



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Fakulta pedagogická

Katedra matematiky

Diplomová práce

Množiny bodů daných vlastností

Vypracoval: Andrea Dvořáková

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Pavel Pech, CSc

České Budějovice 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval(a) samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to – v nezkrácené podobě – v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných fakultou – elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejich internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne (datum)

.....

(jméno a příjmení)

Poděkování

Chtěla bych poděkovat panu Prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za odborné vedení a věcné připomínky během psaní této diplomové práce.

Anotace

Práce navazuje na mou bakalářskou práci na téma Množiny bodů s danou vlastností a rozšiřuje ji o složitější křivky, než jsou kuželosečky. Práce je zaměřena na vlastnosti těchto vybraných rovinných křivek. U každé křivky jsou uvedeny základní informace, které jsou následně dále popisovány, případně odvozovány. Také jsou řešeny v každé kapitole zajímavé příklady, jak může daná křivka vzniknout. Práce v programu GeoGebra provází celou tuto práci.

Klíčová slova:

matematika, geometrie, množiny bodů daných vlastností, hypocykloida, epicykloida, cykloida, pericykloida, asteroida, deltoid, nefroida, kardioida, kappa křivka, strofoida

Annotation

This thesis follows up on the bachelor thesis with the topic of Loci of given properties and expands it with more difficult curves than conic sections. The thesis is focused on the properties of these selected plane curves. There is also basic information to each curve which are then further described and possibly derived. Interesting samples are solved in every chapter as to how the curve can be made. The program GeoGebra is used throughout this thesis.

Key words:

mathematics, geometry, loci of given properties, hypocycloid, epicycloid, cycloid, pericycloid, asteroid, deltoid, nephroid, cardioid, strophoid, kappa curve

OBSAH

Úvod.....	8
1. Hypocykloida.....	9
1.1. Asteroida	13
1.1.1. Historie.....	13
1.1.2. Základní informace	13
1.1.3. Parametrické rovnice asteroidy	15
1.1.4. Rovnice asteroidy v kartézských souřadnicích	17
1.1.5. Příklad 1. vedoucí k asteroidě	18
1.1.5.1. Řešení pomocí obecné rovnice asteroidy.....	18
1.1.5.2. Řešení pomocí parametrické rovnice asteroidy	21
1.1.6. Příklad 2. vedoucí k asteroidě	24
1.2. Steinerova křivka (deltoid).....	30
1.2.1. Historie.....	30
1.2.2. Základní informace	30
1.2.3. Parametrické rovnice deltoidu	32
1.2.4. Rovnice deltoidu v kartézských souřadnicích.....	35
1.2.5. Příklad vedoucí ke Steinerově křivce.....	39
2. Epicykloida	43
2.1. Kardioida	47
2.1.1. Historie.....	47
2.1.2. Základní informace	47
2.1.3. Parametrické rovnice kardioidy	48
2.1.3.1. Parametrické rovnice vycházející z epicykloidy	48
2.1.3.2. Přímé odvození parametrických rovnic	49

2.1.4.	Odvození polárních souřadnic kardioidy	51
2.1.5.	Kardioida v kartézských souřadnicích	56
2.1.5.1.	Z parametrického vyjádření do kartézských souřadnic	56
2.1.5.2.	Z polárních souřadnic do kartézských souřadnic.....	58
2.1.6.	Příklad 1. vedoucí ke kardioidě.....	60
2.1.6.1.	Geometrický důkaz.....	60
2.1.6.2.	Analytický důkaz	63
2.1.7.	Příklad 2. vedoucí ke kardioidě.....	66
2.2.	Nefroida.....	69
2.2.1.	Historie.....	69
2.2.2.	Základní informace	69
2.2.3.	Parametrické rovnice nefroidy	70
2.2.4.	Rovnice nefroidy v kartézských souřadnicích	71
2.2.5.	Příklad vedoucí k nefroidě	73
3.	Pericykloida	74
3.1.	Příklad vedoucí k nefroidě.....	76
3.1.1.	Geometrická interpretace substituce	81
4.	Cykloida.....	85
4.1.	Odvození parametrických rovnic cykloidy	85
4.2.	Rovnice cykloidy v kartézských souřadnicích	87
5.	Strofoida.....	90
5.1.	Historie	90
5.2.	Základní informace.....	90
5.3.	Rovnice strofoidy v polárních souřadnicích.....	92
5.4.	Rovnice strofoidy v kartézských souřadnicích.....	96

5.5. Příklad vedoucí ke strofoidě.....	97
6. Kappa křivka.....	101
6.1. Historie	101
6.2. Základní informace.....	101
6.3. Rovnice křivky kappa v kartézských souřadnicích	103
6.4. Parametrické rovnice křivky kappa	105
6.5. Polární souřadnice křivky kappa	106
6.6. Příklad vedoucí ke křivce kappa.....	107
Závěr	111
Seznam zdrojů.....	112

Úvod

Vždy jsem měla v oblibě geometrii, proto jsem se rozhodla psát již svou bakalářskou práci na geometrické téma, konkrétně na téma Množiny bodů daných vlastností. V této bakalářské práci byla ovšem hledanou množinou ve většině případů kuželosečka. Diplomovou prací navazuji na práci bakalářskou a rozšiřuji ji o složitější křivky, než jsou kuželosečky.

Celou mou diplomovou práci provází práce s dynamickým softwarem GeoGebra. Tento program používám ke snazší identifikaci jednotlivých množin a pro kontrolu výpočtů při odvozování rovnic jednotlivých křivek.

Práce je rozdělena do několika hlavních kapitol. V první kapitole se zabývám hypocykloidní množinou křivek. Uvádím definici hypocykloidy a odvozuji její parametrické rovnice. Tato kapitola obsahuje dále několik podkapitol, podle počtu vybraných křivek. Každou křivku popisuji stejným způsobem. Nejprve představuji názorný obrázek, dále píš o historii dané křivky, a také uvádím základní informace o křivce, jako je definice a rovnice v kartézském systému, nebo parametrické rovnice. Tyto rovnice se dále snažím ve většině případů odvozovat.

V druhé kapitole se zabývám epicykloidní množinou křivek. Stejně jako u předchozí kapitoly uvádím definici a odvozuji parametrické rovnice. Podkapitoly jsou členěny také stejným způsobem jako v předchozí kapitole.

Třetí kapitola o pericykloidě není tak obsáhlá jako obě předchozí kapitoly, ale vracím se zpět k příkladu z předchozí kapitoly a píš zde o zajímavém propojení mezi pericykloidou a epicykloidou.

Čtvrtá kapitola pojednává o cykloidě.

Pak dále dvě kapitoly následující již nepatří k cykloidním křivkám. Jedná se o Kappa křivku a Strofoidu.

Ve všech případech zmíněných výše, řeším i úlohy vedoucí k těmto křivkám.

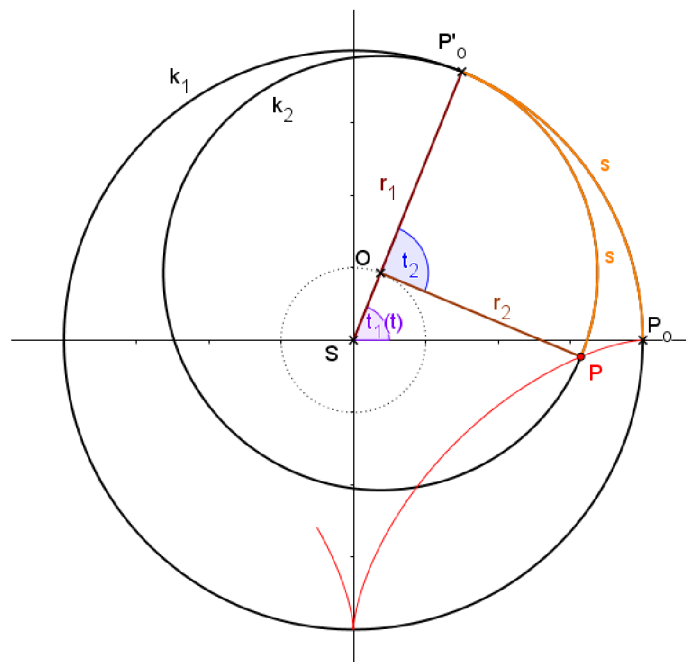
Za cíl své práce považuji uvedení stručného přehledu vlastností u vybraných křivek, ale hlavně bych ráda seznámila případného čtenáře se vztahy mezi cykloidami.

1. Hypocykloida

Některé úlohy, kterými se budu později zabývat, vedou ke křivkám, které patří do množiny křivek zvaných epicykloidy, hypocykloidy a pericykloidy. Nyní však k hypocykloidě.

Hypocykloida vznikne, kotálí-li se kružnice s poloměrem r_2 uvnitř pevné kružnice s poloměrem r_1 , kde $(r_2 < r_1)$. [srov. 1, s.1]

V této části diplomové práce se budu zabývat příklady, které vedou k asteroidě a Steinerově křivce (deltoиду), které patří mezi hypocykloidy.



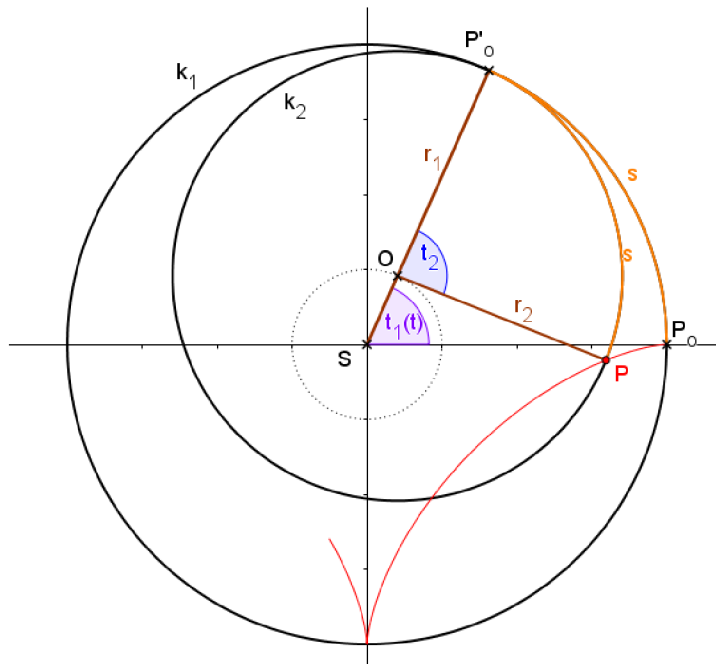
Obrázek 1.-1. Hypocykloida $\frac{r_2}{r_1} = \frac{3}{4}$

Na obrázku 1.-1. je vyobrazena hypocykloida, pro kterou platí: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{3}{4}$. Nyní odvodím rovnici hypocykloidy zmíněné v předchozím textu, jejíž část je zobrazena na obrázku.

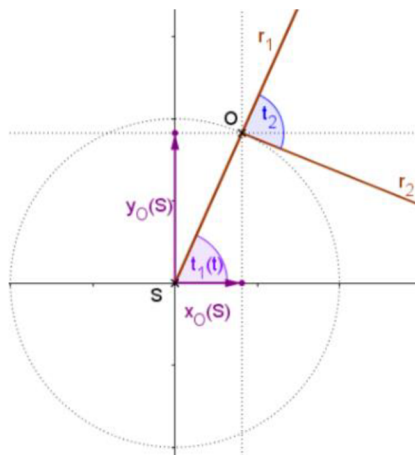
Nejprve si vyjádřím souřadnice bodu P vzhledem k bodu O , viz následující obrázek.

$$y_P(O) = -r_2 \sin \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t_1$$

Nyní vyjádřím souřadnice bodu O vzhledem k bodu S (následující obrázek)



Obrázek 1.-3. Odvození souřadnic bodu O vzhledem k bodu S



Obrázek 1.-4. Odvození souřadnic bodu O vzhledem k bodu S - detail

$$|SO| = r_1 - r_2$$

$$X_0(S) = |SO| \cos t_1 = (r_1 - r_2) \cos t_1$$

$$Y_0(S) = |SO| \sin t_1 = (r_1 - r_2) \sin t_1$$

Podle následujícího obrázku platí pro souřadnice bodu P vzhledem k bodu S následující

$$x_p(S) = X_p(O) + X_0(S)$$

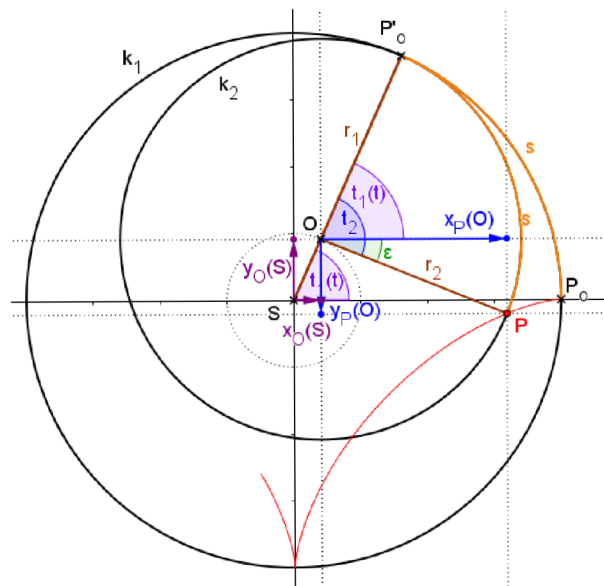
$$y_p(S) = Y_p(O) + Y_0(S)$$

Jedná se vlastně o posunutí o vektor

Nyní dosadím a mohu psát finální parametrickou rovnici hypocykloidy

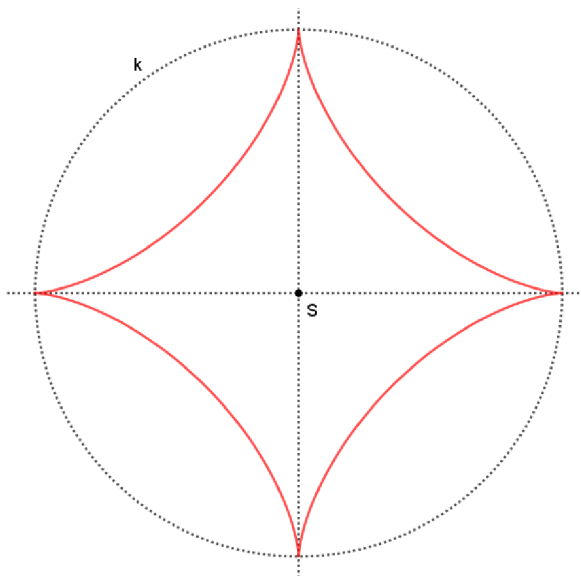
$$x_p(S) = r_2 \cos \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t + (r_1 - r_2) \cos t$$

$$y_p(S) = -r_2 \sin \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t + (r_1 - r_2) \sin t \quad [\text{srov. 1, s.8}]$$



Obrázek 1.-5. Odvození souřadnic bodu P vzhledem k bodu S

1.1. Asteroida



Obrázek 1.1.-1. Asteroida

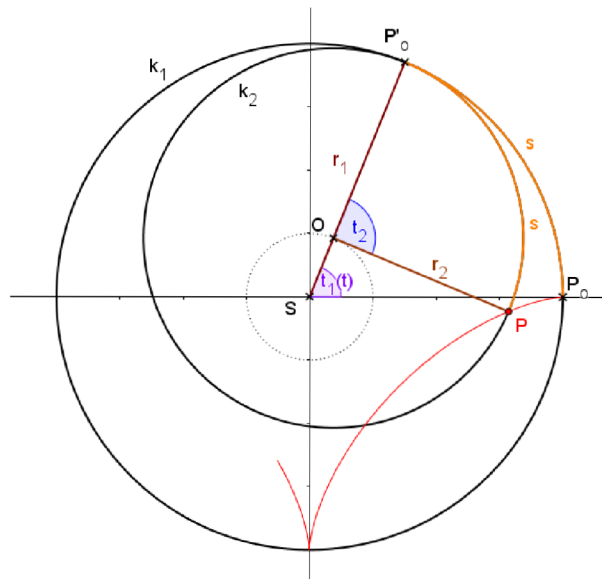
1.1.1. Historie

Asteroida patří mezi cykloidní křivky. Jako první ji začal studovat v roce 1674 dánský matematik a astronom *Ole Romer*, dále se jí v roce 1691 zabýval švýcarský matematik *Jean Bernoulli*, a poté v roce 1715 *Leibniz* a v roce 1748 *D'Alembert*.

Název „Asteroida“ jako první použil rakouský astronom *Joseph Johann von Littrow* v roce 1838. [2]

1.1.2. Základní informace

Asteroida je speciální případ hypocykloidy, kde pro poloměr kružnice kotálející se uvnitř větší kružnice, platí $r_2 = \frac{3}{4} r_1$, kde r_1 je poloměr větší kružnice. [2]



Obrázek 2.1.2.-1. Hypocykloida $\frac{r_2}{r_1} = \frac{3}{4}$

Rovnice asteroidy v kartézských souřadnicích:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

Rovnice asteroidy v parametrickém vyjádření:

$$x = a \cos^3 u$$

$$y = -a \sin^3 u$$

[2]

1.1.3. Parametrické rovnice asteroidy

Nyní z parametrického vyjádření hypocykloidy odvodím parametrické rovnice asteroidy.

Parametrické vyjádření hypocykloidy:

$$x = r_2 \cos \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t + (r_1 - r_2) \cos t$$

$$y = -r_2 \sin \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t + (r_1 - r_2) \sin t$$

Dosadím za $r_1 = a$ a $r_2 = \frac{3}{4}a$

$$x = \frac{3}{4}a \cdot \cos \frac{a - \frac{3}{4}a}{\frac{3}{4}a} \cdot t + \left(a - \frac{3}{4}a\right) \cos t$$

$$y = -\frac{3}{4}a \cdot \sin \frac{a - \frac{3}{4}a}{\frac{3}{4}a} \cdot t + \left(a - \frac{3}{4}a\right) \sin t$$

Po úpravě

$$x = \frac{3}{4}a \cdot \cos \frac{1}{3} \cdot t + \frac{1}{4}a \cos t$$

$$y = -\frac{3}{4}a \cdot \sin \frac{1}{3} \cdot t + \frac{1}{4}a \sin t$$

Provedu substituci

$$u = \frac{t}{3}$$

$$x = \frac{3}{4}a \cdot \cos u + \frac{1}{4}a \cos 3u$$

$$y = -\frac{3}{4}a \cdot \sin u + \frac{1}{4}a \sin 3u$$

Pro $\cos 3u$ platí

$$\begin{aligned} \cos 3u &= \cos^3 u - 3 \cos u \sin^2 u = \\ &= \cos^3 u - 3 \cos u (1 - \cos^2 u) = \\ &= \cos^3 u - 3 \cos u + 3 \cos^3 u = \\ &= 4 \cos^3 u - 3 \cos u \end{aligned}$$

Pro $\sin 3u$ platí

$$\sin 3u = 3 \sin u - 4 \sin^3 u$$

Mohu tedy psát

$$x = \frac{3}{4} a \cdot \cos u + \frac{1}{4} a (4 \cos^3 u - 3 \cos u)$$

$$y = -\frac{3}{4} a \cdot \sin u + \frac{1}{4} a (3 \sin u - 4 \sin^3 u)$$

$$x = \frac{3}{4} a \cdot \cos u + a \cos^3 u - \frac{3}{4} a \cdot \cos u$$

$$y = -\frac{3}{4} a \cdot \sin u + \frac{3}{4} a \cdot \sin u - a \sin^3 u$$

Parametrické vyjádření asteroidy je

$$\mathbf{x = a \cos^3 u}$$

$$\mathbf{y = -a \sin^3 u}$$

(Pro tento případ je ypsilonová souřadnice záporná, protože se bod při kotálení vnitřní kružnice nachází ve čtvrtém kvadrantu viz předchozí obrázek 1.1.2.-1.)

1.1.4. Rovnice asteroidy v kartézských souřadnicích

Jelikož už mám parametrické rovnice asteroidy, vyjdu z nich.

$$x = a \cos^3 u$$

$$\cos u = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$$

$$y = a \sin^3 u$$

$$\sin u = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$$

$$x = a \cos^2 u \cdot \cos u$$

$$x = a \cos u (1 - \sin^2 u)$$

$$x = a \cos u \left(1 - \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}} \right)$$

$$x = a \sqrt[3]{\frac{x}{a}} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}} \right)$$

$$x = a \left(\sqrt[3]{\frac{x}{a}} - \sqrt[3]{\frac{xy^2}{a^3}} \right)$$

$$x = \left(\sqrt[3]{\frac{xa^3}{a}} - \sqrt[3]{\frac{xy^2a^3}{a^3}} \right)$$

$$x = \sqrt[3]{xa^2} - \sqrt[3]{xy^2}$$

Celou rovnici vydělím $\sqrt[3]{x}$ a mohu psát obecnou rovnici asteroidy:

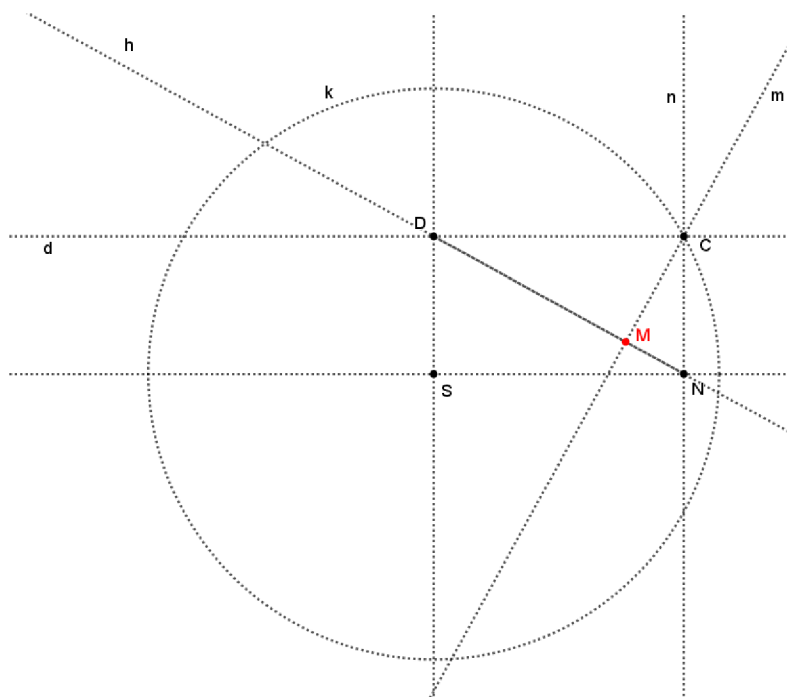
$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

1.1.5. Příklad 1. vedoucí k asteroidě

Příklad si rozdělím na dvě podkapitoly. V první podkapitole budu dokazovat, že se jedná o asteroidu pomocí její obecné rovnice, v druhé části pomocí parametrických rovnic.

Zadání:

Nechť je dána kružnice k , bod C , který je bodem kružnice, přímka x a přímka y k této přímce kolmá. Z bodu C jsou spuštěny kolmice k přímkám x a y a paty kolmic jsou pojmenovány N a D . Nechť dále existuje přímka m , kolmá k úsečce ND a procházející bodem C . Pata této kolmice je pojmenována M . Úkolem je určit, jaká je množina bodů M , při pohybu bodem C po kružnici k . [3]



Obrázek 1.1.5.-1. Zadání příkladu

1.1.5.1. Řešení pomocí obecné rovnice asteroidy

Řešení provádím analytickým způsobem. Střed S kružnice k jsem umístila do počátku soustavy souřadné. Bod N leží na ose x a bod D na ose y . Kolmici k úsečce DN , procházející bodem C , jsem pojmenovala m .

Nejprve potřebuji zjistit souřadnice bodu M , který určuje hledanou množinu bodů. Proto potřebuji určit rovnici přímky m a rovnici přímky, na které leží úsečka ND . Tuto přímku pojmenuji h .

$$D [0; b]$$

$$N [a; 0]$$

$$C [a; b]$$

$$M [p; q]$$

Nejprve určím parametrickou rovnici přímky h

$$\vec{s}_h = N - D$$

$$\vec{s}_h = (a; -b)$$

Parametrická rovnice přímky h je

$$h: \begin{cases} x = a + at \\ y = 0 - bt \end{cases}$$

Nyní vyjádřím rovnici přímky m v obecném tvaru

$$\vec{s}_h = \vec{n}_m$$

$$\vec{n}_m = (a; -b)$$

$$m: ax - by + c = 0$$

Protože přímka m prochází bodem C

$$a \cdot a - b \cdot b + c = 0$$

$$c = b^2 - a^2$$

Takže rovnice přímky m je

$$ax - by + b^2 - a^2 = 0$$

Nyní mohu určit průsečík přímek m a h , tedy bod M

$$a(a + at) - b(0 - bt) + b^2 - a^2 = 0$$

$$a^2 + a^2t + b^2t = a^2 - b^2$$

$$t = \frac{-b^2}{a^2 + b^2}$$

Takže souřadnice bodu M jsou

$$M \left[a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2}; \frac{b^3}{a^2 + b^2} \right]$$

Upravím

$$M \left[\frac{a^3}{a^2 + b^2}; \frac{b^3}{a^2 + b^2} \right]$$

Pro $M [p; q]$ je

$$p = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$$

$$q = \frac{b^3}{a^2 + b^2}$$

Také platí

$$a^2 + b^2 = r^2$$

Pak

$$a^3 = pr^2$$

$$a = \sqrt[3]{pr^2}$$

$$b^3 = qr^2$$

$$b = \sqrt[3]{qr^2}$$

Po dosazení za a, b

$$\sqrt[3]{p^2r^4} + \sqrt[3]{q^2r^4} = r^2$$

$$\sqrt[3]{r^4}(\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2}) = \sqrt[3]{r^6}$$

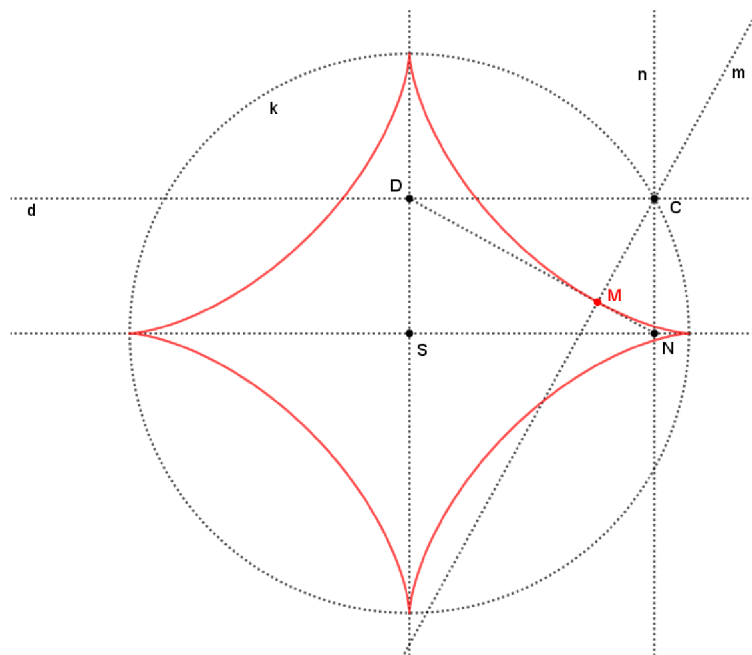
$$\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{r^2}$$

$$p \leftrightarrow x$$

$$q \leftrightarrow y$$

Závěr:

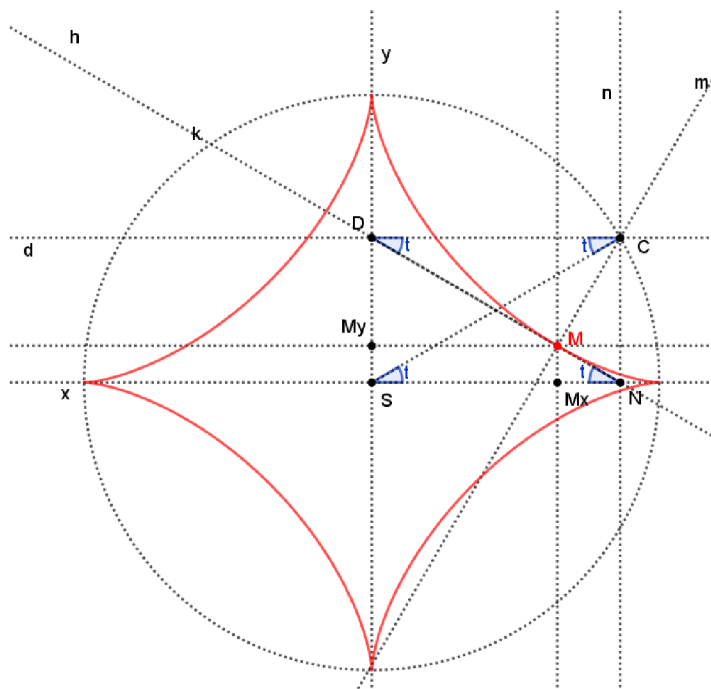
Výsledná rovnice $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{r^2}$ je rovnicí asteroidy, proto množina všech bodů M je asteroida.



Obrázek 1.1.5.1.-1. Hledaná množina bodů

1.1.5.2. Řešení pomocí parametrické rovnice asteroidy

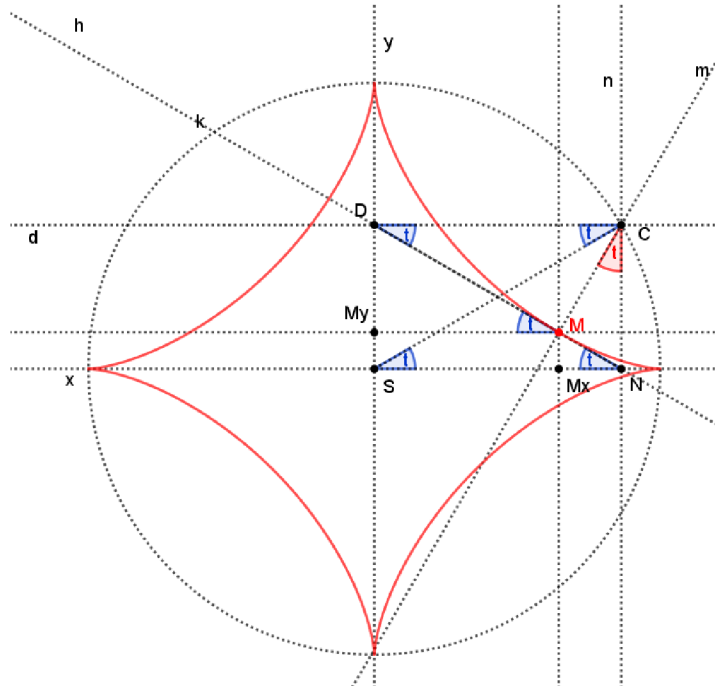
Na následujícím obrázku je útvar $SNCD$ obdélník. Úhel NSC si označím jako t , shodné úhly s úhlem t budou rovněž úhly DNS , DCS a NDS .



Obrázek 1.1.5.2.-1. Obdélník $SNCD$ a úhly t

Dále souhlasný úhel k úhlu DNS je úhel DMM_y , takže také bude mít velikost t .

Zbývá mi odvodit velikost úhlu MCN . Tento trojúhelník je pravoúhlý, rameno CM je kolmé na rameno ND , rameno CN je kolmé na rameno SN , takže velikost úhlu MCN je stejná, jako velikost úhlu svíraného rameny ND a SN , což je t .



Obrázek 1.1.5.2.-2. Úhel t v trojúhelníku MCN

Nyní mohu z jednotlivých pravoúhlých trojúhelníků zapisovat:

Z trojúhelníku $MyMD$ je jasné, že

$$|SMx| = |MyM| = \cos t |MD|$$

Z trojúhelníku CDM

$$|DM| = \cos t |CD|$$

Z trojúhelníku SND

$$|CD| = |NS| = a \cos t$$

$$\left. \begin{array}{l} |SMx| = |MyM| = \cos t |MD| \\ |DM| = \cos t |CD| \\ |CD| = |NS| = a \cos t \end{array} \right\} x = |SMx| = a \cos^3 t$$

Z trojúhelníku $MxNM$

$$|SM_y| = |MxM| = \sin t |MN|$$

Z trojúhelníku MNC

$$|MN| = \sin t |NC|$$

Z trojúhelníku DNC

$$|NC| = a \sin t$$

$$\left. \begin{array}{l} |SM_y| = |MxM| = \sin t |MN| \\ |MN| = \sin t |NC| \\ |NC| = a \sin t \end{array} \right\} y = |SM_y| = a \sin^3 t$$

Závěr:

Výsledná rovnice $x = a \cos^3 t$; $y = a \sin^3 t$ je rovnicí asteroidy, proto množina všech bodů M je asteroida.

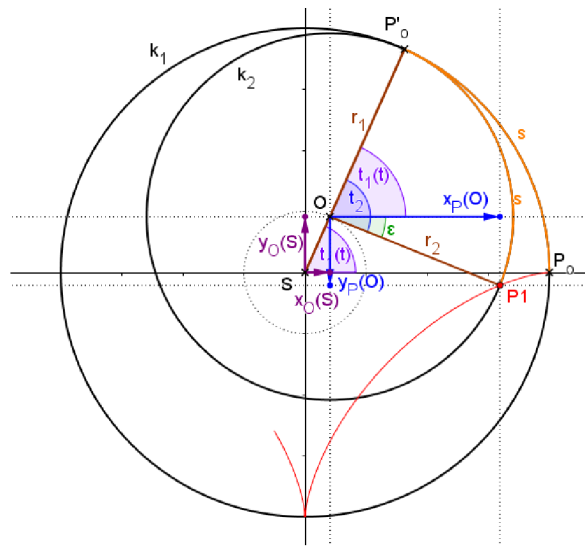
1.1.6. Příklad 2. vedoucí k asteroidě

Zadání:

Přesvědčte se, že body P_1, P_2 a P_3 na kružnici o poloměru $3R/4$, které tvoří rovnostranný trojúhelník, opisují tutéž křivku (*asteroidu*), jestliže se kružnice kotálí po vnitřku pevné kružnice o poloměru R . [3]

Řešení:

Bez újmy na obecnosti volím poloměry kružnic $r_1 = 4$ a $r_2 = 3$



Obrázek 1.1.6.-1. Kružnice $r_1 = 4$ a $r_2 = 3$

Dosadím poloměry do parametrických rovnic hypocykloidy, které jsou

$$x_p(S) = r_2 \cos \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t + (r_1 - r_2) \cos t$$

$$y_p(S) = -r_2 \sin \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t + (r_1 - r_2) \sin t$$

[1, st. 8]

Takže pro bod P_1 asteroidy platí

$$x = 3 \cos \frac{1}{3} t + \cos t$$

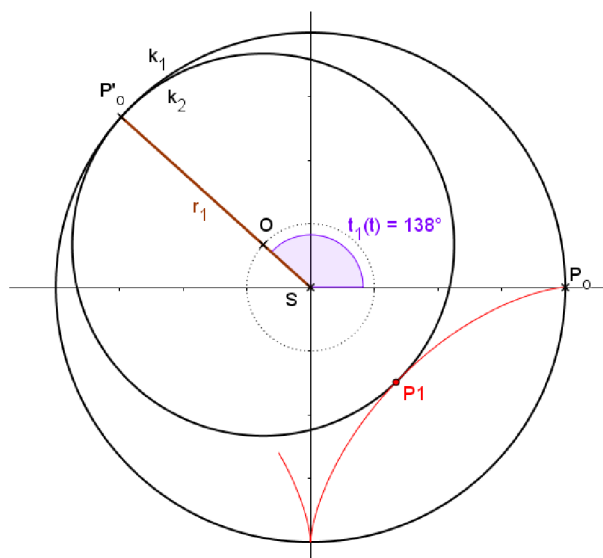
$$y = -3 \sin \frac{1}{3} t + \sin t$$

Následnou substitucí a vhodnou úpravou, jak je již jednou zmíněno v úvodu této kapitoly, získám parametrické rovnice asteroidy.

$$x = 4 \cos^3\left(\frac{1}{3}t\right)$$

$$y = -4 \sin^3\left(\frac{1}{3}t\right)$$

Perioda funkcí na pravých stranách parametrických rovnic je 6π . Pokud bych chtěla tímto způsobem vykreslit pomocí bodu P_1 celou křivku (a uzavřít ji), musela bych s parametrem t obsáhnout celý interval $\langle 0; 6\pi \rangle$. Pokud bych pracovala s parametrem t v intervalu $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, opiše bod P_1 při svém pohybu pouze část asteroidy, konkrétně její přesnou třetinu, jak je vidět na následujícím obrázku.



Obrázek 1.1.6.-2. Třetina asteroidy a bod P pro úhel 138°

Nyní bych ráda dokázala, že bod P_3 (další vrchol zadaného rovnostranného trojúhelníku) pokračuje, a opiše další třetinu této asteroidy.

Dále použiji koncový bod této části asteroidy, bod P_3 . Protože se jedná o jednu třetinu, dosadím za parametr $t = 2\pi$. Tento bod bude mít tedy následující souřadnice

$$x = 4 \cos^3\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

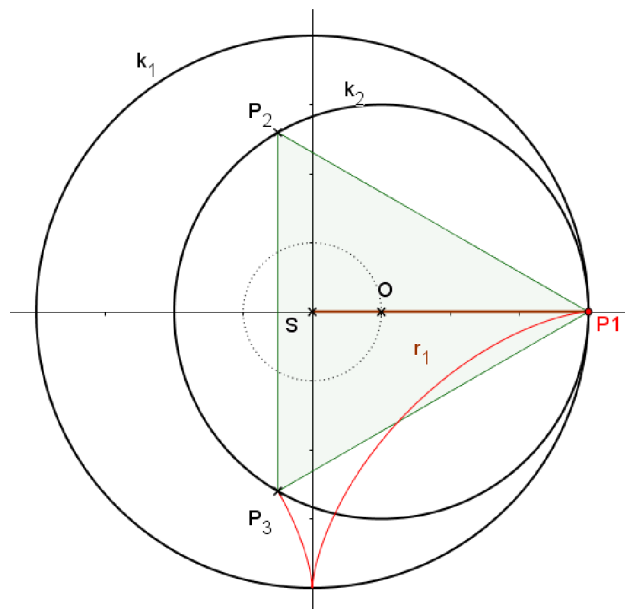
$$y = -4 \sin^3\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Takže

$$x = -\frac{1}{2}$$

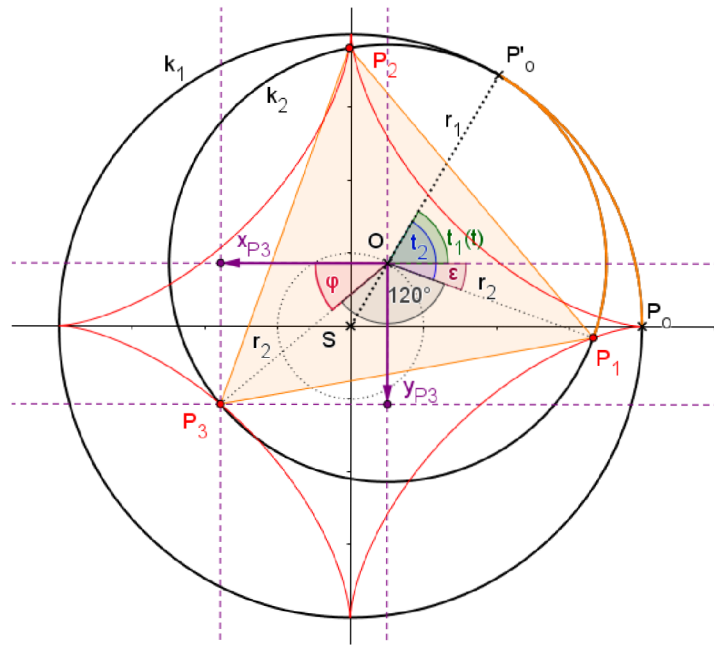
$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Umístím bod P_1 zpět do pozice $[4,0]$ a znázorním bod P_3 .



Obrázek 1.1.6.-3. Bod P_3 jako koncový bod třetiny asteroidy a jako vrchol rovnostranného trojúhelníku

Bod P_3 vznikne z bodu P_1 otočením o úhel 120° kolem středu kružnice k_2 . Z následujícího obrázku se zaměřím na úhel φ .



Obrázek 1.1.6. – 4. Odvození souřadnic bodu P_3

$$\varphi = 180^\circ - 120^\circ - \varepsilon$$

$$\varphi = 60^\circ - \varepsilon$$

Nyní zapíšeme souřadnice bodu P_3 vůči bodu O

$$x_{P_3} = -r_2 \cos \varphi$$

$$y_{P_3} = -r_2 \sin \varphi$$

$$x_{P_3} = -r_2 \cos(60^\circ - \varepsilon)$$

$$y_{P_3} = -r_2 \sin(60^\circ - \varepsilon)$$

Připomenou, že

$$\varepsilon = t_1 - t_2 = t_1 - \frac{r_1}{r_2} \cdot t_1 = \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t_1$$

Což je uvedeno již v úvodu kapitoly o hypocykloidě.

Takže

$$\varepsilon = \frac{1}{3} t$$

Souřadnice bodu P_3 vůči bodu S , při použití předchozích rovnic a posunutí o vektor (viz úvod kapitoly o hypocykloidě), budou

$$x_{P_3} = -3 \cos\left(60^\circ - \frac{1}{3}t\right) + \cos t$$

$$y_{P_3} = -3 \sin\left(60^\circ - \frac{1}{3}t\right) + \sin t$$

Nyní mi zbývá ověřit, že jsou tyto rovnice rovnicemi asteroidy

Upravím argument a zavedu substituci

$$60^\circ - \frac{1}{3}t = \frac{180^\circ - t}{3}$$

$$u = \frac{180^\circ - t}{3}$$

$$3u = 180^\circ - t$$

$$t = 180^\circ - 3u$$

Dosadím a upravím

$$\begin{aligned} x_{P_3} &= -3 \cos u + \cos(180^\circ - 3u) = \\ &= -3 \cos u + \cos 180^\circ \cos 3u + \sin 180^\circ \sin 3u = \\ &= -3 \cos u - 1 \cos 3u + 0 \sin 3u = \\ &= -3 \cos u - \cos \cos 2u + \sin \sin 2u = \\ &= -3 \cos u - \cos(\cos^2 u - \sin^2 u) + \sin 2 \sin u \cos u = \\ &= -3 \cos u - \cos(2\cos^2 u - 1) + 2 \sin^2 u \cos u = \\ &= -3 \cos u - 2\cos^3 u + \cos u + 2(1 - \cos^2 u) \cos u = \\ &= -2 \cos u - 2\cos^3 u + 2 \cos u - 2\cos^3 u = \\ &= \mathbf{-4\cos^3 u} \end{aligned}$$

Nyní pro souřadnici y

$$y_{P_3} = -3 \sin\left(60^\circ - \frac{1}{3}t\right) + \sin t$$

Stejně jako o souřadnice x zavedu substituci

$$60^\circ - \frac{1}{3}t = \frac{180^\circ - t}{3}$$

$$u = \frac{180^\circ - t}{3}$$

$$3u = 180^\circ - t$$

$$t = 180^\circ - 3u$$

Dosadím a upravím

$$\begin{aligned}y_{P_3} &= -3 \sin u + \sin(180^\circ - 3u) = \\&= -3 \sin u + \sin 180^\circ \cos 3u - \cos 180^\circ \sin 3u = \\&= -3 \sin u + 0 \cos 3u + 1 \sin 3u = \\&= -3 \sin u + \sin u \cos 2u + \cos u \sin 2u = \\&= -3 \sin u + \sin u(\cos^2 u - \sin^2 u) + 2 \sin u \cos^2 u = \\&= -3 \sin u + \sin u(1 - 2\sin^2 u) + 2 \sin u(1 - \sin^2 u) = \\&= -3 \sin u + \sin u - 2\sin^3 u + 2 \sin u - 2\sin^3 u = \\&= -4\sin^3 u\end{aligned}$$

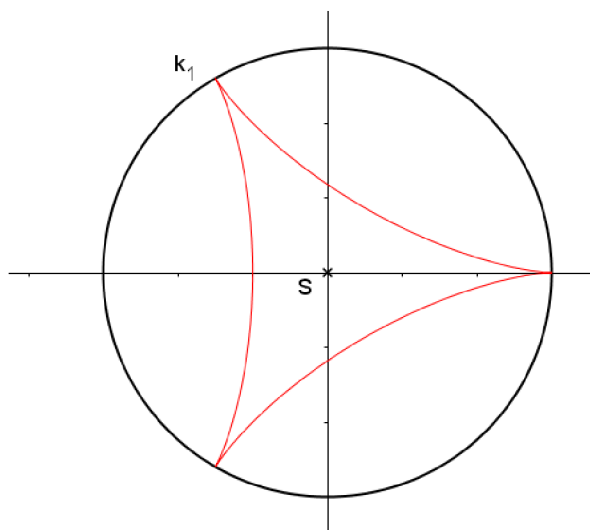
Závěr:

Podářilo se mi odvodit souřadnice bodu P_3 , které jsou:

$$\begin{aligned}x_{P_3} &= -4\cos^3 u \\y_{P_3} &= -4\sin^3 u\end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že i bod P_3 opisuje asteroidu, konkrétně její druhou třetinu. Stejně tak lze dokázat, že i bod P_2 opisuje zbývající třetinu asteroidy, čímž je úloha vyřešena.

1.2. Steinerova křivka (deltoid)



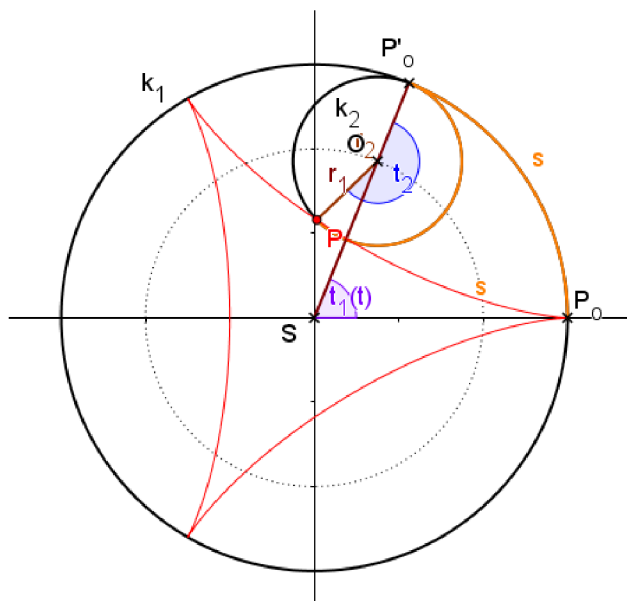
Obrázek 1.2.-1. Steinerova křivka (deltoid)

1.2.1. Historie

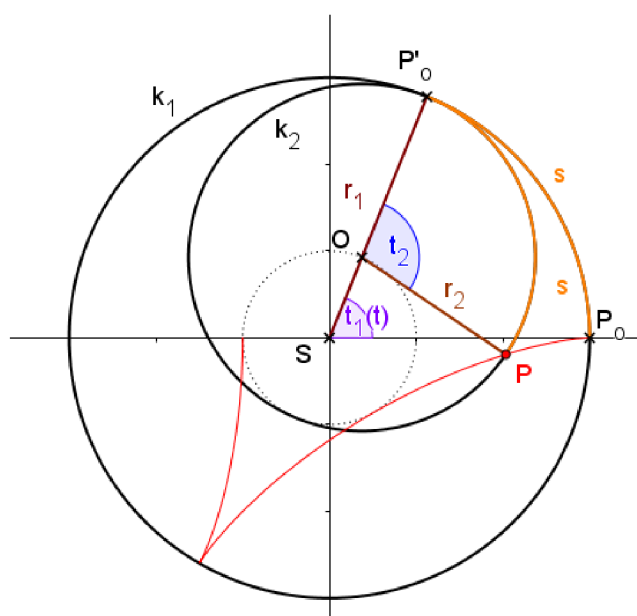
Poprvé tuto křivku studoval *Leonhard Euler* již v roce 1745 a dále *Jakob Steiner* roku 1856. Křivka byla brzy zařazena mezi hypocykloidy, a proto je často označována jako Steinerova hypocykloida. Název deltoid získala tato křivka díky svému tvaru připomínající řecké písmeno delta. [4]

1.2.2. Základní informace

Deltoid je speciální případ hypocykloidy, kde pro poloměr kružnice kotálející se uvnitř větší kružnice, platí $r_2 = \frac{2}{3} r_1$ nebo $r_2 = \frac{1}{3} r_1$ kde r_1 je poloměr větší kružnice. [4]



Obrázek 1.2.2.-1. Deltoid pro $r_2 = \frac{1}{3} r_1$



Obrázek 1.2.2.-2. Deltoid pro $r_2 = \frac{2}{3} r_1$

Rovnice deltoidu v kartézských souřadnicích:

$$(x^2 + y^2)^2 + 8ax(3y^2 - x^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^2 = 0$$

Rovnice deltoidu v parametrickém vyjádření:

$$\begin{aligned}x &= a \cos 2u + 2a \cos u \\y &= a \sin 2u - 2a \sin u\end{aligned}\quad [4]$$

1.2.3. Parametrické rovnice deltoidu

Nyní z parametrických rovnic hypocykloidy odvodím parametrické rovnice deltoidu.

Parametrické rovnice hypocykloidy jsou

$$\begin{aligned}x &= r_2 \cos \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t + (r_1 - r_2) \cos t \\y &= -r_2 \sin \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t + (r_1 - r_2) \sin t\end{aligned}$$

Dosadím za $r_1 = 3a$ a $r_2 = 2a$

$$\begin{aligned}x &= 2a \cdot \cos \frac{3a - 2a}{2a} \cdot t + (3a - 2a) \cos t \\y &= -2a \cdot \sin \frac{3a - 2a}{2a} \cdot t + (3a - 2a) \sin t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 2a \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot t + a \cos t \\y &= -2a \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot t + a \sin t\end{aligned}$$

Parametrické rovnice deltoidu pro případ $r_1 = 3a$ a $r_2 = 2a$ jsou

$$\begin{aligned}x &= 2a \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot t + a \cos t \\y &= -2a \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot t + a \sin t\end{aligned}$$

Nyní dosadím za $r_1 = 3a$ a $r_2 = a$

$$x = a \cdot \cos \frac{3a - a}{a} \cdot t + (3a - a) \cos t$$

$$y = -a \cdot \sin \frac{3a - a}{a} \cdot t + (3a - a) \sin t$$

$$x = a \cdot \cos 2t + 2a \cos t$$

$$y = -a \cdot \sin 2t + 2a \sin t$$

$$x = \frac{1}{3}a \cdot \cos \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{1}{3}a} \cdot t + \left(\frac{2}{3}a\right) \cos t$$

$$y = -\frac{1}{3}a \cdot \sin \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{1}{3}a} \cdot t + \left(\frac{2}{3}a\right) \sin t$$

$$x = a \cdot (\cos 2t + 2 \cos t)$$

$$y = -a \cdot (\sin 2t + 2 \sin t)$$

Parametrické rovnice deltoidu pro případ $r_1 = 3a$ a $r_2 = 2a$ jsou

$$\mathbf{x = a \cdot (\cos 2t + 2 \cos t)}$$

$$\mathbf{y = -a \cdot (\sin 2t + 2 \sin t)}$$

Nyní ukáži, že parametrické rovnice v obou výše uvedených případech jsou rovnicemi pro deltoid

$$x = 2a \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot t + a \cos t$$

$$y = -2a \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot t + a \sin t$$

Provedu substituci

$$\frac{1}{2}t = u$$

$$t = 2u$$

$$x = a \cos 2u + 2a \cos u$$

$$y = a \sin 2u - 2a \sin u$$

Při kotálení menší kružnice proti směru hodinových ručiček se sledovaný bod deltoidu rozpohybuje do čtvrtého kvadrantu, ve kterém je sinus záporný, musím zohlednit tuto skutečnost záporným znaménkem. Jinak jsou parametrické rovnice pro oba výše uvedené případy totožné.

1.2.4. Rovnice deltoidu v kartézských souřadnicích

Vyjdu z parametrických rovnic odvozených v předchozí kapitole

$$x = a \cos 2u + 2a \cos u$$

$$y = a \sin 2u - 2a \sin u$$

Pro zjednodušení za a dosadím jedničku a provedu úpravy a substituce

$$\cos t = c$$

$$\sin t = s$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = c^2 - s^2$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2sc$$

Budu využívat následující tři rovnice. Potřebuji eliminovat parametry s a c , abych získala hledaný vztah mezi proměnnými x a y .

$$(1) \quad x = c^2 - s^2 + 2c$$

$$(2) \quad y = 2s - 2sc$$

$$(3) \quad 1 = c^2 + s^2$$

Nejprve jsem eliminaci řešila za pomoci vyhledávače WolframAlpha. Do vstupního okna jsem zadala příkaz k eliminaci, přesně podle následujícího obrázku



```
Eliminate[{x-(c^2-s^2)-2c==0,y+2cs-2s==0,s^2+c^2-1==0},{c,s}]
```

Obrázek 1.2.4.-1. Eliminace s pomocí WolframAlpha

Získám tuto rovnici

Result

$$x^4 - 8x^3 + x^2(2y^2 + 18) + 24xy^2 = -y^4 - 18y^2 + 27$$

Obrázek 1.2.4.-2. Result

Po úpravě získám hledanou rovnici deltoidu v kartézských souřadnicích

$$(x^2 + y^2)^2 + 8ax(3y^2 - x^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^2 = 0$$

Nyní provedu stejnou substituci, jako při řešení problému pomocí WolframAlpha.

$$\cos t = c$$

$$\sin t = s$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = c^2 - s^2$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2sc$$

$$(1) \quad x = c^2 - s^2 + 2c$$

$$(2) \quad y = 2s - 2sc$$

$$(3) \quad 1 = c^2 + s^2$$

Sečtu rovnice (1) a (3), přičemž získám vztah pro $x + 1$ a c^2 .

$$(4) \quad x + 1 = 2c^2 + 2c$$

$$(5) \quad c^2 = \frac{x + 1}{2} - c$$

Umocním rovnici (2) na druhou a ze získaného vztahu vyjádřím s^2 .

$$y^2 = 4s^2(1 - c)^2$$

$$(6) \quad s^2 = \frac{y^2}{4(1 - c)^2}$$

Vztahy (5) a (6) dosadím do rovnice (3) a upravím roznásobením společným jmenovatelem.

$$\frac{x + 1}{2} - c + \frac{y^2}{4(1 - c)^2} = 1$$

$$2(c - 1)^2(x + 1) - 4c(c - 1)^2 + y^2 = 4(c - 1)^2$$

$$2(c - 1)^2(x + 1) - 4c(c - 1)^2 - 4(c - 1)^2 = -y^2$$

$$2(c - 1)^2(x + 1 - 2c - 2) = -y^2$$

$$(7) \quad 2(c - 1)^2(x - 2c - 1) = -y^2$$

Vrátím se ke vztahu (4) a doplním jej na úplný čtverec.

$$x + 1 = 2c^2 + 2c$$

$$c^2 + c = \frac{x + 1}{2}$$

$$c^2 + c + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{x + 1}{2}$$

$$\left(c + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x+1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$(8) \quad \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2x+3}{4}$$

Odmocním vztah (8) pro $x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$ (pravá strana je nezáporná a mohu ji odmocnit). Uvážím situaci pro $c \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \cong \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, protože c je $\cos t$. Tím vybírám z absolutní hodnoty po odmocnění levé strany výraz $c + \frac{1}{2}$.

$$c + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2x+3}}{2}$$

$$(9) \quad c = \frac{\sqrt{2x+3} - 1}{2}$$

S ohledem na vztah (7) odvodím z rovnice (9) výraz $2(c-1)^2$ a $2c$.

$$c - 1 = \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{2}$$

$$(c-1)^2 = \frac{2x+3 - 6\sqrt{2x+3} + 9}{4} = \frac{x+6 - 3\sqrt{2x+3}}{2}$$

$$(10) \quad 2(c-1)^2 = x+6 - 3\sqrt{2x+3}$$

$$(11) \quad 2c = \sqrt{2x+3} - 1$$

Vztahy (10) a (11) dosadím do (7).

$$(x+6 - 3\sqrt{2x+3})[x - (\sqrt{2x+3} - 1) - 1] = -y^2$$

$$(x+6 - 3\sqrt{2x+3})(x - \sqrt{2x+3}) = -y^2$$

Roznásobím levou stranu předchozí rovnosti a osamostatním výraz s odmocninou na levé straně.

$$x^2 - x\sqrt{2x+3} + 6x - 6\sqrt{2x+3} - 3x\sqrt{2x+3} + 3(2x+3) = -y^2$$

$$\sqrt{2x+3}(-4x-6) = -x^2 - y^2 - 12x - 9$$

Umocním poslední rovnost na druhou, čímž vracím do definičního oboru $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

$$(12) \quad (2x+3)4(2x+3)^2 = (x^2 + y^2 + 12x + 9)^2$$

Rovnice (12) je již implicitní rovnice deltoidu. V dalších krocích ji upravím na tvar uvedený v předchozí kapitole. Na levé straně použiji binomický vzorec $(a + b)^3$, na pravé straně zase tento vzorec

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Levá strana

$$4(8x^3 + 36x^2 + 54x + 27)$$

Pravá strana:

$$x^4 + y^4 + 144x^2 + 81 + 2x^2y^2 + 24x^3 + 18x^2 + 24xy^2 + 18y^2 + 216x$$

Porovnám obě strany a obdržím

$$x^4 - 8x^3 + 2x^2x^2 + 18x^2 + 24xy^2 + y^4 + 18y^2 - 27 = 0$$

Což se shoduje s výstupem eliminace z vyhledávače WolframAlpha v předchozí kapitole. Tento výraz můžeme upravit (úprava uvedena v předchozí kapitole) na tvar

$$(x^2 + y^2)^2 + 18(x^2 + y^2) - 27 = 8x(x^2 - 3y^2)$$

Poznámka:

Úlohu jsem řešila pro $c \in \langle -\frac{1}{2}; 1 \rangle$. Pokud bych pracovala s $c \in \langle -1; -\frac{1}{2} \rangle$, musela bych dosazovat $c + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2x+3}}{2}$. Výpočet by probíhal analogicky, proto uvedu pouze změněné klíčové vztahy, které budu značit čárkou u čísla rovnic.

$$(10') \quad 2(c - 1)^2 = x + 6 + 3\sqrt{2x + 3}$$

$$(11') \quad 2c = -\sqrt{2x + 3} - 1$$

$$\sqrt{2x + 3}(4x + 6) = -x^2 - y^2 - 12x - 9$$

Další výpočty se již shodují s předešlými.

Znaménko mínus volím z toho důvodu, že se bod P' nachází ve druhém kvadrantu, kde je cosinus záporný.

$$x'_{P'}(O) = -r_2 \cos \varepsilon$$

$$x'_{P'}(O) = -r_2 \cos(t_2 - t_1 - \pi)$$

S využitím součtových vzorců

$$x'_{P'}(O) = -r_2 [\cos(t_2 - t_1) \cos \pi + \sin(t_2 - t_1) \sin \pi]$$

$$x'_{P'}(O) = r_2 \cos(t_2 - t_1)$$

Dosadím za $t_2 - t_1$

$$x'_{P'}(O) = r_2 \cos\left(\frac{(r_1 - r_2)}{r_2} \cdot t_1 + \pi\right)$$

$$x'_{P'}(O) = r_2 \left[\cos\left(\frac{(r_1 - r_2)}{r_2} \cdot t_1\right) \cos \pi + \sin\left(\frac{(r_1 - r_2)}{r_2} \cdot t_1\right) \sin \pi \right]$$

$$x'_{P'}(O) = -r_2 \cos\left(\frac{(r_1 - r_2)}{r_2} \cdot t_1\right)$$

Po dosazení za $r_1 = 3, r_2 = 2$ a s využitím rovnosti $t_1 = t$

$$x'_{P'}(O) = -2 \cos \frac{1}{2} t$$

Protože souřadnice x bodu O je $\cos t$, mohu psát výslednou souřadnici x bodu P' vzhledem k bodu S

$$x'_{P'}(S) = -2 \cos \frac{1}{2} t + \cos t$$

Stejným způsobem dokáži totéž i pro souřadnici y

Pro souřadnici y bodu P' vzhledem k bodu O mohu psát

(Na obrázku 1.2.4.-2. vycházím z trojúhelníku $Y'_{P'}OP'$)

$$y'_{P'}(O) = r_2 \sin \varepsilon$$

Bod P' se nachází ve druhém kvadrantu, kde je sinus kladný.

$$y'_{P'}(O) = r_2 \sin \varepsilon$$

$$y'_{P'}(O) = r_2 \sin(t_2 - t_1 - \pi)$$

S využitím součtových vzorců

$$y'_{P'}(O) = -r_2 [\sin(t_2 - t_1) \cos \pi + \cos(t_2 - t_1) \sin \pi]$$

$$y'_{P'}(O) = -r_2 \sin(t_2 - t_1)$$

Dosadím za $t_2 - t_1$

$$y'_{P'}(O) = -r_2 \sin\left(\frac{(r_1 - r_2)}{r_2} \cdot t_1 + \pi\right)$$

$$y'_{P'}(O) = -r_2 \left[\sin\left(\frac{(r_1 - r_2)}{r_2} \cdot t_1\right) \cos \pi + \cos\left(\frac{(r_2 - r_1)}{r_2} \cdot t_1\right) \sin \pi \right]$$

$$y'_{P'}(O) = r_2 \sin\left(\frac{(r_1 - r_2)}{r_2} \cdot t_1\right)$$

Po dosazení za $r_1 = 3, r_2 = 2$ a s využitím rovnosti $t_1 = t$

$$x'_{P'}(O) = 2 \sin \frac{1}{2} t$$

Protože souřadnice y bodu O je $\sin t$, mohu psát výslednou souřadnici y bodu P' vzhledem k bodu S

$$y'_{P'}(S) = 2 \sin \frac{1}{2} t + \sin t$$

Závěr:

Souřadnice bodu P' vycházejí:

$$x'_{P'}(S) = -2 \cos \frac{1}{2} t + \cos t$$

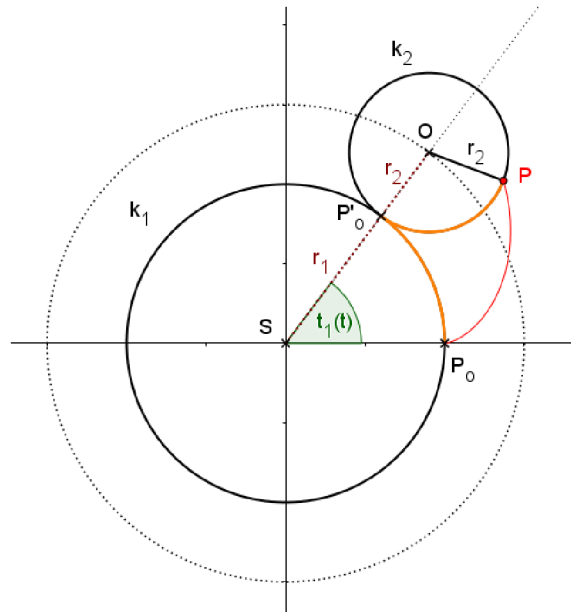
$$y'_{P'}(S) = 2 \sin \frac{1}{2} t + \sin t$$

Což jsou parametrické rovnice Steinerovi křivky. Dokázala jsem tedy, že bod P' leží na této křivce.

2. Epicykloida

Uvažujme pevnou kružnici $k_1(S)$ s poloměrem r_1 a kružnici $k_2(O)$ která má poloměr r_2 a kotálí se po k_1 . Bod P kružnice k_2 opisuje křivku, která se nazývá epicykloida. [srov. 1, s.4]

V této části diplomové práce se budu zabývat příklady, které vedou ke kardioidě a nefroidě, které patří mezi epicykloidy.



Obrázek 2.-1. Epicykloida

Průvodič středu kružnice k_2 , tedy průvodič bodu O , a tedy i bodu P_0' svírá s osou x úhel $t_1 = t$.

$$y_2 = r_2 \sin [\pi - (t_1 + t_2)]$$

$$y_2 = r_2 [\sin \pi \cos(t_1 + t_2) - \cos \pi \sin(t_1 + t_2)]$$

$$y_2 = -r_2 \sin(t_1 + t_2)$$

Takže souřadnice bodu P vůči bodu O jsou

$$x_2 = -r_2 \cos(t_1 + t_2)$$

$$y_2 = -r_2 \sin(t_1 + t_2)$$

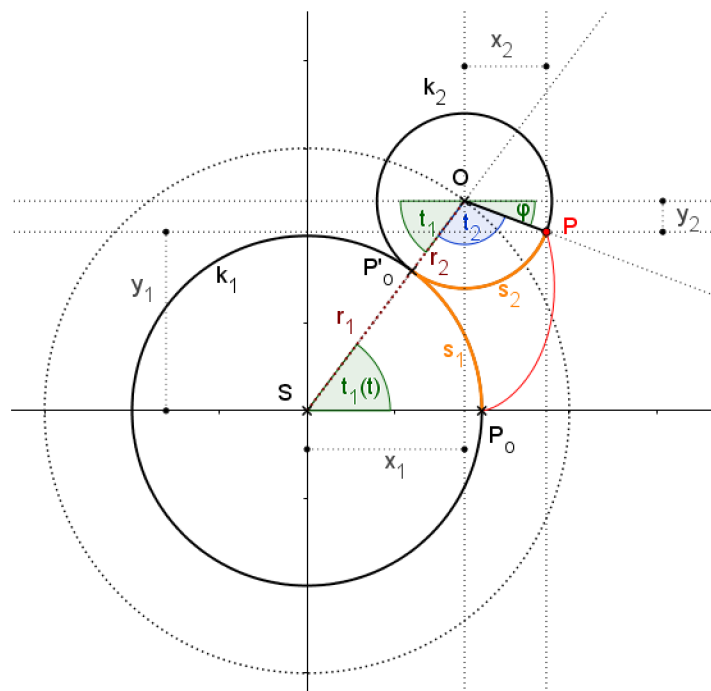
Nyní zapíšeme rovnice pro souřadnice bodu O vůči bodu S (také z předchozího obrázku), tedy rovnice pro

$$x_1 = x_0(S)$$

$$y_1 = y_0(S)$$

$$x_1 = (r_1 + r_2) \cos t_1$$

$$y_1 = (r_1 + r_2) \sin t_1$$



Obrázek 2.-3. Odvození souřadnic bodu P vzhledem k bodu S

Dále uvedu konečné parametrické rovnice bodu P vůči bodu S

$$x(t) = x_1 + x_2 = (r_1 + r_2) \cos t_1 - r_2 \cos(t_1 + t_2)$$

$$y(t) = y_1 + y_2 = (r_1 + r_2) \sin t_1 - r_2 \sin(t_1 + t_2)$$

Jelikož se kružnice k_2 kotálí po kružnici k_1 bez prokluzování, platí

$$s_1 = s_2$$

Na základě toho odvodím vztah mezi úhly t_1 a t_2

$$s_1 = s_2$$

$$t_1 r_1 = t_2 r_2$$

$$t_2 = \frac{r_1}{r_2} t_1$$

Nyní zjednoduším argument $t_1 + t_2$

$$t_1 + t_2 = t_1 + \frac{r_1}{r_2} t_1$$

Po vytknutí

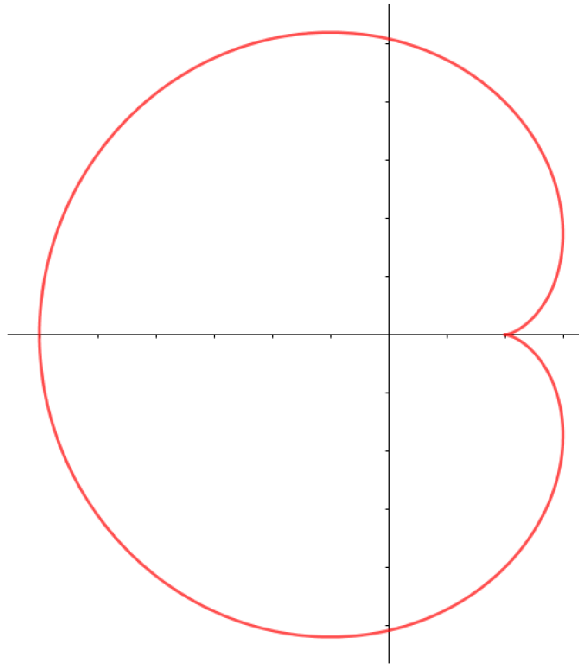
$$t_1 + t_2 = t_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right)$$

Mohu psát závěrečné rovnice epicykloidy

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = (r_1 + r_2) \cos t_1 - r_2 \cos \left[t_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \right]$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = (r_1 + r_2) \sin t_1 - r_2 \sin \left[t_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \right] \quad [\text{srov. 5}]$$

2.1. Kardioida



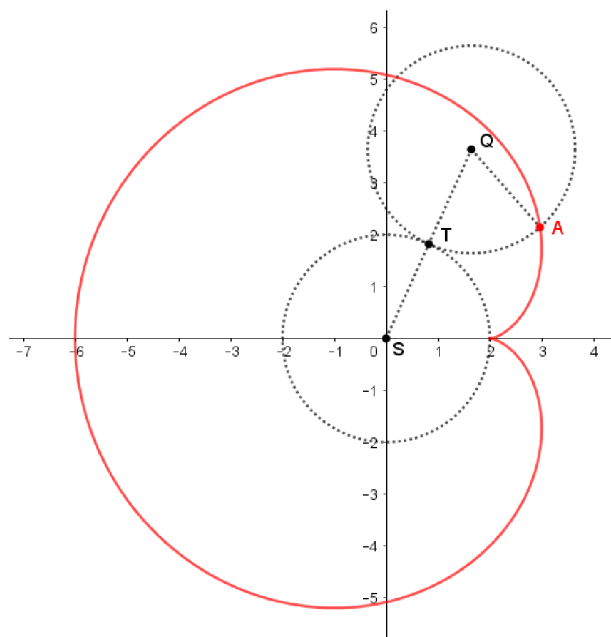
Obrázek 2.1.-1. Kardioida

2.1.1. Historie

Poprvé byla Kardioida studována již v roce 1674 dánským matematikem a astronomem *Olem Christensenem Romerem*. Dále pak matematikem *Vaumeslem* roku 1678. Název kardioida („ve tvaru srdce“) byl poprvé použit matematikem *Johannem Castillonem* roku 1741. [6]

2.1.2. Základní informace

Kardioida je speciální případ epicykloidy, kde pro poloměr kružnice kotálející se po druhé kružnici platí, že obě kružnice mají stejný poloměr, tedy $r_1 = r_2$



Obrázek 2.1.2.-1. Kružnice mají stejný poloměr, $r_1 = r_2$

Rovnice kardioidy v kartézských souřadnicích:

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

Rovnice kardioidy v parametrickém vyjádření:

$$x = r(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$y = r(2 \sin t - \sin 2t)$$

Polární souřadnice kardioidy:

$$\rho(t) = 2a(1 - \cos t)$$

[6]

2.1.3. Parametrické rovnice kardioidy

2.1.3.1. Parametrické rovnice vycházející z epicykloidy

Nyní z parametrických rovnic epicykloidy odvodím parametrické rovnice kardioidy

Parametrické rovnice epicykloidy jsou

$$x = (r_1 + r_2) \cos t - r_2 \cos \left[t \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \right]$$

$$y = (r_1 + r_2) \sin t - r_2 \sin \left[t \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \right]$$

Pro kardioidu platí $r_1 = r_2$

$$x = 2r \cos t - r \cos 2t$$

$$y = 2r \sin t - r \sin 2t$$

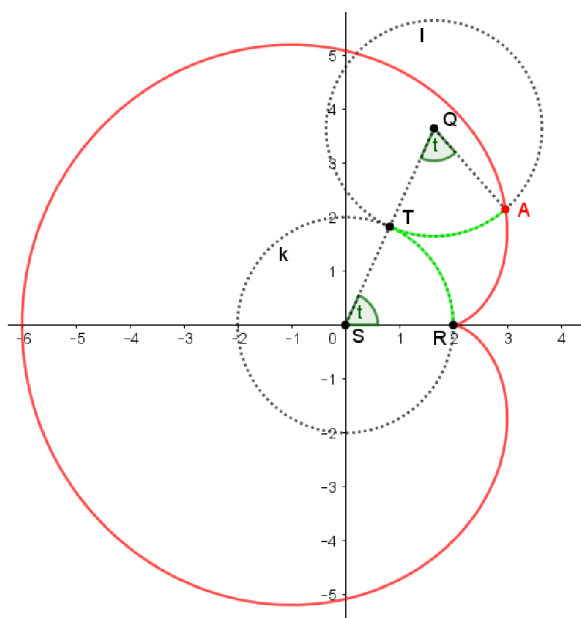
Parametrické rovnice kardioidy jsou

$$x = r(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$y = r(2 \sin t - \sin 2t)$$

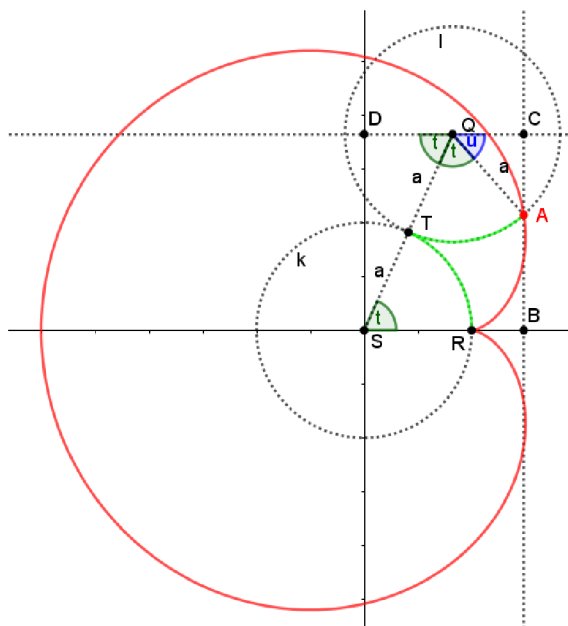
2.1.3.2. Přímé odvození parametrických rovnic

Když si uvědomím, že kružnice l se kotálí po kružnici k bez prokluzování, je zřejmé, že oblouky RT a TA mají stejnou velikost. Z toho vyplývá, že i úhly RSQ a TQA jsou shodné.



Obrázek 2.1.3.2.-1. Shodné oblouky RT a TA

Dále úhly RST a TQD jsou střídavé na rovnoběžkách, proto $|\sphericalangle RSQ| \equiv |\sphericalangle DQS|$



Obrázek 2.1.3.2.-2. $|\sphericalangle RSQ| \equiv |\sphericalangle DQS|$

Nyní se budu snažit získat souřadnice bodu A v závislosti na úhlu t a poloměru kružnice k .

Z pravoúhlého trojúhelníku ACQ vidím že

$$|AC| = a \cdot \sin u$$

Příčemž

$$u = \pi - 2t$$

Dosadím

$$|AC| = a \cdot \sin(\pi - 2t)$$

$$|AC| = a(\sin \pi \cos 2t - \cos \pi \sin 2t)$$

Protože $\sin \pi = 0$ a $\cos \pi = -1$

$$|AC| = a \cdot \sin 2t$$

Stejně tak pro

$$|QC| = a \cdot \cos u$$

$$|QC| = a \cdot \cos(\pi - 2t)$$

$$|QC| = a(\cos \pi \cos 2t - \sin \pi \sin 2t)$$

$$|QC| = -a \cdot \cos 2t$$

Z pravouhlého trojúhelníku SQD je zřejmé, že

$$|QD| = 2a \cdot \cos t$$

$$|SD| = 2a \cdot \sin t$$

Nyní z toho, co již vím, určím souřadnice bodu $A[x, y]$

$$x = |SB| = |QD| + |QC|$$

$$x = 2a \cdot \cos t - a \cdot \cos 2t$$

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$y = |BC| - |AC|$$

$$y = |SD| - |AC|$$

$$y = 2a \cdot \sin t - a \cdot \sin 2t$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

Závěr:

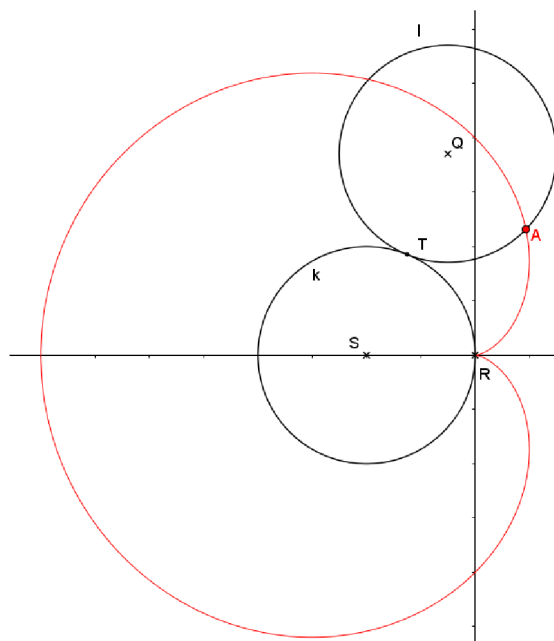
Kardioida má toto parametrické vyjádření:

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

2.1.4. Odvození polárních souřadnic kardioidy

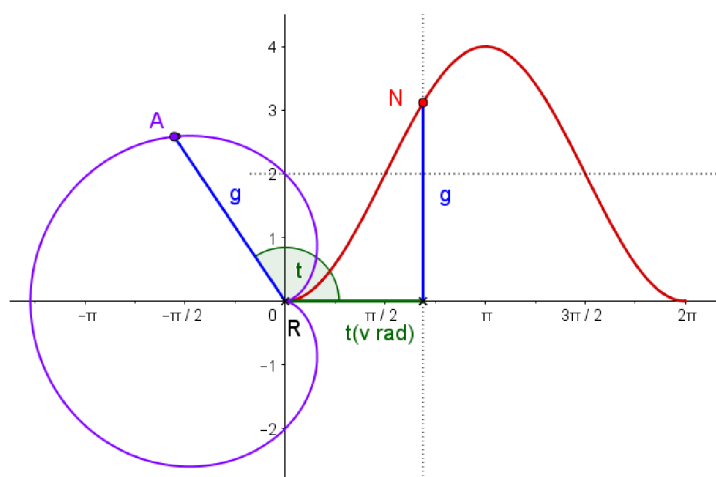
Nyní budu hledat rovnici kardioidy v polárních souřadnicích. Pro zjednodušení jsem oproti předchozí úloze posunula střed kružnice k , takže kružnice již nemá střed v počátku soustavy souřadné, ale v bodě $S[-a; 0]$, přičemž a je poloměr obou kružnic k i l .



Obrázek 2.1.4.-1. Posunutí středu kružnice k do bodu $S[-a; 0]$,

Budu se snažit vyjádřit polohu libovolného bodu A kardioidy v polárních souřadnicích, tedy pomocí délky průvodiče v závislosti na úhlu, který svírá tento průvodič s osou x .

Nyní vymodeluji v programu GeoGebra křivku, jejíž rovnici budu později hledat.



Obrázek 2.1.4.-2. Graf kardioidy v polárních souřadnicích

Bod A je bod, který vytváří kardioidu kotálením kružnice l po kružnici k . Úsečku AR pojmenuji g . Úhel t vyjádřím v radiánech a tuto hodnotu poté vynesu na osu x . Délku

průvodiče bodu A (tedy délku úsečky g) poté vynáším na svislou osu. Tím získám bod N , který opisuje křivku, jejíž rovnici v polárních souřadnicích hledám.

O jakou křivku se jedná?

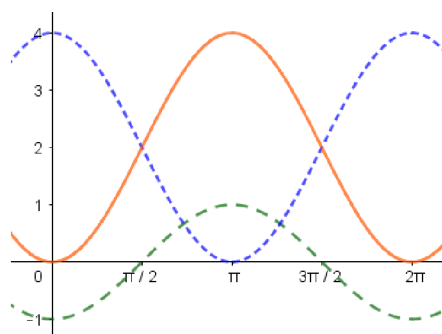
Pokud bych funkci posunula o dvě jednotky dolů, nezačínala by v počátku soustavy souřadné, z toho důvodu jsem usoudila, že se nebude jednat o funkci $\sin t$ ale o obrácenou a posunutou funkci $\cos t$. Tedy $-\cos t + 2$. Dále jsem si všimla, že obor hodnot této funkce je $\langle 0,4 \rangle$, toho docílím tím, že funkci vynásobím dvěma, takže

$$g(t) = -2 \cos t + 2$$

po úpravě

$$g(t) = 2(1 - \cos t)$$

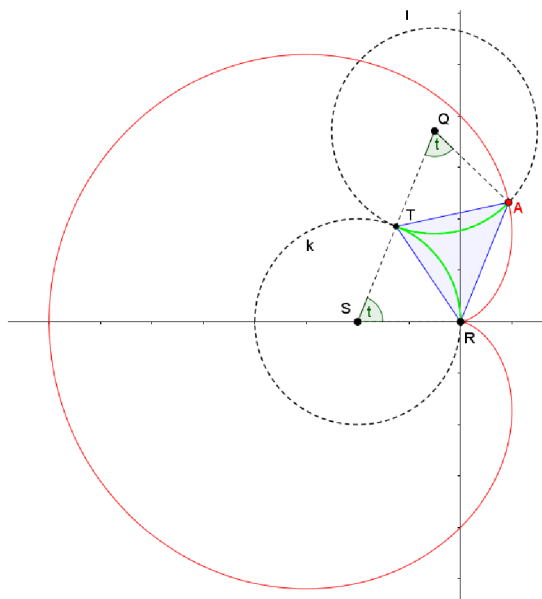
- $f(x) = -\cos(x)$
- $g(x) = 2 \cos(x) + 2$
- $h(x) = -2 \cos(x) + 2$



Obrázek 2.1.4.-3. Průběh funkce

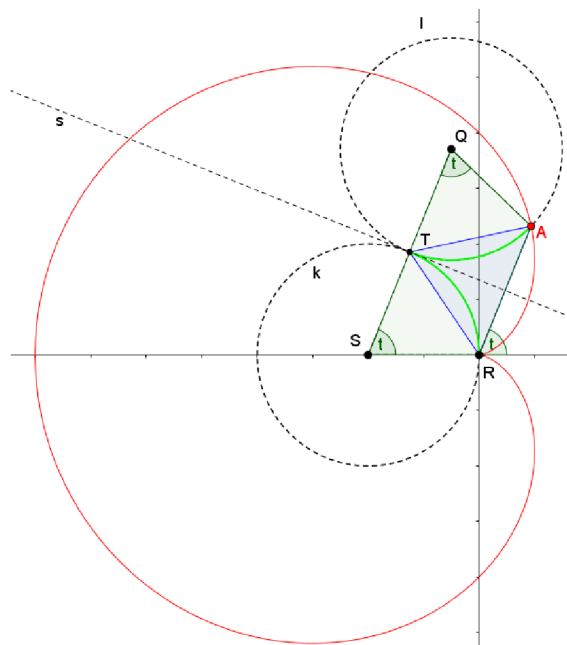
Tuto hypotézu bych nyní ráda dokázala.

Použiji podobný obrázek jako při odvozování parametrické rovnice kardioidy.



Obrázek 2.1.4.-4. K odvození rovnice v polárních souřadnicích

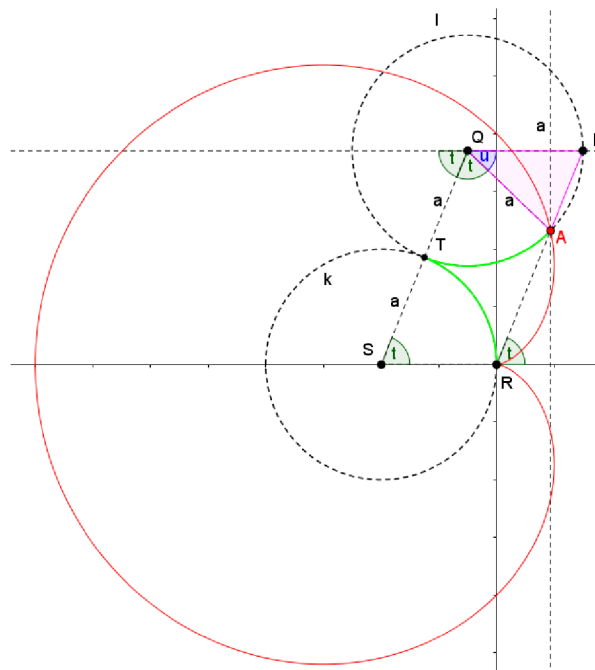
Nejprve se zaměřím na úsečku RA a úhel, který tato úsečka svírá s osou x . Trojúhelník RAT je rovnoramenný, protože oblouky RT a TA mají stejnou délku. Osa tohoto trojúhelníku s je kolmá na úsečku SQ (jedná se o společnou tečnu kružnice k a kružnice l), takže úsečka RA je rovnoběžná s úsečkou SQ a útvar $QSRA$ je rovnoramenný lichoběžník. Takže úhel při vrcholu R je shodný s úhlem při vrcholu S .



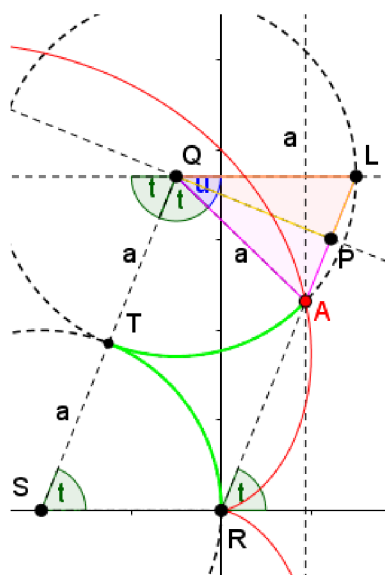
Obrázek 2.1.4.-5. Rovnoramenný lichoběžník $QSRA$

Nyní se zaměřím na velikost úsečky RA

Trojúhelník ALQ se základnou AL je rovnoramenný. Jeho ramena mají velikost a .



Obrázek 2.1.4.-6. Trojúhelník ALQ



Obrázek 2.1.4.-7. K odvození rovnice v polárních souřadnicích, poloměr $r = |RA|$

Pak musí platit

$$\sin \frac{u}{2} = \frac{|AL|}{a}$$

$$|AL| = 2a \sin \frac{u}{2}$$

$$|AL| = 2a \sin \frac{180^\circ - 2t}{2}$$

$$|AL| = 2a \sin(90^\circ - t)$$

$$|AL| = 2a \cos t$$

Z obrázku je také zřejmé, že platí

$$|RL| = |SQ|$$

a

$$|SQ| = 2a$$

Pak pro $|AR|$ musí být

$$|AR| = 2a - 2a \cos t$$

$$|AR| = 2a(1 - \cos t)$$

Závěr:

Kardioida má tuto rovnici v polárních souřadnicích

$$g(t) = 2a(1 - \cos t)$$

Tento výsledek odpovídá hypotéze získané v GeoGebře v úvodu této kapitoly.

2.1.5. Kardioida v kartézských souřadnicích

V této kapitole nejprve vyjdu z parametrických rovnic kardioidy a pomocí nich určím rovnici kardioidy v kartézských souřadnicích, dále pak v druhé části této kapitoly vyjdu z polární rovnice kardioidy a stejně tak pomocí ní určím rovnici kardioidy v kartézských souřadnicích.

2.1.5.1. Z parametrického vyjádření do kartézských souřadnic

Parametrické vyjádření kardioidy:

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

Nejprve upravím rovnici pro x

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$x = a(2 \cos t - \cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$x = a(2 \cos t - \cos^2 t + 1 - \cos^2 t)$$

$$x = a(2 \cos t - 2 \cos^2 t) + a$$

$$x = 2a(1 - \cos t) \cos t + a$$

Dále upravím rovnici pro y

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

$$y = a(2 \sin t - 2 \sin t \cos t)$$

$$y = 2a(1 - \cos t) \sin t$$

Pro zjednodušení nyní posunu kardioidu o a vlevo

$$x = 2a(1 - \cos t) \cos t + a - a$$

$$y = 2a(1 - \cos t) \sin t$$

$$x = 2a(1 - \cos t) \cos t$$

$$y = 2a(1 - \cos t) \sin t$$

Umocním na druhou

$$x^2 = 4a^2(1 - \cos t)^2 \cos^2 t$$

$$y^2 = 4a^2(1 - \cos t)^2 \sin^2 t$$

Rovnice sečtu

$$x^2 + y^2 = 4a^2(1 - \cos t)^2$$

Po odmocnění

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a|1 - \cos t|$$

Absolutní hodnotu psát nemusím, protože $1 - \cos t \geq 0, \forall t \in R$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a - 2a \cos t$$

$$\cos t = 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2a}$$

Toto nyní dosadím zpět do této rovnice

$$x = 2a(1 - \cos t) \cos t$$

$$x = 2a \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2a} \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2a} \right)$$

$$2ax = \sqrt{x^2 + y^2} (2a - \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$2ax = 2a\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)$$

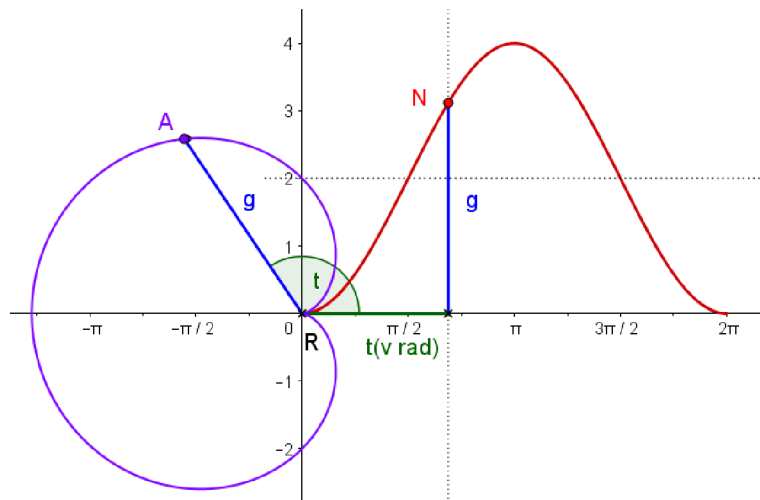
$$x^2 + y^2 + 2ax = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$$

Po umocnění na druhou, získávám rovnici kardioidy v kartézských souřadnicích

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

2.1.5.2. Z polárních souřadnic do kartézských souřadnic

Při odvození rovnice kardioidy v kartézských souřadnicích, vyjdu z předchozí kapitoly, tedy z rovnice kardioidy v polárních souřadnicích.



Obrázek 2.1.5.2.-1. Graf kardioidy v polárních souřadnicích

$$g(t) = 2a(1 - \cos t)$$

Použiji substituci z polárních do kartézských souřadnic

$$g = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos t = \frac{x}{g}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) / \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} - 2ax$$

$$x^2 + y^2 + 2ax = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$$

Nyní umocním na druhou

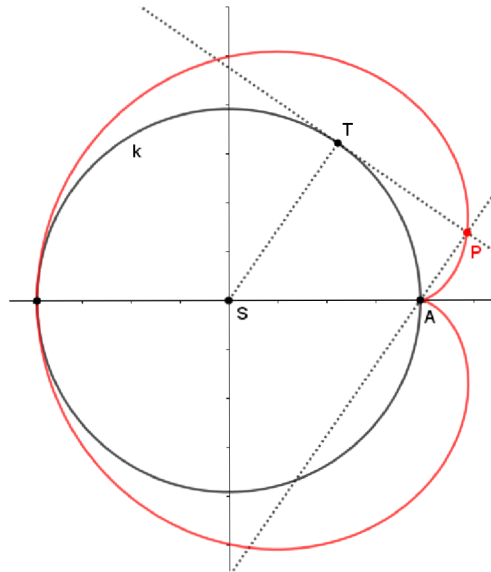
$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

Toto jsou rovnice kardioidy v kartézských souřadnicích.

2.1.6. Příklad 1. vedoucí ke kardioidě

Zadání:

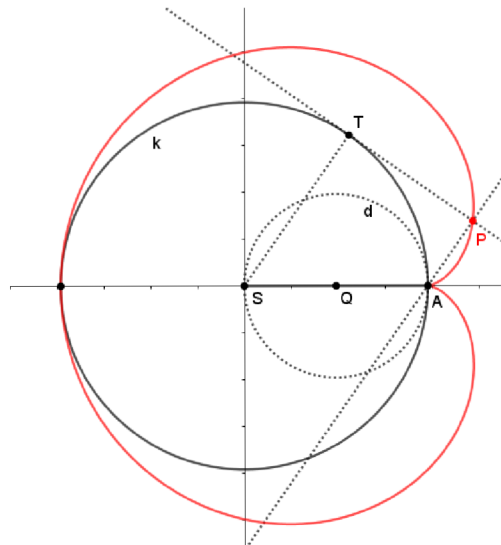
Přesvědčte se, že kardioida je množinou všech pat kolmic vedených daných bodem A k tečnám kružnice, která prochází bodem A [3]



Obrázek 2.1.6.-1. K zadání

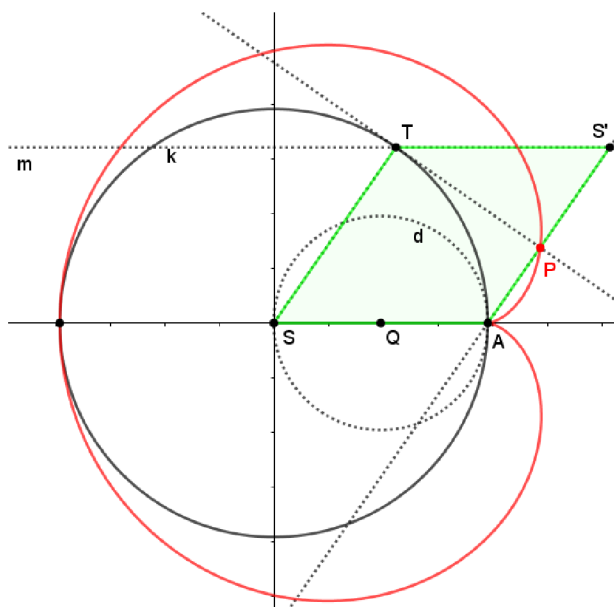
2.1.6.1. Geometrický důkaz

Narýsuji si kružnici d se středem v bodě Q , přičemž bod Q je střed úsečky AS .



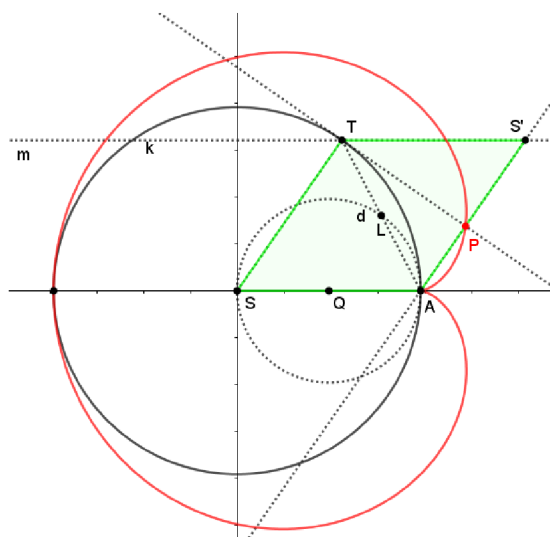
Obrázek 2.1.6.1.-1. K důkazu - kružnice d se středem v bodě Q

Nyní narýsuji přímku m , rovnoběžnou s osou x , a bod S' , tak aby vznikl kosočtverec $SAS'T$.



Obrázek 2.1.6.1.-2. kosočtverec $SAS'T$

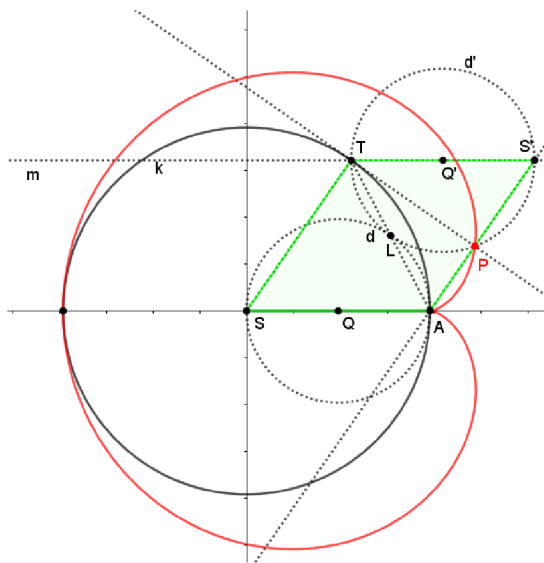
Narýsuji si úsečku TA a průsečík kružnice d a úsečky TA pojmenuji L . Kružnice d je Thaletova, sestrojená nad úsečkou SA . Úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé a jejich průsečík L tedy náleží kružnici d .



Obrázek 2.1.6.1.-3. Bod L náleží kružnici d

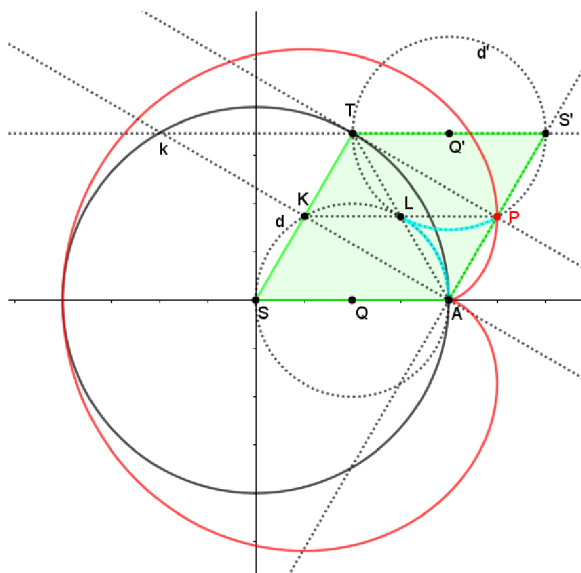
Stejně tak i kružnice d' sestrojená nad $S'T$ bude ze stejných důvodů procházet průsečíkem úhlopříček kosočtverce, tedy bodem L , který se stává bodem dotyku

kružnic d a d' . Dále Bod P je vrcholem pravoúhlého trojúhelníku $S'TP$. Náleží tedy kružnici d' , která je kružnicí Thaletovou.



Obrázek 2.1.6.1.- 4. Thaletova kružnice d'

Nyní vím, že bod P je bodem kružnice d' . Když povedu bodem A přímkou rovnoběžnou s přímkou PT , vznikne mi obdélník $APTK$, bod L je průsečíkem úhlopříček tohoto obdélníku, z toho důvodu musí být trojúhelník APL rovnoramenný, a proto jsou oblouky AL a PL shodné. Dále pak již viz předchozí kapitola zabývající se parametrickými rovnicemi kardioidy.



Obrázek 2.1.6.1. – 5. Shodné oblouky AL a PL

Závěr:

Z výše uvedených důvodů bod P opisuje při kotálení kružnice kardioidu, je tedy bodem kardioidy.

2.1.6.2. Analytický důkaz

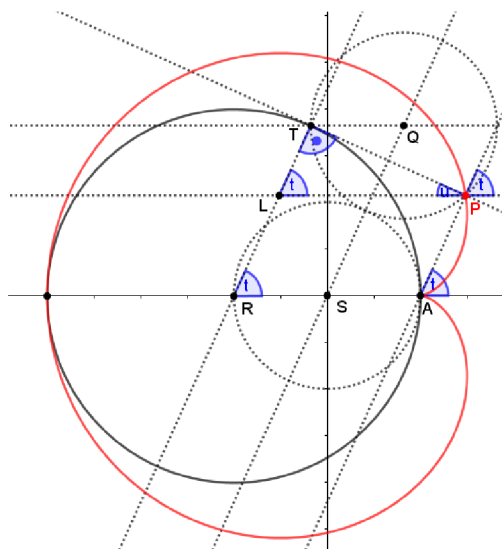
V předchozí kapitole jsem dokázala, že je hledanou křivkou kardioida geometricky. Nyní se totéž pokusím dokázat analyticky.

Zadání:

Přesvědčte se, že kardioida je množinou všech pat kolmic vedených daných bodem A k tečnám kružnice, která prochází bodem A .

Na obrázku níže je zobrazena kardioida získaná kotálením kružnice l po pevné kružnici k (obě mají poloměr a), přičemž střed kružnice k je v počátku soustavy souřadnic.

Úsečky RT a AP jsou kolmé k tečně t , takže jsou rovnoběžné. Úhly svírané těmito úsečkami s osou x jsou tedy shodné. Bodem P vedu rovnoběžku s osou x a průsečík této rovnoběžky s úsečkou RT pojmenuji L . Úhel, který svírá přímka AP s přímkou PL , je souhlasný s úhlem, který svírá AP s osou x . V pravoúhlém trojúhelníku LPT označím úhel při vrcholu P jako u .



Obrázek 2.1.6.2.-1. Obrázek k příkladu

Pro velikost úhlu u platí:

$$u = 180^\circ - t - 90^\circ$$

$$u = 90^\circ - t$$

Nyní se budu snažit získat velikost úsečky AP .

Velikost úsečky SQ je stejná jako RT a to $2a$, přičemž a je poloměr obou kružnic. Také velikost RA je $2a$, stejně tak velikost LP . Vyjdu z pravouhlého trojúhelníku PTL viz obrázek 2.1.6.2.-1.

$$|AP| = |RT| - |LT|$$

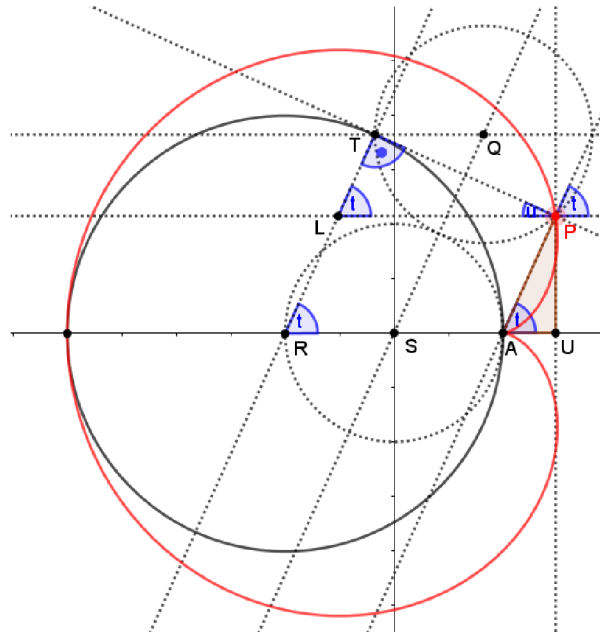
$$|LT| = 2a \sin u$$

$$|LT| = 2a \sin(90^\circ - t)$$

$$|AP| = 2a - 2a \sin(90^\circ - t)$$

$$|AP| = 2a(1 - \sin(90^\circ - t))$$

$$|AP| = 2a(1 - \cos t)$$



Obrázek 2.1.6.2.-2. K určení souřadnic bodu P

Souřadnici x vyjádřím pomocí úsečky SU a souřadnici y vyjádřím úsečkou PU .

$$\sin t = \frac{|PU|}{|AP|}$$

$$|PU| = \sin t |AP|$$

$$|PU| = \sin t (2a(1 - \cos t))$$

$$|PU| = 2a \sin t (1 - \cos t)$$

$$\cos t = \frac{|AU|}{|AP|}$$

$$|AU| = \cos t |AP|$$

$$|AU| = \cos t (2a(1 - \cos t))$$

$$|AU| = 2a \cos t (1 - \cos t)$$

$$|SU| = |SA| + |AU|$$

$$|SU| = a + 2a \cos t (1 - \cos t)$$

$$|SU| = a + a(2 \cos t - 2 \cos^2 t)$$

$$|SU| = a + a(2 \cos t - \cos^2 t - \cos^2 t)$$

$$|SU| = a + a(2 \cos t - \cos^2 t - (1 - \sin^2 t))$$

$$|SU| = a + a(2 \cos t - \cos^2 t - 1 + \sin^2 t)$$

$$|SU| = a(2 \cos t - (\cos^2 t - \sin^2 t))$$

$$|SU| = a(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$|PU| = 2a \sin t (1 - \cos t)$$

$$|PU| = a(2 \sin t - 2 \sin t \cos t)$$

$$|PU| = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

Souřadnice bodu $P[p; q]$ jsou

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}(2 \cos t - \cos 2t)$$

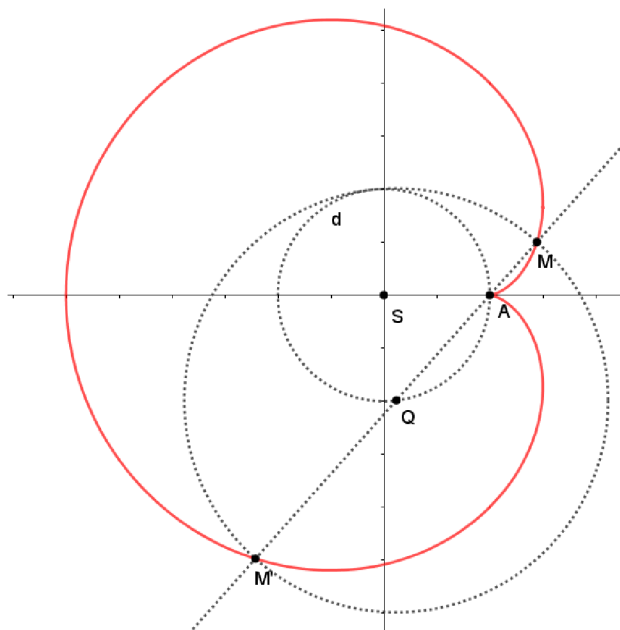
$$\mathbf{q} = \mathbf{a}(2 \sin t - \sin 2t)$$

Což jsou parametrické rovnice kardioidy, bod P je tedy bodem kardioidy.

2.1.7. Příklad 2. vedoucí ke kardioidě

Zadání:

Je dána kružnice d o poloměru r a na ní pevný bod A . Bodem A vedeme přímku l . Průsečík přímky l a kružnice d označíme Q ($Q \neq A$). Naneseme-li na každou přímku l od průsečíku Q úsečku QM délky $2r$, vytvoří body M spolu s bodem A kardioidu. [3]

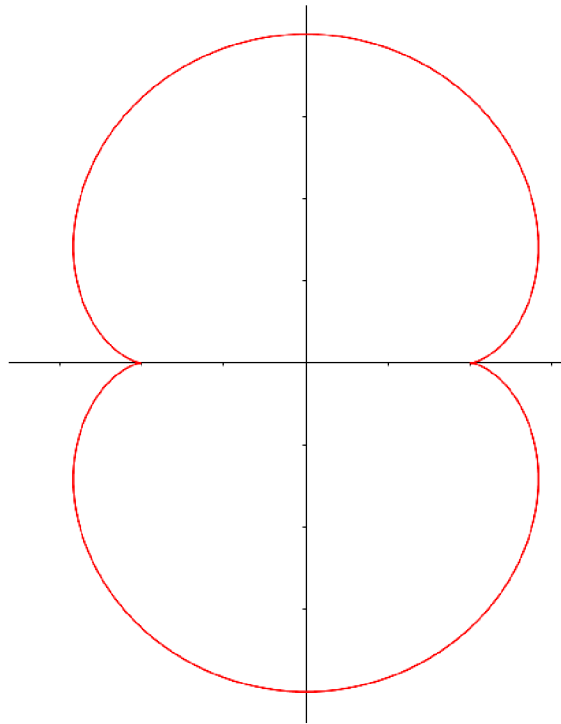


Obrázek 2.1.7.-1. Obrázek k zadání

Do počátku soustavy souřadnic umístím bod S , střed kružnice d s poloměrem r . Bez újmy na obecnosti umístím bod A do bodu $[r;0]$. Na kružnici d zvolím bod Q a sestrojím přímku QA s názvem l . Sestrojím kružnici m se středem Q a poloměrem $2r$. Přímka l protne tuto kružnici ve dvou bodech M a M' . Chci dokázat, že tyto body, jsou body kardioidy (viz Obrázek 2.1.7.-1.)

Nejprve si musím uvědomit, že úsečka QM má délku $2r$, proto je čtyřúhelník $MQSL$ kosodélník. Přímka procházející body Q, M je tedy rovnoběžná s přímkou procházející body L, S , proto je úhel, který svírá přímka procházející body Q a M stejný jako je úhel AST . Úhel QAS musí mít také stejnou velikost jako výše zmíněný úhel, jelikož se jedná o dvojici vrcholových úhlů. Trojúhelník QAS je rovnoramenný, proto má i úhel AQS stejnou velikost. Protilehlé úhly v kosodélníku mají stejnou velikost, tzn. úhel AQS je shodný s úhlem MLT . Je tedy úhel MLT stejný jako AST , což bylo dokázat.

2.2. Nefroida



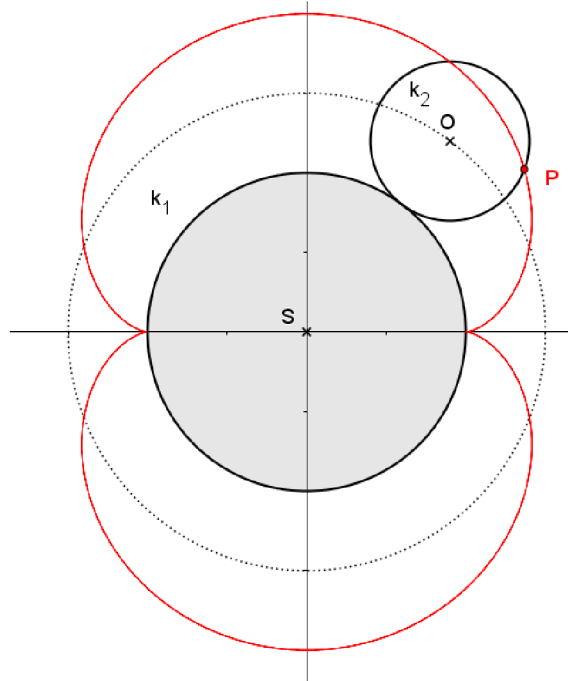
Obrázek 2.2.-1. Nefroida

2.2.1. Historie

Název nefroida byl poprvé použit *Proctorem* roku 1878. Nefroida si vysloužila svůj název díky svému tvaru podobnému ledvině. Tato křivka byla studována již v 17. století. Nejprve *Christiaanem Huygensem Ehrenfriedem*, dále také *Waltherem von Tschirnhausem* roku 1679 a také *Jacobem Bernoulliem* roku 1725. [7]

2.2.2. Základní informace

Nefroida je epicykloida, přičemž pevná kružnice má poloměr $r_1 = 2a$ a kotálející se kružnice $r_2 = a$, $a \in R +$



Obrázek 2.2.2.-1. Nefroida jako epicykloida

Rovnice nefroidy v kartézských souřadnicích:

$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = 108a^4y^2$$

Rovnice nefroidy v parametrickém vyjádření:

$$x = a(3 \cos t - \cos 3t)$$

$$y = a(3 \sin t - \sin 3t)$$

[7]

2.2.3. Parametrické rovnice nefroidy

Nyní z parametrických rovnic epicykloidy odvodím parametrické rovnice nefroidy

Parametrická rovnice epicykloidy

$$x = (r_1 + r_2) \cos t - r_2 \cos \left[t \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \right]$$

$$y = (r_1 + r_2) \sin t - r_2 \sin \left[t \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \right]$$

Pro nefroidu platí $r_1 = 2a$, $r_2 = a$

$$x = 3a \cos t - a \cos 3t$$

$$y = 3a \sin t - a \sin 3t$$

Parametrické rovnice nefroidy jsou

$$x = a(3 \cos t - \cos 3t)$$

$$y = a(3 \sin t - \sin 3t)$$

2.2.4. Rovnice nefroidy v kartézských souřadnicích

Vyjdu z parametrických rovnic nefroidy, které jsou

$$x = a(3 \cos t - \cos 3t)$$

$$y = a(3 \sin t - \sin 3t)$$

Budu postupovat tak, že se pokusím z parametrických rovnic nefroidy eliminovat parametr t .

Nejprve si upravím rovnici pro souřadnici y . Budu k tomu potřebovat vzorec pro $\sin 3t$.

$$\sin 3t = 3 \sin t - 4\sin^3 t$$

Nyní upravím rovnici pro y a výsledek si označím jako rovnici (1), protože se k ní budu později vracet.

$$y = a(3 \sin t - \sin 3t)$$

$$y = a(3 \sin t - 3 \sin t + 4\sin^3 t)$$

$$(1) \quad y = 4a\sin^3 t$$

Dále umocním rovnice pro x i pro y na druhou a sečtu je

$$x^2 + y^2 = a^2 [9\cos^2 t - 6 \cos t \cos 3t + \cos^2 3t + 9\sin^2 t - 6 \sin t \sin 3t + \sin^2 3t]$$

Vytknu a dále použiji tento vzorec

$$\cos^2 3t + \sin^2 3t = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2 [9(\cos^2 t + \sin^2 t) + 1 - 6(\cos t \cos 3t + \sin t \sin 3t)]$$

Nyní použiji součtový vzorec

$$x^2 + y^2 = a^2 [9 + 1 - 6 \cos(t - 3t)]$$

Protože je cosinus funkce sudá, mínus v argumentu nepíši

$$x^2 + y^2 = a^2 (10 - 6 \cos 2t)$$

$$x^2 + y^2 = 10a^2 - 6a^2(\cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$x^2 + y^2 = 10a^2 - 6a^2(1 - \sin^2 t - \sin^2 t)$$

$$x^2 + y^2 = 10a^2 - 6a^2(1 - 2\sin^2 t)$$

$$x^2+y^2 = 10a^2 - 6a^2 + 12a^2\sin^2t$$

$$x^2+y^2 = 4a^2 + 12a^2\sin^2t$$

$$x^2+y^2 - 4a^2 = 12a^2\sin^2t$$

Nyní umocním tuto rovnici na třetí

$$(x^2+y^2 - 4a^2)^3 = 12^3 a^6 \sin^6 t$$

$$(x^2+y^2 - 4a^2)^3 = 12^3 a^6 \sin^6 t$$

$$(x^2+y^2 - 4a^2)^3 = (108a^4)(16a^2\sin^6t)$$

Vrátím se k rovnici (1)

$$y = 4a\sin^3t$$

Umocním ji na druhou

$$y^2 = 16a^2\sin^6t$$

Nyní se vrátím zpět k této rovnici

$$(x^2+y^2 - 4a^2)^3 = (108a^4)(16a^2\sin^6t)$$

Dosadím za y^2 a výsledkem je rovnice nefroidy v kartézských souřadnicích

$$(x^2+y^2 - 4a^2)^3 = \mathbf{108a^4y^2}$$

2.2.5. Příklad vedoucí k nefroidě

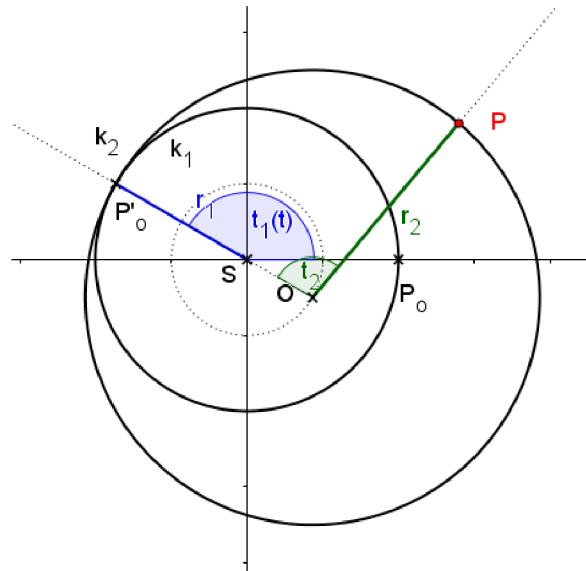
Zadání:

Přesvědčte se, že body $P_1P_2P_3$ na kružnici o poloměru $3R/2$, které tvoří rovnostranný trojúhelník, opisují tutéž křivku (nefroidu), jestliže se kružnice kotálí po vnějšku pevné kružnice o poloměru R . [3]

Tento příklad mě dovedl k nápadu, že zpracuji i kapitolu o pericykloidě, jelikož se v tomto případě nejedná o epicykloidu. Proto se nyní odkáži na následující kapitolu, konkrétně kapitolu 3.1., kde se tomuto příkladu věnuji.

3. Pericykloida

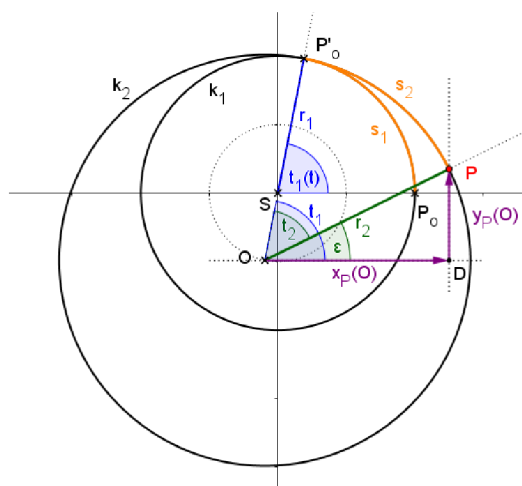
Nechť existují dvě kružnice, které mají vnitřní dotyk. Vnitřní z nich bude pevná, větší z nich se bude kotálet kolem menší. Křivka, kterou při tom opíše bod kotálející se kružnice, se nazývá pericykloida. [1, s. 11]



Obrázek 3.-1. Kružnice k_2 se kotálí kolem kružnice k_1 Bod P opisuje pericykloidu

Nyní odvodím parametrické rovnice pericykloidy.

Zaměřím se na trojúhelník POD na následujícím obrázku a zapíši souřadnice bodu P vůči bodu O .



Obrázek 3.-2. K odvození souřadnic bodu P vůči bodu O

$$x_p(O) = r_2 \cos \varepsilon = r_2 \cos(t_1 - t_2)$$

$$y_p(O) = r_2 \sin \varepsilon = r_2 \sin(t_1 - t_2)$$

S využitím vztahu mezi úhly přepíšete tyto rovnice

$$t_1 = \frac{s_1}{r_1}$$

$$t_2 = \frac{s_2}{r_2}$$

Protože

$$s_1 = s_2$$

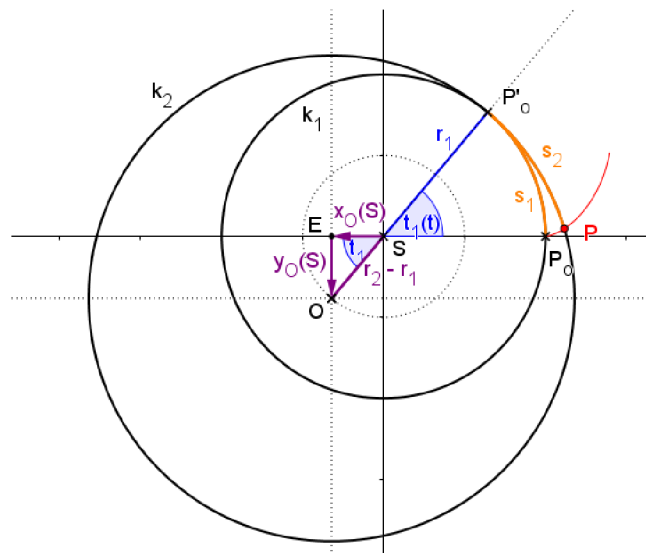
Pak

$$t_2 = \frac{r_1}{r_2} t_1$$

$$x_p(O) = r_2 \cos\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2} t_1\right)$$

$$y_p(O) = r_2 \sin\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2} t_1\right)$$

Nyní odvodím souřadnice bodu O vůči bodu S



Obrázek 3.-3. K odvození souřadnic bodu O vůči bodu S

Zaměřím se na pravoúhlý trojúhelník OSE a zapíšu parametrické souřadnice bodu O vůči bodu S .

$$x_O(S) = -(r_2 - r_1) \cos t_1$$

$$y_O(S) = -(r_2 - r_1) \sin t_1$$

Jelikož už mám souřadnice bodu P vůči bodu O , stejně tak jako mám souřadnice bodu O vůči bodu S , mohu psát sečtením vektorů hledanou polohu P vůči bodu S .

$$x_P(O) = r_2 \cos\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2} t_1\right)$$

$$y_P(O) = r_2 \sin\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2} t_1\right)$$

$$x_O(S) = -(r_2 - r_1) \cos t_1$$

$$y_O(S) = -(r_2 - r_1) \sin t_1$$

Takže

$$x_P(S) = -(r_2 - r_1) \cos t + r_2 \cos\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2} t\right)$$

$$y_P(S) = -(r_2 - r_1) \sin t + r_2 \sin\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2} t\right) \quad [\text{srov. 1, s.11}]$$

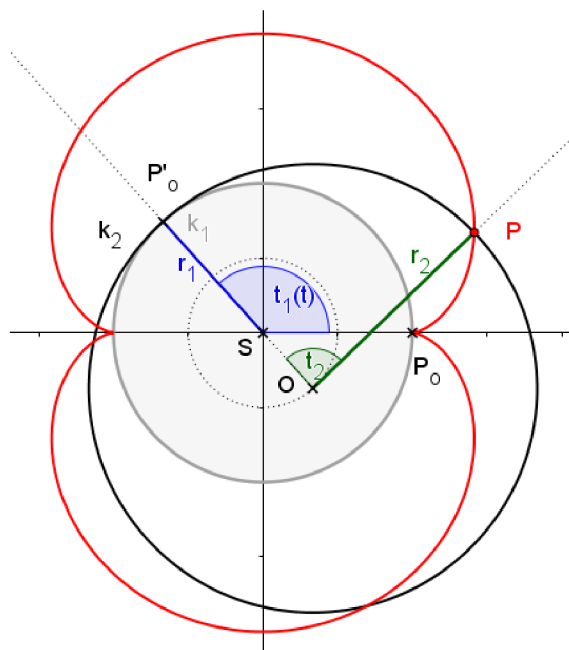
3.1. Příklad vedoucí k nefroidě

O tomto příkladu jsem si zmiňovala již v kapitole o nefroidě samotné, ale neřešila jsem ho, pouze jsem se odkazovala na toto místo, protože svým obsahem nezapadal do kapitoly o epicykloidě, nýbrž sem, do kapitoly o pericykloidě.

Nyní již k příkladu

Zadání:

Přesvědčte se, že body $P_1P_2P_3$ na kružnici o poloměru $3R/2$, které tvoří rovnostranný trojúhelník, opisují tutéž křivku (nefroidu), jestliže se kružnice kotálí po vnějšku pevné kružnice o poloměru R . [3]



Obrázek 3.1.-1.Nefroida jako pericykloida

Na obrázku je pevná kružnice k_1 podbarvena šedivě, kružnice k_2 se kolem ní kotálí podle předpokladů úlohy. Bod P opisuje pericykloidu. Jedná se o nefroidu a tato křivka je znázorněna červeně.

Z parametrických rovnic pericykloidy, které jsem odvodila v kapitole 3., vyplývá

$$x_P(S) = -(r_2 - r_1) \cos t + r_2 \cos\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2} t\right)$$

$$y_P(S) = -(r_2 - r_1) \sin t + r_2 \sin\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2} t\right)$$

Přepíši parametrické rovnice pericykloidy pro tuto situaci, to znamená pro situaci kdy $r_1 = 2a, r_2 = 3a$

$$x(t) = -a \cos t + 3a \cos\left(\frac{1}{3} t\right)$$

$$y(t) = -a \sin t + 3a \sin\left(\frac{1}{3} t\right)$$

Z rovnic vyplývá, že má-li být tímto způsobem vykreslená celá nefroida, musí se kružnice k_2 kolem kružnice k_1 kotálet třikrát, protože perioda funkce pro obě souřadnice je 6π . Nyní zavedu substituci $t = 3u$, takže se perioda funkce změní na 2π .

$$x(t) = -a \cos 3u + 3a \cos u$$

$$y(t) = -a \sin 3u + 3a \sin u$$

$$\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_2} t_1 = \frac{3a - 2a}{3a} t_1$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} t$$

Nyní na základě obrázku 3.1.-2. mohu psát:

$$p_{21} = -r_2 \cos \varphi$$

$$p_{21} = -r_2 \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{3} - \varepsilon \right)$$

$$p_{21} = -r_2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \varepsilon \right)$$

$$p_{21} = -3a \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{t}{3} \right)$$

$$p_{22} = r_2 \sin \varphi$$

$$p_{21} = r_2 \sin \left(\pi - \frac{2\pi}{3} - \varepsilon \right)$$

$$p_{21} = r_2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \varepsilon \right)$$

$$p_{21} = 3a \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{t}{3} \right)$$

Nyní zapíši souřadnice bodu O vůči bodu S (detailně na následujícím obrázku)

$$x_O(S) = -(r_2 - r_1) \cos t$$

$$y_O(S) = -(r_2 - r_1) \sin t$$

Takže

$$O(S) = [-a \cos t; -a \sin t]$$

A konečně mohu psát souřadnice bodu P_2 vůči bodu S

$$x_{P_2}(S) = -3a \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{t}{3} \right) - a \cos t$$

$$y_{P_2}(S) = 3a \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{t}{3} \right) - a \sin t$$

$$\sin(\pi - 3s) = \sin \pi \cos 3s - \cos \pi \sin 3s = \sin 3s$$

Takže

$$x_{P_2}(S) = -(3a \cos s - a \cos 3s)$$

$$y_{P_2}(S) = 3a \sin s - a \sin 3s$$

Označím-li

$$3a \cos s - a \cos 3s = m$$

$$3a \sin s - a \sin 3s = n$$

Pak pracuji s bodem $P_2 = [-m; n]$

Dále vím, že parametrické rovnice nefroidy jsou

$$x = 3a \cos t - a \cos 3t$$

$$y = 3a \sin t - a \sin 3t$$

Stejně jako předchozí rovnice je přepíši do tvaru

$$3a \cos t - a \cos 3t = m$$

$$3a \sin t - a \sin 3t = n$$

Tím pádem pro tento případ je

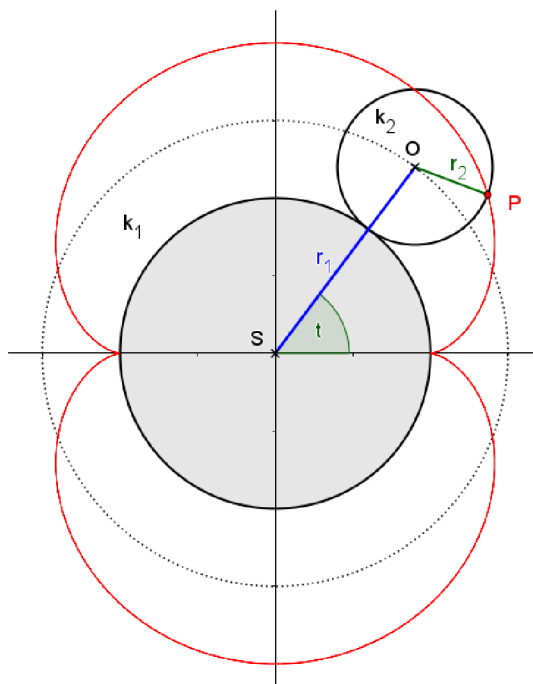
$$x = m$$

$$y = n$$

Nefroida je křivka, která je osově symetrická, a to jak podle osy x , tak podle osy y . Takže pokud je bodem nefroidy bod $[m; n]$, musí být bodem nefroidy i bod $P_2 = [-m; n]$

3.1.1. Geometrická interpretace substituce

O nefroidě jsem již psala v předchozí kapitole jako o epicykloidě. Na následujícím obrázku je tedy vyobrazena nefroida jako epicykloida.



Obrázek 3.2.-1. Nefroida jako epicykloida

Pro připomenutí:

Nefroidu získám jako epicykloidu, pokud nastavím poloměr pevné kružnice r_1 na $2a$ a poloměr kotálející se kružnice r_2 na a , kde a je kladné reálné číslo.

Vezmu již dříve odvozené rovnice epicykloidy

$$x(t) = (r_1 + r_2) \cos t_1 - r_2 \cos \left[t_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \right]$$

$$y(t) = (r_1 + r_2) \sin t_1 - r_2 \sin \left[t_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \right]$$

A dosadím za poloměry

$$x(t) = 3a \cos t - a \cos 3t$$

$$y(t) = 3a \sin t - a \sin 3t$$

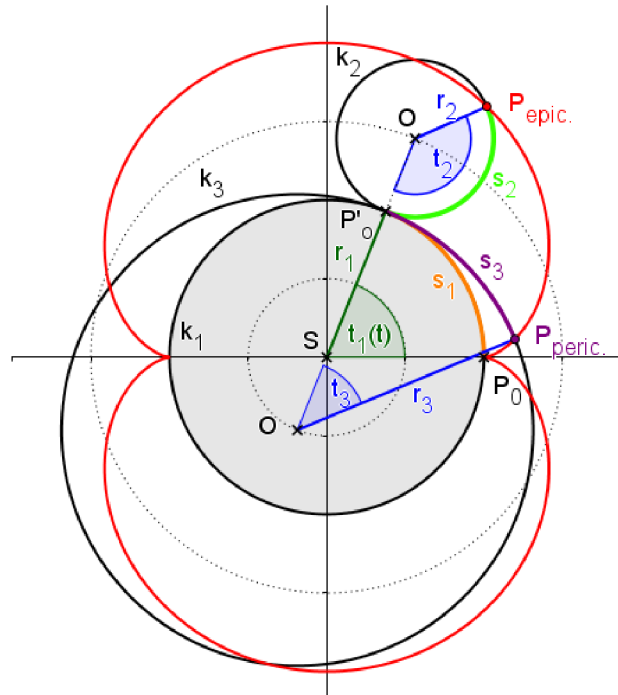
Tyto rovnice jsou identické s rovnicemi v předchozí kapitole, kde jsem zaváděla substituci.

$$x(t) = -a \cos 3u + 3a \cos u$$

$$y(t) = -a \sin 3u + 3a \sin u$$

Zajímalo by mne, jak tato substituce parametrů ovlivní vykreslení nefroidy

Narýsuji do jednoho obrázku pericykloidu a epicykloidu současně



Obrázek 3.2.-2. Nefroida jako epicykloida i pericykloida v jedné konstrukci

Zajímavé je, že oba body (bod P epicykloidy i bod P pericykloidy) opisují stejnou nefroidu, ale každý jinak rychle.

Kružnicové oblouky s_1, s_2, s_3 mají všechny stejnou délku, takže platí

$$s_1 = s_2 = s_3$$

$$r_1 t_1 = r_2 t_2 = r_3 t_3$$

Jelikož bych ráda ukázala, že bod P epicykloidy opisuje nefroidu rychleji než P pericykloidy, hledám vztah mezi t_3 a t_2

$$r_2 t_2 = r_3 t_3$$

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{r_2}{r_3}$$

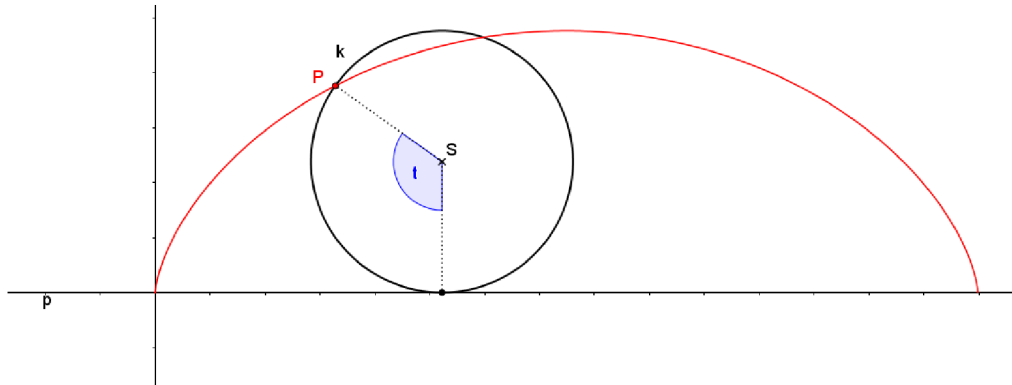
A protože $r_1 = 2a$, $r_2 = a$ a $r_3 = 3a$ mohu psát

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

Jinými slovy mohu říci, že pokud pracuji s bodem P pericykloidy s parametrem t , po substituci bude stejná křivka opisována, ale jako epicykloida se substitučním parametrem u . [srov. 1, s.11]

4. Cykloida

Cykloida je křivka, kterou opisuje bod B kružnice k , která se kotálí po přímce p .



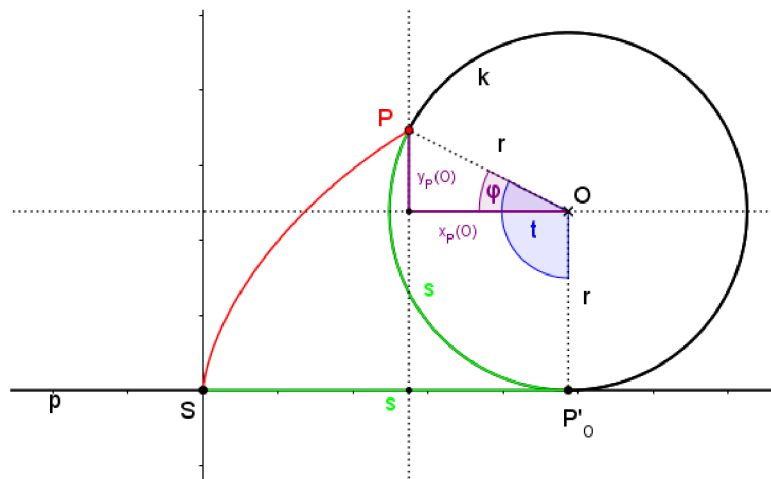
Obrázek 4.-1. Cykloida

Perioda cykloidy je určena obvodem kotálejší se kružnice. Pokud má tato kružnice poloměr r , je perioda cykloidy $2\pi r$.

Příkladem cykloidy je brachystochrona, trajektorie mezi dvěma body tíhového pole Země, po které se hmotný bod z jednoho tohoto bodu přesune do druhého za nejkratší možný čas. [8]

4.1. Odvození parametrických rovnic cykloidy

Při odvození parametrických rovnic cykloidy zapíšeme nejprve souřadnice bodu P cykloidy vůči středu kotálejší se kružnice O .



Obrázek 4.1.-1. Souřadnice bodu P vůči bodu O

$$x_p(O) = -r \cos \varphi$$

$$y_p(O) = r \sin \varphi$$

Přičemž

$$\varphi = t - \frac{\pi}{2}$$

Mohu přepsat rovnice pomocí součtových vzorců

$$x_p(O) = -r \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y_p(O) = r \sin \left(t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x_p(O) = -r \left(\cos t \cos \frac{\pi}{2} + \sin t \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

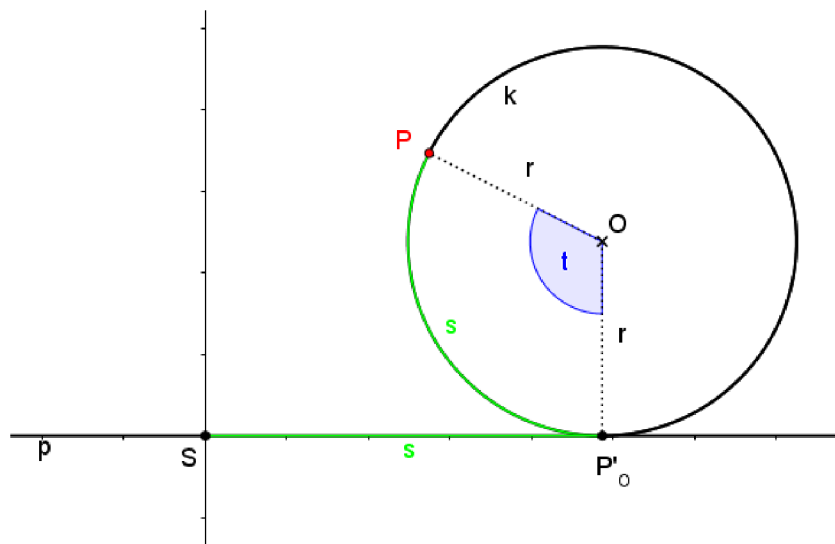
$$y_p(O) = r \left(\sin t \cos \frac{\pi}{2} - \cos t \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x_p(O) = -r \sin t$$

$$y_p(O) = -r \cos t$$

Dále pro oblouk s platí

$$s = rt$$



Obrázek 4.1.-2. Souřadnice bodu O vůči bodu S

Takže souřadnice bodu O vůči bodu S mohou vyjádřit takto

$$x_O(S) = rt$$

$$y_O(S) = r$$

A konečně mohou psát souřadnice bodu P vůči bodu S , což jsou výsledné parametrické rovnice cykloidy

$$x(t) = x_O(S) + x_P(O)$$

$$y(t) = y_O(S) + y_P(O)$$

$$x(t) = rt - r \sin t$$

$$y(t) = r - r \cos t$$

$$\mathbf{x}(t) = r(t - \sin t)$$

$$\mathbf{y}(t) = r(1 - \cos t) \quad [9]$$

4.2. Rovnice cykloidy v kartézských souřadnicích

Z parametrických rovnic odvodím rovnici cykloidy v kartézských souřadnicích.

Parametrické rovnice cykloidy

$$x(t) = r(t - \sin t)$$

$$y(t) = r(1 - \cos t)$$

$$\frac{x}{r} = t - \sin t$$

$$\frac{x}{r} - t = -\sin t$$

$$\frac{y}{r} = 1 - \cos t$$

$$\frac{y}{r} - 1 = -\cos t$$

Obě rovnice umocním na druhou a využitím vzorce $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ mohou psát

$$\left(\frac{x}{r} - t\right)^2 + \left(\frac{y}{r} - 1\right)^2 = 1$$

Vynásobím celou rovnici r^2

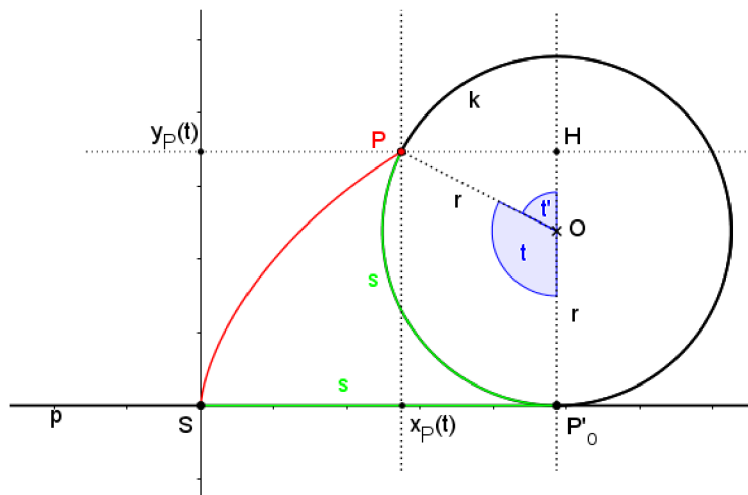
$$(x - rt)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

A upravím

$$(x - rt)^2 = -r^2 + r^2 + y^2 - 2yr$$

$$(x - rt)^2 = y(2r - y)$$

Figuruje zde i parametr t , který také musím vyjádřit v kartézských souřadnicích



Obrázek 4.1.-3. K odvození vztahu pro parametr t

Z pravoúhlého trojúhelníku POH

$$\cos t' = \frac{|OH|}{r}$$

$$\cos t' = \frac{y - r}{r}$$

Také platí

$$t' = \pi - t$$

Takže

$$\cos t' = \cos(\pi - t)$$

Pomocí součtového vzorce

$$\cos t' = \cos \pi \cos t + \sin \pi \sin t$$

$$\cos t' = -\cos t$$

Takže mohu psát

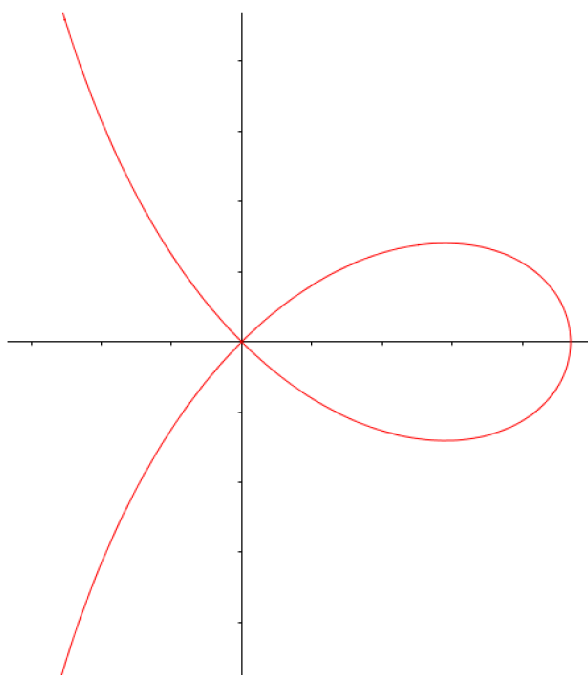
$$\cos t = \frac{r - y}{r}$$

$$t = \arccos \frac{r - y}{r}$$

Výsledné vyjádření cykloidy v kartézském systému tedy je

$$\left(x - r \arccos \frac{r - y}{r}\right)^2 = y(2r - y)$$

5. Strofoida



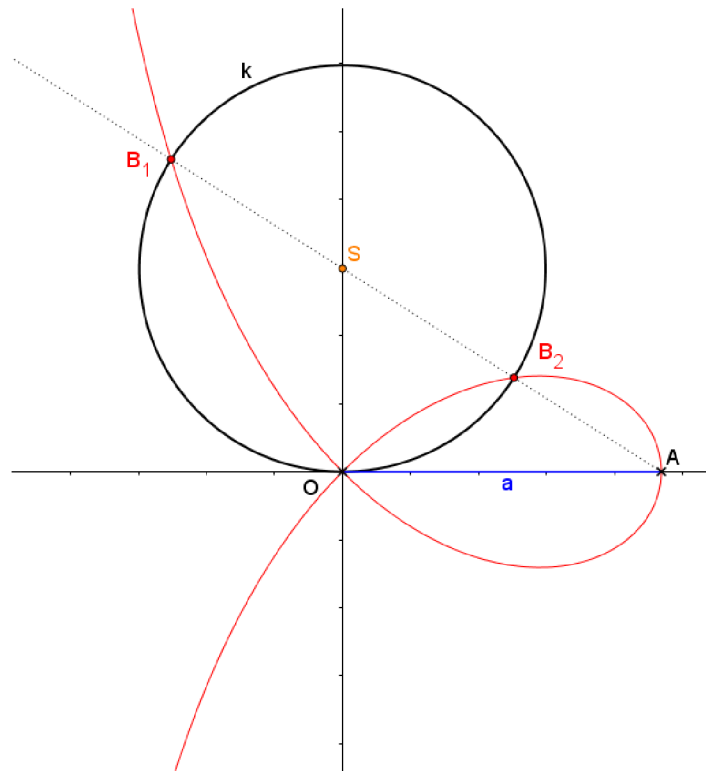
Obrázek 5.-1. Strofoida

5.1. Historie

Strofoidu poprvé objevil *Isaac Barrow*, učitel Isaaca Newtona, v roce 1669. Název strofoida pochází z řeckého slova „strophos“ („kroucený pás“) a navrhl jej Montucci v roce 1837. [10]

5.2. Základní informace

Uvažujme svazek kružnic jejichž společnou tečnou je osa x a společným bodem dotyku je počátek. Zvolíme-li na ose x bod $A = [a, 0]$ a vedeme-li jím průměry ke všem kružnicím svazku, potom krajní body těchto průměrů jsou body křivky, kterou nazýváme strofoida. [11]



Obrázek 5.2.-1. K definici

Rovnice strofoidy v kartézských souřadnicích:

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$

Rovnice strofoidy v parametrickém vyjádření:

$$x = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}$$

$$y = \frac{at(1 - t^2)}{1 + t^2}$$

Rovnice strofoidy v polárních souřadnicích:

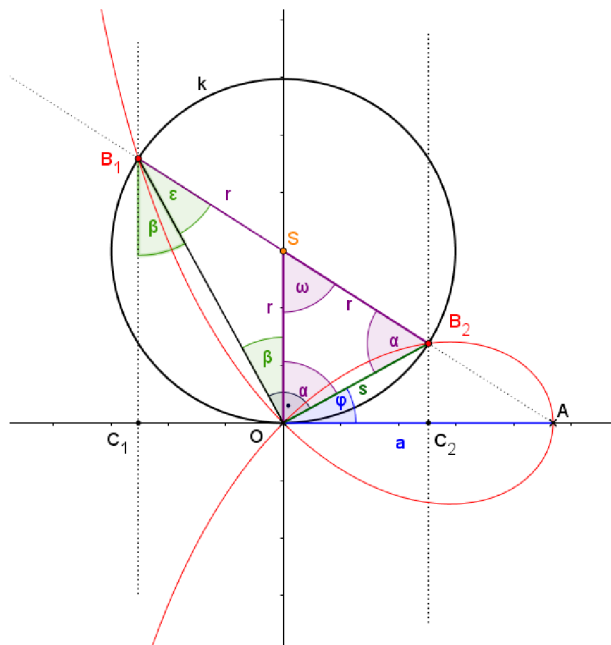
$$r = a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$$

[10]

Trojúhelník B_2B_1O je pravouhlý, protože kružnice k je jeho Thaletova kružnice. Platí tedy

$$\beta + \alpha = 90^\circ = \varphi + \alpha \Rightarrow \beta = \varphi$$

Trojúhelník SB_1O je rovnoramenný, proto platí $\varepsilon = \beta = \varphi$.



Obrázek 5.3.-3. Vlastnosti úhlů 2

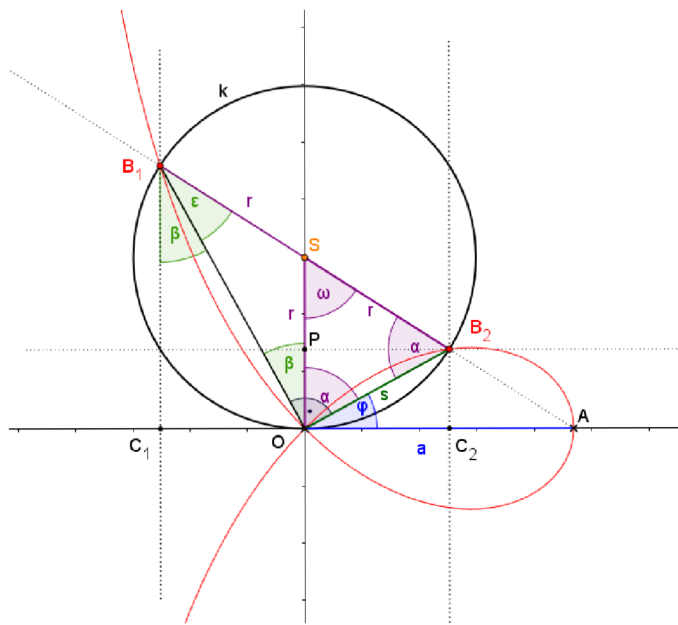
S ohledem na střídavé úhly platí rovnost $\sphericalangle SOB_1 = \sphericalangle C_1B_1O$, značeno β . Úhel ω je středový úhel k obvodovému úhlu ε , takže platí

$$\omega = 2\varepsilon = 2\beta = 2\varphi$$

Úkolem je najít vztah mezi úhlem φ a délkou průvodiče s .

Z trojúhelníku OC_2B_2 mohu vyčíst

$$(1) \quad \cos \varphi = \frac{|OC_2|}{s} \Rightarrow |OC_2| = s \cos \varphi$$



Obrázek 5.3.-4. K trojúhelníku SPB_2

Trojúhelník ΔSPB_2 je podobný s trojúhelníkem ΔSOA , takže

$$\frac{|PB_2|}{|SB_2|} = \frac{|OA|}{|SA|}$$

$$|PB_2| = |OC_2|$$

$$|SA| = \sqrt{a^2 + r^2}$$

$$(2) \quad \frac{|OC_2|}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

Ze vztahů (1) a (2) postupně dostanu

$$|OC_2| = s \cos \varphi$$

$$\frac{s \cos \varphi}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$(3) \quad s \cos \varphi = a \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

Z ΔSOA vyplývá, že

$$\cos \omega = \frac{|OS|}{|AS|} = \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$(4) \cos 2\varphi = \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

Ze vztahů (3) a (4) vyplývá, že

$$s \cos \varphi = a \cos 2\varphi$$

$$s = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} a$$

Poslední rovnice je rovnice strofoidy v polárních souřadnicích. [11]

5.4. Rovnice strofoidy v kartézských souřadnicích

Z posledního obrázku (Obrázek 5.3.-4.) vyjádřím souřadnice bodu B_2 v kartézských souřadnicích takto

$$\begin{aligned}x &= s \cos \varphi \\y &= s \sin \varphi \\s &= \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Upravím rovnici strofoidy v polárních souřadnicích

$$s = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} a = \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} a = \frac{\frac{x^2}{s^2} - \frac{y^2}{s^2}}{\frac{x}{s}} a = \frac{x^2 - y^2}{sx} a$$

$$s^2 x = (x^2 - y^2) a$$

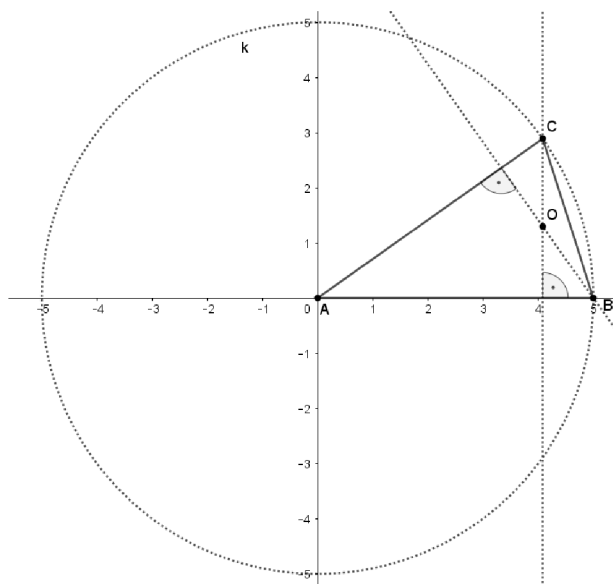
$$(x^2 + y^2) x = (x^2 - y^2) a$$

Poslední rovnice je rovnicí strofoidy v kartézských souřadnicích.

5.5. Příklad vedoucí ke strofoidě

Zadání:

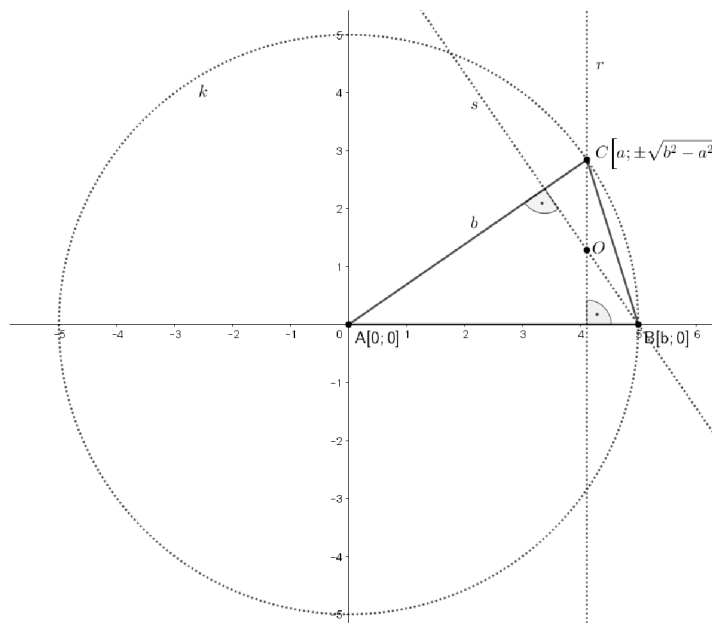
Nechť je dána kružnice k a na ní bod C . Kružnice má poloměr AB . Úkolem je určit množinu bodů, po které se pohybuje ortocentrum O trojúhelníku ABC . [3]



Obrázek 5.5.-1. K zadání

Řešení:

Řešení provádím analytickým způsobem. Na následujícím obrázku (Obrázek 5.5.-2.) je vidět, že bod A jsem umístila do počátku soustavy souřadné a bod B na osu x . Pracuji s výškou trojúhelníku procházející bodem B , pojmenovanou s a výškou procházející bodem C , pojmenovanou r . Výšky vyjádřím obecnou rovnicí



Obrázek 5.5.-2. Volba souřadnic

A [0;0]

B [b;0]

C: Jelikož bodem C pohybují po kružnici k , označím si souřadnici x bodu C jako proměnnou a . Změnou této proměnné a , bude bod C měnit polohu na kružnici k .

Z obecné rovnice kružnice

$$(x - m)^2 + (y - m)^2 = r^2$$

Vím, že rovnice kružnice k je

$$x^2 + y^2 = b^2$$

Odtud

$$y = \pm\sqrt{b^2 - x^2}$$

Bod C má souřadnice

$$[a; \pm\sqrt{b^2 - a^2}]$$

r : přímka r je kolmá na osu x , proto

$$r: x = a$$

Přímka s :

$$\vec{s}_b = \vec{n}_s$$

$$\vec{s}_b = C - A$$

$$\vec{s}_b = (a; \pm\sqrt{b^2 - a^2}) = \vec{n}_s$$

$$s: ax \pm \sqrt{b^2 - a^2}y + c = 0$$

Protože přímka s prochází bodem B

$$a \cdot b \pm \sqrt{b^2 - a^2} \cdot 0 + c = 0$$

$$c = -ab$$

Takže rovnice přímky s je

$$ax \pm \sqrt{b^2 - a^2}y - ab = 0$$

O : Bod O je ortocentrem trojúhelníku ABC a jeho souřadnice jsou určeny průsečíkem přímky r a přímky s .

$$r: x = a$$

$$s: ax \pm \sqrt{b^2 - a^2}y - ab = 0$$

Za x dosadím a

$$a^2 \pm \sqrt{b^2 - a^2}y - ab = 0$$

$$y = \frac{a \cdot (b - a)}{\pm\sqrt{b^2 - a^2}}$$

Bod O má souřadnice

$$O \left[a; \frac{a \cdot (b - a)}{\pm\sqrt{b^2 - a^2}} \right]$$

Nyní provedu záměnu $a \leftrightarrow x$

$$y = \frac{x \cdot (b - x)}{\pm\sqrt{b^2 - x^2}}$$

$$\pm\sqrt{b^2 - x^2} = \frac{x \cdot (b - x)}{y}$$

Jak se bod C pohybuje po kružnici (v jednotlivých kvadrantech) mají výrazy na levé i pravé straně stejné znaménko, takže mohu umocnit

$$b^2 - x^2 = \frac{x^2(b - x)^2}{y^2}$$

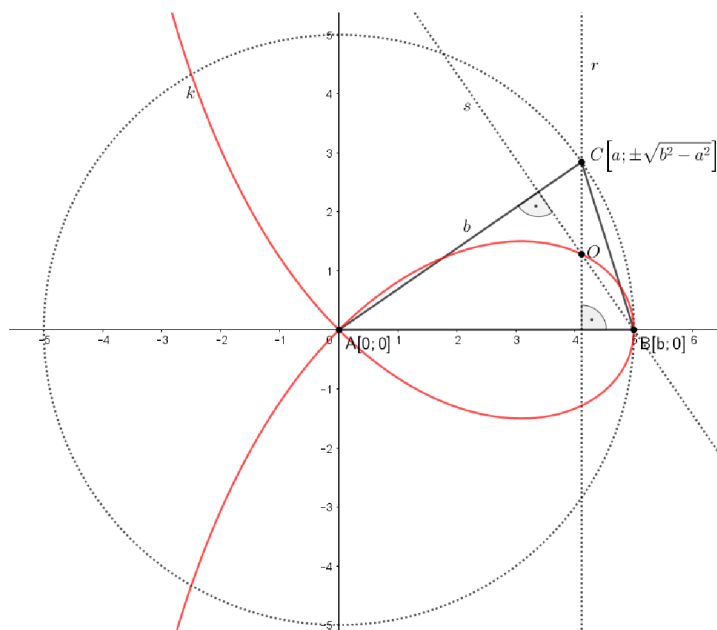
Rovnici vydělím $(b - x)$

$$(b + x)y^2 = x^2(b - x)$$

$$b(y^2 - x^2) = -x^3 - xy^2$$

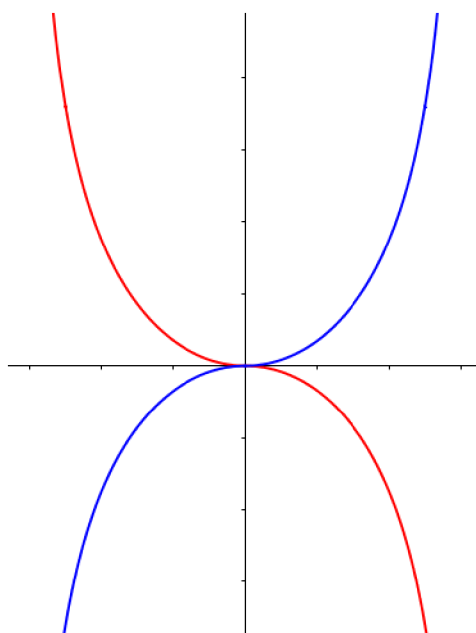
$$b(y^2 - x^2) = -x(x^2 + y^2)$$

Výsledná rovnice je rovnicí strofoidy, tudíž dráha, po které se pohybuje bod O je strofoida.



Obrázek 5.5.-3. Kontrola v programu GeoGebra

6. Kappa křivka



Obrázek 6.-1- křivka kappa

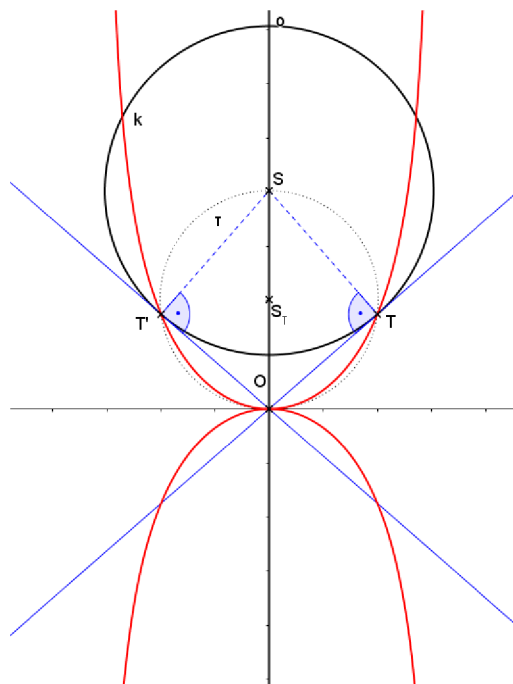
6.1. Historie

Jako první se křivkou kappa zabýval matematik *Gérard van Gutschoven* v roce 1662, proto je též nazývána *Gutschovenova* křivka. Dále se touto křivkou zabýval *Barrow* v roce 1672 a *Sluse* v roce 1862. Svůj název Kappa si křivka vysloužila svým vzhledem připomínající řecké písmeno κ (kappa). [12]

6.2. Základní informace

Kappa je geometrické místo bodů dotyku tečen, sestrojených z bodu O ke kružnici, jejíž střed se pohybuje po přímce, která prochází bodem O . [12]

Výše zmiňované geometrické místo je vyobrazeno na obrázku.



Obrázek 6.2.-1. Geometrické místo bodů kappa

Rovnice křivky kappa v kartézských souřadnicích:

$$x^2(x^2 + y^2) = y^2 a^2$$

Rovnice křivky kappa v parametrickém vyjádření:

$$x = a \sin t$$

$$y = a \sin t \operatorname{tg} t$$

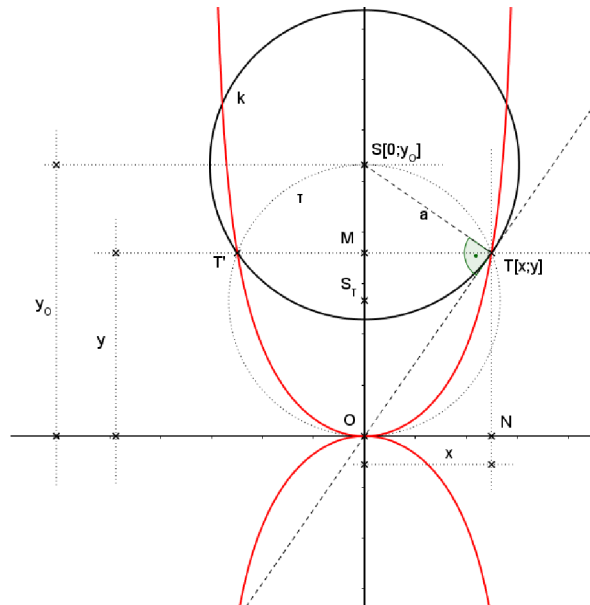
Rovnice křivky kappa v polárních souřadnicích:

$$r = a |\operatorname{tg} \varphi|$$

[12]

6.3. Rovnice křivky kappa v kartézských souřadnicích

V této části kapitoly odvodím implicitní rovnici křivky kappa.



Obrázek 6.3.-1. K odvození implicitní rovnice

Souřadnice bodu S jsou $[0, y_0]$ kde y_0 je vzdálenost bodu O od středu kružnice S .

Vyjádřím tuto vzdálenost y_0 z trojúhelníku OTS a OTM :

Z trojúhelníku OTS je jasné

$$y_0^2 = a^2 + |OT|^2$$

Z trojúhelníku OTM

$$|OT|^2 = x^2 + y^2$$

Z těchto rovnic vyplývá

$$y_0^2 = a^2 + x^2 + y^2$$

Dále z trojúhelníku TSM

$$|SM|^2 = a^2 - x^2$$

A také

$$|SM| = y_0 - y$$

Odtud

$$(y_0 - y)^2 = a^2 - x^2$$

$$y_0^2 - 2y_0y + y^2 = a^2 - x^2$$

Nyní výše uvedenou rovnicí upravím za pomoci této rovnice $y_0^2 = a^2 + x^2 + y^2$ dosazením za y_0^2

$$a^2 + x^2 + y^2 - 2y_0y + y^2 = a^2 - x^2$$

$$2y_0y = 2(x^2 + y^2)$$

Po vydělení dvěma a umocnění na druhou získám

$$y_0^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

Opět dosadím za y_0^2

$$(x^2 + y^2)^2 = y^2(a^2 + x^2 + y^2)$$

$$(x^2 + y^2)^2 - y^2(x^2 + y^2) = y^2 a^2$$

Nyní vytknu $(x^2 + y^2)$ na levé straně rovnice

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - y^2) = y^2 a^2$$

$$x^2(x^2 + y^2) = y^2 a^2$$

Toto je hledaná implicitní rovnice množiny kappa.

Tuto rovnici mohu dále upravit na vyjádření explicitní:

$$x^4 + x^2 y^2 = y^2 a^2$$

$$x^2 y^2 - y^2 a^2 = -x^4$$

$$y^2(a^2 - x^2) = x^4$$

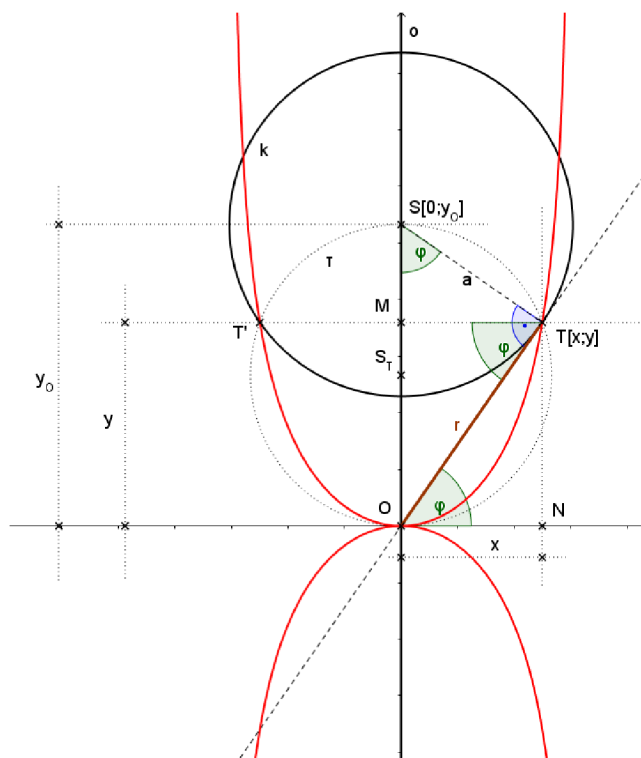
$$y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}$$

$$|y| = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} ; x \in (-a; a)$$

Množina kappa má dvě svislé asymptoty o rovnicích $x = a$, $x = -a$

6.5. Polární souřadnice křivky kappa

Vyjádřím bod T pomocí úhlu φ a délky r



Obrázek 6.5.-1. K odvození polárních souřadnic kappa křivky

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dosadím za y

$$r = \sqrt{x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$r = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right)}$$

$$r = \sqrt{x^2 \left(\frac{1 - \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right)}$$

$$r = \sqrt{\frac{x^2}{\cos^2 \varphi}}$$

$$r = \left| \frac{x}{\cos \varphi} \right|$$

Navíc z trojúhelníku MTS pro x platí:

$$x = a \sin \varphi$$

Proto

$$r = a \left| \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right|$$

$$\mathbf{r = a |\operatorname{tg} \varphi|}$$

Což je vyjádřením křivky κ v polárních souřadnicích.

6.6. Příklad vedoucí ke křivce κ

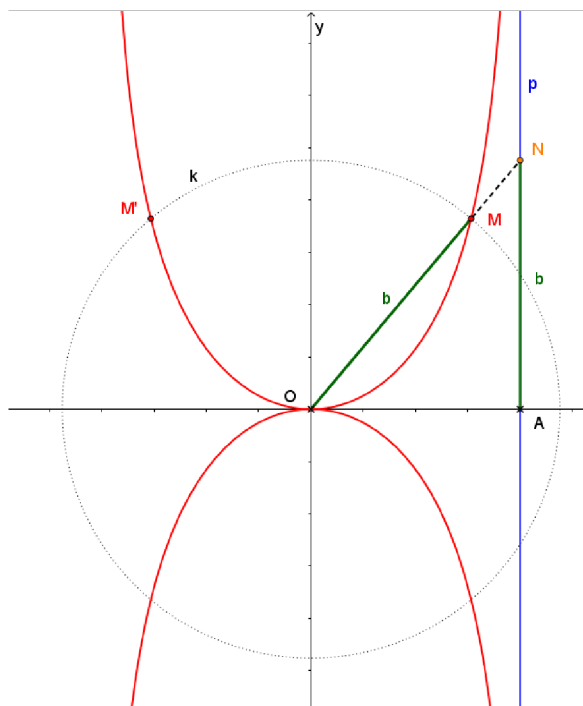
Zadání:

Uvažujme úsečku OA a k ní kolmou přímkou p , procházející bodem A . Zvolte bod N na přímce p a sestrojte na úsečce ON bod M ve stejné vzdálenosti od O jako je vzdálenost N od A . Vyšetřete množinu všech bodů M v závislosti na pohybu bodu N po přímce p . [12]

Řešení:

Nejprve v GeoGebre zobrazím celou situaci popsanou v zadání úlohy viz následující obrázek.

Bod M dané křivky sestrojím jako průsečík úsečky ON s kružnicí m se středem O a poloměrem $b = |AN|$.



Obrázek 6.6.-1. Rozbor úlohy v GeoGebře

K bodu M jsem sestrojila bod M' osově souměrný podle osy y , čímž jsem doplnila množinu bodů zmíněnou v zadání úlohy na křivku, která má tvar množiny kapa.

Pokusím se dokázat, že jde skutečně o množinu kapa.

Co chci dokázat?

Bodem M vedu kolmici n k úsečce ON a sestrojím bod P v průsečíku n s osou y . Vzhledem k definici křivky kapa má být bod M bodem dotyku kružnice m (se středem P a poloměrem u) s úsečkou ON .

Stačí tedy dokázat, že $u = a$

Trojúhelníky NOA a OPM jsou tudíž shodné podle věty (usu). Shodnou stranou je odvěsna $b = |NA| = |OM|$, což plyne přímo z definice zkoumané množiny bodů.

Ze shodnosti trojúhelníků plyne

$$|OA| = |MP| = u = a$$

Což bylo dokázat.

Závěr

Ve své diplomové práci jsem vycházela z výběru zajímavých příkladů, které mi byly doporučeny vedoucím diplomové práce, a které vedly k různým křivkám. Brzy jsem si všimla, že tyto křivky většinou vznikají při kotálení jedné kružnice po druhé kružnici. Proto jsem rozdělila svou práci do čtyř hlavních kapitol, plus dvě další křivky, které ale nejsou cykloidního typu.

V první kapitole jsem se věnovala hypocykloidě a dvěma dalším křivkám, konkrétně asteroidě a deltoиду, což jsou křivky hypocykloidního typu, kde se menší kružnice kotálí uvnitř větší kružnice. Odvodila jsem parametrické rovnice hypocykloidy a s jejich využitím následně i asteroidy a deltoidu. Také jsem v obou případech odvodila implicitní rovnici a dále jsem se věnovala příkladům, jak dané křivky ještě mohou vzniknout.

Ve druhé kapitole jsem se zabývala epicykloidou, u které se kružnice kotálí vně dané kružnice. Do této kapitoly jsem zařadila křivky kardioidu a nefroidu, které opět detailněji rozebírám a na základě odvozených parametrických rovnic epicykloidy odvozují i jejich konkrétní parametrické rovnice. Dále pak i konkrétní implicitní rovnice a opět řeším příklady, jak tyto křivky vznikají.

Třetí kapitola pojednává o pericykloidě. Pericykloida vznikne, když se větší kružnice kotálí kolem menší kružnice, která leží uvnitř větší. Odvodila jsem zde parametrické rovnice pericykloidy a dále jsem rozebírala příklad týkající se nefroidy. Také jsem si všimla zajímavého propojení mezi nefroidou jako pericykloidou a nefroidou jako epicykloidou.

Čtvrtá kapitola o cykloidě už je jen doplňkem k předchozím kapitolám, aby byly zkompletovány křivky cykloidního typu. V této kapitole jsem odvodila rovnice cykloidy v kartézském systému a parametrické rovnice cykloidy.

V posledních dvou kapitolách jsem se věnovala křivce kappa a strofoidě, které již nepatří mezi křivky cykloidního typu, proto jsou umístěny samostatně.

Myslím, že cíl své práce, za který jsem považovala uvedení stručného přehledu vybraných křivek, je naplněn, nehledě na to, že jsem si rozšířila obzory v té oblasti geometrie, která mě baví a zajímá.

Seznam zdrojů

- [1] FA ČVUT v Praze, Elektronická skripta DG, Cyklické křivky [online] [cit. 8.2.2022]
Dostupné z: https://www.fa.cvut.cz/studium/predmety/deskriptivni-geometrie-ii/dg_elskripta/krivky/cyklicke_krivky_1.pdf
- [2] FERRÉOL, Robert a MANDONNET, Jacques. Encyclopédie des formes mathématiques remarquables, Astroide [online]. [cit. 6.1.2022].
Dostupné z: <https://mathcurve.com/courbes2d/astroid/astroid.shtml>
- [3] PECH, Pavel, náměty z konzultace ze dne 13.5. 2020
- [4] FERRÉOL, Robert a MANDONNET, Jacques. Encyclopédie des formes mathématiques remarquables, Deltoide [online]. [cit. 6.1.2022].
Dostupné z: <https://mathcurve.com/courbes2d/deltoid/deltoid.shtml>
- [5] GOUWS, Xander, Deriving the Equations of an Epicycloid [online video]. [cit. 2.3.2022]. Dostupné z:
https://www.youtube.com/watch?v=xcIb91wleuM&ab_channel=XanderGouws
- [6] FERRÉOL, Robert a MANDONNET, Jacques. Encyclopédie des formes mathématiques remarquables, Cardioid [online]. [cit. 6.9.2021].
Dostupné z: <https://mathcurve.com/courbes2d/cardioid/cardioid.shtml>
- [7] FERRÉOL, Robert a MANDONNET, Jacques. Encyclopédie des formes mathématiques remarquables, Nephroid [online]. [cit. 6.9.2021].
Dostupné z: <https://mathcurve.com/courbes2d/nephroid/nephroid.shtml>
- [8] FERRÉOL, Robert a MANDONNET, Jacques. Encyclopédie des formes mathématiques remarquables, Nephroid [online]. [cit. 6.4.2022].
Dostupné z: <https://mathcurve.com/courbes2d/cycloid/cycloid.shtml>
- [9] HODGES, Tim, Parametric equations of the cycloid [online video]. [cit. 11.4.2022].
Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=wUDQFRZyE9Y>
- [10] FERRÉOL, Robert a MANDONNET, Jacques. Encyclopédie des formes mathématiques remarquables, Strophoid [online]. [cit. 9.7.2021].
Dostupné z: <https://mathcurve.com/courbes2d/strophoid/strophoid.shtml>
- [11] HAŠEK, Roman, Strofoida [online]. [cit. 9.4.2022].
Dostupné z: <http://home.pf.jcu.cz/~hasek/VTM/Strofoida.pdf>

[12] FERRÉOL, Robert a MANDONNET, Jacques. Encyclopédie des formes mathématiques remarquables, Kappa curve [online]. [cit. 9.4.2022].

Dostupné z: <https://mathcurve.com/courbes2d/kappa/kappa.shtml>