Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Možnosti motivace a aktivizace žáků ZŠ a SŠ k učivu rovnice a nerovnice

Diplomová práce

Autor: Bc. Lenka Vaňková

Studijní program: N1101 Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy

Učitelství pro střední školy – základy společenských věd

Vedoucí práce: PhDr. Jana Cachová, Ph.D.

Oponent práce: Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.

Hradec Králové 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci Možnosti motivace a aktivizace žáků ZŠ a SŠ k učivu rovnice a nerovnice vypracovala pod vedením vedoucí závěrečné práce samostatně a uvedla jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Hradci Králové dne 24. 6. 2021

Lenka Vankova

Poděkování

Ráda bych poděkovala PhDr. Janě Cachové, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování diplomové práce věnovala.

Dále děkuji všem učitelům, kteří prostudovali mou vytvořenou metodickou příručku pro praktickou část práce, za jejich zpětnou reflexi.

Velké díky také patří mé rodině, která mě od dětství podporuje v mém snu stát se učitelkou. Především děkuji mamince, která mi pomáhala s hlídáním syna, aby mohla tato práce vzniknout.

Anotace

VAŇKOVÁ, Lenka. *Možnosti motivace a aktivizace žáků ZŠ a SŠ k učivu rovnice a nerovnice*. Hradec Králové: Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové, 2021. 83 s. Diplomová práce.

Diplomová práce bude na základě studia odborné literatury, učebnic, sbírek úloh a realizace řízeného rozhovoru s učiteli zkoumat problematiku učiva rovnic a nerovnic a jeho didaktického využití z pohledu 2. stupně ZŠ a SŠ. Cílem diplomové práce bude připravit za tímto účelem vhodný motivační a aktivizační didaktický materiál pro výuku rovnic a nerovnic, který u žáků zároveň podpoří dobré porozumění učivu, jeho aktivní procvičení a upevnění. V praktické části práce bude vytvořena metodická příručka, která bude obsahovat soubor aktivit a her s jejich stručným popisem a materiály k vytištění tak, aby se daly ihned aplikovat do výuky. Několik učitelů matematiky na 2.stupni ZŠ a na SŠ obdrží tuto příručku spolu s dotazníkem zaměřeným na problematiku používání aktivizačních metod ve výuce matematiky a zpětnou vazbu k metodické příručce. Přestože nebudou všechny aktivity aplikovány do výuky, ve zpětné vazbě se projeví zkušenosti z praxe a bude tak posouzena jejich využitelnost a efektivita.

Klíčová slova: matematika, rovnice a nerovnice, motivace, aktivizační metody

Annotation

VAŇKOVÁ, Lenka. *Possibilities of motivation and activation of pupils towards learning of equations and inequalities at basic and secondary schools.* Hradec Králové: Science Faculty, University of Hradec Králové, 2021. 83 pp. Diploma Thesis.

My diploma thesis will be solving the mathematical problem of equations and inequations based on studies of the professional literature, student´s and teacher´s books, a collection of math problems and a controlled interview. The thesis will be concerned on its didactic use at basic and secondary schools.

The aim of my thesis will be to prepare appropriate motivated and active didactic materials for teaching equations and inequations which help students and pupils to practise and understand the problem.

In the practical part of the thesis there will be created a methodological manual which will contain a file with activities and games and their brief description focused on the math problem. In the manual there will be also enclosed printable materials for their immediate use while teaching.

Several math teachers at basic and secondary schools will obtain this manual together with the questionnaire (focused on the problem) and the feedback on the given manual. Even though all activities will not be applied in the teching process, the feedback will show the experiencie of the teachers so it could be cosidered efficiency and usability in practise.

Key words: mathematics, equations, inequations, motivation, activation methods

Obsah

Úvod

„Úspěch v životě? To je vlastně rovnice: A = X + Y + Z. X znamená práce a Y fair play. A co Z? Z znamená držet jazyk za zuby.“

Albert Einstein

Na samotný úvod jsem použila citát jednoho z nejvýznamnějších vědců všech dob, tedy Alberta Einsteina, který v tomto citátu popisuje dosažení úspěchu pomocí rovnice. Každý žák tak může vytvořit svojí vlastní rovnici, co dle něj tvoří úspěch v životě. Podle autora citátu za každým úspěchem stojí těžká práce, ale také dodržování pravidel hry, tedy čestné jednání. Právě těžká práce a dodržování pravidel také charakterizují pro mnoho žáků podstatu práce s rovnicemi, o kterých bude v této diplomové práci řeč, ačkoli jsou na druhou stranu rovnice z pohledu historie matematiky právě nástrojem, který těžkou práci dokáže velmi usnadnit. Jako poslední prvek pro dosažení úspěchu uvádí to, že bychom měli umět „držet jazyk za zuby“.

Jako téma své diplomové práce jsem si vybrala téma *Možnosti motivace a aktivizace žáků ZŠ a SŠ k učivu rovnice a nerovnice*. Nejen že je matematika jeden z předmětů, který žáky provází celým studiem, ale také nás všechny obklopuje v běžném životě. Rovnice mají široké využití, jak přímo v matematice, tak ve fyzice a navazujících oborech. Například studenti technických oborů se bez rovnic neobejdou. Rovnice jsou důležitou součástí lineárního programování. Praktické užití rovnic také nalezneme v účetnictví a neměli bychom zapomínat na využití v chemii a farmacii. Ve stavebnictví rovnice jsou potřebné například pro výpočet silových reakcí. Aby při seznamování s tímto matematickým nástrojem byli žáci více zainteresovaní a angažovaní, je možné hledat různé možnosti motivace a aktivizace, například volit vhodné didaktické hry, kterými se zabývám v praktické části diplomové práce. Od dob Jana Amose Komenského se tak hra stává jednou z možností motivace studentů ke studiu.

V teoretické části své práce se vycházím z konstruktivismu, kde cituji Desatero konstruktivismu autorů F. Kuřiny a M. Hejného, nejvýznamnějších představitelů didaktického konstruktivismu u nás. Další kapitola se věnuje otázkám spojeným s motivací. Právě vnější motivaci může učitel ovlivnit. Hodinu by měl vést tak, aby byla zajímavá a studenty podněcovala k aktivitě, proto v této části zmiňuji aktivizující metody ve výuce. Vnější motivací pro žáka je dobrá známka, pochvala a také obdiv a respekt od spolužáků, oproti tomu motivace vnitřní vychází z poznávacích potřeb daného jednotlivce.

Následující kapitola diplomové práce je zaměřená na matematiku a její aplikace. Rozebírám zde postavení matematiky v rámcově vzdělávacích programech a také spojení matematiky a hry. Jednou z možností motivace mohou být zajímavé historické úlohy i zajímavosti z historie matematiky, proto jsem zde zařadila i historickou část.

Další kapitolou v mé diplomové práci je pohled na rovnice a nerovnice jakožto na učivo, kdy uvádím přehled typů rovnic a nerovnic a možnosti jejich řešení, k němuž jsem následně navrhla didaktické aktivity. Řešení rovnic rozvíjí naše logické myšlení, nutí nás vycházet z daných informací a dále s nimi pracovat, řešit problémy.

V praktické části jsou navržené didaktické aktivity a hry zaměřené na výše uvedené téma. Tyto aktivity jsou rozdělené do třech skupin. První skupinu tvoří deskové hry, kam patří Bludiště a Člověče, nezlob se!. Další hry, jako je Černý Petr, Domino, Kvarteto a Pexeso, jsem zařadila do skupiny karetních her. Poslední jsou ostatní aktivity a hry, do kterých patří například Myšlenkové mapy, Puzzle a Tajenka. U každé aktivity je uvedený její obecný popis, tedy pravidla hry, její hodnocení a případné modifikace. Dále u konkrétních aktivit uvádím pedagogické cíle, pomocné materiály potřebné k aktivitě a také správné řešení. Praktickou část práce završuje reflexe několika oslovených učitelů matematiky ze základních a středních škol k navrženým aktivitám. Zpětná vazba k metodické příručce je ovlivněná postojem jednotlivých učitelů k aktivizujícím metodám ve výuce.

1 Konstruktivistické vyučování

Konstruktivizmus je směr psychologických a sociálních věd, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností. V rámci předmětu společenských věd, které jsou mým druhým oborem, se studenti dozvídají o konstruktivistickém přístupu v souvislosti se Sokratem, který přirovnává své vedení diskuzí k práci své matky, která byla porodní bábou. Vidí zde jistou symboliku, kdy jeho matka pomáhala na svět dětem, on pomáhá na svět myšlenkám, které jsou ukryté v hloubi vědomí. Je nutné podotknout, že diskuze není v konstruktivizmu jediným a určujícím prvkem, přestože je důležitá.

Konstruktivistický přístup k vyučování přetváří Hejný a Kuřina na tzv. ***didaktický konstruktivizmus***, který je zaměřený na výuku matematiky. Hejný a Kuřina jsou hlavními představiteli konstruktivismu u nás. Ve své knize Dítě, škola a matematika uvádí zásady pro konstruktivistický přístup k vyučování. Tyto zásady nazývají desaterem konstruktivismu, které je uvedené níže. (Hejný, Kuřina, 2009)

1.1 Desatero konstruktivismu

*„**Aktivita** – Matematiku chápeme především jako specifickou lidskou aktivitu, nikoliv jen jako její výsledek, který se obvykle definuje do souboru definic, vět a důkazů.*

***Řešení úloh** – Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování. Tvorba matematických modelů reality je pak jeho součástí.*

***Konstrukce poznatků** – Poznatky, a to nejen matematické, jsou nepřenosné. Přenosné (z knih, časopisů, přednášek a různých médií) jsou pouze informace. Poznatky vznikají v mysli poznávajícího člověka. Jsou to individuální konstrukty.*

***Zkušenosti** – Vytváření poznatků (např. v oblasti pojmů, postupů, představ, domněnek, tvrzení, zdůvodnění) se opírá o informace, je však podmíněno zkušenostmi poznávajícího. Zkušenosti si přináší žák zčásti z kontaktu s realitou svého života, měl by však mít dostatek příležitostí nabývat zkušeností i ve škole (experimentování, řešení úloh…).*

***Podnětné prostředí** – Základem matematického vzdělávání konstruktivistického typu je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost. Nutným předpokladem toho je tvořivý učitel a dostatek vhodných podnětů (otázky, úlohy, problémy…) na straně jedné a sociální klima třídy příznivé tvořivosti na straně druhé.*

Interakce *– Ačkoli je konstrukce poznatků proces individuální, přispívá k jeho rozvoji sociální interakce ve třídě (diskuse, srovnání výsledků, konstrukce příkladů a protipříkladů, pokusy o formulace domněnek a tvrzení, argumentace, hledání důkazů…).*

Reprezentace a strukturování *– Pro konstruktivistický přístup k vyučování je charakteristické pěstování nejrůznějších druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa. Dílčí zkušenosti a poznatky jsou různě orientovány, tříděny, hierarchizovány, vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.*

Komunikace *– Pro konstruktivistické vyučování v matematice má značný význam komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky. Jedním z nich je neverbální vyjadřování, jiným matematická symbolika. Dovednost vyjadřovat vlastní myšlenky a rozumět jazyku druhých je třeba systematicky pěstovat.*

Vzdělávací proces *– Vzdělávací proces v matematice je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek. První je porozumění matematice, druhé je zvládnutí matematického řemesla, třetí jsou aplikace matematiky. Pro porozumění matematice má zásadní význam vytváření představ, pojmů a postupů, uvědomování si souvislostí. Rozvíjení matematického řemesla vyžaduje trénink a případně i paměťové zvládnutí určitých pravidel, algoritmů a definic. Aplikace matematiky nemusí být jen vyvrcholením vzdělávacího procesu, ale muže hrát i roli motivační. Matematiku se učíme jejím provozováním.*

Formální poznání *– Vyučování, které má charakter předávání informací (vyučování transmisivní), nebo vyučování, které dává pouze návody, jak postupovat (vyučování instruktivní), vede především k ukládání informací do paměti. To umožňuje v lepším případě jejich reprodukci (např. u zkoušky), obvykle však dochází k jejich rychlému zapomínání a zřídkakdy k jejich netriviálnímu využití. Takové poznání je pseudopoznáním, je poznáním formálním.“* (Hejný, Kuřina, 2009, s. 194)

Desaterem jsem se řídila při navrhování aktivit a her pro praktickou část mé diplomové práce. Je důležité, aby učitel pro žáky vytvářel podnětné prostředí nejen tím, že do výuky zařazuje aktivity a hry, ale také tak, aby ve třídě panovala dobrá nálada a žáci spolupracovali. I při hrách se žáci učí, protože při nich matematiku provozují, ale zábavnějším způsobem. Žáci díky navrženým hrám se nevěnují pouze počítání příkladů, ale také chápou pojmy a uvědomují si souvislosti.

1.2 Druhy konstruktivizmu

Hejný (2004) uvádí tři základní druhy konstruktivizmu:

- ***Radikální konstruktivizmus***, který zavrhuje vše mimo svět zkušeností jedince, nepřipouští možnost „objektivní pravdy“. Poznávající jedinec tedy nemůže nikdy dosáhnout znalosti reálného světa.
- ***Kognitivní konstruktivizmus***, pro nějž položili základy psychologové Piaget a Dewey. Jak dochází k poznání v tomto případě popisuje Průcha (2003). Podle něj si poznávající jedinec spojuje fragmenty informací z vnějšího prostředí do smysluplných struktur, následně s nimi provádí takové mentální operace, které odpovídají úrovni kognitivního rozvoje poznávajícího.
- ***Sociální konstruktivizmus*** klade důraz na nezastupitelnou roli sociální interakce a kultury v konstrukci poznatků.

Konstruktivizmus se stálé vyvíjí a ukrývá v sobě několik směrů. Tyto směry v sobě nesou jisté poselství pro pedagogy a to, že bychom neměli přistupovat k „naivním“ představám žáků jako k omylům, které musíme odstranit, ale jako k základům, díky kterým můžeme problematiku vyřešit. Dále to, že bychom měli do výuky zavádět více aktivní spolupráce a komunikace, nejen mezi žáky a učitelem, ale také mezi žáky navzájem. To se odráží v praktické části ve skupinových hrách, kam patří například karetní hra *Kvarteto* (kap. 3.2.3), ve které musí žáci spolu komunikovat. Tyto skupiny nemusí být pouze náhodné, ale může je účelově vytvořit učitel, zlepší se tak komunikace mezi všemi spolužáky.

1.3 Formalismus

Formální poznání je velmi častou formou poznání, kdy si žáci ukládají informace do paměti, avšak rychle je zapomínají, jak je již výše uvedeno. Žáci se tímto způsobem učí velké množství teorie, kdy si zapamatují potřebnou látku pro daný čas (například na písemný test, ústní zkoušení) a následně ji zapomenou, to lze považovat za problémový způsob učení zejména pro matematiku. Touto problematikou se zabývá několik autorů, kteří předávají rady nejen učitelům matematiky. Cílem mé diplomové práce je studovat možnosti motivace a aktivizace žáků k učivu rovnice a nerovnice, tedy využívat a podporovat ve výuce takové prostředky, které formalismus omezují. Publikace (Hejný, Kuřina, 2009), která se před lety stala hlavní inspirací konstruktivistického přístupu k vyučování matematiky u nás, poukazuje na nebezpečí formalismu a na možnosti, jak formálnímu poznání předcházet. S potěšením mohu také říct, že jeden z autorů, tedy pan profesor Kuřina, byl přednášejícím na Univerzitě Hradec Králové, kde jsem absolvovala některé z jeho předmětů.

Formalismem se také zabývá Mareš (1998), který ve své knize píše o dvou základních přístupech k učení, a to je přístup povrchový a hloubkový. Povrchový přístup je založen na paměťovém učení a memorování. Žáci se nesnaží zjistit smysl probíraného učiva a látku brzy zapomínají. Na rozdíl od něj hloubkový, rozumějící přístup k učení je založen na tom, aby žáci pochopili obsah i strukturu učiva. V praktické části se hloubkový přístup projeví například při tvorbě *Myšlenkových map*, které jsou uvedené v kapitole Ostatní hry a aktivity (kap. 3.3.4), kdy žáci ukážou, co vše o daném tématu ví a jak chápou vztahy mezi danými tématy. (Mareš, 1998)

Hejný, Kuřina (2009) se odkazují na Kratochvíla (1995), který tvrdí, že člověk je do určité míry určen tím, co má ve své paměti. Paměť je důležitá nejen pro orientaci v různých situacích, ale také pro porozumění souvislostí a při řešení úloh. Díky paměti získáváme náhled. Škola by měla věnovat velkou pozornost formování paměti, protože bez ní není možné řešit úlohy a různé problémy. Utváření představ je důležitou složkou formování paměti. Tyto představy v naší mysli reprezentují určité přírodní, společenské či matematické struktury. Podle Kuřiny a Hejného má tento proces charakter konstrukcí metafor, vzorců, analogií, modelů, názorných obrázků a schémat. (Hejný, Kuřina, 2009)

Hejný a Kuřina za matku moudrosti nepovažují opakování, ale aplikace. Ze školy by si měli žáci pamatovat to podstatné a paměť žáků by se měla opírat o zkušenosti. Neformální znalost je abstraktní znalost, která je opřena o izolované a univerzální modely. Přirozený poznávací proces prochází etapami izolovaných a univerzálních modelů. V těchto modelech si žák utváří konkrétní představy o budoucí znalosti. Například při aktivitě *Řady* (kap.3.3.7) jsou žáci schopni určit správné řešení příkladu díky, kdy se opírají o dříve získané zkušenosti. (Hejný, Kuřina, 2009)

Formální znalost je taková, která je uchována pouze pamětí. Hejný a Stehlíková (1999) tvrdí, že nejvážnějším didaktickým problémem ve vyučování matematiky je formalismus. Formalismus chápou jako nemoc kognitivní struktury. O formalismu se autoři ve své knize dále zmiňují také jako o bacilu, dokonce i jako o epidemii. K této chorobě dochází, pokud učitel nevěnuje dostatečný čas během výuky výše zmíněným etapám modelů. Novou vědomost si žák nemůže včlenit do sítě připravených konkrétních poznatků, pokud mu je abstraktní znalost dána příliš brzy. Tuto vědomost žák následně pouze memoruje. Učitelé tento problém ze své strany omlouvají tím, že je na vše málo času, protože osnovy jsou přeplněné. (Hejný, Kuřina, 2009)

Příčinou formalismu většiny znalostí žáků na školách je tedy podmínka splnění náročných osnov na úkor porozumění učiva. Hejný a Kuřina rozdělili průběh nemoci formalismu do tří stádií. V prvním stádiu si žák uvědomuje, že jsou některé jeho znalosti neplnohodnotné a považuje to za špatné. Dítě chce samo danou informaci pochopit. Ve druhém stádiu nastává zlom, kdy se žák rozhoduje, kdy bude usilovat o porozumění dané informace (v našem případě matematice) nebo se bude vše učit z paměti, protože je smířen s tím, že matematice nerozumí. V třetí fázi nastává nejtěžší stadium nemoci, žák je sám přesvědčen, že matematice nemůže nikdy porozumět, odmítá pomoc učitele na vysvětlení dané látky. Žák vnímá jako jediný způsob učení se matematiky memorováním a následně vyžaduje poučky, které se naučí zpaměti, a algoritmy, které si osvojí cvikem. (Hejný, Kuřina, 2009)

Autoři se zabývají také léčbou. Formalismus přirovnávají k jiným somatickým nemocem a učitele přirovnávají k lékaři. Nemoc se léčí lehce v prvním stádiu, a naopak těžce ve stádiu třetím. Pokud žák sám požádá učitele o pomoc, může učitel diagnostikovat chorobu formalismu již v počátku, a tedy snáz ji vyléčit. Problémem je, že pouze málokterý žák o pomoc požádá. Je to žák, který nemá strach z vlastních nedostatků, má víru v učitele, cítí vlastní neporozumění a tento stav nejenže chce změnit, ale věří v sám sebe a svou schopnost porozumění. Tyto podmínky jsou také ovlivněny klimatem třídy, především vztahem mezi učitelem a žáky. Problémem je, pokud má žák z učitele strach, který z velké míry také závisí na tom, jak učitel vnímá žákovu chybu. Pokud učitel považuje chybu za nežádoucí, v některých případech dokonce za trestuhodnou, pak se žáci snaží vyhnout odhalení své chyby, protože mají z učitele strach. V tomto případě není diagnostika formalismu vůbec lehká. Učitelé pro diagnostikování formalismu nejčastěji užívají diagnostické nástroje jako je běžná třídní diskuse nebo písemní projevy žáka, do kterých zahrnujeme písemné testy a domácí úkoly. Za nejdůležitější nástroj učitele při odhalování formalismu Kuřina spolu s Hejným považují znalosti a zkušenosti samotného učitele. Ve své knize upozorňují na to, že formalismem netrpí žák, který chce sám zjistit „jak to vlastně je“. Riziko formalismu je omezeno na minimum při dobře vedeném konstruktivním přístupu k vyučování. Ukázku takového přístupu v praxi můžeme vidět u Vondrové, která se na tyto autory odkazuje. Své návrhy podnětné výuky zaměřuje na zavedení vztahů pro povrch a objem válce a kužele, protože míra v geometrii je jedním z kritických míst matematiky, kterými se autorka zabývá. (Vondrová, 2019)

1.4 Motivace ve výuce

Motivace hraje ve výuce klíčovou roli. Podle Kuřiny a Hejného chápeme vzdělávací proces jako proces konstruování poznatkových struktur u jednotlivých žáků. Žádnou poznatkovou strukturu si nevybuduje žák, který nebude k učení motivován a nebude mít o učení zájem. Motivace je brána za předpoklad zahájení procesu učení, motivace tedy představuje úspěšný start učení. (Hejný, Kuřina, 2009)

Motivace způsobuje napětí mezi nemám a chtěl bych mít, neumím a potřebuji umět, neznám a potřebuji znát. Kuřina a Hejný chápou motivaci stejně jako Sokol (1998), tedy jako souhrn podnětů, důvodů k určitému jednání. Na rozdíl od člověka, který žádnou vlastní motivaci nemá a jen plní příkazy, bude se motivovaný člověk navíc snažit sám odstraňovat překážky a hledat nové cesty k cíli. (Hejný, Kuřina, 2009)

Podle Pedagogického slovníku (Průcha, Mareš a Walterová, 2003) můžeme motivaci definovat jako souhrn vnitřních i vnějších faktorů, které:

1) vzbuzují, aktivují, dodávají energii lidskému jednání a prožívání;
2) zaměřují toto jednání a prožívání určitým směrem;
3) řídí jeho průběh, způsob dosahování výsledků;
4) ovlivňují též způsob reagování jedince na své jednání a prožívání, jeho vztahy k ostatním lidem a ke světu.

Jako učitelé bychom si měli uvědomit, že motivace dospělého člověka a dítěte se liší. Dítě má motivační pole široké na rozdíl od dospělého člověka, jehož zájmy jsou zaměřené pouze na několik málo oblastí. Pokud nedokážeme dítě zaujmout ihned, tak svou pozornost obrátí jinam. S citem a porozuměním bychom měli brát další jevy počínajícího poznávacího procesu, a to je těkavost zájmů dítěte a naléhavost potřeby dítěte vnímat svět po svém. Ve škole bývá pro žáky nejčastější motivací dobrá známka, tedy žákův úspěch a možnost aplikovat jeho znalosti jsou důležité motivační faktory. (Hejný, Kuřina, 2009)

Hrabal (1989) vytvořil následující tři zásady pro oživení vyučování, aby se studenti nenudili a neztráceli tak pozornost. Jsou to takové zásady, které navodí vhodné podmínky pro poznávací potřeby a student tak má větší zájem o učivo.

- ***Zásada překvapivosti*** – učitel prezentuje situaci, která má jiný výsledek, než by se dalo dle získaných zkušeností očekávat
- ***Zásada vyvolání pochybnosti*** – pochybnost je aktivačním momentem pro kognitivní motivaci, patří sem úkoly mající více správných řešení.
- ***Zásada zadání obtížného úkolu*** – úkol zdající se zpočátku těžký a neřešitelný, ale díky nápovědě ho studenti vyřeší. (Hrabal, 1989)

Maňák a Švec (2003) rozdělují hloubkový a povrchový přístup k učení. V povrchovém přístupu žáka daná látka nebaví, nemá zájem, motivací k učení je pro něj spíše strach z učitele či rodičů, neučí se danou látku pro sebe, ale snaží se tím vyhovět učiteli. U hloubkového přístupu je tomu naopak, žáka daná látka baví a učí se ji proto, že jeho zajímá, dělá mu radost a vidí její potřebu v budoucnosti (např. pro své budoucí povolání). (Maňák, Švec, 2003)

Motivaci můžeme rozdělit na motivaci vnitřní a vnější. Vnitřní motivace je dle Lokšové (1999) to, když člověk vykonává určitou činnost, která uspokojuje jeho potřeby, a neočekává za ni žádnou pochvalu či nějakou odměnu. Potřeby dítěte mohou být vrozené nebo naučené. Dítě si vytváří základy výkonových potřeb již ve své rodině, která ho povzbuzuje ve výkonu. Výkonová motivace má dva hlavní motivy, a to motiv úspěšného výkonu, kde dítě vidí příčinu úspěchu ve svých pozitivních vlastnostech, a motiv vyhnutí se neúspěchu, kdy neúspěch bere jako důsledek nedostatečného vynaložení vlastních sil. Ve škole jsou pro děti významné potřeby sociální, kdy žák potřebuje pozitivní vztahy ve třídě a také se vyskytuje potřeba sociálního vlivu, respektive prestiže. (Lokšová, Lokša, 1999)

Podmínky, které musí být během výuky dodrženy, popisuje Hrabal (1989). Tvrdí, že všichni žáci musí cítit, že mají rovnocennou možnost úspěchu. Dalším důležitým bodem je střídání aktivit tak, aby všichni žáci mohli příležitostně uspět, protože všem žákům nevyhovuje stejný způsob úloh. Učitel by také neměl zapomenout na to, že je potřeba motivovat žáky, aby nesrovnávali své výkony s ostatními, ale snažili se o úspěšné řešení úkolu. (Hrabal, 1989)

Chování motivované vnějšími činiteli, kdy jsou jako vnější motivační činitelé užity odměny nebo se vyhnutí trestu, ve své knize rozebírají Lokšová a Lokša (1999). Ve škole se jedná především o známky. Autorka uvádí čtyři odlišné druhy chování člověka motivovaného vnějšími činiteli. Chování ovlivněné externími motivačními činiteli, což je odměna a trest, nazývá externí regulací. Regulace pasivně převzatá je zvenku převzatá, ale vnitřně neakceptovaná regulace chování, tedy pocit viny. Když žák přijímá danou hodnotu za svou, tak toto chování je nazvané jako identifikovaná regulace. Identifikace mu umožňuje pochopit smysl vykonávané činnosti. Nejvyšší formou vnější motivace je integrovaná regulace. Vnější činitel je asimilován s ostatními zájmy, hodnotami a potřebami. (Lokšová, Lokša, 1999)

Problematikou odměn a trestů ve škole se zabývá Čapek (2008). Odměnu chápe jako takové působení, spojené s chováním nebo jednáním jedince, které vyjadřuje pozitivní hodnocení a přináší vychovávanému radost a uspokojení některých jeho potřeb. Oproti tomu trest chápe jako takové působení, spojené s chováním nebo jednáním jedince, které vyjadřuje negativní hodnocení a přináší vychovávanému, v našem případě mluvíme o žákovi, nelibost, frustraci nebo omezení některých jeho potřeb. Odměna tedy zvyšuje frekvenci chování, které k ní vede. Když takové chování neposilujeme, tak se jeho četnost sníží a postupně vyhasíná. Trest naopak snižuje pravděpodobnost, že se dané chování bude opakovat. Čapek (2008) ve své knize také upozorňuje na to, že přestože student potřebuje slyšet kladné hodnocení, protože pochvala vede k jeho uspokojení, tak učitel ho nemůže chválit za cokoli a kdykoli. Student by si totiž mohl navyknout na pochvalu, která by ho odvedla od samotného učení, kdy se stává cílem pochvala, která by měla být pouze motivačním prostředkem. Další negativní účinek má zpochybňující pochvala, protože takové chválení může působit ironicky a snižuje tak žákovo sebehodnocení. (Čapek, 2008)

Čapek (2008) popisuje pravidla pro trestání:

- *minimální kvantita* – žák zločin spáchá z toho důvodu, že mu zajišťuje určité výhody,
- *umírněnost trestu* – učitel v trestu mnohdy odráží svůj názor na žáka, než aby se pouze soustředil na závažnost přestupku,

- *načasování* – u mladších žáků by měl trest následovat ihned po přestupku, aby si žák uvědomil, za co je trestán; u starších žáků si může učitel trest nějaký čas promyslet, ale je důležité, aby vyřešil, co a z jakého důvodu se stalo,
- *dostatečná identita,*
- *vedlejší účinek* – zadaný trest by měl svým účinkem působit na všechny žáky.

Demotivujícími činiteli výuky se zabývají Lokšová a Lokša (1999). Řadí k nim autokratický styl vyučování a výchovy, rigiditu, málo tvořivosti, nízkou komplexnost přípravy do života, příliš velké množství informací, důraz na známky a zdůrazňování soutěží. Autokratický styl vyučování a výchovy znamená, že učitel nařizuje, rozhoduje, kontroluje, trestá a žák je pasivní. Rigiditou Lokšová myslí strnulost vyučovacích metod, přístupů, úkolů, obsahu činnosti ve vyučování. Další demotivující činitel je podle autorky to, že vyučování málo rozvíjí fantazii, originalitu myšlení a řešení problémů. Zdůrazňování soutěží je problémové v tom, že nemotivačně působí srovnávání s nejlepšími žáky ve třídě. Některé hry, které uvádím v praktické části diplomové práce, nejsou založené pouze na matematice, ale velkou roli v nich může sehrát náhoda. Mohou tak zvítězit i ti, pro které není tento předmět zrovna silnou stránkou, což je dobře. Myslím si, že i to může žáky motivovat, protože všichni mají šanci získat plusové hodnocení. Učitel by si měl dávat pozor na to, aby nezdůrazňoval toho, kdo ve hře uspěl nejhůře, například měl nejméně dvojic v Pexesu, protože tím by žáka pouze ještě více odradil. (Lokšová, Lokša, 1999)

1.5 Aktivizující metody ve výuce

V Pedagogickém slovníku (2003) nalezneme pedagogický pojem ***aktivita***, který je používán pro činnost, při které musí člověk projevit vyšší úroveň iniciativy a samostatnosti, musí vynaložit větší úsilí a být celkově efektivnější. Pokud žák o hodině matematiky pouze sleduje, jak učitel řeší úlohy na tabuli, považujeme to jako nižší úroveň aktivity. Za vyšší úroveň považujeme například samostatnou práci žáka, kdy sám řeší úlohy v sešitě. Aktivizace žáků ve výchovně vzdělávacím procesu se, podle Maňáka (2011), zaměřuje především na rozvoj klíčových kompetencí a osobnosti žáka. (Průcha, Mareš a Walterová, 2003)

„Aktivizující metody jsou postupy, které vedou výuku tak, aby se výchovně-vzdělávacích cílů dosahovalo hlavně na základě vlastní učební práce žáků, přičemž důraz se klade na myšlení a řešení problémů.“ (Maňák a Švec, 2003, s. 105) Aktivizující metody se tedy zaměřují se na myšlenkovou a charakterovou samostatnost žáka, a také na jeho zodpovědnost a tvořivost. Důležitý je zájem žáků a získání možnosti částečného ovlivnění konkrétního cíle výuky. Jsou prostředkem, který pomáhá odbourávat stereotyp ve vyučovacích předmětech. Aktivizující metody také vytvářejí příznivé třídní klima. (Průcha, Mareš a Walterová, 2003)

V Pedagogickém slovníku (2003) také nalezneme pojem ***tvořivost***, který je popsán jako duševní schopnost, která vychází z poznávacích a motivačních procesů. Důležitou roli hraje inspirace, fantazie a intuice. Proces tvořivosti má několik etap, kterými jsou příprava, dozrávání nápadu, „osvícení“, kontrola a zpracování. Za výsledek tvoření jsou považována taková řešení, která jsou nejen správná, ale pro společnost nebo daného jedince nová a nezvyklá. (Průcha, Mareš a Walterová, 2003)

Podle Hejného a Kuřiny (2009) slouží aktivizující metody také jako motivace. Jako příklady uvádějí například dobře položenou otázku či formulaci problému, nebo také zajímavé úlohy či podnětné hry. (Hejný, Kuřina, 2009)

V literatuře nalezneme různá dělení aktivizujících metod. Maňák (2011) uvádí podrobné dělení, kdy metody rozděluje podle jejich příbuznosti do osmi skupin:

a) *diskuzní metody*, do kterých řadí sokratický rozhovor, diskuse;
b) *heuristické metody*, pod které spadá metoda řešení problému, projektová metoda, brainstorming;
c) *situační metody*, kdy jsou využity reálné případy ze života;
d) *inscenační metody* sloužící jako sociální učení v modelových situacích,
e) *didaktické hry*, což jsou hry mající pedagogický cíl;
f) *práce s textem,*
g) *mentální mapování*, do kterého patří myšlenkové mapy;
h) *skupinové metody*, mezi které je zařazena práce ve dvojicích a malých skupinách, kooperativní učení.

Aktivizující metody v praktické části diplomové práce jsou především *didaktické hry*. Pokud je u některých aktivit vhodné využít *diskuzi,* tak ji zmiňuji v poznámkách. Navrhuji také mentální mapování, konkrétně *Myšlenkovou mapu*, kterou můžeme vytvořit jak na úvod nové látky, tak na závěr.

Při srovnání efektivity tradiční výuky a výuky s prvky aktivizujících metod, je tradiční výuka lepší v dosažených vzdělávacích výsledcích, oproti tomu netradiční přístup je lepší pro rozvoj kreativity, nezávislosti a zvídavosti žáků. Výuka obsahující aktivizující metody podporuje pozitivní postoj žáků k učení a škole. (Maňák a Švec, 2003)

Maňák (1995, s. 44) upozorňuje na to, že se učitel může setkat s určitými problémy při aplikaci aktivizujících metod do výuky. Možné problémy vymezil takto:

- *žáci musejí mít většinou o daném tématu určité vědomosti,*
- *učitel musí překonat direktivní řízení a dominující postavení ve třídě,*
- *vyžadují více vyučovacího času a organizační přípravy,*
- *je třeba počítat s nedostatkem vhodných materiálů a pomůcek.*

1.6 Didaktické hry

Je všeobecně známo, že hry vycházejí z přirozenosti dítěte, a proto při nich není potřeba žádné speciální motivace. Maňák a Švec (2003) hru definují jako jednu ze základních forem činnosti, jejíž hlavní charakteristikou je to, že je to aktivita, která je zvolená svobodně, žádný zvláštní účel nesleduje, ale sama v sobě ukrývá cíl a hodnotu. Didaktickou hru definují jako seberealizační aktivitu, která je přizpůsobena pedagogickým cílům. (Maňák, Švec, 2003)

Vymezení pojmu ***didaktická hra*** nalezneme v mnoha odborných publikacích. Podle Krejčové a Volfové (2001) jsou didaktické hry takové hry, které jsou určeny ke vzdělávacím účelům. Vališové a Valenta (2011) didaktickou hru vymezují jako seberealizační aktivitu žáků, která se zaměřuje se na výchovně vzdělávací cíle a průběh didaktické hry závisí na předem stanovených pravidlech. V Pedagogickém slovníku (2003) je didaktická hra definována jako taková hra, která sleduje didaktické cíle, má svá pravidla, vyžaduje průběžné řízení a závěrečné vyhodnocení. Nejenže podněcuje tvořivost a spolupráci, ale také podněcuje soutěživost. (Mareš, Walterová, Průcha, 2003)

K didaktickým hrám tedy patří i didaktické soutěže. O soutěži mluvíme, jestliže je při hře důležitější výsledek a pořadí účastníků než samotná činnost. Soutěživé hry jsou součástí didaktických her v matematice, kdy žáci mezi sebou soutěží a dosahují tak lepších výsledků. (Jankovcová, Průcha a Koudela, 1989)

Z výše uvedeného můžeme říct, že se didaktická hra od spontánní hry liší tím, že sleduje určité didaktické cíle. Spontánní hra má cíl již sama v sobě. Podle Kárové (1998) je hlavní rozdíl v účasti žáka, kdy se děti zapojují do spontánní hry dobrovolně, ale v didaktické hře je žákova účast povinná. Povinností se didaktická hra podobá spíše učení a práci než hře. Tuto aktivitu stále nazývat hrou, díky tomu, že se žák při didaktické hře seberealizuje, uspokojuje své potřeby a hlavně, že ho samotná činnost i její průběh baví. (Kárová, 1998)

Jankovcová (1989) navrhuje přehled hledisek pro klasifikaci didaktických her:

a) *doba trvání* (krátkodobé, dlouhodobé),
b) *místo konání* (třída, klubovna, příroda, hřiště),
c) *převládající činnost* (osvojování vědomostí, pohybové aktivity),
d) *hodnocení* (kvantita, kvalita, čas výkonu, hodnotitel učitel – žák).

Dělíme tedy časově na krátké hry (na rozehřátí) a delší hry (na zopakování). Krátké hry se ideálně hrají na začátku hodiny, ale můžeme je použít i jako výplň na jejím konci. Tyto hry nezaberou mnoho času (kolem pěti minut), nebývá potřeba žádná velká příprava k jejich hraní a pravidla bývají také jednoduchá. Hry na rozehřátí procvičují většinou základní dovednosti (sčítání, násobení, aj.) často bez užšího vztahu na právě probíranou látku, ale dají se většinou konkrétní látce přizpůsobit. Jejich cílem je žáky „naladit" na hodinu matematiky, případně vyplnit volný čas na jejím konci. Soutěže a hry na opakování a upevnění poznatků se vyznačují tím, že trvají alespoň polovinu vyučovací hodiny (často celou), jsou více propojeny s konkrétní látkou. Účelem je danou látku zopakovat zábavnou formou a zároveň poskytnout zpětnou vazbu učiteli. (Jankovcová, 1989)

Za dlouhodobé hry v praktické části diplomové práci můžeme označit *Bludiště* a *Člověče, nezlob se!*, které řadíme do Deskových her. Tyto aktivity zaberou i celou vyučující hodinu a zopakují celou látku rovnice a nerovnice. Krátkou hru na úvod hodiny můžeme použít například *Tajenku* (kap. 3.3.8) nebo *Černého Petra* (kap. 3.2.1). U všech navržených aktivit je převládající činností osvojování si vědomostí. Hodnotitelem těchto aktivit je učitel, kdy se zaměřuje na kvalitu výkonu, případně na jeho čas.

Pro metodickou přípravu k začlení didaktických her do výuky sestavil Maňák a Švec (2003, s. 129) specifická hlediska, která musí didaktická hra respektovat:

a) *vytyčení cílů hry,*
b) *diagnóza připravenosti žáků,*
c) *ujasnění pravidel hry,*
d) *vymezení úlohy vedoucího hry,*
e) *stanovení způsobu hodnocení,*
f) *zajištění vhodného místa,*
g) *příprava pomůcek, materiálu, rekvizit,*
h) *určení časového limitu hry,*
i) *promyšlení případných variant.*

1.7 Obecná pravidla aktivit a her

Než budu uvádět navržené aktivity a hry aplikované pro téma rovnice a nerovnice, tak považuji za vhodné se seznámit s pravidly, které je nutné dodržovat. Při zavádění hry do výuky je důležité dodržovat ***didaktické zásady***, kterými má Zormanová (2014) na mysli jistá obecná doporučení, díky jejichž dodržování je možné dosáhnout největší efektivity a účinnosti. (Zormanová, 2014)

Sedm základních didaktických zásad, mezi něž patří *zásada komplexního rozvoje osobnosti žáka, zásada vědeckosti, zásada individuálního přístupu k žákům, zásada spojení teorie z praxí, zásada uvědomělosti a aktivity, zásada názornosti a zásadu soustavnosti*, sepsal Kalhous a Obst (2002). Růžičková (2002) tyto zásady upravila pro aplikaci ve výuce matematiky a přidala k nim zásadu trvalosti.

1. První zásadou je ***zásada názornosti***, která je založená na multisenzoriálním přístupu, což znamená, že k osvojování učiva by měly být využity všechny lidské smysly. Růžičková upozorňuje na to, že učitel by měl při výkladu používat konkrétní předměty a předvedení konkrétní činností. Žáci by měli mít možnost si konkrétní předměty ohmatat a činnosti si sami vyzkoušet, protože přímý styk s prostředím a danými předměty je lepší pro pochopení a trvalejší zapamatování si látky. Tuto zásadu uplatňoval již J. A. Komenský. V matematice se nejčastěji

uplatňuje vnímání zrakové. Je třeba se naučit do výuky zapojit i ostatní smysly, ale nesmíme zapomenout na to, že názornost není cílem, ale prostředkem.

2. ***Zásada uvědomělosti*** má podle Růžičkové za účel odstranění bezmyšlenkovité biflování z vyučovacího procesu. Aby byli žáci schopni spojit teorii s praxí a využívat nabyté vědomosti v ostatních předmětech i v běžném životě, tak musí pochopit podstatu jevu, příčiny a souvislosti mezi danými jevy, k čemuž je vede učitel. Jednou z důležitých podmínek uvědomělého získávání vědomostí je kladný vztah k učení (v našem případě konkrétně k matematice), který vede k aktivnímu osvojování učiva.
3. ***Zásada vědeckosti*** říká, že obsah učiva a použité metody by měly být v souladu s úrovní současné vědy. Růžičková tím učitelům říká, že by se měli stále vzdělávat a aktualizovat svoje vědomosti a dovednosti. Při výuce je důležité dbát na správný výklad látky, tedy přesně definovat jednotlivé matematické pojmy, věty a axiomy.
4. ***Zásada přiměřenosti*** podle Růžičkové spočívá v tom, že obsah, obtížnost, rozsah učiva i použité metody by měly odpovídat úrovni psychického, rozumového i tělesného rozvoje žáků. Při výuce je vhodné postupovat od jednoduchého k složitějšímu, od známého k neznámému, od konkrétního k abstraktnímu, od blízkého ke vzdálenému, což je jedna ze zásadních myšlenek J. A. Komenského. Dále Růžičková uvádí, že nároky na žáky by se měly zvyšovat postupně.
5. ***Zásada trvalosti*** se zaměřuje na pevné, a hlavně trvalé, uchopení vědomostí. Aby si žák něco pamatoval napořád, musí si dané učivo kvalitně osvojit, čemuž učitel může pomoci tím, že bude propojovat nové poznatky s již dříve nabytými vědomostmi, jak radí Růžičková. Z tohoto důvodu je také vhodné pravidelné opakování probraného učiva, proto si myslím, že je vhodné do výuky zařazovat hry, díky kterým si studenti nenásilnou formou zopakují již probranou látku.
6. Poslední zásadou je ***zásada soustavnosti***, která vychází z toho, že u probíraného učiva musí existovat posloupnost, tedy že jeden poznatek, či výukový celek má logicky vyplývat z druhého, jak ve své knize tvrdí Růžičková. Učitel by měl dbát na to, aby bylo učivo probíráno v logickém sledu a dohromady tvořilo ucelený systém vědomostí. Ucelené soustavy poznatků je však možné dosáhnout jedině tehdy, když jsou pěstovány mezipředmětové vztahy. (Růžičková, 2002)

To, jak chápou žáci souvislosti mezi danými jevy, může učiteli odhalit právě aktivita *Myšlenková mapa*, která se řídí zásadou uvědomělosti a také zásadou soustavnosti. Tyto zásady platí i pro aktivitu *Přiřazování*. Také karetní hra *Kvarteto* v sobě ukrývá zásadu uvědomělosti, a to v tom, že žáci si zopakují teoretické znalosti o daných typech rovnic a nerovnic a následně tyto znalosti aplikují při řešení konkrétní ne/rovnice. Zásadou trvalosti se projevuje u her jako je *Pexeso* nebo *Domino*, kdy si učitel tyto hry připraví pro různá témata a na začátku hodiny budou žáci pro zahřátí opakovat i již mnohem dříve probíranou látku.

Každá didaktická hra je podle Kárové (1998) založena na čtyřech hlavních komponentech, což je ***didaktický cíl*, pravidla, *vlastní hravá činnos*t** a ***závěr***. Úkol se vždy vztahuje k didaktickému cíli hry, který je stanoven učitelem. Didaktický cíl v žácích vzbuzuje zájem a přitahuje jejich pozornost. Učitel by si měl dát pozor, aby stanovený úkol nebyl příliš složitý nebo naopak jednoduchý, protože takové úkoly žáky neaktivizují. Během hry je nutné se řídit danými pravidly, která dodávají hře na půvabu a zvyšují její přitažlivost. Důležitou součástí didaktické hry je také hravá činnost, díky které žáci často ani nepozorují, že plní úkol. Žák má především pocit, že si hraje, tedy hravá činnost maskuje didaktický cíl hry. Zpětnou vazbu, jak žáci splnili zadaný úkol, získáme závěrečným vyhodnocení didaktické hry. Hodnocení je jistou formou motivace žáků, a proto by měl být žákův výkon při hře hodnocen převážně pozitivně. (Kárová, 1998)

Přestože se Věra Kárová zaměřuje na ročníky prvního stupně základních škol, tak její myšlenky jsou platné i pro ročníky vyšší. Maňák (2003) také upozorňuje na to, že je důležité při tvorbě her posuzovat schopnost žáků a obtížnost didaktické hry. Podle něj hry, které jsou příliš jednoduché nebo naopak příliš složité, žáky neaktivizují a žáci ztrácí zájem o takovou činnost, z toho také vyplývá to, že není naplněn didaktický cíl hry. Dále Maňák (2003) uvádí, že čím starší žáci, tím časově delší aktivitu zvládnou, stejně tak je pro ně i s vyšším věkem vhodnější zařazovat hry, které jsou náročné na spolupráci a logické myšlení. (Maňák, 2003)

Vališová a Valenta (2011), jejichž vymezení didaktické hry uvádím již výše, upozorňují na to, že hra plní řadu funkcí, jako je například funkce poznávací, procvičovací, tvořivá, motivační, pohybová, sociální, emocionální, diagnostická, terapeutická, zábavná a fantazijní. (Vališová, Valenta, 2011)

2 Matematika a její aplikace

2.1 Postavení matematiky ve školním vzdělávacím systému

„Matematické vzdělání by mělo mít smysl a mělo by být užitečné. Mělo by žákům přinášet uspokojení a radost." (Hejný, Kuřina, 2009, s.196)

Matematika je ve škole postavena za náš mateřský jazyk a za cizí jazyk, což se odráží na časové dotaci, například RVP Gymnázia určuje minimální časovou dotaci za 4 roky 12 hodin českého jazyka, kdy je tento jazyk povinný ve všech ročnících, 10 hodin matematiky, kdy zařazení vzdělávacího obsahu oboru dané vzdělávací oblasti do posledního ročníku stanovuje ŠVP. Minimální týdenní časová dotace v jednotlivých ročnících je 27, maximální 35 hodin (v souladu se školským zákonem). Celková povinná časová dotace v 1.– 4. ročníku je 132 hodin na žáka.

Hejný, Kuřina (2009) shrnuli své matematické přesvědčení do následujících čtyř bodů:

1. Jako první bod uvádějí rozvíjení schopnosti samostatného a kritického myšlení, díky němuž bude matematické vzdělání bráno jako užitečné a smysluplné.

   Sem můžeme zařadit aktivitu *Puzzle – slovní úlohy* (kap. 4.3.6). Pomocí rovnic a nerovnic žáci dokážou snadno vyřešit mnoho reálných nebo technických problémů převedením na matematický problém, který vyřeší a následně ověří, zda řešení odpovídá reálně možnému výsledku.
2. Podle autorů budeme matematiku považovat za užitečnou, když bude pomáhat řešit problémy v běžném životě a stane se tak součástí lidské kultury.

   Matematiku používáme každý den, ať je to v obchodech (odhad ceny nákupu, procenta při slevách), v kuchyni (násobení a dělení při určování várky receptu, poměry a podíly ingrediencí při pečení), což se žáci učí už na prvním stupni základní školy, dále pak ve stavebnictví (přesné měření, odhadování nákladů projektu). Na střední škole se také setkáváme s úlohami o společné práci, což je důležité například pro vedoucího provozu, stavbyvedoucího nebo kohokoliv, kdo organizuje práci o více lidech. Když bude vědět, jak dlouho zhruba trvá práce jednomu člověku, tak si vypočítá, kolik lidí budete potřebovat na daný úkon, aby práce byla hotová včas. Rovnice jsou také důležité ve farmaceutickém a chemickém průmyslu, kde je například zapotřebí umět určit jaké množství daného roztoku je nutné smíchat s danou látkou, abychom získali roztok o požadované koncentraci. Pro tyto obory je ve studiu na vysoké škole důležitá rovnice Michaelise - Mentenové zkoumající rychlost chemických reakcí aktivity enzymů.

3. Aby mělo matematické vzdělání smysl, tak musí podporovat zvídavost, klást otázky a přispívat ke kritickým postojům, jak tvrdí Kuřina a Hejný.

   V praktické části například aktivita *Řady* (kap. 4.3.7) navádí žáka k tomu, aby se zamyslel nad tím, jaký bude další krok při řešení nového typu příkladu a z jakého důvodu tomu tak je.

4. Autoři upozorňují na to, že když bude matematika rozvíjet potřebné pracovní návyky žáků a studentů, tak bude užitečná.

   Matematiku můžeme také použít při utváření seznamu úkolů. Je důležité mít strategii a dokázat určit důležitost a naléhavost každého úkolu. Americký pastor John C. Maxwell, který se věnuje rozvoji vůdcovských schopností, určil tři kroky ke stanovení pořadí a priority úkolů na seznamu. Učitel může tuto metodu ukázat žákům na začátku školního roku, protože jim to může pomoci s přípravou do školy. (Hejný, Kuřina, 2009)

2.2 Matematika v rámcově vzdělávacích programech

V rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV), který v lednu tohoto roku prošel minirevizí a na rok 2023 je plánovaná jeho velká revize, je matematika zařazena do vzdělávací oblasti s názvem Matematika a její aplikace. Obsah této oblasti se na druhém stupni ZŠ dělí do čtyř matematických tematických okruhů. Prvním z nich je tematický okruh Číslo a proměnná. Do tohoto okruhu řadíme učivo rovnice, konkrétně lineární rovnice, soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Dalším okruhem jsou Závislosti, vztahy a práce s daty, třetí je nazván Geometrie v rovině a v prostoru. Poslední tematický okruh, který nese název Nestandartní matematické úlohy a problémy, dává učiteli možnost do výuky zařadit právě matematické hry. V RVP ZV je uvedeno: *„Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti* *logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.“* (RVP ZV, 2021, [online] s. 30)

V rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia (RVP G) je matematika taktéž zařazena do vzdělávací oblasti s názvem Matematika a její aplikace. Ve vzdělávacím obsahu **Číslo a proměnná** je učivo **rovnice a nerovnice** – lineární rovnice, nerovnice a jejich soustavy, kvadratická rovnice (diskriminant, vztahy mezi kořeny a koeficienty), rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou, rovnice s neznámou ve jmenovateli a pod odmocninou, logaritmické, exponenciální a goniometrické rovnice. Očekávané výstupy žáka v tomto obsahu jsou:

„Žák

- *užívá vlastnosti dělitelnosti přirozených čísel*
- *operuje s intervaly, aplikuje geometrický význam absolutní hodnoty*
- *provádí operace s mocninami a odmocninami, upravuje číselné výrazy*
- *odhaduje výsledky numerických výpočtů a efektivně je provádí, účelně využívá kalkulátor*
- *upravuje efektivně výrazy s proměnnými, určuje definiční obor výrazu*
- *rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic*
- *řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení*
- *rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy*
- *geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy, graficky znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav*
- *analyzuje a řeší problémy, v nichž aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav“* (RVP G, 2013 [online] s. 23, 24)

Protože se k mým matematickým hrám nevyjadřovali pouze učitelé ze základních škol a gymnázií, ale také ze středních škol odborných, tak níže přikládám, jak je matematické vzdělání popsáno v RVP pro obor vzdělání – Reprodukční grafik pro média, kde vyučuje jeden z dotazovaných učitelů.

„Matematické vzdělávání navazuje na učivo a výsledky vzdělávání stanovené v RVP pro základní vzdělávání. V odborném školství má matematické vzdělávání kromě

funkce všeobecně vzdělávací ještě funkci průpravnou pro odbornou složku vzdělávání. Obecným cílem matematického vzdělávání je výchova přemýšlivého člověka, který bude umět používat matematiku v různých životních situacích (v odborné složce vzdělávání, v dalším studiu, v osobním životě, budoucím zaměstnání, volném čase apod.).

Matematické vzdělávání se zaměřuje především na metody řešení úloh, zejména ve vztahu k oboru vzdělání. V oborech vzdělání se zvýšenými nároky na matematické vzdělávání rozšíří škola ve svém školním vzdělávacím programu matematické vzdělávání v souladu s potřebami oboru. Uvedené výsledky vzdělávání a učivo představují v odborném školství základ matematického vzdělávání pro daný stupeň vzdělání.“ (RVP SOV, 2020 [online] s. 39, 40)

V učivu rovnice a nerovnice oproti gymnáziu chybí rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou a goniometrické rovnice.

2.3 Historie

S dějinami matematiky se studenti při výuce téměř nesetkají, ale je to jedna z možností, jak výuku zpestřit a studenty něčím zaujmout. Růžičková (2002) ve své knize píše, že termín matematika se vyčlenil ze starořeckého slova *„mathema“*, což znamená *poznání*. Počátky matematiky sahají hluboko do dějin lidské společnosti. Myslím si tedy, že by učitelé měli studentům předkládat některá historická fakta, aby si studenti uvědomili to, že matematika je pro lidstvo zajímavou přírodní vědou a provází nás celým naším životem. (Růžičková, 2002)

Struik (1963) se ve své knize Dějiny matematiky zmiňuje také o vývoji rovnic a nerovnic. V Babylonu za vlády krále Chamurappiho (1950 před n.l.) vznikly klínopisné texty, ve kterých je systematicky rozvedena algebra. V textech byly uvedeny metody řešení kvadratických rovnic, lineární rovnice o dvou neznámých, dokonce i znali obecné pravidlo pro řešení kubické a bikvadratické rovnice. V této době Egypťane řešili pouze jednoduché lineární rovnice. Ve starověké orientální matematice byly pouze popisy jistých pravidel, co jak má člověk při výpočtu udělat, ale zcela zde chybí důkazy. Z této doby uvádí Struik příklad z hliněné destičky, který jsem použila v praktické části diplomové práce, konkrétně v aktivitě *Historické úlohy* (kap. 4.3.3). (Struik, 1963)

Ze staročínské matematiky známe sbírku Matematika v devíti knihách (někdy také nazývané Devět kapitol matematického umění), která obsahuje 246 úloh s odpověďmi a návody k řešení. Úlohy jsou rozdělené podle věcné tématiky dané doby, jako je například vyměřování polí, poměrné rozdělování a oceňování prací. Nalezneme zde také algoritmus řešení systému lineárních rovnic libovolným počtem neznámých. Rovnice jsou určovány maticí, která může obsahovat i záporné číslo. Po dlouhá staletí byla tato sbírka úloh pramenem matematických znalostí v Číně. Jednu úlohu z této knihy uvádím v praktické časti práce v kapitole Ostatní hry a aktivity – *Historické úlohy* (kap. 4.3.3). (Striuk, 1963)

Za velkolepé dílo Struik považuje Diofantovu sbírku problémů, kterou považuje za velmi různorodou a vynalézavou. Řeší se v ní neurčité rovnice $Ax^2 + Bx + C = y^2$, $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$, u kterých hledal pouze kladná a racionální řešení, jiná řešení považoval za „nemožná“. Nalezneme zde i rovnice $x^2 - 26y^2 = 1$, $x^2 - 20y^2 = 1$, které nyní nazýváme „Pellovy rovnice“. Diofantos jako první používal systematicky algebraické symboly, vytvořil si také své vlastní znaky pro neznámou. Oproti Diofantovi se při řešení neurčitých rovnic Indové spokojili pouze s celočíselným řešením, ale připouštěli i záporné kořeny. (Striuk, 1963)

2.4 Rovnice a nerovnice jako učivo

Při zavádění nové látky v matematice je důležité, aby nebyla výuka zaměřena pouze na řešení úloh, ale aby žáci také porozuměli pojmům, vztahům a užším souvislostem. Nepovažuji za vhodné, pokud se někteří učitelé pouze odkazují na učebnice, v nichž si studenti mohou teorii dohledat, jiní studentům dají vytištěné materiály a někdo diktuje přesné definice, které si studenti zapisují do sešitu, aniž by jim rozuměli. Osobně mi jako studentce i následně při vedení praxí vyhovovaly učebnice Matematika pro gymnázia od nakladatelství Prometheus (Charvát a spol, 2015). V těchto učebnicích se vhodně prolíná teoretická část a několik ukázkových příkladů, na kterých je teorie vysvětlena. Dále v nich nalezneme velkou zásobu příkladů, které mohou studenti využívat i sami k procvičování dané látky a na konci naleznou klíč s výsledky. Nakladatelství Prometheus také nabízí Sbírku úloh z matematiky pro střední školy (Janeček, 2014), která je zaměřená na výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy.

Z učebnic této řady jsem čerpala pro svou diplomovou práci jak níže uvedený didakticko-metodický přístup k učivu, tak úlohy pro didaktické hry. Dalšími zdroji úloh, které jsem použila v praktické části své diplomové práce, jsou sbírky Bělouna (2018), Petákové (2001) a Hudcové s Kubičíkovou (2014).

2.4.1 Rovnice a nerovnice a jejich řešení

Rovnice je zápis rovnosti dvou výrazů, kde se může vyskytovat nějaké písmeno, které označuje tzv. neznámou x. Řešením rovnice (kořenem rovnice) je každé číslo, kterým po dosazení do rovnice získáme platnou rovnost. Vyřešit rovnici znamená to, že nalezneme všechna její řešení, tedy množinu všech jejích řešení. Při řešení rovnice danou rovnici upravujeme na rovnice nové, používáme tzv. ekvivalentní úpravy, což je například přičtení stejného čísla k oběma stranám rovnice a vynásobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem. Tyto úpravy převedou každou rovnici na rovnici s ní ekvivalentní. Někdy je při řešení rovnice vhodné užít důsledkové úpravy, kdy získáme nejen všechna řešení původní rovnice, ale i některá další. Mezi důsledkové úpravy patří umocnění obou stran rovnice na druhou.

Když řešíme rovnici, tak někdy provádíme zkoušku. Zkouška je nutná, pokud jsme rovnici řešili důsledkovými úpravami. Pokud jsme užili pouze ekvivalentní úpravy, tak zkouška nutná není a provádíme ji pro vlastní ujištění, že jsme počítali správně.

Nerovnice je zápis nerovnosti dvou výrazů, v nichž se vyskytuje neznámá. Řešením nazýváme každé číslo, kterým po dosazení získáme platnou nerovnost. Vyřešit nerovnici znamená najít všechna její řešení neboli množinu všech jejích řešení. Při řešení používáme ekvivalentní úpravy.

2.4.2 Lineární rovnice a nerovnice

2.4.2.1 Lineární rovnice

Rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \epsilon R$, se nazývá **lineární** rovnice (s neznámou x).

Často se takto nazývají i mnohé další rovnice, jež je možné upravit na tvar $ax + b = 0$, kde $a, b \epsilon R$, $a \neq 0$. Výraz $ax + b$, kde $a, b \epsilon R$, $a \neq 0$ se nazývá lineární dvojčlen.

Tvar $ax + b = 0$, stejně jako řešení $x = -\frac{b}{a}$, získáváme ze složitějšího zadání ekvivalentními úpravami, o nichž víme, že nezmění řešení rovnice. Patří k nim:

- přičítání (odčítání) téhož výrazu k oběma stranám rovnice
- násobení (dělení) obou stran rovnice týmž výrazem ($\neq 0$)

Přehled řešení lineárních rovnic:

- $ax + b = 0$, $a \neq 0$, pak jediným řešením je $x = -\frac{b}{a}$
- $ax + b = 0$, $a = 0$, $b = 0$, pak každé číslo $x \epsilon R$ je řešením
- $ax + b = 0$, $a = 0$, $b \neq 0$, pak rovnice nemá řešení

Některé rovnice s jednou neznámou, které lze převést na lineární:

- rovnice v součinovém tvaru
- rovnice v podílovém tvaru
- rovnice s absolutními hodnotami

2.4.2.2 Lineární nerovnice

Nerovnice $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, kde $a, b \epsilon R$, se nazývají **lineární** nerovnice (s neznámou *x*).

Přehled řešení lineárních nerovnic:

- $ax + b > 0$, $a > 0$, pak $x > -\frac{b}{a}$
- $ax + b > 0$, $a < 0$, pak $x < -\frac{b}{a}$
- $ax + b > 0$, $a = 0, b > 0$, pak každé číslo $x \epsilon R$ je řešením
- $ax + b > 0$, $a = 0$, $b \leq 0$, pak nerovnice nemá řešení

Některé nerovnice s jednou neznámou, které lze převést na lineární:

- nerovnice v součinovém tvaru
- nerovnice v podílovém tvaru
- nerovnice s absolutními hodnotami

2.4.2.3 Soustavy lineárních nerovnic

Když řešíme soustavu lineárních nerovnic, tak hledáme čísla, která vyhovují několika nerovnicím s jednou neznámou zároveň. Vyřešíme každou nerovnici zvlášť a množina všech řešení uvažované soustavy je pak průnik množin řešení všech jednotlivých nerovnic.

2.4.2.4 Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru

Rovnice tvaru *„součin dvou nebo více lineárních dvojčlenů se rovná nule“* řešíme jako lineární rovnice, kdy platí, že součin několika čísel se rovná nule právě tehdy, když alespoň jeden z činitelů se rovná nule.

Nerovnice tvaru *„součin dvou nebo více lineárních dvojčlenů je větší než nula“* (místo znaku > může být také některý ze znaků <, ≥ , ≤) řešíme jako soustavy lineárních rovnic. Využíváme přehlednou *metodu nulových bodů.* Tato metoda je použitelná pro řešení libovolné nerovnice v součinovém tvaru, ve které se vyskytují pouze lineární dvojčleny.

Při řešení využíváme následující vlastnosti:

- Součin několika činitelů, z nichž alespoň jedno je nula, je nulový.
- Součin několika nenulových čísel je záporný právě tehdy, když lichý počet činitelů je záporný, jinak je součin kladný.

Nulovým bodem lineárního dvojčlenu $ax + b = 0$, kde $a, b \epsilon R,\ a \neq 0$, je číslo $-\frac{b}{a}$. V žádném intervalu $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right), \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ nemění dvojčlen znaménko. Jestliže $a > 0$, je v prvním intervalu záporný a ve druhém kladný. Jestliže $a < 0$, je to obráceně. U dvojčlenu rozlišujeme jeho vlastnost, tedy zda je kladný nebo záporný, kterou zjistíme dosazením libovolného čísla z intervalu do příslušného dvojčlenu.

V praktické části diplomové práce jsou rovnice a nerovnice v součinovém tvaru použité například v deskové hře *Bludiště*.

2.4.2.5 Rovnice a nerovnice v podílovém tvaru

Rovnice mající tvar *„zlomek, v jehož čitateli i jmenovateli je lineární dvojčlen nebo součin několika lineárních dvojčlenů, rovná se nule“.* (Charvát, 2015, s.48) Při řešení užíváme novou ekvivalentní úpravu, a to vynásobení obou stran rovnice stejným nenulovým výrazem s neznámou, který je definován pro všechny hodnoty neznámé z množiny čísel, v níž rovnici řešíme.

Nerovnice mající tvar *„zlomek, v jehož čitateli i jmenovateli je lineární dvojčlen nebo součin několika lineárních dvojčlenů, je větší než nule"* (místo znaku > může být také některý ze znaků <, ≥ , ≤). (Charvát, 2015, s.54) Opět budeme řešit soustavy lineárních nerovnic a budeme používat metodu nulových bodů.

Jestliže zlomky v nerovnici mají ve jmenovatelích lineární dvojčleny nebo jejich součiny, tak můžeme tyto zlomky „odstranit" díky následujícím ekvivalentním úpravám:

- Vynásobení obou stran nerovnice stejným kladným výrazem obsahujícím neznámou, definovaným pro všechny hodnoty neznámé z množiny čísel, v níž nerovnici řešíme.
- Vynásobení obou stran nerovnice stejným záporným výrazem obsahujícím neznámou, definovaným pro všechny hodnoty neznámé z množiny čísel, v níž nerovnici řešíme, a současné obrácení znaku nerovnosti v nerovnici.

Pro zlomek, který má v čitateli i jmenovateli číslo nebo součin několika čísel, platí:

- Je-li alespoň jeden z činitelů ve jmenovateli nulový, není zlomek definován
- Jsou-li všichni činitelé ve jmenovateli nenuloví a alespoň jeden činitel v čitateli nulový, je zlomek roven nule
- Jsou-li všichni činitelé v čitateli i jmenovateli nenuloví, potom zlomek je záporný právě tehdy, když lichý počet těchto činitelů je záporný, jinak je zlomek kladný

V praktické části diplomové práce je výše uvedený typ rovnic a nerovnic použitý například v deskové hře *Člověče, nezlob se!,* v karetní hře *Kvarteto* a dále v aktivitě *Přiřazování*.

2.4.2.6 Rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami

Absolutní hodnota čísla $a \in R$ je definována takto:

$$|a| = a \text{ pro } a \geq 0, \ |a| = -a \text{ pro } a < 0.$$

Pro libovolná čísla $a, b \in R$ platí:

- $|a| \geq 0$
- $|a| = |-a|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, pokud $b \neq 0$

Geometrický význam absolutní hodnoty:

- Číslo $|a|$ se pro libovolné $a \in R$ rovná vzdálenosti obrazu čísla a na číselné ose od počátku (tj. od obrazu čísla 0).
- Číslo $|a - b| = |b - a|$ se pro libovolná $a, b \in R$ rovná vzdálenosti obrazů čísel a, b na číselné ose.

Při řešení užíváme metodu *nulových bodů*, kdy množinu R rozdělíme nulovými body příslušných lineárních dvojčlenů na disjunktní intervaly a v každém z nich řešíme danou rovnici zvlášť. Množinou všech řešení uvažované rovnice bude sjednocení množin všech jejích řešení v jednotlivých intervalech.

Nerovnice s jednou nebo několika absolutními hodnotami, ve kterých se vyskytují lineární dvojčleny, řešíme obdobně jako rovnice, a tedy používáme metodu nulových bodů.

V praktické části diplomové práce jsou rovnice s absolutními hodnotami použité například v deskové hře *Bludiště* a v karetní hře *Kvarteto.*

2.4.2.7 Lineární rovnice a nerovnice s více neznámými a jejich soustavy

2.4.2.7.1 Lineární rovnice se dvěma neznámými

Rovnice $ax + by = c$, kde $a, b, c \in R$, se nazývá **lineární rovnice se dvěma neznámými** x, y.

Ekvivalentní rovnice pro úpravy rovnice se dvěma neznámými jsou prakticky stejné jako ekvivalentní úpravy pro rovnice s jednou neznámou, pouze zde jsou neznámé dvě.

Pro grafické znázornění množiny všech řešení rovnice $ax + by = c$ obecně platí:

1) V případě, kdy alespoň jeden z koeficientů je nenulový, je obrazem množiny všech jejích řešení přímka.
   a) Je-li $a = 0$, je tato přímka rovnoběžná s osou *x*.
   b) Je-li $b = 0$, je přímka rovnoběžná s osou *y*.
   c) Je-li $c = 0$, prochází tato přímka počátkem soustavy souřadnic.

2) Jestliže $a = b = 0$, potom záleží na číslu c.
   a) Je-li $c = 0$, je řešením rovnice každá uspořádaná dvojice reálných čísel (x, y).
   b) Je-li $a = b = 0$ a $c \neq 0$, nemá daná rovnice žádné řešení.

2.4.2.7.2 Lineární nerovnice se dvěma neznámými

Nerovnice $ax + by > c,\ ax + by \geq c,\ ax + by < c,\ ax + by \leq c,$ kde $a, b, c \in R,$ se nazývají **lineární nerovnice se dvěma neznámými** *x*, y.

Nerovnice se dvěma neznámými můžeme upravovat podobně jako nerovnice s jednou neznámou.

Pro grafické znázornění nerovnice platí:

Obrazem množiny všech řešení nerovnice $ax + by \leq c$, kde $a, b, c \in R$, přičemž alespoň jedno z čísel a, b je různé od nuly, je vždy jedna z polorovin s hraniční přímkou $ax + by = c$. Která z nich to je, zjistíme, když v rovině vybereme libovolný bod, který neleží na přímce a jeho souřadnice dosadíme do nerovnice. Pokud dostaneme platnou nerovnost, tak jde o polorovinu obsahující zvolený bod, jinak je obrazem množiny všech řešení opačná polorovina.

Kdyby byl v nerovnici jiný znak nerovnosti, postupovali bychom obdobně. V případě ostré nerovnosti <, > by byla obrazem množiny všech řešení příslušná polorovina bez hraniční přímky.

2.4.2.7.3 Soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Soustava rovnic

$a_1x + b_1y = c_1$,

$a_2x + b_2y = c_2$, kde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$ se nazývá soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými x, y. Řešením této soustavy nazýváme každou uspořádanou dvojici (x_0, y_0), která je řešením obou jejích rovnic.

Jestliže $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, pak se tato soustava redukuje pouze na jedinou rovnici $a_2x + b_2y = c_2$, kdy má tato rovnice buď nekonečně mnoho řešení, nebo nemá žádné řešení.

Jestliže $a_1 = b_1 = 0$ a zároveň $c_1 \neq 0$, pak nemá tato rovnice řešení, a tedy ani soustava nemá žádné řešení.

Podobné to je v případě, kdy $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ nebo $a_2 = b_2 = 0$ a zároveň $c_2 \neq 0$.

Omezíme se tedy na takové soustavy, v nichž alespoň jeden z koeficientů a_1, b_1 je různý od nuly a zároveň alespoň jeden z koeficientů a_2, b_2 je různý od nuly. Při řešení takových soustav používáme *metodu dosazovací* a *metodu sčítací*.

Dosazovací metoda znamená, že z jedné rovnice vyjádříme neznámou (s nenulovým koeficientem) pomocí druhé neznámé a tento výraz dosadíme do zbývající rovnice. Získáme tím lineární rovnici s jednou neznámou.

Při použití dosazovací metody řešíme danou soustavu rovnic pomocí těchto ekvivalentních úprav:

- ekvivalentní úpravy jednotlivých rovnic soustavy
- dosazení výrazu, kterým z jedné rovnice vyjádříme některou neznámou pomocí druhé neznámé, za příslušnou neznámou do zbývající rovnice

Sčítací metoda se někdy používá při řešení soustavy, jestliže všechny čtyři koeficienty $a_1, b_1, a_2,\ b_2$ jsou nenulové. Tímto se soustava převede na takovou ekvivalentní soustavu, že v jedné její rovnici „chybí“ alespoň jedna neznámá. Používáme ekvivalentní úpravy:

- přičtení některé rovnice soustavy k zbývající rovnici této soustavy
- vynásobení některé rovnice soustavy nenulovým číslem a současné přičtení násobku zbývající rovnice soustavy k této rovnici

Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými může mít buď jedno řešení, nebo nekonečně mnoho řešení, nebo nemusí mít žádné řešení.

Pomocí soustav lineárních rovnic lze řešit řadu slovních úloh. Takové úlohy najdeme i v praktické části diplomové práce, například v aktivitě *Puzzle* (3.3.6).

2.4.2.7.4 Soustavy lineárních rovnic s více neznámými

Při řešení budeme používat ekvivalentní úpravy:

- ekvivalentní úpravy jednotlivých rovnic soustavy

- dosazení výrazu, kterým z jedné rovnice vyjádříme některou neznámou pomocí ostatních neznámých, za příslušnou neznámou do zbývající rovnice
- přičtení násobku některé rovnice soustavy k jiné rovnici této soustavy
- záměna pořadí rovnic
- vynechání rovnice, která je násobkem jiné rovnice soustavy (zvláštním případem je rovnice typu $0x + 0y + 0z = 0$)

Soustavu libovolného počtu lineárních rovnic se třemi neznámými *x, y, z* budeme převádět na soustavu některého z typů:

A. $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
   $0x + b_2y + c_2z = d_2,$
   $0x + 0y + c_2z = d_3,$
B. $a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$
   $0x + b_2y + c_2z = d_2,$
C. $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

Obecný popis algoritmu při převádění soustavy tří lineárních rovnic se třemi neznámými na soustavu některého z výše uvedených typů:

1. Soustavu upravíme tak, aby v první rovnici byl u první neznámé nenulový koeficient. Pokud tomu tak není, změníme pořadí rovnic nebo změníme pořadí, ve kterém neznámé zapisujeme.
2. První rovnici opíšeme a k dalším rovnicím přičteme takové násobky první rovnice, aby v těchto rovnicích první zapisovaná neznámá „zmizela“.
3. Soustavu upravíme tak, aby v druhé rovnici byl u druhé zapisované neznámé nenulový koeficient. Pokud je potřeba, můžeme vyměnit druhou a třetí rovnici nebo změnit pořadí druhé a třetí neznámé.
4. První dvě rovnice opíšeme a ke třetí rovnici přičteme takový násobek druhé rovnice, aby se v ní vynuloval koeficient u neznámé, která je zapisovaná jako druhá v pořadí.

Výše uvedený algoritmus se nazývá Gaussova eliminační (tj. vylučovací) metoda. Tohoto matematika jsem také zařadila do aktivity v praktické části mé diplomové práce, konkrétně aktivita *Puzzle* (4.3.6).

2.4.3 Kvadratické rovnice a nerovnice

2.4.3.1 Kvadratické rovnice

Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R,\ a \neq 0$, se nazývá **kvadratická rovnice**; ax^2 je její kvadratický člen, *bx* její lineární člen, *c* její absolutní člen.

Výraz $ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in R,\ a \neq 0$, se nazývá **kvadratický trojčlen**.

Je-li $b = 0$ nebo $c = 0$, jedná se o **neúplnou kvadratickou rovnici**, kterou řešíme následovně:

a) Rovnice $ax^2 + bx = 0$, kde $a, b \in R,\ a \neq 0$, se nazývá kvadratická rovnice bez absolutního členu. Tuto rovnici řešíme převedením na rovnici v součinovém tvaru $x(ax + b) = 0$. Kořeny jsou čísla $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$. Je-li navíc $b = 0$, vyjde $x_1 = x_2 = 0$ a číslo 0 se nazývá dvojnásobný kořen rovnice.

b) Ryze kvadratická rovnice $ax^2 + c = 0$, kde $a, c \in R,\ a \neq 0$, je kvadratická rovnice, v níž $b = 0$. Rovnici zapisujeme ve tvaru $x^2 = d$, kde $d = -\frac{c}{a}$. Jestliže $d < 0$, nemá rovnice řešení, protože číslo x^2 se nemůže rovnat zápornému číslu d. Jestliže $d \geq 0$, rovnice má kořeny $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Při **řešení kvadratické rovnice** $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R,\ a \neq 0$ využijeme vzorce.

1. Nejdříve vypočteme **diskriminant**: $D = b^2 - 4ac$.
2. Následně jsou tři možnosti:
   a. Je-li $D < 0$, rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.
   b. Je-li $D = 0$, pak má jeden dvojnásobný reálný kořen $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
   c. Je-li $D > 0$, pak má rovnice dva různé reálné kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Je-li kořen x_1 kvadratické rovnice, pak výraz $(x - x_1)$ se nazývá **kořenový činitel** a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ je **rozklad kvadratického trojčlenu** na součin kořenových činitelů.

Jsou-li kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, resp. $x^2 + px + q = 0$ (rovnice v normovaném tvaru), pak pro kořeny platí **Viètovy vzorce**:

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, resp. $x_1 \cdot x_2 = q$ a $x_1 + x_2 = -p$.

Grafické řešení kvadratické rovnice

Rovnici $x^2 + px + q = 0$ upravíme na ekvivalentní rovnici $x^2 = -px - q$. Víme, že grafem funkce $y = x^2$ je parabola a grafem funkce $y = -px - q$ je přímka, která není rovnoběžná s osou *y*. Podle vzájemné polohy přímky a paraboly mohou nastat tyto tři případy:

a) přímka a parabola mají dva společné body; rovnice $x^2 + px + q = 0$ má dva různé kořeny,
b) přímka se paraboly dotýká; rovnice má jediný kořen,
c) přímka a parabola nemají žádný společný bod; rovnice nemá žádný kořen.

V praktické části diplomové práce jsou kvadratické rovnice například v deskové hře *Bludiště*, v karetní hře *Černý Petr* a také v aktivitě *Bingo*.

2.4.3.2 Kvadratické nerovnice

Nerovnice $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ se nazývají **kvadratické nerovnice** (s neznámou *x*).

Přehled řešení kvadratických nerovnic:

- Pokud má kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ $(a > 0)$ kladný diskriminant $D = b^2 - 4ac$, a tedy dva různé kořeny $\{x_1; x_2\}$, *kde* $x_1 < x_2$, tak je množinou všech řešení nerovnice $ax^2 + bx + c < 0$ interval $(x_1;\ x_2)$. Pro nerovnici $ax^2 + bx + c > 0$ je řešením sjednocení intervalů $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.
- Pokud má kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ $(a > 0)$ diskriminant $D = b^2 - 4ac$ roven nule, a tedy jeden kořen $\{x_1\}$, tak je řešení nerovnice $ax^2 + bx + c > 0$ množina $R \setminus \{x_1\}$. Nerovnice $ax^2 + bx + c < 0$ nemá řešení.
- Pokud má kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ $(a > 0)$ záporný diskriminant $D = b^2 - 4ac$, a tedy žádné řešení, pak nerovnice $ax^2 + bx + c < 0$ také nemá řešení, ale řešením nerovnice $ax^2 + bx + c > 0$ je množina R.

V praktické části diplomové práce jsou kvadratické nerovnice využity například v aktivitě *Myšlenková mapa* a také v aktivitě *Přiřazování*.

2.4.4 Některé rovnice a nerovnice, které lze převést na kvadratické a lineární

2.4.4.1 Rovnice a nerovnice s neznámou pod odmocninou

Iracionální rovnice jsou rovnice, v nichž se vyskytuje neznámá alespoň jednou pod odmocninou.

Řešit iracionální rovnici znamená upravit ji na rovnici, v níž odmocniny nejsou. Toho dosáhneme **umocňováním**.

Protože umocňování není ekvivalentní úprava, můžeme zajistit platnost kořenů dvojím způsobem:

a) řešíme rovnici a platnost kořenů ověříme **zkouškou**,
b) při každém umocňování stanovíme podmínky pro to, aby rovnice daná a umocněná byly ekvivalentní. Tento způsob užíváme jen u jednoduchých iracionálních rovnic.

Je-li v rovnici více odmocnin, opět jednu osamostatníme a ostatní členy rovnice převedeme (před umocňováním) na druhou stranu. Je zřejmé, že bude třeba postup a umocňování opakovat.

Použití substituce

Substituce znamená nahrazení, kdy se „nová neznámá rovná zmíněnému výrazu“. Můžeme takto řešit některé rovnice a nerovnice. Řešíme tak například bikvadratické rovnice, což jsou rovnice čtvrtého stupně. Pomocí substituce převedeme danou rovnici na rovnici kvadratickou, kterou umíme řešit.

V praktické části diplomové práce jsou substituce použité například v aktivitě *Řady* nebo v deskové hře *Bludiště*.

2.4.4.2 Rovnice a nerovnice s parametry

Rovnice s neznámou x a parametrem d je vlastně najednou zapsané větší množství rovnic, kdy pro různé hodnoty parametru d jde o různé rovnice. Vyřešit rovnici s parametrem znamená, že určíme množiny všech řešení odpovídající jednotlivým hodnotám parametru. Také nerovnice mohou obsahovat parametry.

V praktické části diplomové práce jsou rovnice s parametrem obsaženy v deskové hře *Bludiště* a *Člověče, nezlob se!*.

2.4.5 Nealgebraické rovnice a nerovnice

2.4.5.1 Exponenciální rovnice

Rovnice, které mají neznámou v exponentu mocniny, nazýváme jako **rovnice exponenciální**.

Jejich řešení probíhá ve dvou krocích:

a) rovnici převedeme na základní tvar $a^x = b$, kde $a > 0$, $a \neq 1$
b) základní tvar řešíme
   V převodu na základní tvar užíváme především znalostí o počítání s mocninami, ojediněle pak substituce $a^x = y$
   Při řešení základního tvaru $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ platí:
   pro $b \leq 0$ nemá rovnice řešení
   $b > 0$ řešení má a rozlišujeme dvě možnosti:
   1. a a b z rovnice $a^x = b$ lze převést na **mocniny o stejném základu**. Pak použijeme vlastnost $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
   2. a a b nelze převést na mocniny o stejném základu. Pak použijeme definice logaritmu nebo obě strany rovnice zlogaritmujeme.

Vlastnosti mocnin:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

2.4.5.2 Logaritmické rovnice

Logaritmické rovnice jsou rovnice, které mají neznámou v argumentu logaritmu.

Při řešení logaritmických rovnic používáme nejčastěji:

a) definici logaritmu: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
b) vlastnosti logaritmů:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$
$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

Při řešení logaritmických rovnic se často setkáme s těmito typickými situacemi:

a) obdržíme logaritmickou rovnici v základním tvaru $\log_a x = b, (a > 0, a \neq 1)$ a pro libovolné b má tato rovnice jediné řešení $x = a^b$

b) zadání je složitější a pomocí vlastností logaritmů převedeme na:
   1. základní tvar $\log_a x = b$
   2. základní tvar $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, což platí tehdy a jen tehdy, když $f(x) = g(x)$

c) zadání naznačuje, že by zjednodušení pomocí substituce $\log_a x = y$ nebo $a^{\log x} = y$ převedlo rovnici logaritmickou na rovnici algebraickou, jež by byla snáze řešitelná

2.4.5.3 Goniometrické rovnice

Rovnice, které mají neznámou v argumentu goniometrické funkce, jsou **goniometrické rovnice**.

Základní typy goniometrických rovnic a jejich řešení:

a) Typ $\sin x = a, \cos x = a$, kde $a \in \langle -1,1 \rangle$, $\operatorname{tg} x = b, \operatorname{cotg} x = b.$

Tyto rovnice mají nekonečně mnoho řešení, a proto určíme nejdříve kořeny ležící v základním intervalu. Ten je u sinu a kosinu $\langle 0,2\pi \rangle$ a pak všechna řešení zapíšeme přidáním celého násobku periody T = 2π, u tangens a kotangens určíme kořeny ležící v základním intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$nebo $(0, \pi)$ a opět všechna řešení zapíšeme přičtením celého násobku periody π =*T*.

b) Typ $\sin A(x) = a, \cos A(x) = a$, kde $a \in \langle -1,1 \rangle$, $\operatorname{tg} A(x) = b, \operatorname{cotg} A(x) = b,$ kde je algebraický výraz v proměnné *x*, řešíme substitucí $A(x) = \alpha$

c) Typ obsahující různé mocniny goniometrické funkce stejného argumentu převedeme na algebraickou rovnici

d) Typ obsahující více goniometrických funkcí stejného argumentu, řešíme převedením všech funkcí na jedinou funkci téhož argumentu

e) Typ rovnice anulované, jejíž levou stranu lze rozložit na součin, řešíme tak, že jednotlivé činitele položíme rovny nule a řešíme

V praktické části diplomové práce jsou exponenciální, logaritmické a goniometrické rovnice použité například v deskové hře *Bludiště,* v karetní hře *Kvarteto* a dále v aktivitě *Přiřazování*.

Výše uvedený přehled druhů a typů rovnic a metod jejich řešení je východiskem pro praktickou část mé diplomové práce. V ní jsou uvedené nejen hry, zaměřené na nácvik procedurálního řešení, ale rovněž na procvičení základních pojmů, které se k tématu rovnic váží. Deskové hry v sobě obsahují jak úlohy početní, tak teoretické otázky, aby si žáci uvědomovali souvislosti. Některé hry a aktivity jsem zaměřila naopak více na opakování teoretických pojmů a vztahů, například *Kvarteto, Domino, Pexeso, Přiřazování*. Pro závěrečné shrnutí tématu je vhodné použít *Myšlenkovou mapu*, kterou může učitel uvádět již na začátku probíraného tématu a postupně ji dotvářet.

2.5 Hra v matematice

„Matematika může mít i ráz hry; neměla by být drezurou, ale tvořivou prací."

(Hejný a Kuřina, 2009, s.196)

Borkovcová (2009) se snaží svým tvrzením, že si díky hrám v matematice žáci rozvíjí logické myšlení a uvažování, vyvrátit mnoha učitelům matematiky myšlenku, že hry v matematice jsou pouhou ztrátu času. Z tohoto tvrzení vyplývá, že hra žákům napomáhá k tomu, aby rychleji pochopili novou látku. Podle Krejčové a Volfové (2001) mají hry v matematice mnoho pozitivních účinků. Níže uvádím některé přednosti, které autorky zmiňují.

- Hlubší proniknutí do matematiky a zjištění, že matematika může být i krásná věda.
- Hra kladně ovlivňuje klima třídy, kdy pomáhá nejen ke sbližování učitele s žáky, ale také ke sbližování žáků mezi sebou.
- Hra učí žáky přemýšlet, logicky a kriticky uvažovat. Díky hře si žáci zlepšují své taktické a strategické uvažování, které je pro ně důležité i v běžném životě. Hra také žákům pomáhá zlepšovat koncentraci a pozornost.

- Díky tomu, že hra obsahuje prvky soutěživosti a napětí a skýtá v sobě i moment překvapení a jistou míru náhody, tak v ní mohou zažít úspěch i žáci, kteří mají pro matematiku slabší nadání. (Krejčová a Volfová, 2001)

Dle Kožuchové a Korčákové (1997) je vhodné hry v matematice dělit na základě fází edukačního procesu: *motivační hry, hry k získávání nových znalostí a zkušeností, hry k upevňování znalostí.* (Kožuchová, Korčáková, 1997)

3 Navrhované aktivity a didaktické hry

Aktivity a hry na téma rovnice a nerovnice jsem tvořila tak, aby byly vhodné jak pro základní, tak pro střední školy, kdy učitelé mohou tyto hry využívat, obměňovat zadání nebo se jimi pouze inspirovat a využít obdobné hry i pro jiná témata ve výuce matematiky. Roztřídila jsem je do třech skupin – deskové hry, karetní hry a ostatní aktivity a hry.

Strukturu didaktických her jsem se rozhodla dodržovat podle Jankovcové (1989), která ji uspořádala takto:

a) *Název hry (autor nebo původ, doba vzniku)*
b) *Potřebné pomůcky a případné nároky na úpravu (vybavení) prostředí*
c) *Stručná, výstižná, srozumitelná a jednoznačná pravidla obsahující cíl hry a způsob jejího ukončení*
d) *Pedagogický cíl a podrobné instrukce pro učitele*
e) *Promyšlený a co nejobjektivnější způsob hodnocení výsledků, resp. průběhu (pokud to již jednoznačně nevyplývá z pravidel)*
f) *Varianty či možné modifikace hry a s tím spojené změny hodnocení*
g) *Zvláštní poznámky*
h) *Hlavní námět pro diskusi se žáky, opěrné body pro její usměrňování a zasazení do rámce teoretického učiva* (Jankovcová, Průcha a Koudela, 1989)

Obdobnou strukturu uvádí také968Vališová v Pedagogice pro učitele (2007).

V praktické části své diplomové práce popisuji strukturu dané didaktické hry nejprve obecně, tedy uvádím její název, potřebné pomůcky, pravidla této hry, její hodnocení, možné modifikace a zvláštní poznámky. Pedagogické cíle, tedy bod d), uvádím až u vlastních návrhů didaktických her. Bod zaměřující se na diskuzi jsem se rozhodla vynechat, ale pokud je někde diskuze vhodná, tak jsem ji zmínila.

Pravidla navrhovaných aktivit a her jsou všeobecně známá (například *Člověče, nezlob se!)* nebo dohledatelná v knihách či na internetu. Některé hry jsem zvyklá užívat ve svém druhém oboru, tedy o společenských vědách, kdy se osvědčilo při výuce aplikovat *Myšlenkové mapy* a *Přiřazování*. Dále jsem se inspirovala knihou Didaktické hry v matematice (Krejčová, Volfová, 2001), kde nalezneme například aktivitu *Bludiště* a *Domino*.

U každé aktivity je nejprve uvedena její obecná struktura, dále pak tabulka, kde je napsán přesný název aktivity, její zařazení, obtížnost (1 – nejlehčí, 5 – nejtěžší), časová náročnost a pedagogické cíle. Obtížnost a časová náročnost je pouze orientační, v praxi se může lišit a bude se odvíjet od znalostí studentů. Návrh aktivity obsahuje potřebné hrací plány, materiály k vytisknutí, karty k rozstříhání, zadání početních i slovních úloh. Následně uvádím řešení navržené aktivity a zdroje úloh. Doporučuji hrací karty tisknout na tvrdý papír. Díky tomu neprosvítají a lépe se s nimi pracuje. Pokud mají učitelé možnost, tak doporučuji karty zalaminovat, aby je žáci nepomačkali.

3.1 Deskové hry

3.1.1 Bludiště

Potřeby: Hrací plocha (plán s legendou), šestistěnná kostka, figurka pro každého hráče

Počet žáků ve skupině: 2 – 3

Časová náročnost: 20 – 30 minut

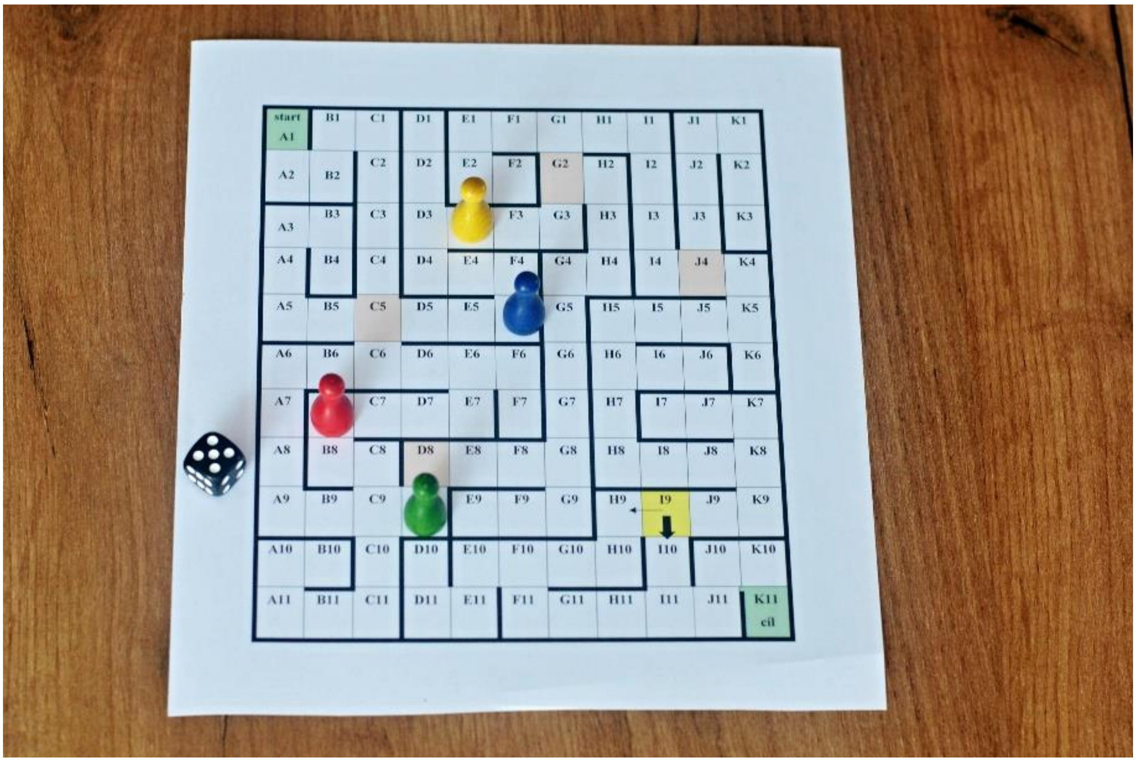
Pravidla hry: Hráči se postupně střídají po směru hodinových ručiček. Hra začíná na políčku START, hráč hodí kostkou a číslo, které padne, udává počet políček, o které se figurka posune. Přečte si úkol a splní ho (případně odpoví na otázku nebo vypočítá příklad). Pokud ho nesplní, nebo odpoví špatně, nemůže se posunout. V této hře jsou i cesty, které jsou slepé, pokud se hráč vydá špatnou cestou, musí se vrátit zpět na záchytná pole (pole bez otázky, označena jinou barvou). Hra končí tehdy, když se jeden hráč dostane až na políčko CÍL (nebo za něj).

Hodnocení: Protože je to poměrně náročná hra, je vhodné, aby vítězové byli nějak oceněni. Může to být například jednička za aktivitu, případně nějaký plusový bod, což je pro žáky další vnější motivací. Záleží na učiteli, jak je se studenty domluvený. Důležité je také to, aby ze strany učitele probíhala kontrola plnění úkolů žáky.

Poznámky: Tuto hru bych osobně použila jako hodinu pro zpestření, například jako volnější hodinu před Vánocemi nebo na konci školního roku pro opakování učiva.

Název:	**Bludiště – Opakování rovnic a nerovnic**
Zařazení hry:	Deskové hry – Bludiště
Obtížnost:	1 – 2 – 3 – 4 – **5**
Časová náročnost:	20 – 30 minut
Cíle:	• Žák identifikuje jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák definuje vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic. • Žák řeší pamětně jednoduché rovnice. • Žák rozkládá kvadratické trojčleny. • Žák určuje nulové body. • Žák umí řešit jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák užívá substituci k řešení rovnic a nerovnic. • Žák řeší soustavy rovnic a nerovnic dosazovací i sčítací metodou. • Žák řeší slovní úlohy pomocí rovnic.

Ukázka hry:



Obrázek 1: Bludiště

Příloha A: Materiály k vytisknutí obsahují hrací plán, zadání úloh a jejich řešení

3.1.2 Člověče, nezlob se!

Potřeby: Hrací plocha, šestistěnná kostka, 4 stejné figurky pro každého hráče

Počet žáků ve skupině: 2 – 4

Časová náročnost: 20 – 30 minut

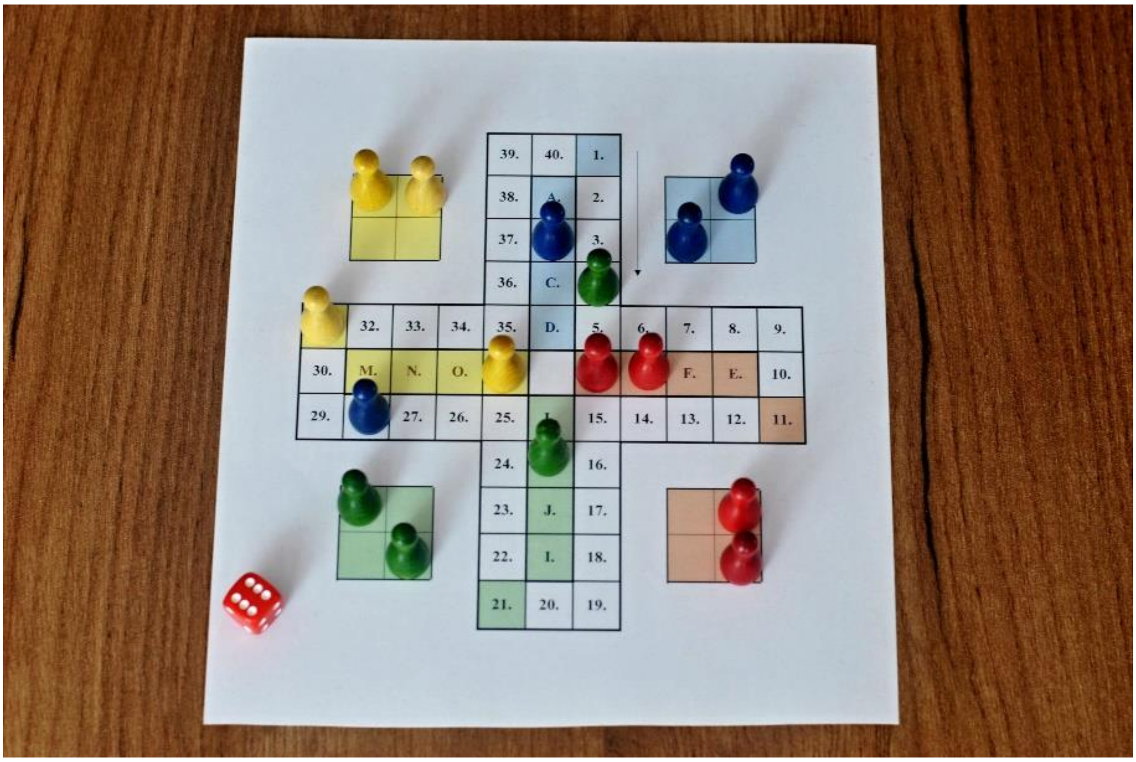
Pravidla hry: Na začátku hry si každý hráč své figurky stejné barvy umístí na osamocená pole (k jeho barvě). Začínající hráč hází kostkou (pokud není žádná jeho figurka na cestě po hracím plánu, může házet třikrát). Pokud padne šestka, posune jednu figurku na začátek své cesty a hází znovu. Číslo, které padne, udává počet políček, o které se figurka posune. Pokud padne šestka, může hráč házet ještě jednou. Po hodu kostkou posune figurku o daný počet políček (po směru hodinových ručiček). Na poli, kde se zastaví, musí správně zodpovědět otázku (resp. vyřešit početní úlohu). Pokud odpoví špatně, vrátí se na předchozí pozici. Pokud nastane situace, že je políčko již obsazené, ale žák vyřeší daný úkol správně, tak musí být předchozí figurka posunuta zpět na začátek. Po ukončení tahu pokračuje další hráč sedící po levé straně. Cílem je přemístit všechny své figurky z původního stanoviště do „domečku“ s odpovídající barvou.

Hodnocení: Je důležité, aby vyučující hráče hlídal, že skutečně plní dané úkoly. Protože je hra poměrně náročná, neměl by učitel zapomenout vyhlásit vítěze v jednotlivých skupinách a ocenit je dle jejich domluvy.

Poznámky: K hracímu plánu můžeme mít připravených více legend s různými úkoly, příklady. Tyto legendy můžeme užívat jak pro Bludiště, tak pro hru Člověče, nezlob se! Tuto hru bych osobně použila jako hodinu pro zpestření, například jako volnější hodinu před Vánocemi nebo na konci školního roku pro opakování učiva.

Název:	**Člověče, nezlob se! – Opakování rovnic a nerovnic**
Zařazení hry:	Deskové hry – Člověče, nezlob se!
Obtížnost:	1 – 2 – 3 – 4 – **5**
Časová náročnost:	20 – 30 minut
Cíle:	• Žák identifikuje jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák definuje vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic. • Žák řeší pamětně jednoduché rovnice. • Žák rozkládá kvadratické trojčleny. • Žák určuje nulové body. • Žák umí řešit jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák užívá substituci k řešení rovnic a nerovnic. • Žák řeší soustavy rovnic a nerovnic dosazovací i sčítací metodou.

Ukázka hry:



Obrázek 2: Člověče, nezlob se!

Příloha B: Materiály k vytisknutí obsahují hrací plán, zadání úloh a jejich řešení

3.2 Karetní hry

3.2.1 Černý Petr

Potřeby: Hrací karty

Počet žáků ve skupině: 3 – 5

Časová náročnost: 10 – 15 minut

Pravidla hry: Karty se rovnoměrně rozdají mezi hráče. Hra probíhá po směru hodinových ručiček. Nejprve si každý hráč zkontroluje, zda již nemá nějaké dvojice karet, které patří k sobě. Tyto dvojice k sobě přiřadí a položí na stůl. První hraje hráč s nejmenším počtem karet (nebo určený), tahá od druhého hráče jednu libovolnou kartu. Zkontroluje si, zda nevytvoří novou dvojici, kterou by mohl dát stranou. Potom hraje další hráč (ten, kterému byla odebrána karta). Hra pokračuje, dokud nezbude pouze jedna karta, která nemá dvojici, tedy černý Petr. Cílem je získat co nejvíce dvojic a zároveň neskončit s Černým Petrem v ruce.

Hodnocení: Zvítězit mohou i slabší žáci (především pokud dvojice označíme například stejnými symboly), protože hra je nejen o znalostech, ale také o náhodě.

Poznámky: Čím více žáků ve skupině je, tím je hra delší, protože je menší pravděpodobnost, že se dvojice sejdou u jednoho hráče. Zároveň zde velkou roli hraje náhoda, proto se může čas hry prodloužit nebo zkrátit (různě u různých družstev). Je také na zvážení učitele, zda dvojice stejně označí, aby každý dvojici poznal, nebo karty značit nebude, a tedy o to více se hráči musí soustředit. Mohlo by se totiž stát, že hráč dvojici karet nepozná, nechá karty stále ve hře kolovat a o to déle hra trvá. Označené karty bych využila například pro Černého Petra s početními úlohami. Na jedné kartě by bylo zadání a na kartě druhé výsledek, ale aby tuto dvojici si mohl hráč nechat, musel by danou početní úlohu vyřešit a získat správný výsledek.

Název:	**Černý Petr – Řešení kvadratických rovnic**
Zařazení hry:	Karetní hry – Černý Petr
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	10 – 15 minut
Cíle:	• Žák definuje vzorce potřebné k řešení kvadratických rovnic. • Žák určuje podmínky k řešení kvadratických rovnic. • Žák umí řešit kvadratické rovnice. • Žák zná graf kvadratické funkce.

Ukázka hry:

Obrázek 3: Černý Petr

Příloha C: Materiály k vytisknutí obsahují hrací karty

Název:	**Černý Petr – Co jsou to rovnice**
Zařazení hry:	Karetní hry – Černý Petr
Obtížnost:	**1** – 2 – 3 – 4 – 5
Časová náročnost:	10 – 15 minut
Cíle:	• Žák rozlišuje rovnost a nerovnost. • Žák umí popsat rovnici. • Žák zná vlastnosti rovnice.

Ukázka hry:

Obrázek 4: Černý Petr

Příloha C: Materiály k vytisknutí obsahují hrací karty

3.2.2 Domino

Potřeby: Hrací karty

Počet žáků ve skupině: 1 – 3

Časová náročnost: 5 – 15 minut

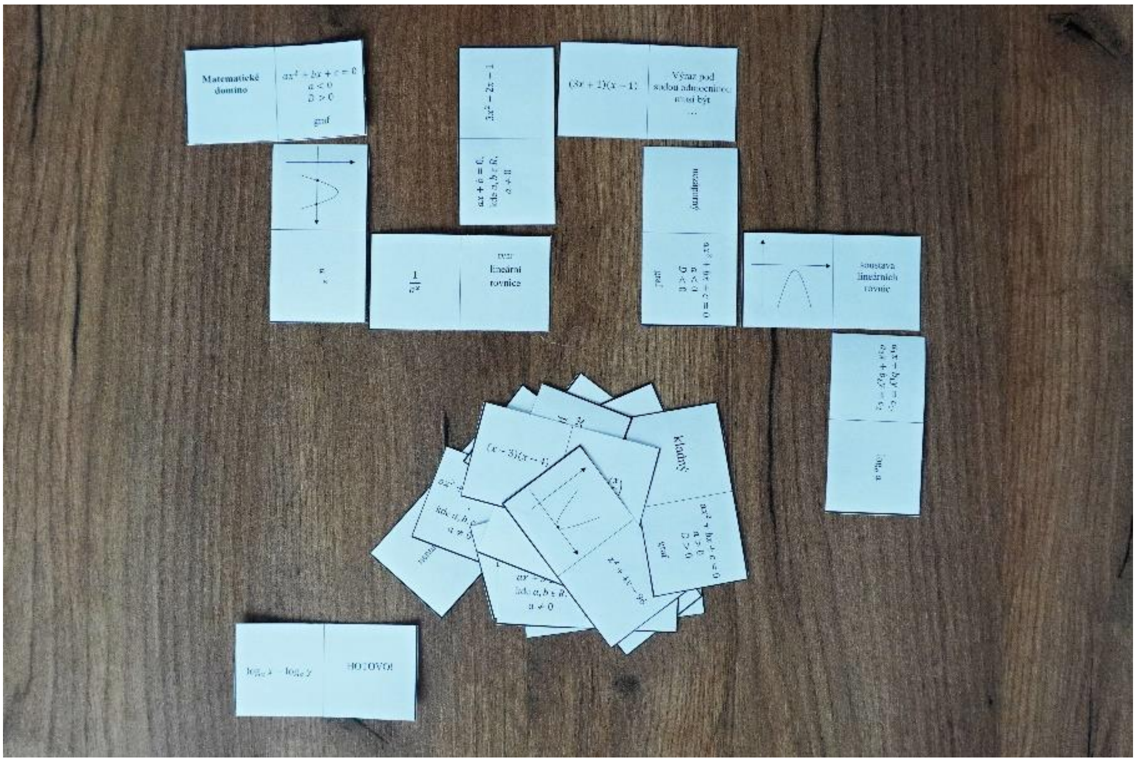
Pravidla hry: Cílem je poskládat hrací karty ve správném pořadí v co nejkratším čase. Na začátku hry je třeba stanovit si počáteční podmínky (např. všechny karty obrázkem dolů). Soutěžit se může ve skupinách nebo individuálně. Přitom se přikládají dvojice tak, aby odpovídající přiložené části k sobě patřily (dávaly dohromady příklad a řešení). Je důležité si uvědomit odlišnosti od tradiční dětské hry domino. Je zde pouze jedna možnost přiložení karty a cílem je ve skupině poskládat všechny karty za sebe – vítězí celá skupina, ne pouze jeden hráč.

Hodnocení: Kontrola a vysvětlení jednotlivých karet. Vyhlášení nejrychlejšího žáka.

Poznámky: Pokud by chtěl učitel do domina zařadit i početní úlohy, měl by si dát pozor, aby výsledky byly zcela rozdílné a nemohlo tak dojít k záměně karet.

Název:	**Domino – Teorie rovnic a nerovnic**
Zařazení hry:	Karetní hry – Domino
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 15 minut
Cíle:	• Žák definuje vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic. • Žák umí řešit kvadratické rovnice. • Žák zná graf kvadratické funkce. • Žák užívá pravidla pro počítání s logaritmy, mocninami a goniometrickými funkcemi.

Ukázka hry:



Obrázek 5: Domino

Příloha D: Materiály k vytisknutí obsahují hrací karty

3.2.3 Kvarteto

Potřeby: Hrací karty

Počet žáků ve skupině: 3 – 5

Časová náročnost: 10 – 15 minut

Pravidla hry: Karty vždy tvoří k sobě patřící čtveřice. Nejprve se po jedné rozdají všechny karty hráčům. Hráč, který začíná, si vybere libovolného spoluhráče a ptá se ho, zda má určitou kartu. Pokud ji spoluhráč má, odevzdá ji začínajícímu a ten se ptá libovolně znova, ale pokud danou kartu spoluhráč nemá, pokračuje stejným způsobem on. Hráč se smí ptát pouze na karty kvarteta, z kterého má alespoň jednu kartu v ruce. Pokud kterýkoli z hráčů složí kvarteto, položí všechny čtyři karty na stůl. Vyhrává žák s nejvyšším počtem kvartet.

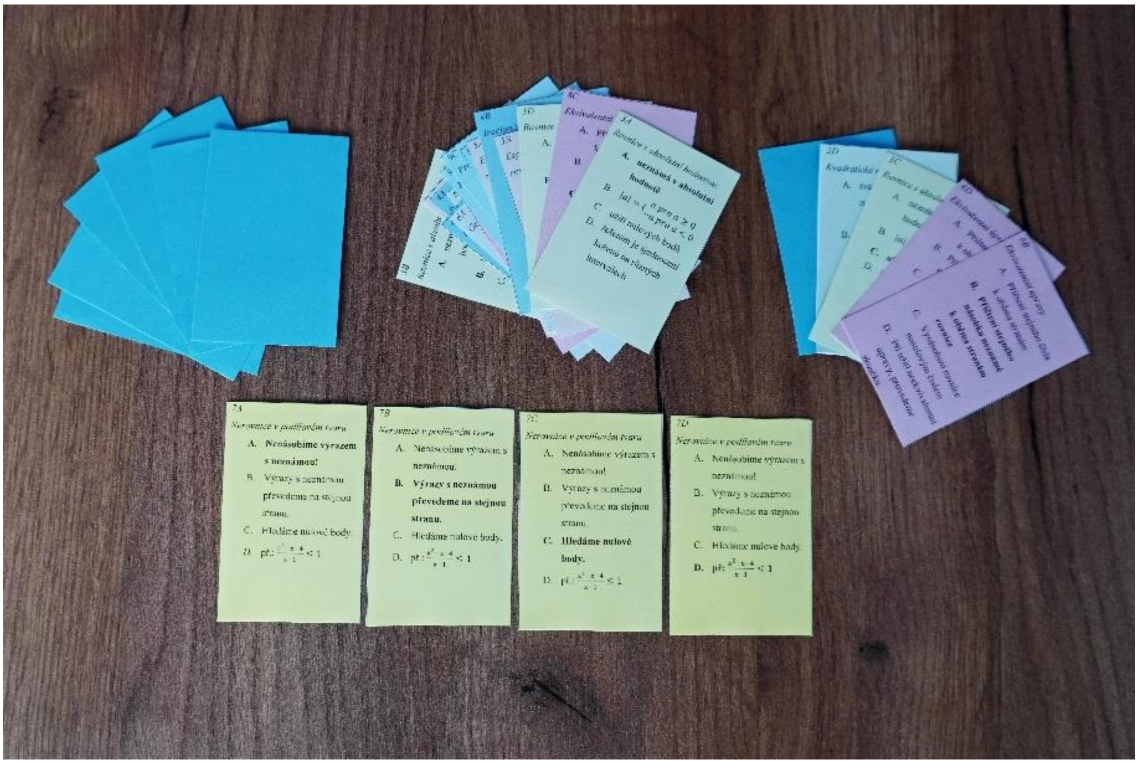
Hodnocení: Taktická hra, je tedy důležité sledování jejího průběhu a pamatování si přesunů karet. Budou mít výhodu žáci s dobrou pamětí. Po ukončení aktivity zjistíme výherce v jednotlivých skupinách. Následně si mohou před třídou zahrát nejlepší hráči, kdo zvítězí v tomto finále, je tedy absolutním vítězem.

Modifikace aktivity: Tyto karty lze využít pro skládání čtveřic (která skupina čtveřice vytvoří rychleji). Karty mohou také sloužit pro vytvoření čtyřčlenných skupin (každému žákovi rozdám jednu kartu, žáci, kteří vlastní karty patřící k sobě, se musí najít). Tyto skupiny mohou být náhodně, nebo předem promyšlené.

Poznámky: Během hry je pro účastníky snazší a pro hru rychlejší, aby se ptali ostatních pouze na číslo karty (např. 2A, 7D). Aby matematika v této hře neztrácela na významu, tak je důležité, aby každý hráč po získání celého kvarteta přečetl celá znění karet. Jakmile skupina hru ukončí, hráči si kvarteta ponechají a vypočítají příklad, který je na jejich kartách uveden nebo vymyslí příklad, na kterém aplikují teorii uvedenou na jeho kartách. Následuje diskuze, kdy každý žák řekne svá kvarteta a vypočítaný nebo navržený příklad. Pokud někteří hráči nezískají ani jedno kvarteto, tak by jim měl učitel zadat příklady, které následně také shrnou v diskusi.

Název:	**Kvarteto – Shrnutí rovnic a nerovnic**
Zařazení hry:	Karetní hry – Kvarteto
Obtížnost:	1 – **2** – 3 – 4 – 5
Časová náročnost:	10 – 15 minut
Cíle:	• Žák identifikuje jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák definuje vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic. • Žák umí řešit jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák zná pravidla pro počítání s logaritmy, mocninami a goniometrickými funkcemi. • Žák definuje ekvivalentní úpravy.

Ukázka hry:



Obrázek 6: Kvarteto

Příloha E: Materiály k vytisknutí obsahují hrací karty

3.2.4 Pexeso

Potřeby: Karty

Počet žáků ve skupině: 2 – 3

Časová náročnost: 10 – 15 minut

Pravidla hry: Na začátku hry jsou všechny karty rozmístěny na stole obrázky (textem) dolů. Hráči se postupně střídají, kdy v jednom tahu hráč otočí dvě karty pexesa. Pokud karty tvoří k sobě správnou dvojici, vezme si je a otáčí další dvě. Pokud dvojici netvoří, vrátí je obrázkem dolů na jejich původní místo a hraje další hráč. Cílem je nasbírat co největší počet kartiček. Hra končí otočením všech karet.

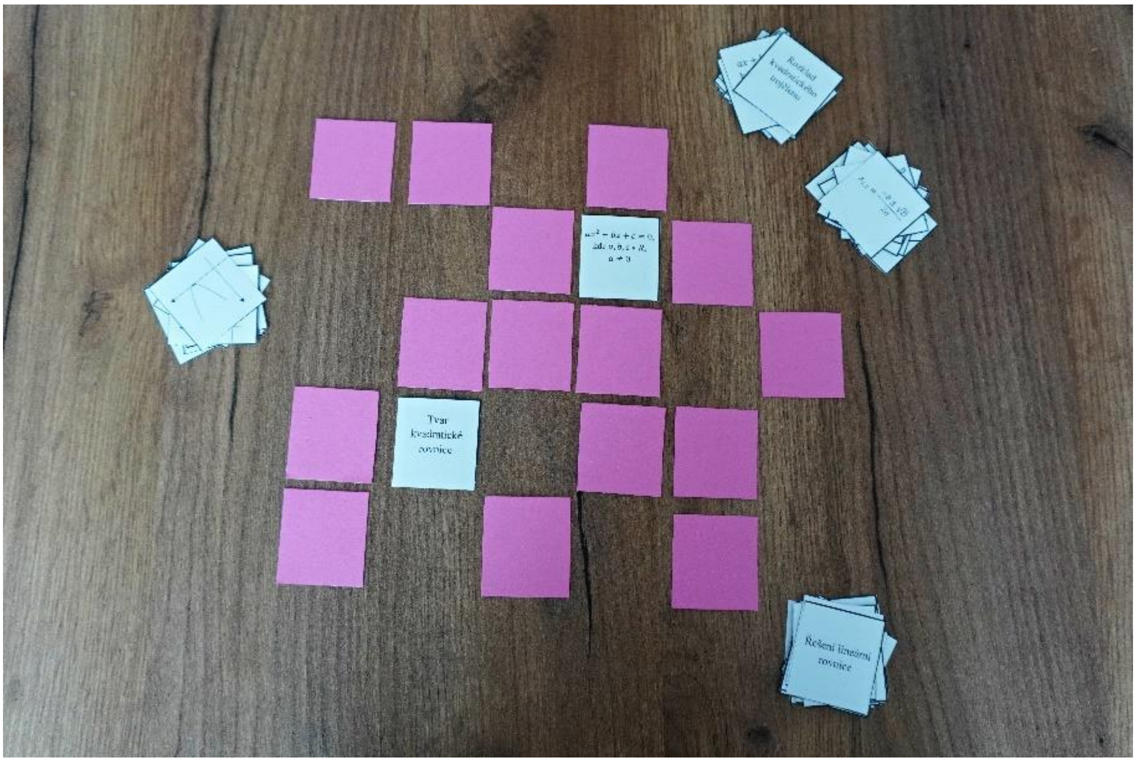
Hodnocení: Žáci soutěží ve skupinách, můžeme tedy vyhlásit vždy výherce v jednotlivých skupinách. Učitel by měl zkontrolovat dvojice, případně u některých dvojic požadovat vysvětlení.

Modifikace aktivity: Druhá varianta této hry je určena pro celou třídu. Na začátku hry se rozdají jednotlivé karty pexesa po třídě (každému studentovi jedna karta). Cílem je v tichosti najít spolužáka, který má druhou kartu ze dvojice. Na závěr dohromady všichni zkontrolují, zda jsou všechny dvojice správné (i se zdůvodněním). Kladným prvkem této aktivity je i pohyb, který aktivizuje žáky při hodině.

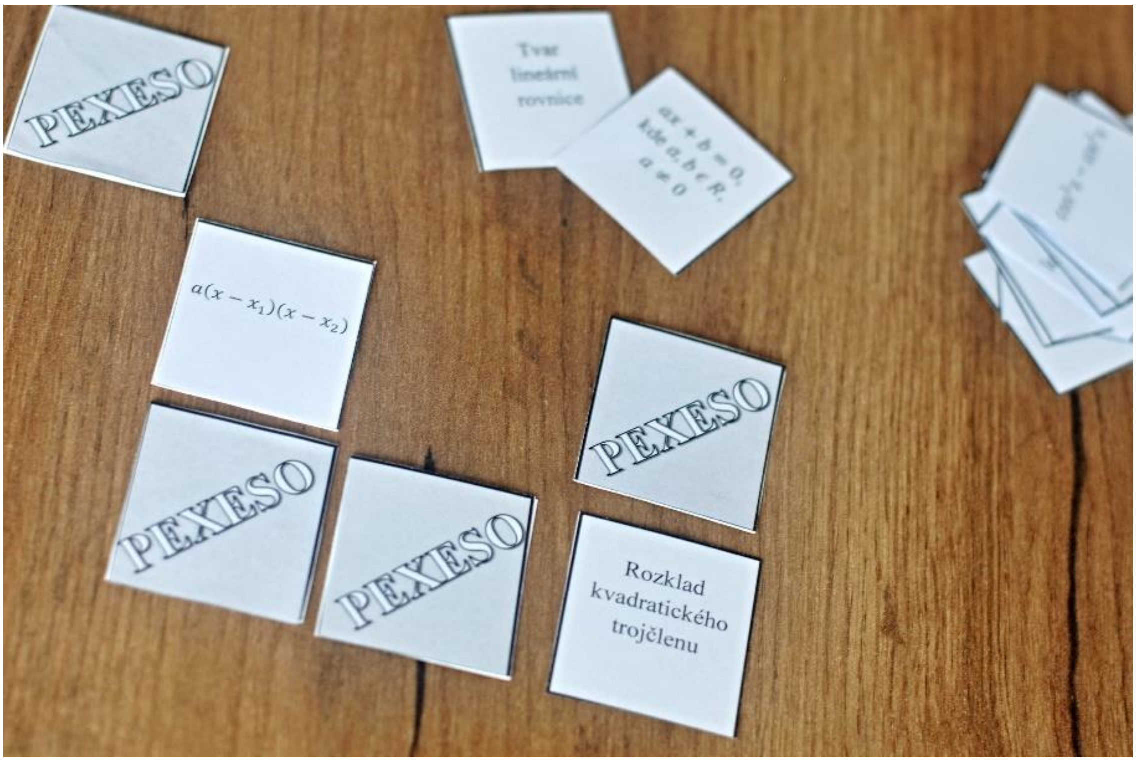
Poznámky: Jako karty pexesa můžeme použít i dvojice karet z jiných her. Počet karet ve hře můžeme přizpůsobit situaci v hodině.

Název:	**Pexeso – Vlastnosti rovnic a nerovnic**
Zařazení hry:	Karetní hry – Pexeso
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	10 – 15 minut
Cíle:	• Žák definuje vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic. • Žák umí řešit kvadratické rovnice. • Žák zná graf kvadratické funkce. • Žák užívá pravidla pro počítání s logaritmy, mocninami a goniometrickými funkcemi.

Ukázka hry:



Obrázek 7: Pexeso



Obrázek 8: Pexeso

Příloha F: Materiály k vytisknutí obsahují hrací karty

3.3 Ostatní hry a aktivity

3.3.1 Bingo

Potřeby: Tabulka se zadáním

Počet žáků ve skupině: 1 – 2

Časová náročnost: 5 – 10 minut

Pravidla: Vytvoříme si síť čtverečků, například 4x4. Do těchto políček zapíšeme dané číselné hodnoty, které se nesmí opakovat. Po této přípravě následuje hra. Každý sleduje svoji síť a organizátor losuje čísla, v našem případě má učitel předem připravené pořadí, jak bude číst zadání. Vždy číslo přečte nahlas, a pokud ho studenti najdou v tabulce, škrtnou si ho. Kdo jako první vyškrtá pole pro celý řádek, sloupec, či úhlopříčku, tak zakřičí "Bingo" a hra končí.

Hodnocení: Tuto hru bych užila na začátku hodiny na rozehřátí, pro vítěze bych zvolila alespoň nějaký plusový bod či nějaké ohodnocení za aktivitu. Takovéto hodnocení by mělo být domluveno předem, aby nemohly nastat problémy, pokud by učitel nějakou aktivitu hodnotil jinak než aktivitu jinou.

Modifikace aktivity: Učitel může připravit více verzí, aby žáci nemohli vzájemně „opisovat“ (kroužkovat stejná políčka). Aby byla hra pro všechny fér, měl by si učitel dát při sestavování tabulky pozor na to, aby všechny verze při správném řešení, získali Bingo ve stejný čas.

Název:	**Bingo – Kvadratický trojčlen**
Zařazení hry:	Ostatní hry a aktivity – Bingo
Obtížnost:	1 – **2** – 3 – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 10 minut
Cíle:	• Žák definuje kvadratický trojčlen. • Žák umí pamětně rozložit kvadratický trojčlen.

Ukázka:

$\boldsymbol{(x+11)(x-12)}$	$\boldsymbol{(x+6)(x+21)}$	$\boldsymbol{(x+1)(x+42)}$	$\boldsymbol{(x+2)(x+5)}$
$\boldsymbol{(x-2)(x+4)}$	$\boldsymbol{(x-1)(x+2)}$	$(8-x)(x+1)$	$\boldsymbol{(4x-5)(4x+5)}$
$\boldsymbol{(2x-5)(3-x)}$	$\boldsymbol{(x-3)^2}$	$(x-5)^2$	$4(x-6)(x+9)$
$(x+2)(x-11)$	$\boldsymbol{(x-3)(x-2)}$	$(x-1)(x+11)$	$\boldsymbol{(x-6)(x-5)}$

Příloha G: Materiály k vytisknutí obsahují zadání a řešení úloh

3.3.2 Hadi

Potřeby: Papír se zadáním, psací potřeby

Počet žáků ve skupině: 1 – 2

Časová náročnost: 5 – 10 minut

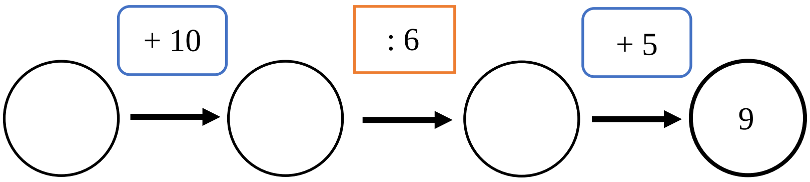
Pravidla: Žáci řeší zadanou úlohu samostatně nebo ve dvojicích.

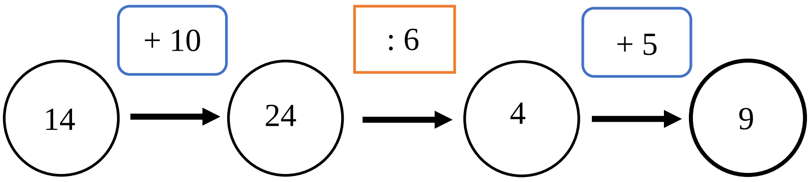
Hodnocení: Nejrychlejší žák získá plusový bod. Nutné je zkontrolovat správnost řešení.

Název:	**Hadi – Lineární rovnice**
Zařazení hry:	Ostatní hry a aktivity – Hadi
Obtížnost:	1 – **2** – 3 – 4 – 5
Časová náročnost:	10 – 15 minut
Cíle:	• Žák řeší lineární rovnice. • Žák správně aplikuje matematické operace.

Ukázka:

Vyřeš hady. Hady zapiš jako rovnice a vyřeš je.





$$\frac{x+10}{6}+5=9$$

$$x=14$$

Příloha H: Materiály k vytisknutí obsahují zadání a řešení úloh

3.3.3 Historické úlohy

Potřeby: Prázdný papír, psací potřeby

Počet žáků ve skupině: 1 – 2

Časová náročnost: 5 – 10 minut

Pravidla: Žáci řeší zadanou úlohu samostatně nebo ve dvojicích

Hodnocení: Nejrychlejší žák získá plusový bod. Učitel musí zkontrolovat správnost řešení.

Modifikace aktivity: Učitel může mít připravenou pouze jednu úlohu pro celou třídu nebo také takových úloh víc a práci tvoří žáci ve skupinách. Je zde také možnost, aby tyto historické úlohy přichystali na hodinu žáci sami. Každý týden bude mít jeden žák připravenou jednu úlohu, ke které bude mít také řešení. Samozřejmě tento úkol může konzultovat s učitelem.

Poznámky: Aby byla aktivita ještě zajímavější, můžeme také zvolit originální podání příkladu, například ho přinést na opáleném papíru, nebo napsaný na velkém kameni, fantazii se meze nekladu a žáky to bude o to více bavit.

Název:	**Historické úlohy – Úloha z hliněné destičky**
Zařazení hry:	Ostatní hry a aktivity – Historické úlohy
Obtížnost:	1 – **2** – 3 – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 10 minut
Cíle:	• Žák řeší slovní úlohy pomocí rovnic. • Žák užívá vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic.

Ukázka:

Plocha A vytvořená součtem dvou čtverců je rovna 1000. Strana jednoho čtverce je rovna dvěma třetinám strany druhého zmenšeným o 10. Jak jsou velké strany čtverce?

Příloha I: Materiály k vytisknutí obsahují zadání a řešení úloh

Název:	**Historické úlohy – Matematika v devíti knihách**
Zařazení hry:	Ostatní hry a aktivity – Historické úlohy
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 10 minut
Cíle:	• Žák řeší slovní úlohy pomocí rovnic. • Žák užívá vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic.

Ukázka:

Dva lidé A, B obdrželi určitý počet mincí, který se má mezi ně rozdělit tak, že když k mincím A přidáme polovinu mincí B nebo k mincím B přidáme dvě třetiny mincí A, v obou případech dostaneme 48. Kolik mincí obdržel každý z lidí A, B?

Příloha I: Materiály k vytisknutí obsahují zadání a řešení úloh

3.3.4 Myšlenková mapa

Potřeby: Prázdný papír, psací potřeby

Počet žáků ve skupině: 1 – 4

Časová náročnost: 10 – 15 minut

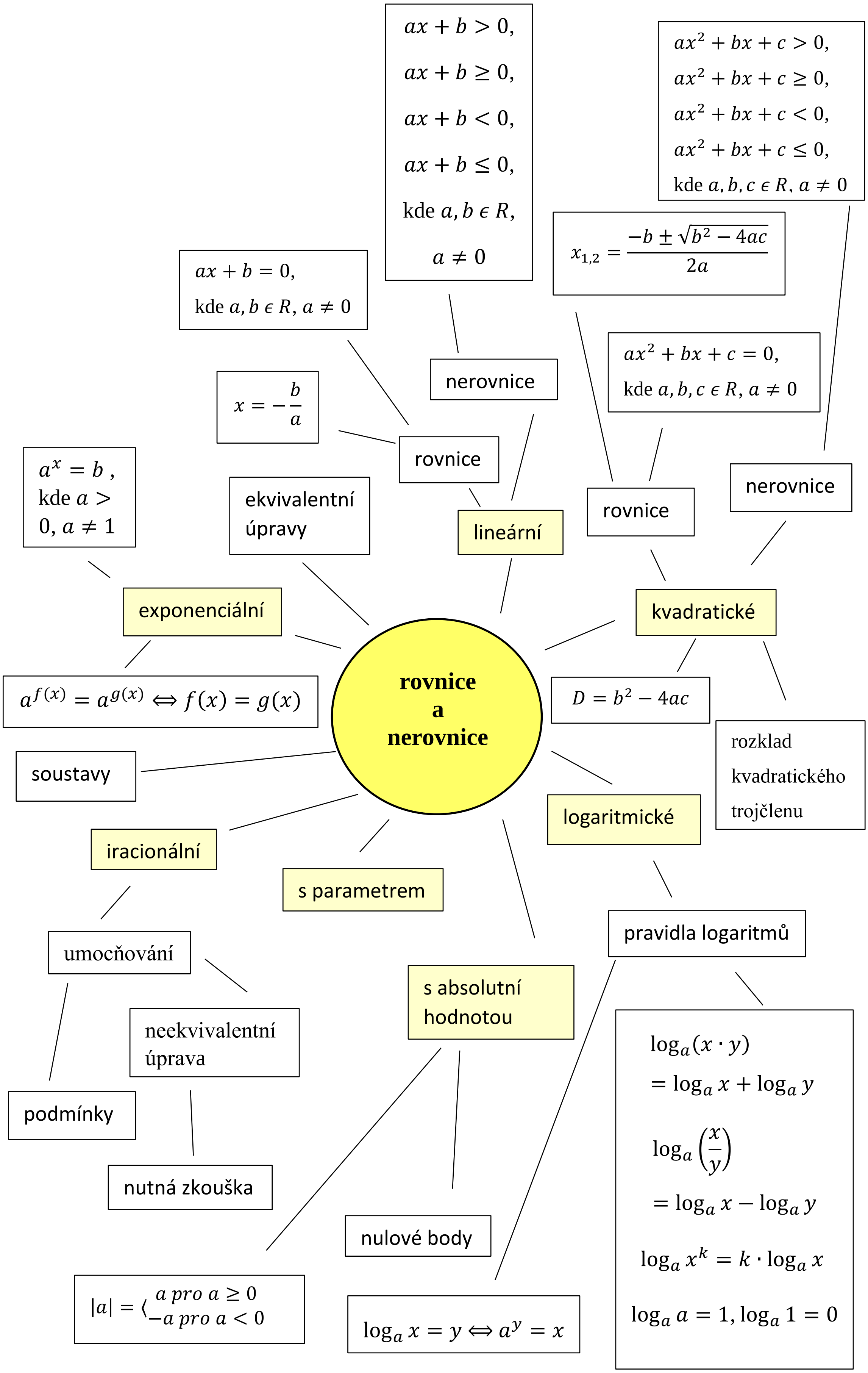
Pravidla: Myšlenková mapa vypadá jako pavouk, který má jedno základní tělo – hlavní slovo. Toto slovo je záchytným bodem, okolo kterého se všechno odvíjí. Tyto další body se mohou větvit stále dál.

Hodnocení: Je na učiteli, zda by dával plusové hodnocení, protože myšlenková mapa může být pro každého jiná. V tomto případě je vhodné ve třídě otevřít diskuzi, kdy si žáci společně zopakují a ujasní pojmy. Učitel zde vidí, jak žáci dané téma pochopili a může tak odhalit miskoncepce a následně provést nápravu.

Modifikace aktivity: Osobně bych tuto aktivitu zvolila vždy na ukončení tématu. Zpočátku jako aktivitu o hodině, následně jako pravidelný domácí úkol, kterým si žáci sami dokážou shrnout probranou látku.

Název:	**Myšlenková mapa – Co vím o rovnicích a nerovnicích?**
Zařazení hry:	Ostatní hry a aktivity – Myšlenková mapa
Obtížnost:	1 – **2** – 3 – 4 – 5
Časová náročnost:	10 – 15 minut
Cíle:	• Žák identifikuje jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák definuje vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic. • Žák rozlišuje algebraické a nealgebraické rovnice a nerovnice. • Žák zná pravidla pro počítání s logaritmy, mocninami a goniometrickými funkcemi. • Žák definuje ekvivalentní úpravy.

Ukázka:


rovnice a nerovnice
lineární
rovnice
$ax + b = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$
$x = -\frac{b}{a}$
nerovnice
$ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$
ekvivalentní úpravy
kvadratické
rovnice
$ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
nerovnice
$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$
$D = b^2 - 4ac$
rozklad kvadratického trojčlenu
exponenciální
$a^x = b$, kde $a > 0$, $a \neq 1$
$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
soustavy
iracionální
umocňování
podmínky
neekvivalentní úprava
nutná zkouška
s parametrem
s absolutní hodnotou
nulové body
$|a| = \begin{cases} a \text{ pro } a \geq 0 \\ -a \text{ pro } a < 0 \end{cases}$
logaritmické
pravidla logaritmů
$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$
$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

3.3.5 Přiřazování

Potřeby: Vytištěné a rozstříhané lístky s pojmy

Počet žáků ve skupině: 1 – 4

Časová náročnost: 5 – 10 minut

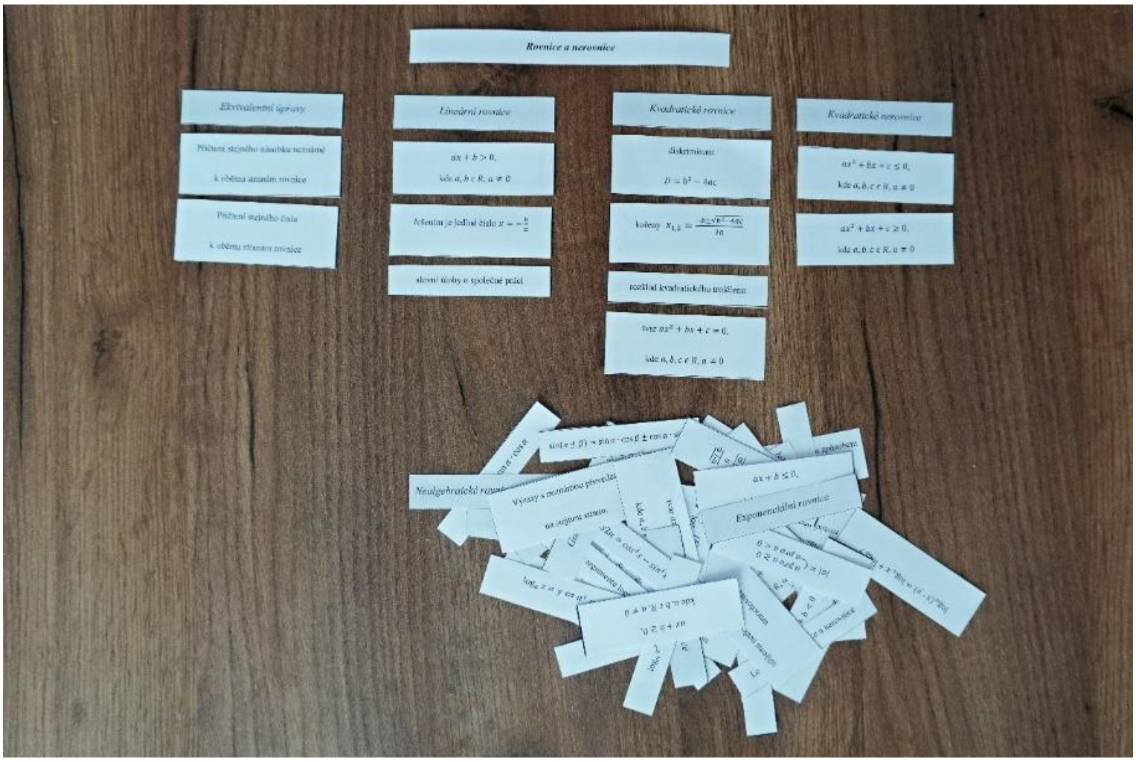
Pravidla: Žáci do skupiny dostanou obálku s lístky. Když mají všichni rozdáno, mohou obálky otevřít a začít pracovat. Je na učiteli, zda žákům prozradí, kolik lístků pod témata patří nebo je nechá pracovat bez jakékoli nápovědy.

Hodnocení: Plusové ohodnocení by měla získat celá skupina, která zvítězila. Mohlo by to být dle někoho nespravedlivé, protože ne všichni žáci ve skupinách jsou aktivní. Je tedy na učiteli, jak to ohlídá.

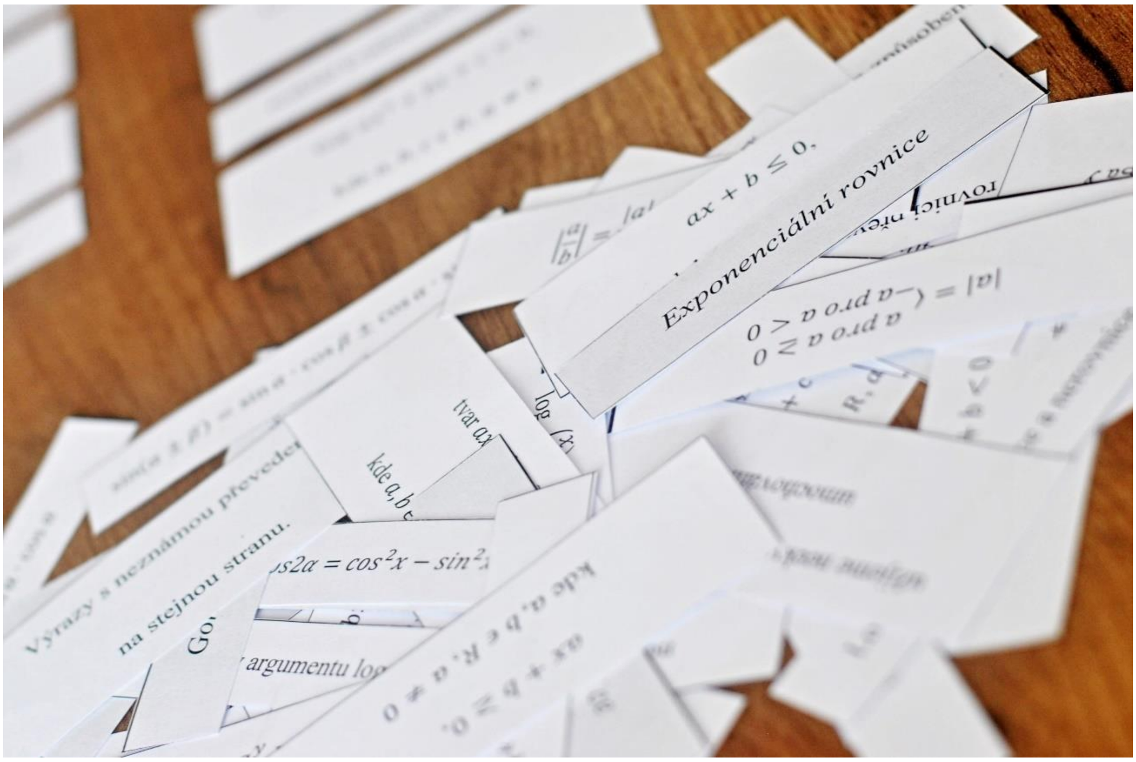
Modifikace aktivity: Tato aktivita může obsahovat takové lístky, které obsahují stejná hesla, jako by žáci použili při tvoření myšlenkové mapy. Je tedy možné tyto aktivity spojit.

Název:	**Přiřazování – Shrnutí rovnic a nerovnic**
Zařazení hry:	Ostatní hry a aktivity – Přiřazování
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 10 minut
Cíle:	• Žák identifikuje jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák definuje vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic. • Žák rozlišuje algebraické a nealgebraické rovnice a nerovnice. • Žák zná pravidla pro počítání s logaritmy, mocninami a goniometrickými funkcemi. • Žák definuje ekvivalentní úpravy.

Ukázka:



Obrázek 9: Přiřazování



Obrázek 10: Přiřazování

Příloha J: Materiály k vytisknutí obsahují zadání a řešení úloh

3.3.6 Puzzle

Potřeby: puzzle, papír, tužka

Počet žáků ve skupině: 9

Časová náročnost: 5 – 15 minut

Pravidla hry: Studenti se rozdělí do skupin a každý obdrží jeden kousek puzzle. Každý hráč plní úkol na svém kousku puzzle. Až budou mít výsledek, přistoupí k hrací kartě (papír s výsledky rozložený na první lavici) a pokud najdou svůj výsledek na kartě, přiloží svůj kousek puzzle. Učitel zkontroluje správnost řešení. Poté mohou jít pomáhat ostatním členům svého družstva. Zvítězí to družstvo, které rychleji složí celý obrázek.

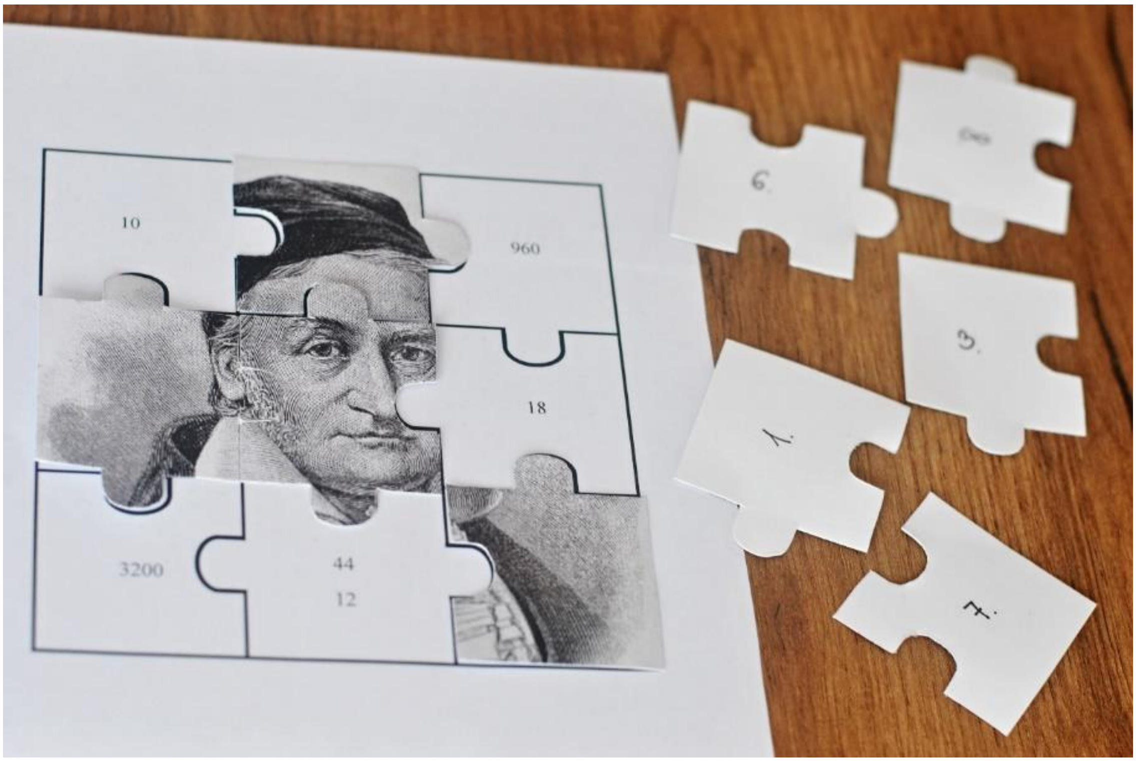
Hodnocení: Je vhodné, aby si učitel pohlídal nejen to, která skupina zvítězila, ale první studenty v každé skupině, kteří následně pomáhají ostatním. Je na učitelově zvážení, zda nebudou nějak oceněni i právě oni.

Modifikace aktivity: Protože každý hráč plní pouze jeden úkol, je tedy možné zvolit úkoly náročnější jak na vědomosti, tak na čas. V tomto tématu je tedy vhodné jako úkoly zvolit například soustavy rovnic, slovní úlohy řešené pomocí rovnic, rovnice a nerovnice s parametrem.

Poznámky: Jako výsledné puzzle může vzniknout obrázek slavného matematika. Žáci mohou hádat, o koho se jedná a čím se proslavil. Díky tomu může učitel studenty alespoň krátce seznámit s historií matematiky.

Název:	**Puzzle – Slovní úlohy řešené pomocí rovnic**
Zařazení hry:	Ostatní hry a aktivity – Puzzle
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 15 minut
Cíle:	• Žák identifikuje jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák užívá vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic. • Žák řeší slovní úlohy pomocí rovnic.

Ukázka:

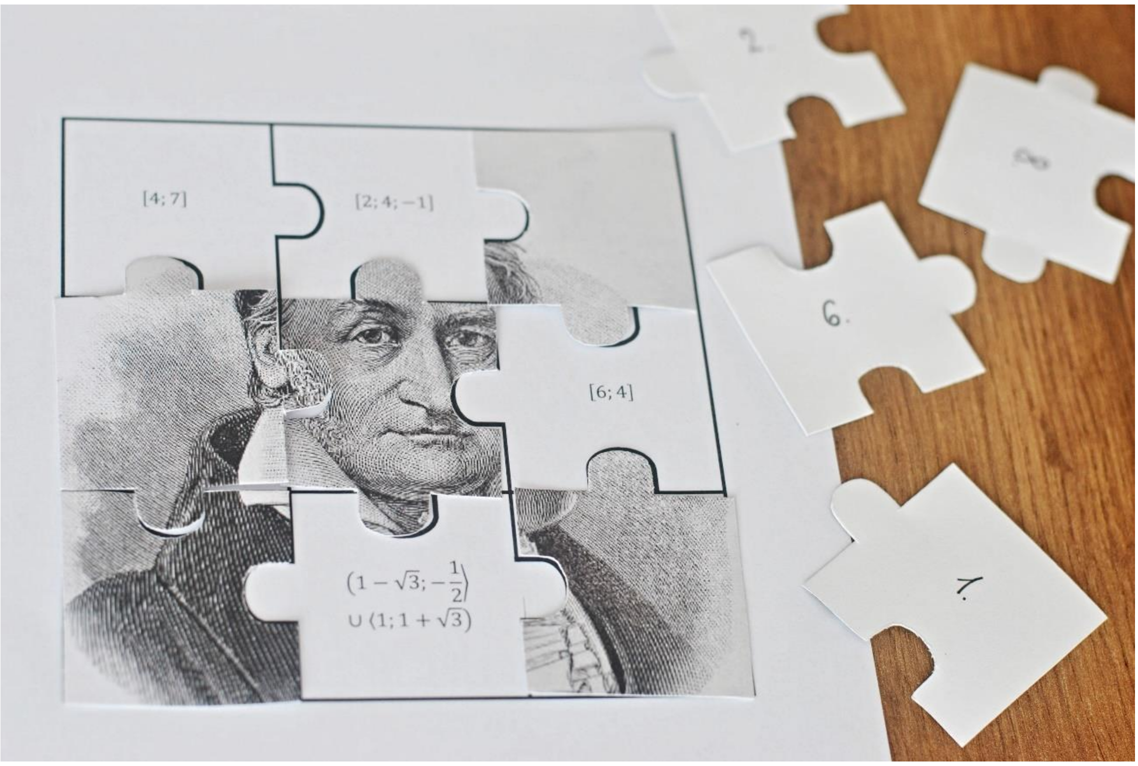


Obrázek 11: Puzzle

Příloha K: Materiály k vytisknutí obsahují zadání a řešení úloh, obrázek puzzle

Název:	**Puzzle – Soustavy rovnic a nerovnic**
Zařazení hry:	Ostatní hry a aktivity – Puzzle
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 15 minut
Cíle:	• Žák identifikuje jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák užívá vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic. • Žák řeší soustavy rovnic a nerovnic dosazovací i sčítací metodou.

Ukázka:



Obrázek 12: Puzzle

Příloha K: Materiály k vytisknutí obsahují zadání a řešení úloh, obrázek puzzle

3.3.7 Řady

Potřeby: lístky, papír, tužka

Počet žáků ve skupině: 1 – 4

Časová náročnost: 5 – 15 minut

Pravidla hry: Studenti dostanou do skupiny kartičky s řešenými příklady a mají za úkol tyto kartičky seřadit do řad tak, aby první byla kartička se zadáním příkladu, po ní následovaly kartičky s postupným řešením příkladu, a nakonec kartička s výsledkem. Vyhrává ten, kdo jako první správně seřadí všechny kartičky.

Hodnocení: Učitel by měl zkontrolovat správnost řešení, případně dané příklady vypočítat na tabuli a vysvětlit daný postup. Opět by učitel neměl zapomenout nějak ocenit nejlepší hráče.

Modifikace aktivity: Studenti také mohou vytvořit 3 skupiny, ve kterých si určí pořadí. Učitel na první lavice dá kartičky s řešenými příklady. Učitel zahájí hru a k lavici přijdou první studenti, seřadí první příklad, jakmile mají hotovo, vrátí se zpět a přichází další studenti v pořadí. Jakmile má skupina vše hotovo, učitel zkontroluje výsledky a vyhlásí vítěznou skupinu.

Poznámky: Tento úkol nemusí být pouze skupinový, můžeme ho zadat i pro jednotlivce, hlavně musí všichni studenti obdržet stejné příklady. Protože jsou příklady na lístečkách řešené, tak je možné použít i složitější příklady, které by jinak studentům dělaly problémy. Učitel může také dodat, že chce k příkladu doplnit nutné podmínky, aby se mohl příklad řešit a také výsledek ověřit zkouškou.

Název:	**Řady – Iracionální a reciproké rovnice**
Zařazení hry:	Ostatní hry a aktivity – Řady
Obtížnost:	1 – 2 – 3 – **4** – 5
Časová náročnost:	5 – 15 minut
Cíle:	• Žák rozezná iracionální a reciproké rovnice. • Žák umí řešit jednotlivé typy rovnic. • Žák užívá důsledkové úpravy a řešení ověřuje zkouškou.

Ukázka:

Obrázek 13: Řady

Příloha L: Materiály k vytisknutí obsahují zadání úloh

3.3.8 Tajenka

Potřeby: list se zadáním, psací potřeby

Počet žáků ve skupině: 1 – 2

Časová náročnost: 5 – 15 minut

Pravidla: Učitel rozdá žákům zadání tak, aby na něj neviděli. Když mají zadání všichni, mohou list otočit a začít pracovat. Na papíře jsou příklady, výsledky musí odpovídat výsledkům přiřazeným písmenům z abecedy. Žáci dle výsledků uspořádají hledané slovo.

Hodnocení: Na začátku hodiny se může učitel zeptat žáků, co bude podle nich tématem dnešní hodiny. Žáci tak mohou říkat své tipy. Následně všichni obdrží tajenku, kdy po jejím vyřešení zjistí správnou odpověď na učitelovu otázku. Žák, který byl nejrychlejší a odpověď se shoduje s jeho původním tipem, může získat plusový bod nebo jedničku za aktivitu. Učitel však musí zkontrolovat správnost řešení.

Modifikace aktivity: Učitel může takovou aktivitu používat na začátku hodiny na rozehřátí, kdy použije jakékoli typy příkladů, které jsou studenti schopni vypočítat.

Název:	**Tajenka – Co budeme dnes počítat?**
Zařazení hry:	Ostatní hry a aktivity – Tajenka
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 15 minut
Cíle:	• Žák identifikuje jednotlivé typy rovnic a nerovnic. • Žák užívá vzorce potřebné k řešení rovnic a nerovnic. • Žák určuje podmínky k řešení rovnic a nerovnic.

Ukázka:

Dnes budeme probírat rovnice a nerovnice s P A R_ _ _ _ _ _ _ _ .

1. $1 + 3\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x-3}{x-2} - \frac{2}{x-3}\right) = \frac{15}{2x-x^2}$

$$x = 3$$

2. $1 + \sqrt{x + 11} = x$

$$x = 5$$

3. $3 \cdot 2^{1-x} = 2^x + 2^{x+1}$

$$x = \frac{1}{2}$$

A	**5**	H	7	O	- 2	V	6
B	- 1/2	I	4	**P**	**3**	W	- 1/3
C	1	J	- 1/4	Q	- 9	X	0
D	1/3	K	- 3	**R**	**1/2**	Y	- 9
E	2	L	- 6	S	- 8	Z	- 5
F	- 7	M	∅	T	- 1		
G	- 4	N	8	U	1/4		

Příloha M: Materiály k vytisknutí obsahují zadání úloh a jejich řešení

3.4 Reakce učitelů matematiky na navržené aktivity a hry

Z navržených aktivit a her jsem vytvořila metodickou příručku, kterou jsem poskytla několika učitelům matematiky. Tyto učitele jsem požádala o vyplnění dotazníku a zpětnou vazbu k metodické příručce. Dotazník a jeho vyhodnocení přikládám níže (Příloha H: Dotazník, Příloha I: Dotazník – Vyhodnocení).

Dotazník je sestaven z otázek vycházejících z teorie a je rozdělen na tři části. V úvodní části jsou údaje o respondentech, přesněji délka jejich praxe a na jakém stupni a typu školy matematiku vyučují (na druhém stupni základní školy, na škole střední nebo na víceletém gymnáziu). Druhá část dotazníku je zaměřena na to, jak sami respondenti používají aktivizační metody ve výuce matematiky. Poslední část dotazníku je zpětná reflexe k metodické příručce. Dotazník jsem vytvořila v elektronické podobě a obsahoval 13 otázek, z toho bylo 9 otázek uzavřených a 4 otázky otevřené.

Anonymní dotazník vyplnilo 11 respondentů. Nejvíce respondentů vyučuje matematiku na střední škole a nemají praxi delší než 10 let. Bude to ovlivněné tím, že jsem oslovovala učitele, se kterými jsem se setkala během svého studia a při praxi na vysoké škole.

Všichni dotazovaní učitelé používají ve výuce matematiky nějaké aktivizační výukové metody, což je dokázáno i tím, že u otázky „Jak často zařazujete do výuky matematiky následující metody?“ volili u samostatné práce pouze odpověď „stále“ nebo „často“. Zcela nepoužívaná metoda v matematice jsou inscenační metody a hraní rolí. Také velmi málo respondentů ve své výuce používá projektovou výuku, ta má jako druhá v pořadí nejvyšší počet odpovědí „nikdy“. Aktivizační metody dotazovaní učitelé nejčastěji používají k procvičování učiva a k jeho opakování, nejméně je používají k diagnostice a ke zkoušení. Internet je nejčastějším zdrojem, ze kterého respondenti čerpají aktivizační metody.

V otevřené otázce „Používáte k aktivizaci žáků v hodinách matematiky nějakou jinou výše neuvedenou metodu? Pokud ano, níže napište, jak tuto metodu nazýváte a stručně ji popište.“ jsem se dozvěděla o dalších možnostech aktivizace žáků. Níže přikládám odpovědi některých

„Používám velice často výukové platformy (např. Kahoot, Plickers, Learningapps apod). Nejčastěji ale Kahoot, což je aplikace pro fixaci učiva

pomocí kvízů/otázek/dopisování odpovědí. Promítám otázky na plátno a studenti pracují se svým mobilním telefonem.“

„ne/matematické aktivity – prvky dramatické výchovy atd – osvědčilo se pro aktivizaci studentů zejména při sedmé, osmé odpolední hodině“ Respondent mě následně více seznámil se situací, kdy s danou třídou má na začátku vyučující hodiny stanovených 5 – 8 minut pro aktivitu, která nemusí být nutně matematická, ale zaměřená na logické myšlení a představivost. Řadí sem hry jako je pantomima, šibenice na matematické pojmy, obrázková přísloví.

U zpětné reflexe k příručce je znát rozdíl mezi učiteli II. stupně ZŠ a učiteli na SŠ. Příručku více využijí učitelé na středních školách, protože mohou aktivity aplikovat bez jakýkoliv úprav a mají zde na výběr větší množství aktivit. Je to také ovlivněné tím, že sama studuji matematiku pro střední školy a hry jsem tedy připravovala i pro své vlastní užití. V příručce jsou některé hry upravené i pro základní školy, ale není tomu tak u všech aktivit, proto se některými aktivitami učitelé mohou inspirovat, avšak musí použít vlastní příklady (například Bludiště a Člověče, nezlob se!).

Respondenty zaujaly aktivity Přiřazování, Tajenka a Myšlenkovou mapu. Každý respondent se vyjádřil k tomu, jakou aktivitu ve výuce chce vyzkoušet a proč a také jakou aktivitu nevyzkouší a z jakého důvodu. Některá vyjádření uvádím níže.

„Přijdou mi zajímavé řady – nikdy jsem podobný úkol nezadávala, ale na serveru umimmatematiku.cz jsem narazila na podobná zadání a líbila se mi v tom, že studenty nutí přemýšlet jinak.“

„Nejvíce mě zaujala Myšlenková mapa. V hodinách ji určitě využiji, protože žáci budou díky této hře procvičovat komplexní přemýšlení nad daným tématem, což žáci často neumí a tato schopnost jim chybí.“ Jeden z respondentů také uvedl, že sám užívá myšlenkovou mapu při úvodu do nového tématu a na konci, kdy myšlenkovou mapu porovnávají.

„Člověče, nezlob se! Nejvíce se mně líbí tato aktivita – pravidla velmi rychle pochopí všichni žáci, protože většina se s touto hrou již určitě někdy setkala. Samotnou by mě tato aktivita nenapadla, ale je to efektivní aktivita, která určitě bude žáky bavit. Tuto aktivitu bych také spíše zařadila kvůli časové náročnosti do nějaké volnější hodiny – před Vánocemi, nebo by se dala využít i

v hodině suplované (pokud by příklady byly upraveny – např. početní operace s přirozenými čísly, nebo jakékoliv jiný tematický okruh daného ročníku apod.)"

Bludiště a Člověče, nezlob se! jsou hry, které respondenti zařadili buďto mezi nejzajímavější aktivity nebo naopak ty, co vyzkoušet nechtějí. Je to ovlivněné především tím, že jsou nejvíce časově náročné, přesto si myslím, že své využití najdou.

„Bludiště, Člověče nezlob se – přijdou mi zdlouhavé, časově extrémně náročné – jistě by se nestihly dohrát ve výuce a myslím, že by se u nich mohli někteří studenti flákat nebo nudit."

Další aktivitou, kterou by ne každý respondent vyzkoušel je Puzzle. Důvodem je především to, že je zde časově náročnější příprava pro učitele.

„Zkusila bych všechny aktivity. Některé bych možná upravila pro potřeby konkrétní třídy. Jako poslední bych vyzkoušela Puzzle. Myslím si, že to je náročné na přípravu (stříhání)."

Poslední otázka dotazníku zjišťuje, zda by učitelé některé hry aplikovali v matematice i na jiné téma, než jsou rovnice a nerovnice. Respondenti nejčastěji volili Myšlenkovou mapu, která lze aplikovat prakticky na jakékoli téma, dále navrhli Domino pro funkce. Osobně se mi zalíbil Černý Petr pro obvody a obsahy rovinných obrazců. A objevil se další nápad, kdy je možné využít časově náročné aktivity.

„Bludiště a Člověče, nezlob se! Dám do nich příklady z celého pololetí nebo z celého školního roku. Budeme je hrát na předvánoční hodině, na konci školního roku a také bych to použila hned na začátku školního roku, kdy opakujeme látku. Také je použiju jako seznamovací hru pro prváky, kdy jim dám příklady ze ZŠ a rozdělím je namátkou do skupin."

Oslovení učitelé matematiky hodnotí soubor mých navržených aktivit a her kladně, tedy především učitelé středních škol, kteří mají větší množství výběru, oproti učitelům na základních školách. Přestože jsou některé aktivity navržené přímo pro učivo základní školy, tak je moje příručka pro učitele matematiky druhého stupně základních škol především inspirací a hry si musí upravit sami pro své potřeby. To, zda oslovení učitelé skutečně, a také v jaké míře, využijí tyto hry ve své praxi, je také ovlivněné jejich vlastím vztahem k aktivizačním metodám ve výuce. Což také ukázal dotazník, ve kterém můžeme vidět, že přestože většina učitelů je poměrně mladých, tak aktivizační metody ve své výuce zatím nevyužívají v takové míře, jak jsem očekávala. Například projektovou výuku téměř neužívají a skupinovou práci do hodin matematiky také zařazují pouze zřídka. Stále nejvíce osvědčenou aktivizační metodou zůstává samostatná práce, a to především na procvičování a opakování učiva. Myslím si, že je vhodné, aby učitelé svou výuku pro žáky zpestřovali a upoutávali jejich pozornost. Důležitým a ovlivňujícím prvkem je také příjemné klima třídy, kdy budou panovat dobré vztahy nejen mezi spolužáky, ale také ve spojení učitel – žák.

Závěr

Tato diplomová práce se zabývala možnostmi motivace a aktivizace žáků základních a středních škol k učivu rovnice a nerovnice.

Záměrem diplomové práce bylo získat zkušenosti s aktivizujícími metodami ve výuce matematiky, konkrétně pro učivo rovnice a nerovnice. Hlavním cílem diplomové práce bylo vytvořit vhodný motivační a aktivizační didaktický materiál pro výuku rovnic a nerovnic, který využijí učitelé matematiky základních i středních škol. Tyto aktivity jsem chtěla sama ověřit v praxi, ale z důvodu pandemie koronaviru a distanční výuce mi to nebylo umožněno. Z navržených aktivit jsem tedy vytvořila metodickou příručku, kterou jsem zaslala několika osloveným učitelům matematiky základních i středních škol. Učitelé mi následně poskytli zpětnou vazbu k této příručce, která byla součástí dotazníku zaměřujícího se na problematiku používání aktivizačních metod ve výuce matematiky.

V teoretické části diplomové práce jsem se zabývala konstruktivistickým přístupem k vyučování a možnostmi motivace žáků. Vymezila jsem zde také pojem didaktická hra, dále jsem zde popsala obecná pravidla používaná u aktivit a her ve výuce, která žáky podněcuje ke zvídavosti a motivuje je ke studiu. Druhou kapitolu teoretické části diplomové práce jsem věnovala matematice a jejímu postavení ve školství. Dále jsem se zaměřila na rovnice a nerovnice a uvedla didakticko-metodický přístup k učivu.

V praktické části diplomové práce jsem vytvořila metodickou příručku obsahující soubor aktivit a her. Každou aktivitu jsem stručně popsala a připravila jsem takové materiály, které mohou učitelé okamžitě použít ve své výuce. K příručce jsem sestavila dotazník zaměřující se na problematiku používání aktivizačních metod ve výuce matematiky a zpětnou vazbu k metodické příručce. Tyto materiály spolu s dotazníkem obdrželo několik učitelů matematiky na 2.stupni ZŠ a na SŠ.

Po vyhodnocení dotazníku jsem zjistila, že v matematice u učitelů, kteří dotazník vyplňovali, stále zůstává nejvíce užívanou aktivizační metodou samostatná práce, kdy tuto aktivitu učitelé aplikují především na procvičování a opakování učiva. Oproti tomu oslovení učitelé ve své výuce téměř neužívají projektovou výuku. Přestože někteří dotazovaní učitelé sami aktivizační metody často neužívají, ve zpětné vazbě se vyjádřili tak, že některé aktivity vyzkoušejí. Velký úspěch sklidila aktivita Přiřazování a Myšlenková mapa. Deskové hry si získaly své příznivce i odpůrce, kdy byla velkým problémem časová náročnost.

Seznam zdrojů

BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Praha: Prometheus, 2018. ISBN 978-80-7196-104-8.

BORKOVCOVÁ, Jana. *Hraní si v matematice na 2. Stupni ZŠ.* In BUDÍNOVÁ, Irena (ed.). *Setkání učitelů matematiky II: matematika a hry: seminář určený učitelům a studentům*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. Sborník prací Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně, sv. 232. ISBN 978-80-210-4969-7.

ČAPEK, Robert. *Odměny a tresty ve školní praxi.* Praha: Grada, 2008. ISBN 978-80-247-1718-0.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa VONDROVÁ, ed. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

HRABAL, Vladimír. *Pedagogicko-psychologická diagnostika žáka*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-22149-1.

HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium.* Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-318-9.

CHARVÁT, Jura a spol. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* Praha: Prometheus, 2015. ISBN 987-80-7196-362-2.

JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy.* Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-360-8.

JANKOVCOVÁ, Marie, Jiří PRŮCHA a Jiří KOUDELA. *Aktivizující metody v pedagogické praxi středních škol*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-23209-4.

KALHOUS, Zdeněk. Výukové metody In KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST 987-80-7196-362-2. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-717-8253-X.

KÁROVÁ, Věra. *Didaktické hry ve vyučování matematice: v 1.-4. ročníku základní a obecné školy: část aritmetická.* Plzeň: Západočeská univerzita, 1998. ISBN 80-7082-467-0.

KONFOROVYČ, Andrìj Hryhorovyč. *Významné matematické úlohy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-21848-2.

KOŽUCHOVÁ, Mária a Eva KORČÁKOVÁ. *Využitie didaktickej hry v elementárním vzdělávaní.* In JŮVA, Vladimír (ed.). Tvořivostí učitele k tvořivosti žáků: sborník z celostátního semináře k problematice tvořivosti v práci učitele a žáka, který se konal dne 16. 9. 1997 na Pedagogické fakultě MU v Brně. Brno: Paido, 1997. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-859-3147-8

KREJČOVÁ, Eva a Marta VOLFOVÁ. *Didaktické hry v matematice*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2001. ISBN 80-704-1423-5.

KRYNICKÝ, Martin. Elektronické učebnice matematiky a fyziky. [online] 2010. [cit. 2021-02-21]. Dostupné z: <http://www.realisticky.cz/>

LOKŠOVÁ, Irena a Jozef LOKŠA. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Praha: Portál, 1999. Pedagogická praxe. ISBN 80-7178-205-X.

MAŇÁK, Josef. *Nárys didaktiky*. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1124-6.

MAŇÁK, Josef. Aktivizující výukové metody. In: *Metodický portál RVP* [online] 2011. [cit. 2021-04-21]. Dostupné z: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/14483/aktivizujici-vyukove-metody.html/>. ISSN 1802-4785.

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

MAREŠ, Jiří. *Styly učení žáků a studentů.* Praha: Portál, 1998. ISBN 80-7178-246-7.

ODVÁRKO, Oldřich a kol. *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-099-3.

PORTMANN, Rosemarie. *Hry pro tvořivé myšlení*. Praha: Portál, 2004. ISBN 80-7178-876-7.

PRŮCHA, Jan, Jiří MAREŠ a Eliška WALTEROVÁ. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 2003. ISBN 80-7178-772-8.

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2013 [cit. 2021-05-09]. Dostupný z www: <http://www.nuv.cz/file/159>. ISBN 978-80-87000-11-3.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání: úplné znění upraveného RVP ZV s barevně vyznačenými změnami. [online]. Praha: MŠMT, 2013. 126 s. [cit. 2021-05-09]. Dostupné z www: <http://www.nuv.cz/file/4982/ >.

Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 34 – 53 – L/01 Reprodukční grafik pro média [online]. Praha: MŠMT, 2020. 98 s. [cit. 2021-05-17]. Dostupné z www: <https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2020/08/34-53 L01_Reprodukcni_grafik_pro_media_2020_zari_rev.pdf>

RŮŽIČKOVÁ, Bronislava. *Didaktika matematiky*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2002. ISBN 80-244-0534-2.

STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963.

VALIŠOVÁ, Alena, Hana KASÍKOVÁ a Miroslav BUREŠ. *Pedagogika pro učitele*. Praha: Grada, 2011. ISBN 978-80-247-3357-9.

VALIŠOVÁ, Alena a Josef VALENTA. *Metody vyučování a jejich modernizace.* In VALIŠOVÁ, Alena a Hana KASÍKOVÁ. *Pedagogika pro učitele: podoby vyučování a třídní management, osobnost učitele a jeho autorita, inovace ve výuce, klíčové kompetence ve vzdělávání, práce s informačními prameny, pedagogická diagnostika*. Praha: Grada, 2011. ISBN 978-80-247-3357-9.

VONDROVÁ, Naďa a Štěpánka KAŇKOVÁ. Povrch a objem válce a kužele. In *Náměty na aktivity rozvíjející matematickou gramotnost*, metodická brožura v projektu Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností, reg. č. CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_011/0000664. Praha: Univerzita Karlova, 2019.

ZORMANOVÁ, Lucie. *Obecná didaktika: pro studium a praxi.* Praha: Grada, 2014. ISBN 978-80-247-4590-9.

Seznam obrázků

Seznam příloh

Příloha A: Bludiště

Hrací plán:

start A1	B1	C1	D1	E1	F1	G1	H1	I1	J1	K1
A2	B2	C2	D2	E2	F2	G2	H2	I2	J2	K2
A3	B3	C3	D3	E3	F3	G3	H3	I3	J3	K3
A4	B4	C4	D4	E4	F4	G4	H4	I4	J4	K4
A5	B5	C5	D5	E5	F5	G5	H5	I5	J5	K5
A6	B6	C6	D6	E6	F6	G6	H6	I6	J6	K6
A7	B7	C7	D7	E7	F7	G7	H7	I7	J7	K7
A8	B8	C8	D8	E8	F8	G8	H8	I8	J8	K8
A9	B9	C9	D9	E9	F9	G9	H9	I9	J9	K9
A10	B10	C10	D10	E10	F10	G10	H10	I10	J10	K10
A11	B11	C11	D11	E11	F11	G11	H11	I11	J11	K11 cíl

Zadání úloh:

A	*Určete vzorce*	*C*	*Řešte zpaměti*
A1	START	**C1**	$\lvert x\rvert = 7$
A2	tvar lineární rovnice	**C2**	$\lvert 2x-3\rvert = 6$
A3	$\log_a a = ?$	**C3**	$\lvert 4x-7\rvert = -1$
A4	Vyjádření jedničky v goniometrickém tvaru	**C4**	$\lvert 6-x\rvert = 2$
A5	$sin2\alpha = ?$	**C5**	Záchytné pole
A6	$\log_a(x\cdot y) = ?$	**C6**	$\lvert x-1\rvert = 3$
A7	$\log_a 1 = ?$	**C7**	$\lvert x-2\rvert = 2-x$
A8	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = ?$	**C8**	$\lvert x-5\sqrt{11}\rvert = 0$
A9	diskriminant	**C9**	$\lvert x+4\rvert = 1$
A10	tvar kvadratické rovnice	**C10**	$\lvert x-7\rvert = x-7$
A11	$cos2\alpha = ?$	**C11**	$\lvert x+\pi\rvert = 6$
B	***Určete podmínky***	***D***	***Rozložte kvadratické trojčleny***
B1	$3\sqrt{x+5}-5 = x$	**D1**	x^2-5x+6
B2	$\sqrt{-x} = 2-\sqrt{2-x}$	**D2**	$x^2+10x-11$
B3	$\frac{2x-5}{x+3} = 0$	**D3**	$x^2-11x+30$
B4	$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4} = 5$	**D4**	x^2+4x+4
B5	$\frac{(x+5)(x-6)}{36-x^2} = 0$	**D5**	$x^2-24x+140$
B6	$\frac{8}{x^2+4x+1} \leq 0$	**D6**	$2x^2-5x+2$
B7	$\sqrt{x^2-4} \leq x+1$	**D7**	$3x^2-17x+10$
B8	$\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+7} = -4$	**D8**	Záchytné pole
B9	$\frac{(5x-3)(x+4)}{x(6-x)} \leq 0$	**D9**	$4x^2+4x+1$
B10	$\sqrt{2x+7}+\sqrt{x-5} = \sqrt{3x+2}$	**D10**	$4x^2+12x-216$
B11	$\frac{1-2x}{x^2-1} < 0$	**D11**	$x^2-9x-22$

E	***Řešte kvadratické rovnice a nerovnice***	*G*	***Řešte rovnice s parametrem***
E1	$x^2 - 2x - 15 \geq 0$	**G1**	$px + 1 = 6$
E2	$2x - x^2 \geq 2 - x$	**G2**	Záchytné pole
E3	$3x^2 + x + 2 = 0$	**G3**	$x(p-4) = p^2 - 16$
E4	$2x^2 + 3x \geq 0$	**G4**	$(3x+5)(p+4) = 2p + 8$
E5	$3x^2 + 5x - 2 < 0$	**G5**	$p(x+2) + x = -3$
E6	$9x^2 - 6x + 1 \leq 0$	**G6**	$p^2x - x + p = 1$
E7	$x^2 + 2x - 1 = 0$	**G7**	$\frac{x+p}{p} = px - 1$
E8	$x^2 + 2x + 6 < 0$	**G8**	$px - 1 = p + 2 + 2px$
E9	$x^2 - 2x - 2 \leq 0$	**G9**	$x(p-1) + p(x+4) = 2$
E10	$4x^2 \leq 1$	**G10**	$xp^2 = p(1+3x) - 3$
E11	$3 - 2 - 5x + 12 > 0$	**G11**	$(p-1)x^2 + 2px + p = 0$
F	***Řešte exponenciální rovnice***	*H*	***Určete nulové body***
F1	$0{,}25 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1$	**H1**	$\lvert 4-x\rvert - \lvert 2x+3\rvert = 7$
F2	$2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$	**H2**	$\lvert x^2+4x\rvert - 3x - 6 = 0$
F3	$5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$	**H3**	$x^2 + \lvert x-1\rvert - 1 = 0$
F4	$3^x + 3^{x+1} = 108$	**H4**	$\lvert 2x-4\rvert - \lvert x+3\rvert = 2 - \lvert x-5\rvert$
F5	$\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}$	**H5**	$\lvert 1-x\rvert > 3\lvert x+3\rvert$
F6	$\frac{3^x}{2 \cdot 3^{\sqrt{3}}} = 4{,}5$	**H6**	$\lvert x-4\rvert + \lvert 2x-1\rvert = \lvert x\rvert + 3$
F7	$7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5$	**H7**	$\lvert 2x+1\rvert - \lvert 3-x\rvert \geq x$
F8	$\frac{1}{3^x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{27^{3-3x}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$	**H8**	$\lvert x^2+2x-1\rvert - x = 1$
F9	$\frac{81}{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1}$	**H9**	$\lvert x-1\rvert + 3\lvert 2-x\rvert = x - \lvert 1-x\rvert$
F10	$2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$	**H10**	$\lvert x^2+4x\rvert - 6 \leq 3x$
F11	$2 \cdot 0{,}5^{x^2+\frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$	**H11**	$\lvert x+2\rvert = 4\lvert x-3\rvert$

I	***Určete substituci pro řešení rovnic a jejich soustav***	***K***	***Řešte nealgebraické rovnice a nerovnice***
I1	$(x^2+2x-3)(x^2+2x+1)-5=0$	**K1**	$0<2^{x^2-x-6}\leq 1$
I2	$(x^2-x+2)^2-6(x^2-x)-4=0$	**K2**	$\sin x\sin 2x+\cos x\cos 2x=0$
I3	$\sqrt{2x^2+5x}-\sqrt{2x^2+5x-10}=\sqrt{2}$	**K3**	$\log_2(x+2)>3$
I4	$\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}-3\right)\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}+4\right)+10=0$	**K4**	$\frac{1}{27}<\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1}\leq 3$
I5	$\|x+2\|+2\|y-3\|=15$ $\|x+2\|-4\|y-3\|=3$	**K5**	$\frac{\log x+3}{3-\log x}=5$
I6	$x^2+2x-12-2\sqrt{x^2+2x+12}=0$	**K6**	$\log_3(2-x)>1$
I7	$5\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}-6=0$	**K7**	$4\sin^4 x+\sin^2 2x=2$
I8	$x^6-7x^3-8=0$	**K8**	$\log_{0,5}(x^2-10)>\log_2 1$
I9	Zkratka k cíli – jdi na políčko I10	**K9**	$\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$
I10	$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4$ $2\sqrt{x+y}-3\sqrt{x-y}=3$	**K10**	$\frac{\log_3(x-3)}{\log_3(x-2)}=2$
I11	$20x^{-4}+3x^{-2}-2=0$	**K11**	CÍL

J	***Řešte slovní úlohy pomocí rovnic***
J1	V uhelném skladu rozvezli obdrženou zásilku uhlí během tří dnů. První den rozvezli třetinu, druhý den dvě pětiny ze zbytku a třetí den rozvezli 300 tun uhlí. Kolik tun uhlí rozvezli první den a kolik druhý den?
J2	Petr má o 10 Kč více než Pavel a dohromady mají 100 Kč. Kolik korun má každý z nich?
J3	Ve třech skladištích bylo uloženo celkem 70tun obilí. V druhém skladišti bylo uloženo o 8,5 tun méně a ve třetím skladišti o 3,5 tun více než v prvním skladišti. Kolik tun obilí bylo v jednotlivých skladištích?
J4	Záchytné pole
J5	Sud s pitnou vodou měl hmotnost 64 kg. Když se z něho první den spotřebovalo 28 % vody a druhý den třetina ze zbytku, byla jeho hmotnost 38 kg. Jakou hmotnost má prázdný sud a kolik kilogramů vody v něm původně bylo?
J6	Plný rybník se vyprázdní prvním stavidlem za 45 dní. Mají-li se vypustit 2/3 rybníku za 15 dní, bude třeba na 10 dní otevřít také druhé stavidlo. Za kolik dní by se vyprázdnil rybník pouze druhým stavidlem?
J7	Součet pěti čísel je 1200. čísla jsou seřazena tak, že každé následující číslo je o 50 menší než číslo předcházející. Určete jednotlivá čísla.
J8	Dělník A by sám provedl výkop pro vodovodní přípojku za 7 hodin, dělník B sám za 6 hodin. Protože výkop má být skončen za 2 hodiny, byl přidán ještě dělník C. Za jak dlouho by výkop provedl dělník C sám?
J9	Z 30procentního roztoku peroxidu vodíku se má připravit 3procentní roztok. Kolik destilované vody máme přidat, abychom dostali 0,25 litru 3procentního roztoku?
J10	Dětský bazén se naplní jedním přítokem za 5 hodin, druhým za 7 hodin. Za kolik hodin se naplní oběma přítoky současně? Výsledek vyjádřete v hodinách a minutách.
J11	Čerstvé houby obsahují 90 procent vody. Po částečném prosušení houby vážily o 15 kg méně, ale i tak ještě obsahovaly 60 procent vody. Kolik kg hub jsme donesli?

Řešení:

A	***Určete vzorce***	***C***	***Řešte rovnice***
A1	START	**C1**	$K = \{\pm 7\}$
A2	$ax + b = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$	**C2**	$K = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right\}$
A3	1	**C3**	$K = \emptyset$
A4	$sin^2x + cos^2x = 1$	**C4**	$K = \{4; 8\}$
A5	$2sin\alpha \cdot cos\alpha$	**C5**	Záchytné pole
A6	$\log_a x + \log_a y$	**C6**	$K = \{-2; 4\}$
A7	0	**C7**	$K = (-\infty; 2\rangle$
A8	$\log_a x - \log_a y$	**C8**	$K = \{5\sqrt{11}\}$
A9	$D = b^2 - 4ac$	**C9**	$K = \{-5; -3\}$
A10	$ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0, \quad a, b, c \in R$	**C10**	$K = \langle 7; +\infty)$
A11	$cos^2x - sin^2x$	**C11**	$K = \{-\pi \pm 6\}$
B	***Určete podmínky***	***D***	***Rozložte kvadratické trojčleny***
B1	$x \geq -5$	**D1**	$(x-3)(x-2)$
B2	$x \leq 0$	**D2**	$(x-1)(x+11)$
B3	$x \neq -3$	**D3**	$(x-6)(x-5)$
B4	$x \geq 1$	**D4**	$(x+2)^2$
B5	$x \neq \pm 6$	**D5**	$(x-10)(x-14)$
B6	$x \neq -2 \pm \sqrt{3}$	**D6**	$(2x-1)(x-2)$
B7	$x \geq \pm 2$	**D7**	$(3x-2)(x-5)$
B8	$x \geq -2$	**D8**	Záchytné pole
B9	$x \neq 0, x \neq 6$	**D9**	$(2x+1)^2$
B10	$x \geq 5$	**D10**	$4(x-6)(x+9)$
B11	$x \neq \pm 1$	**D11**	$(x+2)(x-11)$

E	***Řešte kvadratické rovnice a nerovnice***	*G*	***Řešte rovnice s parametrem***
E1	$K = (-\infty; -3\rangle \cup \langle 5; +\infty)$	**G1**	$p = 0 \to x \in \emptyset$ $p \neq 0 \to x = \left\{\frac{5}{p}\right\}$
E2	$K = \langle 1; 2\rangle$	**G2**	Záchytné pole
E3	$K = \emptyset$	**G3**	$p = 4 \to x \in R$ $p \neq 4 \to x = \{p + 4\}$
E4	$K = (-\infty; -\frac{3}{2}\rangle \cup \langle 0; +\infty)$	**G4**	$p = -4 \to x \in R$ $p \in R \backslash \{-4\} \to x = \{-1\}$
E5	$K = \left(-2; \frac{1}{3}\right)$	**G5**	$p = -1 \to x \in \emptyset$ $p \neq -1 \to x = \left\{\frac{-3 - 2p}{p + 1}\right\}$
E6	$K = \left\{\frac{1}{3}\right\}$	**G6**	$p = 1 \to x \in R$ $p = -1 \to x \in \emptyset$ $p \in R \backslash \{\pm 1\} \to x = \left\{\frac{-1}{p + 1}\right\}$
E7	$K = \left\{-1 \pm \sqrt{2}\right\}$	**G7**	$p = \pm 1 \to x \in \emptyset$ $p \neq 0 \wedge p \neq \pm 1 \to x = \left\{\frac{2p}{p^2 - 1}\right\}$
E8	$K = \emptyset$	**G8**	$p = 0 \to x \in \emptyset$ $p \neq 0 \to x = \left\{\frac{p + 3}{-p}\right\}$
E9	$K = \langle 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\rangle$	**G9**	$p = \frac{1}{2} \to x \in R$ $p \in R \backslash \left\{\frac{1}{2}\right\} \to x = \{-2\}$
E10	$K = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$	**G10**	$p = 3 \to x \in R$ $p = 0 \to x \in \emptyset$ $p \in R \backslash \{0; 3\} \to x = \left\{\frac{1}{a}\right\}$
E11	$K = \left(-4; \frac{3}{2}\right)$	**G11**	$p = 1 \to x = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $p < 0 \to x \in \emptyset$ $p = 0 \to x = \{0\}$ $p > 0 \to x = \left\{\frac{-p \pm \sqrt{p}}{p - 1}\right\}$

F	*Řešte exponenciální rovnice*	H	*Určete nulové body*
F1	$x = -\frac{1}{2}$	**H1**	$n.b. -\frac{3}{2}; 4$
F2	$x = 2$	**H2**	$n.b. -4; 0$
F3	$x = 2$	**H3**	$n.b. 1$
F4	$x = 3$	**H4**	$n.b. -3; 2; 5$
F5	$x = 2$	**H5**	$n.b. -3;\ 1$
F6	$x = 2 + \sqrt{3}$	**H6**	$n.b. 0; \frac{1}{2}; 4$
F7	$x = 2$	**H7**	$n.b. -\frac{1}{2}; 3$
F8	$x = -2$	**H8**	$n.b. -1 \pm \sqrt{2}$
F9	$x = 2$	**H9**	$n.b. 1; 2$
F10	$x = -2$	**H10**	$n.b. -4; 0$
F11	$x_1 = -2, x_2 = -\frac{2}{3}$	**H11**	$n.b. -2; 3$
I	***Určete substituci***	***K***	***Řešte nealgebraické rovnice a nerovnice***
I1	$subst.\ a = x^2 + 2x$	**K1**	$K = \langle -2; 3 \rangle$
I2	$subst.\ a = x^2 - x$	**K2**	$K = \frac{\pi}{2} + k\pi$
I3	$subst.\ a = 2x^2 + 5x$	**K3**	$K = (6; +\infty)$
I4	$subst.\ a = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$	**K4**	$K = \langle 0; \frac{4}{3})$
I5	$subst.\ a = \lvert x + 2 \rvert,$ $subst.\ b = \lvert y - 3 \rvert$	**K5**	$K = \{100\}$
I6	$subst.\ a = x^2 + 2x$	**K6**	$K = (-\infty; -1)$
I7	$subst.\ a = \sqrt[4]{x}$	**K7**	$K = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$
I8	$subst.\ a = x^3$	**K8**	$K = \left(-\infty; -\sqrt{11}\right) \cup \left(\sqrt{11}; +\infty\right)$
I9	Zkratka k cíli – jdi na políčko I10	**K9**	$K = \{16\}$
I10	$subst.\ a = \sqrt{x + y},$ $subst.\ b = \sqrt{x - y}$	**K10**	$K = \emptyset$
I11	$subst.\ a = x^{-2}$	**K11**	CÍL

J	***Řešte slovní úlohy pomocí rovnic***
J1	První den rozvezli 250 tun a druhý den 200 tun uhlí.
J2	Petr má 55 Kč a Pavel má 45 Kč.
J3	V prvním skladišti bylo uloženo 25 tun obilí, ve druhém 16,5 tun a ve třetím 28,5 tun.
J4	Záchytné pole
J5	Prázdný sud váží 14 kg a původně v něm bylo 50 kg vody.
J6	Rybník by se vyprázdnil pouze druhým stavidlem za 30 dní.
J7	340, 290, 240, 190, 140
J8	Dělník C by provedl výkop sám za 5 hodin a 15 minut.
J9	Musíme přidat 0,225 litru destilované vody.
J10	Bazén se naplní oběma přítoky současně za 2 hodiny a 55 minut.
J11	Donesli jsme 20 kg hub.

Zdroje úloh:

BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Praha: Prometheus, 2018. ISBN 978-80-7196-104-8

(slovní úloha J1, J3, J5, J7, J8, J10)

HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium.* Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-318-9.

CHARVÁT, Jura a spol. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* Praha: Prometheus, 2015. ISBN 987-80-7196-362-2

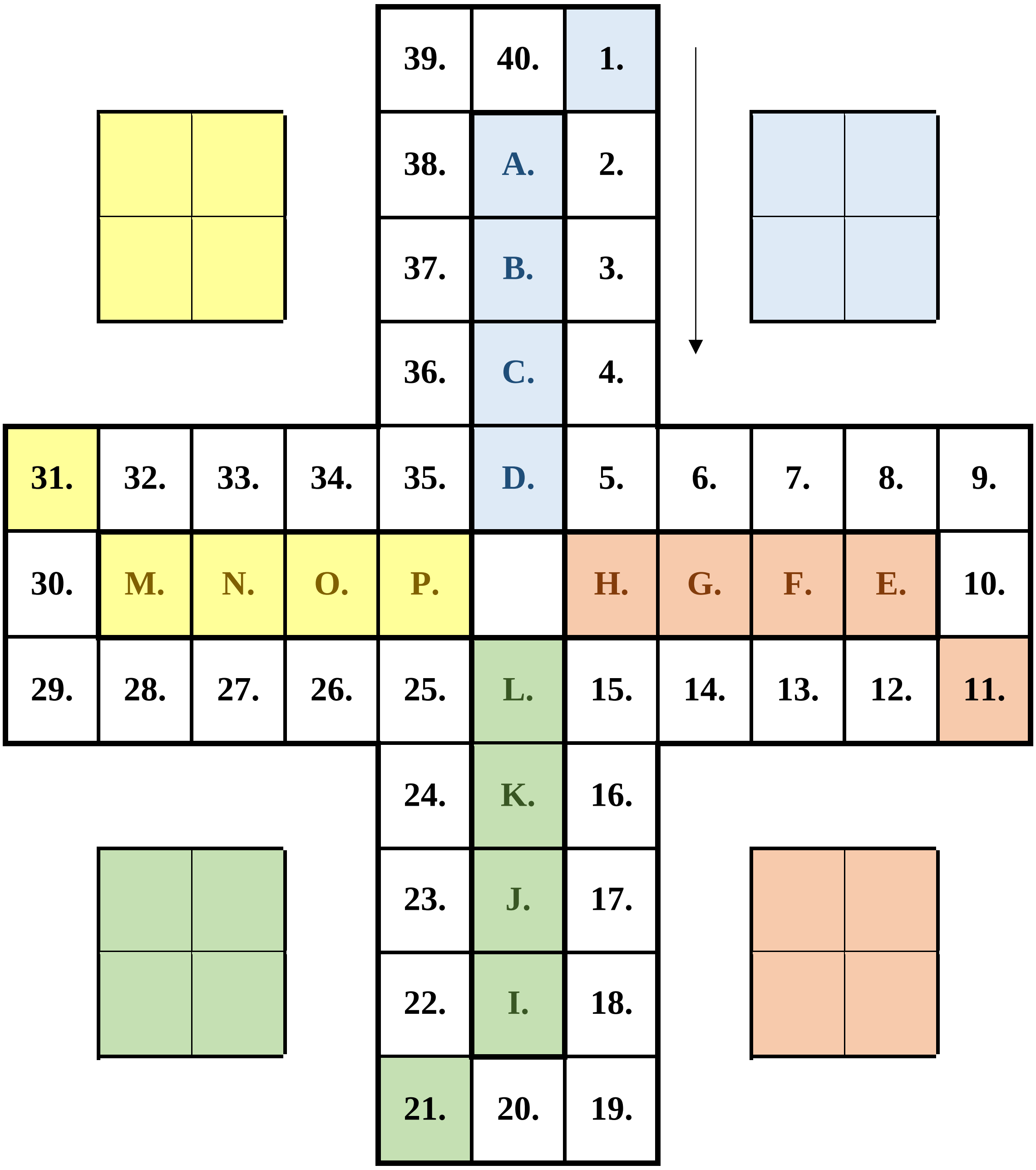
JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy.* Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-360-8.

ODVÁRKO, Oldřich a kol. *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2001, 303 s. ISBN 80-7196-099-3.

Příloha B: Člověče, nezlob se!

Hrací plán:



Seznam úloh:

1.	Definuj tvar lineární rovnice	**21.**	$\sqrt{x} + x = 2$
2.	$5\{5[5(5x-4)-4]-4\} = 5$	**22.**	$\log_a x = y \Leftrightarrow$
3.	$\|8-5x\| = 5x-8$	**23.**	$\log_2(x-2) = 3$
4.	$\dfrac{1-2x}{x^2-1} < 0$	**24.**	$\dfrac{\|x+3\|}{x+1} \geq 2$
5.	$\sqrt{-x-\sqrt{1-x}} = 1$	**25.**	$\log_a x^k = ?$
6.	$2 \leq \dfrac{x}{x^2+1}$	**26.**	$2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
7.	$\log_a 1 = ?$	**27.**	$\|2x-5\| = 1-3x$
8.	$(2-x)(x^2-9) \geq 0$	**28.**	$\sqrt{x^2-1 < x+2}$
9.	$4 < x^2+4x+8 \leq 5$	**29.**	$3 \cdot 2^{1-x} = 2^x + 2^{x+1}$
10.	$(4x^2+25)(50-x^2) = 0$	**30.**	$\log_a a = ?$
11.	$\|x+5\| \leq 7$	**31.**	$x^2-3x-4 < 0 \leq x^2-9$
12.	$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = ?$	**32.**	$\dfrac{2x+3}{x-1} < 1$
13.	$3x-8 < x+6 < 2x+2$	**33.**	Definuj tvar kvadratické rovnice
14.	$\dfrac{(5x-3)(x+4)}{x(6-x)} \leq 0$	**34.**	$\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{5x}{4-x^2} = \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{x}{x^2-4}$
15.	$3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$	**35.**	$(9-4x^2)(x^2-6x+9) = 0$
16.	$3[2(3x-6)-2(4x-5)+1]-3 = 6[3-8(x-3)]$	**36.**	$2^{2x} \cdot 5^x - 2^{2x-1} \cdot 5^{x+1} = -600$
17.	Uveď vzorec pro diskriminant	**37.**	$\log_a(x \cdot y) = ?$
18.	$\dfrac{x+2}{3x-2} \leq 0$	**38.**	$\log_2(x-2) = \log_2(2x-3)$
19.	$\|2x-3\| = x$	**39.**	$\frac{x^2-x-4}{x-1} \leq 1$
20.	$\dfrac{4x-7}{2} - \dfrac{x-4}{6} \geq 2x-3$	**40.**	$\log_2(x-1) + 2 = \log_2(2x+1)$

A.	$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$	**I.**	$\begin{aligned} 2x - y \qquad &= 6 \\ y + 4z &= 8 \\ x \qquad - z &= 1 \end{aligned}$
B.	$\log_{0,5}(x^2 - 2x) > \log_{0,5} 3$	**J.**	$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 8x) + 2 \geq 0$
C.	$\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 9$	**K.**	$9^{x-0,5} + 9^{0,5-x} = \frac{10}{3}$
D.	$a^2x - x + a = 1$	**L.**	$xa^2 = a(1 + 3x) - 3$
E.	$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$	**M.**	$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \\ 4x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$
F.	$\log(x - 4) + \log(x - 2) > 1$	**N.**	$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} > 3$
G.	$9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$	**O.**	$5^{2x} \cdot (5^{2x} - 5) =$ $3 \cdot (5^{2x+1} + 5^{2x}) + 50$
H.	$x(a - 1) + a(x + 4) = 2$	**P.**	$(3x + 5)(a + 4) = 2a + 8$

Řešení:

1.	$ax + b = 0$, kde $a, b \epsilon R$, $a \neq 0$	**21.**	$K = \{1\}$
2.	$K = \{1\}$	**22.**	$a^y = x$
3.	$K = \left\langle \frac{8}{5}; +\infty \right)$	**23.**	$K = \{10\}$
4.	$K = \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$	**24.**	$K = (-1; 1\rangle$
5.	$K = \{-3\}$	**25.**	$k \cdot \log_a x$
6.	$K = \emptyset$	**26.**	$K = \{2\}$
7.	0	**27.**	$K = \{-4\}$
8.	$K = (-\infty; -3\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$	**28.**	$K = \left(-\frac{5}{4} -1\right\rangle \cup \langle 1; +\infty)$
9.	$K = \langle -3; -1\rangle \backslash \{-2\}$	**29.**	$K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
10.	$K = \left\{\pm 5\sqrt{2}\right\}$	**30.**	1
11.	$K = \langle -12; 2\rangle$	**31.**	$K = \langle 3; 4)$
12.	$\log_a x - \log_a y$	**32.**	$K = (-4; 1)$
13.	$K = (4; 7)$	**33.**	$ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \epsilon R$, $a \neq 0$
14.	$K = (-\infty; -4\rangle \cup (0; \frac{3}{5}\right\rangle \cup (6; +\infty)$	**34.**	$K = \emptyset$
15.	$K = \{1\}$	**35.**	$K = \left\{\pm \frac{3}{2}; 3\right\}$
16.	$K = \{4\}$	**36.**	$K = \{2\}$
17.	$D = b^2 - 4ac$	**37.**	$\log_a x + \log_a y$
18.	$K = \langle -2; \frac{2}{3}\rangle$	**38.**	$K = \emptyset$
19.	$K = \{1; 3\}$	**39.**	$K = (-\infty; -1\rangle \cup (1; 3\rangle$
20.	$K = (-\infty; 1\rangle$	**40.**	$K = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

A.	$[1; 2; -2]$	**I.**	$[3; 0; 2]$
B.	$K = (-1; 0) \cup (2; 3)$	**J.**	$K = \langle -1; 0) \cup (8; 9\rangle$
C.	$a = 4 \rightarrow x = 2$	**K.**	$a = 1 \rightarrow x = 0$ $a = 9 \rightarrow x = 1$
D.	$a = 1 \rightarrow x \in R$ $a = -1 \rightarrow x \in \emptyset$ $a \in R \backslash \{\pm 1\} \rightarrow x = \left\{\frac{-1}{a+1}\right\}$	**L.**	$a = 3 \rightarrow x \in R$ $a = 0 \rightarrow x \in \emptyset$ $a \in R \backslash \{0; 3\} \rightarrow x = \left\{\frac{1}{a}\right\}$
E.	$[0; 0; 0]$	**M.**	$[t; 1 - 2t; 1 + t, t \in R]$
F.	$K = \left(3 + \sqrt{11}; +\infty\right)$	**N.**	$K = (2; 3)$
G.	$a = \frac{1}{9} \rightarrow x = -2$ $a = 1 \rightarrow x = 0$	**O.**	$a = 25 \rightarrow x = 1$
H.	$a = \frac{1}{2} \rightarrow x \in R$ $a \in R \backslash \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow x = \{-2\}$	**P.**	$a = -4 \rightarrow x \in R$ $a \in R \backslash \{-4\} \rightarrow x = \{-1\}$

Zdroje úloh:

HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium.* Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-318-9.

CHARVÁT, Jura a spol. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* Praha: Prometheus, 2015. ISBN 987-80-7196-362-2

JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-360-8.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2001, 303 s. ISBN 80-7196-099-3.

Příloha C: Černý Petr

Zdroj úloh:

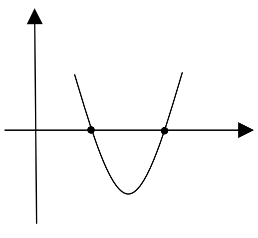
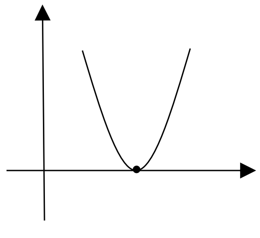
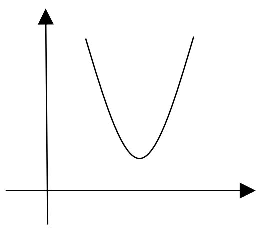
HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium.* Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-318-9.

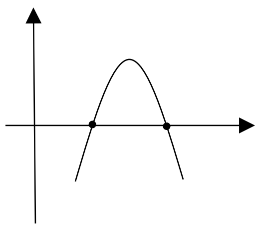
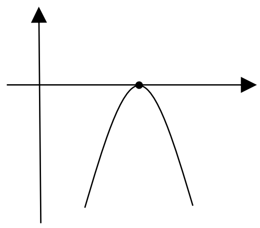
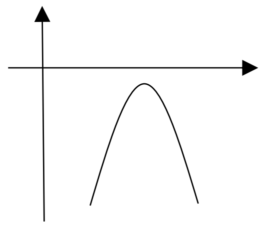
CHARVÁT, Jura a spol. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* Praha: Prometheus, 2015. ISBN 987-80-7196-362-2

Hrací karty:

Řešení kvadratických rovnic

$\emptyset$

$ax^2+bx+c=0$ $a>0$ $D>0$ graf	$ax^2+bx+c=0$ $a>0$ $D=0$ graf	$ax^2+bx+c=0$ $a>0$ $D<0$ graf
		

$ax^2+bx+c=0$ $a<0$ $D>0$ graf	$ax^2+bx+c=0$ $a<0$ $D=0$ graf	$ax^2+bx+c=0$ $a<0$ $D<0$ graf
		
$ax^2+c=0$ kde $a, c \in R$, $a\neq 0$ $x^2=d$, kde $d=-\frac{c}{a}$ $d<0$	$ax^2+c=0$ kde $a, c \in R$, $a\neq 0$ $x^2=d$, kde $d=-\frac{c}{a}$ $d\geq 0$	$ax^2+bx+c=0$, kde $a, b, c \in R$, $a\neq 0$ $D=b^2-4ac$ $D=0$

rovnice $ax^2 + c = 0$ nemá řešení	rovnice $ax^2 + c = 0$ má kořeny $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$ax^2 + bx = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$ $x(ax + b) = 0$, $b = 0$	$ax^2 + bx = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$ $x(ax + b) = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ $D = b^2 - 4ac$ $D > 0$
rovnice $ax^2 + bx = 0$ má kořeny $x_1 = x_2 = 0$	rovnice $ax^2 + bx = 0$ má kořeny $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$	rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Příloha C: Černý Petr

Hrací karty:

Co jsou to rovnice?

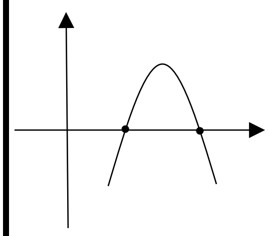
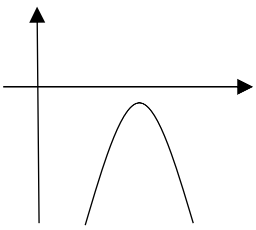
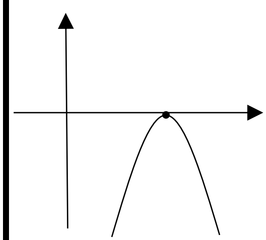
		Ø
rovnost	nerovnost	rovnice
$8 + 3 = 15 - 4$	$8 \cdot 3 > 5 \cdot 4$	$6 \cdot x = 12$

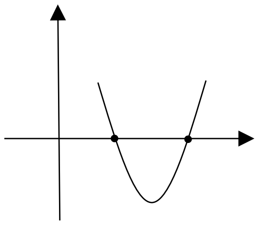
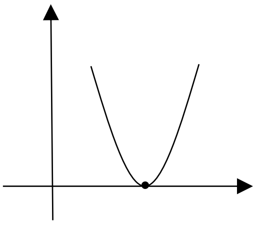
levá strana rovnice	pravá strana rovnice	proměnná (neznámá)
$\boldsymbol{6 \cdot x} = 12$	$6 \cdot x = \boldsymbol{12}$	$6 \cdot \boldsymbol{x} = 12$
vlastnosti rovnosti	reflexivnost	symetričnost

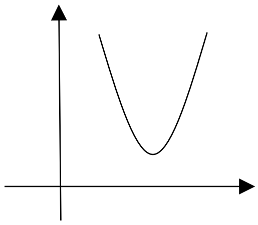
reflexivnost, symetričnost, tranzitivnost	Každý výraz se rovná sám sobě. $a = a$	Můžeme vyměnit levou a pravou stranu. $a = b$ je stejné jako $b = a$
tranzitivnost	tvar lineární rovnice	řešení lineární rovnice
Jestliže $a = b$ a zároveň $b = c$, potom platí $a = c$.	$ax + b = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$	$x = -\frac{b}{a}$

Příloha D: Domino

Hrací karty:

Matematické domino	$ax^2 + bx + c = 0$ $a < 0$ $D > 0$ graf		a^{-x}
$\frac{1}{a^x}$	tvar lineární rovnice	$ax + b = 0$, kde $a, b \epsilon R$, $a \neq 0$	$3x^2 - 2x - 1$
$(3x + 1)(x - 1)$	Výraz pod sudou odmocninou musí být …	nezáporný	$ax^2 + bx + c = 0$ $a < 0$ $D < 0$ graf
	soustava lineárních rovnic	$a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$	$\log_a a$
1	$ax^2 + bx + c = 0$ $a < 0$ $D = 0$ graf		Jmenovatel ve zlomku musí být …

nenulový	tvar kvadratické rovnice	$ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$	Logaritmovaný výraz musí být …
kladný	$ax^2 + bx + c = 0$ $a > 0$ $D > 0$ graf		$\log_a 1$
0	lineární nerovnice	$ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$	$ax^2 + bx + c = 0$ $a > 0$ $D = 0$ graf
	$x^2 + 4x - 96$	$(x - 8)(x + 12)$	Vyjádření jedničky v goniometrickém tvaru
$sin^2 x + cos^2 x$	$\log_a(x \cdot y)$	$\log_a x + \log_a y$	diskriminant

$D = b^2 - 4ac$	$ax^2 + bx + c = 0$ $a > 0$ $D < 0$ graf		$x^2 - 7x + 12$
$(x-3)(x-4)$	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_a x - \log_a y$	HOTOVO!

Zdroj úloh:

HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium.* Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-318-9.

CHARVÁT, Jura a spol. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* Praha: Prometheus, 2015. ISBN 987-80-7196-362-2

Příloha E: Kvarteto

Hrací karty:

1A *Lineární rovnice:* **A. tvar $ax + b = 0$, kde $a, b \in R, a \neq 0$** B. řešením je jediné číslo $x = -\frac{b}{a}$ C. pokud $a = 0,\ b = 0$, pak každé číslo $x \in R$ je řešením D. slovní úlohy o společné práci	*2A* *Kvadratické rovnice:* **A. tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R, a \neq 0$** B. rozklad kvadratického trojčlenu C. diskriminant $D = b^2 - 4ac$ D. kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	*3A* *Rovnice s absolutní hodnotou:* **A. neznámá v absolutní hodnotě** B. $\lvert a \rvert = \langle\begin{matrix} a\ pro\ a \geq 0 \\ -a\ pro\ a < 0 \end{matrix}$ C. užití nulových bodů D. řešením je sjednocení kořenů na různých intervalech
1B *Lineární rovnice:* A. tvar $ax + b = 0$, kde $a, b \in R, a \neq 0$ **B. řešením je jediné číslo $x = -\frac{b}{a}$** **C.** pokud $a = 0,\ b = 0$, pak každé číslo $x \in R$ je řešením D. slovní úlohy o společné práci	*2B* *Kvadratické rovnice:* A. tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R, a \neq 0$ **B. rozklad kvadratického trojčlenu** C. diskriminant $D = b^2 - 4ac$ D. kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	*3B* *Rovnice s absolutní hodnotou:* A. neznámá v absolutní hodnotě **B. $\lvert a \rvert = \langle\begin{matrix} a\ pro\ a \geq 0 \\ -a\ pro\ a < 0 \end{matrix}$** C. užití nulových bodů D. řešením je sjednocení kořenů na různých intervalech

1C

Lineární rovnice:

A. tvar $ax + b = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$
B. řešením je jediné číslo $x = -\frac{b}{a}$
C. pokud $\boldsymbol{a = 0, b = 0}$, pak každé číslo $\boldsymbol{x \in R}$ je řešením
D. slovní úlohy o společné práci

2C

Kvadratické rovnice:

A. tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$
B. rozklad kvadratického trojčlenu
C. diskriminant $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$
D. kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3C

Rovnice s absolutní hodnotou:

A. neznámá v absolutní hodnotě
B. $|a| = \left\langle \begin{array}{l} a \; pro \; a \geq 0 \\ -a \; pro \; a < 0 \end{array} \right.$
C. užití nulových bodů
D. řešením je sjednocení kořenů na různých intervalech

1D

Lineární rovnice:

A. tvar $ax + b = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$
B. řešením je jediné číslo $x = -\frac{b}{a}$
C. pokud $a = 0, b = 0$, pak každé číslo $x \in R$ je řešením
D. slovní úlohy o společné práci

2D

Kvadratické rovnice:

A. tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$
B. rozklad kvadratického trojčlenu
C. diskriminant $D = b^2 - 4ac$
D. kořeny $\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

3D

Rovnice s absolutní hodnotou:

A. neznámá v absolutní hodnotě
B. $|a| = \left\langle \begin{array}{l} a \; pro \; a \geq 0 \\ -a \; pro \; a < 0 \end{array} \right.$
C. užití nulových bodů
D. řešením je sjednocení kořenů na různých intervalech

4A

Iracionální rovnice:

A. neznámá pod odmocninou
B. užijeme neekvivalentní úpravu – umocňování
C. zajistit platnost kořenů dvojím způsobem – zkouškou, podmínkami
D. př.: $\sqrt{x} + x = 2$

5A

Exponenciální a logaritmické rovnice:

A. neznámá v exponentu mocniny nebo v argumentu logaritmu
B. $a^x = b$, $a > 0, a \neq 1$
C. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
D. $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

6A

Goniometrická pravidla:

A. $\boldsymbol{sin2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$
B. $cos2\alpha = cos^2 x - sin^2 x$
C. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$
D. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$

4B *Iracionální rovnice:* A. neznámá pod odmocninou **B. užijeme neekvivalentní úpravu – umocňování** C. zajistit platnost kořenů dvojím způsobem – zkouškou, podmínkami D. př.: $\sqrt{x} + x = 2$	*5B* *Exponenciální a logaritmické rovnice:* A. neznámá v exponentu mocniny nebo v argumentu logaritmu **B.** $\boldsymbol{a^x = b\ ,\ a > 0, a \neq 1}$ C. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ D. $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$	*6B* *Goniometrická pravidla:* A. $sin2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **B.** $\boldsymbol{cos2\alpha = cos^2x - sin^2x}$ C. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$ D. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
4C *Iracionální rovnice:* A. neznámá pod odmocninou B. užijeme neekvivalentní úpravu – umocňování **C. zajistit platnost kořenů dvojím způsobem – zkouškou, podmínkami** D. př.: $\sqrt{x} + x = 2$	*5C* *Exponenciální a logaritmické rovnice:* A. neznámá v exponentu mocniny nebo v argumentu logaritmu B. $a^x = b\ ,\ a > 0, a \neq 1$ **C.** $\boldsymbol{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$ D. $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$	*6C* *Goniometrická pravidla:* A. $sin2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ B. $cos2\alpha = cos^2x - sin^2x$ **C.** $\boldsymbol{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta}$ D. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
4D *Iracionální rovnice:* A. neznámá pod odmocninou B. užijeme neekvivalentní úpravu – umocňování C. zajistit platnost kořenů dvojím způsobem – zkouškou, podmínkami **D. př.:** $\boldsymbol{\sqrt{x} + x = 2}$	*5D* *Exponenciální a logaritmické rovnice:* A. neznámá v exponentu mocniny nebo v argumentu logaritmu B. $a^x = b\ ,\ a > 0, a \neq 1$ C. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ **D.** $\boldsymbol{\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$	*6D* *Goniometrická pravidla:* A. $sin2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ B. $cos2\alpha = cos^2x - sin^2x$ C. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$ **D.** $\boldsymbol{\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta}$

7A *Nerovnice v podílovém tvaru* **A. Nenásobíme výrazem s neznámou!** B. Výrazy s neznámou převedeme na stejnou stranu. C. Hledáme nulové body. *D.* př.: $\frac{x^2-x-4}{x-1} \le 1$	8A *Ekvivalentní úpravy* **A. Přičtení stejného čísla k oběma stranám rovnice** B. Přičtení stej. násobku neznámé C. Vynásobení rovnice nenulovým číslem D. Při užití neekvivalentní úpravy, provedeme zkoušku.	*9A* *Pravidla logaritmů* **A.** $\boldsymbol{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$ B. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ C. $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$, D. $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$
7B *Nerovnice v podílovém tvaru* A. Nenásobíme výrazem s neznámou! **B. Výrazy s neznámou převedeme na stejnou stranu.** C. Hledáme nulové body. D. př.: $\frac{x^2-x-4}{x-1} \le 1$	*8B* *Ekvivalentní úpravy* A. Přičtení stejného čísla k oběma stranám **B. Přičtení stejného násobku neznámé k oběma stranám rovnice** C. Vynásobení rovnice nenulovým číslem D. Při užití neekvivalentní úpravy, provedeme zkoušku.	*9B* *Pravidla logaritmů* A. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ **B.** $\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$ C. $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$ D. $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$
7C *Nerovnice v podílovém tvaru* A. Nenásobíme výrazem s neznámou! B. Výrazy s neznámou převedeme na stejnou stranu. **C. Hledáme nulové body.** D. př.: $\frac{x^2-x-4}{x-1} \le 1$	*8C* *Ekvivalentní úpravy* A. Přičtení stejného čísla k oběma stranám B. Přičtení stejného násobku neznámé **C. Vynásobení rovnice nenulovým číslem** D. Při užití neekvivalentní úpravy, provedeme zkoušku.	*9C* *Pravidla logaritmů* A. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ B. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ **C.** $\boldsymbol{\log_a x^k = k \cdot \log_a x}$ D. $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$

7D	8D	9D
Nerovnice v podílovém tvaru A. Nenásobíme výrazem s neznámou! B. Výrazy s neznámou převedeme na stejnou stranu. C. Hledáme nulové body. **D. př:** $\mathbf{\frac{x^2-x-4}{x-1} \leq 1}$	*Ekvivalentní úpravy* A. Přičtení stejného čísla k oběma stranám B. Přičtení stejného násobku neznámé C. Vynásobení rovnice nenulovým číslem **D. Při užití neekvivalentní úpravy, provedeme zkoušku.**	*Pravidla logaritmů* A. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ B. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ C. $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$ **D.** $\boldsymbol{\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0}$

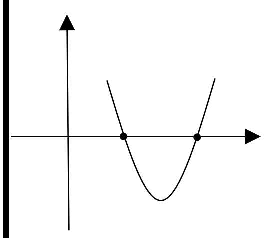
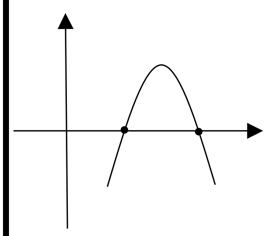
Zdroj úloh:

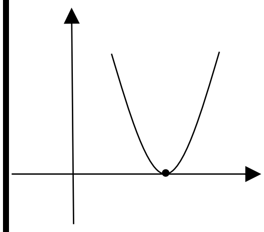
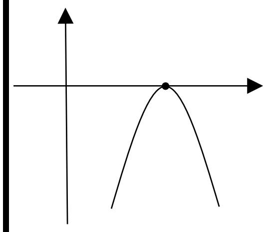
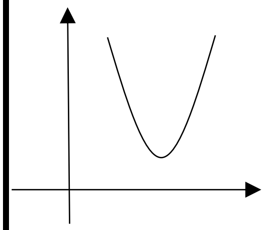
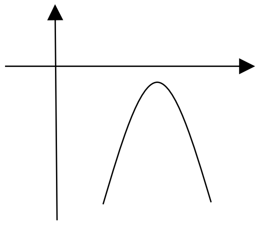
HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium.* Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-318-9.

CHARVÁT, Jura a spol. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice*. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 987-80-7196-362-2

Příloha F: Pexeso

PEXESO	PEXESO	PEXESO	PEXESO
Tvar lineární rovnice	$ax + b = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$	Tvar kvadratické rovnice	$ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$
Rozklad kvadratického trojčlenu	$a(x - x_1)(x - x_2)$	Diskriminant	$D = b^2 - 4ac$
kořeny kvadratické rovnice	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	Řešení lineární rovnice	$x = -\frac{b}{a}$
$\|a\| = a$	$a \geq 0$	$\|a\| = -a$	$a < 0$

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$ $f(x) = g(x)$	Použijeme-li neekvivalentní úpravu	Platnost kořenů ověříme zkouškou
$\log_a \left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_a x - \log_a y$	$\log_a (x \cdot y)$	$\log_a x + \log_a y$
$\log_a x = y$ $\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$ $a^y = x$	$\log_a x^k$	$k \cdot \log_a x$
$\log_a 1$	0	$\log_a a$	1
$ax^2 + bx + c = 0$ $a > 0$ $D > 0$ graf		$ax^2 + bx + c = 0$ $a < 0$ $D > 0$ graf	

$ax^2 + bx + c = 0$ $a > 0$ $D = 0$ graf		$ax^2 + bx + c = 0$ $a < 0$ $D = 0$ graf	
$ax^2 + bx + c = 0$ $a > 0$ $D < 0$ graf		$ax^2 + bx + c = 0$ $a < 0$ $D < 0$ graf	
$ax + b > 0,$ $a > 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$ax + b > 0,$ $a < 0$	$x < -\frac{b}{a}$
$ax + b > 0,$ $a = 0,$ $b > 0$	$x \epsilon R$	$ax + b > 0,$ $a = 0,$ $b \leq 0$	$\emptyset$
$x^2 - 10x + 24$	$(x-4)(x-6)$	$x^2 + 13x + 42$	$(x+6)(x+7)$

Vyjádření jedničky v goniometrickém tvaru	$sin^2x + cos^2x$	tg^2x	$\frac{sin^2x}{cos^2x}$
$sin2\alpha$	$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$	$cos2\alpha$	$cos^2x - sin^2x$
$\sin(\alpha \pm \beta)$	$\sin\alpha \cdot \cos\beta$ $\pm$ $\cos\alpha \cdot \sin\beta$	$\cos(\alpha \pm \beta)$	$\cos\alpha \cdot \cos\beta$ $\mp$ $\sin\alpha \cdot \sin\beta$

Zdroj úloh:

HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium.* Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-318-9.

CHARVÁT, Jura a spol. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* Praha: Prometheus, 2015. ISBN 987-80-7196-362-2

Příloha G: Bingo

Zadání:

Tabulka pro studenty:

$(x+11)(x-12)$	$(x+6)(x+21)$	$(x+1)(x+42)$	$(x+2)(x+5)$
$(x-2)(x+4)$	$(x-1)(x+2)$	$(8-x)(x+1)$	$(4x-5)(4x+5)$
$(2x-5)(3-x)$	$(x-3)^2$	$(x-5)^2$	$4(x-6)(x+9)$
$(x+2)(x-11)$	$(x-3)(x-2)$	$(x-1)(x+11)$	$(x-6)(x-5)$

Zadání pro učitele:

$16x^2-25$, $x^2-x-132$, $x^2+27x+126$, $-x^2+11x-15$, $x^2+7x+10$, x^2-6x+9, x^2+2x-8, $x^2-11x+30$, x^2-5x+6, x^2+x-2, $x^2+43x+42$, $-x^2+7x+8$, $4x^2+12x-216$, $x^2-9x-22$, $x^2-10x+25$, $x^2+10x-11$

Řešení:

Tabulka pro studenty – první bingo

$(\boldsymbol{x}+\mathbf{11})(\boldsymbol{x}-\mathbf{12})$	$(\boldsymbol{x}+\mathbf{6})(\boldsymbol{x}+\mathbf{21})$	$(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{42})$	$(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}+\mathbf{5})$
$(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})$	$(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})$	$(8-x)(x+1)$	$(\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{5})(\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{5})$
$(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{5})(\mathbf{3}-\boldsymbol{x})$	$(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}$	$(x-5)^2$	$4(x-6)(x+9)$
$(x+2)(x-11)$	$(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})$	$(x-1)(x+11)$	$(\boldsymbol{x}-\mathbf{6})(\boldsymbol{x}-\mathbf{5})$

Řešení rozkladu kvadratických trojčlenů / dvojčlenů:

$$16x^2-25=(4x-5)(4x+5)$$
$$x^2-x-132=(x+11)(x-12)$$
$$x^2+27x+126=(x+6)(x+21)$$
$$-x^2+11x-15=(2x-5)(3-x)$$
$$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$$
$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$
$$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$$
$$x^2-11x+30=(x-6)(x-5)$$

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$
$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$
$$x^2+43x+42=(x+1)(x+42)$$
$$-x^2+7x+8=(8-x)(x+1)$$
$$4x^2+12x-216=4(x-6)(x+9)$$
$$x^2-9x-22=(x+2)(x-11)$$
$$x^2-10x+25=(x-5)^2$$
$$x^2+10x-11=(x-1)(x+11)$$

Zdroje úloh:

JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-360-8.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-099-3.

Příloha H: Hadi

Zadání:

Vyřeš hady. Hady zapiš jako rovnice a vyřeš je.

$$\bigcirc \xrightarrow{\cdot\, 2} \bigcirc \xrightarrow{+\, 2} 8$$

$$\bigcirc \xrightarrow{+\, 10} \bigcirc \xrightarrow{:\, 6} \bigcirc \xrightarrow{+\, 5} 9$$

$$\bigcirc \xrightarrow{-\, 12} \bigcirc \xrightarrow{:\, 2} \bigcirc \xrightarrow{-\, 4} 3$$

$$\bigcirc \xrightarrow{\cdot\, 4} \bigcirc \xrightarrow{-\, 6} \bigcirc \xrightarrow{:\, 5} 6$$

Řešení:

$$3 \xrightarrow{\cdot 2} 6 \xrightarrow{+ 2} 8$$

$$2x + 2 = 8$$

$$x = 3$$

$$14 \xrightarrow{+ 10} 24 \xrightarrow{: 6} 4 \xrightarrow{+ 5} 9$$

$$\frac{x + 10}{6} + 5 = 9$$

$$x = 14$$

$$26 \xrightarrow{- 12} 14 \xrightarrow{: 2} 7 \xrightarrow{- 4} 3$$

$$\frac{x - 12}{2} - 4 = 3$$

$$x = 26$$

$$9 \xrightarrow{\cdot 4} 36 \xrightarrow{- 6} 30 \xrightarrow{: 5} 6$$

$$\frac{4x - 6}{5} = 6$$

$$x = 9$$

Zdroj úloh:

KRYNICKÝ, Martin. Elektronické učebnice matematiky a fyziky. [online] 2010. [cit. 2021-02-21]. Dostupné z: <http://www.realisticky.cz/>

Příloha I: Historické úlohy

Úloha z hliněné destičky

Zadání:

Plocha A vytvořená součtem dvou čtverců je rovna 1000. Strana jednoho čtverce je rovna dvěma třetinám strany druhého zmenšeným o 10. Jak jsou velké strany čtverce?

Až budeš mít úlohu vypočítanou, zkus napsat postup řešení tak, jak by ho zapsali v Orientu, například: „Zdvojmocni deset, to dá 100; odečti 100 od 1000, to dá 900.“

Řešení:

$x^2 + y^2 = 1000, y = \frac{2x}{3} - 10$

$$\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0$$

$$13x^2 - 120x - 8100 = 0$$

$$D = (120)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-8100) = 14400 + 421200 = 435600$$

$$x_1 = \frac{120 + 660}{2 \cdot 13} = 30$$

$$x_2 = \frac{120 - 660}{2 \cdot 13} = -\frac{270}{13}$$

Rovnice má tedy jeden kladný kořen $x = 30$.

„Zdvojmocni deset, to dá 100; odečti 100 od 1000, to dá 900.“

Čtyřicet vynásob třemi, to dá 120. 900 vynásob 9, to dá 8100.

Zdvojmocni 120, to dá 14400. Vynásob mezi sebou zbylá čísla v rovnici, vzniklé číslo vynásob číslem 4, to dá -421200.

Od čísla 14400 odečti -421200, to dá 435600. Odmocni 435600, to dá 660.

Sečti 120 a 660, to dá 780. Vynásob 2 a 13, to dá 26. 780 vyděl 26, to dá 30.

Zdroj úloh:

STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963.

Matematika v devíti knihách

Zadání:

Dva lidé A, B obdrželi určitý počet mincí, který se má mezi ně rozdělit tak, že když k mincím A přidáme polovinu mincí B nebo k mincím B přidáme dvě třetiny mincí A, v obou případech dostaneme 48. Kolik mincí obdržel každý z lidí A, B?

Řešení:

A = 36, B = 24

Zdroj úloh:

KONFOROVIČ, Andrìj Hryhorovyč. *Významné matematické úlohy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-21848-2.

Příloha J: Přiřazování

Rovnice a nerovnice

Ekvivalentní úpravy	*Kvadratické rovnice*
Přičtení stejného čísla k oběma stranám rovnice	tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$
Přičtení stejného násobku neznámé k oběma stranám rovnice	diskriminant $D = b^2 - 4ac$
Vynásobení rovnice nenulovým číslem	rozklad kvadratického trojčlenu
Při užití neekvivalentní úpravy, provedeme zkoušku.	kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Lineární rovnice	*Iracionální rovnice*
tvar $ax + b = 0$, *kde* $a, b \in R$, $a \neq 0$	*užijeme neekvivalentní úpravu – umocňování*
řešením je jediné číslo $x = -\frac{b}{a}$	*zajistit platnost kořenů dvojím způsobem – zkouškou, podmínkami*
slovní úlohy o společné práci	*neznámá pod odmocninou*

Lineární nerovnice	*Kvadratické nerovnice*
$ax + b > 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$	$ax^2 + bx + c > 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$
$ax + b \geq 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$,
$ax + b < 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$
$ax + b \leq 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$

Exponenciální rovnice	*Nerovnice v podílovém tvaru*
neznámá v exponentu mocniny	Nenásobíme výrazem s neznámou!
rovnici převedeme na základní tvar $a^x = b$, kde $a > 0, a \neq 1$	Výrazy s neznámou převedeme na stejnou stranu.
$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$	Hledáme nulové body.

Rovnice s absolutní hodnotou	*Logaritmické rovnice*
neznámá v absolutní hodnotě	neznámá v argumentu logaritmu
$\lvert a\rvert = \langle\begin{matrix} a\ pro\ a \geq 0 \\ -a\ pro\ a < 0 \end{matrix}$	$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
řešením je sjednocení kořenů na různých intervalech	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
užití nulových bodů	$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
$\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$
$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ pokud $b \neq 0$	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Goniometrické rovnice	*Nealgebraické rovnice a nerovnice*
$sin2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$	Exponenciální rovnice a nerovnice
$cos2\alpha = cos^2x - sin^2x$	Logaritmické rovnice a nerovnice
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$	Goniometrické rovnice a nerovnice
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$	nelze vyjádřit ve tvaru algebraickém

Zdroj úloh:

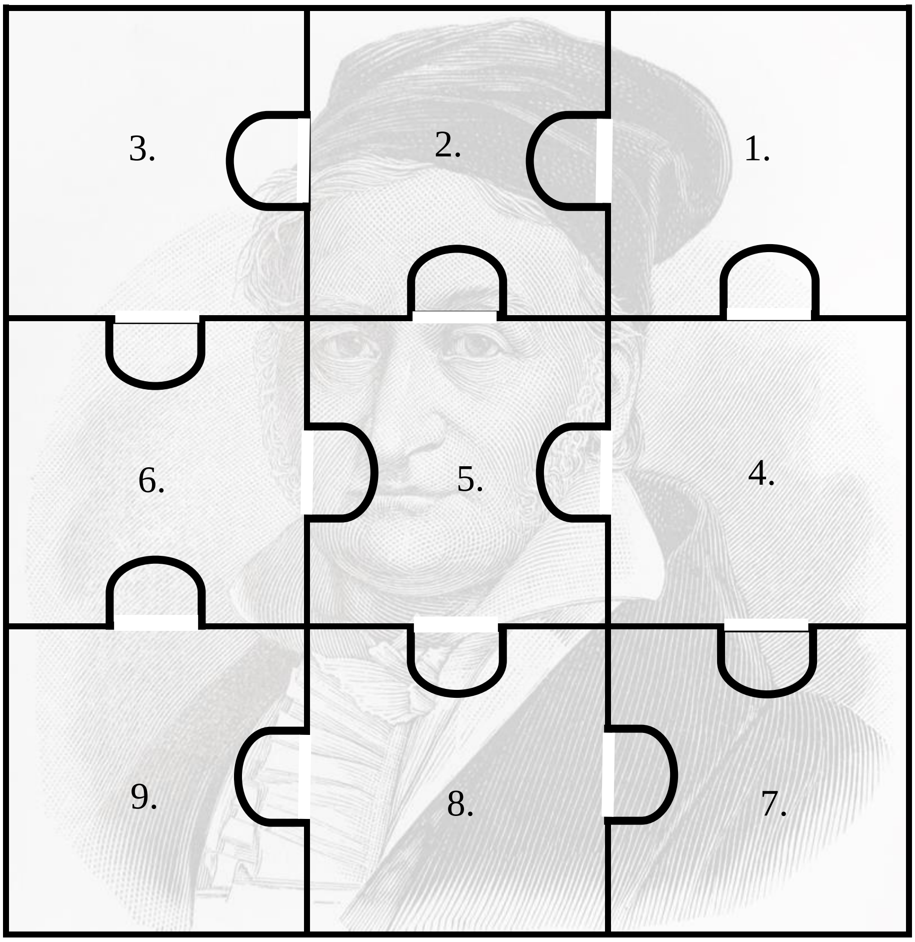
CHARVÁT, Jura a spol. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* Praha: Prometheus, 2015. ISBN 987-80-7196-362-2

Příloha K: Puzzle

Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

- německý matematik
- Gaussova eliminační metoda
    - způsob řešení soustav lineárních rovnic vylučovací metoda
    - dokázal základní větu algebry čtyřmi různými způsoby

Obrázek by neměl prosvítat, zadání by mělo být na čisté straně. Pro názornost jsem však obrázek prosvítila, aby bylo jasné, jak bude puzzle vypadat. Také jsem úlohy očíslovala, což jinak také studentům rozdám zadání bez očíslování. Jako obrázek můžeme použít například některé slavné matematiky.



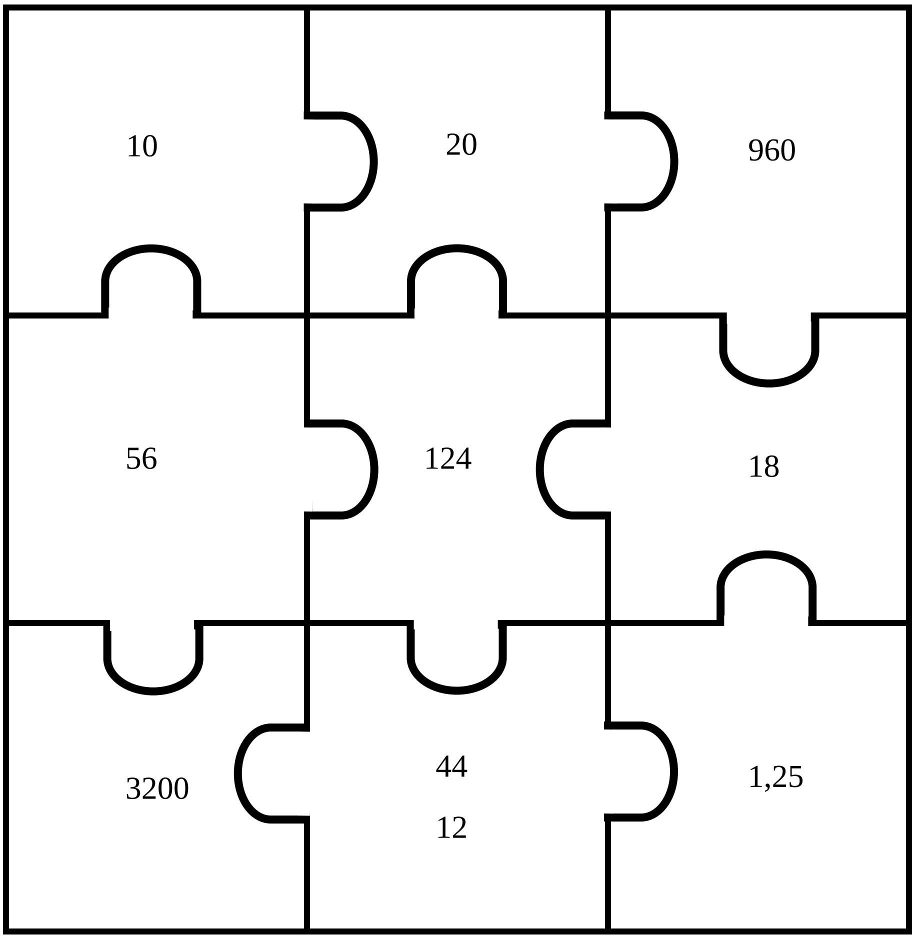
Příloha K1: Puzzle

Slovní úlohy:

1. V dílně mají vyrobit 200 kusů výrobku. Kdyby denně vyrobili o 5 výrobků více než určuje plán, skončili by práci o 2 dny dříve. Za kolik dní vyrobí 200 výrobků podle plánu?
2. Po dvojím snížení cen o stejné procento klesla cena zboží z 300 Kč na 192 Kč. O kolik procent byla vždy cena snížena?
3. Bazén by se naplnil jednou rourou za 48 hodin, druhou rourou za 56 hodin a vyprázdnil by se třetí rourou za 42 hodin. Když byly všechny tři roury otevřeny, nateklo do prázdného bazénu za 63 hodin 900m^3 vody. Jaký je objem bazénu?
4. Jestliže 70 krav spase trávu na louce za 24 dní, na kolik dní vystačí stejná louka pro 30 krav? Neuvažujme, že tráva dorůstá.
5. Podle závěti si pět synů rozdělilo stádo velbloudů takto: první syn si vzal polovinu stáda a 2 velbloudy, druhý syn si vzal polovinu zbytku a 2 velbloudy, třetí syn si vzal polovinu zbytku a 2 velbloudy, čtvrtý syn si vzal polovinu zbytku a 2 velbloudy a stejně pátý syn si vzal polovinu zbytku a 2 velbloudy. Jak velké bylo stádo?
6. Mezi dvěma přístavišti na řece jezdí parník. Cesta tam a zpět mu trvá 3 hodiny a 45 minut, po proudu pluje rychlostí 12 km/h a proti proudu 8 km/h. Určete vzdálenost mezi přístavišti.
7. Cena zboží byla dvakrát snížena. Nejprve o 15 procent, později ještě o 5 procent z nové ceny. Po tomto dvojím snížení cen se prodávalo za 2584 Kč. Určete původní cenu.
8. Otec je o 8 let starší, než je trojnásobný věk syn. Za 20 let bude otec dvakrát starší jako syn. Kolik jet je otci a kolik synovi?
9. Kolik vody je třeba odpařit z 2 litrů 3procentní soli, aby se roztok zahustil na 8 procent?

Řešení slovních úloh:

1. Podle plánu vyrobí 200 výrobků za 10 dní.
2. Cena byla vždy snížena o 20 %.
3. Objem bazénu je 960 m^3.
4. Stejná louka vydrží pro 30 krav 56 dní.
5. Stádo mělo 124 velbloudů.
6. Vzdálenost mezi přístavišti je 18 km.
7. Původní cena byla 3200 Kč.
8. Otci je 44 let a synovi 12 let.
9. Je potřeba odpařit 1,25 l vody.



Zdroje úloh:

BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Praha: Prometheus, 2018. ISBN 978-80-7196-104-8

ODVÁRKO, Oldřich a kol. *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990.

Příloha K2: Puzzle

Soustavy rovnic a nerovnic:

Soustavy rovnic a nerovnic (pro ZŠ):

1. $2x - 25y = 17$
   $15y - x = -6$

2. $x + 3y = 11$
   $3(x-1) - 5y = -68$

3. $5x - 14 = 3y$
   $7(3x - 2y) = 35$

4. $2x + y = 11$
   $3x - y = 9$

5. $2x + 2 = x - y$
   $3x + 2y = 0$

6. $3x + 4y = 253$
   $y = 5x$

7. $\frac{1}{3}x + \frac{7}{8}y = 8$
   $14x - 5y = 2$

8. $\frac{x}{5} - 2 = \frac{y}{10}$
   $5x + 45 = -7y$

9. $3(2x-5) + 2y = -41$
   $\frac{x-3y}{9} - y = 5$

Soustavy rovnic a nerovnic (pro SŠ):

1. $(x+4)(y-2) = (x-2)(y+13)$
   $(x-1)(y-3) = (x+2)(y-5)$

2. $2x + 3y + z = 15$
   $7x - y + z = 9$
   $x + 2y + z = 9$

3. $\frac{x+y+1}{x-y+1} = \frac{3}{2}$
   $\frac{x+y+1}{1-x+y} = 3$

4. $2x + y = 7$
   $|x - y|$

5. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9$
   $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 11$
   $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{2}{z} = 9$

6. $\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{y+5} = 9$
   $\sqrt{x+3} + \sqrt{y+5} = 6$

7. $x^2 + \sqrt{y} = 14$
   $x^4 + \sqrt{y} = 6$

8. $-2 \leq 2x^2 - x - 3 < 1 + 3x$

9. $x < \frac{1}{x} < 3$

Řešení soustav rovnic a nerovnic (pro ZŠ):

1. $[21; 1]$
2. $[-10; 7]$
3. $[13; 17]$
4. $[4; 3]$
5. $[4;\ -6]$
6. $[11; 55]$
7. $[3; 8]$
8. $[5; -10]$
9. $[-3; -4]$

Řešení soustav rovnic a nerovnic (pro SŠ):

$[4; 7]$	$[2; 4; -1]$	$\left[\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right]$
$\left[\frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right]; [3; 1]$	$\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right]$	$[6; 4]$
$[-2; 100]$; $[2; 100]$	$\left(1-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1; 1+\sqrt{3})$	$(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right)$

Zdroje úloh:

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2001, 303 s. ISBN 80-7196-099-3.

https://www.priklady.com/cs/index.php/rovnice-a-nerovnice/soustavy-linearnich-rovnic-a-nerovnic

Příloha L: Řady

Zadání:

Seřaďte lístky tak, aby řešení příkladů dávalo smysl. Určete podmínky a řešení ověřte zkouškou.

$\boldsymbol{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+7}=-4}$
$x+2-4\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}+4(x+7)=16$
$x+2-4\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}+4x+28=16$
$5x+14=4\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}$
$25x^2+140x+196=16(x+2)(x+7)$
$25x^2+140x+196=16(x^2+7x+2x+14)$
$25x^2+140x+196=16x^2+144x+224$
$9x^2-4x-28=0$
$D=1024$
$x_{1,2}=\dfrac{4\pm 32}{18}$
$K=\left\{-\dfrac{14}{9};2\right\}$

$$\boldsymbol{x^2 + 2x - 12 - 2\sqrt{x^2 + 2x + 12} = 0}$$
$substituce\ a = x^2 + 2x$
$a - 12 - 2\sqrt{a + 12} = 0$
$a - 12 = 2\sqrt{a + 12}$
$a^2 - 24a + 144 = 4(a + 12)$
$a^2 - 24a + 144 = 4a + 48$
$a^2 - 28a + 96 = 0$
$D = 400$
$a_{1,2} = \frac{28 \pm 20}{2}$
$a_1 = 4, \qquad a_2 = 24$
$Zkouška: L(4) \neq P(4), \qquad L(24) = P(24)$
$x^2 + 2x = 24$
$x^2 + 2x - 24 = 0$

$(x+6)(x-4)=0$
$x+6=0 \ \wedge \ x-4=0$
$K=\{-6;4\}$
$\boldsymbol{6x^4+17x^3+17x^2+17x+6=0}$
$6(x^4+1)+17x(x^2+1)+17x^2=0$
$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+17\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$
$substituce\ a=x+\frac{1}{x} \rightarrow \ a^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$
$6(a^2-2)+17a+17=0$
$6a^2+17a+5=0$
$D=169$
$a_1=-\frac{5}{2}, a_2=-\frac{1}{3}$
$a_1: x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$

$2x^2+5x+2=0$
$a_2\colon x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}$
$3x^2+x+3=0$
$K=\left\{-2;-\frac{1}{2}\right\}$
$\boldsymbol{6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0}$
$6(x^4+1)-35x(x^2+1)+62x^2=0$
$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$
$substituce\ a=x+\frac{1}{x}\rightarrow\ a^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$
$6(a^2-2)-35a+62=0$
$6a^2-35a+50=0$
$D=25$

$a_1 = \frac{5}{2}, a_2 = \frac{10}{3}$
$a_1 : x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$
$2x^2 - 5x + 2 = 0$
$a_2 : x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$
$3x^2 - 10x + 3 = 0$
$K = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2; 3\right\}$

Zdroje úloh:

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2001, 303 s. ISBN 80-7196-099-3.

Příloha M: Tajenka

Zadání:

Dnes budeme probírat rovnice a nerovnice s _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ .

1. $1+3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x-3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\right)=\frac{15}{2x-x^2}$
2. $1+\sqrt{x+11}=x$
3. $3\cdot 2^{1-x}=2^x+2^{x+1}$
4. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$
5. $\frac{3}{x+2}+\frac{5x}{4-x^2}=\frac{3}{x-2}+\frac{x}{x^2-4}$
6. $\sqrt{x+2}=x$
7. $3^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+3^{x+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=\frac{5}{3}$
8. $\frac{4}{5}\cdot 5^0+5^{-1}-25^x+20\cdot 25^{x-1}=0$
9. $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$
10. $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-10}=2$

A	5	H	7	O	- 2	V	6
B	- 1/2	I	4	P	3	W	- 1/3
C	1	J	- 1/4	Q	- 9	X	0
D	1/3	K	- 3	R	1/2	Y	- 9
E	2	L	- 6	S	- 8	Z	- 5
F	- 7	M	∅	T	- 1		
G	- 4	N	8	U	1/4		

Řešení:

Dnes budeme probírat rovnice a nerovnice s PARAMETREM.

Zdroje úloh:

JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-360-8.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2001, 303 s. ISBN 80-7196-099-3.

Příloha N: Dotazník

Vážený pane učiteli / paní učitelko,

jsem studentkou posledního ročníku magisterského studia na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Mým oborem je matematika a společenské vědy se zaměřením na vzdělávání pro střední školy. Metodickou příručku k učivu rovnice a nerovnice jsem vytvořila pro svou diplomovou práci. Tyto aktivity a hry můžete využít i Vy ve svých hodinách, na oplátku od Vás žádám zpětnou reflexi. Tímto výzkumným šetřením bych ráda zmapovala problematiku používání aktivizačních metod ve výuce matematiky. Proto bych Vás chtěla požádat o vyplnění tohoto dotazníku, který je součástí mé diplomové práce. Dotazník je anonymní. Odpovídejte prosím pravdivě.

Předem děkuji za Váš čas, Vaši ochotu a upřímnost.

Bc. Lenka Vaňková

Informace o respondentovi

1. Matematiku učíte na:

a) II. stupni ZŠ **b)** SŠ **c)** víceletém gymnáziu

2. Délka vaší praxe ve školství:

a) do 5 let **b)** 6-10 let **c)** 11-20 let **d)** 21 let a více

Používání aktivizačních metod ve výuce matematiky

1. Používáte ve výuce matematiky nějaké aktivizační výukové metody?

a) ano, používám **b)** ne, nepoužívám **c)** neumím se rozhodnout

2. Jak často zařazujete do výuky matematiky následující metody?

(Označte prosím výraz, který nejvíce odpovídá skutečnosti. Pokud danou metodu neznáte, označte písmeno N.)

a) didaktické hry, hry, soutěže

stále často občas zřídka nikdy N

b) problémové metody, heuristické metody

stále často občas zřídka nikdy N

c) diskusní metody, diskuse

stále často občas zřídka nikdy N

d) projektová výuka

stále často občas zřídka nikdy N

e) samostatná práce

stále často občas zřídka nikdy N

f) práce ve skupinách

stále často občas zřídka nikdy N

g) situační metody, případové metody

stále často občas zřídka nikdy N

h) inscenační metody, hraní rolí

stále často občas zřídka nikdy N

3. Používáte k aktivizaci žáků v hodinách matematiky nějakou jinou výše neuvedenou metodu? Pokud ano, níže napište, jak tuto metodu nazýváte a stručně ji popište.

4. Pokud ve výuce matematiky používáte aktivizační metody, z jakého zdroje nejčastěji čerpáte? (Pokud aktivizační metody nepoužíváte, na otázku neodpovídejte.) (Označte prosím pouze jednu odpovědí.)

a) Internet **b)** odborné publikace **c)** hledám inspiraci u kolegů

d) vytvářím si své vlastní **e)** jiné (prosím popište)

5. K jakým účelům používáte ve výuce matematiky aktivizační metody? (Opět platí, že pokud aktivizační metody nepoužíváte, na otázku neodpovídáte.)

Aktivizační metody používám:

a) k výkladu nové látky ANO / NE

b) k procvičování učiva ANO / NE

c) k opakování učiva ANO / NE

d) k diagnostice, ke zkoušení ANO / NE

e) ke shrnutí učiva ANO / NE

6. Je podle Vás vhodné zavádět do výuky matematiky aktivizační metody?

a) ano **b)** ne **c)** nevím

Zpětná reflexe k příručce:

1. Využijete příručku ve své výuce?

ano spíše ano nevím spíše ne ne

2. Kterou aktivitu rádi vyzkoušíte ve své výuce matematiky? (Můžete vybrat libovolný počet aktivit.)

Bludiště	Člověče, nezlob se!		
Černý Petr	Domino	Kvarteto	Pexeso
Bingo	Hadi	Historické úlohy	Myšlenková mapa
Puzzle	Přiřazování	Tajenka	Řady

3. Jaká aktivita se vám líbí nejvíce a ve svých hodinách ji určitě využijete? Svou odpověď odůvodněte.

4. Kterou aktivitu byste ve své hodině nezkusili? Svou odpověď odůvodněte.

5. Aplikujete některou aktivitu i na jinou látku v matematice? Pokud ano, tak prosím uveďte, jakou a na kterou látku.

To je vše!

Děkuji Vám a přeji mnoho úspěchů.

Příloha O: Vyhodnocení dotazníku

<u>Informace o respondentovi</u>

1. Matematiku učíte na:

a) II. stupni ZŠ	2x
b) SŠ	6x
c) víceletém gymnáziu	3x

2. Délka vaší praxe ve školství:

a) do 5 let	5x
b) 6-10 let	3x
c) 11-20 let	2x
d) 21 let a více	1x

<u>Používání aktivizačních metod ve výuce matematiky</u>

1. Používáte ve výuce matematiky nějaké aktivizační výukové metody?

a) ano, používám 11x

b) ne, nepoužívám

c) neumím se rozhodnout

2. Jak často zařazujete do výuky matematiky následující metody?

(Označte prosím výraz, který nejvíce odpovídá skutečnosti. Pokud danou metodu neznáte, označte písmeno N.)

a) didaktické hry, hry, soutěže

stále	často	občas	zřídka	nikdy	N
	1x	7x	1x	2x	

b) problémové metody, heuristické metody

stále	často	občas	zřídka	nikdy	N
	2x	2x	4x	3x	

c) diskusní metody, diskuse

stále	často	občas	zřídka	nikdy	N
2x	4x	2x	3x		

d) projektová výuka

stále	často	občas	zřídka	nikdy	N
	1x	1x	3x	6x	

e) samostatná práce

stále	často	občas	zřídka	nikdy	N
5x	6x				

f) práce ve skupinách

stále	často	občas	zřídka	nikdy	N
1x	2x	6x	2x		

g) situační metody, případové metody

stále	často	občas	zřídka	nikdy	N
	2x	2x	3x	4x	

h) inscenační metody, hraní rolí

stále	často	občas	zřídka	nikdy	N
				11x	

3. Používáte k aktivizaci žáků v hodinách matematiky nějakou jinou výše neuvedenou metodu? Pokud ano, níže napište, jak tuto metodu nazýváte a stručně ji popište.

- *„Používám velice často výukové platformy (např. Kahoot, Plickers, Learningapps apod). Nejčastěji ale Kahoot, což je aplikace pro fixaci učiva pomocí kvízů/otázek/dopisování odpovědí. Promítám otázky na plátno a studenti pracují se svým mobilním telefonem.“*
- *„ne/matematické aktivity – prvky dramatické výchovy atd – osvědčilo se pro aktivizaci studentů zejména při sedmé, osmé odpolední hodině“*

4. Pokud ve výuce matematiky používáte aktivizační metody, z jakého zdroje nejčastěji čerpáte? (Pokud aktivizační metody nepoužíváte, na otázku neodpovídejte.) (Označte prosím pouze jednu odpovědí.)

a) Internet	5x
b) odborné publikace	2x
c) hledám inspiraci u kolegů	1x
d) vytvářím si své vlastní	3x
e) jiné (prosím popište)	

5. K jakým účelům používáte ve výuce matematiky aktivizační metody? (Opět platí, že pokud aktivizační metody nepoužíváte, na otázku neodpovídáte.)

Aktivizační metody používám:

a) k výkladu nové látky	5x	ANO / NE	6x
b) k procvičování učiva	11x	ANO / NE	
c) k opakování učiva	10x	ANO / NE	1x
d) k diagnostice, ke zkoušení	4x	ANO / NE	7x
e) ke shrnutí učiva	7x	ANO / NE	4x

6. Je podle Vás vhodné zavádět do výuky matematiky aktivizační metody?

a) ano	10x
b) ne	
c) nevím	1x

<u>Zpětná reflexe k příručce:</u>

1. Příručku využiji ve své výuce

ano	spíše ano	nevím	spíše ne	ne
5x	2x	3x	1x	

2. Kterou aktivitu rádi vyzkoušíte ve své výuce matematiky (můžete vybrat libovolný počet aktivit)

Bludiště	Člověče, nezlob se!		
5x	5x		
Černý Petr	Domino	Kvarteto	Pexeso
6x	6x	6x	5x
Bingo	Hadi	Historické úlohy	Myšlenková mapa
4x	5x	5x	7x
Puzzle	Přiřazování	Tajenka	Řady
6x	10x	9x	6x

3. Jaká aktivita se vám líbí nejvíce a ve svých hodinách ji určitě využijete? Svou odpověď odůvodněte.

- *„Člověče, nezlob se! Nejvíce se mně líbí tato aktivita – pravidla velmi rychle pochopí všichni žáci, protože většina se s touto hrou již určitě někdy setkala. Samotnou by mě tato aktivita nenapadla, ale je to efektivní aktivita, která určitě bude žáky bavit. Tuto aktivitu bych také spíše zařadila kvůli časové náročnosti do nějaké volnější hodiny – před Vánocemi, nebo by se dala využít i v hodině suplované (pokud by příklady byly upraveny – např. početní operace s přirozenými čísly, nebo jakékoliv jiný tematický okruh daného ročníku apod.)“*
- *„Nejvíce se mi líbí aktivita Přiřazování. Je vhodná na závěrečné shrnutí a skupinovou práci.“*
- *„Nejvíce se mi líbí aktivita Bludiště a Člověče, nezlob se. Hodí se na opakování a pravidla jsou známá. Také mi přijde dobrý nápad používat myšlenkové mapy na shrnutí učiva.“*
- *„Řady, protože studenti budou sami přemýšlet nad postupem u nového typu příkladů a nebudou si tak pouze opisovat ukázkový příklad z učebnice.“*
- *„Nejvíce mě zaujala Myšlenková mapa. V hodinách ji určitě využiji, protože žáci budou díky této hře procvičovat komplexní přemýšlení nad daným tématem, což žáci často neumí a tato schopnost jim chybí.“*
- *„Přiřazování – vhodné pro utřídění a přehled o látce.“*

- *„Nejvíce se mi líbila hra Bludiště. Je to skvělá příležitost pro aktivitu na celou hodinu a velice pěkné zopakování látky. Bohužel nyní učím pouze první ročníky – po nějaké době s nimi Bludiště jistě zkusím."*
- *„Přijdou mi zajímavé řady –* nikdy jsem podobný *úkol nezadávala, ale na serveru umimmatematiku.cz jsem narazila na podobná zadání a líbila se mi v tom, že studenty nutí přemýšlet jinak."*
- *„Myšlenková mapa – používám jí i při úvodu do nového tématu a na konci srovnáváme."*
- *„Černý Petr, líbí se mi, že každý musí přemýšlet nad svými kartami a nikdo jiný nevidí, co má v ruce a co má počítat. Karty, které k sobě patří, bych nijak neoznačovala. To by se mohlo stát, že by studenti hráli klasického Černého Petra a nezajímali se o příklady."*
- *„Myšlenková mapa. Požadoval bych u ní navíc od studentů vymyslet ke každému typu rovnic a nerovnic příklad. Zadám formou domácího úkolu na konci tématu."*

4. Kterou aktivitu byste ve své hodině nezkusili? Svou odpověď odůvodněte.

- *„Všechny aktivity mě zaujaly, proto nemůžu vybrat, kterou bych vůbec nezkusila. Většinu aktivit bych si ale musela upravit (pro druhý stupeň ZŠ)."*
- *„Zkusila bych všechny aktivity. Některé bych možná upravila pro potřeby konkrétní třídy. Jako poslední bych vyzkoušela Puzzle. Myslím si, že to je náročné* na *přípravu (stříhání)."*
- *„Puzzle, protože je pro mě náročné na přípravu."*
- *„Bludiště a Člověče, nezlob se, protože zaberou hodně času."*
- *„Nejspíš by to bylo Bludiště, které je příliš časově náročné."*
- *„Bludiště, Člověče nezlob se – přijdou mi zdlouhavé, časově extrémně náročné – jistě by se nestihly dohrát ve výuce a myslím, že by se u nich mohli někteří studenti flákat nebo nudit."*
- *„Pro rozmanitost bych vyzkoušela vše."*
- *„Bludiště a Člověče, nezlob se! Z důvodu jejich vysoké časové náročnosti."*

5. Aplikujete některou aktivitu i na jinou látku v matematice? Pokud ano, tak prosím uveďte, jakou a na kterou látku.

- *„Rozklady výrazů – domino, přiřazování, Úhly – pexeso, Funkce – domino, přiřazování"*
- *„Tvořím myšlenkové mapy jako shrnutí větších celků napříč celou látkou v matematice. Například v geometrii na shrnutí vzorečků."*
- *„Bludiště a Člověče, nezlob se! Dám do nich příklady z celého pololetí nebo z celého školního roku. Budeme je hrát na předvánoční hodině, na konci školního roku a také bych to použila hned na začátku školního roku, kdy opakujeme látku. Také je použiju jako seznamovací hru pro prváky, kdy jim dám příklady ze ZŠ a rozdělím je namátkou do skupin."*
- *„Tajenku s příklady staré látky na uvedení nového tématu. Takže zopakujeme naposledy starou látku, než ji opustíme."*
- *„Historické úlohy, u kterých nebudu rozlišovat tématiku a budu příklady rozebírat namátkou během celého školního roku."*
- *„Např. myšlenkovou mapu pro jakoukoliv látku."*
- *„Myšlenková mapa – kombinatorika"*
- *„Např. Domino – vlastnosti funkcí, definiční obor, obor hodnot atd., Tajenka – Planimetrie – základní pojmy., Černý Petr – obvody a obsahy rovinných obrazců."*
- *„Soutěž po řadách. Pro každou řadu si vymyslím stejný počet příkladů tak, aby každý z řady měl minimálně jeden příklad. Studenti se střídají u tabule a počítají příklady. Řada, která má všechny příklady jako první a správně spočítané, vyhrává. Dá se aplikovat na většinu témat v matematice. U některých témat (např. rovnice) by se mohlo stát, že to bude aktivita na celou hodiny. Využívám na „rozehřátí" na začátku hodiny, na procvičení výrazů, zopakování vzorečků…"*
- *„Myšlenková mapa lze využít pro všechna témata v matematice. Mohla by to být také dobrá forma opakování před závěrečným testem."*