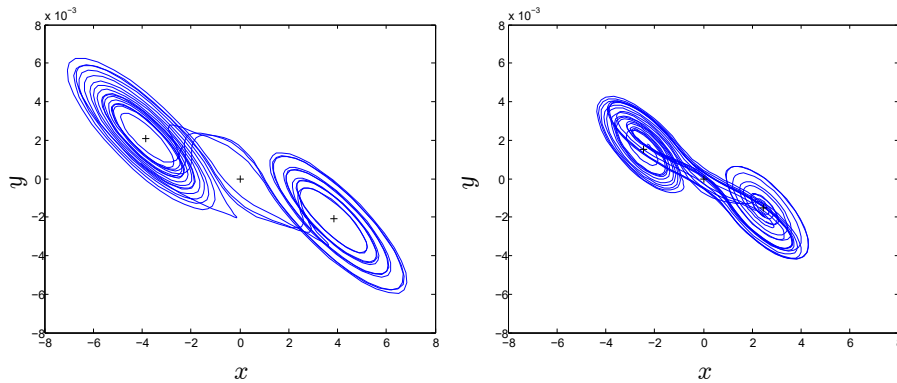
Obrázek 11: Závislost na počáteční podmínce pro $\alpha = 10$, $P_1 = (0.0100, 0, 0)$, $P_2 = (0.0101, 0, 0)$

Na závěr se ještě krátce vraťme k neupravenému Chuovu obvodu (2.4)–(2.6). V kapitole 3.1 jsme získali tři rovnovážné body, z nichž dva jsou závislé na řídicím parametru obvodu, kterým je v tomto případě proměnný odpor R . Na následujících obrázcích můžeme vidět, jak se změna polohy rovnovážných bodů projevuje ve fázových portrétech. Se zmenšujícím se odporem se body S_2^* a S_3^* přibližují k sobě, dvojitý svitek mění na rozdíl od našeho alternativního přístupu (kde byla řídicím parametrem kapacita C_1 a odpor R byl konstantní) svou velikost, až do doby, kdy rovnovážné body S_2^* a S_3^* zcela zaniknou. Poté existuje pouze nestabilní rovnovážný bod S_1^* .

Tabulka 1: Běžně užívané hodnoty parametrů Chuova obvodu

C_1	10 nF
C_2	100 nF
L	18 mH
G_a	$-55/60 \text{ mS}$
G_b	$-9/22 \text{ mS}$
ε	1 V

Následující obrázky byly vykresleny s použitím obvyklých hodnot parametrů Chuova obvodu, které nalezneme v tabulce 1.



(a) „Dvojitý svitek“ pro $R = 1850 \Omega$ (b) „Dvojitý svitek“ pro $R = 1620 \Omega$

Obrázek 12: Závislost polohy rovnovážných bodů na odporu R (boční pohled)

Závěr

Cílem této práce byl popis dynamických systémů, které vykazují chaotické chování. Konkrétně byla práce zaměřena na systémy, v nichž se vyskytuje atraktor typu „dvojitý svitek“. Jako prototyp takového systému posloužil Chuův elektrický obvod.

První kapitola byla věnována základní teorii dynamických systémů. Zde byly zavedeny pojmy jako jsou atraktor či bifurkace. Také zde byly uvedeny způsoby posuzování stability nelineárních dynamických systémů, těmi byly Hartman–Grobmanova linearizační věta, dále Ljapunovova věta a Routh–Hurwitzovo kritérium stability.

Ve druhé kapitole byl nastíněn princip odvození soustavy diferenciálních rovnic, které popisují Chuův elektrický obvod. Tuto soustavu jsme pak pomocí vhodných substitucí převedli na zjednodušený tvar, který byl závislý na čtyřech parametrech – α , β , m_0 a m_1 .

V navazující kapitole byl prostor věnován analýze stability nalezených rovnovážných bodů S_1 , S_2 a S_3 při pevně zvolených hodnotách parametrů m_0 a m_1 . Pomocí linearizace a Routh–Hurwitzova kritéria stability bylo možné určit interval parametrů α , pro které byly rovnovážné body S_2 a S_3 stabilní. Zjistili jsme také, že bod S_1 je pro libovolnou dvojici přípustných hodnot parametrů α a β nestabilní. Zkoumáním vlastních čísel Jacobiho matice pak bylo možné určit kritický bifurkační parametr α^* , při jehož překročení došlo k Hopfově bifurkaci, tj. došlo ke ztrátě stability rovnovážných bodů S_2 a S_3 a vzniku limitních cyklů.

Kapitola čtvrtá byla věnována mimo jiné i chaotickému chování Chuova systému. Ke znázornění tohoto chování posloužil zejména bifurkační diagram, na kterém byl popsán přechod od limitních cyklů přes chaotický atraktor v okolí jednoho z rovnovážných bodů až ke „dvojitému svitku“. Chování při různých parametrech α bylo rovněž znázorněno pomocí trajektorií řešení. Ty byly vykresleny pomocí skriptovacího jazyka MATLAB. Pomocí trajektorií řešení a také grafické závislosti stavové veličiny x na nezávislé proměnné τ jsme znázornili velmi podstatnou vlastnost chaotického systému, kterou je citlivá závislost na počátečních podmínkách. Součástí této kapitoly bylo i krátké porovnání mezi chováním systému při měnícím se odporu R , což je způsob fyzikálně přirozenější ovšem také výpočetně náročnější, a chováním systému při měnícím se kapacitě C_1 (tedy při měnícím se α).

Tato práce se snažila poskytnout základ pro další zkoumání nelineárních dynamických systémů. Je jistě možné navázat hlubší analýzou chaotického chování. Z nejznámějších metod můžeme zmínit například výpočet Ljapunovových exponentů.

Reference

- [1] CHUA, Leon, Motomasa KOMURO a Takashi MATSUMOTO. The double scroll family. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* [online]. 1986, 33(11), 1072-1118 [cit. 2017-02-04]. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085869. ISSN 0098-4094. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1085869/>
- [2] DEVANEY, Robert L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Menlo Park, Calif.: Benjamin/Cummings, 1986. ISBN 0805316019.
- [3] FRANČŮ, Jan. *Obyčejné diferenciální rovnice*. [online]. 2012 [cit. 2017-04-04]. Dostupné z: <http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu>
- [4] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Brno: VUTIUM, 2000, 1198 s. ISBN 80-214-1869-9.
- [5] HAMMER, Miloš. *Elektrotechnika a elektronika: přednášky*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 8021433345.
- [6] KENNEDY, Michael Peter. Three steps to chaos. II. A Chua's circuit primer. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* [online]. 40(10), 657-674 [cit. 2017-02-19]. DOI: 10.1109/81.246141. ISSN 10577122. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/246141/>
- [7] KLÍČ, Alois, Miroslava DUBCOVÁ a Lubor BUŘIČ. *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic: kvalitativní teorie, dynamické systémy*. Praha: Vydavatelství VŠCHT, 2009. ISBN 9788070807248.
- [8] STROGATZ, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub., c1994. ISBN 0201543443.
- [9] PERKO, Lawrence. *Differential Equations and Dynamical Systems*. , New York, NY: Springer New York, 2001. ISBN 9781461300038.
- [10] POKORNÝ, Pavel. Deterministický chaos - plod počítačové fyziky. *Československý časopis pro fyziku* [online]. Vydáno: 2008, 58, č. 6, 328–338 [cit. 2017-04-30]. Dostupné z: www.raidl.cz/file/28/pokorny.pdf