

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

EMÍLIE SMREČKOVÁ

III. ročník – prezenční studium

Obor: Matematika a společenské vědy se zaměřením na vzdělávání

Soustavy lineárních rovnic a nerovnic

Bakalářská práce

Vedoucí práce: Mgr. Eva Hotová, Ph.D.

OLOMOUC 2010

Prohlášení

Prohlašuji, že bakalářskou práci na téma „Soustavy lineárních rovnic a nerovnic“ jsem vypracovala zcela samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 15. dubna 2010

.....

Emílie Smrečková

Poděkování

Děkuji Mgr. Evě Hotové, Ph.D., za odborné vedení bakalářské práce a vstřícné poskytování informací.

OBSAH

ÚVOD	1
1. ROVNICE, NEROVNICE A JEJICH ŘEŠENÍ.....	2
1.1 LINEÁRNÍ ROVNICE A NEROVNICE S JEDNOU NEZNÁMOU A JEJICH SOUSTAVY	5
1.2 LINEÁRNÍ ROVNICE A NEROVNICE S VÍCE NEZNÁMÝMI A JEJICH SOUSTAVY	9
2. ZÁKLADNÍ POJMY	15
3. METODY ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC	23
ZÁVĚR.....	40
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	41

ANOTACE

ÚVOD

Téma této práce „Soustavy lineárních rovnic a nerovnic“ jsem si zvolila, protože se s ním setkáváme v průběhu celého našeho studia, počínaje základní školou, kde se probírají jednoduché rovnice a nerovnice, přes střední školu, kde se studenti setkávají se složitějšími rovnicemi, nerovnicemi a jejich soustavami, až po studium na vysoké škole, kde se tyto poznatky značně rozšiřují o nové znalosti a metody řešení a studenti jsou tak schopni vyřešit rovnice, nerovnice i jejich soustavy mnoha způsoby a užít různé metody.

Cílem této práce bude shrnout dosavadní poznatky o této problematice, teoreticky je vymežit a posléze na konkrétních úlohách ukázat konkrétní metody řešení.

V první části vymežím základní pojmy této problematiky a znalosti o rovnicích, nerovnicích a jejich soustavách o jedné či více neznámých .

V další části budu vytvářet základní přehled pojmů potřebných k užití metod řešení soustav rovnic, které budu řešit v následující kapitole. Mezi tyto pojmy patří např. matice, determinanty, Frobeniova věta.

V poslední části vymežím jednotlivé metody řešení soustav rovnic. Uvedu jejich princip a postup řešení. K jednotlivým metodám uvedu příklad soustavy rovnic o dvou a třech neznámých. Vyřeším je a uvedu postup řešení obou soustav pomocí dané metody.

Čtenář by měl po prostudování této práce získat ucelený přehled o problematice rovnic a nerovnic, jejich soustav a řešení. Měl by být schopen tyto znalosti zužitkovat a umět je použít v praxi.

1. ROVNICE, NEROVNICE A JEJICH ŘEŠENÍ

„Pod pojmem rovnice se v matematice obvykle rozumí jakákoliv výroková forma o n proměnných $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jejímž oborem proměnnosti je množina všech reálných čísel. Řešením této rovnice rozumíme pak každý prvek z oboru pravdivosti výrokové formy $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tj. každou uspořádanou n -tici reálných čísel $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, pro niž je výrok $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pravdivý.“ (Libicher, J.; Burian, K. 1975, s. 96)

Proměnná se v případě rovnic nahrazuje speciálnějším termínem **neznámá**. (Libicher, J.; Burian, K. 1975)

„Jsou-li všechna f, g funkce proměnné x definované na množině $A \subset \mathbb{R}$, úlohu: najít všechna $x \in A$, pro která funkce f a g nabývají týchž funkčních hodnot, zapíšeme ve tvaru:

$$f(x) = g(x),$$

kde $x \in A$ a nazýváme ji **rovnici s neznámou** x ; $f(x)$ je levá strana rovnice, $g(x)$ pravá strana rovnice, množina A se nazývá obor řešení neboli definiční obor rovnice.“ (Kubát, J. 1993, s. 42)

Rovnice v anulovaném tvaru je taková, pro kterou platí $g(x) = 0$. (Polák, J. 1983)

„Číslo x , které vyhovuje dané rovnici (tj. jeho dosazením do rovnice za proměnnou se převede rovnice na pravdivou rovnost) se nazývá **kořen rovnice** neboli řešení rovnice.“ (Kubát, J. 1993, s. 42)

Řešit rovnice znamená:

- najít libovolné x vyhovující dané rovnici,
- najít množinu všech x vyhovujících dané rovnici,
- najít postup, kterým určíme všechny kořeny rovnice. (Kubát, J. 1993)

Definiční obor rovnice $L(x) = P(x)$ je průnikem definičních oborů výrazů $L(x)$, $P(x)$. (Riečan, B. 1987)

„Jestliže sestrojíme v pravoúhlé soustavě souřadnic $(0; x, y)$ grafy reálných funkcí f, g reálné proměnné x představují x -ové souřadnice společných bodů (průniků) obou grafů reálné kořeny rovnice $f(x) = g(x)$. Říkáme pak, že jsme provedli grafické řešení rovnice.“ (Polák, J. 1983, s. 160)

„Nerovnice $L(x) < P(x)$, resp. $L(x) > P(x)$, $L(x) \leq P(x)$, $L(x) \geq P(x)$, s neznámou $x \in M$ (kde M je daný číselný obor, $M \subset R$) je výroková forma, která představuje zápis úlohy: jsou dány výrazy $L(x)$, $P(x)$ s proměnnou x a mají se určit všechny takové její hodnoty $x \in M$, pro něž platí $L(x_k) < P(x_k)$, resp. $L(x_k) > P(x_k)$, $L(x_k) \leq P(x_k)$, $L(x_k) \geq P(x_k)$.

Tato čísla x_k se nazývají kořeny (řešení) nerovnice a číselný obor M se nazývá obor hodnot nerovnice. Množinu všech kořenů nerovnice značíme $K (K \subset M \subset R)$.“ (Polák, J. 1996, s. 206)

„Řešit nerovnici v množině M znamená určit množinu všech jejích kořenů patřících do množiny M .

Dosaďme-li libovolné číslo z oboru pravdivosti za proměnnou do výrokové formy, dostaneme pravdivý výrok.“ (Schmidtmayer, J., Rozenský, Z., Šíkola, B. 1978, s. 177)

Abychom získali kořen rovnice, musíme ji upravit. Postup, kterým z dané rovnice získáme jinou rovnici se stejnou množinou kořenů se nazývá *ekvivalentní úprava* rovnice. Jejím cílem je zjednodušování rovnic tak, abychom mohli vypočítat neznámou. (Herman, J. a kol. 1996; Schmidtmayer, J., Rozenský, Z., Šíkola, B. 1978,)

„Jestliže P_1 je obor pravdivosti nějaké rovnice, P_2 obor pravdivosti rovnice po úpravě, pak úprava při které $P_1 = P_2$ se nazývá *ekvivalentní úprava* a nová rovnice je ekvivalentní s původní. Jestliže $P_1 \subset P_2$, $P_1 \neq P_2$, pak nová rovnice je důsledkem původní rovnice a úprava se nazývá *implikační*.“ (Schmidtmayer, J., Rozenský, Z., Šíkola, B. 1978, s. 158)

Jestliže jsou f a g dvě funkce definované na nějaké množině, pak rovnice $f(x) = 0$ a $g(x) = 0$ nazýváme ekvivalentní, pokud mají stejné kořeny. (Schwarz, Š. 1968)

Provedeme-li s libovolnou rovnicí některou z těchto úprav:

- násobení obou stran rovnice nenulovým číslem,
- přičtení téhož čísla k oběma stranám rovnice,
- přičtení libovolného násobku mocniny neznámé s přirozeným exponentem k oběma stranám rovnice,

vznikne rovnice ekvivalentní s původní.

Provedeme-li s libovolnou nerovnicí některou z těchto úprav:

- přičtení téhož čísla k oběma stranám nerovnice,

- přičtení libovolného násobku neznámé k oběma stranám nerovnice,
- přičtení libovolného násobku mocniny s přirozeným exponentem k oběma stranám nerovnice,
- násobení obou stran nerovnice týmž kladným číslem,
- násobení obou stran nerovnice týmž záporným čísle se současnou změnou smyslu nerovnice (mění se smysl nerovnosti, znak $<$ je nutno nahradit znakiem $>$ a obráceně),

vznikne nerovnice ekvivalentní s původní.

Provedeme-li v dané soustavě rovnic některé z těchto úprav:

- nahrazení libovolné rovnice rovnicí s ní ekvivalentní,
- přičtení libovolného násobku jedné rovnice k jiné rovnici soustavy, (k -násobkem dané rovnice rozumíme rovnici, která vznikne tak, že všechny koeficienty a absolutní člen dané rovnice násobíme týmž činitelem k)
- vypuštění rovnice, která je ekvivalentní s některou jinou rovnicí soustavy,
- záměnou pořadí rovnic,

je upravená soustava ekvivalentní s původní soustavou. (Hruša, K., Dlouhý, Z., Rohlíček, J. 1977)

Implikační úprava je zejména umocnění obou stran rovnice, nerovnice týmž přirozeným číslem. (Polák, J. 1996)

Zkouška je logicky nutnou fází při řešení v nichž se užívají neekvivalentní úpravy rovnic (nerovnic), což jsou zejména:

- násobení rovnice (nerovnice) výrazem s proměnnou,
- umocňování rovnice (nerovnice),
- dosazování nových proměnných místo výrazů, jejichž obor hodnot byl zjišťován. (Riečan, B. 1987)

Zkouška (kontrola) má za cíl zjistit, které z prvků množiny jsou kořeny dané rovnice. Postupně se dosazuje každé číslo do levé strany dané rovnice, dostaneme nějaké číslo L , a samostatně do pravé strany rovnice, čímž dostaneme číslo P . Platí-li $L = P$, pak dosazované číslo je kořenem dané rovnice. (Polák, J. 1983)

1.1 LINEÁRNÍ ROVNICE A NEROVNICE S JEDNOU NEZNÁMOU A JEJICH SOUSTAVY

Klasifikace rovnic s jednou neznámou - typy rovnic resp. nerovnic rozlišujeme podle toho, jaké jsou v rovnici $f(x) = g(x)$, resp. v nerovnici $f(x) \geq g(x)$ funkce f, g :

- a) algebraické (lineární, kvadratické) (př. $3x^2 + x + 2 = 0$)
- b) iracionální (př. $2 + \sqrt{x-7} = \sqrt{x+9}$)
- c) exponenciální a logaritmické (př. $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$; $4\log_3(2x-1) = 12$)
- d) goniometrické. $\left(\cos\left(3x + \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\right)$

(Polák, J. 1983, Petáková J. 1998, Vošický, Z. 1997)

Rovnice $f(x) = g(x)$ o jedné neznámé se nazývá lineární rovnice neboli rovnice 1. stupně, jestliže ji lze vyjádřit ekvivalentními úpravami ve tvaru:

$$ax + b = 0, \text{ kde } a \in R, b \in R \text{ a } a \neq 0,$$

má rovnice právě jedno řešení (jeden kořen rovnice).

Obecně pro rovnici tvaru $ax + b = 0$, kde $a \in R, b \in R$, nastane vždy právě jedna z možností:

- a) $a \neq 0$: rovnice má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$,
- b) $a = 0 \wedge b = 0$: $0 \cdot x = 0$
 $x = t$, kde $t \in R$; tzn., že rovnice má nekonečně mnoho řešení,
kořenem je každé reálné číslo.
- c) $a = 0 \wedge b \neq 0$: $0 \cdot x = b$
 $x \in \{\}$, tzn., že rovnice nemá řešení. (Kubát, J. 1993)

Příklad: Rovnice o jedné neznámé, $x \in R$.

$$3x + 5 = 7x + 13$$

Řešení: Ekvivalentními úpravami získáme kořen rovnice.

$$3x + 5 = 7x + 13$$

$$-4x = 8$$

$$x = -2$$

Výrokovou formuli $V(x): ax + b < 0; a, b \in R, a \neq 0$ nazýváme lineární nerovnicí s jednou neznámou. Řešíme ji v množině R , popř. v některé její podmnožině.

Kořeny nerovnice $ax + b < 0$ jsou dány nerovnostmi:

$$a) \ x < -\frac{b}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0, \text{ pak platí: } P = \left\{ x; x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a} \right); a > 0 \right\}$$

$$b) \ x > -\frac{b}{a} \quad \text{pro} \quad a < 0, \text{ pak platí: } P = \left\{ x; x \in \left(-\frac{b}{a}; \infty \right); a < 0 \right\}. \quad (\text{Schmidtmayer, J.,}$$

Rozenský, Z., Šíkola, B. 1978)

Je-li v nerovnici $ax > b$, resp. $ax < b$, s neznámou $x \in R$ nulový koeficient a , $a = 0$; není tato rovnice lineární a řešení je následující:

a) Je-li $b \geq 0$, nemá daná nerovnice žádné řešení,

b) Je-li $b < 0$, má daná nerovnice nekonečně mnoho řešení, všechna $x \in (-\infty, \infty)$.

(Polák, J. 1983)

Grafickým znázorněním množin kořenů na číselné ose si postup řešení lze usnadnit. Sestrojíme grafy funkcí f, g v pravouhlé soustavě souřadnic $(0; x, y)$. Při grafickém řešení nerovnice $f(x) > g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$ určíme ty body grafů funkce f , které leží nad grafem resp. pod grafem funkce g ; jejich x -ové souřadnice jsou řešeními dané nerovnice. (Schmidtmayer, J., Rozenský, Z., Šíkola, B. 1978; Polák, J. 1983)

Příklad: Nerovnice o jedné neznámé, $x \in R$.

$$6x + 1 \geq 2(x - 5) - 1$$

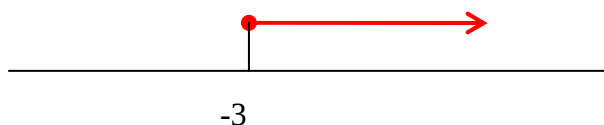
Řešení: Nerovnici upravíme a zakreslíme množinu řešení.

$$6x + 1 \geq 2(x - 5) - 1$$

$$6x + 1 \geq 2x - 10 - 1$$

$$4x \geq -12$$

$$x \geq -3$$



Při řešení nerovnic typu $A(x) \cdot B(x) < 0$, $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$, $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$

užíváme vlastností pro součin a podíl čísel:

Jestliže $a, b \in R$, pak:

$$\text{I. } a \cdot b > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$\text{II. } a \cdot b < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

$$\text{III. } \frac{a}{b} > 0 \wedge b \neq 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$\text{IV. } \frac{a}{b} < 0 \wedge b \neq 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0).$$

Tyto vlastnosti můžeme aplikovat i na součin a podíl výrazů $A(x), B(x)$. (Schmidtmayer, J., Rozenský, Z., Šikola, B. 1978)

Množina rovnic a nerovnic s jednou neznámou x

$f_1(x) * g_1(x), f_2(x) * g_2(x), \dots, f_n(x) * g_n(x)$, kde znak „*“ značí „větší než“, „rovno“ nebo „menší než“ se nazývá soustava rovnice nebo nerovnic o jedné neznámé.

Jednotlivé rovnice nebo nerovnice jsou spojeny:

- prostřednictvím znaku $\vee$ (tj. platí aspoň jedna z nich), řešením soustavy je sjednocení řešení jednotlivých rovnic, resp. nerovnic (znaku $\vee$ odpovídá znak $\cup$)
- prostřednictvím znaku $\wedge$ (tj. platí zároveň), řešením soustavy je průnik řešení jednotlivých rovnic, resp. nerovnic (znaku $\wedge$ odpovídá znak $\cap$) (Polák, J. 1983)

Řešení soustavy rovnic a nerovnic o jedné neznámé

1. rovnice v součinném tvaru

Jde o typ rovnice:

$V_1(x) \cdot V_2(x) = 0$, kde $V_1(x)$ je výraz s proměnnou, $V_2(x)$ další výraz s touž proměnnou či neznámou.

Způsob řešení:

$V_1(x) \cdot V_2(x) = 0$ právě když je alespoň jeden z činitelů roven nule, tedy $V_1(x) = 0$ nebo $V_2(x) = 0$

např. $(2x-8)(x+1)=0, x \in R$

pak platí: $(2x-8)=0 \wedge (x+1)=0$

$$x=4 \wedge x=-1$$

2. rovnice v podílovém tvaru

Jde o typ rovnice:

$$\frac{V_1(x)}{V_2(x)}=0, \text{ vede k soustavě rovnice a nerovnice } V_1(x)=0 \wedge V_2(x) \neq 0$$

např. $\frac{2x-5}{x+3}=0, x \in R$

pak platí: $2x-5=0 \wedge x+3 \neq 0$

$$x=\frac{5}{2} \wedge x \neq -3$$

3. nerovnice v součinném tvaru

Jde o typ nerovnic:

$$V_1(x) \cdot V_2(x) > 0 \quad V_1(x) \cdot V_2(x) < 0$$

$$V_1(x) \cdot V_2(x) \geq 0 \quad V_1(x) \cdot V_2(x) \leq 0$$

$$V_1(x) \cdot V_2(x) \neq 0$$

Řešení tohoto typu nerovnic vede vždy k řešení soustavy nerovnic, např.

$$V_1(x) \cdot V_2(x) > 0 \Leftrightarrow \{V_1(x) > 0 \wedge V_2(x) > 0\} \vee \{V_1(x) < 0 \wedge V_2(x) < 0\}.$$

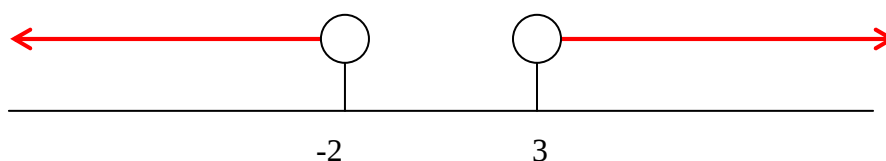
Postup řešení lze provést úsporněji, než řešit jednotlivé nerovnice.

Např. $(7x+14) \cdot (3-x) < 0, x \in R$

Pak platí: Nulové body jsou $x=-2$ a $x=3$. Výrazy $(7x+14)$ a $(3-x)$ rozdělí $R=(-\infty, \infty)$ na intervaly $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ a $(3, \infty)$. Zapišeme si do tabulky výrazy a intervaly a určíme u každého činitele $V_1(x)$ a $V_2(x)$ kterých hodnot nabývá v jednotlivých intervalech. Poté doplníme znaménko součinu v jednotlivých podmnožinách.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, \infty)$
$7x - 14$	–	+	+
$3 - x$	+	+	–
$(7x + 14) \cdot (3 - x)$	–	+	–

Nerovnici vyhovují pouze intervaly se záporným znaménkem, tedy intervaly $(-\infty, -2)$ a $(3, \infty)$.



(Pešková, E.; Mulačová, J. 1996)

„Rovnice $f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x) = 0$ s neznámou $x \in R$ je splněna právě tehdy, je-li splněna soustava rovnic

$$f_1(x) = 0 \vee f_2(x) = 0 \vee \dots \vee f_n(x) = 0.$$
 (Polák, J. 1983, s. 164)

1.2 LINEÁRNÍ ROVNICE A NEROVNICE S VÍCE NEZNÁMÝMI A JEJICH SOUSTAVY

Rovnice

$$ax + by = c,$$

kde $a, b, c \in R$, se nazývá lineární rovnice se dvěma neznámými x, y .

Rovnice

$$ax + by + cz = d,$$

kde $a, b, c, d \in R$, se nazývá lineární rovnice se třemi neznámými x, y, z . (Charvát, J.; Zhouf, J.; Boček, L. 1999; Čermák, M., Kamarýt, A., Kořínková, H. 1967)

Rovnice o dvou neznámých x, y v oboru $M \subset R$:

$$f(x, y) = g(x, y), \quad x \in M, y \in M,$$

resp. rovnice o třech neznámých x, y, z v oboru $M \subset R$:

$$f(x, y, z) = g(x, y, z), \quad x \in M, y \in M, z \in M$$

vyjadřuje úlohu určit všechny uspořádané dvojice $[x, y]$, resp. uspořádané trojice $[x, y, z]$ čísel z daného číselného oboru, pro něž dané funkce f, g proměnných x, y , resp. x, y, z jsou definovány a nabývají stejných funkčních hodnot. Každá taková uspořádaná dvojice, resp. trojice se nazývá řešením rovnice o dvou, resp. třech neznámých. (Polák., J. 1983)

„Rovnice o více neznámých, u nichž se za neznámé připouštějí pouze celá čísla, tj. řešení se hledá v oboru celých čísel, se nazývají diofantovské (někdy též neurčité) rovnice.“ (Polák, J. 1983, s. 221)

Příklad: Rovnice o dvou neznámých, $x \in R$.

$$2x - y = x + 3y - 1$$

Řešení: Řešením této rovnice je nekonečně mnoho uspořádaných dvojic.

Rovnici upravíme a získáme obecné vyjádření řešení.

$$2x - y = x + 3y - 1$$

$$-4y = -x - 1$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$$

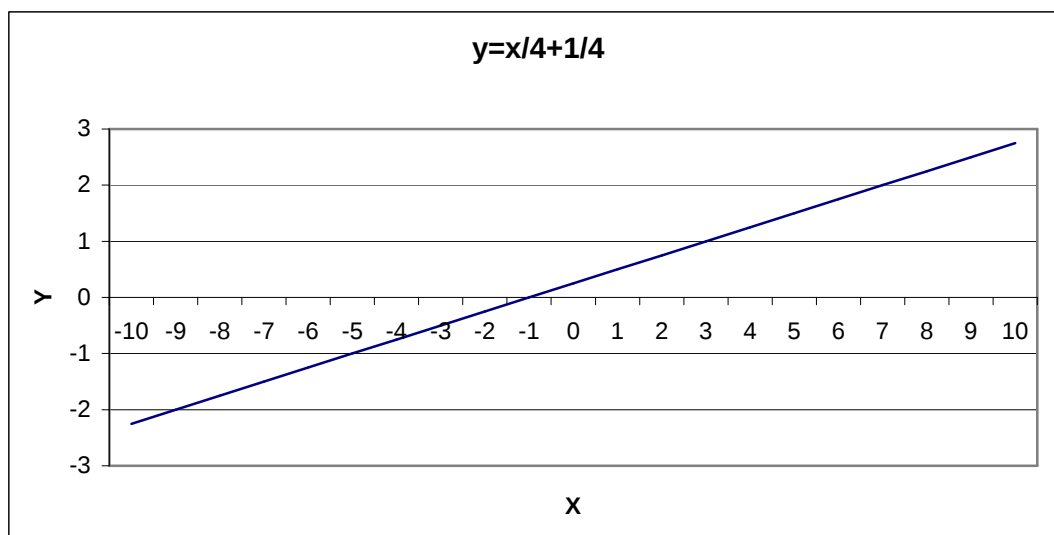
Obecné vyjádření řešení je uspořádaná dvojice $\left[x, \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right]$.

Konkrétní řešení získáme tak, že za x dosadíme libovolné číslo a pak vypočítáme

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.$$

Rovnici vyhovují např. uspořádané dvojice $\left[1, \frac{1}{4} \right], \left[-2, -\frac{1}{4} \right]$.

Grafickým řešením rovnice je graf přímky $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$.



Nerovnice

$$ax + by > c, \quad ax + by < c,$$

$$ax + by \geq c, \quad ax + by \leq c,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, se nazývají lineární nerovnice se dvěma neznámými.

Nerovnice

$$ax + by + cz > d, \quad ax + by + cz < d,$$

$$ax + by + cz \geq d, \quad ax + by + cz \leq d,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se nazývá lineární nerovnice se třemi neznámými. (Charvát, J.; Zhouf, J.; Boček, L. 1999)

„Obrazem množiny všech řešení nerovnice

$$ax + by \leq c,$$

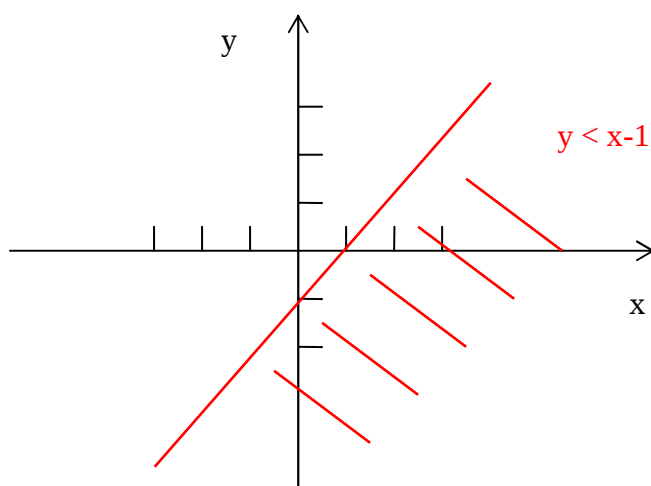
kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, přičemž alespoň jedno z čísel a, b je různé od nuly, je vždy jedna z polorovin s hraniční přímkou $ax + by = c$. Která z těchto dvou polorovin to je, můžeme zjistit např. tak, že v rovině zvolíme libovolný bod, který na zmíněné přímce neleží, a jeho souřadnice dosadíme do nerovnice. Dostaneme-li platnou nerovnost, jde o polorovinu obsahující zvolený bod, jinak je obrazem množiny všech řešení polorovina opačná.“ (Charvát, J.; Zhouf, J.; Boček, L. 1999, s. 81)

Příklad: Nerovnice o dvou neznámých, $x \in \mathbb{R}$.

$$x - y - 1 > 0$$

Řešení: Dané nerovnici vyhovuje každá uspořádaná dvojice reálných čísel $[x, y]$, která vyhovuje nerovnosti $y < x - 1$.

Graficky tyto body představují uspořádané dvojice všech bodů roviny, které leží pod přímkou, která je určena grafem funkce $y = x - 1$ a prochází body $[1, 0]$ a $[0, -1]$. (hraniční přímka do této množiny řešení nenáleží)



„Soustava rovnic

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

kde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in R$, se nazývá soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými x, y . Řešením této soustavy nazýváme každou uspořádanou dvojici $[x_0, y_0]$, která je řešením obou jejích rovnic.“ (Charvát, J.; Zhouf, J.; Boček, L. 1999, s. 85)

Grafickým řešením soustavy rovnic o dvou neznámých je množina bodů, jejichž souřadnice jsou řešením jednotlivých rovnic soustavy a souřadnice společného průniku všech těchto množin je řešením dané soustavy. (Polák, J. 1983)

„Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazýváme soustavu

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Čísla $a_{ij} = (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ nazýváme koeficienty soustavy.

Čísla $b_k = (k = 1, 2, \dots, m)$ nazýváme pravými stranami soustavy.

Řešením soustavy je každá n -tice $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ takových čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$, která dané soustavě vyhovuje. To znamená, že po dosazení čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$ za neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$ do všech rovnic soustavy jsou všechny tyto rovnice zároveň splněny.“ (Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982, s. 91)

„Soustavou nerovnic o dvou neznámých x, y nazýváme libovolných n nerovnic ($n \geq 2$), které mají být splněny zároveň.“ (Polák, J. 1983, s. 234)

Řešením této soustavy jsou takové uspořádané dvojice $[x, y]$, které splňují všechny dané nerovnice.

Grafické řešení lze zobrazit do kartézské souřadnicové soustavy. O bodech, pro jejichž souřadnice $[x, y]$ je splněna nerovnice $y > f(x)$, resp. $y < f(x)$ platí, že leží nad resp. pod grafem funkce $y = f(x)$. Množina všech řešení soustavy představuje průnik množin řešení jednotlivých nerovnic. (Polák, J. 1983)

Příklad: *Soustava nerovnic o dvou neznámých, $x \in R$.*

$$y - x < 1$$

$$y + x > 1$$

Řešení: První nerovnice je splněna pro libovolné $x \in R$.

$$y < 1 + x, \text{ tedy } y \in (-\infty, 1 + x)$$

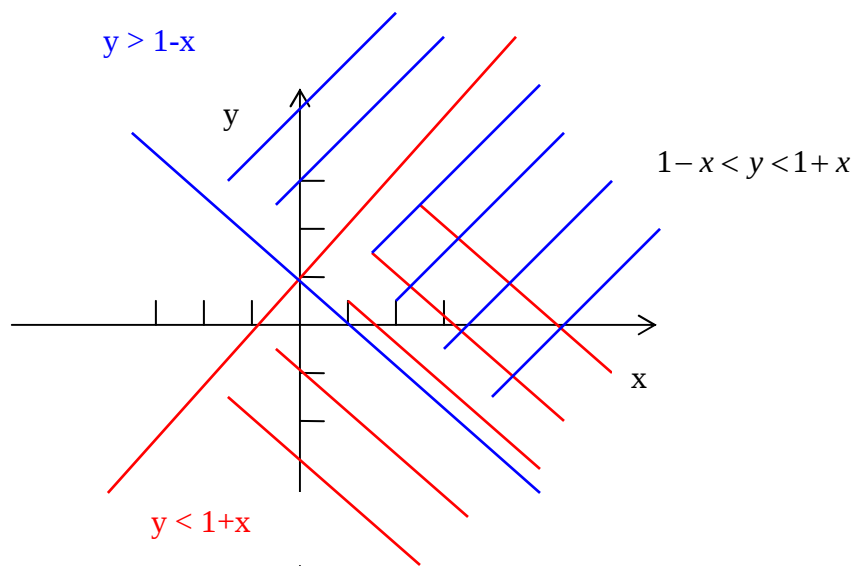
Druhá nerovnice je splněna pro libovolné $x \in R$.

$$y > 1 - x, \text{ tedy } y \in (1 - x, \infty)$$

Množina všech řešení soustavy představuje průnik množin řešení $[x, y]$ jednotlivých nerovnic, tedy $1 - x < 1 + x$, čili pro $x > 0$.

Řešením soustavy je tedy každá uspořádaná dvojice $[x, y]$, kde $x \in (0, \infty)$ a $y \in (1 - x, 1 + x)$.

Grafickým řešením soustavy nerovnic je průnik řešení jednotlivých řešení nerovnic. (dvojí šrafování grafu)



2. ZÁKLADNÍ POJMY

V této kapitole se budeme zabývat pojmy, které jsou potřebné pro vysvětlení a užití metod řešení soustavy v kapitole 3.

Matice

Předpokládáme, že máme neznámé veličiny $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, o nichž máme m informací, které můžeme zapsat ve tvaru lineárních rovnic.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Tuto soustavu nazýváme **soustavou m lineárních rovnic o n neznámých**. (Musilová, J.; Musilová, P. 2006)

„Soubory reálných čísel (a_{ij}) a (b_i) , kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, lze uspořádat do takzvaných matic:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matice A je typu m/n , má m řádků a n sloupců, i je řádkový index a j je sloupcový index.

Matice $\overline{B}$ je typu $m/1$ (m řádků a jeden sloupec), hovoříme také o sloupcové matici.

$$A \cdot X = \overline{B}, \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matice A se nazývá matice soustavy. Matice, která vznikne jejím rozšířením o sloupec pravých stran, tj.

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

je pak **rozšířenou maticí soustavy**.

Je-li sloupec pravých stran soustavy tvořen samými nulami, nazývá se soustava homogenní, v opačném případě nehomogenní.“ (Musilová, J; Musilová, P. 2006, s. 6 – 7)

„Čísla a_{rs} ($r = 1, 2, \dots, m$; $s = 1, 2, \dots, n$) se nazývají prvky matice.

Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{mm}$ matice A typu (m/n) se nazývají prvky hlavní diagonály matice A .“ (Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982, s. 7)

$$\text{Matici } A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right) \text{ nazýváme } \mathbf{\text{čtvercovou maticí } n - \text{tého řádu.}}$$

$$\text{Matici } T = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \text{ typu } (m/n),$$

jejíž všechny prvky hlavní diagonály jsou různé od nuly, tj. $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, ..., $a_{mm} \neq 0$, a pod hlavní diagonálou jsou jen nuly, nazýváme **trojúhelníkovou maticí typu (m,n)**.

$$\text{Matice } D = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & 0 \end{array} \right) \text{ typu } (m,n),$$

jejíž všechny prvky hlavní diagonály jsou různé od nuly, tj. $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, ..., $a_{mm} \neq 0$; a všechny ostatní prvky jsou rovny nule, nazýváme **diagonální maticí D typu (m,n)**. (Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982)

Jsou-li dány matice typu $n \times m$ $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$, pak součtem těchto dvou matic budeme rozumět matici

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

typu $n \times m$, která má na místě ij součet prvků stojících v maticích A a B na místě ij ; říkáme, že sčítáme matice po složkách.

Jsou-li dány matice $A = (a_{is})$ typu $n \times m$ a $B = (b_{sj})$ typu $m \times k$, pak součinem matic $A \cdot B$ (na pořadí záleží) bude matice

$$A \cdot B = (\sum_{s=1}^m a_{is} b_{sj})$$

typu $n \times k$, která má na místě ij součet součinů odpovídajících prvků i – *tého* řádku matice A a j – *tého* sloupce matice B ; řádky matice A mají stejný počet prvků jako sloupce matice B . (Bečvář, J. 2005)

„Pro sčítání matic a násobení matic platí:

- a) Sčítání matic je asociativní a komutativní.
- b) Násobení matic je asociativní.
- c) Násobení matic není komutativní.
- d) Násobení matic je distributivní vzhledem ke sčítání.“ (Bečvář, J. 2005, s. 34)

Hodnost

„Hodností h matice A typu (m, n) nazýváme maximální počet lineárně nezávislých vektorů tvořících řádky, popř. sloupce matice A .“ (Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982, s. 81)

Hodnost matice se nezmění, když

- a) napíšeme řádky v jiném pořadí,
- b) násobíme její libovolný řádek číslem $k \neq 0$,
- c) vynecháme v matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků matice,
- d) přidáme k matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků matice,
- e) přičteme k některému řádku matice lineární kombinaci ostatních řádků. (Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982)

Frobeniova věta

„Soustava lineárních rovnic má řešení právě tehdy, je-li hodnost její matice rovna hodnosti matici rozšířené.“ (Musilová, J; Musilová, P.; 2006, s. 10)

Důsledky Frobeniovy věty: Jestliže h je hodnost matice soustavy

- *matice třetího řádu* – se počítá tzv. Sarussovým pravidlem

Sarussovo pravidlo - postup výpočtu determinantu, který spočívá v úpravě původní matice, kdy k matici připsáme jako čtvrtý a pátý řádek její první a druhý řádek.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Prvky ležící na úhlopříčkách vynásobíme, ty úhlopříčky, které směřují zleva doprava sečteme a ty, které směřují zprava doleva přiřadíme znaménko minus. Vzniknou nám tedy součiny:

$$+a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$+a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$+a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{23}a_{32}a_{11}$$

$$-a_{33}a_{12}a_{21}$$

Sečtením těchto součinů získáme hodnotu determinantu.

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

(Bečvář, J.; 2005; Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982)

- *matice n – tého řádu* (při ≥ 3) – převedeme podle věty (o rozvoji determinantu) na výpočet determinantu $(n-1)$ – ního stupně. Předtím si determinant upravíme tak, abychom v některém řádku nebo sloupci získali co nejvíce nul. (Rektorys, K. a spol.; 1995)

„Věta o rozvoji determinantu podle i – tého řádku.

$$\text{Pro determinant } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ platí rozvoj}$$

$$A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = (-1)^{i+1}a_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}A_{in}.$$

(Rektorys, K. a spol.; 1995, s. 30)

Při počítání s determinanty platí tato pravidla:

- zaměníme-li v determinantu vzájemně dva řádky nebo sloupce, změní determinant svoje znaménko,

- b) jsou-li všechny prvky jednoho řádku nebo sloupce rovny nule, je také determinant roven nule,
- c) obsahuje-li determinant dva stejné řádky nebo sloupce, je determinant roven nule,
- d) je-li jeden řádek nebo sloupec determinantu lineární kombinací ostatních řádků nebo sloupců, je hodnota determinantu rovna nule,
- e) násobíme-li prvky jednoho řádku nebo sloupce determinantu nějakým číslem, pak se tímto číslem násobí celý determinant,
- f) hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku nebo sloupci lineární kombinaci ostatních řádků nebo sloupců. (Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982)

Subdeterminant

Determinant libovolné matice, která vznikne z matice vynecháním nějakých řádků (popř. sloupců), se nazývá subdeterminant matice A .

Determinant $|A_{ik}|$ se nazývá subdeterminant příslušný k prvku a_{ik} . (Bečvář, J. 2005; Kopecký, M. 2003)

Regulární matice

„Čtvercová matice A , jejíž determinant je různý od nuly, se nazývá regulární matice.“ (Kopecký, M. 2003, s. 105)

V opačném případě, tedy kdy determinant matice je roven nule, se matice nazývá singulární.

Regulární matice je také ta, jejíž hodnota je rovna jejímu řádu, v opačném případě je to singulární matice. (Bečvář, J. 2005)

Transponovaná matice

„Matice typu A^T , která vznikne z dané matice A vzájemnou výměnou řádků a sloupců, nazýváme transponovanou maticí k matici A . Říkáme také, že matice A^T vznikne překlopením matice A kolem hlavní diagonály.“ (Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982, s. 80)

Adjungovaná matice

„Matice, která vznikne z transponované matice tak, že její prvek nahradíme jeho algebraickým doplňkem, se nazývá adjungovaná matice k matici A . Označíme ji symbolem $\bar{A}$. Pak definujeme

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}.$$

(Kopecký, M. 2003, s. 106)

Inverzní matice

„Ke každé regulární matici A existuje taková matice A^{-1} , že její součin zprava i součin zleva s maticí A je jednotková matice E , tj. platí

$$A \cdot A^{-1} = E, \quad A^{-1} \cdot A = E.$$

„Jestliže čtvercová matice A je regulární, pak k ní existuje matice inverzní a platí

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \bar{A} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}, \text{ kde } D_{ik} = (-1)^{i+k} |A_{ik}|.$$

(Kopecký, M. 2003, s. 106)

„K výpočtu inverzní matice k regulární matici A je vhodné použít tzv. Gaussovy metody inverze matic:

Sestavíme matici typu $(n, 2n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a tuto matici upravíme ekvivalentními úpravami na matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pak matice

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

je inverzní maticí k matici A .“ (Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982, s. 118-119)

3. METODY ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

1) sčítací metoda (adiční)

„Sčítat dvě rovnice znamená sčítat jejich levé i pravé strany. Při sčítacím způsobu každou z obou rovnic násobíme vhodným číslem tak, abychom jednu neznámou po sečtení obou rovnic vyloučili (eliminovali). Vznikne tak rovnice o jedné neznámé, kterou dovedeme řešit. Druhou neznámou vypočítáme buď dosazením takto vypočítané jedné neznámé do některé z daných rovnic, nebo opakovaným sčítacím způsobem. O správnosti výsledku se přesvědčíme zkouškou, a to dosazením do obou rovnic.“ (Nimrichter, F.; Hubáčková, I.; Schramm, L.; Topinka, V. 1980, s. 129)

Touto metodou lze řešit i soustavu m rovnic o n neznámých. Jestliže je $m < n$, pak zbývající neznámé zvolíme jako parametry. (Polák, J. 1996)

Příklad: Soustava dvou rovnic o dvou neznámých, $x \in R$.

$$\begin{aligned}x - 8y &= 37 \\ 6y + 12x &= -66\end{aligned}$$

Řešení: Vynásobíme první rovnici číslem (-12) . Tím vyloučíme z rovnic neznámou x a vypočítáme y . Následně dosadíme vypočtenou hodnotu y do první rovnice a získáme řešení soustavy.

$$\begin{array}{lcl}x - 8y &= & 37 \\ \underline{6y + 12x} &= & -66 \\ x - 8y &= & 37 \\ \underline{12x + 6y} &= & -66 \\ -12x + 96y &= & -444 \\ \underline{12x + 6y} &= & -66 \\ 102y &= & -510 \\ y &= & -5\end{array}\qquad\begin{array}{l}y = -5 \Rightarrow x - 8y = 37 \\ x - 8 \cdot (-5) = 37 \\ x + 40 = 37 \\ x = -3\end{array}$$

Řešením je uspořádaná dvojice $[-3, -5]$.

Zkouška: Zkoušku provedeme dosazením do zadání.

$$L_1 = x - 8y = (-3) - 8 \cdot (-5) = -3 + 40 = 37$$

$$P_1 = 37$$

$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = 6y + 12x = 6 \cdot (-5) + 12 \cdot (-3) = -30 - 36 = -66$$

$$P_2 = -66$$

$$L_2 = P_2$$

Levé i pravé strany rovnic se sobě rovnají, řešení soustavy je tedy správné.

Příklad: Soustava tří rovnic o třech neznámých, $x \in R$.

$$x + y + 2z = -1$$

$$2x - y + 2z = -4$$

$$4x + y + 4z = -2$$

Řešení: Rovnice si označíme, abychom s nimi mohli lépe pracovat.

$$I. \quad x + y + 2z = -1$$

$$II. \quad 2x - y + 2z = -4$$

$$III. \quad 4x + y + 4z = -2$$

Nejprve první rovnici vynásobíme číslem (-2) a přičteme ke druhé rovnici. Potom vynásobíme druhou rovnici také číslem (-2) a přičteme ke třetí rovnici. Výsledné rovnice pak sečteme a získáme neznámou z .

$$(-2) \cdot I + II \quad -3y - 2z = -2$$

$$(-2) \cdot II + III \quad 3y = 6$$

Tyto rovnice sečteme a získáme z .

$$\begin{array}{rcl} & & 3y + 2z = 2 \\ 2z = -4 & \Rightarrow & 3y + 2 \cdot (-2) = 2 \\ z = -2 & & 3y - 4 = 2 \\ & & y = 2 \end{array}$$

Postupně dosazujeme a získáme tak všechny neznámé.

Dosaďme y a z .

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= -1 \\x + 2 + 2 \cdot (-2) &= -1 \\x - 2 &= -1 \\x &= 1\end{aligned}$$

Výsledným řešením je uspořádaná trojice $[1, 2, -2]$.

Zkouška:

I. rovnice

$$\begin{aligned}L_1 &= 1 + 2 + 2 \cdot (-2) = -1 \\P_1 &= -1\end{aligned}$$

$$L_1 = P_1$$

II. rovnice

$$\begin{aligned}L_2 &= 2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot (-2) = -4 \\P_2 &= -4\end{aligned}$$

$$L_2 = P_2$$

III. rovnice

$$\begin{aligned}L_3 &= 4 \cdot 1 + 2 + 4 \cdot (-2) = -2 \\P_3 &= -2\end{aligned}$$

$$L_3 = P_3$$

2) dosazovací metoda (substituční)

„Z některé rovnice vyjádříme jednu neznámou užitím druhé neznámé a takto vzniklý výraz dosadíme na její místo do druhé rovnice. Dostaneme lineární rovnici o jedné neznámé, kterou umíme řešit. Druhou neznámou dostaneme nejvýhodněji, dosadíme-li

vypočítanou neznámou do substituční rovnice.“ (Nimrichter, F.; Hubáčková, I.; Schramm, L.; Topinka, V. 1980, s. 129)

Touto metodou lze řešit i soustavu m rovnic o n neznámých. Jestliže je $m < n$, pak zbývající neznámé zvolíme jako parametry. (Polák, J. 1996)

Příklad: *Soustava dvou rovnic o dvou neznámých, $x \in R$.*

$$\begin{aligned}x - 8y &= 37 \\ 6y + 12x &= -66\end{aligned}$$

Řešení: Z první rovnice si vyjádříme neznámou x , kterou pak dosadíme do druhé rovnice a vznikne nám lineární rovnice o jedné neznámé.

$$\begin{aligned}x - 8y &= 37 \\ 6y + 12x &= -66\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = 37 + 8y$$

x dosadíme do druhé rovnice.

$$\begin{aligned}6y + 12(37 + 8y) &= -66 \\ 6y + 444 + 96y &= -66 \\ 102y + 444 &= -66 \\ 102y &= -510 \\ y &= -5\end{aligned}$$

$y = -5$ dosadíme zpátky do vyjádřeného $x = 37 + 8y$

$$x = 37 + 8y = 37 + 8 \cdot (-5)$$

$$x = -3$$

Výsledným řešením je uspořádaná dvojice $[-3, -5]$

Příklad: *Soustava tří rovnic o třech neznámých, $x \in R$.*

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2\end{aligned}$$

Řešení: Z I. rovnice si vyjádříme x a dosadíme do II. rovnice.

$$I. \quad x + y + 2z = -1$$

$$II. \quad 2x - y + 2z = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -1 - y - 2z$$

$$III. \quad 4x + y + 4z = -2$$

$x \rightarrow II.$

$$2x - y + 2z = -4$$

$$2(-1 - y - 2z) - y + 2z = -4$$

$$-2 - 2y - 4z - y + 2z = -4$$

$$-3y - 2z = -2$$

$$y = \frac{2 - 2z}{3}$$

Vyjádření x, y dosadíme do $III.$ rovnice.

$$4x - y - 4z = -2$$

$$4(-1 - y - 2z) + \frac{2 - 2z}{3} + 4z = -2$$

$$4\left(-1 - \frac{2 - 2z}{3} - 2z\right) + \frac{2 - 2z}{3} + 4z = -2$$

$$-4 - \frac{8 - 8z}{3} - 8z + \frac{2 - 2z}{3} + 4z = -2 / \cdot 3$$

$$-12 - 8 + 8z - 24z + 2 - 2z + 12z = -6$$

$$-6z = 12$$

$$z = -2$$

$z = -2$ dosadíme zpátky do $y = \frac{2 - 2z}{3}$

$$y = \frac{2 - 2z}{3} = \frac{2 - 2 \cdot (-2)}{3}$$

$$y = 2$$

$z = -2$ a $y = 2$ dosadíme zpátky do $x = -1 - y - 2z$

$$x = -1 - y - 2z = -1 - 2 - 2 \cdot (-2)$$

$$x = 1$$

Výsledným řešením je uspořádaná trojice $[1, 2, -2]$.

3) srovnávací metoda (komparační)

„Spočívá v tom, že z obou rovnic vyjádříme tutéž neznámou pomocí druhé neznámé a porovnáním obou vyjádření první neznámou eliminujeme, čímž dostaneme rovnici pro druhou neznámou.“ (Polák, J. 1996, s. 229)

Touto metodou lze řešit i soustavu m rovnic o n neznámých. Jestliže je $m < n$, pak zbývající neznámé zvolíme jako parametry. (Polák, J. 1996)

Příklad: Soustava dvou rovnic o dvou neznámých, $x \in R$.

$$\begin{aligned}x - 8y &= 37 \\ 6y + 12x &= -66\end{aligned}$$

Řešení: Z obou rovnic si vyjádříme neznámou y , které pak položíme do rovnosti a získáme x .

$$\begin{aligned}x - 8y &= 37 & \Rightarrow & y = \frac{x}{8} - \frac{37}{8} \\ 6y + 12x &= -66 & \Rightarrow & y = -2x - 11\end{aligned}$$

Obě vyjádřené y dáme do rovnosti.

$$\begin{aligned}\frac{x}{8} - \frac{37}{8} &= -2x - 11 \\ x - 37 &= -88 - 16x \\ 17x &= -51 \\ x &= -3\end{aligned}$$

Dosadíme $x = -3$ do libovolné rovnice.

$$\begin{aligned}y &= -2x - 11 \\ y &= (-2) \cdot (-3) - 11 \\ y &= -5\end{aligned}$$

Výsledným řešením soustavy je uspořádaná dvojice $[-3, -5]$.

Příklad: Soustava tří rovnic o třech neznámých, $x \in R$.

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2\end{aligned}$$

Řešení: Ze všech rovnic si vyjádříme neznámou y , které pak budeme porovnávat.

$$I. \quad x + y + 2z = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1 - x - 2z$$

$$II. \quad 2x - y + 2z = -4 \quad \Rightarrow \quad y = 4 - 2x - 2z$$

$$III. \quad 4x + y + 4z = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2 - 4z - 4x$$

Nejprve porovnáme y z prvních dvou rovnic, tím si vyjádříme z .

$$-1 - x - 2z = 4 + 2x - 2z$$

$$-4 = 5 + 3x$$

$$z = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x$$

Dále porovnáme druhou a třetí rovnici, do kterých dosadíme vyjádřené z .

$$4 + 2x + 2z = -2 - 4x - 4z$$

$$4 + 2x + 2 \cdot \left(-\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x \right) = -2 - 4x - 4 \cdot \left(-\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x \right)$$

$$4 + 2x - \frac{10}{4} - \frac{6}{4}x = -2 - 4x + \frac{20}{4} + \frac{12}{4}x$$

$$16 + 8x - 10 - 6x = -8 - 16x + 20 + 12x$$

$$6x = 6x$$

$$x = 1$$

$$x = 1 \text{ dosadíme za } z = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x$$

$$z = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \cdot 1 = -2$$

x, z dosadíme do libovolné rovnice a získáme y .

$$y = -1 - x - 2z = -1 - 1 - 2 \cdot (-2) = 2$$

Výsledným řešením je uspořádaná trojice $[1, 2, -2]$.

4) Gaussova eliminační metoda

„Rozšířenou matici $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ soustavy převedeme úpravami

na matici C , která má pod hlavní diagonálou samé nuly. Pak soustava rovnic o n neznámých, která má za svou rozšířenou matici soustavy matici C , je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

(Rektorys, K. a spol.; 1995, s. 33)

Tuto metodu lze užít u řešení soustavy m rovnic o n neznámých. (Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982)

Příklad: Soustava dvou rovnic o dvou neznámých, $x \in R$.

$$\begin{array}{r} x-8y=37 \\ 6y+12x=-66 \end{array}$$

Řešení: Soustavu rovnic si zapíšeme jako rozšířenou matici.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 37 \\ 12 & 6 & 66 \end{array} \right)$$

Pomocí Frobeniovy věty lze úpravami zjistit, zda je soustava řešitelná.

Pokud se rovná hodnota matice hodnosti matice rozšířené, je soustava řešitelná.

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 102 \end{pmatrix} \quad \text{hodnost matice je: } h = 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 37 \\ 12 & 6 & -66 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 37 \\ 0 & 102 & -510 \end{array}\right)$$

$$h = h' = 2$$

Hodnost matice je rovna hodnosti matici rozšířené, z čehož vyplývá, že soustava rovnic je řešitelná.

Gaussova eliminační metoda - ekvivalentními úpravami převedeme matici na matici trojúhelníkového typu, tj. aby po diagonálou zůstaly samé nuly.

První řádek matice vynásobíme číslem (-12) a přičteme ke druhému řádku. Protože se jedná o matici typu (2,2) stačí pouze jedna úprava, abychom získali trojúhelníkovou matici, která je ekvivalentní se soustavou. Vypočítáme y a dosadíme zpátky do rovnice, abychom získali neznámou x .

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 37 \\ 12 & 6 & 66 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 37 \\ 0 & 102 & -510 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} 1-8y=37 \\ 102y=-510 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 102y = -510 \\ y = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x-8y=37 \\ x-8 \cdot (-5)=37 \\ x=-3 \end{array}$$

Výsledným řešením je uspořádaná dvojice $[-3, -5]$.

Příklad: Soustava tří rovnic o třech neznámých, $x \in R$.

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{array}$$

Řešení: Soustavu si zapíšeme jako rozšířenou matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

Pomocí Frobeniovy věty lze úpravami zjistit, zda je soustava řešitelná.

Pokud se rovná hodnost matice hodnosti matice rozšířené, je soustava řešitelná.

$$h = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \text{hodnost matice: } h = 3$$

$$h' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right) \text{ hodnost matice rozšířené: } h' = 3$$

$$h = h' = 3$$

Hodnost matice je rovna hodnosti matici rozšířené, z čehož vyplývá, že soustava rovnic je řešitelná.

Ekvivalentními úpravami převedeme matici na matici trojúhelníkového typu, tj. aby po diagonálou zůstaly samé nuly.

První řádek vynásobíme číslem (-2) a přičteme k druhému řádku.

Dále první řádek vynásobíme číslem (-4) a přičteme ke třetímu řádku.

Tím jsme získali ve druhé matici pod prvním členem samé nuly, pokračujeme v úpravě.

Třetí řádek odečteme od druhého, a získáme nuly pod diagonálou.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right)$$

Výsledná matice je ekvivalentní se soustavou rovnic, tedy ji můžeme do rovnic zapsat.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ -3y - 2z &= -2 \\ 2z &= -4 \end{aligned}$$

Vypočítáme z a dopočítáme další neznámé.

$$\begin{array}{lcl} & -3y - 2z = -2 & \\ z = -2 & \Rightarrow & -3y - 2 \cdot (-2) = -2 \\ & & -3y = -6 \\ & & y = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x + y + 2z = -1 \\ x + 2 + 2 \cdot (-2) = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice $[1, 2, -2]$.

5) Cramerovo pravidlo

„Soustava n lineárních rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

.....

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

s nenulovým determinantem soustavy $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

má právě jedno řešení $(x_1, \dots, x_n)$, kde $x_i = \frac{D_i}{D}$; přitom D_i je determinant, který vznikne z

D tím, že v něm i -tý sloupec nahradíme sloupцем pravých stran rovnic.“ (Rektorys K. a spol., 1995, s. 35)

Příklad: *Soustava dvou rovnic o dvou neznámých, $x \in R$.*

$$x - 8y = 37$$

$$6y + 12x = -66$$

Řešení: Nejprve zjistíme determinant matice soustavy rovnic.

Determinant matice typu (2,2) zjistíme tak, že násobíme první člen prvního řádku s druhým členem druhého řádku a od tohoto čísla odečteme součin druhého členu prvního řádku s prvním členem řádku druhého.

$$D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Jestliže není determinant roven nule (tj. regulární matice), můžeme pokračovat v užití tohoto pravidla.

Matice soustavy: $\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

Determinant matice: $D = \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 12 \cdot (-8) = 102$

Poté spočítáme jednotlivé determinanty D_x , D_y , které vzniknou nahrazením příslušného sloupce pravou stranou rovnice. Řešení soustavy zjistíme podílem příslušného determinantu nahrazeného pravou stranou soustavy rovnic a determinantu matice soustavy.

Příslušné determinanty D_x, D_y , vzniklé nahrazením příslušného sloupce.

$$D_x = \begin{pmatrix} 37 & -8 \\ -66 & 6 \end{pmatrix} = 37 \cdot 6 - (-66) \cdot (-8) = -306$$

$$D_y = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 12 & -66 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-66) - 12 \cdot 37 = -510$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(-306)}{102} = -3$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{(-510)}{102} = -5$$

Výsledným řešením je uspořádaná dvojice $[-3, -5]$.

Příklad: Soustava tří rovnic o třech neznámých, $x \in R$.

$$x + y + 2z = -1$$

$$2x - y + 2z = -4$$

$$4x + y + 4z = -2$$

Řešení: Spočítáme determinant matice třetího stupně užitím Sarussova pravidla

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Poté dopočítáme jednotlivé determinanty nahrazením příslušného sloupce pravou stranou rovnice. Řešení soustavy zjistíme podílem příslušného determinantu nahrazeného pravou stranou soustavy a determinantu matice soustavy.

Matice soustavy je:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinant matice je:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-4) + 8 + 4 - [(-8) + 8 + 2] = 6$$

Příslušné determinanty D_x, D_y, D_z , vzniklé nahrazením příslušného sloupce.

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 8 - 4 - (4 - 2 - 16) = 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (-16) - 8 - 8 + 32 + 4 + 8 = 12$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 16 - 4 + 4 + 4 = -12$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{6} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{12}{6} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{(-12)}{6} = -2$$

Výsledným řešením je uspořádaná trojice $[1, 2, -2]$.

6) metoda užití inverzní matice

Jsou-li lineární rovnice nezávislé a má-li soustava právě jedno řešení (hodnota matice je rovna hodnotě matice rozšířené a zároveň rovna počtu neznámých), lze užít inverzní matice k řešení soustavy rovnic

Jestliže platí: $A \cdot X = C$, kde A je matice soustavy a C je sloupec pravých stran rovnic.

Pak můžeme napsat: $A \cdot X = C \quad / \cdot A^{-1}$

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C$, kde A^{-1} je inverzní matice.

Pro inverzní matici platí: $A \cdot A^{-1} = E$, kde E je jednotková matice. (Bečvář, J. 2005; Kopecký, M. 2003)

Sestavíme si matici typu $(n, 2n)$, jejíž pravou stranu bude tvořit jednotková matice.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a tuto matici upravíme ekvivalentními úpravami na matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pak matice $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ bude inverzní.

(Jirásek, F.; Kriegelstein, E.; Tichý, Z. 1982)

Tuto metodu lze užít pouze u soustavy n rovnic o n neznámých. (Musilová, J.; Musilová, P. 2006)

Příklad: Soustava dvou rovnic o dvou neznámých, $x \in R$.

$$\begin{aligned} x - 8y &= 37 \\ 6y + 12x &= -66 \end{aligned}$$

Řešení: Zapišeme matici typu $(n, 2n)$, upravíme a spočítáme inverzní matici.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -8 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

První řádek násobíme číslem (-12) a přičteme ke druhému, abychom získali nulu pod diagonálou.

Další úpravou potřebujeme získat nulu i nad diagonálou, proto první řádek násobíme číslem 51 a přičteme ke 4-násobku druhého řádku. Určíme podíl, tak abychom na levé straně matice získali jednotkovou matici.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -8 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 102 & -12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 51 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 102 & -12 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{51} & \frac{4}{51} \\ -\frac{12}{102} & \frac{1}{102} \end{pmatrix}$$

Užijeme vztahu $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C$.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{51} & \frac{4}{51} \\ -\frac{12}{102} & \frac{1}{102} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{51} & \frac{4}{51} \\ -\frac{12}{102} & \frac{1}{102} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 37 \\ -66 \end{pmatrix}$$

Matice vynásobíme a určíme řešení soustavy.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{51} \cdot 1 + \frac{4}{51} \cdot 12\right)x + \left(\frac{3}{51} \cdot (-8) + \frac{4}{51} \cdot 6\right)y &= \frac{3}{51} \cdot 37 + \frac{4}{51} \cdot (-66) \\ \left(-\frac{12}{102} \cdot 1 + \frac{1}{102} \cdot 12\right)x + \left(-\frac{12}{102} \cdot (-8) + \frac{1}{102} \cdot 6\right)y &= \left(-\frac{12}{102}\right) \cdot 37 + \frac{1}{102} \cdot (-66) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot x + 0 \cdot y = -3 & \Rightarrow & x = -3 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y = -5 & & y = -5 \end{array}$$

Výsledným řešením soustavy je uspořádaná dvojice $[-3, -5]$.

Příklad: Soustava tří rovnic o třech neznámých, $x \in R$.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

Řešení: Zapišeme matici typu $(n, 2n)$, upravíme a spočítáme inverzní matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

První řádek vynásobíme číslem (-2) a přičteme ke druhému řádku, pak číslem (-4) a přičteme ke třetímu řádku.

V další matici vynásobíme druhý řádek číslem (-1) a přičteme ke třetímu řádku. Získáme tak pod diagonálou samé nuly.

Další úpravou násobíme třetí řádek číslem (-1) a přičteme ke druhému řádku a první s třetím řádkem jen sečteme.

Poté sečteme druhý řádek s 3-násobkem prvního řádku a získáme tak i nad diagonálou samé nuly.

Uurčíme podíl, tak abychom na levé straně matice získali jednotkovou matici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Užijeme vztahu $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Matice vynásobíme a určíme řešení soustavy.

$$\begin{aligned} \left((-1) - \frac{2}{3} + \frac{8}{3}\right)x + \left((-1) + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)y + \left((-2) - \frac{2}{3} + \frac{8}{3}\right)z &= 1 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \\ \left(0 - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)x + \left(0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)y + \left(0 - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)z &= 0 + \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \\ (1+1-2)x + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)y + (2+1-2)z &= -1-2+1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1 & & y = 1 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 2 & \Rightarrow & y = 2 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = -2 & & z = -2 \end{array}$$

Výsledným řešením je uspořádaná trojice $[1, 2, -2]$.

7) grafické řešení

Jestliže sestrojíme množiny bodů, jejichž souřadnice jsou řešeními jednotlivých rovnic soustavy, pak grafickým řešením soustavy jsou souřadnice bodů společného průniku všech těchto množin.

Příklad: Soustava dvou rovnic o dvou neznámých, $x \in R$.

$$\begin{aligned} x - 8y &= 37 \\ 6y + 12x &= -66 \end{aligned}$$

Řešení: Sestrojíme množinu bodů, které vyhovují první rovnici.

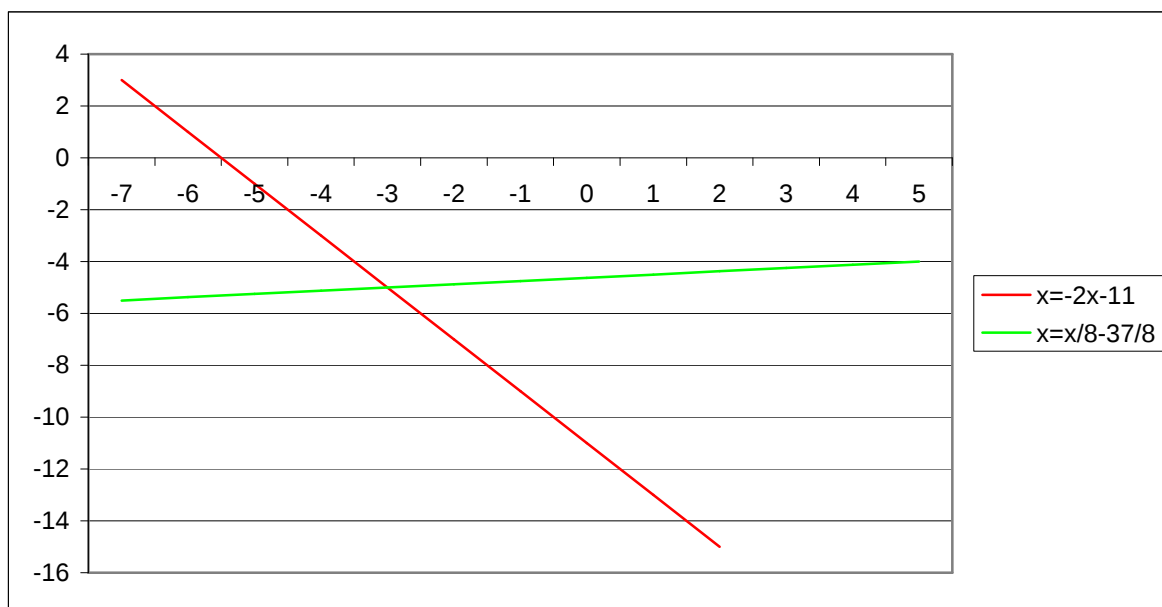
$$\begin{aligned} x - 8y &= 37 \\ y &= \frac{x}{8} - \frac{37}{8} \end{aligned}$$

Je to graf funkce $y = \frac{x}{8} - \frac{37}{8}$, tj. přímka procházející např. body $[5, -4]$, $[-3, -5]$.

Množina bodů, vyhovující druhé rovnici je:

$$\begin{aligned} 6y + 12x &= -66 \\ y &= -2x - 11 \end{aligned}$$

Graf funkce $y = -2x - 11$ prochází např. body $[-2, -7]$, $[1, -6]$.



Jednotlivé funkce se protínají v bodě $[-3, -5]$, který je řešením dané soustavy.

ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo shrnout část problematiky lineární algebry, která se týká lineárních rovnic, nerovnic a jejich soustav, teoreticky ji vymezit a posléze na konkrétních úlohách ukázat konkrétní metody řešení.

S touto problematikou se žáci a studenti setkávají v průběhu celého jejich studia matematiky. Nejprve se učí základní poznatky, které pak postupně rozvíjí a obohacují. Ve své práci jsem tyto poznatky shrnula. Práce by měla uvádět základní přehled problematiky lineární algebry, lineárních rovnic, nerovnic a jejich soustav.

Práce je rozdělena do několika kapitol, nejprve uvádím teoretické vymezení znalostí jednotlivých okruhů, které pak využívám v další části, která se věnuje praktickému užití těchto znalostí – řešení soustavy lineárních rovnic o dvou a třech neznámých.

V první části jsem nejprve shrnula základní poznatky o této problematice a uvedla základní pojmy týkající se lineárních rovnic, nerovnic a jejich řešení – kořen, neznámá, proměnná, řešení, ekvivalentní úpravy, zkouška.

V další části jsem podrobně rozebrala problematiku rovnic, nerovnic a jejich soustav nejprve o jedné, poté o více neznámých. Uvedla jsem jejich obecné vzorce a základní vlastnosti.

Další kapitolou byly základní pojmy související s metodami řešení soustav rovnic, kterými jsou matice, determinanty, hodnost matice, Frobeniova věta, inverzní, transponovaná a adjungovaná matice.

V poslední kapitole jsem se věnovala praktické části této problematiky. Uvedla jsem jednotlivé metody řešení soustav rovnic a jejich princip. Součástí bylo řešení soustavy rovnic o dvou a třech neznámých použitím dané metody, vysvětlení postupu a jejich grafické znázornění, kde si lze názorně zkontrolovat správnost vlastního řešení.

K tvorbě rovnic, nerovnic, matematických vzorců, indexů u proměnných, matic a veškerých matematických symbolů jsem využívala MathType 6.0 Equation .

Ke grafickému řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav jsem použila textový editor MS Word a tabulkový editor MS Excel.

Čtenář si po prostudování práce upevní stávající znalosti a získá ucelený přehled o problematice rovnic a nerovnic, jejich soustav a řešení. Bude pak schopen tyto znalosti využít a umět je použít v praxi.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY:

- 1) BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra*, 3. vyd. Praha: MATFYZPRESS, 2005. s. 435, ISBN 80-86732-57-6.
- 2) ČERMÁK, M.; KAMARÝT, A.; KOŘÍNKOVÁ, H. *Sbírka úloh z matematiky, příručka pro přípravu na vysokou školu*, 1. vyd. Praha: SNTL, 1967. s. 250.
- 3) ČERMÁK, P.; ČERVINKOVÁ, P. *Odmaturuj z matematiky*, 1. vyd. Brno: DIDAKTIS, 2002. s. 208, ISBN 80-86285-38-3.
- 4) HERMAN, J. *Matematika: sekunda: rovnice a nerovnice*, 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. s. 121, ISBN 80-7196-0-144.
- 5) HRUŠA, K.; DLOUHÝ, Z.; ROHLÍČEK, J. *Úvod do studia matematiky*, 2. vyd. Praha: SPN, 1977. s. 347.
- 6) CHARVÁT, J.; ZHOUF, J.; BOČEK, L. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*, 3. vyd. Praha: Prometheus, 1999. s. 222, ISBN 80-7196-154.
- 7) JIRÁSEK, F.; KRIEGLSTEIN, E.; TICHÝ, Z. *Sbírka řešených příkladů z matematiky, Logika a množiny, lineární a vektorová algebra, analytická geometrie, posloupnosti a řady, diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné*, 2. vyd. Praha: SNTL/ALFA, 1982. s. 817.
- 8) KOPECKÝ, M. *Základy algebry*, 2. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2003. s. 118, ISBN 80-244-0683-7.
- 9) KUBÁT, J. *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Praha: Victoria Publishing, 1993. s. 409, ISBN 80-85605-27-9.
- 10) LIBICHER, J.; BURIAN, K. *Algebra - okruhy, polynomy, tělesa, rovnice*, 1. vyd. Ostrava: Pedagogická fakulta v Ostravě, 1975. s. 123.

- 11) MULAČOVÁ, J.; PEŠKOVÁ, E. *Matematika: univerzální příručka pro maturanty a uchazeče o studium na vysokých školách*, 1. vyd. Úvaly u Prahy: ALBRA, 1996. s. 407.
- 12) MUSILOVÁ, J.; MUSILOVÁ, P. *Matematika I. pro porozumění i praxi, netradiční výklad tradičních témat vysokoškolské matematiky*, 1. vyd. Brno: VUTIUM, 2006. s. 281, ISBN 80-214-2914-3.
- 13) NIMRICHTER, F.; HUBAČKOVÁ, I.; SCHRAMM, L.; TOPINKA, V. *Matematika pro I. a II. ročník středních ekonomických škol*, 6. vyd. Praha: SPN, 1980. s. 536.
- 14) PETÁKOVÁ, J. *Matematika, příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006. s. 287, ISBN 80-7196-099-3.
- 15) POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*, 4. vyd. Praha: SPN, 1983. s. 627.
- 16) POLÁK, J. *Středoškolská matematika v úlohách I.*, 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. s. 344, ISBN 80-7196-021-7.
- 17) REKTORYS, K.; *Přehled užití matematiky 1.*, 6. vyd. Praha: Prometheus, 1995. s. 720, ISBN 80-8584-97-20.
- 18) RIEČAN, B. *Matematika pro IV. ročník gymnázií*, 1. vyd. Praha: SPN, 1987. s. 357.
- 19) SCHMIDTMAYER, J.; ROZENSKÝ, Z.; ŠIKOLA, B. *Matematika pro IV. ročník středních průmyslových škol a středních zemědělských technických škol*, 2. vyd. Praha: SPN, 1978. s. 296.
- 20) SCHWARZ, Š. *Základy nauky o řešení rovnic*, 2. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, 1968. s. 454.

21) VOŠICKÝ, Z. *Matematika v kostce*, 2. vyd. Havlíčkův Brod: FRAGMENT, 1997. s. 124, ISBN 80-7200-012-8.

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Emílie Smrečková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Eva Hotová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2010

Název práce:	Soustavy lineárních rovnic a nerovnic
Název v angličtině:	Systems of linear equations and inequations
Anotace práce:	Práce se zabývá lineárními rovnicemi, nerovnicemi a jejich soustavami. Shrnuje základní poznatky o této problematice. Stěžejní částí je problematika soustav rovnic a metody jejich řešení.
Klíčová slova:	Rovnice, nerovnice, soustavy, metody řešení.
Anotace v angličtině:	The thesis deals with the linear equations, inequations and their systems. It summarizes the basic knowledge about this problems. The main part is problems of system of equations and their methods of solution.
Klíčová slova v angličtině:	Equations, inequations, systems, solving methods.
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	41 stran
Jazyk práce:	čeština