



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

SIMULACE DYNAMICKÉHO SYSTÉMU S KONTAKTNÍ ÚLOHOU

DYNAMICAL SIMULATION OF A SYSTEM WITH CONTACT PROBLEM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jan Raisinger

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. PETR FRANTÍK, Ph.D.

BRNO 2022



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	B3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Bakalářský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3647R013 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student	Jan Raisinger
Název	Simulace dynamického systému s kontaktní úlohou
Vedoucí práce	doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D.
Datum zadání	30. 11. 2021
Datum odevzdání	27. 5. 2022

V Brně dne 30. 11. 2021

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

prof. Ing. Miroslav Bajer, CSc.
Děkan Fakulty stavební VUT

PODKLADY A LITERATURA

Literatura dle pokynů vedoucího práce.

Macur, J., Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace, skripta, nakladatelství PC-DIR, Brno, 1995.

Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: Mechanické kmitání, Technický průvodce 71, nakladatelství Sobotáles, Praha, 1994.

ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ

Nastudování potřebných znalostí z doporučených podkladů a z dalších zdrojů. Zorientování se v problematice. Analýza vybrané kontaktní úlohy pomocí různých numerických modelů dle pokynů vedoucího práce.

STRUKTURA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část závěrečné práce zpracovaná podle platné Směrnice VUT "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací" a platné Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací na FAST VUT" (povinná součást závěrečné práce).
2. Přílohy textové části závěrečné práce zpracované podle platné Směrnice VUT "Úprava, odevzdávání, a zveřejňování závěrečných prací" a platné Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací na FAST VUT" (nepovinná součást závěrečné práce v případě, že přílohy nejsou součástí textové části závěrečné práce, ale textovou část doplňují).

doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D.
Vedoucí bakalářské práce

ABSTRAKT

Práce se zabývá simulací dynamického systému s kontaktní úlohou v podobě kontaktu cyklistické duše a pláště při nafukování a zatěžování kola. Teoretická část objasňuje základní pojmy z problematiky dynamických systémů a kontaktních úloh a představuje metody použité pro simulace v praktické části.

V praktické části je popsán proces převodu reálného systému ráfek-duše-plášť na výpočetní model v podobě zjištění jeho geometrie a materiálových charakteristik jako spojitého objektu a jeho následné diskretizace, představen program použitý pro simulace (FyDiK 2D) a provedeny vybrané simulace a jejich vyhodnocení.

KLÍČOVÁ SLOVA

Dynamický systém, kontaktní úloha, soustava se soustředěnými parametry

ABSTRACT

This work deals with the simulation of a dynamical system with a contact problem represented by the contact of a bicycle tube with a tire during inflation and loading of a bicycle wheel. In the first part the work defines the basics of dynamical systems a contact problems and introduces the methods used for following simulations.

The practical part of the work describes the process of converting a real system of rim-tube-tire objects to a computational model by determining its geometry and material characteristics as a continuous object and its subsequent discretization, introduces the program used for the subsequent simulations (FyDiK 2D) and shows the results of said simulations.

KEYWORDS

Dynamical system, contact problem, system with concentrated parameters

RAISINGER, Jan. *Dynamical Simulation of a System with Contact Problem*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, 2022, 54 s. Bakalářská práce. Vedoucí práce: doc Ing. Petr Frantík, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ O SHODĚ LISTINNÉ A ELEKTRONICKÉ FORMY ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Prohlašuji, že elektronická forma odevzdané bakalářské práce s názvem *Simulace dynamického systému s kontaktní úlohou* je shodná s odevzdanou listinnou formou.

V Brně dne 25. 5. 2022

Jan Raisinger
autor práce

PROHLÁŠENÍ O PŮVODNOSTI ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem *Simulace dynamického systému s kontaktní úlohou* zpracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 25. 5. 2022

Jan Raisinger
autor práce

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce panu docentu Ing.Petrovi Frantíkovi, Ph.D. za pomoc s výběrem tématu, odborné vedení, konzultace a podnětné návrhy k práci.

Obsah

Úvod	17
1 Teoretická část	19
1.1 Dynamika	19
1.1.1 Statika	19
1.2 Kinematika	19
1.3 Pohybové rovnice	20
1.3.1 Kinematické	20
1.3.2 Dynamické	20
1.4 Dynamické systémy	22
1.5 Numerické metody řešení pohybových rovnic	24
1.5.1 Symplektická Eulerova metoda	25
1.6 Ukázka řešení dynamického systému analytickým a numerickým vý- počtem	26
1.7 Diskretizace kontinua	27
1.7.1 Soustava se soustředěnými parametry	28
1.7.2 Diskretizace metodou konečných prvků (MKP)	28
1.8 Kontaktní úloha	29
2 Praktická část	31
2.1 Programová výbava	31
2.1.1 FyDiK 2D	31
2.1.2 Program na tvorbu modelu	34
2.2 Objekty modelu	35
2.2.1 Plášť	36
2.2.2 Duše	38
2.2.3 Ráfek	39
2.2.4 Zatížení	40
2.2.5 Kontakt objektů	41
2.3 Ustálení modelu - nafouknutí	42
2.4 Zatěžování modelu	44
2.4.1 Ztráta stability	45
2.4.2 Zatížení silou	45
2.4.3 Zatížení dopadem	47
Závěr	51
Literatura	53

Seznam obrázků

1.1	Schéma harmonického oscilátoru	22
1.2	Fázový diagram oscilátoru	23
1.3	Porovnání výchylky oscilátoru	27
1.4	Průběh energií oscilátoru	27
1.5	Schéma diskretizace	28
1.6	Statické a kinetické tření	30
2.1	Model plášť-ráfek-duše	31
2.2	Schéma translační pružiny	32
2.3	Schéma rotační pružiny	33
2.4	Schéma kontaktní pružiny	33
2.5	Objekty zatížení FyDiKu	34
2.6	Jemnost modelu	35
2.7	Model plášť-ráfek-duše	36
2.8	Řez pláštěm	37
2.9	Ohybová zkouška materiálu pláště	37
2.10	Tahová zkouška materiálu duše	38
2.11	Pracovní diagram materiálu duše	39
2.12	Pružinová funkce duše	40
2.13	Geometrie modelu	40
2.14	Kontaktní pružiny modelu	41
2.15	Nárůst tlaku	42
2.16	Nafukování modelu	43
2.17	Změna délky během nafukování	43
2.18	Napětí v duši během nafukování	44
2.19	Ztráta stability	45
2.20	Kritická síla pro ztrátu stability	46
2.21	Zatěžování narůstající silou	46
2.22	Pracovní diagram modelu	47
2.23	Dotyková plocha pláště	47
2.24	Zatížení dopadem	48
2.25	Průběh dopadu z výšky	49

Úvod

Některé typy zatížení stavebních konstrukcí vykazují v čase se měnící charakteristiky a při analýze takto zatížených konstrukcí může být vhodné na soustavu zatížení-konstrukce nahlížet jako na dynamický systém. Přenos těchto zatížení do konstrukce, případně přenos zatížení mezi jejími jednotlivými částmi, probíhá v určitých případech formou interakce těles, takový děj pak popisuje kontaktní úloha.

Při popisu dynamických systémů je použití přesných analytických vztahů možné jen ve velmi specifických, z hlediska geometrie a zatížení jednoduchých, případech. Dynamické systémy navíc často vykazují nelineární chování, což takový popis dále komplikuje. Při zkoumání většiny dynamických systémů je proto výhodné využití numerických simulací. Pro jejich provádění je třeba nejprve vytvořit model co nejpresněji vystihující počáteční stav reálného systému, což vyžaduje znalost jak reálného stavu, tak metod jeho převodu na počítačový model a jejich omezení. Dále je důležitá znalost numerických výpočetních metod, jejich volba totiž ovlivňuje přesnost simulací a zároveň jejich výpočetní náročnost.

Tato práce tak před provedením samotných simulací nejprve představuje teoretický základ metod, které jsou pro ni následně použity, teprve poté popisuje proces převodu zvoleného reálného systému na výpočetní model a nakonec ukazuje průběh a vyhodnocení vybraných simulací.

1 Teoretická část

1.1 Dynamika

Dynamika jako část mechaniky, zde konkrétně klasické mechaniky tuhých těles, je vědní disciplína zabývající se vztahem pohybu a sil tento pohyb způsobujících. Sleduje vývoj mechanických systému a popisuje jeho změny a příčiny těchto změn.

Základním fyzikálním vztahem v dynamice je Newtonův druhý pohybový zákon:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

popisující vztah vektoru působící síly a změny vektoru rychlosti hmotného tělesa v čase, případně varianta pro rotaci:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega})$$

popisující vztah vektoru působícího momentu síly a změny vektoru úhlové rychlosti hmotného tělesa v čase.

1.1.1 Statika

Statika je oblast mechaniky, zabývající se systémy, které jsou ve statické rovnováze. Systém ve statické rovnováze lze považovat za zvláštní případ dynamického systému, pro který platí, že je vůči dané vztažné soustavě v klidu (či rovnoměrném přímočarém pohybu), a tedy jeho zrychlení je nulové ($\vec{a} = 0$).

Z Newtonova druhého pohybového zákona¹ tedy plyne, že celková působící síla (neboli výslednice působících sil) na systém musí být též nulová:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0$$

Zároveň platí, že celkové úhlové zrychlení systému je nulové ($\vec{\alpha} = 0$), tedy musí platit, že celkový moment je nulový:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0$$

1.2 Kinematika

Kinematika je další oblastí mechaniky, která popisuje pohyb v mechanickém systému. Na rozdíl od dynamiky se však zabývá popisem geometrie pohybu, ne jeho příčin.

¹Ve tvaru $\vec{F} = m\vec{a}$, případně pro rotaci $\vec{M} = I\vec{\alpha}$

1.3 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice jsou rovnicemi popisujícími vývoj fyzikálního systému v čase, zde konkrétněji průběh pohybu tělesa či hmotného bodu v čase.² Jejich řešením je poloha tělesa/bodu v daném okamžiku. Typicky jsou to diferenciální rovnice, tedy k jednoznačnému řešení je třeba určit integrační konstanty, které zde představují počáteční podmínky.

1.3.1 Kinematické

Pokud označíme okamžitou polohu bodu $\vec{x} = \vec{x}(t)$, můžeme definovat veličinu okamžitá rychlost bodu $\dot{x} = \vec{v} = \vec{v}(t)$ a okamžité zrychlení bodu $\ddot{x} = \vec{a} = \vec{a}(t)$, pro něž platí následující vztahy:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Odvození jednoduché kinematické pohybové rovnice lze ukázat na případu pohybu hmotného bodu s konstantním přímočarým zrychlením (např. volný pád bez odporu vzduchu)

$$a = konst$$

$$v = \int a dt = at + C_1$$

$$x = \int v dt = \int at + C_1 dt = at^2 + C_1t + C_2$$

Je zřejmé, že kvůli neznámým hodnotám konstant C_1 a C_2 není řešení jednoznačné, pro určení polohy a rychlosti bodu v čase t je třeba znát tyto hodnoty v určitém předešlém čase t_0 , pak lze označit $v(t_0) = v_0 = C_1$ a $x(t_0) = x_0 = C_2$ a tedy platí:

$$v(t) = \int_{t_0}^t a dt = a[t]_{t_0}^t + v(t_0)$$

$$x(t) = \int_{t_0}^t v dt = \int_{t_0}^t at + v(t_0) dt = a[t^2]_{t_0}^t + v(t_0)[t]_{t_0}^t + x(t_0)$$

Pro obecné a pak platí, že pohybová rovnice je diferenciální rovnicí druhého řádu s nezávislou proměnnou t a jejím řešením je poloha bodu v čase t $x(t)$.

1.3.2 Dynamické

Dynamické pohybové rovnice v konzervativních mechanických soustavách splňují *zákon zachování mechanické energie*:

$$E = E_p + E_k = konst$$

kde:

²Dále existují též pohybové rovnice kontinua např. pro popis proudění kapalin

- E_p je potenciální energie systému, představuje energii, kterou je možné přeměnit na kinetickou. Pro hmotný bod o hmotnosti m v homogenním gravitačním poli intenzity g je potenciální energie bodu:

$$E_p = mgh$$

kde h je výška nad hladinou s nulovou potenciální energií

- E_k je kinetická energie systému, představuje energii nutnou k urychlení tělesa o hmotnosti m na rychlost v :

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Zákon zachování energie vyjadřuje, že v *konzervativní* mechanické soustavě je celková mechanická energie konstantní, pouze se mění druh energie, viz 1.4.

Opakem konzervativní soustavy je soustava *disipativní*, v takové soustavě celková energie klesá, většinou ve formě tepla je odváděna do okolí. Příkladem takové soustavy je tlumený oscilátor, ztrátu v něm představuje tlumení.

Základní dynamickou pohybovou rovnicí je po úpravě Newtonův druhý pohybový zákon

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Lze pomocí něj odvodit pohybovou rovnici např. pro netlumený harmonický oscilátor³:

$$F = -kx = m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

jinak zapsáno:

$$kx + m\ddot{x} = 0$$

kde k je tuhost pružiny v $[Nm^{-1}]$

a řešením diferenciální rovnice je výraz pro výchylku [5]:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{v_0}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (1.1)$$

po úpravě:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

a výraz pro rychlost:

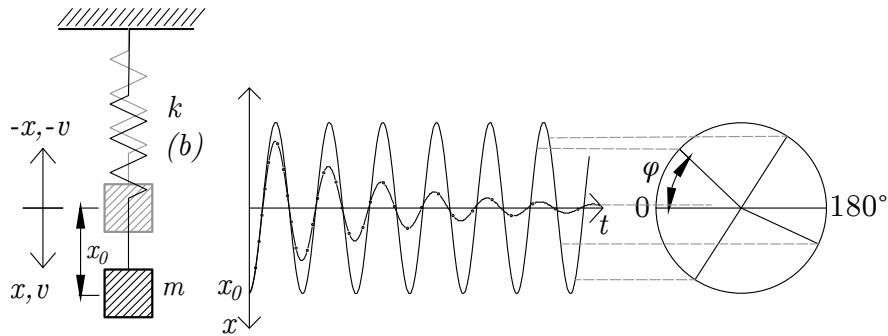
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.2)$$

a φ je fáze kmitu. Pro hodnotu potenciální energie uložené v pružině při změně její

³Za předpokladu platnosti Hookova zákona



Obr. 1.1: Harmonický oscilátor: plná čára - netlumený, čerchovaná čára - podkriticky tlumený

délky o x platí:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

a pro hodnotu kinetické energie hmotného bodu na konci pružiny platí:

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Pro konzervativní soustavu musí platit:

$$E(t) = E_p(t) + E_k(t) = E_p(t_0) + E_k(t_0) = E(t_0) \quad (1.3)$$

Pokud zavedeme tlumení pomocí hodnoty tlumícího koeficientu b , zapíšeme rovnici tlumeného kmitání:

$$kx + m\ddot{x} + b\dot{x} = 0$$

můžeme vyjádřit hodnotu disipované energie⁴:

$$E_d = \frac{1}{2}b\dot{x}^2$$

přičemž z obecného zákona zachování energie platí:

$$E(t) + E_d(t) = E(t_0)$$

1.4 Dynamické systémy

Dynamický systém je obecně systém, jehož *stav* se mění v čase, pro každý čas lze zjistit okamžitý stav, který je popsán množinou na čase závislých *stavových proměnných*. Pro případ systému s jednou stavovou proměnnou, lze zapsat tzv. *model systému* jednou diferenciální rovnicí

$$\dot{x} = f(x, t)$$

⁴známá jako Rayleighova disipativní funkce

Obecně jde o systém diferenciálních rovnic o počtu rovném počtu stavových proměnných.

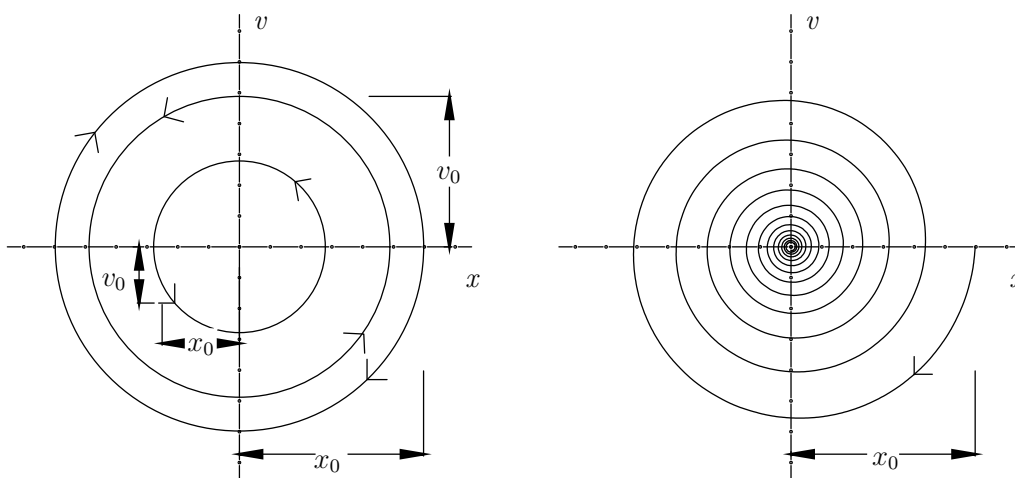
Pro harmonický oscilátor z předchozího příkladu lze označit za stavové proměnné výchylku:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

a rychlost:

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

Pro tento systém lze vykreslit tzv. *fázový diagram* viz 1.2, který popisuje stav systému v jakémkoliv čase. Jednotlivé trajektorie se od sebe liší rozdílnými počátečními podmínkami.



Obr. 1.2: Vlevo tři různé počáteční podmínky netlumeného oscilátoru, vpravo podkriticky tlumený oscilátor

Důležitým parametrem dynamického systému je jeho počet *stupňů volnosti*. Představuje počet nezávislých parametrů, které popisují konfiguraci systému.[6] V mechanických systémech jsou stupně volnosti obecně souřadnice a natočení. Např. hmotný bod v prostoru má 3 stupně volnosti, např. tři hodnoty souřadnic v kartézském systému souřadnic, hmotné těleso pak navíc další 3, popisující jeho natočení vůči souřadnicovým osám. V případě n hmotných bodů v prostoru je pak počet stupňů volnosti systému $3n$. Dříve popsáný harmonický oscilátor je případem systému s jedním stupněm volnosti, kterým je výchylka x .

Dynamické systémy lze dělit podle různých hledisek. Jedno z dělení je na *konzervativní* a *disipativní*, viz kapitola Dynamické pohybové rovnice. Konzervativní lze v přírodě jen těžko nalézt, k disipaci energie ze soustav dochází přeměnou mechanické energie většinou na teplo např. při tření, nepružné deformaci, tlumení v pružině, Taková přeměna není dle druhého termodynamického zákona dokonale vratná a tak i v izolované soustavě klesá hodnota mechanické energie. Další dělení je na systémy

lineární a nelineární. Lineární systém je takový, ve kterém se neznámé proměnné nacházejí ve závislostech vyjádřených pouze funkcemi maximálně prvního řádu (lineární funkce). Příkladem takové závislosti je Hookův zákon pro lineárně pružný materiál $\sigma = E\varepsilon$ nebo síla v pružině $F = kx$.

V přírodě se však lineární systémy neobjevují, případně lze takto popsat systémy např. pouze v oblasti malých výchylek a deformací, v oblasti velkých deformací se již pak jedná o systém nelineární.[2] V takovém systému se objevují závislosti popsané funkcemi řádu dva a vyššího. Zdrojem nelinearity může být např. materiálová nelinearita, kdy již nelze vztah mezi napětím a přetvořením zapsat lineární rovnicí, tvarová nelinearita či kontaktní úloha.

Dynamické systémy lze rozdělit na *deterministické* a *chaotické*. Deterministický systém je takový systém, jehož všechny budoucí stavy lze přesně předpovědět při kompletní znalosti stavu současného. Chaotický systém, přesněji deterministicky chaotický systém, je systém, který je velmi citlivý na změnu počátečních podmínek.[7] Taková i velmi malá změna způsobuje výrazný rozdíl ve vývoji systému. V praxi může být taková změna způsobena např. chybou měření, či zaokrouhlováním numerických metod, což má za následek, že nelze předpovědět dlouhodobý vývoj systému, přestože je teoreticky deterministický.

1.5 Numerické metody řešení pohybových rovnic

Analytické řešení diferenciálních pohybových rovnic se s rostoucí složitostí systému stává velmi složitým až nemožným, je tak nutné přistoupit k použití numerických metod, které namísto výpočtu přesného analytického řešení použijí řadu jednoduchých kroků k dosažení přibližného výsledku.

Na rozdíl od analytického řešení, které poskytuje spojitě výsledky (např. trajektorii) a hodnoty sledovaných parametrů (např. polohu) lze tedy zjistit v libovolném okamžiku, jsou numerické výpočty metodou diskrétní, hodnoty se zjišťují v konkrétních stavech (v našem případě v konkrétním čase t_i). Zásadním parametrem výpočtu je *krok metody* h^5 , v našem případě *časový krok*:

$$h = t_{i+1} - t_i, \quad \text{kde } t_{i+1} > t_i$$

který představuje časový interval, po kterém je proveden výpočet nového stavu. S jeho klesající délkou roste náročnost výpočtu na výpočetní výkon, ovšem roste přesnost, tedy průběh sledované proměnné se blíží analytickému řešení.⁶

Metody lze rozdělit na *jednokrokové*, pokud je k výpočtu nového stavu v čase t_i

⁵krok metody nemusí být konstantní, ovšem v případě, že je krokem čas, je vhodné, aby konstantní byl

⁶za předpokladu stabilního výpočtu

využito hodnot z jediného předešlého stavu t_i , a *vícezkrové*, pokud je k výpočtu stavu t_i využito hodnot ze stavů $t_{i-1}, t_{i-2}, \dots, t_{i-n}$. Vícezkrová metoda má oproti jednokrové metodě vyšší paměťové nároky, je ovšem za předpokladu spojitého, nepříliš dramaticky se vyvíjejícího se systému přesnější.[1]

Dalším dělením numerických metod řešení diferenciálních rovnic je dělení na metody *explicitní*, *implicitní*, případně *semi-implicitní*. Explicitní metoda je taková, která vyjadřuje nový stav přímo pomocí již známého předešlého stavu, např. Eulerova metoda:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n)$$

Naproti tomu v implicitních metodách je nový vztah závislý na hodnotě nového stavu, při výpočtu je tedy nutno využít iteračního řešení, např. zpětná Eulerova metoda:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_{n+1}, x_{n+1})$$

Nevýhodou implicitních metod je vyšší náročnost na výpočetní výkon, výhodou pak vyšší oblast stability. [1] Semiimplicitní metoda je pak kombinací obou předešlých.

1.5.1 Symplektická Eulerova metoda

Pro následnou praktickou část práce byla při simulacích využita symplektická Eulerova metoda, kterou lze zařadit mezi semi-implicitní jednokrové metody. Metoda je úpravou *Eulerovy metody*, což je nejjednodušší jednokrová explicitní metoda. Pro systém s jednou stavovou proměnou ji lze zapsat

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n)$$

kde

$$f(t_n, x_n) = \frac{x_{n+1} - x_n}{h} \approx \frac{dx(t_n)}{dt} = v(t_n)$$

lze tedy psát vztah pro novou polohu

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot v(t_n)$$

a analogicky vztah pro novou rychlost

$$v_{n+1} = v_n + h \cdot a(t_n)$$

Značnou nevýhodou Eulerovy metody je fakt, že během simulace postupně narůstá celková energie systému⁷[4], a pro simulaci mechanických systémů je tak nevhodná.

⁷jev známý jako *energy drift*

Tento nedostatek napравuje z Eulerovy metody odvozená *sympletická (semiimplicitní) Eulerova metoda*.

Tato metoda využívá explicitní vyjádření nové rychlosti z Eulerovy metody

$$v_{n+1} = v_n + h \cdot a(t_n)$$

kterou pak použije pro implicitní vyjádření nové polohy

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot v(t_{n+1})$$

1.6 Ukázka řešení dynamického systému analytickým a numerickým výpočtem

Pro porovnání výsledků analytického a numerického řešení pohybových rovnic byl zvolen jednoduchý dynamický systém s jedním stupněm volnosti v podobě netlumeného harmonického oscilátoru, viz obrázek 1.1.

Konkrétní parametry oscilátoru byly zvoleny: hmotnost $m = 1.0$ kg, tuhost pružiny $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, po dosazení do (1.2) je hodnota úhlové frekvence oscilátoru $\omega = 3.162 \text{ s}^{-1}$. Počáteční výchylka byla zvolena $x_0 = 0.1$ m a počáteční rychlost $v_0 = 0.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Po dosazení do (1.1) dostáváme výraz pro výchylku:

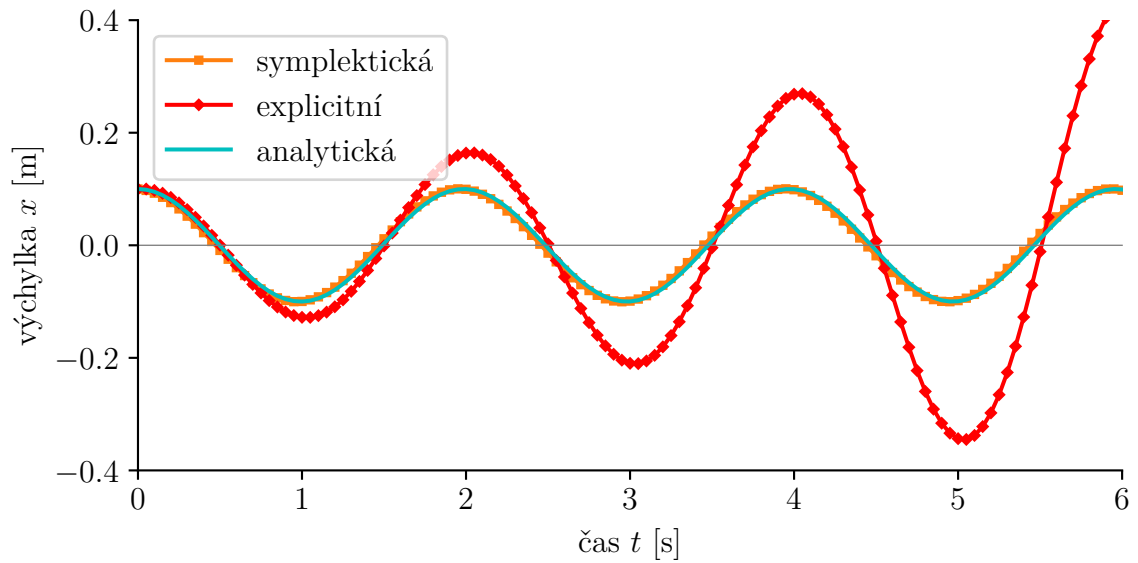
$$x(t) = x_0 \cos(3.162t) + \frac{v_0}{3.162} \sin(3.162t)$$

a podle (1.3) lze určit hodnotu celkové mechanické energie systému $E(t_0) = E(t) = 0.05 \text{ J}$.

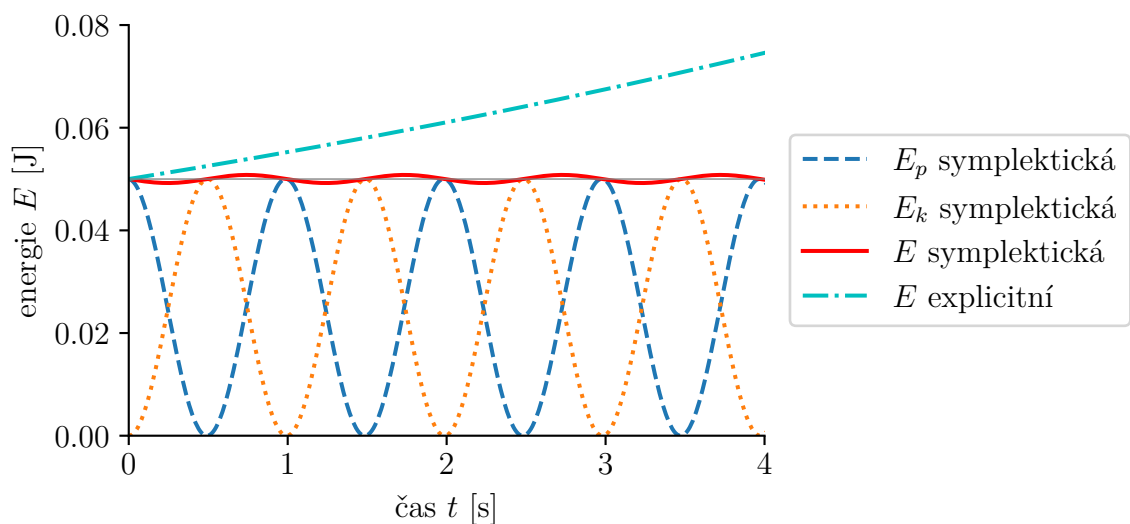
Pro použití Eulerových numerických metod je nejprve nutno vyjádřit zrychlení $a(t_n)$ podle rovnice $F = ma$. Jedinou působící silou v modelu je síla v pružině $F = -kx$ působící proti směru rychlosti x a pro zrychlení tedy platí $a(t_n) = -\frac{x(t_n)}{m}$.

Porovnání hodnot výchylky $x(t)$ získaných analyticky, symplektickou Eulerovou metodou a explicitní Eulerovou metodou lze vidět na grafu 1.3. Explicitní metoda vykazuje výsledky výrazně odlišné od přesného řešení, s rostoucí délkou časového kroku h je tento rozdíl výraznější. Symplektická metoda poskytuje výsledek blízký přesnému analytickému řešení, s amplitudou kmitání s rostoucím časem totožnou s analytickým výsledkem, ovšem s mírně se lišící úhlovou frekvencí. Hodnota tohoto rozdílu je závislá na úhlové frekvenci a délce časového kroku podle rovnice $1 + \frac{1}{24}\omega^2\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$. [4]

V grafu 1.4 lze pozorovat vývoj jednotlivých druhů energie. Celková energie systému podle symplektické metody osciluje kolem přesné hodnoty, amplituda roste s rostoucí délkou kroku h . Explicitní metoda nezachovává energii a neodpovídá tak konzervativnímu systému. Graf také ukazuje přeměnu energie z potenciální (maximální při maximální výchylce) na kinetickou (maximální při maximální rychlosti) a naopak.



Obr. 1.3: Porovnání průběhu výchylky podle zvolené metody výpočtu, $h = 0.05$ s



Obr. 1.4: Porovnání průběhu $E(t)$ a průběh vzájemné změny $E_p(t)$ a $E_k(t)$, $h = 0.01$ s

1.7 Diskretizace kontinua

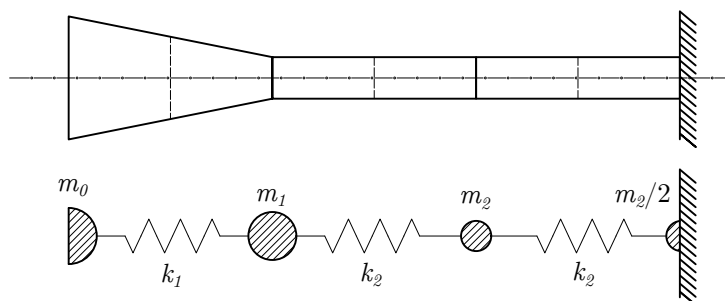
Se vzrůstající složitostí⁸ statických a dynamických systémů mnohonásobně stoupá náročnost jejich popisu a výpočtu jako spojitého kontinua, až se takový výpočet stává nemožným. Je proto nutné kontinuum *diskretizovat*, tedy rozdělit na části,

⁸Zde se složitostí většinou rozumí složitost tvaru objektu

jemnost tohoto dělení pak určuje, jak blízko odpovídá diskretizovaný model původnímu kontinuu. Pro simulaci dynamických systémů lze použít např. *diskretizaci na soustavu se soustředěnými parametry* či *diskretizaci metodou konečných prvků (MKP)*. [2]

1.7.1 Soustava se soustředěnými parametry

Základní princip diskretizace touto metodou spočívá v nahrazení kontinua modelem složeným ze soustavy prvků, kterými jsou *hmotné body* (či hmotná tělesa), jež jsou poté v modelu nositelem kinetické energie, a *nehmotné pružiny* spojující hmotné body, které jsou pak nositelem energie potenciální. V soustavě pak navíc mohou být hmotné body provázány také prvky *tlumičů*, které disipují energii systému. K soustředění hmotnosti kontinua dochází podle diagramu 1.5.



Obr. 1.5: Diskretizace jednorozměrného kontinua - podélně kmitající tyč proměnného průřezu

1.7.2 Diskretizace metodou konečných prvků (MKP)

Principem této metody je rozdělení kontinua na konečný počet prvků, tzv. *konečné prvky*, prvky pak tvoří síť *uzlů*, v nichž je zajištěna spojitost určité veličiny, např. posunutí, pootočení, . . .

Na rozdíl od metody se soustředěnými parametry, kde každý prvek má jednu hodnotu určité veličiny, např. napětí v pružině, jsou konečné prvky "spojité", tedy při zvolení správného typu prvku lze sledovat např. napětí po jeho průběhu. Počet a typ prvků a počet a umístění uzlů na prvku ovlivňuje, jak blízko je výsledek případnému analytickému řešení původního kontinua. Metoda konečných prvků je hojně využívána ve statické analýze systému, v dynamické analýze je v deformační variantě⁹ MKP rozdílná v tom, že posunutí je funkcí kromě souřadnic také času $u = u(x, y, z, t)$

⁹Za neznámé volí složky posunutí, další variantou je silová, která za neznámé volí složky napětí, případně smíšená

Lze zapsat maticovou globální pohybovou rovnicí systému:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + Kx = f$$

kde:

- M je globální matice hmotnosti
- K je globální matice tuhosti
- C je globální matice tlumení
- x vektor zobecněných posuvů
- f vektor vnějších sil

1.8 Kontaktní úloha

Kontakt je v mechanice děj, při němž se dvě tělesa fyzicky dotknou, důsledkem čehož na sebe určitým způsobem působí, např. pružná tělesa se deformují. Kontaktem se zabývá oblast mechaniky kontinua s názvem *kontaktní mechanika*. Kontaktní mechanika dělí kontakt na *kontakt bez tření*, který se odehrává pouze jako působení normálové na povrch těles v kontaktu, kde kontaktní normálové napětí je způsobeno působícími silami a *adhezí*¹⁰, a *kontaktní tření*, které popisuje působení v směru tangenciálním ke kontaktním plochám.[8]

Tření

Třením se označují síly vznikající při vzájemném pohybu pevných povrchů, vrstev kapaliny či materiálových elementů. V případě kontaktu suchých pevných těles se tření mezi jejich povrchy označuje jako *suché tření*.¹¹[9]

Suché tření lze rozdělit na *statické tření*, které působí mezi vzájemně se nepohybujícími povrchy a *kinetické tření* působící mezi povrchy ve vzájemném pohybu. Obecně lze suché tření popsat rovnicí:

$$F_t \leq \mu F_n$$

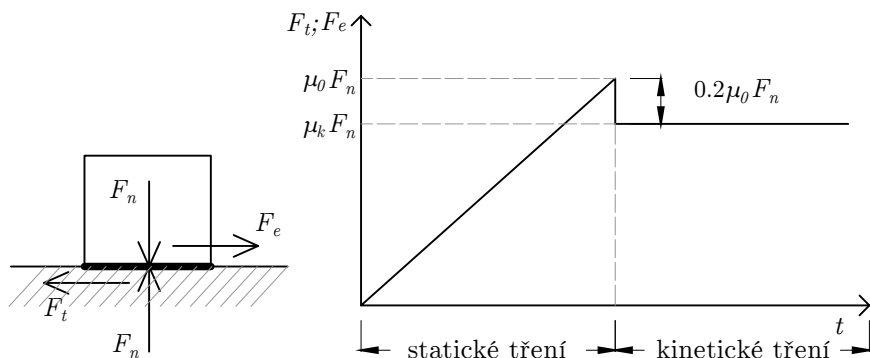
kde

- F_t je třecí síla rovnoběžná s povrchy těles v kontaktu, ve směru opačném k působící vnější síle F_e při statickém tření, či ve směru opačném ke směru vzájemné rychlosti ploch při kinetickém tření
- μ je koeficient tření
- F_n je normálová síla, kterou na sebe povrchy navzájem působí

¹⁰česky přilnavost

¹¹Také označované jako Coulombovo tření.[9]

V případě statického tření působí třecí síla jako odpor k uvedení do pohybu a její hodnota roste s narůstající velikostí vnější síly F_e až do hodnoty $\mu_0 F_n$, po překročení této hodnoty se povrchy vzájemně začnou pohybovat, přičemž mezi nimi nyní působí kinetické tření o velikosti $F_t = \mu_k F_n$, jehož velikost se nemění se změnou vzájemné rychlosti povrchů.¹²



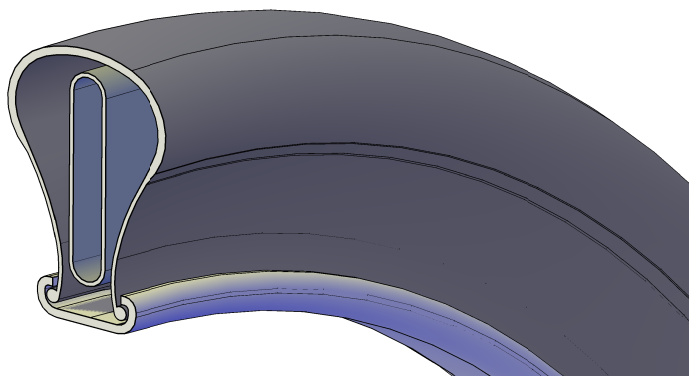
Obr. 1.6: Statické a kinetické tření, v kinematické části konstantní rychlost

Koeficient tření μ je empiricky zjištěná hodnota charakteristická pro kontakt dvou různých či stejných materiálů. Pro každou dvojici materiálů lze zjistit *koeficient statického tření* μ_0 a *koeficient kinetického tření* μ_k , jehož hodnota zpravidla dosahuje přibližně 0.8 násobku μ_0 , což značí, že k udržení pohybu stačí nižší hodnota síly, než která byla potřebná k jeho zahájení.

¹²vztah známý jako Coulombův zákon tření[9]

2 Praktická část

V rámci praktické části práce byl za pomoci vlastního programu vytvořen komplexní model počátečního stavu dynamické soustavy složené ze dvou objektů a poté byla v programu FyDiK simulována jejich vzájemná interakce v čase při působení tíhového zrychlení a vnějšího zatížení. Pro simulaci bylo vhodné zvolit soustavu objektů, u kterých lze dostatečně snadno zjistit údaje potřebné pro vypovídající simulaci. Těmito údaji jsou především jejich rozměry, mechanické vlastnosti materiálů a jasně definovatelné parametry jejich interakce. Pro tyto požadavky byla vybrána soustava cyklistický plášť-duše-ráfek. Soustava byla zvolena také pro různorodost materiálů a tvarů objektů, na představení si snadných interakcí mezi nimi a v neposlední řadě autorova zájmu o oblast cyklistiky.



Obr. 2.1: Řez modelem obruče ráfku s pláštěm a duší

2.1 Programová výbava

2.1.1 FyDiK 2D

Pro simulaci dynamického systému byl využit program autora doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D. jménem FyDiK, konkrétně jeho verze pro řešení rovinných problémů FyDiK 2D. Jedná se o program vytvořený v jazyce JAVA, sloužící k numerické simulaci silně nelineárních dynamických systémů diskretizovaných metodou založenou na metodě soustředěných parametrů, metodou konečných prvků, či jejich kombinací, pomocí určité z řady dostupných numerických metod. Model FyDiKu je tvořen soustavou objektů, z nichž některé jsou v následujících odstavcích blíže představeny.

Hmotný bod

Tělesa jsou ve FyDiKu tvořena objekty analogickými k prvkům diskretizace metodou soustředěných parametrů, hmotnost je tak přiřazována hmotným bodům viz 1.5. Hmotné body kromě hmotnosti nesou hodnotu tlumení, lze jim také zadat okrajovou podmínku zamezení posunu v jedné i obou osách a počáteční (i v čase konstantní) rychlost v jedné i obou osách.

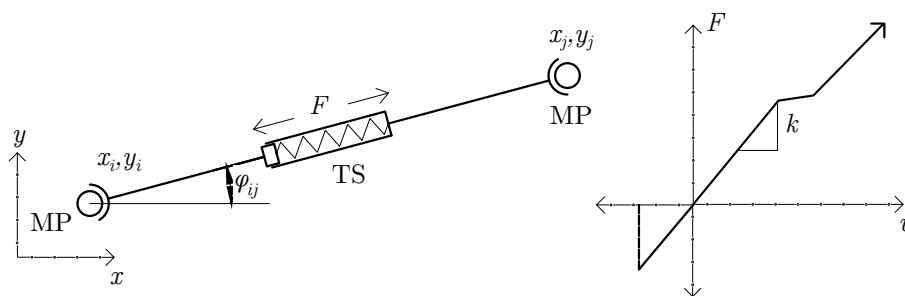
Translační pružina

Translační pružina je objekt spojující dva hmotné body umožňující vlastní podélné zkrácení a prodloužení oproti počáteční délce, za působení pružinové síly $F = k\Delta L$, kde:

$$k = \frac{EA}{L}$$

Simuluje normálovou tuhost materiálu. Hodnotu tuhosti k lze zadat jako *relativní* $k = EA$, což znamená, že zadaná hodnota platí na metr délky pružiny a program si hodnotu upraví podle skutečné délky pružiny.

Hodnotu k lze pružinám přiřadit také pomocí *pružinové funkce*. Pružinová funkce představuje závislost prodloužení pružiny ΔL a síly v pružině F . Sklon funkce v určitém bodě pak představuje tuhost k . Funkce může být zadána jako lineární nebo po částech lineární, čímž lze aproximovat nelineární průběh. Funkce pak může být neohraničená nebo křehká.



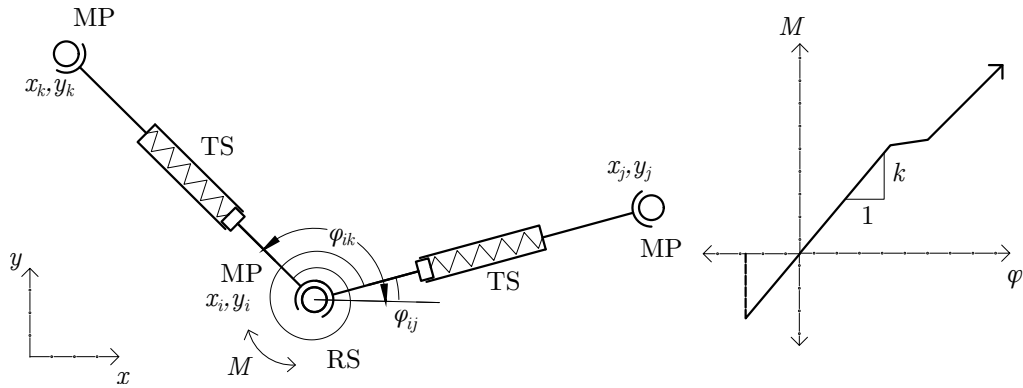
Obr. 2.2: Translační pružina

Rotační pružina

Rotační pružina je objektem spojujícím dvě translační pružiny, simuluje ohybovou tuhost materiálu, je rotační analogií translační pružiny, tedy při změně jejího úhlu vůči počátečnímu vyvozuje moment $M = k\Delta\varphi$, kde:

$$k = \frac{EI}{L}$$

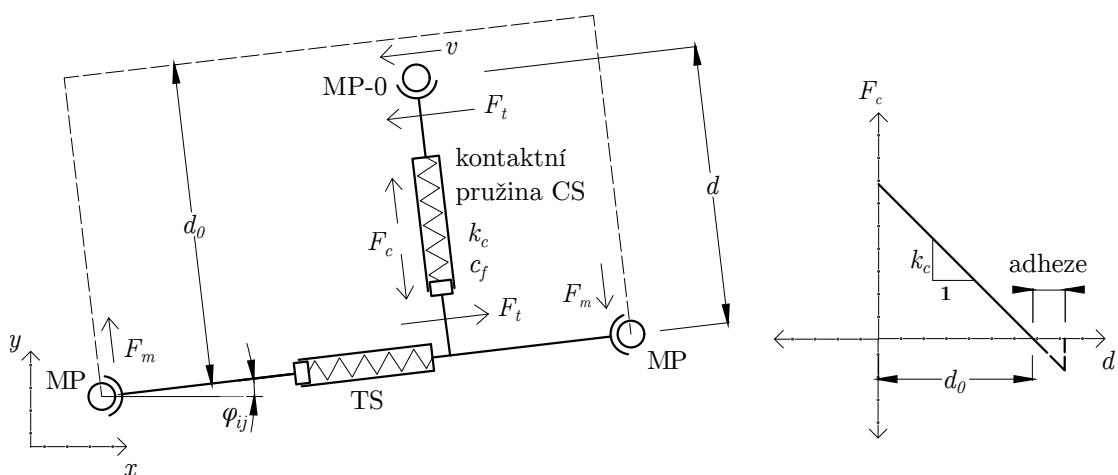
Přiřazení hodnoty k probíhá pomocí pružinové funkce analogicky s translační pružinou.



Obr. 2.3: Rotační pružina

Kontaktní pružina

Kontaktní pružina je objektem umožňujícím simulaci kontaktu objektů. Spojuje určený hmotný bod a translační pružinu. Při přiblížení hmotného bodu k pružině na vzdálenost menší než d_0 viz 2.4 se pružina chová analogicky s translační pružinou a síla v ní vzniklá představuje normálovou složku kontaktu. Pomocí pružiny lze simulovat také adhezi viz graf 2.4. Kontaktní pružina umožňuje simulovat také dynamické kontaktní tření $F_t = c_f F_c$, kde c_f je dynamický součinitel tření. Dynamické tření vzniká při pohybu hmotného bodu vůči translační pružině relativní tangenciální rychlostí v . K zachování momentu hybnosti jsou doplněny síly F_m .

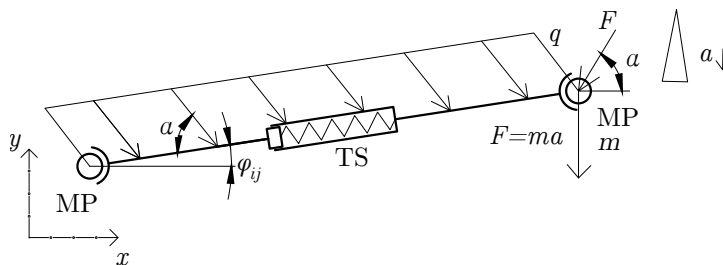


Obr. 2.4: Kontaktní pružina

Zatížení

FyDiK nabízí tři základní druhy zatížení:

- objekt *konstantní zrychlení* v celém modelovém prostoru, které vyvozuje sílu $F = ma$ působící na hmotné body.
- objekt *síla*, který dovoluje přiřadit hmotnému bodu externí sílu zadanou směrem a velikostí v Newtonech, která se může prostřednictvím časové funkce měnit v závislosti na čase
- objekt *spojité zatížení*, které působí na zadanou translační pružinu. Je definované směrem vůči pružině a velikostí v $[\text{Nm}^{-1}]$, která může být v čase proměnná. Zatížení působí po celé délce pružiny i při změně její délky, aktuální velikost výslednice spojitého zatížení je tedy závislá na aktuální délce pružiny.



Obr. 2.5: Objekty zatížení FyDiKu

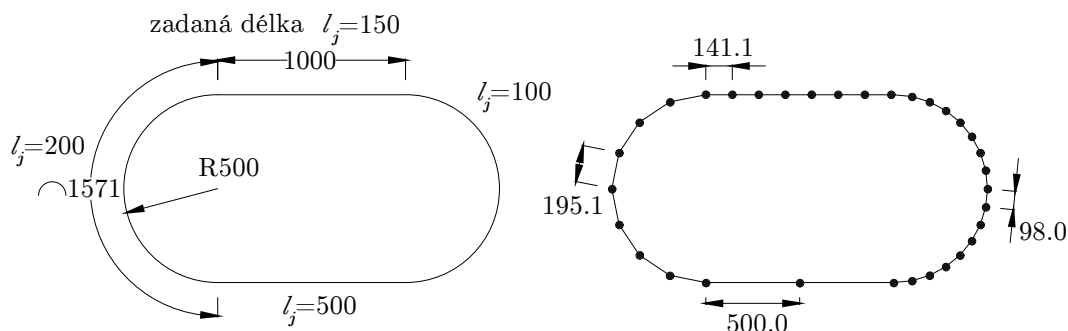
2.1.2 Program na tvorbu modelu

Pro zjednodušení a částečnou automatizaci tvorby počátečního stavu výpočetního modelu byl v prostředí jazyku JAVA 8 za využití postupů objektově orientovaného programování vytvořen program s názvem PointsGen, generující model pro program FyDiK.

Program je tvořen skupinou tříd odpovídajících objektům tvořících model samotných těles v programu FyDiK, tedy MassPoint, TranslationSpring a RotationalSpring, objektům Interaction a ContactSpring zprostředkovávajících interakci mezi tělesy v modelu a objektům Force a ContinuousLoad, představující vnější zatížení. Dále program PointsGen obsahuje seznamy instancí těchto tříd a třídu s definicí nastavení simulace modelu.

Základním vstupem programu jsou v rovinných kartézských souřadnicích počátkem a koncem zadané úsečky a počátkem, koncem a středem zadané kružnicové oblouky, představující střednici spojitého prutového tělesa. Tyto útvary si nesou vlastní hodnoty plochy průřezu, jednotkové objemové hmotnosti, jednotkové ohybové a normálové tuhosti a příslušnost k objektu ve smyslu tělesa (zde tělesa plášť a duše). Tyto spojitě prvky převádí program na soustavu úseček. Délku těchto úseček

lze v programu zvolit, v budoucím modelu pak představuje jeho jemnost a je proto nutné ji volit s ohledem na požadovanou přesnost simulace a zároveň její výpočetní náročnost. Délku úsečky lze zvolit pro různé části objektu různou či stejnou. Ovšem i při volbě stejné délky je zřejmé, že skutečná délka úseček nebude zadané přesně odpovídat a pro různé prvky se bude lišit.



Obr. 2.6: Vlevo: původní tvar, vpravo: model složený z úseček s různou zadanou délkou pro různé části

Na začátek a konec úsečky vloží program objekt `MassPoint`, jehož hmotnost je nulová, úsečky tyto body propojující nahradí objektem `TranslationSpring`, hodnoty plochy průřezu a objemové hmotnosti a normálové tuhosti dědí tyto objekty po původní úsečce/oblouku. Následně jsou tyto translační pružiny propojeny ohybovými pružinami s příslušnou ohybovou tuhostí. Všechny objekty dědí také příslušnost k tělesům. Těmito kroky je vytvořena samotná geometrie modelu.

V dalších krocích lze definovat zatížení ve formě objektů `Force` či `ContinuousLoad` přiřazených příslušným objektům a provést propojení těles objektem `ContactSpring` na základě příslušnosti objektů k tělesům.

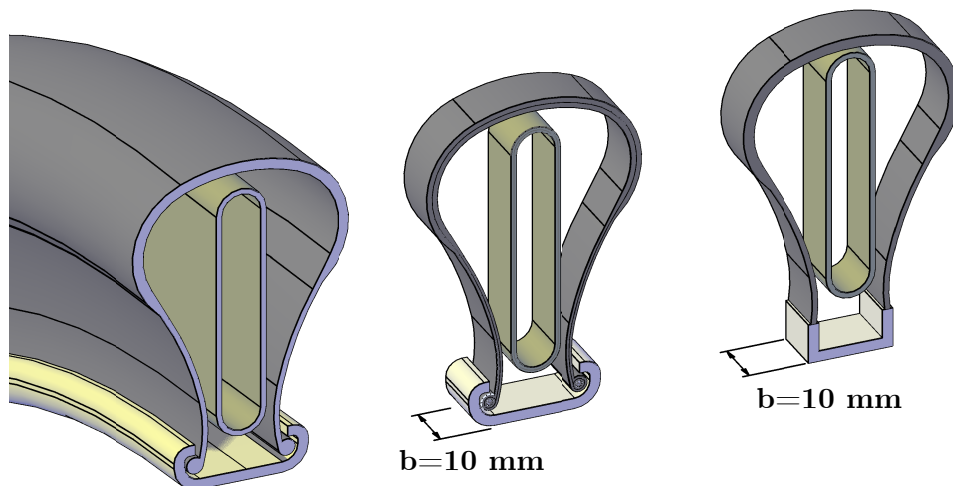
Výstupem programu je soubor v jazyce XML představující kompletní model počátečního stavu pro program `FyDiK`.

2.2 Objekty modelu

Při tvorbě modelu soustavy bylo učiněno několik zjednodušení. Prvním z nich je převod obecného prostorového modelu na rovinný model. Za tímto účelem byl z modelu ve tvaru podobného toru vyňat pás tloušťky 10 mm, přičemž byla zanedbána křivost původního toru. Takovýto nový model již lze simulovat v dvojrozměrném prostoru a to při uvažování tloušťky $t = 10$ mm při určování charakteristik translačních a rotačních pružin a velikosti zatížení.

Dalším zjednodušením je převod dvourozměrných objektů na soustavu jednorozměrných úseček. Toho je docíleno modelováním střednice objektů.

Posledním zjednodušením je zanedbání kontaktní úlohy objektu ráfku a pláště v místě zapadnutí paty pláště do záhybu ráfku. Toto místo tak není simulováno jako oblast kontaktu dvou objektů, ale je nahrazeno připojením části představující ráfek k objektu pláště.



Obr. 2.7: Vlevo - původní model, uprostřed - 2D model, Vpravo - 2D model se zjednodušeným ráfkem

2.2.1 Plášť

Geometrie

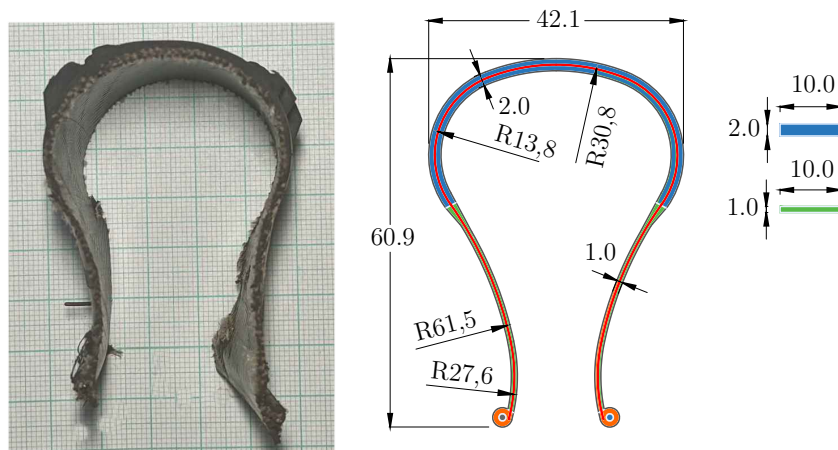
Vzhledem k vlastnostem materiálu je geometrie pláště velmi závislá na vnějších zatíženích. Pro tvorbu modelu byla zjišťována v situaci odpovídající plášti osazenému do ráfku před nafouknutím duše. Typický cyklistický plášť je tvořen z hlediska vlastností materiálu a geometrie třemi základními částmi: patka, stěna, hlava.

Patka pláště je tou částí pláště, která je v kontaktu s ráfkem, spoluúčastní se usazení pláště v ráfku a zajišťuje tak soudržnost pláště a ráfku. Patka pláště představuje jeho ukončení a pro zajištění usazení v ráfku je tato část rozšířena a vyztužena. Pro následující simulace je tato část zanedbána a nahrazena přímým spojením ráfku a stěny pláště.

Stěna pláště zajišťuje, že po nafouknutí je mezi hlavou pláště a ráfkem dostatečný objem vzduchu potřebný pro tlumící funkci pneumatiky. K plnění této funkce je třeba, aby měla co nejnižší ohybovou a zároveň co nejvyšší normálovou tuhost. Z tohoto důvodu je tvořena nejčastěji přírodní gumou vyztuženou nylonovým vláknem. Pro *hlavu* pláště je na rozdíl od stěny zásadní její ohybová tuhost, která zajišťuje stálost jejího tvaru, důležitého pro jízdní vlastnosti. Je proto tvořena vrstvou gumy

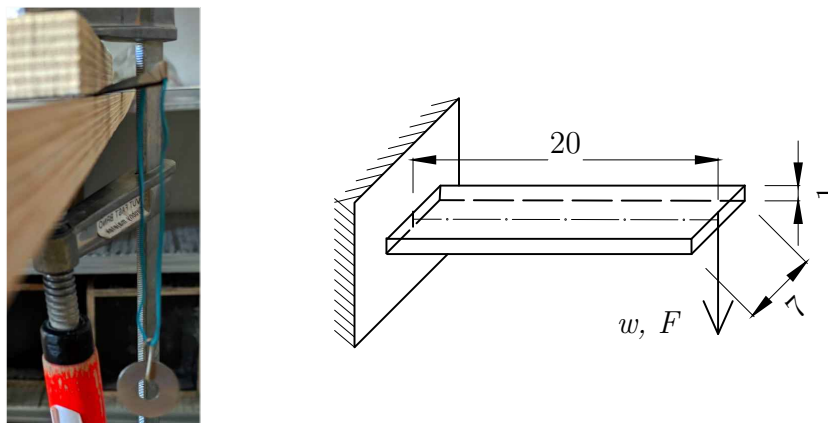
o vyšší tloušťce vyztužené větším množstvím nylonových vláken.

Vstupními údaji pro počáteční geometrii modelu pláště byly: vnější obvod 158 mm, tloušťka stěny 1.0 mm, tloušťka hlavy 2.0 mm. Počáteční tvar odpovídá tvaru zjištěném na skutečném vzorku.



Obr. 2.8: Vlevo skutečný vzorek, vpravo model - červeně modelovaná střednice

Materiálové charakteristiky



Obr. 2.9: Vlevo měřený vzorek, vpravo schéma pro výpočet

Materiál pláště lze označit jako kompozit, tvoří jej pryž ve dvou směrech vyztužená nylonovými vlákny, uspořádání vláken má za důsledek anizotropní chování materiálu, vyznačující se značnou normálovou tuhostí a menší ohybovou tuhostí, lišící se navíc v různých směrech. K zjištění orientační hodnoty ohybové tuhosti pro ohyb ve směru hloubky modelu byla provedena zkouška ohybu konzoly tvořené vzorkem skutečného pláště. Vzorek tvaru desky (viz 2.9) byl zatěžován osamělou silou

F na volném konci. Po změření průhybů lze při znalosti rovnice ohybové čáry konzoly $w = \frac{Fl^3}{3EI}$ snadno určit modul pružnosti materiálu, v tomto případě byl určen jako průměrná hodnota z několika měření, výsledná hodnota je $E_r = 31.34\text{MPa}$. Tato hodnota byla poté použita k určení tuhosti rotačních pružin modelu pláště. Hodnota modulu pružnosti pro normálovou tuhost E_n byla určena odhadem jako desetinásobek hodnoty ohybové, s ověřením odhadu pomocí porovnání výsledného protažení pláště při nafouknutí na danou mez v simulaci a měřením skutečného vzorku. Výsledné tuhosti pružin pláště jsou:

- Hlava: $E_n A = 6268\text{ N}$, $E_r I = 2.1 \cdot 10^{-4}\text{ Nm}^2$
- Stěna: $E_n A = 3134\text{ N}$, $E_r I = 2.6 \cdot 10^{-5}\text{ Nm}^2$

Materiál je vzhledem k velikosti normálových deformací pláště v porovnání s duší zjednodušeně považován za neomezeně lineárně pružný.

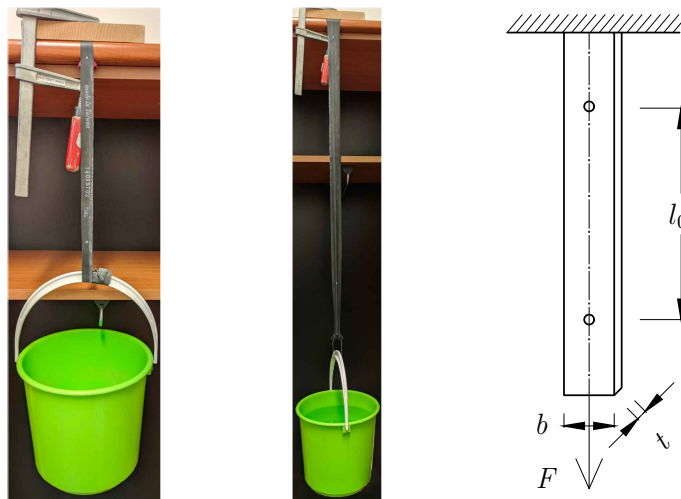
2.2.2 Duše

Geometrie

Vstupními údaji pro počáteční geometrii modelu duše byly: vnější obvod 110 mm, tloušťka stěny 1.0 mm. Počáteční tvar byl s ohledem na co nejjednodušší převod do modelu zvolen jako ovál.

Materiálové charakteristiky

Měřená duše je vyrobena ze syntetické butylové gumy (polyisobutylen). Materiál byl považován za izotropní a pro zjištění modulu pružnosti E byla provedena tahová zkouška.



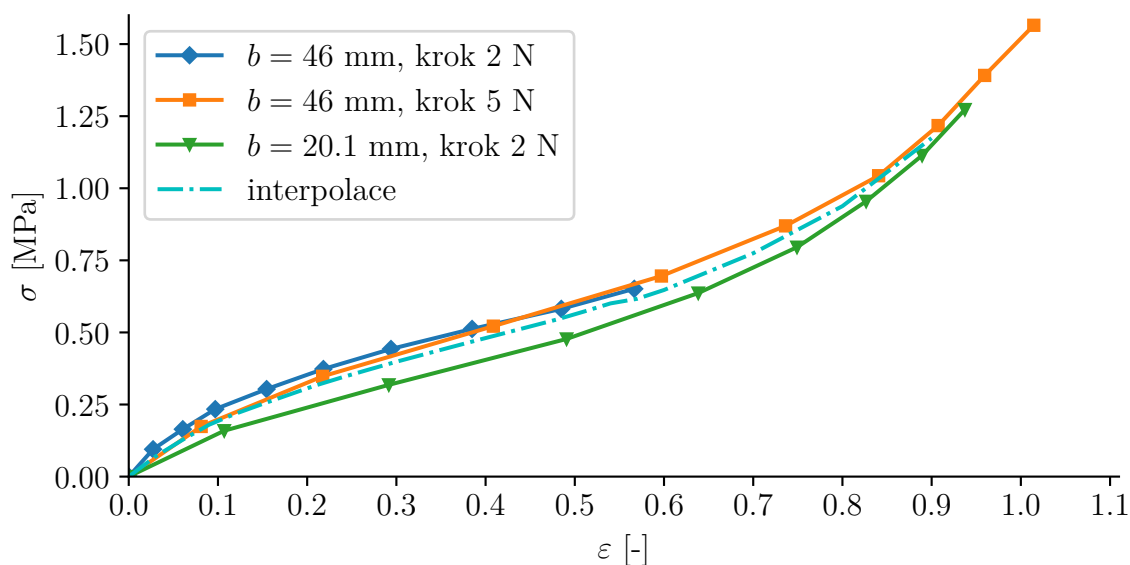
Obr. 2.10: Vlevo stav na počátku měření, uprostřed stav na konci měření, vpravo schéma pro výpočet

Pro zkoušku byly vyrobeny dva vzorky tvaru pásu totožné tloušťky $t = 0.63$ mm, lišící se šířkou.

Vzorek 1 s průměrnou šířkou $b = 46$ mm byl zatěžován nejprve s krokem 5 N v rozmezí 0 – 45 N a odtížen do původního stavu. Poté byl pro zpřesnění počáteční části pracovního diagramu zatěžován s krokem 2 N v rozmezí 0 – 18 N.

Vzorek 2 s průměrnou tloušťkou $t = 20.1$ mm byl zatěžován s krokem 2 N v rozmezí 0 – 16 N.

Na grafu 2.11 jsou vyneseny pracovní diagramy jednotlivých zatěžení, které ukazují nelineární chování materiálu. Výsledný průběh použitý pro definici materiálu v modelu byl získán interpolací prostým průměrem z hodnot pracovních diagramů. Pro určení hodnot tuhostí modelu byl za základní modul pružnosti E_0 modul pruž-



Obr. 2.11: Výsledky tahové zatěžovací zkoušky vzorků materiálu duše

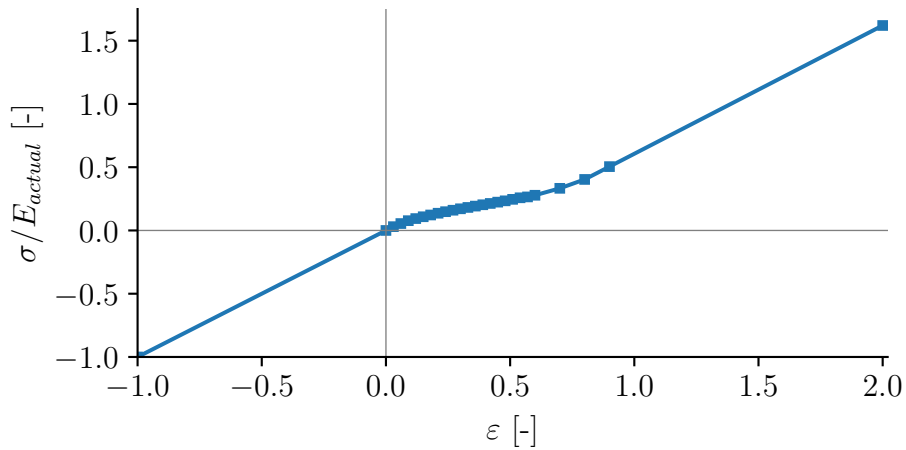
nosti v rozsahu $\sigma \in \langle 0.0; 69.789 \rangle$ kPa s hodnotou $E_0 = 2.326$ MPa. Hodnota základní normálové tuhosti je $E_0A = 14.539$ N. Ostatní hodnoty jsou k této hodnotě vztaženy pomocí polygonální funkce na grafu 2.12, jejíž průběh vychází z pracovního diagramu, a platí, že:

$$F(\varepsilon) = \frac{\sigma}{E_{actual}}(\varepsilon)E_0A$$

Hodnota rotační tuhosti je uvažována konstantní $E_0I = 6.782 \cdot 10^{-7}$ Nm².

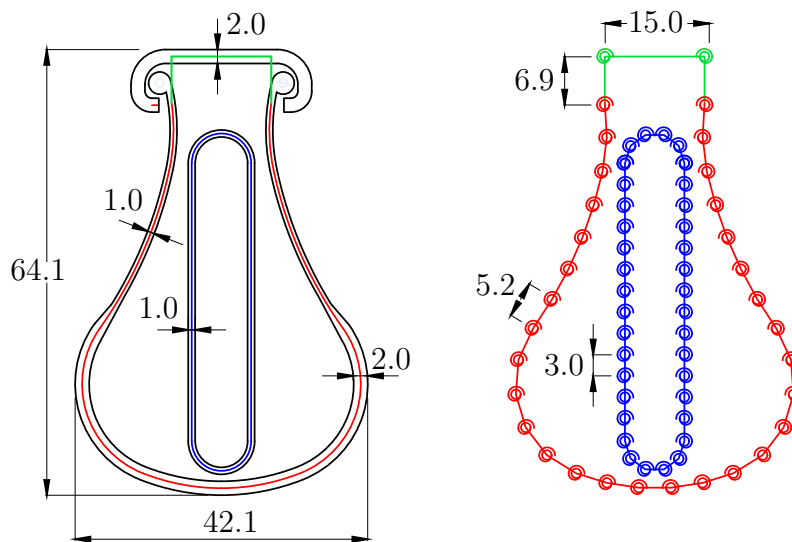
2.2.3 Ráfek

Části objektu pláště nahrazující objekt ráfku byly přiřazeny následující vlastnosti. Za materiál ráfku byla zvolena slitina hliníku hořčíku a křemíku známá pod označení



Obr. 2.12: Polygonální pružinová funkce translačních pružin duše

6061, často používaná pro výrobu ráfků a dalších cyklistických komponent. Hodnota modulu pružnosti tohoto izotropního materiálu je $E = 68 \text{ GPa}$. [3]. Tloušťka stěny ráfku byla zvolena 2.0 mm. Analogicky s předchozím postupem byla vyčíslena tuhost translační pružiny $EA = 1.36 \cdot 10^6 \text{ N}$ a rotační pružiny $EI = 0.453 \text{ Nm}^2$.



Obr. 2.13: Vlevo původní model, vpravo model pro program FyDiK s barevně odlišenými materiály, zadaná jemnost pláště 5 mm, duše 2.5 mm

2.2.4 Zatížení

Vlastní tíha

Dle principu diskretizace metodou soustředěných parametrů se hmotnost translačních pružin, vypočítaná jako $m = AL_0\rho$, kde L_0 je délka pružiny v počátečním

stavu, A je průřezová plocha pružiny a ρ je objemová hmotnost materiálu (v případě duše a pláště zadána totožná hodnota $\rho = 1200 \text{ kgm}^{-3}$, pro hliníkový ráfek hodnota $\rho = 2700 \text{ kgm}^{-3}$), soustřeďuje do hmotných bodů na koncích těchto pružin. V modelu je zadáno konstantní rovnoměrné zrychlení $a = 10 \text{ ms}^{-2}$, simulující tíhové zrychlení.

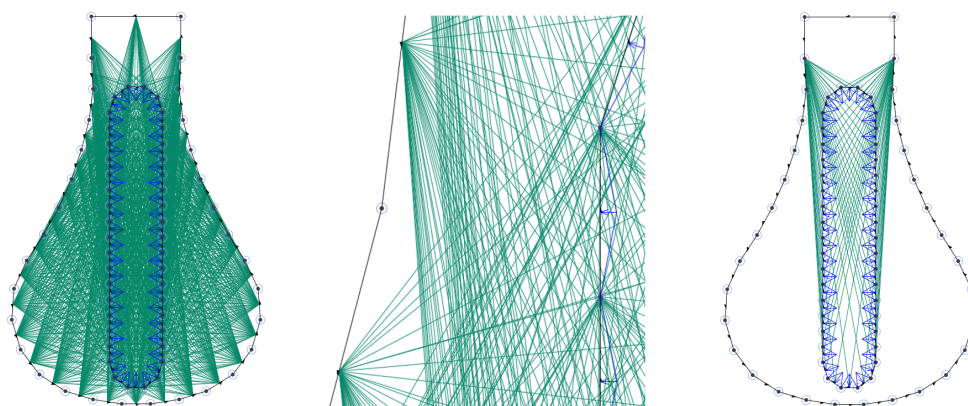
Přetlak

Přetlak je simulován jako spojité zatížení působící kolmo, směrem z vnitřku ven, na translační pružiny duše. Jeho velikost byla určena jako součin hodnoty přetlaku P a hloubky modelu $t = 10 \text{ mm}$, např. pro přetlak o hodnotě pro modelovaný typ pláště doporučené $P = 3 \text{ bar} = 3 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ je hodnota spojitěho zatížení $p = Pt = 3000 \text{ Nm}^{-1}$.

2.2.5 Kontakt objektů

Stěžejní součástí modelu je definice kontaktu objektu duše a pláště. Simulován je pomocí kontaktních pružin popsanych v kapitole FyDiK 2D. Tuhost pružin je zadána relativní hodnotou $k_c = 250 \text{ N}$, pružinová funkce je lineární, bez adheze, s vzdáleností aktivace $d_0 = 0.001 \text{ m}$ určené jako součet poloviny tloušťky duše a pláště. Hodnota dynamického součinitele tření na kontaktu guma-guma byla zadána $c_f = 0.85$.

Kontakt je definován ve dvou částech, které současně v modelu působí. První částí je kontakt každého bodu duše s každou translační pružinou pláště, čítající celkem 1344 kontaktních pružin. Druhou částí je dodatečný kontakt dvou hmotných bodů pláště v místě přechodu pláště do ráfku s každou translační pružinou duše. V tomto místě dochází k vzniku konkávního zakřivení a těchto dodatečných 83 kontaktních pružin v ní zpřesňuje simulaci kontaktu.



Obr. 2.14: Vlevo první část kontaktu, vprostřed detail, vpravo druhá část kontaktu

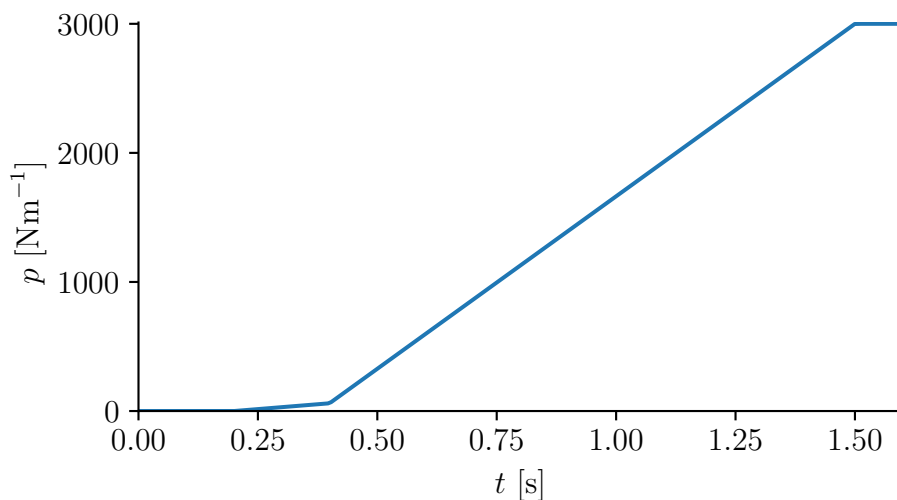
2.3 Ustálení modelu - nafouknutí

První částí simulace provedené na modelu je děj nafukování duše, tedy postupný nárůst přetlaku v duši, její deformace, kontakt s pláštěm a následná společná deformace, za působení vlastní tíhy. Model počátečního stavu je představen v předchozích kapitolách. Je tvořen 74 hmotnými body, 74 translačními pružinami, 74 rotačními pružinami a 1427 kontaktními pružinami. V modelu nejsou definovány žádné vnější vazby, počet stupňů volnosti je tedy 148. Krok výpočtu byl nastaven nejvyšší možný s ohledem na stabilitu výpočtu: $h = 7.5 \cdot 10^{-7}$ s. Jako metoda výpočtu byla zvolena symplektická Eulerova.

Zatěžování, tedy nárůst vnitřního přetlaku z klidového $p_0 = 0 \text{ Nm}^{-1}$ na plný, zde o hodnotě $p = 3000 \text{ Nm}^{-1}$, je prováděn ve třech etapách:

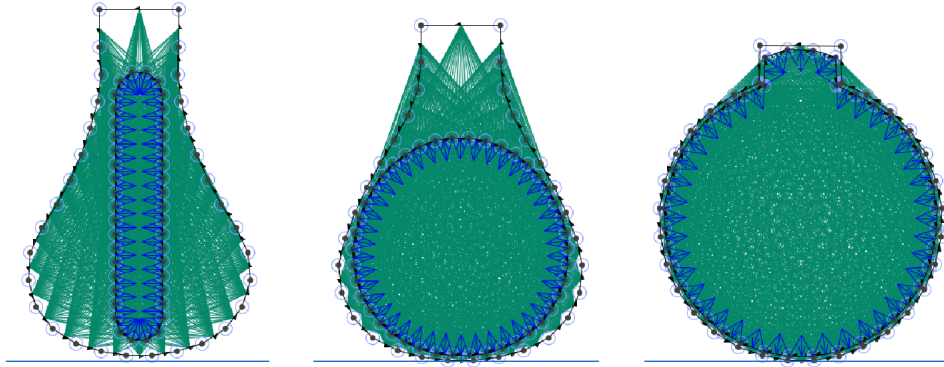
- 0.0 - 0.2 s : $\Delta p = 0 \text{ Nm}^{-1}\text{s}^{-1}$ - fáze prvotního ustálení modelu
- 0.2 - 0.4 s : $\Delta p = 300 \text{ Nm}^{-1}\text{s}^{-1}$ - fáze částečné aktivace kontaktu, zvoleno pomalé nafukování za účelem zamezení kmitání pláště
- 0.2 - 1.5 s : $\Delta p = 29400 \text{ Nm}^{-1}\text{s}^{-1}$ - hlavní fáze nafukování, konstantní nárůst přetlaku až na plnou hodnotu

Nafukování na jiné hodnoty přetlaku pro účely následných simulací bylo prováděno analogicky.



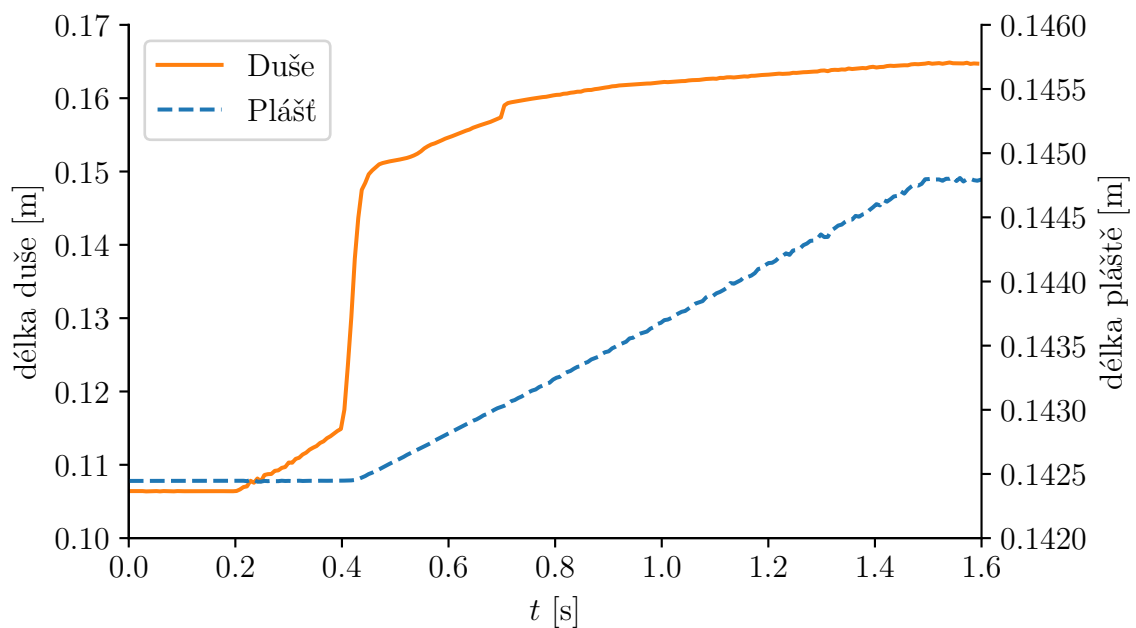
Obr. 2.15: Nárůst vnitřního přetlaku v duši

Na grafu 2.17 lze vidět průběh změny celkové délky pláště a duše, zjištěných jako součet délek jejich translačních pružin v každém kroku výpočtu. V grafu lze pozorovat protažení úměrné nárůstu tlaku v čase $t = 0.20 - 0.44$ s které představuje volné protahování duše závislé pouze na jejích materiálových vlastnostech. Od okamžiku $t = 0.44$ s začíná duše v důsledku kontaktu s pláštěm měnit délku společně se změnou délky pláště, tato změna délky je závislá na vlastnostech pláště. V čase



Obr. 2.16: Vlevo $t = 0.0$ s, uprostřed $t = 0.4$ s, vpravo $t = 1.5$ s

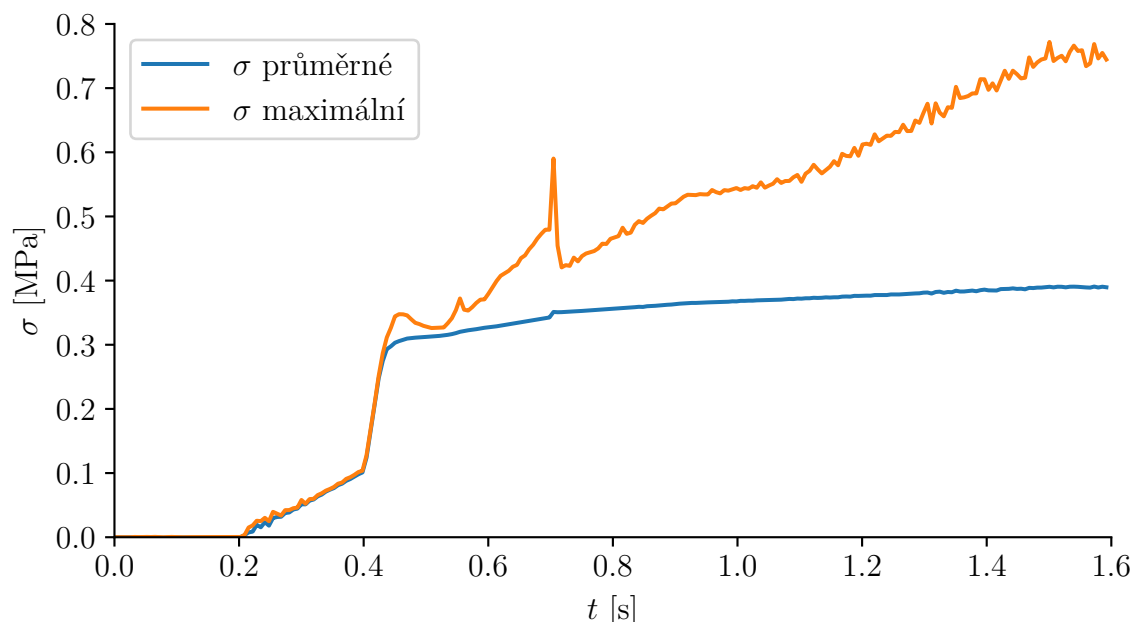
$t = 0.51$ s se duše začíná protahovat do prostoru ráfku, přičemž v čase $t = 0.70$ s dochází ke skokovému nárůstu délky způsobenému "proklouznutím" hmotného bodu duše kolem ostrého rohu v místě přechodu pláště do ráfku a přemístění tohoto bodu do prostoru ráfku. Ve zbylém čase až do okamžiku plného přetlaku $t = 1.50$ s dochází k současnému již lineárnímu roztahování pláště a duše v závislosti na materiálových vlastnostech pláště.



Obr. 2.17: Průběh součtu délek translačních pružin duše během nárůstu tlaku

Na grafu 2.18 je vykreslen průběh průměrného napětí v translačních pružinách duše a maximální hodnota napětí v těchto pružinách v každém okamžiku výpočtu.

Zatímco průměrné napětí odpovídá průběhu změny délky duše, hodnoty maximálních napětí se od nich od okamžiku $t = 0.44\text{s}$, tedy času, kdy duše začíná roztlačovat plášť, výrazně liší. Tento rozdíl je způsoben vyšším protažením pružin v duše v oblasti ráfku. Tento problém by bylo možné zmírnit pomocí výrazně vyšší jemnosti modelu, ovšem za cenu výrazně vyšší výpočetní náročnosti.



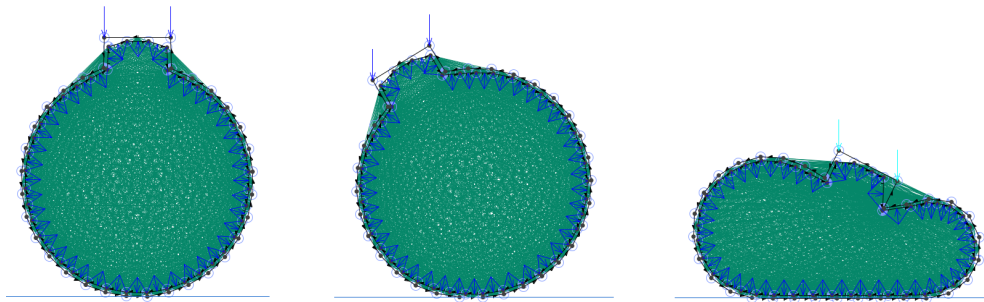
Obr. 2.18: Průběh průměrného a maximálního normálového napětí v translačních pružinách duše

2.4 Zatěžování modelu

Ustálený model s plnou hodnotou přetlaku v duši byl v prostředí FyDiKu nastaven jako nový počáteční stav. Tento nový počáteční stav s již konstantní hodnotou přetlaku byl podroben několika typům zatěžování za účelem zjištění odezvy na tato zatížení. Tato zatěžování na rozdíl od samotného nafukování již obecně nelze provádět na zjednodušeném 2D modelu, při zobecnění na původní prostorový model by totiž docházelo k nerealistickému zatěžování, které neodpovídá dějům, které mají za účel simulovat (nasednutí na kolo, dopad z výšky). V následujících simulacích je proto vždy uvažována ta část pláště, která je v kontaktu s vozovkou a je zanedbána změna přetlaku v duši tak, že vzhledem k celkovému objemu duše a přerozdělení tlaku do míst, která nejsou v kontaktu s vozovkou, je simulovaný řez i při změně objemu považován za izobarické prostředí.

2.4.1 Ztráta stability

Při zatížení dvojicí svislých¹ sil s časem rostoucí velikostí umístěných v horních krajních bodech ráfku, případně při zatížení svislým posuvem těchto bodů, lze v určitém okamžiku sledovat ztrátu stability modelu, projevující se jejich jednostranným v čase narůstajícím vodorovným posunem. Existuje hodnota síly označovaná jako *kritická*, při níž se systém nachází na hranici mezi stavem *stabilní* a *labilní* rovnováhy. Při jejím překročení jakákoliv výchylka od svislého posuvu, způsobená např. zaokrouhlováním výpočtů, způsobí popsanou ztrátu stability.



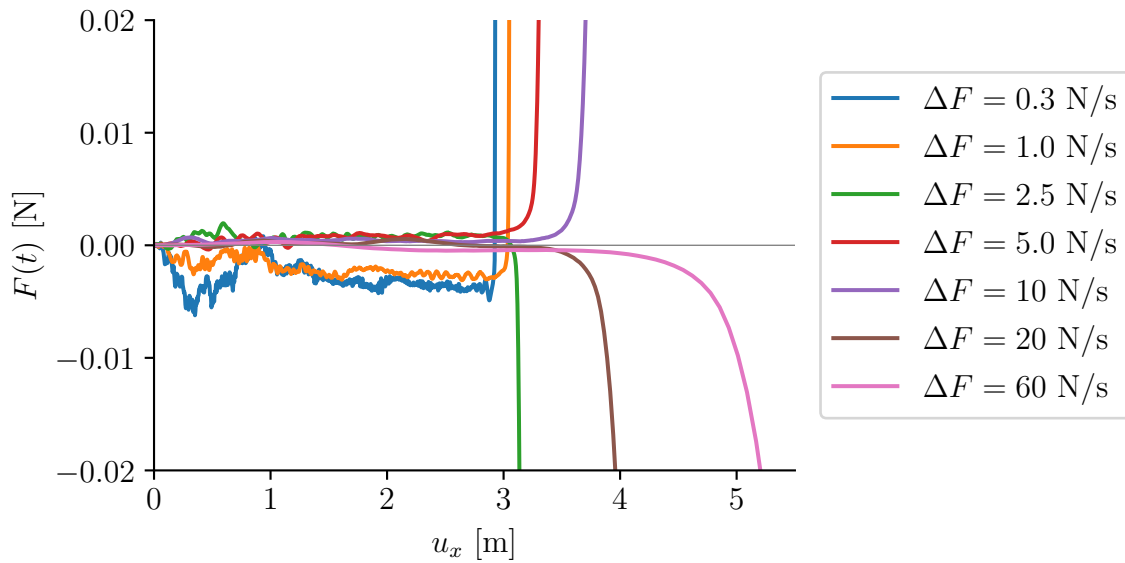
Obr. 2.19: Vlevo před ztrátou stability, ve středě po ztrátě stability při $\Delta F = 5 \text{ N s}^{-1}$, vpravo po ztrátě stability při $\Delta F = 5000 \text{ N s}^{-1}$

Při experimentálním zjišťování kritické hodnoty lze pozorovat, že hodnota síly, při níž dojde ke ztrátě stability, se mění s rychlostí zatěžování, viz 2.20, existuje však nejmenší hodnota, při níž ke ztrátě stability dojde. Z matematického hlediska se jedná o limitní hodnotu, k níž se lze přibližovat snižováním rychlosti zatěžování, experimentální určení přesné hodnoty je tedy nereálné. Přibližně se kritická hodnota síly dle grafu 2.20 nachází v rozmezí $F_{cr} \in \langle 2.8; 2.9 \rangle \text{ N}$, čemuž odpovídá hodnota svislého posuvu bodu pod silou přibližně $u_{y,cr} \approx 0.001 \text{ m}$.

2.4.2 Zatížení silou

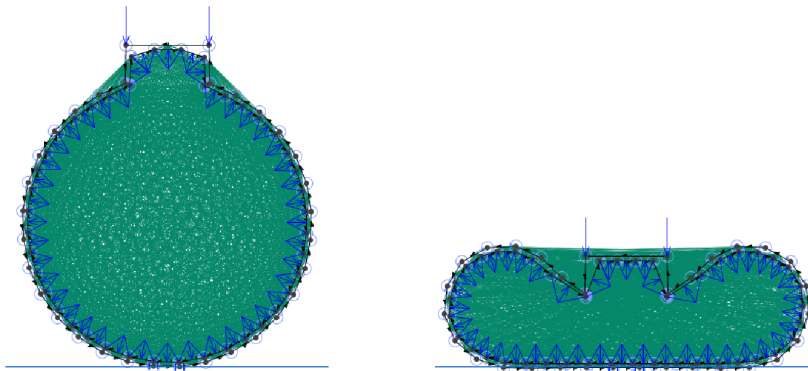
Ztráta stability popsaná v předchozí kapitole neodpovídá skutečnému chování cyklistického kola při zatěžování. Simulovaný model představuje nekonečně dlouhý nezakřivený pás, lze předpokládat, že skutečný zakřivený tvar toru zajišťuje stabilizaci jednotlivých řezů. Pro následující simulaci byl tento stabilizující účinek napodoben pomocí zvýšení koeficientu tlumení vybraných hmotných bodů. Dále bylo bodům v počátečním stavu v kontaktu s podložkou odebrán stupeň volnosti v podobě vodorovné výchylky za účelem eliminace usmýknutí.

¹směřujících ve směru zadaného konstantního zrychlení



Obr. 2.20: Závislost vodorovné výchylky na velikosti síly pro různé rychlosti zatěžování při $P = 3$ bar

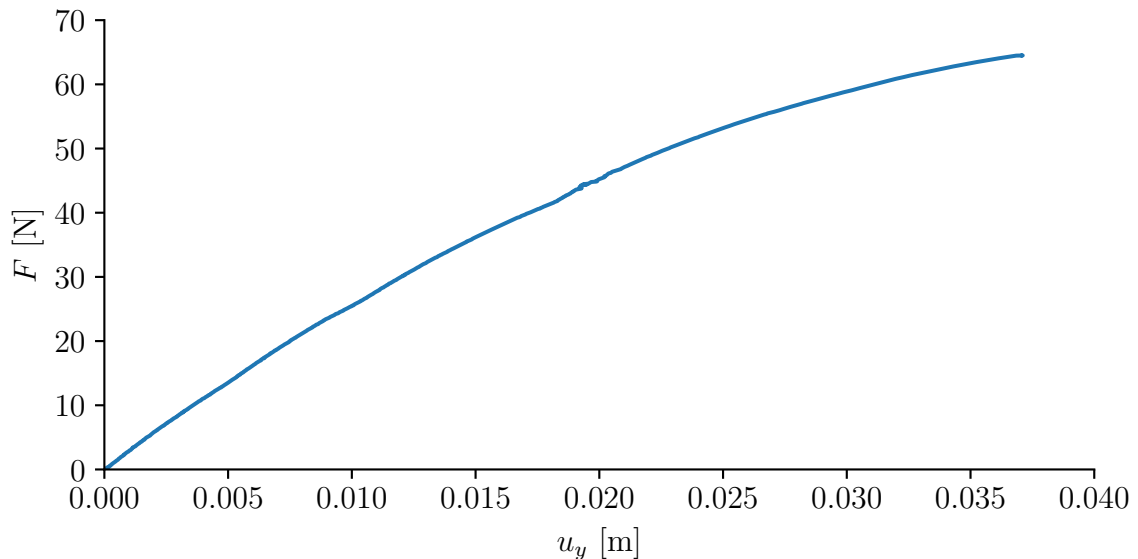
Model byl zatížen dvojicí sil působící v krajních bodech ráfku směrem "dolů". Velikost jednotlivých sil lineárně narůstá v čase $t = 0.0 - 1.0$ s z počáteční hodnoty $F = 0.0$ N do konečné hodnoty $F = 64.0$ N, která představuje poslední celočíselnou hodnotu, při níž je model stabilní.



Obr. 2.21: Vlevo počáteční stav $F = 0.0$ N , vpravo stav plné síly $F = 64.0$ N

Na grafu 2.22 lze vidět závislost svislého posunu bodu pod silou a hodnoty této síly v čase. Průběh je nelineární, což je způsobeno především změnou geometrie modelu a tedy i svislé složky části přetlaku vzdorujícímu působící síle.

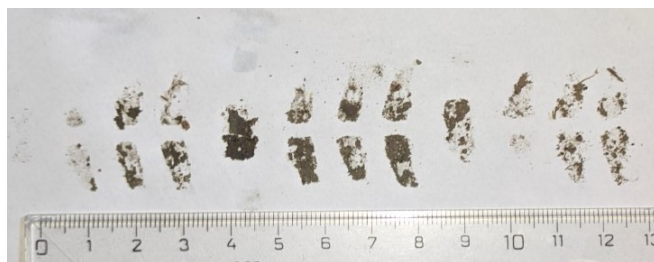
Z této závislosti určit přibližnou hodnotu zatížení celého kola způsobující tuto deformaci. Přepočítání z modelu hloubky $t = 10$ mm na celé kolo lze provést při



Obr. 2.22: Závislost velikosti síly F a svislého posunu jejího působišťe, $P = 3$ bar

znalosti roznášecí plochy, neboli dotykové plochy kola. V případě hladkého pláště bez výstupků má tato plocha tvar elipsy[12], v případě pláště s výstupky lze tvar dotykové plochy vidět na obrázku 2.23. Rozměry plochy závisí na velikosti zatížení, velikosti přetlaku v duši, rozměrech ráfku a pláště.

Zjednodušeně lze tvrdit, že zatížení celého kola se zjistí jako zatížení simulovaného modelu, podělené jeho hloubkou a vynásobené délkou dotykové plochy. V tomto případě pak diagram 2.22 při zanedbání změny délky plochy se změnou velikosti zatížení odpovídá zatížení celého kola v rozmezí 0 – 150 kg.

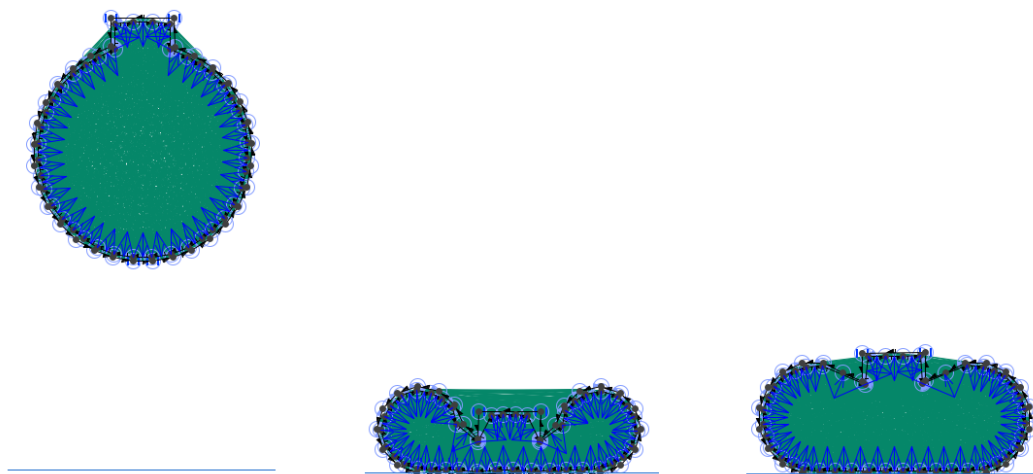


Obr. 2.23: Dotyková plocha, zatížení kola $m = 40$ kg, přetlak v duši $P = 3$ bar

2.4.3 Zatížení dopadem

Dalším způsobem zatěžování je pád z výšky na tvrdou podložku. Dopad je uvažován při zatížení kola jezdcem, dvěma krajním bodům ráfku byla proto udělena hmotnost

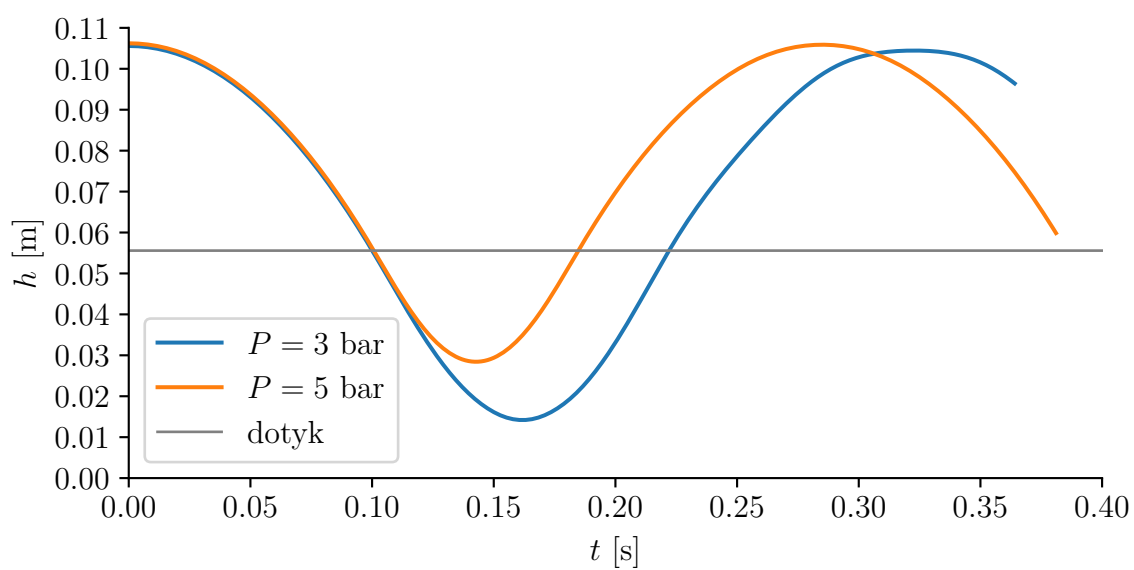
2 kg odpovídající podle principu z předchozí kapitoly zatížení přibližně 48 kg na kolo, neboli zjednodušeně 96 kg na celý bicykl. Výška pádu je měřena jako rozdíl nové výšky podložky od výšky podložky v předchozích simulacích.



Obr. 2.24: Vlevo počáteční stav $h = 0.05$ m, uprostřed stav maximálního stlačení při $P = 3$ bar, vpravo dtto při $P = 5$ bar

Na grafu 2.25 je vykreslena výška krajního bodu ráfku nad podložkou v závislosti na čase během pádu, dopadu a odrazu modelu s přetlakem $P = 3$ bar a $P = 5$ bar z výšky $h = 0.05$ m. Výška dopadu je zvolena s ohledem na stabilitu simulace, při větší výšce by došlo k opření ráfku o podložku a tedy kontaktu části duše s jinou částí duše, tento kontakt však není v modelu definován a výpočet proto selže. V grafu je vyznačena hranice, představující polohu sledovaného bodu odpovídající stavu, při němž poprvé dochází ke kontaktu modelu s podložkou.

K zamezení ztráty stability popsané v předchozí kapitole je krajním bodům ráfku odebrán stupeň volnosti vodorovného posunu. Na grafu si lze všimnout nižší hodnoty maximální svislé souřadnice po odrazu oproti té v počátečním stavu, tento rozdíl je způsobený zadaným tlumením v modelu.



Obr. 2.25: Změna svislé souřadnice sledovaného bodu v čase během pádu, dopadu a odrazu

Závěr

Práce se zabývala simulací procesu nafukování pláště s duší a následného zatěžování plně nafouknutého modelu. V první části práce byla představena programová výbava použitá k tvorbě počátečního stavu modelu a simulaci dynamického nelineárního systému popisujícího soustavu objektů duše a pláště. V následné praktické části byl popsán proces definice modelu a provedené simulace a jejich vyhodnocení.

Výpočetní model zahrnuje řadu zjednodušení, z nichž některá způsobují rozpor mezi chováním v simulacích a předpokládaným, či na skutečné předloze pozorovaným, chováním. Jako nejpodstatnější zjednodušení se jeví snížení prostorové dimenze, nepřítomnost výpletu kola v modelu a zanedbání válcového charakteru úlohy. Mimo neprovedení zmíněných zjednodušení by zpřesnění simulace bylo dosaženo např. komplexnějším studiem materiálů či zahrnutím zanedbaného děje změny přetlaku v duši během její deformace, způsobené interakcí mezi plynem a duší.

Ukazuje se tedy, že vypovídající simulace zdánlivě jednoduché soustavy dvou objektů je ve skutečnosti značně rozsáhlou problematikou, vyžadující znalosti z různých oblastí mechaniky a matematiky.

Literatura

- [1] MACUR, Jiří. *Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace*. Brno: PC-DIR, 1995. ISBN 80-214-0698-4.
- [2] BREPTA, Rudolf, František TUREK a Ladislav PŮST *Mechanické kmitání. Technický průvodce 71.*. Praha: SOBOTÁLES, 1994. 592 s. ISBN 80-901684-8-5.
- [3] *6061 aluminium alloy* [online]. Wikipedia contributors Wikipedia, The Free Encyclopedia. poslední aktualizace 20. ledna 2020 [cit. 31. 1. 2022] Dostupné z URL:
<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=6061_aluminium_alloy&oldid=1066755998>.
- [4] *Semi-implicit Euler method* [online]. Wikipedia contributors Wikipedia, The Free Encyclopedia. poslední aktualizace 16. října 2021 [cit. 4. 4. 2022] Dostupné z URL:
<https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-implicit_Euler_method>.
- [5] *Simple harmonic motion* [online]. Wikipedia contributors Wikipedia, The Free Encyclopedia. poslední aktualizace 28. února 2022 [cit. 5. 4. 2022] Dostupné z URL:
<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Simple_harmonic_motion&oldid=1074520857>.
- [6] *Degrees of freedom (mechanics)* [online]. Wikipedia contributors Wikipedia, The Free Encyclopedia. poslední aktualizace 1. duben 2022 [cit. 13. 4. 2022] Dostupné z URL:
<[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Degrees_of_freedom_\(mechanics\)&oldid=1080447063](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Degrees_of_freedom_(mechanics)&oldid=1080447063)>.
- [7] *Chaos theory* [online]. Wikipedia contributors Wikipedia, The Free Encyclopedia. poslední aktualizace 8. duben 2022 [cit. 13. 4. 2022] Dostupné z URL:
<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Chaos_theory&oldid=1081645639>.
- [8] *Contact mechanics* [online]. Wikipedia contributors Wikipedia, The Free Encyclopedia. poslední aktualizace 15. březen 2022 [cit. 4. 5. 2022] Dostupné z URL:
<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Contact_mechanics&oldid=1077246507>.

- [9] *Friction* [online]. Wikipedia contributors Wikipedia, The Free Encyclopedia. poslední aktualizace 3. květen 2022 [cit. 4. 5. 2022] Dostupné z URL: <<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Friction&oldid=1085997659>>.
- [10] FRANTÍK, Petr. *Aplikace FyDiK* [online]. Ústav stavební mechaniky Fakulta stavební Vysoké učení technické v Brně 2011 <http://fydik.kitnarf.cz/docs/book/fydik_20140502.pdf>.
- [11] Jiri George Drobný *Styrenic Block Copolymers* [online]. Handbook of Thermoplastic Elastomers (Second Edition) Dostupné z URL: <<https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/polyisobutylene>>.
- [12] Dressel A, Sadauckas J *Characterization and Modelling of Various Sized Mountain Bike Tires and the Effects of Tire Tread Knobs and Inflation Pressure* [online]. Applied Sciences 10, no. 9: 3156 Dostupné z URL: <<https://doi.org/10.3390/app10093156>>.